

# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES  
Google Livres

**EΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.**

***EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.***

**LES OEUVRES D'EUCLIDE.**

*Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :*

CHEZ { L'AUTEUR, place Cambrai, n° 6;  
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17;  
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24;  
Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

LES OEUVRES

162606

# D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

PAR F. PEYRARD,

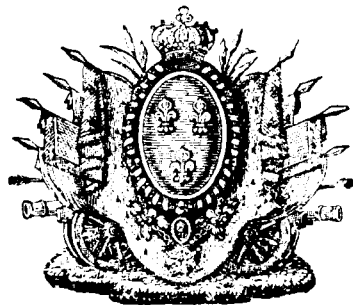
TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE.



DÉDIÉ AU ROI.

TOME PREMIER.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

~~~~~  
1814.





# A U R O I.

SIRE,

IL y a long-temps que mon Euclide en trois langues aurait dû paraître. Je me plaignais des circonstances qui en retardaient la publication. Combien, au contraire, je me serais félicité de ce retard, s'il m'avait été donné de prévoir que le monde entier, bouleversé jusque dans ses fondements, devait bientôt rentrer dans l'ordre accoutumé; que les tempêtes allaient se dissiper, la sérénité renaître dans le ciel, et le bonheur sur la terre! si surtout j'avais pu penser que VOTRE MAJESTÉ, reparaissant parmi nous comme un astre bienfaisant, daignerait permettre que mon ouvrage parût sous ses auspices augustes!

SIRE, cette faveur inattendue, qui met le comble au plus cher de mes vœux, sera gravée dans mon cœur jusqu'à mon dernier soupir.

Je suis avec respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ,

Le très-humble, très-obéissant  
et très-fidèle sujet,

F. PEYRARD.

---

# P R Æ F A T I O.

---

**E**UCLIDES vixit temporibus Ptolemæi-Lagi, circiter annum 272 ante æram vulgarem; Archimedes suis in libris sæpe de illo meminit. Euclides a Ptolemæo interrogatus an non esset methodus discendæ Geometriæ methodo suâ facilior: Non est regia, inquit Euclides, ad Geometriam via. Hæc tantum de Euclide novimus: quâ sit patriâ oriundus ignoratur.

Ante Euclidem permulti floruerunt geometræ. Primus omnium Græcorum, Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quæ fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit.

Plurima opera Euclides conscripserat; ex quibus tredecim libri Elementorum et Data tantum supersunt.

Librorum omnium qui de scientiarum elementis agunt liber perfectissimus semper habita sunt Euclidis Elementa, quæ in omnes omnino linguas fuerunt conversa.

De Elementis Euclidis sic Cardanus: *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Ait Pemberton se non semel Newtonem audivisse mœrentem quod sese Cartesii aliorumque algebristarum operibus totum dedisset, antequam studuisset Euclidis Elementis, et illa fuisset meditatus.

D. *Lagrange* quem extinctum luget et diu lugebit Europa, mihi dicitabat Geometriam esse linguam mortuam; et qui in Euclidis Elementis

---

# PRÉFACE.

---

**E**UCLIDE vivait du temps de Ptolémée-Lagus, vers l'an 272 avant l'ère vulgaire ; Archimède l'a cité dans plusieurs de ses livres. Ptolémée ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de manière plus facile que la sienne pour apprendre la Géométrie, Euclide répondit qu'il n'y avait point de chemin royal pour arriver à cette science. C'est tout ce que nous savons d'Euclide : on ignore même quelle fut sa patrie.

Beaucoup de géomètres avaient paru avant Euclide. Le premier des Grecs, Euclide rassembla leurs ouvrages, les mit dans un ordre convenable, et donna des démonstrations inattaquables de ce qui n'avait pas été démontré d'une manière rigoureuse.

Euclide avait composé un grand nombre d'ouvrages. Les treize livres des *Éléments* et les *Données* sont les seuls qui soient parvenus jusqu'à nous.

Les *Éléments* d'Euclide ont toujours été regardés comme le plus parfait de tous les livres élémentaires ; ils ont été traduits et commentés dans toutes les langues.

Cardan, en parlant des *Éléments* d'Euclide, s'exprime ainsi : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas ; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Pemberton nous apprend qu'il avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes et des autres algébristes, avant d'avoir étudié et médité les *Éléments* d'Euclide.

M. Lagrange, dont l'Europe déplore et déplorera long-temps la perte, me répétait souvent que la Géométrie était une langue morte ; que celui qui

Geometriæ non studebat, eum perinde facere ac si quis græcam latinamve linguam in recentioribus operibus græce et latine scriptis discere velit.

Theoremata subsequencia, quæ in quolibet Geometriæ tractatu adesse solent, in Elementis Euclidis desiderantur:

Circulorum circumferentiæ inter se sunt ut eorum diametri.

Quilibet circulus æqualis est triangulo rectangulo cujus unum ex lateribus angulum rectum continentibus æquale est semi-diametro, alterum autem æquale circumferentiæ.

Cujuslibet cylindri recti superficies convexa æqualis est rectangulo cujus altitudo æqualis est cylindri lateri, cujus autem basis æqualis est circumferentiæ basis cylindri, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter latus cylindri et diametrum basis cylindri.

Cujuslibet coni recti, exceptâ basi, superficies convexa æqualis est triangulo rectangulo cujus unum laterum angulum rectum continentium æquale est coni lateri, alterum vero æquale circumferentiæ basis coni, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter coni latus et semi-diametrum circuli qui coni est basis.

Superficies convexæ cylindrorum rectorum et similium, et etiam conorum rectorum et similium, sunt inter se ut diametri basium eorundem cylindrorum et conorum.

Cujuslibet sphæræ superficies æqualis est quatuor maximis ejusdem sphæræ circulis, vel superficiei convexæ cylindri circumscripti.

Sphærarum superficies inter se sunt ut quadrata earum diametrorum.

Quælibet sphæra æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

Nonnulli credidere hæc theoremata ex Euclidis Elementis evanuisse temporum inclementiâ; sed falso. Hæc enim theoremata quæ demonstrari non possunt nisi ope quatuor primorum postulorum in initio primi libri *de Sphæra et Cylindro* positorum, demonstrari non potuerunt ab Euclide, qui hæc Archimedis postulata non admiserat.

n'étudiait pas la Géométrie dans Euclide, faisait la même chose que celui qui voudrait apprendre le grec et le latin, en lisant les ouvrages modernes écrits dans ces deux langues.

Les théorèmes suivants, qui se trouvent ordinairement dans tout traité élémentaire de Géométrie, ne se trouvent pas dans les *Éléments* d'Euclide :

Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres.

Tout cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.

La surface convexe de tout cylindre droit est égale à un rectangle dont la hauteur est égale au côté du cylindre, et dont la base est égale à la circonférence de la base du cylindre, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

La surface de tout cône droit, la base exceptée, est égale à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au côté du cône, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cône, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, des cônes droits et semblables, sont entre elles comme les diamètres des bases de ces cylindres et de ces cônes.

La surface de toute sphère est égale aux quatre grands cercles de cette sphère, ou à la surface convexe du cylindre circonscrit.

Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres.

Toute sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Des personnes ont pensé que ces théorèmes avaient disparu des *Éléments* d'Euclide par l'injure des temps ; c'est une erreur. Ces théorèmes, qui ne peuvent se démontrer qu'à l'aide des quatre premières demandes placées au commencement du premier livre *de la Sphère et du Cylindre*, n'ont pu l'être par Euclide, qui n'avait point admis ces demandes d'Archimède.

Forsan dici potest solam dissimilitudinem quæ intercedit Euclidis inter et Archimedis methodum, consistere in rejectione vel in admissione postulatorum de quibus hic incidit sermo.

In præfatione meæ versionis librorum 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 Elementorum Euclidis, quæ anno 1804 edita fuit, suscepi munus edendi versiones operum completorum Euclidis, Archimedisque et Apollonii. Mea versio operum Archimedis vulgata est anno 1808; quo quidem tempore, vertendis Euclidis operibus ultimam manum admoveram. Sed antequam prelo subjiceretur, consulere volui codices manuscriptos bibliothecæ regiæ de plurimis locis qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione Oxoniæ, quâ usus fueram in convertendo Euclide. Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi fuerunt, et statim animadverti editionem Oxoniæ nullius horum manuscriptorum esse exemplar; hos omnes manuscriptos explere lacunas, et restituere locos corruptos in editione Basiliensi et in editione Oxoniæ quæ nihil aliud est quam ejus exemplar. Quin etiam animadverti hos omnes manuscriptos, manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme consentaneos; manuscriptum autem 190 explere lacunas, restituere locos corruptos qui ope aliorum manuscriptorum nec explebantur, nec restituebantur.

Manuscriptus 190 ad bibliothecam vaticanam pertinebat: is Romæ Lute-tiam a comite *de Peluse* fuit missus.

In manuscripto græco 2348, sub finem sæculi decimi sexti exarato, quique continet Euclidis Data cum quinque antiquissimis vaticanis manuscriptis græcis collata a Josepho Aurià, celebri geometrà, ne unam quidem reperias e pretiosissimis lectionibus manuscripti 190 variantibus; quod probare videtur hunc manuscriptum tunc temporis in bibliothecâ vaticanâ fuisse desideratum.

Manuscriptus 190 manuscriptorum exeunte nono sæculo exaratorum omnia præ se fert indicia; alii vero manuscripti pertinent ad sæcula multo recentiora.

Hoc manuscripto mihi commissio, statim in animum incidit edere græce, latine et gallice Elementa et Data, sola procul dubio quæ supersint Euclidis

On pourrait peut-être dire que la seule différence entre la méthode d'Euclide et celle d'Archimède, consiste dans le rejet ou l'admission des quatre demandes dont je viens de parler.

Dans la préface de ma traduction des livres 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 des Éléments d'Euclide, qui parut en 1804, je pris l'engagement de publier les traductions des œuvres complètes d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius. Ma traduction des œuvres d'Archimède parut en 1808. A cette époque j'avais mis la dernière main à la traduction des œuvres d'Euclide. Mais avant de la livrer à l'impression, je voulus consulter les manuscrits de la bibliothèque du Roi sur les passages qui me paraissaient tronqués ou altérés dans l'édition d'Oxford, d'après laquelle j'avais fait ma traduction. Ces manuscrits, qui sont au nombre de 23, me furent confiés, et je ne tardai pas à m'apercevoir que l'édition d'Oxford n'est la copie d'aucun de ces manuscrits; que tous ces manuscrits remplissent des lacunes, et rétablissent des passages altérés qui se trouvent dans l'édition de Bâle, et dans celle d'Oxford qui n'en est que la copie. Je remarquai aussi que tous ces manuscrits, le n° 190 seul excepté, sont à peu de chose près conformes les uns aux autres; que le n° 190 remplit des lacunes, et rétablit des passages altérés, qui ne peuvent pas l'être à l'aide des autres manuscrits.

Le manuscrit 190 appartenait à la bibliothèque du Vatican : il fut envoyé de Rome à Paris par le comte de Peluse.

Dans le manuscrit grec n° 2348, qui est de la fin du seizième siècle, et qui contient les Données d'Euclide collationnées par Joseph Auria, géomètre célèbre, avec les cinq plus anciens manuscrits grecs de la bibliothèque du Vatican, on ne trouve aucune des précieuses variantes du manuscrit 190; ce qui semble prouver que ce manuscrit n'était pas alors à la bibliothèque du Vatican.

Le manuscrit 190 porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle, tandis que les autres appartiennent à des siècles beaucoup plus rapprochés de nous.

Étant dépositaire de ce précieux manuscrit, je me déterminai, sans balancer, à donner une édition grecque, latine et française des Éléments et



opera. Quapropter, contuli manuscriptum 190 cum editione Oxoniæ, exaravique lectiones variantes in margine operis impressi.

His perfectis, ad variantes lectiones margini appositas sedulus attendi, et aliis manuscriptis accersitis, hanc aut illam lectionem variantem in editionem parisiensem admisi, vel ab eâ rejeci. Manuscriptum 190 potiore habui, quotiescumque nulla mihi fuit ratio cur hanc aut illam lectionem præferrem.

Textum græcum sic constitutum in latinum converti, et quæcunque ex variantibus quas admiseram lectionibus, mutari fuit opportunum, hæc in versione gallicâ mutata sunt.

Mea latina versio ad verbum textui græco congruit, nisi quid peculiare me coegerit ut secus facerem. Nonnulli in meâ versione occurrent forte hellenismi, aut saltem quædam locutiones a quibus lingua latina abhorere videtur. Illas quidem vitare potuissem; sed mea versio cum textu græco minus fuisset consentanea.

De meâ convertendi ratione, viros in græcâ latinâque linguâ versatissimos consului. D. *Delambre*, secretarius perpetuus classis scientiarum physicarum et mathematicarum Instituti Franciæ, necnon Universitatis quæstor, meam versionem dignatus est perpendere, et utilia mihi dare consilia. Hanc eâ de re ad me scripsit epistolam :

Parisiis, 20 februarii 1812.

Cum voluptate legimus sex prima folia tui Euclidis trilinguis. Tui commissarii desiderium enuntiaverant videndi editum Euclidis textum græcum expurgatum omnibus mendis quas castigavisti manuscriptorum ope, et locupletatum omnibus incrementis quæ tibi suppeditaverunt manuscripti : mox eorum omniumque doctorum explebis desiderium.

Multum probo quod constitutum habuisti reddere versionem latinam tam consentaneam quam utraque lingua ferre potest. Græcis erant duæ viæ indicandorum casuum obliquorum, terminatio scilicet et articulus; quando una earum duarum rationum eos deficiebat, quod sæpe in geometriâ contingit, articulus satis erat ad omnem tollendam dubitationem.

des Données d'Euclide, qui sont certainement les seuls ouvrages qui nous restent de ce géomètre à jamais célèbre. Pour cela, je comparai le manuscrit 190 avec l'édition d'Oxford, et j'écrivis les variantes en marge de l'ouvrage imprimé.

Ce travail terminé, j'examinai attentivement les variantes marginales, et à l'aide des autres manuscrits, j'adoptai ou je rejetai, pour l'édition de Paris, telle ou telle variante. Le manuscrit 190 a toujours eu la préférence, toutes les fois que je n'avais pas de motif pour préférer une leçon à une autre.

Le texte grec étant ainsi arrêté, je le traduisis en latin, et je fis à la traduction française les changements exigés par les variantes que j'avais adoptées.

Ma traduction latine correspond mot pour mot au texte grec, à moins que quelque règle particulière ne m'ait forcé de faire autrement. On trouvera quelquefois des hellénismes dans ma traduction, ou du moins certaines expressions qui semblent s'écarter un peu du génie de la langue latine. J'aurais pu les éviter; mais ma traduction aurait été moins fidèle.

J'avais soumis mon système de traduction à des personnes versées dans la langue grecque et dans la langue latine. M. Delambre, secrétaire perpétuel de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut de France, et trésorier de l'Université, eut la complaisance de l'examiner avec soin, et de m'aider de ses sages conseils. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire à ce sujet :

Paris, 20 février 1812.

MONSIEUR, j'ai lu avec plaisir les six premières feuilles de votre Euclide en trois langues. Vos commissaires avaient exprimé le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits vous ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils vous ont fournies : vous allez remplir leur vœu et celui de tous les savants.

J'approuve beaucoup le parti que vous avez pris de rendre la version latine aussi littérale que le permet le génie des deux langues. Les Grecs avaient deux moyens pour indiquer les cas obliques, la terminaison et l'article ; quand l'une de ces deux ressources leur manquait, comme il arrive souvent en géométrie, l'article suffisait pour ôter toute incertitude.

Tibi autem in linguâ latinâ hæc via non erat; tua versio nimis consentanea, sæpe obscura fuisset. Eorum qui te præcesserunt exemplo, usus es pronomine *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Non ignoras mihi eâ de re aliquid fuisse hæsitationis; locutionibus illis *ipsi* ΑΓ, *ipsi* ΑΒΓ, anteposuissem has locutiones *lineæ* ΑΓ, *angulo* ΑΒΓ, quod longiusculum est.

Sed quoniam omnes geometrarum græcorum interpretes jamdudum iisdem interpolationibus usi sunt, capessivisti recte viam brevissimam amovendorum impedimentorum quæ singulis momentis occurrunt, etc.

Ad significandum duos angulos eundem verticem et latus commune habentes super eâdem rectâ collocatos esse, græce dicitur : αἱ ἐπὲς τῆς γωνίας. Commandini, Torelli, etc. exemplo, has tres græcas voces converti in has duas voces latinas : *deinceps anguli*. Sunt qui me dehortati sunt ab utendo voce hâc *deinceps*, quia, inquebant, *deinceps* in linguâ latinâ rerum ordinem numquam significavit. Non illis morem gessi. Nam, cum in Thesaurο linguæ latinæ Roberti Stephani, edito Lipsiæ anno 1739, legissem : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT LIV. *His perfectis collocatisque alias deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent, canerent*. CIC., etc. pro certo habui Titum-Livium, Cæsarem et Cicero-nem, etc. vocem *deinceps* eodem sensu accepisse, quo ego acceperam.

Quod ad versionem gallicam attinet, ea cum textu græco tam consentanea est quam per eam linguam licet.

Sub finem cujusque tomi collocavi recensio-nem accuratissimam omnium variantium meæ editionis cum manuscripto 190, et cum editione Oxoniæ; ita ut harum lectionum variantium ope, possit, si quis velit, habere manuscripti 190 exemplar huic plane congruum.

Ad calcem tomi ultimi, qui hoc anno 1814 corrente edetur, adjiciuntur animadversiones in variantes lectiones insignissimas, et in quosdam locos Euclidis.

Summâ diligentia usus sum ut mea editio quam maxime emendata esset; specimina a me prælecta, lecta fuerunt deinde a D. *Jannet*, necnon a D. *Patris*, mei operis editore, rursusque a me relecta. In nullo specimine

Vous n'aviez pas cette ressource en latin; votre version trop littérale eût été souvent obscure. A l'exemple de ceux qui vous ont précédé, vous vous êtes permis l'emploi du pronom *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Vous savez que j'avais à cet égard quelque scrupule; au lieu de *ipsi* AR *ipsi* ABR, j'aurais mieux aimé *lineæ* AR, *angulo* ABR, ce qui est un peu plus long.

Mais tous les traducteurs des géomètres grecs vous ont déjà donné l'exemple de pareilles intercalations, et vous avez bien fait de choisir le moyen le plus court pour vous tirer d'un embarras qui renaît à chaque instant, etc.

Pour exprimer que deux angles, qui ont le même sommet et un côté commun, sont placés sur une même droite, le grec dit : *αἱ ἐφεξῆς γωνίαι*. A l'exemple de Commandin, de Torelli, etc. j'ai traduit ces trois mots grecs par *deinceps anguli*. Plusieurs personnes m'avaient invité à ne pas me servir du mot *deinceps*, parce que, disaient-elles, le mot *deinceps* n'a jamais en latin exprimé l'ordre des choses. Je ne me rendis pas à leur avis. Car, ayant lu dans le Trésor de la langue latine de Robert Étienne, édition de Leipsick, 1739 : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque alias deinceps rates jungebat*. CÉS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent canerent*. CIC., etc., il me parut démontré que Tite-Live, César, Cicéron, etc. donnaient au mot *deinceps* la même signification que moi.

Quant à la traduction française, elle est aussi littérale que le permet le génie de cette langue.

J'ai placé à la fin de chaque volume la liste exacte de toutes les variantes de mon édition avec le manuscrit 190 et l'édition d'Oxford. Par le moyen de ces variantes, on pourrait, si on le désirait, avoir une copie du manuscrit 190 qui lui serait parfaitement conforme.

Le dernier volume, qui paraîtra dans le courant de 1814, sera terminé par des observations sur les variantes les plus remarquables, et sur quelques passages d'Euclide.

J'ai fait tous mes efforts pour que mon édition fût de la plus grande correction; les épreuves, après avoir été lues par moi, ont été lues par M. Jannet, par M. Patris, éditeur de mon ouvrage, et relues encore par

prius subscripsi, *prelo subjiciatur*; quam illud mendis omnibus fuisset expurgatum. Ope erratorum ad finem ultimi tomi collocatorum, corrigi poterunt mendæ, si quas detexero in legendo perattente opere impresso.

D. *Nicolopoulo*, smyrnæus, vir eximiâ doctrinâ commendabilis et diligentissimus emendator, sponte suâ legit plurima specimina. D. *Patris*, qui linguam græcam, latinam et gallicam diu excoluit, summâ curâ et diligentia usus est ut mea editio prelis gallicis honori esset; in speciminibus legendis, versionem latinam et gallicam cum textu græco perattente comparabat, et margini notationes apponebat.

Ex lectionibus variantibus tomi primi, quædam præsertim sunt notandæ.

In omnibus editionibus græcis et latinis postulata 4, 5, 6 inter communes notiones collocata sunt.

Demonstratio propositionis septimæ libri primi duos habet casus, et tamen unus solum casus demonstratur in omnibus manuscriptis, nullo excepto, et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ. Secundus casus est cùm punctum  $\Delta$  incidit in triangulum  $AB\Gamma$ , vel punctum  $\Gamma$  in triangulum  $AB\Delta$ . Ut secundus casus demonstraretur, antea demonstrandum fuerat, lateribus æqualibus trianguli isocelis productis, angulos sub basi inter se æquales esse; quod quidem Euclides demonstravit in propositione quintâ, et hoc tantum propositionis septimæ causâ, quandoquidem, propositione septimâ exceptâ, hæc demonstratio nullum usum habet in reliquis Euclidis Elementis; ex hoc manifeste sequitur, inquiunt omnes Euclidis commentatores, textum græcum propositionis septimæ esse mutilatum. Omnes commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus manuscriptis et in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram; produxi rectas  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ , et demonstratio completa fuit, in textu græco nullâ voce mutâ.

Demonstratio propositionis 24 tertii libri tres casus habet. Posito enim  $A$  super  $\Gamma$ , et puncto  $B$  super  $\Delta$ , oportet demonstrare segmentum  $AEB$  non

moi. Je n'ai jamais donné de bon à tirer que je ne me fusse assuré auparavant que toutes les corrections avaient été faites. Par le moyen d'un *errata*, que je placerai à la fin du dernier volume, on pourra corriger les fautes qu'une lecture très-attentive que je ferai de l'ouvrage imprimé m'aura fait découvrir.

M. Nicolopoulo, de Smyrne, homme recommandable par ses rares talents et très-habile correcteur, a bien voulu lire un grand nombre de mes épreuves. M. Patris, qui a cultivé long-temps les langues grecque, latine et française, s'est donné des peines infinies pour que mon édition fît honneur aux presses françaises ; en lisant les épreuves, il avait soin de comparer soigneusement la version latine et la version française au texte grec, et de me faire des observations marginales.

Parmi les variantes de ce premier volume, il en est quelques-unes qui méritent surtout d'être remarquées.

Dans toutes les éditions grecques et latines, les demandes 4, 5, 6, sont placées au nombre des notions communes.

La démonstration de la proposition 7 du livre I<sup>er</sup> a deux cas, et cependant un seul cas est démontré dans tous les manuscrits sans exception, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Le second cas est celui où le point  $\Delta$  tombe dans le triangle  $AB\Gamma$ , ou bien le point  $\Gamma$  dans le triangle  $AB\Delta$ . La démonstration du second cas exige qu'il soit démontré auparavant que les côtés égaux d'un triangle isocèle étant prolongés, les angles au-dessous de la base sont égaux entre eux ; et c'est ce qu'a fait Euclide dans la proposition 5, et ce qu'il n'a fait que pour la proposition 7, puisque, hors de là, cette démonstration n'est plus nécessaire dans le reste des *Éléments* d'Euclide ; d'où il suit évidemment, disent tous les commentateurs, que le texte grec de la démonstration de la proposition 7 est tronqué. Tous les commentateurs avaient tort. La figure était incomplète dans tous les manuscrits et dans toutes les éditions. J'ai tracé une seconde figure ; j'ai prolongé les droites  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ , et la démonstration s'est trouvée complète, sans que j'eusse changé un seul mot au texte grec.

La démonstration de la proposition 24 du livre trois a trois cas. En effet, le point  $A$  étant sur le point  $\Gamma$ , et le point  $B$  sur le point  $\Delta$ , il faut démontrer

posse incidere vel intra segmentum  $AZ\Delta$ , vel extra, vel partim intra et partim extra; hi tres casus in manuscripto 190 et in editione parisiensi demonstrantur.

Sed in omnibus aliis manuscriptis, et in omnibus aliis editionibus græcis, tantum demonstratur segmentum  $AEB$  non incidere posse partim intra segmentum  $\Gamma Z\Delta$ , et partim extra. *Commandinus* dat aliorum casuum demonstrationem. At *Robert Simson* ex propositione 24 eximit partem quam propositioni 23 adjungit.

In propositione 26 libri sexti locus quidam minime intelligi poterat; lectio varians tertia omnem ex eâ obscuritatem dispulit.

*Gregorius*, de corollario propositionis 19 libri quinti sermonem habens, sic loquitur : *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius in locum hujus corollarii alterum subdidit. *Robert Simson* dicit : « Hoc corollarium manifeste ostendere librum quintum a geometriæ » ignaris corruptum fuisse, et hoc corollarium nullo modo pendere ex » propositione 19. » In hoc errat *Robert Simson*, et illum sæpissime errare in meis animadversionibus ostendam.

*Gregorii* versio intellectu est perdifficilis.

Suppressi tertiam vocem corollarii  $\epsilon\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta$ . Loco proportionis :  $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$ , scripsi hanc proportionem :  $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AE\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma Z$ ; loco tandem proportionis :  $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ AE\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma Z$ , scripsi hanc proportionem :  $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$ . Ope harum levium correctionum corollarium evasit inconcussum.

In meâ editione, phrasis  $\epsilon\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta\ \delta\epsilon\ \omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$ , sed ostensum est ut  $AB\ ad\ EB\ ita\ \Delta\Gamma\ ad\ Z\Delta\ (19.5)$ , manifeste locum habet harum duarum phrasium :  $\epsilon\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta\ \delta\epsilon\ \omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$ ,  $\epsilon\nu\acute{\alpha}\lambda\lambda\alpha\acute{\xi}\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \o\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$ , ostensum autem est ut  $AB\ ad\ \Gamma\Delta\ ita\ EB\ ad\ Z\Delta\ (19.5)$ ; alterne igitur ut  $AB\ ad\ EB\ ita\ \Gamma\Delta\ ad\ Z\Delta\ (16.5.)$

que le segment AEB ne peut tomber ni en dedans du segment AZΔ, ni en dehors, ni partie en dedans et partie en dehors. Ces trois cas sont démontrés dans le manuscrit 190 et dans l'édition de Paris.

Mais dans tous les autres manuscrits et dans toutes les autres éditions grecques, on démontre seulement que le segment AEB ne peut pas tomber partie en dedans du segment ΓΖΔ et partie en dehors. Commandin donne la démonstration des deux autres cas. Robert Simson retranche une partie de la proposition 24, qu'il ajoute à la proposition 23.

Dans la proposition 26 du livre six, il y avait un passage tout à fait inintelligible; la variante 3 en a fait disparaître l'obscurité.

Grégori, en parlant du corollaire de la proposition 19 du livre cinq, s'exprime ainsi : *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest: versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius a remplacé ce corollaire par un autre de sa façon. Robert Simson nous dit que ce corollaire prouve manifestement que le cinquième livre a été corrompu par des ignares en géométrie, et que ce corollaire ne dépend en aucune manière de la proposition 19. Robert Simson a tort ici comme dans une foule d'autres occasions, ainsi que je le ferai voir dans mes remarques.

La version de Grégori est inintelligible.

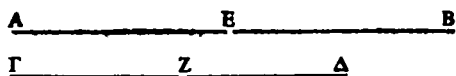
J'ai fait disparaître le troisième mot du corollaire *ἐδείχθη*. A la place de *ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ*, j'ai mis *ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ*; et à la place de *ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ*, j'ai écrit *ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ*. par le moyen de ces légères corrections, le corollaire se trouve rétabli dans toute sa pureté.

Dans mon édition, la phrase *ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ*, mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ΖΔ (19. 5), tient évidemment lien de *ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ*, ἐνᾷλλαξ ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, mais on a démontré que AB est à ΓΔ comme EB est à ΖΔ (19. 5); donc par permutation AB est à EB comme ΓΔ est à ΖΔ (16. 5).



Euclides hoc corollarium mutare potuisset in theorema, hoc modo :

Si magnitudines compositæ (\*) sint proportionales, proportionales erunt per conversionem.



Sint magnitudines compositæ AB, AE, ΓΔ, ΓZ, et sit ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓZ; dico per conversionem ut AB ad EB ita esse ΓΔ ad ZΔ.

Quoniam enim ut AB ad AE ita ΓΔ est ad ΓZ, alterne igitur ut AB ad ΓΔ ita est AE ad ΓZ ( 16. 5 ); ostensum autem est ut AB ad ΓΔ ita esse EB ad ZΔ ( 19. 5 ); alterne igitur ut AB ad EB ita est ΓΔ ad ZΔ, hoc est ut AB ad AB—AE ita est ΓΔ ad ΓΔ—ΓZ ( 16. 5 ; quod est per conversionem. Quod erat demonstrandum.

In textu græco manuscripti 190, nequaquam agitur de circulorum sectoribus in ultimâ sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quæ ad sectores attinent, et quæ adsunt in textu græco omnium aliorum manuscriptorum et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ. Hoc addimentum, quod in meam editionem admittere non debuissem, textui a Theone factum est. Sic loquitur Theon in suis in *Almagestum* commentariis, p. 50, l. 7, edit. Basilicæ, anno 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐπὶ ἴσων κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασιν δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου. » *Quod autem in æqualibus circulis sectores inter se sunt ut anguli in illis positi, ostensum fuit a nobis in editione Elementorum ad finem libri sexti.*

hoc Theonis addimentum, quod in subsequentibus nullum habet usum, Euclidis festinationi moram affert. In libris præsertim 10, 14, 15, necnon in Datis bene multas surperfluitates reperias quarum nullam in textu manuscripto 190. Ob id præcipue Euclidem mirati sunt quod ille ad propositum directe tendit, numquam de viâ declinans suâ demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam sunt necessaria. Sed hoc soli manuscripto 190 convenire potest; itaque non absurde conjecerim emendatum Euclidis

---

(\*) Quatuor magnitudines dicuntur compositæ, quando secunda est quædam fractio primæ, et quarta quædam fractio tertiæ.

Euclide aurait pu donner à ce corollaire la forme d'un théorème, en disant :

Si des grandeurs composées (\*) sont proportionnelles, elles sont proportionnelles par conversion.

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \frac{B}{\Delta}$$

Soient les grandeurs composées  $AB$ ,  $AE$ ,  $\Gamma A$ ,  $\Gamma Z$ , et que  $AB$  soit à  $AE$  comme  $\Gamma A$  est à  $\Gamma Z$ ; je dis que par conversion  $AB$  est à  $EB$  comme  $\Gamma A$  est à  $ZA$ .

Car, puisque  $AB$  est à  $AE$  comme  $\Gamma A$  est à  $\Gamma Z$ , par permutation  $AB$  est à  $\Gamma A$  comme  $AE$  est à  $\Gamma Z$  (16. 5); mais on a démontré que  $AB$  est à  $\Gamma A$  comme  $EB$  est à  $ZA$  (19. 5); donc, par permutation,  $AB$  est à  $EB$  comme  $\Gamma A$  est à  $ZA$ , c'est-à-dire que  $AB$  est à  $AB - AE$ , comme  $\Gamma A$  est à  $\Gamma A - \Gamma Z$  (16. 5); ce qui est par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

Dans le texte du manuscrit 190, il n'est nullement question de secteurs circulaires dans la dernière proposition du livre 6. Une main étrangère a interliné et écrit en marge de ce manuscrit ce qui se trouve de relatif aux secteurs circulaires dans le texte de tous les autres manuscrits, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Cette addition au texte, que je n'aurais pas dû conserver, est de Théon. Voici ce qu'il dit lui-même dans ses commentaires sur l'Almageste, pag. 50, l. 7, édition de Bâle, 1538: « ὅτι δὲ οἱ ἐπὶ ἰσων κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐν ὧν βεβήκασι δὲ δεῖκται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἑκτοῦ βιβλίου. » *J'ai démontré dans mon édition des Éléments, et à la fin du sixième livre, que dans les cercles égaux les secteurs sont entre eux comme les angles placés dans ces cercles.*

Cette addition de Théon, qui n'est d'aucun usage dans la suite, ne sert qu'à retarder la marche d'Euclide. On trouve dans les livres 10, 14, 15 surtout, ainsi que dans les Données, une foule de pareilles superfluités dont aucune n'est admise dans le texte du manuscrit 190. On a toujours admiré Euclide en ce qu'il marchait directement vers son but, sans jamais s'écarter de son chemin, pour démontrer ce qui ne lui était pas nécessaire pour aller en avant. Mais cela n'est vrai que pour le seul manuscrit 190; c'est pour-

---

(\*) Quatre grandeurs sont dites composées, lorsque la seconde est une fraction de la première, et que la quatrième est une fraction de la troisième.

textum in hoc manuscripto. contineri, aliosque manuscriptos nihil aliud esse quam editionis vulgatæ a Theone exemplaria. Non diffiteor tamen editione in meâ quasdam adesse superfluitates, quarum indicem ad calcem animadversionum subjiciam, hoc est, indicem institutam omnium quæ licet sublata subsequentibus nullo modo obesse possunt,

Corollarium propositionis 15 primi libri suppressi, quamvis eadem manu in margine manuscripti 190 exaratum sit, quia hoc corollarium non præ se fert signum quod in hoc manuscripto monet in margine exarata ad textum pertinere, ac insuper hoc corollarium tantum adest in textu unius ex manuscriptis, quia tandem hoc corollarium in subsequentibus nullum habet usum.

Definitio 5 sexti libri eadem manu in imâ paginâ exarata est cum signo quod monet eam ad textum pertinere; sed manifestum est erravisse transcriptorem. Eam suppressi, quia nullum in Euclidis Elementis usum habet. *Robert Simson* sex paginas in-4<sup>o</sup> scripsit probandi causâ illam a Geometriæ ignaro in textum fuisse admissam.

Non plura dicam de lectionibus meæ editionis variantibus; lectori se certiore facere licebit permulta evanuisse menda typographica, necnon et plurimos locos obscuros vel corruptos, vel detruncatos, præsertim in libris 10, 14, 15, et in Datis; Euclidisque textum permultis superfluitatibus me curante fuisse expurgatum.

Dixi Euclidis in omnes linguas conversa fuisse opera et commentariis illustrata; editiones et versiones notabilissimæ Euclidis hæc sunt:

Campanus primum in latinum ex arabico convertit Euclidem. Hæc versio Venetiis anno 1482 edita, comprehendit quindecim libros Elementorum.

Zambertus, venetus, ex græco convertit in latinum quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Hæc versio edita fuit Parisiis anno 1516, deinde Basilicæ anno 1537 et anno 1546. Euclidis Data adsunt tantum in duabus posterioribus editionibus,

quoil il me sera permis de penser que ce manuscrit contient le texte pur d'Euclide, et que les autres ne sont que des copies de l'édition de Théon. J'avoue cependant qu'il existe quelques superfluités dans le manuscrit 190, et par conséquent dans mon édition; j'en donnerai la liste à la suite de mes remarques, c'est-à-dire, que je donnerai la liste de tout ce qui peut se supprimer sans nuire à ce qui suit.

J'ai supprimé le corollaire de la proposition 25 du premier livre, quoiqu'il soit écrit de la même main dans la marge du manuscrit 190, parce que ce corollaire n'est pas précédé du signe qui, dans ce manuscrit, sert toujours à indiquer que ce qui est écrit en marge doit faire partie du texte; parce que ce corollaire ne se trouve que dans le texte d'un seul manuscrit; et enfin, parce qu'il n'est d'aucun usage dans la suite.

La définition 5 du sixième livre est écrite de la même main au bas de la page, et avec le signe qui indique qu'elle doit faire partie du texte; mais il est hors de doute que c'est une faute du copiste. Je l'ai supprimée, parce qu'elle n'est d'aucun usage dans les *Éléments* d'Euclide. Robert Simson a écrit six pages in-4° pour prouver qu'elle a été introduite dans le texte par un ignare en Géométrie.

J'en en dirai pas davantage sur les variantes de mon édition; le lecteur pourra s'assurer lui-même qu'elle a fait disparaître un très-grand nombre de fautes typographiques, beaucoup de passages obscurs ou altérés, ou tronqués, surtout dans les livres 10, 14, 15, et dans les *Données*, et que j'ai purgé le texte d'Euclide d'un très-grand nombre de superfluités.

J'ai dit que les œuvres d'Euclide ont été traduites et commentées dans toutes les langues; voici quelles sont les éditions et les traductions les plus remarquables.

La première traduction latine que nous ayons d'Euclide est celle de Campanus, qui parut à Venise en 1482. Cette traduction, qui a été faite d'après l'arabe, contient les quinze livres des *Éléments*.

Zamberti, vénitien, traduisit en latin, d'après le grec, les quinze livres des *Éléments* et les *Données* d'Euclide. Cette traduction, qui parut à Paris en 1516, reparut à Bâle en 1537, et ensuite en 1546. Les *Données* d'Euclide ne se trouvent que dans ces deux dernières éditions.

Textus græcus quindecim librorum Elementorum Euclidis cum commentario Theonis et Procli, primum editus fuit Basiliæ anno 1533, apud Herwagem, celeberrimum typographum. Simon Grynæus textûs græci fuit editor. Quindecim libri Elementorum editi fuerunt ex duobus manuscriptis qui Simoni Grynæo suppeditati fuerunt, alter Venetiis a Lazaro Bayfio, alter Parisiis a Joanne Ruellio. Commentarium Procli editum fuit ex manuscripto inemendato qui Oxoniâ Simoni Grynæo missus fuit a Joanne Claymando.

Candalla edidit, anno 1566, versionem latinam quindecim librorum Elementorum.

Commandinus, unus optimorum geometrarum suæ ætatis, et apprime versatus in linguâ græcâ et latinâ, convertit in latinum quindecim libros Elementorum ex textu græco editionis basiliensis. Hæc versio, omnium Euclidis versionum, textui græco erat maxime consentanea; illa edita fuit Pisauri anno 1572, et deinde anno 1619.

Versio latina quindecim librorum Elementorum quam Clavius edidit Romæ, anno 1574, est quam minime consentanea; Clavius sibi concessit facultatem commutandi in permultis locis textum Euclidis; sed nonnullo in pretio est commentarium quod suæ versioni adjunxit, quamvis nimio plus sit diffusum.

Textus græcus Datorum Euclidis, cum versione latinâ Hardiæi, editus primum fuit anno 1625.

*Henrion* edidit, anno 1615, versionem gallicam quindecim librorum Elementorum et Datorum Euclidis. Hæc versio a textu Euclidis differt singulis momentis.

*Le Mardelé* edidit, non multo post, alteram versionem gallicam quindecim librorum Elementorum. Hæc versio in permultis locis differt a textu Euclidis.

Gregorius edidit Oxoniæ, anno 1703, græce et latine, quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Gregorius usus fuit, in quindecim libris Elementorum, versione latinâ Commandini, et in Datis, versione latinâ Hardiæi: quas duas versiones Gregorius ipse recognoverat.

Le texte grec des quinze livres des *Éléments* d'Euclide avec le commentaire de Théon et de Proclus, parut pour la première fois à Bâle en 1533, chez Herwage, célèbre imprimeur. Simon Grynæus en fut l'éditeur. Les quinze livres des *Éléments* furent imprimés d'après deux manuscrits grecs envoyés à Simon Grynæus; l'un de Venise, par Lazare Bayfius, et l'autre de Paris, par Jean Ruellius. Le commentaire de Proclus fut imprimé, d'après un manuscrit très-défectueux envoyé d'Oxford à Simon Grynæus, par Jean Claymandus.

Candalle publia, en 1566, une traduction latine des quinze livres des *Éléments*.

Commandin, un des plus grands géomètres de son temps, et homme très-versé dans les langues latine et française, traduisit en latin les quinze livres des *Éléments* d'après le texte grec de l'édition de Bâle. C'était, de toutes les traductions, la plus conforme au texte grec d'Euclide; elle parut à Pesaro en 1572, et ensuite en 1619.

La traduction latine des quinze livres des *Éléments* que Clavius publia à Rome, en 1574, n'est rien moins que fidèle; Clavius s'est permis de faire de nombreux changements au texte d'Euclide; mais on estime le commentaire qui accompagne sa traduction, malgré sa très-grande prolixité.

Le texte grec des *Données* d'Euclide, accompagné d'une traduction latine de Hardi, parut pour la première fois en 1625.

Henrion publia, en 1615, une traduction française des quinze livres des *Éléments* et des *Données* d'Euclide. Cette traduction diffère à chaque instant du texte d'Euclide.

Le Mardelé publia, quelque temps après, une nouvelle traduction des quinze livres des *Éléments*. Cette traduction diffère dans une foule d'endroits du texte d'Euclide.

Grégori publia à Oxford, en 1703, en grec et en latin, les quinze livres des *Éléments* et les *Données* d'Euclide. Grégori fit usage, pour les quinze livres des *Éléments*, de la traduction latine de Commandin, et pour les *Données*, de celle de Hardi. Ces deux traductions avaient été revues par Grégori lui-même.

In hac editione, præter quindecim libros Elementorum, et Data, adsunt plura opera quæ procul dubio Euclidis non sunt; quod quidem Gregorius ipse non diffitetur in suâ præfatione.

*Robert Simson* edidit, anno 1756, versionem latinam librorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 Elementorum.

*Robert Simson*, in pluribus locis, commutavit textum Euclidis.

Dixi in bibliothecâ imperiali adesse manuscriptos græcos tres et viginti. Eorum manuscriptorum secundum vetustatis ordinem hic est index:

Nº 190. Is manuscriptus præ se fert omnia indicia manuscriptorum sub finem noni sæculi exaratorum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14 et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo contigit alio manuscripto. In meâ editione eundem ordinem sum secutus, ipsomet *D. Lagrange* suadente.

Nº 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium Elementorum usque ad propositionem octavam secundi libri, ineunte undecimo sæculo exaratus videtur. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur reliqua Elementa et Data, Româ Parisios fuit missus à comite *de Peluse*.

Nº 2466. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur tredecim libri Elementorum, duodecimo sæculo exaratus videtur.

Nº 2344. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo duodecimo exaratus videtur.

Nº 2345. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo tertio exaratus videtur.

Omnes ii manuscripti sunt membranacei; subsequentes sunt cartacei.

Nº 2373. Is manuscriptus, in quo deprehenditur Euclidis Geometria cum scholiis, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium usque ad propositionem 23 primi libri, et in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, et Data, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2762. Is codex, in quo tantum deprehenduntur octo priores libri Elementorum, sub finem sæculi decimi quinti exaratus videtur.

Nº 2346. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Dans cette édition, outre les quinze livres des *Éléments*, et les *Données*, on trouve plusieurs autres traités qui bien évidemment ne sont pas d'Euclide; Grégori lui-même en convient dans sa préface.

Robert Simson publia, en 1756, la traduction latine des livres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 des *Éléments* d'Euclide. C'est la traduction de Commandin, revue par Robert Simson.

Robert Simson a fait de nombreux changements au texte d'Euclide.

J'ai dit que la bibliothèque impériale renferme vingt-trois manuscrits grecs. En voici la liste par ordre d'ancienneté :

N° 190. Ce manuscrit porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle. Les *Données* sont placées immédiatement après le treizième livre des *Éléments*. Le 14<sup>e</sup> et le 15<sup>e</sup> livre viennent ensuite; ce qui n'existe dans aucun autre manuscrit de la bibliothèque impériale. J'ai suivi le même ordre dans mon édition, d'après le conseil de M. Lagrange.

N° 1038. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 8 du second livre, paraît être du commencement du onzième siècle. Il contient le reste des *Éléments*, et les *Données*; il appartenait à la bibliothèque du Vatican; et il fut envoyé de Rome à Paris, avec le manuscrit 190, par le comte de Peluse.

N° 2466. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du douzième siècle.

N° 2344. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du douzième siècle.

N° 2345. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du treizième siècle.

Tous ces manuscrits sont en parchemin; les suivants sont en papier.

N° 2373. Ce manuscrit, qui contient la *Géométrie* d'Euclide avec des scholies, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2342. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 23 du premier livre, et qui contient le reste des *Éléments*, et les *Données*, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2762. Ce manuscrit, qui ne contient que les huit premiers livres des *Éléments*, paraît être de la fin du quinzième siècle.

N° 2346. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du quinzième siècle.



Nº 2481. Is codex, in quo tantum deprehenduntur decem priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2531. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2343. Is codex, in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2547. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, et Data, ineunte sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2448. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2352. Is codex, in quo Data deprehenduntur, a J. Rossi fuit exaratus anno 1488.

Nº 2363. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2349. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2350. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 1981. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2467. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2472. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur; sub finem nonnulla desiderantur.

Nº 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2348. Is codex comprehendit Euclidis Data, collata cum quinque antiquissimis manuscriptis bibliothecæ vaticanæ, a Josepho Auria, neapolitano, celebri geometræ sæculi decimi sexti decedentis.

---

Anno 1814 corrente editurus sum versionem gallicam Diophanti operum. Lectiones variantes manuscriptorum bibliothecæ imperialis cum editione 1670, meam versionem subsequenter. Imprimis usus sum manuscripto 2380 græco et latino, cujus initio legere est; *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus Josepho Auria interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auria.*

Mea versio conicorum Apollonii edetur anno 1815 corrente.

N° 2481. Ce manuscrit, qui contient les dix premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2531. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2343. Ce manuscrit, qui contient les quinze livres des Éléments, paraît être du seizième siècle.

N° 2547. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, et les Données, paraît être du commencement du seizième siècle.

N° 2448. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2352. Ce manuscrit, qui contient les Données, fut écrit par J. Rossi en 1488.

N° 2363. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quinzième siècle.

N° 2349. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2350. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 1981. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2467. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2472. Ce manuscrit, qui contient les Données d'Euclide, paraît être du quatorzième siècle; il manque quelque chose à la fin.

N° 3366. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2348. Ce manuscrit contient les données d'Euclide comparées avec les cinq plus anciens manuscrits de la bibliothèque du Vatican, par Joseph Auria de Naples, célèbre géomètre de la fin du seizième siècle.

---

Je publierai dans le courant de l'année 1814 une traduction française des œuvres de Diophante. Les variantes des manuscrits de la bibliothèque du roi, avec l'édition de 1670, seront placées à la suite de ma traduction. J'ai fait principalement usage du manuscrit 2380 grec et latin. On lit en tête de ce manuscrit : *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Aurid interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auria.*

Ma traduction des coniques d'Apollonius paraîtra dans le courant de l'année 1825.



---

## INSTITUT DE FRANCE.

*Rapport de MM. DELAMBRE et PRONY, sur une édition grecque, latine et française des quinze livres des Éléments et du livre des Données d'Euclide, par M. Peyrard.*

LA classe avait déjà, sur le rapport de MM. Lagrange, Legendre et Delambre, donné son approbation à une traduction complète des OEuvres qui nous restent d'Euclide ; M. Peyrard, auteur de ce travail, avait comparé tous les manuscrits grecs qui sont à la bibliothèque impériale, au nombre de vingt-trois. Il était résulté de cette comparaison qu'aucun de ces manuscrits n'est entièrement conforme à l'édition d'Oxford ; que cette édition, qui passe pour la meilleure, et qui est sans contredit la plus belle, n'est pourtant, quant au texte grec, qu'une copie de l'édition de Bâle, dont elle a reproduit jusqu'aux fautes les plus palpables ; que la plupart de ces manuscrits offrent des variantes qui remplissent quelques lacunes, ou éclaircissent quelques passages de ces deux éditions principales ; qu'en général cependant tous ces manuscrits diffèrent peu les uns des autres, et diffèrent beaucoup d'un manuscrit portant le n° 190, qui provient de la bibliothèque du Vatican, d'où il fut envoyé en France par M. Monge.

Ce manuscrit porte tous les caractères qui peuvent en attester l'ancienneté, tous les autres paraissent plus modernes ; M. Peyrard le croit de la fin du neuvième siècle. Mais cette date n'est pas son principal mérite ; le texte y paraît plus pur, plus clair, moins prolixe, et par-là même plus intelligible. C'est à ce manuscrit que M. Peyrard s'est principalement attaché, il en avait porté toutes les variantes aux marges d'un exemplaire de l'édition d'Oxford ; cet exemplaire et le manuscrit qui avait servi à le corriger, furent remis aux commissaires nommés par la classe ; ils vérifièrent les notes marginales de M. Peyrard ; ils y remarquèrent des additions nécessaires, d'autres simplement utiles, des suppressions qui n'étaient pas moins avantageuses, d'autres changements sur lesquels les avis pouvaient être partagés, quelques-uns même qui ne semblaient pas devoir être adoptés, et leur conclusion fut que la classe pouvait donner son approbation au travail de M. Peyrard ; que s'il n'était pas permis d'espérer une édition du texte grec purgé de toutes les fautes que les manuscrits pouvaient corriger, et enrichi de toutes les additions qu'ils pouvaient fournir, édition qui ne pouvait manquer d'être dispendieuse et qui demanderait beaucoup de temps, il était au moins à souhaiter que M. Peyrard ajoutât à sa traduction la liste des variantes qu'il aurait adoptées ou simplement recueillies, afin que les géomètres pussent corriger les éditions anciennes en attendant l'édition plus correcte qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Ces conclusions adoptées par la classe inspirèrent un nouveau courage à M. Peyrard ; il entreprit l'édition grecque, latine et française, dont nous avons à rendre compte ; elle aura deux volumes in-4° ; le premier est achevé. Sur la demande de l'auteur, S. E. le Ministre de l'intérieur, par sa lettre du 20 novembre 1813, invite la classe à examiner si l'ouvrage est aussi exact que l'auteur a désiré le faire, si les leçons choisies sont en effet celles qui méritaient

*d'être adoptées de préférence, enfin si le livre remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées.*

La classe d'histoire et de littérature ancienne a été en même temps invitée à considérer la traduction sous le rapport du style et de l'exécution ; S. E. *prie les deux classes de vouloir bien, soit en particulier, soit en se réunissant, examiner le volume sous ces divers rapports.*

Deux commissions ont été nommées ; les deux rapporteurs choisis par elles ont eu plusieurs conférences ; ils se sont trouvés du même avis, et chacun d'eux s'attachera plus particulièrement aux objets qui sont de sa compétence, en observant la ligne de démarcation tracée par S. E. le Ministre de l'intérieur.

L'ouvrage est précédé d'une préface, où l'éditeur rend compte des recherches qu'il a faites, des secours qu'il s'est procurés, du système qu'il a suivi ; cette préface est en deux langues, nous n'en examinerons ici que les idées.

Ce qu'on sait sur la personne d'Euclide se réduit à bien peu de chose, mais son ouvrage jouit de la plus grande réputation. On convient assez généralement qu'Euclide n'a fait que rassembler et mettre en ordre les théorèmes trouvés par les géomètres qui étaient venus avant lui ; peut-être a-t-il augmenté le nombre de ces théorèmes, il se peut qu'il en ait perfectionné les démonstrations ; cependant quelques auteurs attribuent ces démonstrations à Théon, l'un des plus anciens et plus célèbres commentateurs des *Éléments*. Proclus, qui nous a laissé quatre livres de commentaires sur le premier livre d'Euclide, dans une longue liste de tous les grecs qui se sont distingués dans les mathématiques, en cite quatre qui avaient composé des éléments avant Euclide. Le premier est Hippocrate de Chios, célèbre encore aujourd'hui par ses *Lunules* ; le second est Léon, dont l'ouvrage était plus plein, plus utile que celui de son prédécesseur ; le troisième est Theudius de Magnésie, que Proclus loue pour l'ordre qu'il a mis dans la rédaction ; après Léon vient Hermotime de Colophon, qui, perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Thætète, mit aussi beaucoup du sien dans les éléments ; peu de temps après vint Euclide, qui, suivant le témoignage de Proclus, *rassembla les éléments, mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Thætète, et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. Euclide vivait sous le premier des Ptolémées, car Archimède le cite dans son premier livre ; il avait fait beaucoup d'autres ouvrages remarquables par leur admirable exactitude et pleins de théories savantes.* Proclus cite particulièrement son optique, sa catoptrique, ses éléments de musique, et enfin, son livre des diarèses, *διαρίσιον* ; mais ce qu'il admire surtout c'est le livre des éléments, tant pour l'ordre que pour le choix des théorèmes et des problèmes, qui méritent véritablement le nom d'*élémentaires* : il est à remarquer que Proclus ne dit rien des *données*, et qu'il n'a pas nommé Théon.

Ce passage que nous traduisons fidèlement, et dont Grégori dans sa préface avait seulement extrait quelques lignes, semble décisif ; aussi l'idée de ceux qui voulaient dépouiller presque entièrement Euclide en faveur de Théon, a-t-elle été vivement combattue par Butéon et Savilius ; Robert Simson en se rangeant à leur avis, le modifie d'une manière qui le rend encore plus favorable à Euclide. Par une espèce de superstition, excusable dans un traducteur, il a l'air de poser comme un axiome qu'il est impossible qu'Euclide se soit jamais trompé, ou qu'il ait eu la moindre distraction. Ainsi quand il est obligé de reconnaître qu'une définition n'est pas assez

juste, qu'une démonstration est incomplète ou peu rigoureuse, il en rejette assez durement la faute sur Théon ou quelque autre commentateur, qu'il accuse nettement d'ineptie ou au moins d'ignorance en mathématiques. Le nouveau traducteur, sans s'éloigner beaucoup de cette manière de voir de Simson, est au moins plus modéré dans les termes; et pour rejeter plusieurs choses qui véritablement paraissent peu dignes d'Euclide, il a, ce qui manquait à Simson, l'autorité d'un bon manuscrit, dans lequel les passages dignes de censure se trouvent omis ou corrigés.

Cette prévention en faveur de son auteur, et la supériorité du manuscrit du Vatican sur tous les autres, ont fait penser à M. Peyrard, que ce manuscrit pourrait bien être le véritable texte d'Euclide, tandis que tous les autres, et en particulier ceux qui ont servi à l'édition de Bâle ou d'Oxford, seraient les éditions données par Théon, ou par les commentateurs venus après lui.....

En avouant que nous n'avons aucun argument bien péremptoire pour rejeter la conjecture de M. Peyrard, nous dirons pourtant qu'elle ne nous paraît pas suffisamment établie.....

Nous n'attribuerons donc pas à Théon toutes les différences qui se trouvent entre les manuscrits plus modernes et le manuscrit du Vatican; nous ne dirons pas que ce manuscrit soit le texte véritable d'Euclide, car alors il faudrait attribuer à Euclide les mauvaises leçons que M. Peyrard a justement rejetées de son édition pour suivre ou les autres manuscrits ou les éditions de Bâle et d'Oxford. Nous ne dirons pas même que Théon soit décidément l'auteur de la définition condamnée par Simson; il est vrai que Théon la développe et l'explique dans son commentaire sur l'Ahnageste; mais il la rapporte sans pour cela s'en déclarer l'auteur, au lieu que dans un autre endroit il donne formellement comme de lui le théorème concernant les secteurs, qu'il dit avoir démontré dans son explication d'Euclide, car c'est ainsi que pour éviter l'équivoque nous traduisons le mot *ἐκτέθειται*, qu'on traduit communément par le mot *édition*.

Nous n'accuserons point Théon d'avoir supprimé des démonstrations rigoureuses, pour en substituer d'autres qui ne prouvent rien ou qui sont inintelligibles. Nous admettrons aisément que Théon a pu commettre quelques fautes par inattention, mais non qu'il ait été assez ignorant pour ne sentir ni le mérite d'une bonne démonstration, ni les défauts de celles qu'il mettait à la place. Au reste, ce reproche que nous avons l'air d'adresser à M. Peyrard, va bien plus justement à Simson, dont la préface toute entière roule sur cette idée; et d'ailleurs nous sommes loin de donner trop d'importance à l'opinion d'un commentateur sur la source des erreurs avouées qu'il s'agit de rectifier. Que ces erreurs viennent d'Euclide lui-même ou de l'un de ses commentateurs, ou, ce qui souvent est plus probable, qu'elles viennent des copistes, rien n'est plus indifférent; pourvu que le nouvel éditeur les corrige bien, il aura rempli sa tâche; et s'il peut prouver que ses corrections sont appuyées du témoignage d'un ancien manuscrit, on n'a rien de plus à lui demander.

Ce qui distingue les *Éléments* d'Euclide, ce sont moins les théorèmes eux-mêmes, ou l'ordre dans lequel il les a fait dériver les uns des autres, que la manière dont il les a démontrés.....

Le mérite principal est dans la marche rigoureuse qu'il a suivie dans toutes ses démonstrations; on pourrait dire cependant que cette méthode même a trouvé plus de prôneurs que d'imitateurs.....

Mais sans nous déclarer exclusivement les admirateurs d'une manière passée de mode, nous dirons que cette manière a des avantages précieux, en même temps qu'elle a des inconvénients graves; qu'elle forme un langage aujourd'hui peu connu et qui mérite de l'être d'avantage; qu'en

la voyant appliquée par Euclide à des théorèmes assez simples, on pourra devenir en état de suivre plus facilement les démonstrations plus longues et plus obscures d'Apollonius et d'Archimède; que cette étude sera du moins un exercice utile pour s'habituer à la rigueur des démonstrations dont on n'est que trop disposé à se relâcher. On ne serait écouté de personne aujourd'hui si l'on proposait de commencer l'étude des mathématiques dans Euclide; mais on dira une chose vraie en assurant que tout géomètre fera très-bien de lire une fois en sa vie Euclide en entier, pour avoir une idée nette de ce genre de démonstrations, et se mettre en état de l'employer dans l'occasion.

Ces réflexions prouvent l'utilité de l'entreprise formée par M. Peyrard. Aujourd'hui que l'étude du grec commence à reflourir dans l'Université royale, il est à croire que peu de géomètres désormais se refuseront la satisfaction de lire Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante dans leur langue. Il ne faut pas avoir fait une longue étude du grec pour entendre ces auteurs, qui ne sont pas plus difficiles que les fables d'Ésope, et bien moins, certainement, que les dialogues de Lucien, ou les vies de Plutarque, qu'on met entre les mains des enfants. Euclide surtout est d'une grande simplicité, ses phrases sont courtes, elles offrent peu d'inversions, on n'y voit pas une réflexion, pas un raisonnement grammaticalement compliqué; les mêmes expressions reparaissent à chaque instant; le vocabulaire n'est que trop borné, et les termes techniques que l'on y rencontre ne paraissent jamais sans avoir été préalablement définis.

L'intelligence du texte grec sera rendue plus facile encore par le système que M. Peyrard a suivi dans sa traduction latine. Partout il lui a donné la même fidélité qu'aux traductions interlinéaires des ouvrages qui servent à la première instruction. Les termes correspondants se suivent dans le même ordre dans les deux langues. Il n'est pas jusqu'aux articles qui manquent au latin, que le traducteur n'ait tenté de reproduire, par l'emploi continuuel du pronom *ipse*, *ipsius*, etc., pour marquer les cas obliques des lignes, des angles; des figures, désignés en grec par des lettres indéclinables. Ces mots subsidiaires dont la répétition continuelle a quelque chose de fatigant, auraient pu être évités, sans doute, en les remplaçant parfois par les mots *rectæ*, *anguli*, *arcus*, ou tels autres qui n'auraient guères été plus longs; mais M. Peyrard est suffisamment excusé par l'exemple des traducteurs qui l'ont précédé; et même par celui des géomètres modernes qui ont écrit en latin. D'ailleurs, la traduction latine est moins destinée à être lue de suite, qu'à faciliter l'intelligence du texte grec; et ceux qui y trouveraient trop de difficulté pourront se borner à la traduction française qui est au bas de chaque page; outre le secours qu'il trouvait dans nos articles indéfinis, l'auteur n'a pas fait scrupule d'y introduire ces mots *ligne*, *angle*, etc., que nous regrettons tout-à-l'heure de ne pas trouver dans le latin. Cette licence est la seule qu'il ait prise; à cela près, le français est presque aussi littéral que le latin; on serait tenté quelquefois d'en faire un reproche au traducteur; mais la phrase d'Euclide est si simple, qu'il n'y a guères deux manières de la traduire, à moins de prendre des libertés qui, sans avantages bien réels, changeraient tout-à-fait le style de la démonstration.

Il nous reste à parler des variantes qui assurent à la nouvelle édition du texte une supériorité marquée sur les éditions précédentes, lesquelles d'ailleurs commencent à devenir un peu rares.

La première de ces variantes est celle qui place parmi les *demandes* trois propositions, que les éditions précédentes avaient rangées parmi les *notions communes*. Tous les auteurs qui ont depuis reproduit ces propositions se sont crus obligés de les démontrer; Euclide qui s'en est

dispensé, n'a pu cependant les regarder comme des vérités évidentes, mais seulement comme des principes qu'on pouvait lui accorder et qui lui étaient indispensables pour établir sa doctrine. Il faut convenir pourtant que ces trois demandes sont d'un genre tout différent des trois précédentes. En effet, il faudrait être d'un esprit bien difficile pour nier à Euclide la possibilité de mener une droite d'un point donné à un point donné, de prolonger une droite donnée, ou de décrire un cercle d'un centre et d'un rayon donnés. Mais on pourrait lui demander la preuve que tous les angles droits sont égaux, que deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace, et surtout que deux droites se couperont nécessairement si on les prolonge suffisamment du côté où elles forment sur une autre droite deux angles dont la somme est moindre que celle de deux angles droits.

L'édition de Paris est conforme à tous les manuscrits de la Bibliothèque royale, si ce n'est que le n° 2345 place parmi les notions communes la troisième des propositions dont nous venons de parler, et que les n° 2346 et 2481 la placent tout à la fois, et parmi les demandes et parmi les notions communes. L'édition de Paris est encore conforme à l'édition arabe, à la traduction latine de Campan, faite d'après l'arabe, et à la traduction latine de Zamberti, faite d'après le texte grec, avant l'édition de Bâle; Proclus, qui a démontré d'une manière très-simple que tous les angles droits sont égaux, place parmi les demandes, les deux premières propositions, et la troisième parmi les notions communes; Boèce, qui a supprimé la troisième, place aussi les deux autres parmi les demandes. Tout porte donc à croire que Simon Grynœus, qui est l'auteur de l'édition de Bâle, jugeant ces trois propositions déplacées, changea les accusatifs en nominatifs, les infinitifs en indicatifs, pour reposer ces propositions à une place qu'il jugeait plus convenable. Quoi qu'il en soit, nous croyons M. Peyrard plus qu'autorisé à la leçon qu'il a adoptée de préférence.

La proposition 7 du premier livre a plusieurs cas; un seul cependant est énoncé et démontré dans tous les manuscrits. Clavius a senti la nécessité de nouveaux développements, il y consacre cinq figures et donne cinq démonstrations, qu'il pouvait réduire à trois; Simson donne double démonstration et double figure, et la seconde est prise dans Clavius. M. Peyrard qui ne voyait dans les manuscrits qu'une seule figure et qu'une seule démonstration, pouvait dire tout simplement qu'Euclide avait eu un moment de distraction; il pouvait compléter la démonstration dans une note. Il a voulu sauver Euclide de tout reproche; en empruntant comme Simson, une figure à Clavius, et prolongeant deux lignes dans la figure d'Euclide, il a fait que la démonstration d'Euclide s'applique à la fois aux deux figures et aux deux cas qui renferment tous les autres. Ainsi la démonstration s'est trouvée complète sans y changer un seul mot, dit M. Peyrard, et cela est vrai; mais dans la préparation il a été obligé d'ajouter une ligne qu'il a enfermée entre deux crochets, parce qu'elle ne se trouve dans aucun manuscrit; il serait assez difficile d'imaginer comment les copistes auraient non-seulement omis une figure toute entière, mais encore les deux prolongements de la première figure, et enfin la ligne du texte qui explique ces prolongements; ce n'est donc pas ici une variante que M. Peyrard porte dans le texte, c'est une véritable correction faite à un passage incomplet, mais du moins il l'a faite dans les moindres termes, et c'est par dévouement à son auteur qu'il se borne au mérite d'avoir retrouvé la véritable leçon.

La proposition 24 du livre III, a trois cas; les éditions grecques n'en démontrent qu'un seul, Commandin dans sa traduction démontre les deux autres: Clavius développe la proposition, il y



emploie cinq figures ; Simson retranche une partie de la proposition qu'il reporte à la précédente ; à l'aide de son manuscrit M. Peyrard remplit la lacune.

Dans la proposition 26, la variante (3) éclaircit la démonstration, elle est donc utile ; M. Peyrard a bien fait de l'introduire dans le texte. Tous les traducteurs en avaient senti la nécessité, le manuscrit a légitimé leurs conjectures.

Le corollaire de la proposition 19 du livre V a paru si corrompu, que Gregori s'est cru obligé de le changer pour y donner un sens raisonnable. Clavius lui en avait donné l'exemple. Robert Simson, avec son aménité ordinaire, dit que tout ce livre V a été corrompu par des ignares en géométrie.....

Le manuscrit est absolument semblable à l'édition d'Oxford, c'est par des changements assez légers que M. Peyrard a rendu ce corollaire intelligible ; mais ces changements nécessaires ne sont autorisés par aucun manuscrit ; il lui donne ensuite la forme d'un théorème, et le démontre directement d'une manière assez courte dans sa préface.

Dans la dernière proposition du livre VI, ce qui regarde les secteurs circulaires paraît une addition de Théon, qui en réclame formellement la démonstration à la page 50 de son commentaire sur Ptolémée. Cet article ne se trouve pas dans le manuscrit du Vatican, et M. Peyrard se reproche de ne l'avoir pas retranché de son édition, par la raison qu'il n'est d'aucun usage dans tout ce qui suit ; mais puisque ce théorème est vrai, nous croyons le scrupule exagéré. Pour qu'un théorème soit admis dans un livre d'éléments, il n'est pas bien nécessaire qu'il serve à démontrer un théorème subséquent..... Cet article des secteurs a cependant trouvé grâce aux yeux de Simson, qui en ignorait probablement le véritable auteur, ou qui n'a pas vu dans le passage de Théon une preuve bien sûre qu'Euclide n'eût pas donné lui-même ce théorème.

Le traducteur continue de donner les raisons pour lesquelles il a rejeté du texte plusieurs variantes qu'il discute. Ces raisons sont assez plausibles, mais quand on ne les admettrait pas, comme les leçons rejetées se retrouvent à la fin du volume, personne n'aurait à se plaindre ; on sait qu'en pareille matière les éditeurs les plus estimables sont rarement du même avis.

Après avoir examiné la préface, nous aurions à passer en revue les variantes que l'auteur, soit en les admettant, soit en les rejetant, n'a pas jugées assez importantes pour leur consacrer un article particulier ; mais cet examen serait beaucoup trop long, nous nous bornerons à celles qui pourront nous fournir quelque remarque ; nous laisserons toutes celles qui nous ont paru ou indifférentes ou bien placées, soit qu'elles se trouvent dans le texte ou qu'elles soient à la fin du volume.

Dans la définition 15 du livre I<sup>er</sup>, l'éditeur, d'après plusieurs manuscrits, a reçu dans le texte les mots *πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν*, qui nous paraissent un double emploi, une glose fort inutile des mots *πρὸς τὴν* qui se trouvent deux lignes plus haut.

L'éditeur a marqué par des titres les différentes parties dont se compose la première proposition. Ces dénominations qui nous ont été conservées par Proclus, et qui sont *exposition*, *détermination*, *construction*, *démonstration* et *conclusion*, paraissent une pédanterie de commentateur, et le nouvel éditeur a bien fait de ne les employer qu'une seule fois pour exemple.

Il a rejeté parmi les variantes le corollaire de la proposition XV, qui dit que la somme des angles autour d'un même point est toujours égale à quatre angles droits. Sa raison est qu'il manque dans la plupart des manuscrits, et que dans les autres il est écrit d'une main étrangère. Il nous

semble qu'on aurait pu le conserver, à l'exemple de Simson. S'il n'est pas d'Euclide, s'il est implicitement renfermé dans ce qui précède, il a le mérite d'être court, et de contenir une remarque qui aurait pu échapper à quelques lecteurs. Il aurait pu, sans inconvénient, conserver quatre mots qu'il a retranchés de la proposition XX ; à la vérité, ils n'étaient pas bien nécessaires, mais ils paraissent dans la manière d'Euclide. Dans la proposition XXII, au contraire, il a rétabli dans le manuscrit deux lignes qui ne gâtent rien, mais dont on pouvait se passer.

Dans la proposition XXVI, l'addition faite (13) était nécessaire, quoique dans le manuscrit elle fût écrite en marge et d'une autre main ; elle se trouvait déjà dans l'édition d'Oxford.

Dans la proposition XXVII, la leçon du manuscrit est plus concise et suffisante ; celle d'Oxford est plus développée et plus dans la manière d'Euclide. On peut en dire autant de la proposition XXVIII. La leçon nouvelle de la proposition XXIX a le mérite de la brièveté.

A la proposition XXXI, l'éditeur s'est écarté de son manuscrit pour se conformer à l'édition d'Oxford ; il a cru parfaitement inutiles les mots qu'il supprimait : il y a dans tous ces choix un peu d'arbitraire, et nul inconvénient. Ainsi à la proposition XXXIV, le mot *χωρὶς* ajouté à *παράλληλογράμμοι* n'était nullement nécessaire ; mais en le rétablissant, on a rendu l'énoncé plus conforme à celui de la proposition. A la proposition XXXVII, le retranchement autorisé par le manuscrit n'a aucun inconvénient : on fait toujours bien quand on retranche des mots inutiles ; la démonstration y gagne toujours, car celles des Grecs sont toujours un peu longues.

A la fameuse proposition XLVII (le carré de l'hypoténuse), on trouve une faute qui ne peut échapper au lecteur, et dont nous n'aurions pas fait mention, si elle ne se trouvait dans les trois langues : c'est un  $\Delta A$  au lieu de  $BA$ .

Dans le livre II, proposition VIII, on serait tenté de regarder comme inutiles les quatre lignes introduites d'après le manuscrit ; mais dans la proposition IX, on a très-bien fait d'introduire ces mots *et elles sont égales*, qu'on était obligé de sous-entendre. La variante (12) de la même proposition est préférable à la leçon d'Oxford, qui pourtant revient à peu près au même ; car si les carrés sont égaux, les racines ou les côtés le sont nécessairement.

Le manuscrit avait, dans la proposition X, une faute évidente, qui n'était ni dans l'édition d'Oxford, ni dans celle de Bâle.

Dans le livre III, définition 2, l'éditeur a bien fait d'ajouter, d'après le manuscrit, les mots *ὅτι μηδένια μέρη* ; mais il a oublié de les traduire en français.

Dans la proposition VIII, l'éditeur a bien fait de suivre l'édition d'Oxford plutôt que le manuscrit ; la longue variante n'offre rien de bien intéressant.

Dans la proposition XIII on a ajouté, d'après le manuscrit, deux mots qui étaient si nécessaires, que Gregori les avait traduits ; quoiqu'ils ne fussent pas dans le texte.

Dans la proposition XXIV, le manuscrit et l'édition nouvelle présentent un sens moins incomplet : il y manque pourtant encore quelque chose, mais le sens ne peut être douteux.

La variante (6) de la proposition XXXVII, est certainement une amélioration.

Livre IV, au corollaire de la proposition V, la correction tirée du manuscrit est bonne ; la leçon d'Oxford était defectueuse ; cependant le sens était visible.

Livre V, proposition IV, l'éditeur a rétabli d'après le manuscrit deux mots qui manquaient, et que Simson avait jugés indispensables. Il y a ensuite, dans le manuscrit, trois lignes que l'éditeur a bien fait de ne point admettre dans son texte.

Proposition V, la variante (1) était nécessaire.

Proposition VII, l'éditeur n'a point inséré dans le texte un corollaire qui contient une proposition vraie, utile, et qui manque à ce livre, mais qui ne peut se conclure de la proposition précédente : il ne se trouve dans aucun manuscrit, si ce n'est celui du Vatican. Simson a donné à part cette proposition, qu'il a marquée de la lettre B. Dans la manière moderne de traiter les proportions, ce théorème est évident ; il suffira d'en trouver l'énoncé parmi les variantes ; mais il pouvait figurer dans le texte, avec une note.

A la proposition VIII, les sept lignes ajoutées d'après le manuscrit améliorent la démonstration sans la rendre encore bien claire. Simson avait raison de la trouver incomplète ; mais il avait probablement tort d'en rejeter la faute sur Théon. Au reste, la proposition en elle-même est si simple, qu'on serait tenté d'en faire un axiôme ; et de là vient peut-être la difficulté de la démontrer à la manière des anciens. Il y avait dans l'édition d'Oxford une faute de grammaire, un indicatif pour un infinitif ; cette faute a été corrigée d'après le manuscrit.

A la proposition XXI, variante (3), la leçon d'Oxford était tronquée ; on y ajoutait une explication qui paraît avoir été une note marginale, qui depuis aurait passé dans le texte. La leçon rend la glose inutile ; ainsi le passage devient à la fois et plus court et plus clair.

A la proposition XXIII, on trouve une longue variante fournie par quatre manuscrits. Elle est préférable à la leçon d'Oxford. Simson a refondu la démonstration, et dans ses notes il critique vivement les interprètes qui l'ont précédé. Sa démonstration n'est pas non plus d'une grande clarté. Le théorème est un de ceux qu'on n'explique nulle part, et qu'on applique sans le connaître. Il suffit de l'écrire algébriquement pour en sentir la justesse. Cette espèce de traduction est en général le moyen le plus sûr pour juger les démonstrations des divers éditeurs ; mais alors, si on les rend plus claires, on aperçoit en même temps qu'elles sont longues et peu naturelles.

Au livre VI, l'éditeur a supprimé la 5<sup>e</sup> définition, parce qu'elle n'est pas dans son manuscrit. Elle pourrait être de Théon ; c'est celle que Simson a si vivement critiquée. La meilleure raison, c'est qu'elle est à peu près inutile, et qu'elle n'est point assez correcte. C'est la définition de la raison composée.

Dans la proposition II, l'éditeur a supprimé deux fois le mot *παράλληλος* qui n'est pas dans le manuscrit, et qui est de trop dans les imprimés. *Αγχι παρὰ* signifie chez les Grecs ce que nous exprimons par *mener parallèlement*. On voit donc que le mot *parallèle* devient inutile. Deux lignes sont parallèles quand elles sont à côté l'une de l'autre sans jamais se couper ; c'est ce que signifie *παρὰ* chez les géomètres grecs.

Dans la proposition III, l'éditeur a rétabli quelques articles qui manquaient, et adopté quelques variantes qui, sans être bien importantes par le sens, rendent la phrase plus correcte.

A la proposition X, il y avait dans l'édition d'Oxford une répétition inutile, occasionnée par l'insertion d'une phrase également superflue. L'éditeur, d'après quatre manuscrits, a donné une leçon plus courte et plus exacte.

A la fin de la deuxième démonstration de la proposition XIV, on a supprimé, d'après le manuscrit, quatre lignes qui formaient une glose peu nécessaire.

La proposition XXI avait un double emploi plus sensible, que le manuscrit a fait supprimer.

A la proposition XXII, le manuscrit a fourni deux développements utiles, qu'on pouvait cependant sous-entendre.

A la proposition XXVI, les éditeurs de Bâle et d'Oxford offraient un texte altéré, une figure mal faite. Clavius avait changé la démonstration et substitué deux figures à la figure unique du texte. Le manuscrit a fourni un texte correct et une figure exacte. Simson, en conservant la figure, avait changé le texte pour l'y faire cadrer. Sa correction était bonne, mais rien ne l'appuyait. Il est à croire que la nouvelle édition offre la véritable rédaction d'Euclide.

A la proposition XXVII,  $\tau\eta$  était une faute d'impression dans l'édition d'Oxford.

Livre VII. C'est le premier de ceux qui sont omis dans les éditions communes d'Euclide ; il traite des nombres. La définition de l'unité ne signifie pas grand chose en grec, et ce défaut est bien plus sensible en latin et en français, où les mots *un* et *unité* ont une ressemblance que n'ont pas les mots *monade* et *un* ;  $\mu\omicron\nu\epsilon\acute{\iota}\varsigma$  et  $\iota\upsilon$ .

L'éditeur a rétabli, d'après le manuscrit, la définition du nombre impairement pair qui manquait évidemment, quoiqu'on pût la supposer comprise dans celle du nombre pairement impair qui précède.

A la proposition X, on trouve une addition utile.

A la proposition XIX, *δευτέρου* pour *τεταρτέρου*, était dans l'édition d'Oxford une faute prise dans celle de Bâle, et d'autant plus étonnante dans celle-là, qu'elle était corrigée dans la traduction.

A la proposition XXIII, la première variante a le mérite de plus de brièveté, la seconde celui de plus de justesse.

Nous sentons plus que personne combien ces détails sont arides et minutieux. Nous avons dû les rapporter pour donner à la Classe la preuve du scrupule avec lequel nous avons fait l'examen dont elle nous avait chargés. Notre conclusion sera que, nonobstant quelques fautes d'impression dont nous ajouterons ici la liste (1), qui étaient presque inévitables dans une entreprise de ce genre, et qui d'ailleurs sont bien moins nombreuses que celles de la belle édition d'Archimède, imprimée à Oxford, l'ouvrage est *exact*, non pas sans doute *autant que l'auteur aurait désiré le faire*, mais autant qu'il était possible de l'espérer ; *que les leçons choisies sont en général celles qui méritaient la préférence*. Si quelquefois à cet égard nous nous sommes trouvés différer de sentiment avec l'éditeur, nous n'oserions assurer que nous avons toujours raison ; et ceux qui se trouveraient de notre avis auraient toujours la ressource de consulter la table des variantes ; ainsi l'inconvénient, s'il en existe, est extrêmement léger. Nous dirons *que l'ouvrage remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées*, et que l'édition est évidemment supérieure à toutes celles que nous connaissons.

Fait à Paris, le 21 février 1814.

Signé PRONY et DELAMBRE, rapporteur.

Certifié conforme à l'original.

Le Secrétaire perpétuel,

Signé DELAMBRE.

(1) Cette liste est imprimée à la fin du volume.

# INSTITUT DE FRANCE.

## CLASSE D'HISTOIRE ET DE LITTÉRATURE ANCIENNE.

Paris, le 26 Février 1814.

*Le Secrétaire perpétuel de la Classe, à Son Excellence le Ministre de l'intérieur.*

**M**ONSIEUR LE COMTE,

Les *Éléments* d'Euclide ne renfermant que des définitions et des propositions de géométrie, sont essentiellement du ressort de la Classe des Sciences physiques et mathématiques, et sont entièrement étrangers, pour le fonds, au genre des travaux de celle d'histoire et de littérature ancienne. Cette Classe cependant, pour répondre, autant qu'il est en elle, au témoignage de confiance que Votre Excellence a jugé à propos de lui donner en la consultant sur le mérite du travail de M. Peyrard, s'est empressée de l'examiner sous le petit nombre de rapports qui la concernent et sur lesquels elle peut avoir une opinion motivée. Le compte que M. Delambre rendit il y a quelques années à la première Classe de la traduction française d'Euclide, et celui qu'il vient de lui rendre de l'édition du texte et des traductions latine et française dont il est accompagné, ainsi que de l'ensemble du travail de M. Peyrard, présentent les détails les plus intéressants qui supposent un examen très-approfondi de ce travail sous le rapport littéraire et sous celui de la science, et font connaître suffisamment ce qu'on doit en penser.

La classe d'histoire a donc cru devoir se borner à soumettre à Votre Excellence quelques observations générales sur la partie littéraire de l'ouvrage, et sur la manière dont il est exécuté.

Le texte d'Euclide lui a paru plus correct dans la nouvelle édition que dans les éditions antérieures; cependant elle pense que celle qui fut publiée à Bâle en 1533, par Simon Gryncæus, malgré quelques fautes d'impression, moins nombreuses qu'on ne le croit communément, et faciles à corriger, sera toujours précieuse aux amateurs de la langue grecque.

La partie typographique est en général soignée dans l'édition de M. Peyrard: il s'y est néanmoins glissé quelques fautes d'impression, surtout vers la fin du volume.

En comparant le texte grec de cette édition avec celui des éditions précédentes, on y remarque quelques différences. Les plus essentielles ont été relevées et appréciées dans le rapport fait à la première Classe, qui constate encore que l'éditeur a rempli heureusement plusieurs lacunes avec le secours des manuscrits. ....

Les deux traductions jointes au texte sont très-littérales; peut-être même la traduction française l'est-elle trop. Cette manière de traduire mot à mot peut être bonne pour une version latine, dans laquelle on cherche plutôt l'exactitude et la fidélité que l'élégance, et dont quelques personnes peuvent avoir besoin pour entendre le texte; mais il semble que la traduction française aurait dû être faite avec un peu plus de liberté (1).

J'ai l'honneur de faire repasser à Votre Excellence l'ouvrage de M. Peyrard qu'elle m'avait envoyé, et de lui renouveler l'hommage de mes sentiments les plus respectueux.

*Signé* DACIER.

Certifié conforme à l'original,

*Signé* BARBIER DE NEUVILLE, chef de  
la 3<sup>me</sup> division du Ministère de l'intérieur.

(1) Voyez le rapport de M. Delambre, page 36, alinéa trois.

---

## INSTITUT DE FRANCE.

Paris, 14 août 1809.

*Rapport de MM. LAGRANGE, LEGENDRE et DELAMBRE, sur une traduction complète des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide, par M. PEYRARD.*

LA Classe a déjà donné son approbation à une traduction d'Euclide, par M. Peyrard. A l'exemple de presque tous les éditeurs qui l'ont précédé, il avait omis les livres qui traitent des Quantités numériques, les trois derniers livres, et le livre des Données; mais il avait annoncé dès-lors une traduction complète. Le désir de lui donner toute la perfection possible lui a fait consulter tous les manuscrits de la bibliothèque royale. . . . .

Dépositaire de ces précieux manuscrits, M. Peyrard les a comparés soigneusement avec l'édition grecque d'Oxford; il a noté en marge de l'imprimé toutes les variantes, les a traduites en latin; et c'est sur ce texte rectifié qu'il a composé sa version, qui est aussi littérale que l'a permis le génie des deux langues.

Il a fait principalement usage du n° 190, qu'il nous a remis pour que nous puissions examiner son travail, et vérifier toutes les variantes dont il a enrichi les marges de son exemplaire de l'édition d'Oxford. Nous avons fait cette vérification, et nous avons reconnu partout la plus grande conformité avec le manuscrit.

Ces variantes, comme on peut s'y attendre, ne sont pas toutes de la même importance, et ne méritent pas toujours la préférence sur les leçons imprimées. Parmi ces variantes, il en est qui consistent en quelques mots omis dans les imprimés, dont les traducteurs avaient senti la nécessité, et que Grégori a fait entrer dans son texte, en les enfermant entre deux crochets; quelquefois c'est un présent au lieu d'un futur; *ίσται* au lieu de *ίσθη*, ou réciproquement; le mot *ίσος* au lieu de *ίσότης*, *égal*, pour *le même*; des expressions plus ou moins conformes au style ordinaire des géomètres, ou d'Euclide en particulier. Toutes ces variantes n'auraient de valeur qu'aux yeux des philologues et des érudits; mais il en est de vraiment dignes de l'attention des géomètres, en ce qu'elles changent en mieux le sens, ou qu'elles donnent un sens raisonnable à ce qui n'en présentait aucun. Ce sont des superfluités élaguées, des lignes entières omises dans les imprimés, et qui sont ou absolument nécessaires à la démonstration, ou y portent au moins des développements utiles. D'autres fois on y rencontre des leçons plus concises, et qui présentent un sens tout aussi clair; des transpositions qui rendent parfaitement intelligible ce qui paraissait obscur ou peu exact. La définition 5<sup>e</sup> du VI<sup>e</sup> livre, qui se trouve dans toutes les

éditions grecques, est une simple note placée au bas du manuscrit, d'où elle avait été mal à propos portée dans le texte : Robert Simson a écrit six pages contre cette mauvaise et inutile définition, et elle n'est pas d'Euclide.

Le même traducteur relève une bévue remarquable de tous les textes grecs imprimés; un changement de lettre dans la figure avait causé tout l'embarras. En rétablissant la lettre véritable  $\phi$  au lieu de  $\sigma$ , on ne donne plus à Euclide le ridicule de paraître ignorer une vérité de la géométrie la plus élémentaire. Voyez *Prop. 17*, liv. XII.

La proposition 86 des *Données* avait fort inquiété Grégori qui, dans sa préface, en propose deux rédactions identiques, et à laquelle il voulait en ajouter une troisième, qui compléterait le système de la résolution des équations bi-quadratiques à la manière des anciens. Cette dernière conjecture n'est pas confirmée par le manuscrit, qui n'offre que l'une des deux premières rédactions. Grégori croyait le théorème singulièrement altéré; son erreur venait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve dans le manuscrit à la fin des *Données*, et qui doit précéder la proposition 86.

M. Peyrard donne ce lemme qui, au reste, est une proposition bien simple et bien connue. Il s'agit de trouver la surface d'un parallélogramme obtus-angle; mais cette proposition renferme une construction nécessaire à la démonstration des propositions 86 et 87, qui disent que si deux lignes formant un angle donné comprennent un espace donné, et que le carré de l'une, augmenté ou diminué d'un espace donné, soit au carré de la seconde, en raison donnée, ces deux lignes seront connues.

D'après toutes ces considérations, nous pensons que la classe peut donner son approbation au travail de M. Peyrard, pour l'encourager encore à terminer l'entreprise qu'il poursuit avec une persévérance digne d'éloges, et qui nous fera mieux connaître tous les mathématiciens grecs. Nous exprimerions le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils ont fournies; mais cette édition serait dispendieuse et demanderait beaucoup de temps : nous nous bornerons donc à souhaiter que M. Peyrard ajoute à sa traduction la liste de toutes les variantes qu'il a recueillies, et qui lui paraîtront mériter quelque attention. Ainsi les géomètres pourront corriger les éditions anciennes, en attendant celle qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

*Signé à la minute, LAGRANGE, LEGENDRE, DELAMBRE, rapporteur.*

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R P R I M U S.

#### OPOL.

- α'. ΣΗΜΕΙΟΝ ἔστιν, οὗ μέρος οὐθέν.  
β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατὺς.  
γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεία.  
δ'. Εὐθεία γραμμὴ ἔστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς  
ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κείται.  
ε'. Επιφάνεια δὲ ἔστιν, ἧ μῆκος καὶ πλάτος  
μόνον ἔχει.  
ς'. Επιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.  
ζ'. Επίπεδος ἐπιφανεία ἔστιν, ἥτις ἐξ ἴσου  
ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κείται.

#### DEFINITIONES.

1. PUNCTUM est, cujus pars nulla.
2. Linea autem, longitudo non lata.
3. Lineæ vero extrema, sunt puncta.
4. Recta linea est, quæ ex æquo inter sua puncta ponitur.
5. Superficies autem est, quod longitudinem et latitudinem solum habet.
6. Superficiæ vero extrema, sunt lineæ.
7. Plana superficies est, quæ ex æquo inter suas rectas ponitur.

## LE PREMIER LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

#### DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.



## 2 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

η. Επίπιδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ. Οταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρᾳ τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶ· καὶ ἡ ἐφιστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφίστηκιν.

ια. Ἀμβλυῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ. Οξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ. Ὄρος ἐστὶν, ὃ τινὸς ἐστὶ πέρας.

ιδ. Σχήμα ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων περιχόμενον.

ιε. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐν τῷ σχήματι κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando autem continentes dictum angulum lineæ rectæ sunt, rectilineus appellatur angulus.

10. Quando autem recta in rectam insistent deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistent recta perpendicularis vocatur in quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major recto.

12. Acutus autem, qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana: ab una lineâ contenta, quæ vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum intra figuram positorum, omnes cadentes rectæ ad circuli circumferentiam æquales inter se sunt.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

15'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

16'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δύναιτο τέμνειν τὸν κύκλον.

17'. Ημικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιχόμενον σχῆμα, ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

18'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου.

19'. Σχήματα εὐθύγραμμα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιχόμενα.

α'. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

β'. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

γ'. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλείονων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιχόμενα.

20'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

16. Centrum autem circuli, hoc punctum vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentiâ; quæ et bifariam secat circumulum.

18. Semicirculus vero est contenta figura ab et diametro, et circumferentiâ circuli apprehensâ ab diametro.

19. Segmentum circuli est, contenta figura ab et rectâ, et circuli circumferentiâ, vel majore vel minore semicirculo existente.

20. Figuræ rectilinæ sunt, quæ ab rectis continentur.

21. Trilateræ quidem, quæ ab tribus.

22. Quadrilateræ autem, quæ ab quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ ab pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum quidem triangulum est, quod tria æqualia habet latera.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

#### 4 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κί. Ισοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κς'. Σκαλητὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους<sup>10</sup> ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἐτι τε<sup>11</sup>, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κή. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς<sup>12</sup> τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τί ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

λά. Ἐτερόμηνες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ.

λβ'. Ρόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δὲ.

λγ'. Ρομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπιναιτίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπίζια καλεῖσθαι.

25. Isosceles vero, quod duo solum æqualia habet latera.

26. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

27. Insuper, trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectum angulum.

28. Obtusangulum autem, quod habet obtusum angulum.

29. Acutangulum vero, quod tres acutos habet angulos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod et æquilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero æquilaterum.

32. Rhombus vero, quod æquilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboïdes autem, quod et opposita latera et angulos æqualia inter se habet, quod neque æquilaterum est, nec rectangulum.

34. Præter hæc autem quadrilatera trapezia vocentur.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

## LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 5

λβ. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ τινες ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ οὔσαι, καὶ ἑκαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

35. Parallelae sunt rectae, quae in eodem plano existentes, et productae in infinitum ad utramque partem, in neutram sibi coincidunt.

### ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α. Ηγήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἑκαλλάειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφειν.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἂν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπιπτοῦσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἑλάσσονας ποιῇ, ἑκαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἑλάσσονες γωνίαι<sup>3</sup>.

ς. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ<sup>4</sup> περιέχειν.

### POSTULATA.

1. POSTULETUR, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.

3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

4. Et omnes angulos rectos aequales inter se esse.

5. Et si in duas rectas recta quaedam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.

6. Et duas rectas spatium non continere.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

### DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

NOTIONES COMMUNES.

- α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσα.  
 β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσιν ἴσα.  
 γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἴσιν ἴσα.  
 δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ὅστιν ἀνίστα.  
 ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἴσιν ἀνίστα.  
 ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.  
 ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.  
 η'. Καὶ τὰ ἰσομετρῶντα ἑπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.  
 θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μαῖζον ἴσιν.

1. Quæ eidem æqualia; et inter se sunt æqualia.  
 2. Et si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.  
 3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.  
 4. Et si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.  
 5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.  
 6. Et quæ ejusdem duplicia, æqualia inter se sunt.  
 7. Et quæ ejusdem dimidia, æqualia inter se sunt.  
 8. Et quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt.  
 9. Et totum parte majus est.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.  
 2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.  
 3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.  
 4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.  
 5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.  
 6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.  
 7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.  
 8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.  
 9. Le tout est plus grand que la partie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

PROPOSITIO I.

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπρασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΕΚΘΕΣΙΣ'. Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα<sup>2</sup> πεπρασμένη ἡ AB.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ'. Δεῖ δὲ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας πεπρασμένης<sup>4</sup> τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

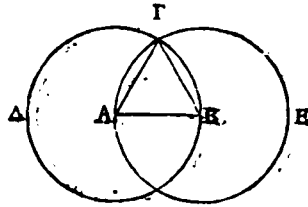
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ'. Κέντρον μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB, κύκλος γεγράφθω ὁ BΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BA, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ἃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B, σημεία ἐπιζυχῶσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

SUPER datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum constituere.

EXPOSITIO. Sit data recta terminata AB.

DETERMINATIO. Oportet igitur super AB rectam terminatam triangulum æquilaterum constituere.

CONSTRUCTIO. Centro quidem A, intervallo autem AB, circulus describatur BΓΔ; et rursus, centro quidem B, intervallo autem BA, circulus describatur ΑΓΕ; et ab Γ puncto, in quo sese secant circuli, ad A, B puncta adiungantur rectæ ΓΑ, ΓΒ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ<sup>6</sup>. Καὶ ἐπὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἴστί τοῦ BΓΔ κύκλου, ἴση ἴστί ἡ ΑΓ τῇ AB· πάλιν, ἐπὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἴστί τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἴστί ἡ ΒΓ τῇ BA. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

DEMONSTRATIO. Et quoniam A punctum centrum est BΓΔ circuli, æqualis est ΑΓ ipsi AB; rursus, quoniam B punctum centrum est ΑΓΕ circuli, æqualis est ΒΓ ipsi BA. Ostensa

PROPOSITION PREMIÈRE.

SUR une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

EXPOSITION. Soit AB une droite donnée et finie.

DÉTERMINATION. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

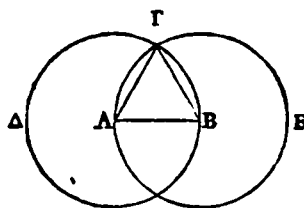
CONSTRUCTION. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence ΑΓΕ; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓΑ, ΓΒ (dem. 1).

DÉMONSTRATION. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite ΑΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le

## 8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἵκατίρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἴστιν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴστιν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἴστιν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

est autem et ΓΑ ipsi ΑΒ æqualis; utraque igitur ipsarum ΓΑ, ΓΒ ipsi ΑΒ æqualis est. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΓΑ igitur ipsi ΓΒ est æqualis; tres igitur ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ æquales inter se sunt.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ<sup>2</sup>. Ἰσόπλευρον ἄρα ἴσ'ι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται<sup>3</sup> ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Ὅπερ ἴδι ποιῆσαι.

CONCLUSIO. Æquilaterum igitur est ΑΒΓ triangulum, et constitutum est super datam rectam terminatam ΑΒ. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὲ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπιζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνιστάτω ἐπ' αὐτῆς

### PROPOSITIO II.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

Sit quidem datum punctum Α, data autem recta ΒΓ; oportet igitur ad Α punctum, datæ rectæ ΒΓ æqualem rectam ponere.

Adjungatur enim ab Α puncto ad Β punctum recta ΑΒ, et constituatur super eam triangulum

centre du cercle ΑΓΕ, la droite ΒΓ est égale à la droite ΒΑ; mais on a démontré que la droite ΓΑ était égale à la droite ΑΒ; donc chacune des droites ΓΑ, ΓΒ est égale à la droite ΑΒ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΒ; donc les trois droites ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sont égales entre elles.

CONCLUSION. Donc le triangle ΑΒΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION II.

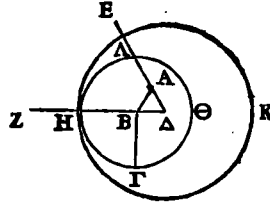
A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point Α placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.

Menons du point Α au point Β la droite ΑΒ (dem. 1); sur cette droite construisons

τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ  $\Delta AB$ , καὶ ἐκτελέσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  εὐθεῖαι αἱ  $AE$ ,  $BZ$ , καὶ κέντρον μὲν τῷ  $B$ , διαστήματι δὲ τῷ  $B\Gamma$ , κύκλος γηγράφθω ὁ  $\Gamma H\Theta$ · καὶ πάλιν, κέντρον τῷ  $\Delta$ , καὶ διαστήματι τῷ  $\Delta H$ , κύκλος γηγράφθω ὁ  $H\kappa\Lambda$ .

æquilaterum  $\Delta AB$ , et producantur in directum ipsis  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  rectæ  $AE$ ,  $BZ$ , et centro quidem  $B$ , intervallo vero  $B\Gamma$ , circulus describatur  $\Gamma H\Theta$ ; et rursus centro  $\Delta$ , et intervallo  $\Delta H$  circulus describatur  $H\kappa\Lambda$ .



Ἐπεὶ οὖν τὸ  $B$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $\Gamma H\Theta$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $BH$ . Πάλιν\*, ἐπεὶ τὸ  $\Delta$  σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $H\kappa\Lambda$  κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ  $\Delta\Lambda$  τῇ  $\Delta H$ , ὥν ἡ  $\Delta A$  τῇ  $\Delta B$  ἴση ἐστὶ· λοιπὴ ἄρα ἡ  $AA$  λοιπῇ τῇ  $BH$  ἴσιν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $BH$  ἴση· ἵκατέρωσιν ἄρα τῶν  $AA$ ,  $B\Gamma$  τῇ  $BH$  ἴσιν ἴση. Τὰ δὲ τῶν αὐτῶν ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσα· καὶ ἡ  $AA$  ἄρα τῇ  $B\Gamma$  ἴσιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ  $B\Gamma$  ἴση εὐθεῖα κείται ἡ  $AA$ . Ὅπερ ἰδεῖν ποιῆσαι.

Quoniam igitur  $B$  punctum centrum est  $\Gamma H\Theta$  circuli, æqualis est  $B\Gamma$  ipsi  $BH$ . Rursus, quoniam  $\Delta$  punctum centrum est  $H\kappa\Lambda$  circuli, æqualis est  $\Delta\Lambda$  ipsi  $\Delta H$ , quarum  $\Delta A$  ipsi  $\Delta B$  æqualis est; reliqua igitur  $AA$  reliquæ  $BH$  est æqualis. Ostensa est autem et  $B\Gamma$  ipsi  $BH$  æqualis; utraque igitur ipsarum  $AA$ ,  $B\Gamma$  ipsi  $BH$  est æqualis. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et  $AA$  igitur ipsi  $B\Gamma$  est æqualis.

Ad datum igitur punctum  $A$ , datæ rectæ  $B\Gamma$  æqualis recta ponitur  $AA$ . Quod oportebat facere.

le triangle équilatéral  $\Delta AB$  (prop. 1); menons les droites  $AE$ ,  $BZ$  dans la direction de  $\Delta A$ ,  $\Delta B$ ; du centre  $B$  et de l'intervalle  $B\Gamma$ , décrivons le cercle  $\Gamma H\Theta$  (dem. 3); et de plus, du centre  $\Delta$  et de l'intervalle  $\Delta H$ , décrivons le cercle  $H\kappa\Lambda$ .

Puisque le point  $B$  est le centre du cercle  $\Gamma H\Theta$ ,  $B\Gamma$  est égal à  $BH$  (déf. 15); de plus, puisque le point  $\Delta$  est le centre du cercle  $H\kappa\Lambda$ , la droite  $\Delta\Lambda$  est égale à la droite  $\Delta H$ ; mais  $\Delta A$  est égal à  $\Delta B$ ; donc le reste  $AA$  est égal au reste  $BH$  (not. 3). Mais on a démontré que  $B\Gamma$  est égal à  $BH$ ; donc chacune des droites  $AA$ ,  $B\Gamma$  est égale à  $BH$ . Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc  $AA$  est égal à  $B\Gamma$ .

Donc, au point donné  $A$ , on a placé une droite  $AA$  égale à la droite donnée  $B\Gamma$ . Ce qu'il fallait faire.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

## PROPOSITIO III.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθείαν ἀφαιεῖν.

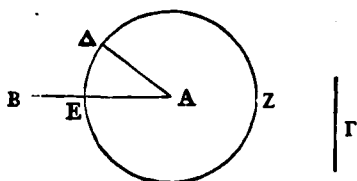
Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ AB, Γ, ὧν μείζων ἴστω ἡ AB· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθείαν ἀφαιεῖν.

Κείσθω γάρ' πρὸς τῷ A σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ AD· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AD, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Duobus datis rectis inæqualibus, a maiore minori æqualem rectam auferre.

Sint datæ duæ rectæ inæquales AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur a maiore AB minori Γ æqualem rectam auferre.

Ponatur enim ad A punctum ipsi Γ rectæ æqualis AD; et centro quidem A, intervallo vero AD circulus describatur ΔΕΖ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ AD· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ AD ἴστων ἴση. Ἐκατέρα ἄρα τῶν AE, Γ τῇ AD ἴστων ἴση· ὥστε καὶ ἡ AE τῇ Γ ἴστων ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν AB, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην ἀφαιρηται ἡ AE. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam A punctum centrum est ΔΕΖ circuli, æqualis est AE ipsi AD; sed et Γ ipsi AD est æqualis; utraque igitur ipsarum AE, Γ ipsi AD est æqualis; quare et AE ipsi Γ est æqualis.

Duabus igitur datis rectis inæqualibus AB, Γ, a maiore AB minori Γ æqualis ablata est AE. Quod oportebat facere.

## PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données, que AB soit la plus grande; il faut de la plus grande AB retrancher une droite égale à la plus petite Γ.

Au point A plaçons une droite AD égale à Γ (prop. 2), et du centre A et de l'intervalle AD, décrivons le cercle ΔΕΖ (dem. 3).

Puisque le point A est le centre du cercle ΔΕΖ, AE est égal à AD; mais Γ est égal à AD; donc chacune des droites AE, Γ, est égale à la droite AD; donc la droite AE est égale à la droite Γ.

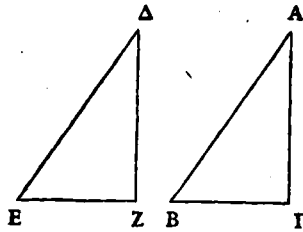
Donc les deux droites inégales AB, Γ, étant données, on a retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite Γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς' ὁσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ὑθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτίθουσιν.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant, ab æqualibus rectis contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt.



Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ, ταῖς ὁσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἴσθιν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται,

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ æqualem esse, et ΑΒΓ triangulum ΔΕΖ triangulo æquale fore, et reliquos angulos reliquis angulis æquales fore utrumque utrique, quos æqualia

PROPOSITION IV.

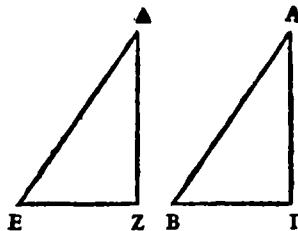
Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ; que ces deux triangles aient les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ au côté ΔΖ, et qu'ils aient aussi l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ, que le triangle ΑΒΓ sera égal au triangle ΔΕΖ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux,

## 12 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-  
τείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ  
ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

latera subtendunt, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ  
vero ipsi ΔΖΕ.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ  
ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου  
ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ,  
ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ  
ἴσιν εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  
ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ  
τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν  
τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ  
σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσιν πάλιν εἶναι τὴν  
ΑΓ τῇ ΔΖ. Ἀλλὰ μὲν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρ-  
μόσει, ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρ-  
μόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος,  
τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ  
οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν,  
ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον. Εφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις

Congruente enim ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ trian-  
gulo, et posito quidem Α puncto super Δ  
punctum, ΑΒ vero rectā super ΔΕ; congruet  
et Β punctum ipsi Ε, quia est æqualis ΑΒ  
ipsi ΔΕ; congruente autem ΑΒ ipsi ΔΕ, con-  
gruet et ΑΓ recta ipsi ΔΖ, quia æqualis est  
ΒΑΓ angulus ipsi ΕΔΖ; quare et Γ punctum  
Ζ puncto congruet, quia æqualis rursus est ΑΓ  
ipsi ΔΖ. Sed quidem et Β ipsi Ε congruebat;  
quare basis ΒΓ basi ΕΖ congruet; si enim  
quidem Β ipsi Ε congruente, Γ vero ipsi Ζ,  
ΒΓ basis ipsi ΕΖ non congruat, duæ rectæ  
spatium continebunt, quod est impossibile. Con-  
gruet igitur ΒΓ basis ipsi ΕΖ, et æqualis ei  
erit; quare et totum ΑΒΓ triangulum toti ΔΕΖ

seront égaux chacun à chacun; l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ égal à  
l'angle ΔΖΕ.

Car le triangle ΑΒΓ étant appliqué sur le triangle ΔΕΖ, le point Α étant posé  
sur le point Δ, et la droite ΑΒ sur la droite ΔΕ, le point Β s'appliquera sur le  
point Ε, parce que ΑΒ est égal à ΔΕ; mais ΑΒ étant appliqué sur ΔΕ, la droite ΑΓ  
s'appliquera sur ΔΖ, parce que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΖ; donc le point Γ  
s'appliquera sur le point Ζ, parce que ΑΓ est égal à ΔΖ; mais le point Β s'applique  
sur le point Ε; donc la base ΒΓ s'appliquera sur la base ΕΖ; car si le point Β  
s'appliquant sur le point Ε, et le point Γ sur le point Ζ, la base ΒΓ ne s'ap-  
pliquait pas sur la base ΕΖ, deux droites comprendraient un espace, ce qui  
est impossible (dem. 6); donc la base ΒΓ s'appliquera sur la base ΕΖ, et lui sera

ἐπὶ τὴν EZ, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται· ὅστις καὶ ὅλον τὸ  
 ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἱφαρμόσει,  
 καὶ ἴσον αὐτῇ ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ  
 τὰς λοιπὰς γωνίας ἱφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς  
 ἴσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ  
 ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς  
 δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ  
 τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων  
 ὑποκειμένων περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει  
 ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον  
 ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς  
 γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' αἱ  
 αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει  
 γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ, προσεκληθεισῶν  
 τῶν ἴσων ὑποκειμένων, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι  
 ἀλλήλαις ἴσονται.

triangulo congruet, et æquale ei erit, et  
 reliqui anguli reliquis angulis congruent, et  
 æquales eis erunt, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ  
 vero ipsi ΔΖΕ.

Si igitur duo triangula duo latera duobus  
 lateribus æqualia habeant, utrumque utrique,  
 et angulum angulo æqualem habeant ab æqua-  
 libus lateribus contentum; et basim basi  
 æqualem habebunt, et triangulum triangulo  
 æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis  
 æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia  
 latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum ad basim anguli  
 æquales inter se sunt; et productis æqua-  
 libus rectis, sub basim anguli æquales inter se  
 erunt.

égale; donc le triangle entier ΑΒΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔΕΖ, et  
 lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur  
 seront égaux, l'angle ΑΒΓ à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ à l'angle ΔΖΕ.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun,  
 et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs  
 bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés  
 égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

Dans les triangles isoscèles, les angles sur la base sont égaux entre eux,  
 et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux  
 entre eux.

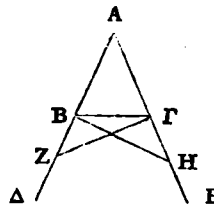
14 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ  $ABΓ$ , ἴσῃ ἔχον τὴν  $AB$  πλευρὰν τῇ  $ΑΓ$  πλευρᾷ, καὶ προσεκτε-  
 Γλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς  $AB$ ,  $ΑΓ$  εὐθεῖαι αἱ  
 $ΒΔ$ ,  $ΓΕ$ . λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  
 $ΑΓΒ$  ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΒΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΒΓΕ$ .

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς  $ΒΔ$  τυχὸν σημεῖον τὸ  $Ζ$ ,  
 καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $ΑΕ$  τῇ ἐλάσ-  
 σονι τῇ  $ΑΖ$  ἴση ἡ  $ΑΗ$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $ΖΓ$ ,  $ΗΒ$   
 εὐθεῖαι.

Sit triangulum isosceles  $ABΓ$ , æquale habens  
 $AB$  latus  $ΑΓ$  lateri, et producantur in direc-  
 tum ipsis  $AB$ ,  $ΑΓ$  rectæ  $ΒΔ$ ,  $ΓΕ$ ; dico qui-  
 dem  $ABΓ$  angulum ipsi  $ΑΓΒ$  æqualem esse,  $ΓΒΔ$   
 vero ipsi  $ΒΓΕ$ .

Sumatur enim in  $ΒΔ$  quodlibet punctum  $Ζ$ ,  
 et auferatur à majore  $ΑΕ$  minori  $ΑΖ$  æqualis  
 ipsa  $ΑΗ$ , et jungantur  $ΖΓ$ ,  $ΗΒ$  rectæ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $ΑΖ$  τῇ  $ΑΗ$ , ἡ δὲ  $AB$   
 τῇ  $ΑΓ$ , δύο δὴ αἱ  $ΖΑ$ ,  $ΑΓ$  δυοὶ ταῖς  $ΗΑ$ ,  
 $AB$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν  
 κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ  $ΖΑΗ$ . βάσις ἄρα ἡ  
 $ΖΓ$  βάσει τῇ  $ΗΒ$  ἴση ἐστίν, καὶ τὸ  $ΑΖΓ$  τρίγωνον  
 τῷ  $ΑΗΒ$  τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ  
 γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται,  
 ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

Quoniam igitur est quidem  $ΑΖ$  ipsi  $ΑΗ$ ,  
 $AB$  vero ipsi  $ΑΓ$ , duæ igitur  $ΖΑ$ ,  $ΑΓ$  duabus  
 $ΗΑ$ ,  $AB$  æquales sunt, utraque utrique,  
 et angulum communem continent  $ΖΑΗ$ ; basis  
 igitur  $ΖΓ$  basi  $ΗΒ$  æqualis est, et  $ΑΖΓ$  triangulum  
 $ΑΗΒ$  triangulo æquale erit, et reliqui anguli  
 reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique,  
 quos æqualia latera subtendunt,  $ΑΓΖ$  quidem

Soit le triangle isosceles  $ABΓ$ , ayant le côté  $AB$  égal au côté  $ΑΓ$ ; menons les  
 droites  $ΒΔ$ ,  $ΓΕ$ , dans la direction de  $AB$ ,  $ΑΓ$  (dem. 2); je dis que l'angle  $ABΓ$  est  
 égal à l'angle  $ΑΓΒ$ , et que l'angle  $ΓΒΔ$  est aussi égal à l'angle  $ΒΓΕ$ .

Car prenons dans  $ΒΔ$  un point quelconque  $Ζ$ , et de la droite  $ΑΕ$ , plus grande  
 que  $ΑΖ$ , retranchons une droite  $ΑΗ$  égale à la plus petite  $ΑΖ$ , et joignons les  
 droites  $ΖΓ$ ,  $ΗΒ$ .

Puisque  $ΑΖ$  est égal à  $ΑΗ$ , et  $AB$  à  $ΑΓ$ , les deux droites  $ΖΑ$ ,  $ΑΓ$  sont égales aux  
 deux droites  $ΗΑ$ ,  $AB$ , chacune à chacune; mais elles comprennent un angle  
 commun  $ΖΑΗ$ ; donc (4) la base  $ΖΓ$  est égale à la base  $ΗΒ$ , le triangle  $ΑΖΓ$  sera  
 égal au triangle  $ΑΗΒ$ , et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront

τείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλη τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Εἰδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὲ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνία εἰδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τῷ ΑΒΓ τριγώνου· εἰδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν· τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi ABH, AZG vero ipsi AHB. Et quoniam tota AZ toti AH est æqualis, quarum AB ipsi AG est æqualis, reliqua igitur BZ reliquæ GH est æqualis. Ostensa est autem et ZG ipsi HB æqualis; duæ igitur BZ, ZG duabus GH, HB æquales sunt, utraque utrique, et angulus BZG angulo GHB æqualis, et basis eorum communis BG; et BZG igitur triangulum GHB triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est quidem ZBG ipsi HGB, BGZ vero ipsi GBH. Quoniam igitur totus ABH angulus toti AGZ angulo ostensus est æqualis, quorum GBH ipsi BGZ æqualis; reliquus igitur ABG reliquo AGB est æqualis, et est ad basim ABG trianguli; ostensus est autem et ZBG ipsi HGB æqualis, et sunt sub basim; isoscelium igitur triangulorum, etc.

égaux chacun à chacun; l'angle AGZ à l'angle ABH, et l'angle AZG à l'angle AHB. Et puisque la droite entière AZ est égale à la droite entière AH, et que AB est égal à AG, la restante BZ sera égale à la restante GH (not. 3). Mais on a démontré que ZG est égal à HB; donc les deux droites BZ, ZG sont égales aux droites GH, HB, chacune à chacune; mais l'angle BZG est égal à l'angle GHB, et la droite BG est leur base commune; donc le triangle BZG sera égal au triangle GHB, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; donc l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et l'angle BGZ égal à l'angle GBH. Mais on a démontré que l'angle entier ABH est égal à l'angle entier AGZ, et l'angle GBH est égal à l'angle BGZ; donc l'angle restant ABG est égal à l'angle restant AGB (not. 3), et ces angles sont sur la base; mais on a démontré aussi que l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et ces angles sont sous la base; donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνεσθαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἴσονται.

Εστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , ἴσῃν ἔχον τὴν ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $AGB$  γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ  $AB$  πλευρᾷ τῇ  $AG$  ἴστί· ἴση.

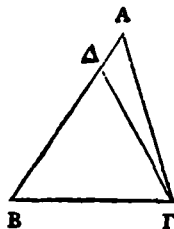
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $AG$ , μία <sup>2</sup> αὐτῶν μείζων ἴστί· Εστω μείζων ἡ  $AB$ · καὶ ἀφ' ἡρέσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς  $AB$  τῇ ἐλάσσονι τῇ  $AG$  ἴση ἡ  $\Delta B$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $\Delta\Gamma$ .

## PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales inter se sunt, et æquales angulos subtendentia latera æqualia inter se erunt.

Sit triangulum  $AB\Gamma$  æqualem habens  $AB\Gamma$  angulum  $AGB$  angulo; dico et latus  $AB$  lateri  $AG$  esse æquale.

Si enim inæquale est  $AB$  ipsi  $AG$ , unum eorum majus est. Sit majus  $AB$ , et auferatur a majore  $AB$  minori  $AG$  æqualis  $\Delta B$ , et jungatur  $\Delta\Gamma$ .



Επεὶ οὖν ἴση ἴστί· ἡ  $\Delta B$  τῇ  $AG$ , κοινὴ δὲ ἡ  $B\Gamma$ , δύο δὲ αἱ  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  δυοὶ ταῖς  $AG$ ,  $\Gamma B$  ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρω ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\Delta B\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AGB$  ἴστί· ἴση· βάσεις ἄρα ἡ  $\Delta\Gamma$  βάσει τῇ  $AB$  ἴση ἴστί, καὶ τὸ  $\Delta B\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $AGB$ .

Quoniam igitur æqualis est  $\Delta B$  ipsi  $AG$ , communis autem  $B\Gamma$ , duæ igitur  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  duabus  $AG$ ,  $\Gamma B$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $\Delta B\Gamma$  angulo  $AGB$  est æqualis; basis igitur  $\Delta\Gamma$  basi  $AB$  æqualis est, et  $\Delta B\Gamma$  trian-

## PROPOSITION VI.

Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.

Soit le triangle  $AB\Gamma$ , ayant l'angle  $AB\Gamma$  égal à l'angle  $AGB$ ; je dis que le côté  $AB$  est égal au côté  $AG$ .

Car si le côté  $AB$  n'est pas égal au côté  $AG$ , l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit  $AB$  le plus grand; retranchons du plus grand côté  $AB$  la droite  $\Delta B$  égale au plus petit  $AG$  (3), et joignons  $\Delta\Gamma$ .

Puisque  $\Delta B$  est égal à  $AG$ , et que  $B\Gamma$  est commun, les deux côtés  $\Delta B$ ,  $B\Gamma$  sont égaux aux deux côtés  $AG$ ,  $\Gamma B$ , chacun à chacun; mais l'angle  $\Delta B\Gamma$  est égal à l'angle  $AGB$ ; donc la base  $\Delta\Gamma$  est égale à la base  $AB$ , et le triangle  $\Delta B\Gamma$  sera égal

τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $AG$ . ἴση ἄρα. Εάν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἰζῆς.

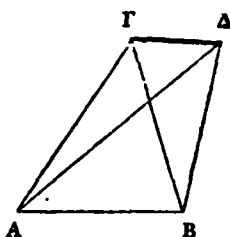
gulum  $AGB$  triangulo æquale erit, minus majori, quod est absurdum; non igitur inæqualis est  $AB$  ipsi  $AG$ ; ergo æqualis. Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλη καὶ ἄλλη σημεῖς 'πὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

PROPOSITIO VII.

Super eadem rectâ, duabus eisdem rectis aliæ duæ rectæ æquales utraque utrique non constituentur, ad aliud et aliud punctum ad easdem partes, eosdem terminos habentes quos primæ rectæ.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς  $AB$ , δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς  $AG$ ,  $GB$  ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ  $AD$ ,  $DB$  ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα συνιστάτωσαν, πρὸς ἄλλη καὶ ἄλλη σημεῖς τῇ τε  $\Gamma$  καὶ  $\Delta$ , ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ  $A$ ,  $B$ . ὅστις

Si enim possibile, super eadem rectâ  $AB$  duabus eisdem rectis  $AG$ ,  $GB$ , aliæ duæ rectæ  $AD$ ,  $DB$  æquales utraque utrique constituentur ad aliud et aliud punctum  $\Gamma$  et  $\Delta$ , ad easdem partes,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , et eosdem terminos habentes  $A$ ,  $B$ ; ita ut æqualis sit quidem  $GA$  ipsi  $DA$ , eundem ter-

au triangle  $AGB$ , le plus petit au plus grand, ce qui est absurde; donc les droites  $AB$ ,  $GB$  ne sont pas inégales; donc  $AB$  est égal à  $GB$ . Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

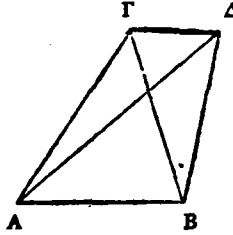
Car, si cela est possible, sur une même droite  $AB$ , et à deux points différens  $\Gamma$  et  $\Delta$ , placés du même côté, construisons les deux droites  $AD$ ,  $DB$  égales à deux autres droites  $AG$ ,  $GB$ , chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités  $A$ ,  $B$ ; de



## 18 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσῃ εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ.

minum habens quem illa, punctum A, GB vero ipsi ΔB, eundem terminum habens quem illa, punctum B; et jungatur ΓΔ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. Πάλιν ἵπεί ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΔΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ; major igitur ΑΔΓ ipso ΔΓΒ; multo igitur ΓΔΒ major est ipso ΔΓΒ. Rursus quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΔΒ, æqualis est et angulus ΓΔΒ angulo ΔΓΒ. Ostensus est autem ipso et multo major, quod est impossibile. Non igitur super, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

### PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυὸ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσῃ ἔξῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιχομένην.

Si duo trianguła duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basim basi æqualem; et angulum angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis contentum.

manière que la droite ΓΑ soit égale à la droite ΔΑ, et ait la même extrémité Α que celle-ci, et que la droite ΓΒ soit égale à la droite ΔΒ, et ait la même extrémité Β que celle-ci; et joignons ΓΔ.

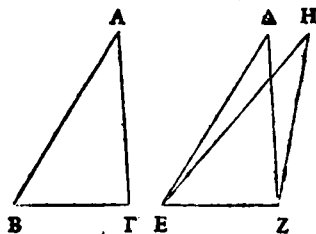
Puisque ΑΓ est égal à ΔΔ, l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΑΔΓ (5); donc l'angle ΑΔΓ est plus grand que l'angle ΔΓΒ; donc l'angle ΓΔΒ est beaucoup plus grand que l'angle ΔΓΒ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΔΒ, l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΔΓΒ; mais on a démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible. Donc, etc.

### PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $AB$ ,  $ΑΓ$  ταῖς δυὸς πλευραῖς ταῖς  $ΔE$ ,  $ΔZ$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρῃ, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $ΔE$ , τὴν δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔZ$ · ἔχεται δὲ καὶ βάσιν τὴν  $BΓ$  βάσει τῇ  $EZ$  ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EAZ$  ἴσιν.

Sint duo triangula  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , duo latera  $AB$ ,  $ΑΓ$  duobus lateribus  $ΔE$ ,  $ΔZ$  æqualia habentia utrumque utrique,  $AB$  quidem ipsi  $ΔE$ ,  $ΑΓ$  vero ipsi  $ΔZ$ ; habeat autem et basim  $BΓ$  basi  $EZ$  æqualem; dico et angulum  $BAΓ$  angulo  $EAZ$  esse æqualem.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου ἐπὶ τὸ  $ΔEZ$  τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν  $B$  σημείου ἐπὶ τὸ  $E$  σημῖον, τῆς δὲ  $BΓ$  εὐθείας ἐπὶ τὴν  $EZ$ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ  $Γ$  σημῖον ἐπὶ τὸ  $Z$ , διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν  $BΓ$  τῇ  $EZ$ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς  $BΓ$  ἐπὶ τὴν  $EZ$ , ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ  $BA$ ,  $ΓA$  ἐπὶ τὰς  $EA$ ,  $ΔZ$ . Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ  $BΓ$  ἐπὶ βάσιν τὴν  $EZ$  ἐφαρμόσει, αἱ δὲ  $BA$ ,  $ΑΓ$  πλευραὶ ἐπὶ τὰς  $EA$ ,  $ΔZ$  οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παρά- λάξουσιν, ὥς αἱ  $EH$ ,  $HZ$ , συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυὸς ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, πρὸς

Congruente enim  $ABΓ$  triangulo ipsi  $ΔEZ$  trian- gulo, et posito quidem  $B$  puncto super  $E$  punctum,  $BΓ$  vero rectâ super  $EZ$ , congruet et  $Γ$  punctum ipsi  $Z$ , quia æqualis est  $BΓ$  ipsi  $EZ$ ; congruente igitur  $BΓ$  ipsi  $EZ$ , congruet et  $BA$ ,  $ΓA$  ipsis  $EA$ ,  $ΔZ$ . Si enim basis quidem  $BΓ$  basi  $EZ$  con- gruat,  $BA$ ,  $ΑΓ$  vero latera ipsis  $EA$ ,  $ΔZ$  non congruant, sed situm mutant ut  $EH$ ,  $HZ$ , constituentur super eâdem rectâ duabus rectis aliæ duæ rectæ æquales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non constituuntur

Soient les deux triangles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , ayant les deux côtés  $AB$ ,  $ΑΓ$  égaux aux deux côtés  $ΔE$ ,  $ΔZ$ , chacun à chacun, le côté  $AB$  égal au côté  $ΔE$ , et le côté  $ΑΓ$  égal au côté  $ΔZ$ ; qu'ils aient de plus la base  $BΓ$  égale à la base  $EZ$ ; je dis que l'angle  $BAΓ$  est égal à l'angle  $EAZ$ .

Car le triangle  $ABΓ$  étant appliqué sur le triangle  $ΔEZ$ , le point  $B$  étant placé sur le point  $E$ , et la droite  $BΓ$  sur la droite  $EZ$ , le point  $Γ$  s'appliquera sur le point  $Z$ , parce que  $BΓ$  est égal à  $EZ$ ; la droite  $BΓ$  s'appliquant sur la droite  $EZ$ , les droites  $BA$ ,  $ΓA$  s'appliqueront sur les droites  $EA$ ,  $ΔZ$ ; car si la base  $BΓ$  s'appliquant sur la base  $EZ$ , les côtés  $BA$ ,  $ΑΓ$  ne s'appliquaient pas sur les côtés  $ΔE$ ,  $ΔZ$ , et prenaient une autre position, comme  $EH$ ,  $HZ$ , on pourrait construire sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, deux droites

## 20 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄλλη καὶ ἄλλη σημείω, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δὲ οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ<sup>2</sup> ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἕξῃς.

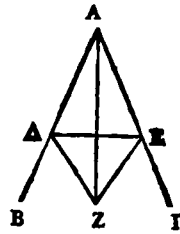
### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.  
Εστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· διττὴ δὲ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

quidem. Non igitur, congruente ΒΓ basi ΕΖ basi, non congruent et ΒΑ, ΑΓ latera ipsis ΕΔ, ΔΖ. Congruent igitur; quare et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ congruet, et æqualis ei erit. Si igitur duo, etc.

### PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.  
Sit datus angulus rectilineus ΒΑΓ; oportet igitur ipsum bifariam secare.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφερῆσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ πεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω

Sumatur enim in ΑΒ quodlibet punctum Δ, et auferatur ab ΑΓ ipsi ΑΔ æqualis ΑΕ, et jungatur ΔΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatelo ΔΕΖ, et jungatur ΑΖ;

égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres; mais elles ne peuvent pas être construites (7); donc la base ΒΓ s'appliquant sur la base ΕΖ, les côtés ΒΑ, ΑΓ ne peuvent pas ne point s'appliquer sur les côtés ΕΔ, ΔΖ; donc ils s'appliqueront les uns sur les autres; donc l'angle ΒΑΓ s'applique sur l'angle ΕΑΖ; donc il lui est égal. Donc, etc.

### PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit ΒΑΓ un angle rectiligne donné; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite ΑΒ un point quelconque Δ, retranchons de la droite ΑΓ une droite ΑΕ égale à la droite ΑΔ, joignons ΔΕ, sur la droite ΔΕ, construisons

# LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 21

ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΑΖ ὀρθίας.

Ἐπὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσις τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν·.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία ὀρθόγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΑΖ ὀρθίας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

dico ΒΑΓ angulum bifariam secari ab ΑΖ rectâ.

Quoniam enim æqualis est ΑΔ ipsi ΑΕ, communis autem ΑΖ, duæ ΔΑ, ΑΖ duabus ΕΑ, ΑΖ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΕΖ æqualis est; angulus igitur ΔΑΖ angulo ΕΑΖ æqualis est.

Datus igitur angulus rectilinus ΒΑΓ bifariam secatur ab ΑΖ rectâ. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

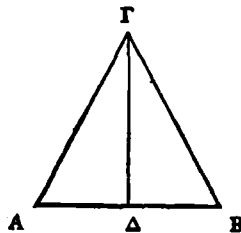
Τὴν δοθεῖσαν ὀρθίαν πεπρασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα ὀρθία πεπρασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὲ τὴν ΑΒ ὀρθίαν πεπρασμένην δίχα τεμεῖν.

## PROPOSITIO X.

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata ΑΒ; oportet igitur ΑΒ rectam terminatam bifariam secare.



Συμμετράτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα

Constituatur super ipsâ triangulum æquilaterum ΑΒΓ, et secetur ΑΓΒ angulus bifariam

le triangle équilatéral ΔΕΖ (1), et joignons ΑΖ; je dis que l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ.

Puisque ΑΔ est égal à ΑΕ, et que la droite ΑΖ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΖ seront égales aux deux droites ΕΑ, ΑΖ, chacune à chacune; mais la base ΑΖ est égale à la base ΕΖ; donc l'angle ΔΑΖ est égal à l'angle ΕΑΖ (8).

Donc l'angle rectiligne donné ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ; ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION X.

Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

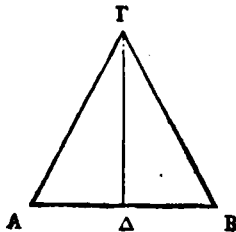
Soit donnée une droite finie ΑΒ; il faut partager la droite finie ΑΒ en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ΑΒΓ (1), et partageons

## 22 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα διχῶ  
τίτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

ab ΓΔ rectā; dico AB rectam bifariam secari  
in Δ puncto.



Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ  
ἡ ΓΔ, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι  
εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ  
γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ  
βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν·.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ διχῶ  
τίτμηται κατὰ τὸ Δ. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, com-  
munis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ,  
ΓΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus  
ΑΓΔ angulo ΒΓΔ æqualis est; basis igitur ΑΔ  
basi ΒΔ æqualis est.

Ergo data recta terminata ΑΒ bifariam se-  
catur in puncto Δ. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

### PROPOSITIO XI.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος  
σημεῖου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν  
ἀγαγεῖν.

Datæ rectæ, a puncto in eâ dato, ad rectos  
angulos rectam lineam ducere.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν  
σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου  
τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν  
ἀγαγεῖν.

Sit quidem data recta ΑΒ, datum vero  
punctum in eâ Γ; oportet igitur a Γ puncto ipsi  
ΑΒ rectæ ad rectos angulos rectam lineam  
ducere.

l'angle ΑΓΒ en deux parties égales par la droite ΓΔ (9); je dis que la droite ΑΒ est  
partagée en deux parties égales au point Δ.

Car puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune,  
les deux droites ΑΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ, chacune à chacune;  
mais l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΒΔ (4).

Donc la droite donnée et finie ΑΒ est partagée en deux parties égales au point Δ;  
ce qu'il fallait faire.

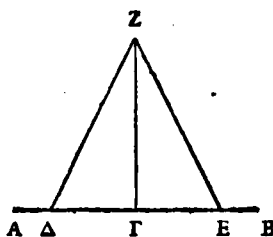
### PROPOSITION XI.

A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une  
ligne droite à angles droits.

Soit ΑΒ une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite; il faut du  
point Γ mener à la droite ΑΒ une ligne droite à angles droits.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημείου τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπέζευχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Sumatur in ΑΓ quodlibet punctum Δ, et ponatur ipsi ΓΔ æqualis ΓΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatelo ΖΔΕ, et jungatur ΖΓ; dico datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos rectam lineam ductam esse ΖΓ.



Ἐπὶ γὰρ ἴση ἰστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσις τῇ ΖΕ ἴση ἰστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἰστί, καὶ εἰσιν ἰσιζῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείᾳ σταθεῖσα τὰς ἰσιζῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰστί· ὀρθὴ ἄρα ἰστί ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Quoniam enim æqualis est ΓΔ ipsi ΓΕ, communis vero ΓΖ, duæ sane ΔΓ, ΓΖ duabus ΕΓ, ΓΖ æquales sunt utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΖΕ æqualis est; angulus igitur ΔΓΖ angulo ΕΓΖ æqualis est, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ergo datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos recta linea ducta est ΓΖ. Quod oportebat facere.

Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (3), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ; je dis que la droite ΓΖ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10); donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit.

Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

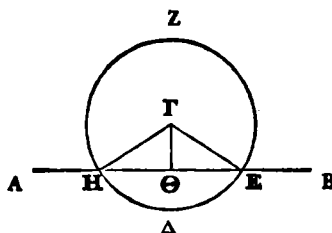
## PROPOSITIO XII.

Επὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· διττὸ δὲ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta infinita AB, datum vero punctum Γ, quod non est in eâ; oportet igitur super datam rectam infinitam AB, a dato puncto Γ, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρον μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ EZH, καὶ τετμήσθω ἡ EH εὐθεῖα ὁδὸν κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Sumatur enim ad alteram partem AB rectæ quodlibet punctum Δ, et centro quidem Γ, intervallo autem ΓΔ, circulus describatur EZH, et secetur EH recta bifariam in Θ, et jungantur ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ rectæ; dico super datam rectam infinitam AB, a dato puncto Γ, quod non est in eâ, perpendicularem ductam esse ΓΘ.

## PROPOSITION XII.

A une droite indéfinie et donnée, et d'un point donné qui n'est pas dans cette droite, mener une ligne droite perpendiculaire.

Soit AB une droite indéfinie et donnée, et Γ un point donné qui n'est pas dans cette droite; il faut à cette droite indéfinie et donnée AB, mener du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, une ligne droite perpendiculaire.

Prenons de l'autre côté de la droite AB un point quelconque Δ, et du centre Γ et d'un intervalle ΓΔ, décrivons le cercle EZH (dem. 3), partageons la droite EH en deux parties égales au point Θ (10), et joignons ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ; je dis qu'à la droite indéfinie et donnée AB, et du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, on a mené une perpendiculaire ΓΘ.

Επί γάρ ἴση ἔστιν ἡ  $\Theta\Theta$  τῇ  $\Theta\Xi$ , κοινὴ δὲ ἡ  $\Theta\Gamma$ , δύο δὲ αἱ  $\Theta\Xi$ ,  $\Theta\Gamma$  δυοὶ ταῖς  $\Xi\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ  $\Gamma\Xi$  βάσι τῇ  $\Gamma\Theta$  ἔστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Gamma\Theta\Xi$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Xi\Theta\Gamma$  ἔστιν ἴση, καὶ εἰσιν ἐφ' ἑξῆς. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἔστιν· καὶ ἡ ἐφιστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφίστηκαν.

Επὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν  $AB$ , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ  $\Gamma$ , ὃ μὴ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἔκται ἡ  $\Gamma\Theta$ . Οὔτε ἴδι ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εάν' εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ  $AB$  ἐπ' εὐθείαν τὴν  $\Gamma\Delta$  σταθεῖσα γωνίας ποιεῖτω, τὰς ὑπὸ  $\Gamma\Delta A$ ,  $AB\Delta$ . λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ  $\Gamma\Delta A$ ,  $AB\Delta$  γωνίαι, ἤτοι<sup>2</sup> δύο ὀρθαὶ εἰσιν, ἢ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Car puisque la droite  $\Theta\Theta$  est égale à la droite  $\Theta\Xi$ , et que la droite  $\Theta\Gamma$  est commune, les deux droites  $\Theta\Gamma$ ,  $\Theta\Xi$  sont égales aux deux droites  $\Xi\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$ , chacune à chacune ; mais la base  $\Gamma\Xi$  est égale à la base  $\Gamma\Theta$  (déf. 15) ; donc l'angle  $\Gamma\Theta\Xi$  est égal à l'angle  $\Xi\Theta\Gamma$  (8) ; mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

On a donc mené  $\Gamma\Theta$  perpendiculaire à la droite indéfinie  $AB$ , du point donné  $\Gamma$  placé hors de cette droite. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Qu'une droite  $AB$  placée sur une droite  $\Gamma\Delta$  fasse les angles  $\Gamma\Delta A$ ,  $AB\Delta$  ; je dis que les angles  $\Gamma\Delta A$ ,  $AB\Delta$  sont ou deux droits, ou égaux à deux droits.

Quoniam enim æqualis est  $\Theta\Theta$  ipsi  $\Theta\Xi$ , communis autem  $\Theta\Gamma$ , duæ utique  $\Theta\Xi$ ,  $\Theta\Gamma$  duabus  $\Xi\Theta$ ,  $\Theta\Gamma$  æquales sunt, utraque utrique, et basis  $\Gamma\Xi$  basi  $\Gamma\Theta$  est æqualis ; angulus igitur  $\Gamma\Theta\Xi$  angulo  $\Xi\Theta\Gamma$  est æqualis, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est ; et insistens recta perpendicularis appellatur in quam insistit.

Super datam igitur rectam infinitam  $AB$  a dato puncto  $\Gamma$  quod non est in ea, perpendicularis ducta est  $\Gamma\Theta$ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII.

Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet.

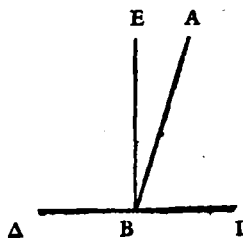
Recta enim quædam  $AB$  in rectam  $\Gamma\Delta$  insistens angulos faciat  $\Gamma\Delta A$ ,  $AB\Delta$  ; dico  $\Gamma\Delta A$ ,  $AB\Delta$  angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales.



## 26 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ἄλθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ ευθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἴπαι ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσὶ<sup>4</sup>. Πάλιν, ἴπαι ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ,

Si igitur quidem æqualis est ΓΒΑ ipsi ΑΒΔ, duo recti sunt. Si vero non, ducatur a Β puncto ΓΔ rectæ ad rectos ipsa ΒΕ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt. Et quoniam ΓΒΕ duobus ΓΒΑ, ΑΒΕ æqualis est, communis addatur ΕΒΔ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ æquales sunt. Rursus, quoniam ΔΒΑ duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ æqualis est, communis addatur ΑΒΓ; ergo



κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσιν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῇ αὐτῇ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. Εἴν<sup>6</sup> ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΒΑ, ΑΒΓ tribus ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus eisdem æquales; quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; ergo et ΓΒΕ, ΕΒΔ ipsis ΔΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt; sed ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt; ergo et ΔΒΑ, ΑΒΓ duobus rectis æquales sunt. Si igitur, etc.

Car si l'angle ΓΒΑ est égal à l'angle ΑΒΔ, ces deux angles sont droits (déf. 10). Si non, du point Β conduisons ΒΕ à angles droits à ΓΔ (11); les deux angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront droits; et puisque l'angle ΓΒΕ est égal aux deux angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, si l'on ajoute l'angle commun ΕΒΔ, les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront égaux aux trois angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. De plus, puisque l'angle ΔΒΑ est égal aux deux angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, si l'on ajoute l'angle commun ΑΒΓ, les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ seront égaux aux trois angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Mais on a démontré que les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ leur sont égaux; et les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles; donc les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont égaux aux angles ΔΒΑ, ΑΒΓ; mais les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont deux angles droits; donc les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Εὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιζήσας γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ AB, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ B, δύο εὐθεῖαι αἱ BG, BD, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιζήσας γωνίας τὰς ὑπὸ ABG, ABD δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖταισαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσιν τῇ GB ἢ BA.

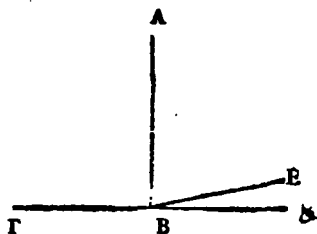
Εἰ γὰρ μὴ ἔστι τῇ BG ἐπ' εὐθείας ἡ BA, ἔστω τῇ GB ἐπ' εὐθείας ἡ BE.

PROPOSITIO XIV.

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in eâ, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciant, in directum erunt sibi ipsis rectæ.

Ad aliquam enim rectam AB, et ad punctum in eâ B, duæ rectæ BG, BD, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos ABG, ABD duobus rectis æquales faciant; dico in directum esse ipsi GB ipsam BA.

Si enim non est ipsi BG in directum BA, sit ipsi GB in directum BE.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ AB ἐπ' εὐθείαν τὴν GBE ἐφίστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ABG, ABE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ABG, ABD

Quoniam igitur recta AB super rectam GBE insistit, ABG, ABE anguli duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ABG, ABD duobus

PROPOSITION XIV.

Si à une droite, et à un point de cette droite, deux droites, non placées du même côté font les angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites seront dans la même direction.

Qu'à une droite AB, et à un point B de cette droite, les deux droites BG, BD, non placées du même côté, fassent les angles de suite ABG, ABD égaux à deux droits; je dis que BA est dans la direction de GB.

Car si BA n'est point dans la direction de BG, que BE soit dans la direction de GB (dem. 2).

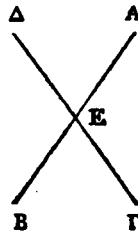
Puisque la droite AB est placée sur la droite GBE, les angles ABG, ABE sont égaux à deux droits (13); mais les angles ABG, ABD sont égaux à deux droits;

## 28 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατα κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖν.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνόμεναι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

rectis æquales; ergo ΓΒΑ, ΑΒΕ ipsis ΓΒΑ, ΑΒΔ æquales sunt. Communis auferatur ΓΒΑ; reliquus igitur ΑΒΕ reliquo ΑΒΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur in directum est ΒΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque esse aliam quamdam præter ΒΔ; in directum igitur est ΓΒ ipsi ΒΔ. Si igitur, etc.

### PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese secant, ad verticem angulos æquales inter se facient.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ sese secant in Ε puncto; dico æqualem esse quidem ΑΕΓ angulum ipsi ΔΕΒ, ΓΕΒ vero ipsi ΑΕΔ.

donc les angles ΓΒΑ, ΑΒΕ sont égaux aux angles ΓΒΑ, ΑΒΔ. Retranchons l'angle commun ΓΒΑ, l'angle restant ΑΒΕ sera égal à l'angle restant ΑΒΔ, le plus petit au plus grand; ce qui est impossible. ΒΕ n'est donc pas dans la direction de ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre excepté ΒΔ; donc ΓΒ est dans la direction de ΒΔ. Donc, etc.

### PROPOSITION XV.

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.

Que les droites ΑΒ, ΓΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΔΕΒ, et l'angle ΓΕΒ égal à l'angle ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφίστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφίστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἔστί. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσὶν. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Πατὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβλήθεισος, ἡ ἐκτὸς γωνία ἐκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἔστί.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβελέσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

Quoniam enim recta ΑΕ in rectam ΓΔ insistit angulos faciens ΓΕΑ, ΑΕΔ; ipsi ΓΕΑ, ΑΕΔ anguli duobus rectis æquales sunt. Rursus, quoniam recta ΔΕ in rectam ΑΒ insistit, angulos faciens ΑΕΔ, ΔΕΒ; ipsi ΑΕΔ, ΔΕΒ anguli duobus rectis æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΕΑ, ΑΕΔ duobus rectis æquales; ergo ΓΕΑ, ΑΕΔ ipsis ΑΕΔ, ΔΕΒ æquales sunt. Communis auferatur ΑΕΔ, reliquus igitur ΓΕΑ reliquo ΒΕΔ æqualis est. Similiter autem ostendemus et ΓΕΒ, ΔΕΑ esse æquales. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum major est.

Sit triangulum ΑΒΓ, et producaturs ipsius unum latus ΒΓ ad Δ; dico exteriorem angulum

Car puisque la droite ΑΕ est placée sur la droite ΓΔ, faisant les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ, les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits. De plus, puisque la droite ΔΕ est placée sur la droite ΑΒ, faisant les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ, les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ sont égaux à deux droits. Mais on a démontré que les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits; donc les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux aux angles ΑΕΔ, ΔΕΒ. Retranchons l'angle commun ΑΕΔ; l'angle restant ΓΕΑ sera égal à l'angle restant ΒΕΔ. On démontrera semblablement que les angles ΓΕΒ, ΔΕΑ sont égaux. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ΑΒΓ, prolongeons le côté ΒΓ vers Δ; je dis que l'angle

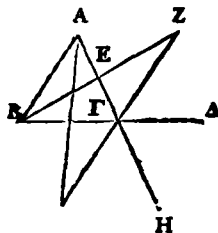
### 30 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίων, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τιτμήσθω ἡ ΑΓ διχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

ΑΓΔ majorem esse utroque interiorum et oppositorum ΓΒΑ, ΒΑΓ angulorum.

Secetur ΑΓ bifariam in Ε, et juncta ΒΕ producat in directum ad Ζ, et ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, et jungatur ΖΓ, et producat ΑΓ ad Η.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυοὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσις τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τρίγωνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῇς ὑπὸ ΕΓΖ.

Quoniam igitur æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΓ, ΒΕ vero ipsi ΕΖ, duæ ΑΕ, ΕΒ duabus ΓΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΕΒ angulo ΖΕΓ æqualis est, ad verticem enim est; basis igitur ΑΒ basi ΖΓ æqualis est, et ΑΒΕ triangulum ΖΕΓ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΑΕ ipsi ΕΓΖ. Major autem est ΕΓΔ ipso ΕΓΖ; major est

extérieur ΑΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Partageons la droite ΑΓ en deux parties égales en Ε (10); et ayant joint la droite ΒΕ, prolongeons-la vers Ζ, faisons ΕΖ égal à ΒΕ (3), joignons la droite ΖΓ, et prolongeons ΑΓ vers Η.

Puisque ΑΕ est égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΖ, les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΓΕ, ΕΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΖΕΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base ΑΒ est égale à la base ΖΓ (4); le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΖΕΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΓΖ (not. 9); mais l'angle ΕΓΔ est plus grand que l'angle ΕΓΖ; donc l'angle ΑΓΔ est plus grand

# LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ομοίως δὲ, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, διειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτίστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ΑΓΔ ipso ΒΑΕ. Similiter autem, ΒΓ secta bifariam, ostendetur et ΒΓΗ, hoc est ΑΓΔ, major et ipso ΑΒΓ. Omnis igitur, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

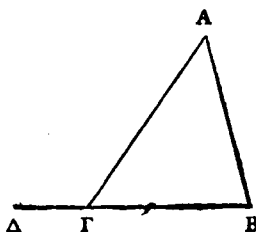
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

## PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Sit triangulus ΑΒΓ; dico ΑΒΓ trianguli duos angulos duobus rectis minores esse, omnifariam sumptos.



Εκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίας, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές

Producatur enim ΒΓ ad Δ.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ exterior est angulus ΑΓΔ, major est interiore et opposito ΑΒΓ. Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ ipsis ΑΒΓ, ΒΓΑ majores sunt. Sed ΑΓΔ, ΑΓΒ duobus

que l'angle ΒΑΕ. Si on partage le côté ΒΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle ΒΓΗ, c'est-à-dire ΑΓΔ, est plus grand que l'angle ΑΒΓ. Donc, etc.

## PRÔPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; je dis que deux angles du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons ΒΓ vers Δ (dem. 2).

Puisque l'angle ΑΓΔ du triangle ΑΒΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ (16). Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ, les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront

## 32 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι  
είσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες  
είσιν. Ομοίως δὴ δειξομέν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,  
ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ  
ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μεί-  
ζονα γωνίαν ὑποτείνει.

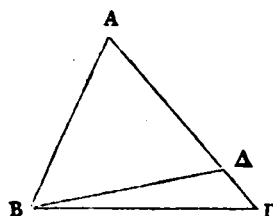
Εστω γάρ τ' τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν  
ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  
ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

rectis æquales sunt; ergo ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus  
rectis minores sunt. Similiter autem osten-  
demus et ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis minores  
esse, et adhuc ipsos ΓΑΒ, ΑΒΓ. Omnis  
igitur, etc.

### PROPOSITION XVIII.

Omnis trianguli majus latus majorem an-  
gulum subtendit.

Sit enim triangulum ΑΒΓ, majus habens ΑΓ  
latus ipso ΑΒ; dico et angulum ΑΒΓ majorem  
esse ipso ΒΓΑ.



Επεὶ γάρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω  
τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία  
ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπὸ-  
ναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ

Quoniam enim major est ΑΓ ipsā ΑΒ, po-  
natur ipsi ΑΒ æqualis ΑΔ, et jungatur ΒΔ.

Et quoniam trianguli ΒΓΔ exterior est an-  
gulus ΑΔΒ, major est interiore et opposito ΑΓΒ.  
Æqualis autem ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ, quia et latus ΑΒ

plus grands que les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux  
droits (13); donc les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ sont moindres que deux droits. Nous démon-  
trerons semblablement que les angles ΒΑΓ, ΑΓΒ, et les angles ΓΑΒ, ΑΒΓ sont moindres  
que deux droits. Donc, etc.

### PROPOSITION XVIII.

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant le côté ΑΓ plus grand que le côté ΑΒ; je dis que  
l'angle ΑΒΓ est plus grand que l'angle ΒΓΑ.

Puisque ΑΓ est plus grand que ΑΒ, faisons ΑΔ égal à ΑΒ (3), et joignons ΒΔ.

Puisque ΑΔΒ est un angle extérieur du triangle ΒΔΓ, cet angle est plus grand que  
l'angle intérieur et opposé ΔΓΒ (16); mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5), parce

ὕπὸ  $AB\Delta$ , ἵπαι καὶ πλευρὰ ἡ  $AB$  τῇ  $A\Delta$  ἴσιν  
 ἴση· μίζων ἄρα καὶ ἡ ὕπὸ  $AB\Delta$  τῆς ὕπὸ  $ΑΓΒ$ ·  
 πολλῶν ἄρα ἡ ὕπὸ  $AB\Gamma$  μίζων ἐστὶ τῆς ὕπὸ  $ΑΓΒ$ .  
 Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἰξῆς.

ipsi  $A\Delta$  est æquale; major igitur et  $AB\Delta$  ipso  
 $ΑΓΒ$ ; multo igitur  $AB\Gamma$  major est ipso  $ΑΓΒ$ .  
 Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

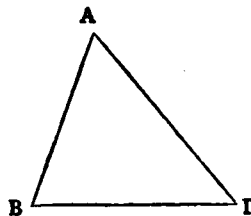
PROPOSITIO XIX.

Παντὸς τριγώνου ὕπὸ τὴν μίζονα γωνίαν ἡ  
 μίζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Εστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , μίζονα ἔχον τὴν ὕπὸ  
 $AB\Gamma$  γωνίαν τῆς ὕπὸ  $B\Gamma A$ . λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ  
 ἡ  $ΑΓ$  πλευρᾶς τῆς  $AB$  μίζων ἐστίν.

Omnis trianguli majorem angulum majus  
 latus subtendit.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , majorem habens  $AB\Gamma$   
 angulum ipso  $B\Gamma A$ ; dico et latus  $ΑΓ$  latere  
 $AB$  majus esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $AB$ , ἡ  
 ἐλάσσων· ἴση μιν οὐκ ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $AB$ . ἴση  
 γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὕπὸ  $AB\Gamma$  τῇ ὕπὸ  $ΑΓΒ$ .  
 οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $AB$ .  
 Οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $AB$ · ἐλάσσων  
 γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὕπὸ  $AB\Gamma$  τῆς ὕπὸ  $ΑΓΒ$ .

Si enim non; vel æqualis est  $ΑΓ$  ipsi  $AB$ , vel  
 minor; æqualis quidem non est  $ΑΓ$  ipsi  $AB$ ,  
 æqualis enim esset et angulus  $AB\Gamma$  ipsi  $ΑΓΒ$ .  
 Non est autem; non igitur æqualis est  $ΑΓ$  ipsi  
 $AB$ . Neque tamen minor est  $ΑΓ$  ipsâ  $AB$ ; minor  
 enim esset et angulus  $AB\Gamma$  ipso  $ΑΓΒ$ ; non est

que le côté  $AB$  est égal au côté  $A\Delta$ ; donc l'angle  $AB\Delta$  est plus grand que l'angle  $ΑΓΒ$ ;  
 donc l'angle  $AB\Gamma$  est beaucoup plus grand que l'angle  $ΑΓΒ$ . Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle.

Soit le triangle  $AB\Gamma$ , ayant l'angle  $AB\Gamma$  plus grand que l'angle  $B\Gamma A$ ; je dis que  
 le côté  $ΑΓ$  est plus grand que le côté  $AB$ .

Car si cela n'est point,  $ΑΓ$  est égal à  $AB$ , ou plus petit. Mais  $ΑΓ$  n'est pas  
 égal à  $AB$ , car alors l'angle  $AB\Gamma$  serait égal à l'angle  $ΑΓΒ$  (5); mais il ne l'est pas;  
 donc  $ΑΓ$  n'est pas égal à  $AB$ . Le côté  $ΑΓ$  n'est pas plus petit que le côté  $AB$ , car  
 alors l'angle  $AB\Gamma$  serait plus petit que l'angle  $ΑΓΒ$  (18); mais il ne l'est pas; donc le



# 34 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οὐκ ἔστι δὲ οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἔστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.  
Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἔστι· μείζων ἄρα ἔστιν  
ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἰζῆς.

autem ; non igitur minor est ΑΓ ipsā ΑΒ. Os-  
tensum est autem neque æqualem esse ; major  
igitur est ΑΓ ipsā ΑΒ. Omnis igitur, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

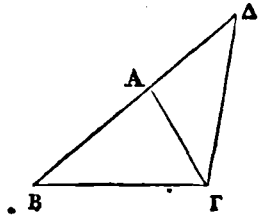
## PROPOSITIO XX.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς  
μειζόνες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ  
τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες  
εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ,  
ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ,  
ΓΑ τῆς ΑΒ.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora  
sunt, omnifariam sumpta.

Sit enim tringulum ΑΒΓ ; dico ΑΒΓ trian-  
guli duo latera reliquo majora esse, omni-  
fariam sumpta ; ipsa quidem ΒΑ, ΑΓ ipso ΒΓ,  
ipsa vero ΑΒ, ΒΓ ipso ΑΓ, et ipsa ΒΓ, ΓΑ  
ipso ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ  
κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Επεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἔστι καὶ  
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ὅ· μείζων ἄρα ἡ

Producatur enim ΒΑ ad Δ punctum, et po-  
natur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΔΑ ipsi ΑΓ,  
æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ, major

côté ΑΓ n'est pas plus petit que le côté ΑΒ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas  
égal ; donc ΑΓ est plus grand que ΑΒ. Donc, etc.

## PROPOSITION XX.

Deux côtés d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris,  
sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ΑΒΓ ; je dis que deux côtés du triangle ΑΒΓ, de quelque  
manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le côté restant ; les côtés ΒΑ, ΑΓ  
plus grands que ΒΓ ; les côtés ΑΒ, ΒΓ plus grands que ΑΓ, et les côtés ΒΓ, ΓΑ plus  
grands que ΑΒ.

Prolongeons ΒΑ vers Δ, faisons ΑΔ égal à ΓΑ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΑΓ, l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5) ; donc l'angle ΒΓΔ

ὕπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπὶ τρίγωνόν ἐστι  
τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς  
ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων  
πλευρὰ ὑποτείνει, ἢ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων.  
Ἰση δὲ ἢ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ  
τῆς ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ,  
ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονες εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.  
Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν  
περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συστα-  
θεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσ-  
σονες μὲν ἴσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν  
τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι  
ἐντὸς συνιστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ,  
ΔΓ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευ-  
ρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ  
γωνίαν περιέχουσιν, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

utique est  $\angle BGD$  ipso  $\angle ADG$ ; et quoniam triangulum  
est  $\triangle GVB$ , majorem habens  $\angle BGD$  angulum ipso  $\angle BGD$ ,  
majorem autem angulum majus latus subtendit;  
 $\Delta B$  igitur ipsa  $B\Gamma$  est major; æqualis autem  $\Delta A$   
ipsi  $AG$ ; majores igitur  $BA$ ,  $AG$  ipsa  $B\Gamma$ . Similiter  
autem ostendemus et ipsas quidem  $AB$ ,  $B\Gamma$  ipsa  
 $GA$  majores esse; ipsas vero  $B\Gamma$ ,  $GA$  ipsa  $AB$ .  
Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XXI.

Si trianguli super uno laterum a terminis duæ  
rectæ intus constituentur, constructæ reliquis  
trianguli duobus lateribus minores quidem  
erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim  $AB\Gamma$  super uno laterum  $B\Gamma$ ,  
a terminis  $B$ ,  $\Gamma$ , duæ rectæ intus constituentur  
 $BD$ ,  $\Delta\Gamma$ ; dico  $BD$ ,  $\Delta\Gamma$  latera reliquis trianguli  
duobus lateribus  $BA$ ,  $AG$  minora quidem  
esse, majorem vero angulum continere, ipsum  
 $B\Delta\Gamma$  ipso  $BAG$ .

est plus grand que l'angle  $\Delta D\Gamma$  (not. 9); donc, puisque dans le triangle  $\Delta GB$ , l'angle  
 $BGD$  est plus grand que l'angle  $B\Delta\Gamma$ , et qu'un plus grand côté soutend un plus grand  
angle (19), le côté  $\Delta B$  est plus grand que le côté  $B\Gamma$ ; mais  $\Delta A$  est égal à  $AG$ ; donc  
les côtés  $BA$ ,  $AG$  sont plus grands que  $B\Gamma$ . Nous démontrerons semblablement  
que les côtés  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont plus grands que  $GA$ , et les côtés  $B\Gamma$ ,  $GA$  plus grands  
que  $AB$ . Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si des extrémités d'un des côtés d'un triangle, on construit intérieurement deux  
droites, ces deux droites seront plus petites que les deux côtés restans du  
triangle, mais elles comprendront un plus grand angle.

Des extrémités  $B$ ,  $\Gamma$  du côté  $B\Gamma$  du triangle  $AB\Gamma$ , construisons intérieurement  
les deux droites  $BD$ ,  $\Delta\Gamma$ ; je dis que les droites  $BD$ ,  $\Delta\Gamma$  sont plus petites que  
les deux côtés restants  $BA$ ,  $AG$ , et qu'elles comprennent un angle  $B\Delta\Gamma$  plus  
grand que l'angle  $BAG$ .

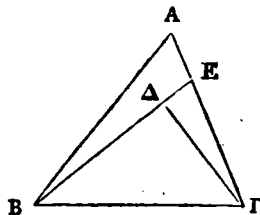
## 36 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονες εἰσι· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονες εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῶν ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονες εἰσι.

Producatur enim ΒΔ ad Ε.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ΑΒΕ trianguli duo latera ΑΒ, ΑΕ ipso ΒΕ majora sunt. Communis addatur ΕΓ; ergo ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΕ, ΕΓ majores sunt. Rursus, quoniam ΓΕΔ trianguli duo latera ΓΕ, ΕΔ ipso ΓΔ majora sunt; communis addatur ΔΒ; ergo ΓΕ, ΕΒ ipsis ΓΔ, ΔΒ majores sunt. Sed ipsis ΒΕ, ΕΓ majores ostensæ sunt ΒΑ, ΑΓ; multo igitur ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ majores sunt.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων εἰδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Rursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito major est, ΓΔΕ trianguli exterior angulus ΒΔΓ major est ipso ΓΕΔ. Propter eadem utique et ΑΒΕ trianguli exterior angulus ΓΕΒ major est ipso ΒΑΓ. Sed ipso ΓΕΒ major ostensus est ΒΔΓ; multo igitur ΒΔΓ major est ipso ΒΑΓ. Si igitur, etc.

Prolongeons ΒΔ vers Ε.

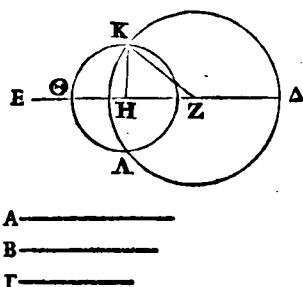
Puisque deux côtés d'un triangle quelconque sont plus grands que le côté restant (20), les deux côtés ΑΒ, ΑΕ du triangle ΑΒΕ sont plus grands que le côté ΒΕ; donc si nous ajoutons la droite commune ΒΓ, les droites ΒΑ, ΑΓ seront plus grandes que ΒΕ, ΕΓ. De plus, puisque les deux côtés ΓΕ, ΕΔ du triangle ΓΕΔ sont plus grands que ΓΔ, si nous ajoutons la droite commune ΔΒ, les droites ΓΕ, ΕΒ seront plus grandes que ΓΔ, ΔΒ; mais on a démontré que les droites ΒΑ, ΑΓ sont plus grandes que ΒΕ, ΕΓ; donc les droites ΒΑ, ΑΓ sont beaucoup plus grandes que ΒΔ, ΔΓ.

De plus, puisqu'un angle extérieur d'un triangle quelconque est plus grand qu'un des angles intérieurs et opposés (16), l'angle ΒΔΓ, qui est un angle extérieur du triangle ΔΕΓ, est plus grand que l'angle ΓΕΔ. Par la même raison l'angle ΓΕΒ, qui est un angle extérieur du triangle ΑΒΕ, est plus grand que l'angle ΒΑΓ; mais il a été démontré que l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΓΕΒ; donc l'angle ΒΔΓ est beaucoup plus grand que l'angle ΒΑΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις<sup>1</sup>, τρίγωνον συστήσασθαι· διὸ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζοντας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου, τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζοντας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας<sup>2</sup>.

Εστώσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἴστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· διὸ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.



Εκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἀπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση

Ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliquâ majores esse, omnifariam sumptas, quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumpta.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ, quarum duæ reliquâ majores sint, omnifariam sumptæ, ipsæ quidem Α, Β ipsâ Γ, ipsæ vero Α, Γ ipsâ Β, et denique ipsæ Β, Γ ipsâ Α; oportet igitur ex rectis æqualibus ipsis Α, Β, Γ triangulum constituere.

Exponatur aliqua recta ΔΕ, terminata quidem ad Δ, infinita vero ad Ε; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΖ, ipsi vero Β æqualis ΖΗ, et ipsi Γ

PROPOSITION XXII.

Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle: il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grande que la troisième; parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

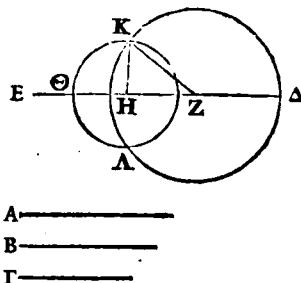
Soient données les trois droites Α, Β, Γ, dont deux, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième; les droites Α, Β plus grandes que Γ; les droites Α, Γ plus grandes que Β, et enfin les droites Β, Γ plus grandes que Α; il faut, avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ, construire un triangle.

Soit la droite ΔΕ, terminée en Δ, et indéfinie en Ε; faisons la droite ΔΖ égale à la droite Α (prop. 3), la droite ΖΗ égale à la droite Β, et la droite ΗΕ égale à

# 38 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ή ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ.

æqualis ΗΘ ; et centro quidem Ζ, intervallo vero ΖΔ, circulus describatur ΔΚΛ ; et rursus, centro quidem Η, intervallo vero ΗΘ, circulus describatur ΚΛΘ, et jungantur ΚΖ, ΚΗ ; dico ex tribus rectis, æqualibus ipsis Α, Β, Γ, triangulum constitutum esse ΚΖΗ.



Επεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΚΛΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ΔΚΛ circuli, æqualis est ΖΔ ipsi ΖΚ ; sed ΖΔ ipsi Α est æqualis ; et ΚΖ igitur ipsi Α est æqualis. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ΚΛΘ circuli, æqualis est ΗΘ ipsi ΗΚ ; sed ΗΘ ipsi Γ est æqualis ; et ΚΗ igitur ipsi Γ est æqualis. Est autem et ΖΗ ipsi Β æqualis ; tres igitur rectæ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ tribus Α, Β, Γ æquales sunt.

Ex tribus igitur rectis ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, quæ sunt æquales datis rectis Α, Β, Γ, triangulum constitutum est ΚΖΗ. Quod oportebat facere.

la droite γ ; du centre Ζ et de l'intervalle ΖΔ décrivons le cercle ΔΚΛ (dem. 3) ; et de plus du centre Η et de l'intervalle ΗΘ décrivons le cercle ΚΛΘ, et joignons ΚΖ, ΚΗ ; je dis que le triangle ΚΖΗ est construit avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ.

Car puisque le point Ζ est le centre du cercle ΔΚΛ, ΖΔ est égal à ΖΚ (déf. 15) ; mais ΖΔ est égal à Α ; donc ΚΖ égal à Α. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΚΛΘ, ΗΘ est égal à ΗΚ ; mais ΗΘ est égal à γ ; donc ΚΗ est égal à γ. Mais ΖΗ est égal à Β ; donc les trois droites ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ sont égales aux trois droites Α, Β, Γ.

Donc le triangle ΚΖΗ a été construit avec trois droites ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, qui sont égales aux trois droites données Α, Β, γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

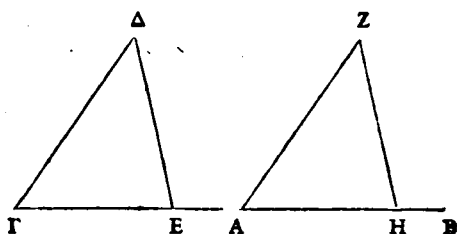
PROPOSITIO XXIII.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσῃ γωνίαν εὐθυγράμμῳ συστήσασθαι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὲ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσῃ γωνίαν εὐθυγράμμῳ συστήσασθαι.

Ad datam rectam, et ad punctum in eâ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit quidem data recta ΑΒ, in eâ vero punctum Α, et datus angulus rectilincus ΔΓΕ; oportet igitur ad datam rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ æqualem angulum rectilineum constituere.



Εἰλήφθω ἰφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεία τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνιστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Sumantur in utraq̃ue ipsarum ΓΔ, ΓΕ quælibet puncta Δ, Ε, et jungatur ΔΕ; et ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, triangulum constituatur ΑΖΗ, ita ut æqualis sit ΓΔ quidem ipsi ΑΖ, ipsa vero ΓΕ ipsi ΑΗ, et denique ΔΕ ipsi ΖΗ.

PROPOSITION XXIII.

A une droite donnée, et à un point de cette droite, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soient donnés la droite ΑΒ, et un point Α dans cette droite; que ΔΓΕ soit l'angle rectiligne donné; il faut à la droite donnée ΑΒ et au point Α de cette droite, construire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné ΔΓΕ.

Soient pris, dans l'une et l'autre des droites ΓΔ, ΓΕ, deux points quelconques Δ, Ε, joignons ΔΕ, et avec trois droites égales aux droites ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, construisons le triangle ΑΖΗ (22), de manière que ΓΔ soit égal à ΑΖ, ΓΕ égal à ΑΗ, et ΔΕ égal à ΖΗ.

## 40 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επειδ οὖν ἂν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυοὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΔΕ ἴσῃ τῇ ΖΗ ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξῃ.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἴστω λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Quoniam igitur duæ ΔΓ, ΓΕ duabus ΖΑ, ΑΗ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΕ basi ΖΗ æqualis, angulus utique ΔΓΕ angulo ΖΑΗ est æqualis.

Ad datam igitur rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ, æqualis angulus rectilineus constitutus est ΖΑΗ. Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo majorem habeant, qui ab æqualibus lateribus continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ major sit; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ majorem esse.

Puisque les deux droites ΔΓ, ΓΕ sont égales aux deux droites ΖΑ, ΑΗ, chacune à chacune, et que la base ΔΕ est égale à la base ΖΗ, l'angle ΔΓΕ sera égal à l'angle ΖΑΗ (8).

Donc à la droite ΑΒ, et au point Α de cette droite, on a construit l'angle rectiligne ΖΑΗ égal à l'angle rectiligne ΔΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XXIV.

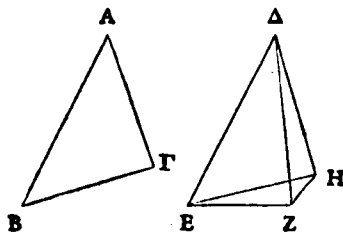
Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; que l'angle ΒΑΓ soit plus grand que l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est plus grande que la base ΕΖ.

# LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 41

Επει γὰρ μείζων ἴσιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Quoniam enim major est ΒΑΓ angulus ΕΔΖ angulo, constitutatur ad ΔΕ rectam, et ad punctum in eâ Δ, ipsi ΒΑΓ angulo æqualis ΕΔΗ; et ponatur alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΖ æqualis ΔΗ, et jungantur ΕΗ, ΖΗ.



Επει οὖν ἴση ἴσιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἴσιν· βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ ὥσιν τῇ ΕΗ ἴσιν ἴσιν. Πάλιν, ἐπει ἴση ἴσιν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἴσιν καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῶν ἄρα μείζων ἴσιν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· καὶ ἐπει τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ ipsa vero ipsi ΔΗ, duæ utique ΒΑ, ΑΓ duabus ΕΔ, ΔΗ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΗ æqualis est; basis igitur ΒΓ basi ΕΗ est æqualis. Rursus, quoniam æqualis est ΔΖ ipsi ΔΗ, æqualis est et ΔΖΗ angulus ipsi ΔΗΖ; major igitur ΔΖΗ ipso ΕΗΖ; multo igitur major est ΕΖΗ ipso ΕΗΖ. Et quoniam triangulum est ΕΖΗ, majorem habens ΕΖΗ angulum ipso ΕΗΖ; majorem autem angulum majus latus subtendit; majus igitur et latus ΕΗ ipso ΕΖ. Æquale autem ΕΗ ipsi ΒΓ; majus igitur et ΒΓ ipso ΕΖ. Si igitur duo, etc.

Car puisque l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ, construisons sur la droite ΔΕ, et au point Δ de cette droite, un angle ΕΔΗ égal à l'angle ΒΑΓ (23); faisons la droite ΔΗ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΖ (3), et joignons ΕΗ, ΖΗ.

Puisque ΑΒ est égal à ΔΕ, et ΑΓ à ΔΗ, les deux droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΕΔ, ΔΗ, chacune à chacune; mais l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΗ; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΗ (4). De plus, puisque ΔΖ est égal à ΔΗ, l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΗΖ (5); donc l'angle ΔΖΗ est plus grand que l'angle ΕΗΖ; donc l'angle ΕΖΗ est beaucoup plus grand que l'angle ΕΗΖ; et puisque ΕΖΗ est un triangle, ayant l'angle ΕΖΗ plus grand que l'angle ΕΗΖ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΕΗ est plus grand que le côté ΕΖ; mais ΕΗ est égal à ΒΓ; donc le côté ΒΓ est plus grand que le côté ΕΖ. Donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

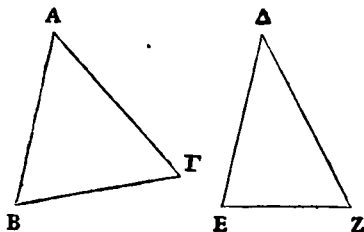
## PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς<sup>1</sup> δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ<sup>2</sup> βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἢ χῇ<sup>3</sup>, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς  $AB$ ,  $A\Gamma$  ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$  ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν  $AB$  τῇ  $\Delta E$ , τὴν δὲ  $A\Gamma$  τῇ  $\Delta Z$ . βάσις δὲ ἡ  $B\Gamma$  βάσεως τῆς  $EZ$  μείζων ἔστω· λῖγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $E\Delta Z$  μείζων ἔστί.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, basim autem basi majorem habeant; et angulum angulo majorem habebunt, qui ab æqualibus rectis continetur.

Sint duo triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , duo latera  $AB$ ,  $A\Gamma$  duobus lateribus  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$  æqualia habentia, utrumque utrique,  $AB$  quidem ipsi  $\Delta E$ ,  $A\Gamma$  vero ipsi  $\Delta Z$ , basis autem  $B\Gamma$  basi  $EZ$  major sit; dico et angulum  $BAG$  angulo  $E\Delta Z$  majorem esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἢ τοι ἴση ἔστιν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ  $BAG$ <sup>4</sup> τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$ , ἴση γὰρ ἂν ἦν<sup>5</sup> καὶ ἡ βάσις ἡ  $B\Gamma$  βάσει τῇ  $EZ$ . οὐκ ἔστι δὲ οὐκ ἄρα ἴση ἔστι γωνία<sup>6</sup> ἡ ὑπὸ

Si enim non, vel æqualis est ei, vel minor; æqualis autem non est  $BAG$  ipsi  $E\Delta Z$ , æqualis enim esset et basis  $B\Gamma$  basi  $EZ$ ; non est autem; non igitur æqualis est angulus  $BAG$  ipsi  $E\Delta Z$ .

## PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , ayant les deux côtés  $AB$ ,  $A\Gamma$  égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$ , chacun à chacun, le côté  $AB$  égal au côté  $\Delta E$ , et le côté  $A\Gamma$  égal au côté  $\Delta Z$ ; que la base  $B\Gamma$  soit plus grande que la base  $EZ$ ; je dis que l'angle  $BAG$  est plus grand que l'angle  $E\Delta Z$ .

Car si cela n'est point, il lui est égal, ou il est plus petit; mais l'angle  $BAG$  n'est pas égal à l'angle  $E\Delta Z$ , car alors la base  $B\Gamma$  seroit égale à la base  $EZ$  (4); mais elle ne l'est point; donc l'angle  $BAG$  n'est pas égal à l'angle  $E\Delta Z$ . Mais l'angle  $BAG$

ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ <sup>7</sup>, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν <sup>8</sup> καὶ ῥάσις ἡ ΒΓ ῥάσιως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ <sup>9</sup> τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς <sup>1</sup> δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἥτοι <sup>2</sup> τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Εστω <sup>1</sup> δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

Neque tamen minor est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ, minor enim esset et basis ΒΓ basi ΕΖ; non est autem; non igitur minor est ΒΑΓ angulus ipso ΕΔΖ. Ostensum est autem neque æqualem esse; major igitur est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, vel quod est ad æquales angulos, vel quod subtendit unum æqualium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus ΔΕΖ, ΕΖΔ æquales habentia, utrumque utrique, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΒΓΑ vero ipsi ΕΖΔ, habeant autem et unum latus uni lateri æquale; primum, quod est ad æquales angulos, ipsum ΒΓ ipsi ΕΖ; dico et reliqua latera

n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ, car alors la base ΒΓ serait plus petite que la base ΕΖ (24); mais elle ne l'est point; donc l'angle ΒΑΓ n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVI.

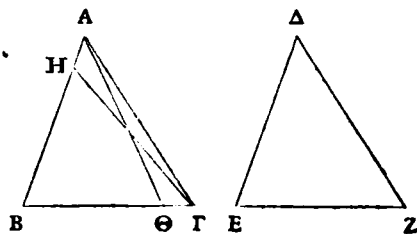
Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΔΕΖ, ΕΖΔ, chacun à chacun, l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΕΖΔ; que ces deux triangles aient aussi un côté égal à un côté, et d'abord celui qui est adjacent aux angles égaux, le côté ΒΓ égal au

## 44 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν \*. Εστώ μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστὶ· βάσεις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ †, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται ‡, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπὸκείται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ

reliquis lateribus æqualia habitura esse, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et reliquum angulum reliquo angulo, ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.

Si enim inæqualis est ΑΒ ipsi ΔΕ, una earum major est. Sit major ΑΒ, et ponatur ipsi ΔΕ æqualis ΒΗ, et jungatur ΗΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΒΗ quidem ipsi ΔΕ, ΒΓ vero ipsi ΕΖ, duæ utique ΒΗ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΗΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis est; basis igitur ΗΓ basi ΔΖ æqualis est, et ΗΒΓ triangulum ΔΕΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΗΓΒ angulus ipsi ΔΖΕ. Sed ΔΖΕ ipsi ΒΓΑ ponitur æqualis; igitur et ΒΓΗ ipsi ΒΓΑ æqualis est,

côté ΕΖ; je dis qu'ils auront les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ, et l'angle restant égal à l'angle restant, l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ.

Car si le côté ΑΒ n'est pas égal au côté ΔΕ, l'un d'eux est plus grand que l'autre. Soit ΑΒ le plus grand; faisons ΒΗ égal à ΔΕ (3), et joignons ΗΓ.

Puisque ΒΗ est égal à ΔΕ, et ΒΓ égal à ΕΖ, les deux côtés ΒΗ, ΒΓ sont égaux aux deux côtés ΔΕ, ΕΖ, chacun à chacun; mais l'angle ΗΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ; donc la base ΗΓ est égale à la base ΔΖ (4); le triangle ΗΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ, et les angles restants, soutendus par les côtés égaux, seront égaux aux angles restants; donc l'angle ΗΓΒ est égal à l'angle ΔΖΕ; mais l'angle ΔΖΕ est supposé

ἴση ἴστιν, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ . ἴση ἄρα. Ἐστί δὲ καὶ ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$  ἴση, δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Delta EZ$  ἴσιν ἴσιν· ἑκάστις ἄρα ἡ  $AB$  βάσις τῇ  $\Delta Z$  ἴση ἴστί, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση ἴστί.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἴστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὥς ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ . λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν  $AG$  τῇ  $\Delta Z$ , ἡ δὲ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ  $BAG$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση ἴστί.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$ , μία αὐτῶν μείζων ἴστί. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ  $B\Gamma$  τῇς  $EZ$ , καὶ κείσθω τῇ  $EZ$  ἴση ἡ  $B\Theta$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $\Delta\Theta$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστιν ἡ μὲν  $B\Theta$  τῇ  $EZ$ , ἡ δὲ  $AB$  τῇ  $\Delta E$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Theta$  δυσὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ  $A\Theta$  ἑκάστις τῇ  $\Delta Z$  ἴση

minor majori, quod impossibile. Non igitur inæqualis est  $AB$  ipsi  $\Delta E$ ; æqualis igitur est. Est autem et  $B\Gamma$  ipsi  $EZ$  æqualis, duæ utique  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Delta E$ ,  $EZ$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $\Delta EZ$  est æqualis; basis igitur  $AG$  basi  $\Delta Z$  æqualis est, et reliquus angulus  $BAG$  reliquo angulo  $E\Delta Z$  æqualis est.

Sed et rursus, sint ipsa æquales angulos latera subtendentia æqualia, ut  $AB$  ipsi  $\Delta E$ ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia futura esse,  $AG$  quidem ipsi  $\Delta Z$ ,  $B\Gamma$  vero ipsi  $EZ$ , et adhuc reliquum angulum  $BAG$  reliquo angulo  $E\Delta Z$  æqualem esse.

Si enim inæqualis est  $B\Gamma$  ipsi  $EZ$ , una earum major est. Sit major, si possibile est,  $B\Gamma$  ipsâ  $EZ$ , et ponatur ipsi  $EZ$  æqualis  $B\Theta$ , et jungatur  $\Delta\Theta$ .

Et quoniam æqualis est  $B\Theta$  quidem ipsi  $EZ$ ,  $AB$  vero ipsi  $\Delta E$ , duæ utique  $AB$ ,  $B\Theta$  duabus  $\Delta E$ ,  $EZ$  æquales sunt, utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur  $A\Theta$  basi  $\Delta Z$

égal à l'angle  $B\Gamma A$ ; donc l'angle  $BRH$  est égal à l'angle  $B\Gamma A$ , le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les côtés  $AB$ ,  $\Delta E$  ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais  $B\Gamma$  est égal à  $EZ$ ; donc les deux côtés  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $EZ$ , chacun à chacun; mais l'angle  $AB\Gamma$  est égal à l'angle  $\Delta EZ$ ; donc la base  $AG$  est égale à la base  $\Delta Z$  (4), et l'angle restant  $BAG$  est égal à l'angle restant  $E\Delta Z$ .

Mais de plus, que les côtés opposés aux angles égaux soient égaux, le côté  $AB$  égal au côté  $\Delta E$ ; je dis que les côtés restants seront égaux aux côtés restants, le côté  $AG$  égal au côté  $\Delta Z$ , et le côté  $B\Gamma$  égal au côté  $EZ$ , et que l'angle restant  $BAG$  est égal à l'angle restant  $E\Delta Z$ .

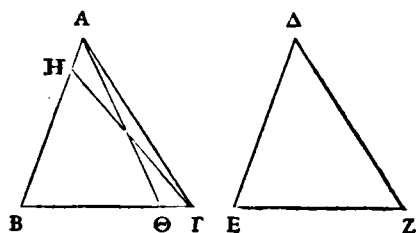
Car si le côté  $B\Gamma$  n'est pas égal au côté  $EZ$ , l'un d'eux est plus grand que l'autre; que  $B\Gamma$  soit plus grand que  $EZ$ , s'il est possible; faisons  $B\Theta$  égal à  $EZ$  (3), et joignons  $\Delta\Theta$ .

Puisque  $B\Theta$  est égal à  $EZ$ , et  $AB$  égal à  $\Delta E$ , les deux côtés  $AB$ ,  $B\Theta$  sont égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $EZ$ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base  $A\Theta$  est égale à la base  $\Delta Z$  (4); le triangle  $AB\Theta$  est égal au

# 46 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί, καὶ τὸ  $AB\Theta$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ ἴσον ἴστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται<sup>11</sup>, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $B\Theta A$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EZ\Delta$ . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ  $EZ\Delta$  τῇ ὑπὸ  $B\Gamma A$ <sup>12</sup> ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ  $B\Theta A$  ἄρα τῇ ὑπὸ  $B\Gamma A$  ἐστὶν ἴση<sup>13</sup>· τριγώνου δὲ τοῦ  $A\Theta\Gamma$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $B\Theta A$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $B\Gamma A$ , ὅπερ

$\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$  est, et triangulum  $AB\Theta$  triangulo  $\Delta EZ$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\epsilon$  est, et reliqui anguli reliquis angulis  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\epsilon$  erunt, quos  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\alpha$  latera subtendunt;  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$  igitur est  $B\Theta A$  angulus ipsi  $EZ\Delta$ . Sed  $EZ\Delta$  ipsi  $B\Gamma A$  est  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$ ; et  $B\Theta A$  igitur ipsi  $B\Gamma A$  est  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$ ; trianguli igitur  $A\Theta\Gamma$  exterior angulus  $B\Theta A$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$  est interiori et opposito  $B\Gamma A$ , quod est impossibile. Non igitur in $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$  est



ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $EZ$ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $\Delta E$  ἴση· δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  δυσὶ ταῖς  $\Delta E$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ  $A\Gamma$  ὅσῃ τῇ  $\Delta Z$  ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta EZ$  τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ<sup>14</sup> γωνία ἡ ὑπὸ  $B\Lambda\Gamma$  τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $E\Delta Z$  ἴση<sup>15</sup>. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

$B\Gamma$  ipsi  $EZ$ ;  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$  igitur. Est autem et  $AB$  ipsi  $\Delta E$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$ ; duæ igitur  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Delta E$ ,  $EZ$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\epsilon$  sunt, utraque utrique, et angulos  $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\epsilon$  continent; basis igitur  $A\Gamma$  basi  $\Delta Z$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$  est, et triangulum  $AB\Gamma$  triangulo  $\Delta EZ$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\epsilon$ , et reliquus angulus  $B\Lambda\Gamma$  reliquo angulo  $E\Delta Z$   $\alpha\epsilon\kappa\upsilon\alpha\lambda\iota\varsigma$ . Si igitur duo, etc.

triangle  $\Delta EZ$ , et les angles restants, opposés aux côtés égaux, seront égaux aux angles restants, chacun à chacun; donc l'angle  $B\Theta A$  est égal à l'angle  $EZ\Delta$ ; mais l'angle  $EZ\Delta$  est égal à l'angle  $B\Gamma A$ ; donc l'angle  $B\Theta A$  est égal à l'angle  $B\Gamma A$ ; donc l'angle extérieur  $B\Theta A$  du triangle  $A\Theta\Gamma$  est égal à l'angle intérieur et opposé  $B\Gamma A$ ; ce qui est impossible (16); donc les côtés  $B\Gamma$ ,  $EZ$  ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais le côté  $AB$  est égal au côté  $\Delta E$ ; donc les deux côtés  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égaux aux deux côtés  $\Delta E$ ,  $EZ$ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base  $A\Gamma$  est égale à la base  $\Delta Z$  (4); le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $\Delta EZ$ , et l'angle restant  $B\Lambda\Gamma$  égal à l'angle restant  $E\Delta Z$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

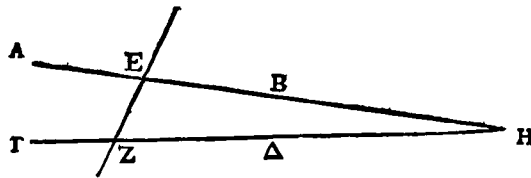
PROPOSITIO XXVII.

Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἰμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἴσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  εὐθεῖα ἰμπίπτουσα ἡ  $EZ$ , τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $AEZ$ ,  $EZ\Delta$  ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ .

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos æquales inter se faciat, parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  recta incidens  $EZ$ , alternos angulos  $AEZ$ ,  $EZ\Delta$  æquales inter se faciat; dico parallelam esse  $AB$  ipsi  $\Gamma\Delta$ .



Εἰ γὰρ μὴ, ἰκαλλόμεναι αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  συμπίπτουσι, ἥτοι ἐπὶ τὰ  $B\Delta$  μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ  $A\Gamma$ . Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπίπτέτωσαν ἐπὶ τὰ  $B\Delta$  μέρη κατὰ τὸ  $H$ .

Τριγώνου δὲ τοῦ  $EHZ$  ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ  $AEZ$  ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $EZH$ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ἰκαλλόμεναι συμπίπτουσι ἐπὶ τὰ  $B\Delta$

Si enim non, productæ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , convenient vel ad  $B\Delta$  partes, vel ad  $A\Gamma$ ; producantur, et convenient ad  $B\Delta$  partes in  $H$ .

Trianguli igitur  $EHZ$  exterior angulus  $AEZ$  æqualis est interiori et opposito  $EZH$ , quod est impossibile; non igitur  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  productæ convenient ad  $B\Delta$  partes. Similiter autem osten-

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite  $EZ$  tombant sur les deux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  fasse les angles alternes  $AEZ$ ,  $EZ\Delta$  égaux entr'eux; je dis que la droite  $AB$  est parallèle à la droite  $\Gamma\Delta$ .

Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  étant prolongées se rencontreront, ou du côté  $B\Delta$ , ou du côté  $A\Gamma$ . Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté  $B\Delta$ , au point  $H$ .

L'angle extérieur  $AEZ$  du triangle  $EHZ$  est égal à l'angle intérieur et opposé  $EZH$ , ce qui est impossible (16); donc les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  prolongées du côté  $B\Delta$  ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se ren-

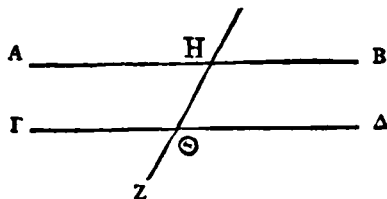
## 48 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήρη. Ομοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μὲνότερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ



ἴσην ποιεῖτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λίγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

detur neque ad ΑΓ; quæ autem in neutras partes conveniunt, parallelæ sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

### PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta incidens exteriorum angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales faciat; parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidens ΕΖ exteriorum angulum ΕΗΒ interiori et opposito, angulo ΗΘΔ æqualem faciat, vel inte-

riorum et ad easdem partes ipsos ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.

contreront pas non plus du côté ΑΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

### PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite ΕΖ tombant sur les droites ΑΒ, ΓΔ fasse l'angle extérieur ΕΗΒ égal à l'angle intérieur ΗΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ.

Επει γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἑναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἑναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἑμπύπτουσα τὰς τε ἑναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἑμπύπτει τὴν ΕΖ· λέγω ὅτι τὰς τε

Quoniam enim æqualis est ΕΗΒ ipsi ΗΘΔ, sed ΕΗΒ ipsi ΑΗΘ est æqualis, et ΑΗΘ igitur ipsi ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Rursus, quoniam anguli ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales sunt, sunt autem anguli ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Communis auferatur ΒΗΘ; reliquus igitur ΑΗΘ reliquo ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos æquales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad eandem partes æqualem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales.

In parallelas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidat ΕΖ; dico eam alternos angulos ΑΗΘ, ΗΘΔ æquales

Car puisque l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ, et que l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΑΗΘ (15), l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΗΘ, ΗΘΔ. Retranchons l'angle commun ΒΗΘ; l'angle restant ΑΗΘ sera égal à l'angle restant ΗΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

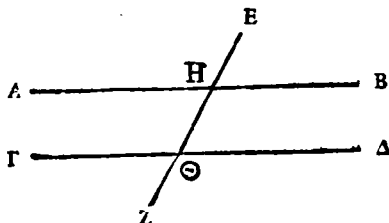
Que la droite ΕΖ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes ΑΗΘ, ΗΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur ΕΗΒ, égal à



# 50 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἰναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιῇ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

facere, et exteriorem angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes HΘΔ æqualem, et interiores ad easdem partes ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἴστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἴστί. Εἰσὼ μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἀνίσος ἴστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα.

Si enim inæqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΔ, unus eorum major est; sit major ΑΗΘ ipso ΗΘΔ. Communis addatur ΒΗΘ; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ majores sunt. Sed ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales sunt; et igitur ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ in infinitum concurrunt. Ipsæ igitur ΑΒ, ΓΔ productæ in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelæ ponuntur; non igitur inæqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΔ; æqualis igitur.

L'angle ΗΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.

Car si l'angle ΑΗΘ n'est pas égal à l'angle ΗΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle ΑΗΘ soit plus grand que ΗΘΔ. Ajoutons l'angle commun ΒΗΘ, les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront plus grands que les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ; mais les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites ΑΒ, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles ΑΗΘ,

Αλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἴσιν ἴση·  
καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσιν ἴση.

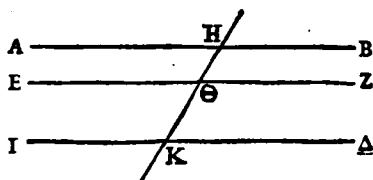
Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ  
ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν.  
Αλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·  
καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι  
εἰσίν. Η ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις  
εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παραλ-  
ληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παραλ-  
ληλος.

Εμπιπτεύω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.



Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ,  
ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  
ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παρ-

Sed ΑΗΘ ipsi ΕΗΒ est æqualis; et ΕΗΒ igitur  
ipsi ΗΘΔ est æqualis.

Communis addatur ΒΗΘ; ergo ΕΗΒ, ΒΗΘ  
ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Sed ΕΗΒ, ΒΗΘ  
duobus rectis æquales sunt; et ΒΗΘ, ΗΘΔ  
igitur duobus rectis æquales sunt. Ergo in  
parallelas, etc.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ parallelæ sunt, et inter se  
sunt parallelæ.

Sit utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ipsi ΕΖ paral-  
lela; dico et ΑΒ ipsi ΓΔ esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta ΗΚ.

Et quoniam in parallelas rectas ΑΒ, ΕΖ recta  
incidit ΗΚ, æqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΖ. Rursus  
quoniam in parallelas rectas ΕΖ, ΓΔ recta in-

ΗΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle ΑΗΘ est égal à  
l'angle ΕΗΒ (15); donc l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ.

Ajoutons l'angle commun ΒΗΘ, les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ seront égaux aux angles  
ΒΗΘ, ΗΘΔ; mais les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ sont égaux à deux droits (13); donc les  
angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites ΑΒ, ΓΔ soit parallèle à ΕΖ; je dis que ΑΒ est parallèle à ΓΔ.

Que la droite ΗΚ tombe sur les droites ΑΒ, ΓΔ.

## 52 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

αλλήλους<sup>2</sup> εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἰμ-  
πέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ  
ΗΚΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ  
ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ  
εἴσιν ἰσαλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.  
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ<sup>3</sup>, καὶ τὰ ἑξῆς.

cidit ΗΚ, æqualis est ΗΘΖ ipsi ΗΚΔ. Ostensus  
est autem et ΑΗΚ ipsi ΗΘΖ æqualis; ΑΗΚ igitur  
ipsi ΗΚΔ est æqualis; et sunt alterni. Paral-  
lela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Quæ igitur eidem  
rectæ, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

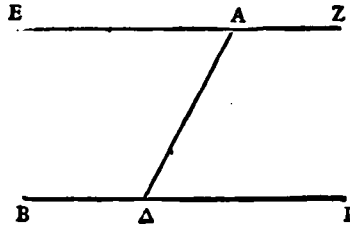
### PROPOSITIO XXXI.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου<sup>1</sup>, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ  
παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Per datum punctum, datæ rectæ parallelam  
rectam lineam ducere.

Εστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ  
δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ Α σημείου,  
τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν  
ἀγαγεῖν.

Sit quidem datum punctum Α, data vero  
recta ΒΓ; oportet igitur, per Α punctum, ipsi  
ΒΓ rectæ parallelam rectam lineam ducere.



Εἰληφθὼς ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ,  
καὶ ἰπεξεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΔΑ

Sumatur in ΒΓ quodlibet punctum Δ, et jun-  
gatur ΑΔ; et constituatur ad ΔΑ rectam, et ad

Puisque la droite ΗΚ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΕΖ, l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΖ (27). De plus, puisque la droite ΗΚ tombe sur les droites parallèles ΕΖ, ΓΔ, l'angle ΗΘΖ est égal à l'angle ΗΚΔ (28). Mais on a démontré que l'angle ΑΗΚ est égal à l'angle ΗΘΖ; donc l'angle ΑΗΚ est égal à l'angle ΗΚΔ; mais ces angles sont alternes; donc ΑΒ est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

### PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.  
Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut par le point Α conduire une ligne droite parallèle à la droite ΒΓ.

Prenons sur la droite ΒΓ un point quelconque Δ, et joignons ΑΔ; construisons

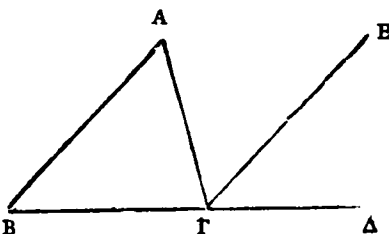
εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἰμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκει, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΞΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾷς τῶν πλευρῶν προσεκτελέσας, ἢ ἐκτὸς γωνία δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκτελέσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

sur la droite ΑΔ, et au point Α de cette droite, l'angle ΔΑΕ égal à l'angle ΑΔΓ (23), et prolongeons la droite ΑΖ dans la direction de ΕΑ.

Puisque la droite ΑΔ, tombant sur les deux droites ΒΓ, ΕΖ, fait les angles alternes ΕΑΔ, ΑΔΓ égaux entr'eux, la droite ΕΖ est parallèle à droite ΒΓ (27).

Donc la ligne droite ΕΑΖ a été menée, par le point donné Α, parallèle à la droite donnée ΒΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle exté-

punctum in eâ Α, angulo ΑΔΓ æqualis angulus ΔΑΕ, et producatur in directum ipsi ΕΑ recta ΑΖ.

Et quoniam in duas rectas ΒΓ, ΕΖ recta incidens ΑΔ alternos angulos ΕΑΔ, ΑΔΓ æquales inter se facit, parallela est ΕΖ ipsi ΒΓ.

Per datum igitur punctum Α, datæ rectæ ΒΓ parallela recta linea ducta est ΕΑΖ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis æqualis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit triangulus ΑΒΓ, et producatur ipsius unum latus ΒΓ in Δ; dico exteriorem angulum

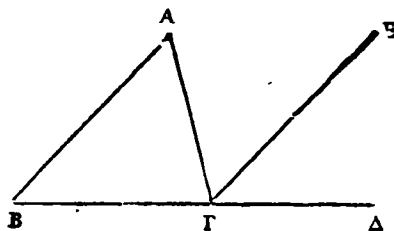
## 54 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς' δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἡχθὼ γάρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

ΑΓΔ æqualem esse duobus interioribus et oppositis ΓΑΒ, ΑΒΓ, et interiores trianguli tres angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duabus rectis æquales esse.

Ducatur enim, per Γ punctum, ipsi ΑΒ rectæ parallela ΓΕ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ· Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit ΑΓ, alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit recta ΒΔ, exterior angulus ΕΓΔ æqualis est interiori et opposito ΑΒΓ. Ostensus autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΔ exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ æquales sunt. Sed ΑΓΔ,

rieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.

Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt ; et ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ igitur duobus rectis æquales sunt. Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

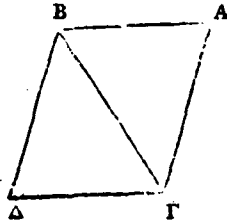
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζυγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

Ἐστῶσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζυγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Quæ et æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.

Sint et æquales et parallelæ ΑΒ, ΓΔ, et conjungant ipsas ad easdem partes rectæ ΑΓ, ΒΔ ; dico et ΑΓ, ΒΔ et æquales et parallelas esse.



Ἐπιζεύχθω γάρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ

Jungatur enim ΒΓ.

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΑΒ

angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (13) ; donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles ; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés ; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

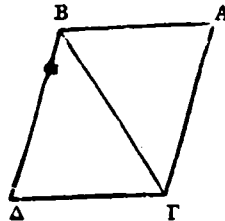
Joignons ΒΓ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que

## 56 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ , κοινὴ δὲ ἡ  $B\Gamma$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$ , δύοσι ταῖς  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma$  ἴσαι εἰσὶ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $AB\Gamma$  γωνία τῇ ὑπὸ  $B\Gamma\Delta$  ἴση ἐστίν· βάσεις ἄρα ἡ  $A\Gamma$  βάσις τῇ  $B\Delta$  ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $B\Gamma\Delta$  τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

ipsi  $\Gamma\Delta$ , communis autem  $B\Gamma$ ; duæ igitur  $AB$ ,  $B\Gamma$  duabus  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma$  æquales sunt, et angulus  $AB\Gamma$  angulo  $B\Gamma\Delta$  æqualis. Basis igitur  $A\Gamma$  basi  $B\Delta$  est æqualis; et  $AB\Gamma$  triangulum  $B\Gamma\Delta$  triangulo æquale est; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis est igitur  $A\Gamma B$  an-



τείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $A\Gamma B$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\Gamma B\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  εὐθεῖα ἑμπέπτουσα ἡ  $B\Gamma$  τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ  $A\Gamma B$ ,  $\Gamma B\Delta$  ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκει· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $A\Gamma$  τῇ  $B\Delta$ . Εδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulus ipsi  $\Gamma B\Delta$ . Et quoniam in duas rectas  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  recta incidens  $B\Gamma$ , alternos angulos  $A\Gamma B$ ,  $\Gamma B\Delta$  æquales inter se facit, parallela est  $A\Gamma$  ipsi  $B\Delta$ . Ostensa est autem ipsi et æqualis; quæ igitur æquales, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

### PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli æqualia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

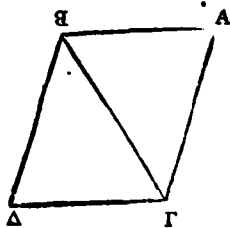
la droite  $B\Gamma$  est commune, les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont égales aux deux droites  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma$ ; mais l'angle  $AB\Gamma$  est égal à l'angle  $B\Gamma\Delta$ ; donc la base  $A\Gamma$  est égale à la base  $B\Delta$ , le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $B\Gamma\Delta$ , et les angles restans, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle  $A\Gamma B$  est égal à l'angle  $\Gamma B\Delta$ . Mais la droite  $B\Gamma$  tombant sur les deux droites  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  fait les angles alternes  $A\Gamma B$ ,  $\Gamma B\Delta$  égaux entr'eux; donc la droite  $A\Gamma$  est parallèle à la droite  $B\Delta$  (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

### PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Εστω παραλληλόγραμμον χωρίον<sup>1</sup> τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει.

Sit parallelogrammum spatium ΑΓΔΒ, diameter autem ipsius ΒΓ; dico ΑΓΔΒ parallelogrammi opposita et latera et angulos æqualia inter se esse, et ΒΓ diametrum illud bifariam secare.



Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευράν<sup>2</sup> μιᾷ πλευρᾷ ἴσῃν, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit recta ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ, æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΓ ipsi ΒΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se sunt. Duo igitur triangula sunt ΑΒΓ, ΒΓΔ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, commune utrique ΒΓ; et reliqua igitur reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo; æquale igitur est ΑΒ quidem latus ipsi ΓΔ,

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle



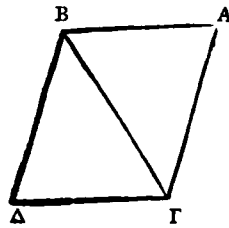
## 58 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἄρα ἡ μὲν  $AB$  πλευρὰ τῇ  $\Gamma\Delta$ , ἡ δὲ  $ΑΓ$  τῇ  $ΒΔ$ , καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΔΓ$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$ , ἡ δὲ ὑπὸ  $ΓΒΔ$  τῇ ὑπὸ  $ΑΓΒ$ . ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΑΒΔ$  ὅλη τῇ ὑπὸ  $ΑΓΔ$  ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΓΔΒ$  ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

$ΑΓ$  vero ipsi  $ΒΔ$ , et adhuc æqualis est  $ΒΑΓ$  angulus ipsi  $ΒΔΓ$ . Et quoniam æqualis est quidem  $ΑΒΓ$  angulus ipsi  $ΒΓΔ$ , et  $ΓΒΔ$  ipsi  $ΑΓΒ$ ; totus igitur  $ΑΒΔ$  toti  $ΑΓΔ$  est æqualis; ostensus est autem et  $ΒΑΓ$  ipsi  $ΓΔΒ$  æqualis;

Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli æqualia inter se sunt.



Λέγω δὲ<sup>5</sup> ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $\Gamma\Delta$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ΒΓ$ , δύο δὲ αἱ  $AB$ ,  $ΒΓ$  δυσὶ ταῖς  $\DeltaΓ$ ,  $ΓΒ$  ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΒΓ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΒΓΔ$  ἴση ἐστὶ καὶ βάσεις ἄρα ἡ  $ΑΓ$  βάσει τῇ  $ΒΔ$  ἴση ἐστὶ<sup>6</sup>. καὶ τὸ  $ΑΒΓ$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $ΒΔΓ$  τρίγωνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα  $ΒΓ$  διάμετρος δίχα τέμνει τὸ  $ΑΓΔΒ$  παραλληλόγραμμον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim æqualis est  $AB$  ipsi  $\Gamma\Delta$ , communis autem  $ΒΓ$ , duæ igitur  $AB$ ,  $ΒΓ$  duabus  $\DeltaΓ$ ,  $ΓΒ$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $ΑΒΓ$  angulo  $ΒΓΔ$  æqualis est; et basis igitur  $ΑΓ$  ipsi  $ΒΔ$  æqualis est; et igitur triangulum  $ΑΒΓ$  triangulo  $ΒΔΓ$  æquale est;

Ergo  $ΒΓ$  diameter bifariam secat  $ΑΓΔΒ$  parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

$ΒΑΓ$  égal à l'angle  $ΒΔΓ$ . Puisque l'angle  $ΑΒΓ$  est égal à l'angle  $ΒΓΔ$ , et l'angle  $ΓΒΔ$  égal à l'angle  $ΑΓΒ$ , l'angle total  $ΑΒΔ$  est égal à l'angle total  $ΑΓΔ$ . Mais on a démontré que l'angle  $ΒΑΓ$  est égal à l'angle  $ΓΔΒ$ ;

Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque  $AB$  est égal à  $\Gamma\Delta$ , et que la droite  $ΒΓ$  est commune, les deux droites  $AB$ ,  $ΒΓ$  sont égales aux droites  $\DeltaΓ$ ,  $ΓΒ$ , chacune à chacune; mais l'angle  $ΑΒΓ$  est égal à l'angle  $ΒΓΔ$ ; donc la base  $ΑΓ$  est égale à la base  $ΒΔ$  (4), et le triangle  $ΑΒΓ$  égal au triangle  $ΒΔΓ$ .

Donc la diagonale  $ΒΓ$  partage le parallélogramme  $ΑΓΔΒ$  en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

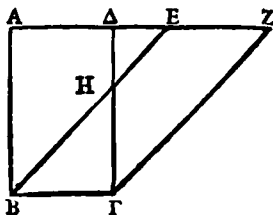
PROPOSITIO XXXV.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Parallelogramma, super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ  $ABΓΔ$ ,  $EBΓΖ$  ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $ΒΓ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $AZ$ ,  $ΒΓ$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$  τῷ  $EBΓΖ$ .

Sint parallelogramma  $ABΓΔ$ ,  $EBΓΖ$  super eadem basi  $ΒΓ$  constituta et in eisdem parallelis  $AZ$ ,  $ΒΓ$ ; dico æquale esse  $ABΓΔ$  ipsi  $EBΓΖ$ .



Ἐπὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ  $ABΓΔ$ , ἴση ἐστὶν ἡ  $AΔ$  τῇ  $ΒΓ$ <sup>3</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $EZ$  τῇ  $ΒΓ$  ἐστὶν ἴση<sup>4</sup> ὥστε καὶ ἡ  $AΔ$  τῇ  $EZ$  ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>. καὶ κοινὴ ἡ  $ΔΕ$  ὅλη ἄρα ἡ  $AE$  ὅλη τῇ  $AZ$  ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ  $AB$  τῇ  $ΔΓ$  ἴση· δύο δὲ αἱ  $EA$ ,  $AB$  δυσὲς ταῖς  $ZΔ$ ,  $ΔΓ$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ZΔΓ$  γωνία τῇ

Quoniam enim parallelogrammum est  $ABΓΔ$ , æqualis est  $AΔ$  ipsi  $ΒΓ$ . Propter eadem, et  $EZ$  ipsi  $ΒΓ$  est æqualis. Quare et  $AΔ$  ipsi  $EZ$  est æqualis; et communis  $ΔΕ$ ; tota igitur  $AE$  toti  $AZ$  est æqualis. Est autem et  $AB$  ipsi  $ΔΓ$  æqualis; duæ igitur  $EA$ ,  $AB$  duabus  $ZΔ$ ,  $ΔΓ$  æquales sunt utraque utrique, et angulus  $ZΔΓ$  angulo  $EAB$

PROPOSITION XXXV.

Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes  $ABΓΔ$ ,  $EBΓΖ$  soient construits sur la même base  $ΒΓ$ , et entre les mêmes parallèles  $AZ$ ,  $ΒΓ$ ; je dis que le parallélogramme  $ABΓΔ$  est égal au parallélogramme  $EBΓΖ$ .

Car puisque  $ABΓΔ$  est un parallélogramme,  $AΔ$  est égal à  $ΒΓ$  (34); par la même raison,  $EZ$  est égale à  $ΒΓ$ ; donc  $AΔ$  est égal à  $EZ$ ; mais la droite  $ΔΕ$  est commune; donc la droite totale  $AE$  est égale à la droite totale  $AZ$  (not. 2); mais  $AB$  est égal à  $ΔΓ$  (34); donc les deux droites  $EA$ ,  $AB$  sont égales aux deux droites  $ZΔ$ ,  $ΔΓ$ , chacun à chacune; mais l'angle extérieur  $ZΔΓ$  est égal à l'angle intérieur

## 60 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ EAB ἐστὶν ἴση<sup>6</sup>, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσις ἄρα ἡ EB βάσει τῇ ZΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ EAB τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται 7. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΔHE· λοιπὸν ἄρα τὸ ABHΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ EHZ τραπέζίῳ ἐστὶν ἴσον 8. Κοινὸν προσκείσθω τὸ HBG τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ EBΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἐξῆς.

est æqualis, exterior interiori; basis igitur EB basi ZΓ æqualis est, et EAB triangulum ipsi ΔΓΖ triangulo æquale erit. Commune auferatur ΔHE; reliquum igitur ABHΔ trapezium reliquo EHZ trapezia est æquale. Commune addatur HBG triangulum; totum igitur ABΓΔ parallelogrammum toti EBΓΖ parallelogrammo æquale est. Ergo parallelogramma, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ABΓΔ, EZHΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα \* τῶν BΓ, ZH καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AΘ, BH· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EZHΘ.

Ἐπιζεύχωσαν γὰρ αἱ BE, ΓΘ.

### PROPOSITION XXXVI.

Parallelogramma, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma ABΓΔ, EZHΘ super æqualibus basibus constituta BΓ, ZH, et in eisdem parallelis AΘ, BH; dico æquale esse ABΓΔ parallelogrammum ipsi EZHΘ.

Jungantur enim BE, ΓΘ.

EAB (29); donc la base EB est égale à la base ZΓ (4); donc le triangle EAB sera égal au triangle ΔΓΖ. Retranchons la partie commune ΔHE; le trapèze restant ABHΔ sera égal au trapèze restant EHZ (not. 3); ajoutons le triangle commun HBG, le parallélogramme total ABΓΔ sera égal au parallélogramme total EBΓΖ. Donc, etc.

### PROPOSITION XXXVI.

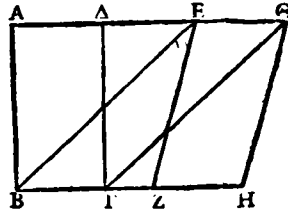
Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ABΓΔ, EZHΘ soient construits sur des bases égales BΓ, ZH, et entre les mêmes parallèles AΘ, BH; je dis que le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EZHΘ.

Joignons BE, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτάς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσιν ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε εἰσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα

Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΖΗ, et ΖΗ ipsi ΕΘ est æqualis; et ΒΓ igitur ipsi ΕΘ est æqualis. Sunt autem et parallelæ, et jungunt ipsas ipsæ ΒΕ, ΓΘ, quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales et parallelæ sunt; et ΕΒ, ΓΘ igitur et æquales sunt et parallelæ. Parallelogrammum



ἰστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἴστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἰζῆς.

igitur est ΕΒΓΘ, et est æquale ipsi ΑΒΓΔ; basim enim eandem habet ΒΓ quam ipsum, et in eisdem parallelis est ΒΓ, ΑΘ. Propter eadem, et ΕΖΗΘ eidem ΕΒΓΘ est æquale; quare et ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ est æquale. Ergo parallelogramma, etc.

Puisque ΒΓ est égal à ΖΗ, et ΖΗ égal à ΕΘ, la droite ΒΓ est égale à ΕΘ; mais les droites ΒΕ, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (33); donc les droites ΕΒ, ΓΘ sont égales et parallèles; donc ΕΒΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ΑΒΓΔ (35); car il a la même base ΒΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme ΕΖΗΘ est égal au parallélogramme ΕΒΓΘ; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ. Donc, etc.

# 62 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

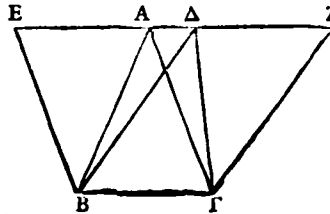
## PROPOSITIO XXXVII.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εἰσὶν τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα <sup>1</sup> τῆς  $B\Gamma$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $AD$ ,  $B\Gamma$ . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\Delta B\Gamma$  τριγώνῳ.

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  super eadem basi constituta  $B\Gamma$  et in eisdem parallelis  $AD$ ,  $B\Gamma$ ; dico æquale esse  $AB\Gamma$  triangulum  $\Delta B\Gamma$  triangulo.



Εκτελέσθω ἡ  $AD$  ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ  $E$ ,  $Z$  <sup>2</sup>, καὶ διὰ μὲν τοῦ  $B$  τῇ  $ΓA$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $BE$ , διὰ δὲ τοῦ  $Γ$  τῇ  $BA$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $ΓZ$ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta B\Gamma Z$ . καὶ εἰσιν ἴσα <sup>3</sup>. ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσὶ <sup>4</sup> τῆς  $B\Gamma$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $B\Gamma$ ,  $EZ$ . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν  $EB\Gamma A$  παρ-

Producatur  $AD$  ex utrâque parte in  $E$ ,  $Z$ , et per  $B$  quidem ipsi  $ΓA$  parallela ducatur  $BE$ , per  $Γ$  vero ipsi  $BA$  parallela ducatur  $ΓZ$ .

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta B\Gamma Z$ ; et æqualia sunt, nam super eadem basi sunt  $B\Gamma$  et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $EZ$ ; et est ipsius  $EB\Gamma A$  quidem parallelogrammi

## PROPOSITION XXXVII.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  soient sur la même base  $B\Gamma$  et entre les mêmes parallèles  $AD$ ,  $B\Gamma$ ; je dis que le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $\Delta B\Gamma$ .

Prolongeons de part et d'autre la droite  $AD$  aux points  $E$ ,  $Z$ , et par le point  $B$  conduisons  $BE$  parallèle à  $ΓA$  (31), et par le point  $Γ$  conduisons  $ΓZ$  parallèle à  $BA$ .

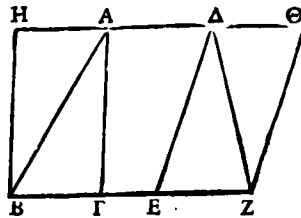
Les figures  $EB\Gamma A$ ,  $\Delta B\Gamma Z$  sont des parallélogrammes, et ces parallélogrammes sont égaux (35); car ils sont sur la même base  $B\Gamma$ , et entre les mêmes parallèles; mais le triangle  $AB\Gamma$  est la moitié du parallélogramme  $EB\Gamma A$ ; car

αλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἰζῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·

Εστω τρίγωνα τὰ<sup>2</sup> ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα<sup>3</sup> τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



Εκτελέσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ

dimidium ΑΒΓ triangulum, nam ΑΒ diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius ΔΒΓΖ parallelogrammi dimidium ΔΒΓ triangulum, nam ΔΓ diameter ipsum bifariam secat; æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΒΓ triangulo. Ergo triacula, etc.

PROPOSITIO XXXVIII.

Triacula, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triacula ΑΒΓ, ΔΕΖ super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΕΖ et in eisdem parallelis ΒΖ, ΑΔ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo.

Producatur enim ΑΔ ex utraque parte in Η, Θ, et per Β quidem ipsi ΓΑ parallela

la diagonale ΑΒ le partage en deux parties égales; le triangle ΔΒΓ est la moitié du parallélogramme ΔΒΓΖ, car la diagonale ΔΓ le partage en deux parties égales (34); mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVIII.

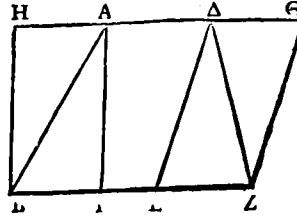
Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΕΖ et entre les mêmes parallèles ΒΖ, ΑΔ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ.

Prolongeons de part et d'autre la droite ΑΔ aux points Η, Θ; par le

# 64 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράλληλος ἢ χθω ἢ BH, διὰ δὲ τοῦ Z τῇ ΔΕ ducatur BH, per Z vero ipsi ΔΕ parallela du-  
παράλληλος ἢ χθω ἢ ZΘ. catur ZΘ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  
HBGA, ΔEZΘ· καὶ ἴσον τὸ HBGA τῷ ΔEZΘ,  
ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BG, EZ, καὶ ἐν  
ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ, HΘ· καὶ  
ἴστι τοῦ μὲν HBGA παραλληλογράμμου ἡμισυ  
τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ  
δίχα<sup>5</sup> τέμνει· τοῦ δὲ ΔEZΘ παραλληλογράμμου  
ἡμισυ τὸ ZEΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔZ διάμετρος  
αὐτὸ δίχα<sup>6</sup> τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα  
ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον  
τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipso-  
rum HBGA, ΔEZΘ; et æquale HBGA ipsi  
ΔEZΘ, in æqualibus enim et basibus sunt BG, EZ,  
et in eisdem parallelis BZ, HΘ; et est autem  
ipsius HBGA parallelogrammi dimidium ABΓ  
triangulum, AB enim diameter ipsum bifariam  
secat; est vero ipsius ΔEZΘ parallelogrammi  
dimidium ZEΔ triangulum, nam ΔZ diameter  
ipsum bifariam secat. Æqualium autem dimidia  
æqualia inter se sunt; æquale igitur est ABΓ  
triangulum ipsi ΔEZ triangulo. Ergo triacula, etc.

point B conduisons la droite BH parallèle à la droite ΓA (32), et par le point Z  
conduisons la droite ZΘ parallèle à la droite ΔE.

Les figures HBGA, ΔEZΘ sont des parallélogrammes; mais le parallélogramme  
HBGA est égal au parallélogramme ΔEZΘ (36), car ils sont construits sur des bases  
égales BG, EZ et entre les mêmes parallèles BZ, HΘ; mais le triangle ABΓ est la moitié  
du parallélogramme HBGA, car la diagonale AB le partage en deux parties égales (34);  
le triangle ZEΔ est la moitié du parallélogramme ΔEZΘ, car la diagonale ΔZ le  
partage en deux parties égales, et les moitiés des quantités égales sont égales  
entr'elles; donc le triangle ABΓ est égal au triangle ΔEZ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ'.

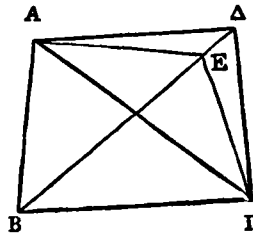
PROPOSITIO XXXIX.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα<sup>2</sup> τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$ , ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς  $B\Gamma$ , καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη<sup>3</sup>. λέγω ὅτι<sup>4</sup> καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ  $A\Delta$ . λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $A\Delta$  τῇ  $B\Gamma$ .

Æqualia triangula, super eâdem basi constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$ , super eâdem basi  $B\Gamma$  et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Jungatur enim  $A\Delta$ ; dico parallelam esse  $A\Delta$  ipsi  $B\Gamma$ .



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ  $A$  σημείου τῇ  $B\Gamma$  εὐθείᾳ παράλληλος ἡ  $AE$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $EF$ .

Ἴσον ἄρα<sup>5</sup> ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $EB\Gamma$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῶ τῆς  $B\Gamma$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $B\Gamma$ ,  $AE$ <sup>6</sup>. Ἀλλὰ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον<sup>7</sup> τῷ  $\Delta B\Gamma$  ἐστὶν

Si enim non, ducatur per  $A$  punctum ipsi  $B\Gamma$  rectæ parallela  $AE$ , et jungatur  $EF$ .

Æquale igitur est  $AB\Gamma$  triangulum ipsi  $EB\Gamma$  triangulo; super eâdem enim basi est  $B\Gamma$  super quâ ipsum  $BE\Gamma$ , et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $AE$ ; sed  $AB\Gamma$  triangulum ipsi  $\Delta B\Gamma$  est æquale; ergo

PROPOSITION XXXIX.

Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

Que les deux triangles égaux  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  soient construits sur la même base  $B\Gamma$ , et placés du même côté; je dis que ces deux triangles sont compris entre les mêmes parallèles. Joignons  $A\Delta$ ; je dis que  $A\Delta$  est parallèle à  $B\Gamma$ .

Car si cela n'est pas, par le point  $A$  conduisons  $AE$  parallèle à  $B\Gamma$  (31), et joignons  $EF$ .

Le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $EB\Gamma$  (37), puisque ces deux triangles sont construits sur la base  $B\Gamma$ , et placés entre les mêmes parallèles  $B\Gamma$ ,  $AE$ . Mais le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $\Delta B\Gamma$ ; donc le triangle  $\Delta B\Gamma$  est égal au



## 66 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον· καὶ τὸ  $\Delta B\Gamma$  ἄρα τρίγωνον τῷ  $EB\Gamma$  ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν<sup>8</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ  $AE$  τῇ  $B\Gamma$ . Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς  $AD$ · ἡ  $AD$  ἄρα τῇ  $B\Gamma$  ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἰξῆς.

et  $\Delta B\Gamma$  triangulum ipsi  $EB\Gamma$  æquale est, majus minori, quod est impossibile. Non igitur parallela est  $AE$  ipsi  $B\Gamma$ . Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse præter  $AB$ ;  $AD$  igitur ipsi  $B\Gamma$  est parallela. Ergo æqualia, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

### PROPOSITIO XL.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα<sup>3</sup> τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta\Gamma E$ , ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν  $B\Gamma$ ,  $\Gamma E$  καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ  $AD$ · λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ  $AD$  τῇ  $BE$ .

Εἰ γὰρ μὴ, ἦχθω διὰ τοῦ  $A$  τῇ  $BE$  παράλληλος ἡ  $AZ$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $EZ$ .

Æqualia triangula, super æqualibus basibus constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta\Gamma E$ , super æqualibus basibus constituta  $B\Gamma$ ,  $\Gamma E$  et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse; jungatur enim  $AD$ ; dico parallelam esse  $AD$  ipsi  $BE$ .

Si enim non, ducatur per  $A$  ipsi  $BE$  parallela  $AZ$ , et jungatur  $EZ$ .

triangle  $EB\Gamma$ , le plus grand au plus petit, ce qui est impossible; donc  $AE$  n'est point parallèle à  $B\Gamma$ . Nous démontrerons semblablement qu'aucune autre droite, excepté  $AD$ , n'est parallèle à  $B\Gamma$ ; donc  $AD$  est parallèle à  $B\Gamma$ . Donc, etc.

### PROPOSITION XL.

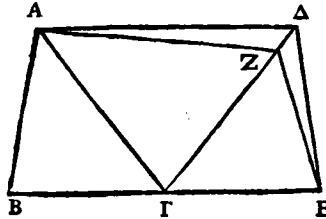
Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

Que les triangles égaux  $AB\Gamma$ ,  $\Delta\Gamma E$  soient construits sur les bases égales  $B\Gamma$ ,  $\Gamma E$  et placés du même côté; je dis qu'ils sont entre les mêmes parallèles. Joignons  $AD$ ; je dis que  $AD$  est parallèle à  $BE$ .

Car si cela n'est pas, par le point  $A$ , conduisons  $AZ$  parallèle à  $BE$ , et joignons  $EZ$ .

Ἰσον ἄρα<sup>5</sup> ἐστὶ τὸ  $\triangle AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $\triangle Z\Gamma E$  τρι-  
γώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν  $B\Gamma$ ,  $\Gamma E$   
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $BE$ ,  $AZ$ .  
Ἀλλὰ τὸ  $\triangle AB\Gamma$  τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ  $\triangle \Delta\Gamma E$  τρι-  
γώνῳ<sup>6</sup>· καὶ τὸ  $\triangle \Gamma E$  τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ

$\triangle$  Equale igitur est  $\triangle AB\Gamma$  triangulum ipsi  $\triangle Z\Gamma E$   
triangulo; in æqualibus enim basibus sunt  $B\Gamma$ ,  
 $\Gamma E$  et in eisdem parallelis  $BE$ ,  $AZ$ . Sed  $\triangle AB\Gamma$   
triangulum æquale est ipsi  $\triangle \Delta\Gamma E$  triangulo; et  
 $\triangle \Delta\Gamma E$  triangulum igitur æquale est ipsi  $\triangle Z\Gamma E$  trian-



$\triangle Z\Gamma E$  τριγώνῳ, τὸ μῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ  
ἐστίν<sup>8</sup> ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν<sup>9</sup>  
ἡ  $AZ$  τῇ  $BE$ . Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη  
τις πλὴν τῆς  $AD$ · ἡ  $AD$  ἄρα τῇ  $BE$  ἐστὶ παράλ-  
ληλος<sup>10</sup>. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulo, majus minori, quod est impossibile; non  
igitur parallela est  $AZ$  ipsi  $BE$ . Similiter autem  
ostendemus neque aliam quampiam esse præter  
 $AD$ ;  $AD$  igitur ipsi  $BE$  est parallela. Ergo  
æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

PROPOSITIO XLI.

Εάν παραλληλόγραμμον τρίγωνῳ βάσιν τε ἔχη  
τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ·  
διπλάσιον ἐστὶ<sup>1</sup> τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ  
τρίγωνου.

Si parallelogrammum quam triangulum basim  
habeat eandem, et in eisdem parallelis sit,  
duplum est parallelogrammum trianguli.

Le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $Z\Gamma E$  (38); puisque ces deux triangles  
sont construits sur des bases égales  $B\Gamma$ ,  $\Gamma E$ , et qu'ils sont entre les mêmes  
parallèles  $BE$ ,  $AZ$ . Mais le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $\Delta\Gamma E$ ; donc le triangle  
 $\Delta\Gamma E$  est égal au triangle  $Z\Gamma E$ , le plus grand au plus petit, ce qui est impossible;  
donc  $AZ$  n'est point parallèle à  $BE$ . Nous démontrerons semblablement qu'aucune  
autre droite, excepté  $AD$ , n'est parallèle à  $BE$ ; donc  $AD$  est parallèle à  $BE$ .  
Donc, etc.

PROPOSITION XLI.

Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les  
mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

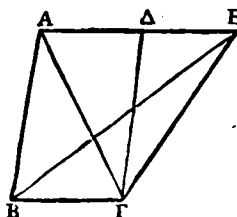
## 68 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ  $AB\Gamma\Delta$  τριγώνῳ τῷ  $EB\Gamma$  βάσιν τε<sup>2</sup> ἔχέτω τὴν αὐτὴν τὴν  $B\Gamma$ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω<sup>3</sup> ταῖς  $B\Gamma$ ,  $AE$ . λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον τοῦ  $EB\Gamma$  τριγώνου.

Επιζεύχθω γὰρ ἡ  $AG$ .

Parallelogrammum enim  $AB\Gamma\Delta$  quam triangulum  $EB\Gamma$  basim habeat eandem  $B\Gamma$ , et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $AE$  sit; dico duplum esse  $AB\Gamma\Delta$  parallelogrammum  $EB\Gamma$  trianguli.

Jungatur enim  $AG$ .



Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τριγώνον<sup>3</sup> τῷ  $EB\Gamma$  τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς  $B\Gamma$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $B\Gamma$ ,  $AE$ . Ἀλλὰ τὸ  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου· ἡ γὰρ  $AG$  διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει· ὥστε τὸ  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ  $EB\Gamma$  τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Εὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale igitur est  $AB\Gamma$  triangulum ipsi  $EB\Gamma$  triangulo; nam super eadem basi est  $B\Gamma$  super quâ ipsum  $EB\Gamma$ , et in eisdem parallelis  $B\Gamma$ ,  $AE$ . Sed  $AB\Gamma\Delta$  parallelogrammum duplum est ipsius  $AB\Gamma$  trianguli, nam  $AG$  diameter ipsum bifariam secat; quare  $AB\Gamma\Delta$  parallelogrammum et ipsius  $EB\Gamma$  trianguli est duplum. Si igitur parallelogrammum, etc.

Que le parallélogramme  $AB\Gamma\Delta$  ait la même base  $B\Gamma$  que le triangle  $EB\Gamma$ , et qu'il soit entre les mêmes parallèles  $B\Gamma$ ,  $AE$ ; je dis que le parallélogramme  $AB\Gamma\Delta$  est double du triangle  $EB\Gamma$ .

Joignons  $AG$ .

Le triangle  $AB\Gamma$  est égal au triangle  $EB\Gamma$  (37), puisqu'il est sur la même base  $B\Gamma$  que lui et entre les mêmes parallèles  $B\Gamma$ ,  $AE$ . Mais le parallélogramme  $AB\Gamma\Delta$  est double du triangle  $AB\Gamma$ , car la diagonale  $AG$  partage ce parallélogramme en deux parties égales (34); donc le parallélogramme  $AB\Gamma\Delta$  est double du triangle  $EB\Gamma$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ'.

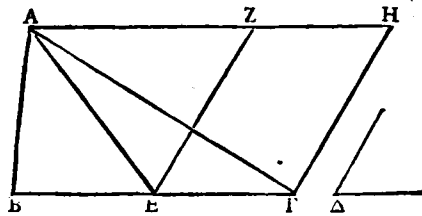
PROPOSITIO XLII.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ<sup>1</sup>.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ<sup>2</sup> Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἰσῇ<sup>3</sup> τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum ΑΒΓ, datus vero angulus rectilineus Δ; oportet igitur ipsi ΑΒΓ triangulo æquale parallelogrammum constituere in æquali ipsi Δ angulo rectilineo.



Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπέζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ

Secetur ΒΓ bifariam in Ε, et jungatur ΑΕ, et constituatur ad ΕΓ rectam et ad punctum in εἰ Ε ipsi Δ angulo æqualis ΓΕΖ, et per Α quidem ipsi ΕΓ parallela ducatur ΑΗ, per Γ vero ipsi ΕΖ parallela ducatur ΓΗ; parallelogrammum igitur est ΖΕΓΗ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΓ, æquale est et ΑΒΕ triangulum ipsi ΑΕΓ triangulo; nam super

PROPOSITION XLII.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

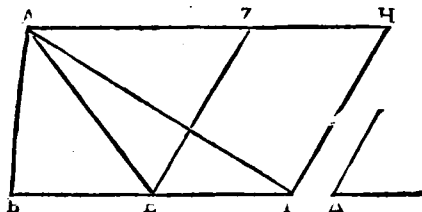
Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.

Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (23), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car

ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BE, EG καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς  
 παραλλήλοις ταῖς BF, AH· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ  
 τὸ ABΓ τρίγωνον<sup>4</sup> τοῦ AEF τριγώνου. Ἔστι δὲ  
 καὶ τὸ ZEGH παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ  
 AEF τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν

æqualibus basibus BE, EG sunt, et in eisdem  
 parallelis BF, AH; duplum igitur est ABΓ  
 triangulum ipsius AEF trianguli. Est autem et  
 ZEGH parallelogrammum duplum ipsius AEF  
 trianguli; basim enim quam AEF eandem habet,



ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις·  
 ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ZEGH παραλληλόγραμμον τῷ  
 ABΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην  
 τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ABΓ ἴσον παρα-  
 λληλόγραμμον συνίσταται<sup>5</sup> τὸ ZEGH, ἐν γωνίᾳ  
 τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις<sup>6</sup> ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Ὅτι εἰ  
 ποιῆσαι.

et in eisdem est parallelis in quibus ipsum AEF;  
 æquale igitur est ZEGH parallelogrammum ipsi  
 ABΓ triangulo, et habet ΓΕΖ angulum æqualem  
 dato Δ.

Dato igitur triangulo ABΓ æquale parallelo-  
 grammum constitutum est ZEGH in angulo ΓΕΖ  
 qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

ils sont sur des bases égales BE, EG, et entre les mêmes parallèles BF, AH; donc le triangle ABΓ est double du triangle AEF. Mais le parallélogramme ZEGH est double du triangle AEF (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ZEGH est égal au triangle ABΓ (not. 6), et il a l'angle ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ.

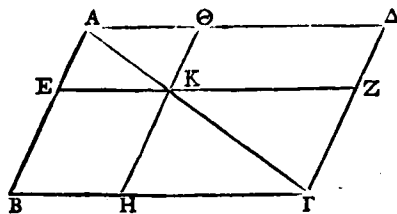
Donc le parallélogramme ZEGH a été construit égal au triangle ABΓ dans un angle qui est ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

PROPOSITIO XLIII.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ, διαμέτρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πέλλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ΚΖΓ τριγώνων

Omnis parallelogrammi eorum circa diametrum parallelogrammorum complementa æqualia inter se sunt.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, et circa ΑΓ parallelogramma quidem sint ΕΘ, ΖΗ, ipsa vero dicta complementa ΒΚ, ΚΔ; dico æquale esse ΒΚ complementum ipsi ΚΔ complemento.

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, æquale est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΓΔ triangulo. Rursus quoniam parallelogrammum est ΕΚΘΑ, diameter autem ipsius est ΑΚ, æquale est ΑΕΚ triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo. Propter eadem et ΚΖΓ triangulum ipsi ΚΗΓ

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les complémens des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle complémens; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le

τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ<sup>2</sup> ἴσιν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἴσιν, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσιν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνῳ· ἴσιν δὲ καὶ ἕλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπληρώματι ἴσιν ἴσον<sup>3</sup>. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

est æquale. Quoniam igitur ΑΕΚ quidem triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo est æquale; ΚΖΓ vero ipsi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ cum ipso ΚΗΓ est æquale ipsi ΑΘΚ triangulo cum ΚΖΓ triangulo; est autem et totum ΑΒΓ triangulum toti ΑΔΓ æquale. Reliquum igitur ΒΚ complementum reliquo ΗΔ complemento est æquale. Omnis igitur parallelogrammi, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

## PROPOSITIO XLIV.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δεθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμον.

Ad datam rectam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δεθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὲ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δεθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Sit quidem data recta ΑΒ, datum vero triangulum Γ, et datus angulus rectilineus Δ; oportet igitur ad datam rectam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare in æquali ipsi Δ angulo.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστίν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας

Constituatur ipsi Γ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ qui est æqualis, ipsi Δ; et ponatur in directum ΒΕ ipsi ΒΑ, et

triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΒΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

## PROPOSITION XLIV.

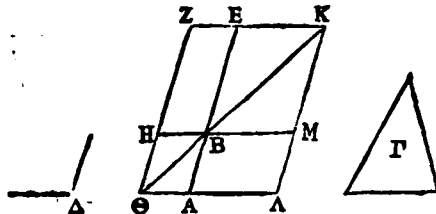
A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle ΕΒΗ égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme ΒΕΖΗ égal au triangle Γ (42), plaçons la droite ΒΕ dans la direction de la droite ΒΑ, prolonge-

εἶναι τὴν BE τῇ BA<sup>1</sup>, καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν BH, EZ παράλληλος ᾗχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΘΒ. Καὶ περὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, EZ ὑπεῖτα ἐπίσιν<sup>2</sup> ἡ ΘΖ, αἱ ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα<sup>3</sup> γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι<sup>4</sup>. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἑλάσσονες εἰσὶν· αἱ δὲ ἀπὸ ἰσασάνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπέπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. Ἐκτελέσθωσαν καὶ συμπίπτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ᾗχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκτελέσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Α, Μ σημεία.

producatur ZH ad Θ, et per Α alterutri ipsarum BH, EZ parallela ducatur ΑΘ, et jungatur ΘΒ. Et quoniam in parallelas ΑΘ, EZ recta incidit ΘΖ, ipsi ΑΘΖ, ΘΖΕ anguli duobus rectis sunt æquales; ergo ΒΘΗ, ΗΖΕ duobus rectis minores sunt; rectæ autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productæ concurrunt; ΘΒ, ΖΕ igitur productæ concurrent. Producantur et concurrant in Κ, et per Κ punctum alterutri ipsarum ΕΑ, ΖΘ parallela ducatur ΚΛ, et producantur ΘΑ, ΗΒ ad Α, Μ puncta.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΑΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ<sup>5</sup> παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ<sup>6</sup> ΑΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ

Parallelogrammum igitur est ΘΑΚΖ, diametrum autem ipsius ΘΚ, et circa ΘΚ parallelogramma quidem ΑΗ, ΜΕ, ipsa vero dicta complementa ΑΒ, ΒΖ; æquale igitur est ΑΒ ipsi ΒΖ,

geons la droite ZH vers Θ, par le point Α conduisons ΑΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BH, EZ (31), et joignons ΘΒ. Puisque la droite ΘΖ tombe sur les parallèles ΑΘ, EZ, les angles ΑΘΖ, ΘΖΕ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΒΘΗ, ΗΖΕ sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits, se rencontrent (dém. 5); donc les droites ΘΒ, ΖΕ étant prolongées, se rencontreront; qu'elles soient prolongées (dém. 2), et qu'elles se rencontrent en Κ; par le point Κ, conduisons ΚΛ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΕΑ, ΖΘ (31), et prolongeons les droites ΘΑ, ΗΒ vers les points Α, Μ.

La figure ΘΑΚΖ est un parallélogramme, ΘΚ est sa diagonale, et autour de ΘΚ sont les parallélogrammes ΑΗ, ΜΕ, et les parallélogrammes ΑΒ, ΒΖ, qu'on nomme compléments; donc ΑΒ est égal à ΒΖ (43). Mais ΒΖ est égal au triangle



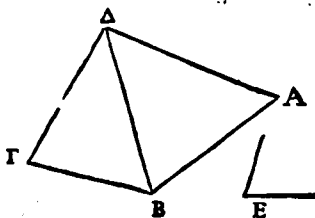
## 74 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ AB τῷ BZ. ἀλλὰ τὸ BZ τῷ Γ τριγώνῳ ἴσιν ἴσον· καὶ τὸ AB ἄρα τῷ Γ ἴσιν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABM ἄρα τῇ Δ γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν AB, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβηται τὸ AB, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM, ἡ ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μί.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.



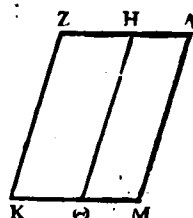
Εστω τὸ μὲν<sup>2</sup> δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ABΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὲ τῷ ABΓΔ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ<sup>3</sup> γωνίᾳ τῇ Ε.

Sed BZ ipsi Γ triangulo est æquale; et AB igitur ipsi Γ est æquale. Et quoniam æqualis est HBE angulus ipsi ABM, sed HBE ipsi Δ est æquale; et ABM igitur ipsi Δ angulo est æqualis.

Ad datam igitur rectam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicatum est AB, in angulo ABM qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.



Sit quidem datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus Ε; oportet igitur ipsi ABΓΔ rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo Ε.

Γ; donc AB est égal à Γ. Et puisque l'angle HBE est égal à l'angle ABM (15), et que l'angle HBE est égal à l'angle Δ, l'angle ABM est égal à l'angle Δ.

Donc à la droite donnée AB, et dans l'angle ABM égal à Δ, on applique le parallélogramme AB égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ABΓΔ la figure rectiligne donnée, et Ε l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné Ε, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ABΓΔ.

Επιζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνιστάτω τῷ  
ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ,  
ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶ τῇ Ε· καὶ  
παραβελήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθείαν τῷ ΔΒΓ  
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ  
ὑπὸ ΗΟΜ γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶ τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ,  
ΗΟΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα<sup>5</sup> τῇ ὑπὸ  
ΗΟΜ ἐστὶν ἴση<sup>6</sup>. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ·  
αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΟΜ  
ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς  
ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΟΜ ἄρα δυσὶν  
ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ,  
καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῃ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι  
αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι,  
τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν·  
ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ  
εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖαι<sup>7</sup> ἐνέπυσιν  
ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ  
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ  
ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ,  
ΘΗΛ ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν

Jungatur enim ΔΒ, et constituatur ipsi ΑΒΔ  
triangulo æquale parallelogrammum ΖΘ, in ΘΚΖ  
angulo, qui æqualis est ipsi Ε; et applicetur ad  
ΘΗ rectam ipsi ΔΒΓ triangulo æquale parallelo-  
grammum ΗΜ, in ΗΟΜ angulo, qui est æqualis  
ipsi Ε.

Et quoniam Ε angulus utrique ipsorum ΘΚΖ,  
ΗΟΜ est æqualis; et ΘΚΖ igitur ipsi ΗΟΜ est æ-  
qualis. Communis addatur ΚΘΗ; ergo ΖΚΘ, ΚΘΗ,  
ipsis ΚΘΗ, ΗΟΜ æquales sunt. Sed ΖΚΘ, ΚΘΗ duobus  
rectis æquales sunt; et ΚΘΗ, ΗΟΜ igitur duobus  
rectis æquales sunt. Ad aliquam igitur rectam  
ΗΘ, et ad punctum in eâ Θ, duæ rectæ ΘΚ, ΘΜ,  
non ad easdem partes positæ, deinceps angulos  
duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur  
est ΚΘ ipsi ΘΜ. Et quoniam in parallelas ΚΜ,  
ΖΗ recta incidit ΘΗ, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ  
æquales inter se sunt. Communis addatur ΘΗΛ;  
ergo ΜΘΗ, ΘΗΛ ipsis ΘΗΖ, ΘΗΛ æquales sunt.  
Sed ΜΘΗ, ΘΗΛ duobus rectis æquales sunt; et  
ΘΗΖ, ΘΗΛ igitur duobus rectis æquales sunt; in  
directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. Et quoniam ΚΖ

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle εκΖ égal à l'angle Ε, le pa-  
rallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons  
dans l'angle ΗΟΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au trian-  
gle ΔΒΓ.

Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles εκΖ, ΗΟΜ, l'angle εκΖ est  
égal à l'angle ΗΟΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ  
seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΟΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à  
deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΟΜ sont égaux à deux droits.  
Donc les deux droites εκ, ΘΜ, non placées du même côté, font avec la droite  
ΗΘ, et au point Θ de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits;  
donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite ΘΜ (14). Et puisque la  
droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont  
égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΛ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ  
seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΛ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ sont égaux à  
deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΛ sont aussi égaux à deux

## 76 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ  $\Theta\text{H}\text{Z}$ ,  $\Theta\text{H}\Lambda$  ἄρα  
 δυὸν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν<sup>8</sup>  
 ἡ  $\text{ZH}$  τῇ  $\text{H}\Lambda$ . Καὶ ἐπεὶ ἡ  $\text{KZ}$  τῇ  $\Theta\text{H}$  ἴση τε καὶ  
 παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ  $\Theta\text{H}$  τῇ  $\text{M}\Lambda$   
 καὶ ἡ  $\text{KZ}$  ἄρα τῇ  $\text{M}\Lambda$  ἴση τε καὶ παράλληλός  
 ἐστίν· καὶ ἐπιζυγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ  $\text{KM}$ ,  
 $\text{Z}\Lambda$ , καὶ αἱ  $\text{KM}$ ,  $\text{Z}\Lambda$  ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν·  
 παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\text{KZAM}$ . Καὶ ἐπεὶ  
 ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν  $\text{ABA}$  τρίγωνον τῷ  $\text{Z}\Theta$  παραλλη-  
 λογράμμῳ, τὸ δ'  $\Delta\text{BF}$  τῷ  $\text{HM}$  ὅλον ἄρα τὸ  $\text{AB}\Gamma\Delta$   
 εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ  $\text{KZAM}$  παραλληλογράμμῳ  
 ἐστὶν ἴσον 9.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ  $\text{AB}\Gamma\Delta$  ἴσον  
 παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ  $\text{KZAM}$ , ἐν  
 γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $\text{ZKM}$ , ἥ ἐστὶν ἴση τῇ<sup>10</sup> δοθείσῃ  
 τῇ  $\text{E}$ . Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀνα-  
 γράψαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $\text{AB}$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς  
 $\text{AB}$  εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

ipsi  $\Theta\text{H}$  æqualis et parallela est, sed  $\Theta\text{H}$  ipsi  $\text{M}\Lambda$ ;  
 et  $\text{KZ}$  igitur ipsi  $\text{M}\Lambda$  æqualis et parallela est; et  
 jungunt ipsas rectæ  $\text{KM}$ ,  $\text{Z}\Lambda$ , et  $\text{KM}$ ,  $\text{Z}\Lambda$  æquales  
 et parallelæ sunt; parallelogrammum igitur est  
 $\text{KZAM}$ . Et quoniam aequale est quidem  $\text{ABA}$   
 triangulum ipsi  $\text{Z}\Theta$  parallelogrammo;  $\Delta\text{BF}$  vero  
 ipsi  $\text{HM}$ ; totum igitur  $\text{AB}\Gamma\Delta$  rectilineum toti  
 $\text{KZAM}$  parallelogrammo est æquale.

Ergo dato rectilineo  $\text{AB}\Gamma\Delta$  æquale parallelo-  
 grammum constitutum est  $\text{KZAM}$  in angulo  $\text{ZKM}$ ,  
 qui est æqualis dato  $\text{E}$ . Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XLVI.

Ex datâ rectâ quadratum describere.

Sit data recta  $\text{AB}$ ; oportet igitur ex  $\text{AB}$  rectâ  
 quadratum describere.

droits; donc la droite  $\text{ZH}$  est dans la direction de la droite  $\text{H}\Lambda$ ; mais  $\text{KZ}$  est  
 égal et parallèle à  $\Theta\text{H}$ , et  $\Theta\text{H}$  égale et parallèle à  $\text{M}\Lambda$ ; donc la droite  $\text{KZ}$  est égale  
 et parallèle à  $\text{M}\Lambda$  (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les  
 droites  $\text{KM}$ ,  $\text{Z}\Lambda$ , et les droites  $\text{KM}$ ,  $\text{Z}\Lambda$  sont égales et parallèles (33); donc  
 $\text{KZAM}$  est un parallélogramme. Mais le triangle  $\text{ABA}$  est égal au parallélogramme  
 $\text{z}\Theta$ , et le triangle  $\Delta\text{BF}$  est égal au parallélogramme  $\text{HM}$ ; donc la figure recti-  
 ligne entière  $\text{AB}\Gamma\Delta$  est égale au parallélogramme entier  $\text{KZAM}$ .

Donc le parallélogramme  $\text{KZAM}$  a été construit égal à la figure rectiligne  
 donnée  $\text{AB}\Gamma\Delta$ , dans l'angle  $\text{ZKM}$  égal à l'angle donné  $\text{E}$ ; ce qu'il fallait faire.

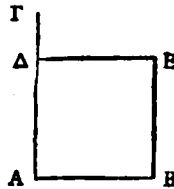
### PROPOSITION XLVI.

Décrire un quarré avec une droite donnée.

Soit  $\text{AB}$  la droite donnée; il faut décrire un quarré avec la droite  $\text{AB}$ .

Ἦχθω τῇ  $AB$  εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ  $A$ , πρὸς ὀρθὰς ἡ  $AG$ · καὶ κείσθω τῇ  $AB$  ἴση ἡ  $AD$ · καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Delta$  σημείου τῇ  $AB$  παράλληλος ἡχθῶ ἡ  $DE$ · διὰ δὲ τοῦ  $B$  σημείου τῇ  $AD$  παράλληλος ἡχθῶ ἡ  $BE$ .

Ducatur ipsi  $AB$  rectæ, a puncto in eâ  $A$ , ad rectos ipsa  $AG$ ; et ponatur ipsi  $AB$  æqualis  $AD$ ; et per  $\Delta$  quidem punctum ipsi  $AB$  parallela ducatur  $DE$ ; per  $B$  vero punctum ipsi  $AD$  parallela ducatur  $BE$ .



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AD\epsilon B$ · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν  $AB$  τῇ  $DE$ , ἡ δὲ  $AD$  τῇ  $BE$ . Ἀλλὰ ἡ  $AB$  τῇ  $AD$  ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ  $BA$ ,  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AD\epsilon B$  παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς  $AB$ ,  $DE$  εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ  $AD$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $BAD$ ,  $ADE$  γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $BAD$ · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $ADE$ . Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκάτερα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ  $ABE$ ,  $BEA$  γωνιῶν· ὀρθογώνιον

Parallelogrammum igitur est  $AD\epsilon B$ ; æqualis igitur est quidem  $AB$  ipsi  $DE$ ,  $AD$  vero ipsi  $BE$ . Sed  $AB$  ipsi  $AD$  est æqualis; quatuor igitur  $BA$ ,  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$  æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est  $AD\epsilon B$  parallelogrammum. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim in parallelas  $AB$ ,  $DE$  recta incidit  $AD$ ; ergo  $BAD$ ,  $ADE$  anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem est  $BAD$ ; rectus igitur et  $ADE$ . Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli æqualia inter se sunt; rectus igitur et uterque oppositorum  $ABE$ ,  $BEA$  angulorum; rectangulum igitur est  $AD\epsilon B$ . Ostensum autem est et æquilaterum;

- Du point  $A$ , donné dans cette droite, conduisons  $AG$  perpendiculaire à  $AB$  (11); faisons  $AD$  égal à  $AB$  (3); par le point  $\Delta$  conduisons  $DE$  parallèle à  $AB$  (31); et par le point  $B$  conduisons  $BE$  parallèle à  $AD$ .

La figure  $AD\epsilon B$  est un parallélogramme; donc  $AB$  est égal à  $DE$ , et  $AD$  égal à  $BE$ . Mais  $AB$  est égal à  $AD$ ; donc les quatre droites  $BA$ ,  $AD$ ,  $DE$ ,  $EB$  sont égales entr'elles; donc le parallélogramme  $AD\epsilon B$  est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite  $AD$  tombe sur les parallèles  $AB$ ,  $DE$ , les angles  $BAD$ ,  $ADE$  sont égaux à deux droits (29); mais l'angle  $BAD$  est droit; donc l'angle  $ADE$  est droit aussi. Mais les côtés et angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux (34); donc chacun des angles opposés  $ABE$ ,  $BEA$  est droit; donc le parallélogramme  $AD\epsilon B$  est rectangle; mais nous avons démontré qu'il est

## 78 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἴστί τὸ ΑΔΕΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·  
τετράγωνον ἄρα ἴστί, καὶ ἴστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ  
εὐθείας ἀναγιστραμμένον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

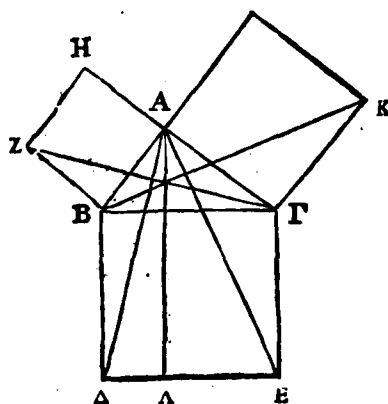
quadratum igitur est, et est ex AB recta descrip-  
tum. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

### PROPOSITIO XLVII.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς  
τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτινύουσας πλευρᾶς τετρά-  
γωνον, ἴσον ἴστί τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν  
περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere  
rectum angulum subtendente æquale est quadra-  
tis ex lateribus rectum angulum continentibus.



Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον  
τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ  
τετράγωνον ἴσον ἴστί τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τε-  
τραγώνοις.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum  
habens ΒΑΓ angulum; dico quadratum ex ΒΓ  
æquale esse quadratis ex ipsis ΒΑ, ΑΓ.

équilateral; donc le parallélogramme ΑΔΕΒ est un carré, et il est décrit avec la  
droite ΑΒ; ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est  
égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le carré  
du côté ΒΓ est égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ᾗχθω ἡ ΑΑ· καὶ ἐπιζεύχουσιν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ<sup>2</sup> τῇ ΒΑ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθείαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιζεύξας γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείμεθα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὲ<sup>3</sup> αἱ ΔΒ, ΔΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση<sup>4</sup>. βάσεις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ<sup>5</sup> ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐστὶ<sup>6</sup> τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμόν, βάσειν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΑ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις ταῖς

Describatur enim ex ΒΓ quidem quadratum ΒΔΕΓ; ex ipsis vero ΒΑ, ΑΓ ipsa ΗΒ, ΘΓ; et per Α alterutriusarum ΒΔ, ΓΕ parallela ducatur ΑΑ; et jungantur ΑΔ, ΖΓ.

Et quoniam rectus est uterque ipsorum ΒΑΓ, ΒΑΗ angulorum, ad aliquam igitur rectam ΒΑ, et ad punctum in eā Α, duæ rectæ ΑΓ, ΑΗ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in rectum igitur est ΓΑ ipsi ΑΗ. Propter eadem et ΒΑ ipsi ΑΘ est in rectum. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΖΒΑ, rectus enim uterque, communis addatur ΑΒΓ; totus igitur ΔΒΑ toti ΖΒΓ est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem ΔΒ ipsi ΒΓ, ipsa vero ΖΒ ipsi ΒΑ; duæ utique ΔΒ, ΔΑ duabus ΓΒ, ΒΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΔΒΑ angulo ΖΒΓ æqualis; basis igitur ΑΔ basi ΖΓ æqualis, et ΑΒΔ triangulum ipsi ΖΒΓ triangulo est æquale. Et est quidem ipsius ΑΒΔ trianguli duplum ΒΑ parallelogrammum, basim enim eandem habent ΒΔ et in eisdem sunt parallelis ΒΔ, ΑΑ; ipsius vero ΖΒΓ trianguli duplum ΒΗ quadratum, et enim rursus basim eandem habent et in eisdem

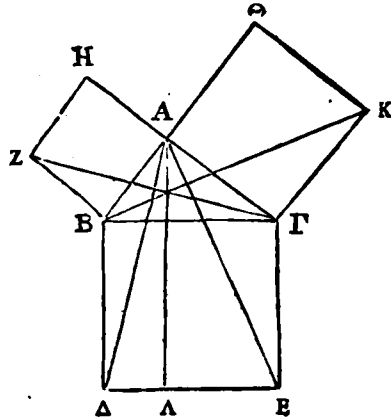
Décrivons avec ΒΓ le quarré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les quarrés ΗΒ, ΑΓ; et par le point Α conduisons ΑΑ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.

Puisque chacun des angles ΒΑΓ, ΒΑΗ est droit, les deux droites ΑΓ, ΑΗ, non placées du même côté, font avec la droite ΒΑ au point Α de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓΑ est dans la direction de ΑΗ; la droite ΒΑ est dans la direction ΑΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΖΒΑ, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ΑΒΓ, l'angle entier ΔΒΑ sera égal à l'angle entier ΖΒΓ (not. 4). Et puisque ΔΒ est égal à ΒΓ, et ΖΒ à ΒΑ, les deux droites ΔΒ, ΔΑ sont égales aux deux droites ΓΒ, ΒΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΖΓ, et le triangle ΑΒΔ égal au triangle ΖΒΓ (4). Mais le parallélogramme ΒΑ est double du triangle ΑΒΔ (41), car ils ont la même base ΒΔ et ils sont entre

# 80 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τε-  
τραγώνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι  
τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις<sup>7</sup>  
ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα  
ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΑ παρ-  
αλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ομοίως

sunt parallelis ΖΒ, ΗΓ; æqualium autem dupla  
æqualia inter se sunt; æquale igitur est et ΒΑ παρ-  
allelogrammum ipsi ΗΒ quadrato. Similiter au-  
tem junctis ΑΕ, ΒΚ ostendetur et ΓΑ parallelo-  
grammum æquale ipsi ΘΓ quadrato. Totum igitur  
ΒΔΕΓ quadratum duobus ΗΒ, ΘΓ quadratis æ-



δὲ, ἐπιζευγυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, διχθῆσται  
καὶ τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τε-  
τραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ  
τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἐστὶ  
τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγρα-  
φέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα  
ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον<sup>8</sup> ἴσον ἐστὶ τοῖς  
ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα  
τοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

quale est, et est quidem ΒΔΕΓ quadratum ex ΒΓ  
descriptum, ipsa vero ΗΒ, ΘΓ ex ΒΑ, ΑΓ; ergo  
quadratum ex ΒΓ latere æquale est quadratis ex  
ΒΑ, ΑΓ lateribus; ergo in rectangulis, etc.

les mêmes parallèles ΒΔ, ΑΛ; le carré ΒΗ est double du triangle ΖΒΓ, car  
ils ont la même base ΒΖ et ils sont entre les mêmes parallèles ΖΒ, ΗΓ; et les  
grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le  
parallélogramme ΒΑ est égal au carré ΗΒ. Ayant joint ΑΕ, ΒΚ, nous démon-  
trerons semblablement que le parallélogramme ΓΑ est égal au carré ΘΓ; donc  
le carré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux carrés ΗΒ, ΘΓ. Mais le carré ΒΔΕΓ  
est décrit avec ΒΓ, et les carrés ΗΒ, ΘΓ sont décrits avec ΒΑ, ΑΓ; donc le  
carré du côté ΒΓ est égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Donc dans les trian-  
gles, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

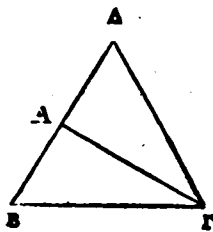
PROPOSITIO XLVIII.

Εάν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γάρ τοῦ  $AB\Gamma$  τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς  $B\Gamma$  πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AG$  πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία.

Si trianguli ex uno laterum quadratum æquale est quadratis ex reliquis trianguli duobus lateribus ; contentus angulus a reliquis trianguli duobus lateribus rectus est.

Trianguli enim  $AB\Gamma$  ex uno  $B\Gamma$  latere quadratum æquale sit quadratis ex  $BA$ ,  $AG$  lateribus ; dico rectum esse  $BAG$  angulum.



Ἡθῶ γάρ ἀπὸ τοῦ  $A$  σημείου τῇ  $AG$  εὐθείᾳ· πρὸς ὀρθὰς ἡ  $AD$ , καὶ κείσθω τῇ  $BA$  ἴση ἡ  $AD$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $DG$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $DA$  τῇ  $AB$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $DA$  τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $AG$  τετρά-

Ducatur enim ab  $A$  puncto ipsi  $AG$  rectæ ad rectas  $AD$ , et ponatur ipsi  $BA$  æqualis  $AD$ , et jungatur  $DG$ .

Et quoniam æqualis est  $DA$  ipsi  $AB$ , æquale est et ex  $DA$  quadratum ipsi ex  $AB$  quadrato. Commune addatur ex  $AG$  quadratum ; ipsa igitur ex

PROPOSITION XLVIII.

Si le carré d'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le carré du côté  $B\Gamma$  du triangle  $AB\Gamma$  soit égal aux carrés des côtés  $BA$ ,  $AG$  ; je dis que l'angle  $AB\Gamma$  est droit.

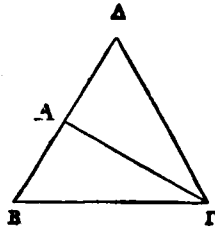
Du point  $A$ , conduisons la droite  $AD$  perpendiculaire à  $AG$  (11), faisons  $AD$  égal à  $BA$ , et joignons  $DG$ .

Car puisque  $DA$  est égal à  $AB$ , le carré de  $DA$  est égal au carré de  $AB$ . Ajoutons le carré commun de  $AG$  ; les carrés des droites  $DA$ ,  $AG$  seront égaux



γωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνους. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε

$\Delta A, A\Gamma$  quadrata æqualia sunt ipsis ex  $BA, A\Gamma$  quadratis. Sed ipsis quidem ex  $\Delta A, A\Gamma$  æquale est ipsum ex  $\Delta\Gamma$ , rectus enim est  $\Delta A\Gamma$  angulus; ipsis vero ex  $BA, A\Gamma$  æquale est ipsum ex  $B\Gamma$ , ponitur enim; ipsum igitur ex  $\Delta\Gamma$  quadratum æquale est ipsi ex  $B\Gamma$  quadrato; quare et latus  $\Delta\Gamma$  ipsi  $B\Gamma$  est æquale; et quoniam æqualis est



καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυοὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

$AD$  ipsi  $AB$ , communis autem  $AG$ , duæ utique  $DA, AG$  duabus  $BA, A\Gamma$  æquales sunt, et basis  $\Delta\Gamma$  basi  $B\Gamma$  est æqualis; angulus igitur  $\Delta A\Gamma$  angulo  $BAG$  est æqualis. Rectus autem  $\Delta A\Gamma$ ; rectus igitur et  $BAG$ . Si igitur trianguli, etc.

aux carrés des droites  $BA, A\Gamma$ . Mais le carré de  $\Delta\Gamma$  est égal aux carrés des droites  $\Delta A, A\Gamma$  (47), car l'angle  $\Delta A\Gamma$  est droit, et le carré de  $B\Gamma$  est supposé égal aux carrés des droites  $BA, A\Gamma$ ; donc le carré de  $\Delta\Gamma$  est égal au carré de  $B\Gamma$ ; donc le côté  $\Delta\Gamma$  est égal au côté  $B\Gamma$ ; mais  $AD$  est égal à  $AB$ , et  $AG$  est commun; donc les deux droites  $AD, AG$  sont égales aux deux droites  $BA, A\Gamma$ ; mais la base  $\Delta\Gamma$  est égale à la base  $B\Gamma$ ; donc l'angle  $\Delta A\Gamma$  est égal à l'angle  $BAG$  (8). Mais l'angle  $\Delta A\Gamma$  est droit; donc l'angle  $BAG$  est droit aussi. Donc, etc.

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

---

## ΟΡΟΙ.

α. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεται λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιχουσῶν εὐθειῶν.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἐν ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυοῖ παραπληρώμασι γνώμων καλεῖσθαι.

## DEFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectum angulum continentibus rectis.

2. Omnis autem parallelogrammi spatii eorum circa diametrum ipsius parallelogrammorum unumquodque cum duobus complementis gnomon vocetur.

## LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

### DÉFINITIONS.

1. Tout parallélogramme rectangle est dit contenu sous deux droites qui comprennent un angle droit.

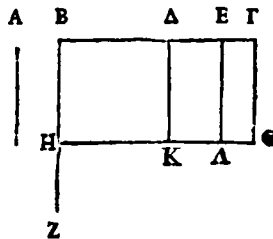
2. Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

## PROPOSITIO I.

Εάν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δημοτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.



Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἡχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἡχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ducatur enim a B ipsi BG ad rectos BZ, et ponatur ipsi A æqualis BH, et per H quidem ipsi BG parallela ducatur HΘ; per Δ, Ε, Γ vero ipsi BH parallelae ducantur ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

## PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre.

Soient deux droites Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit coupée à volonté aux points Δ, Ε; je dis que le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle contenu sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et au rectangle sous Α, ΕΓ.

Par le point Β, conduisons la droite ΒΖ perpendiculaire à ΒΓ (11. 1); faisons ΒΗ égal à Α, et par le point Η conduisons ΗΘ parallèle à ΒΓ (31. 1); et par les points Δ, Ε, Γ, conduisons les droites ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ, parallèles à la droite ΒΗ.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ  $B\Theta$  τοῖς  $BK$ ,  $\Delta\Lambda$ ,  $E\Theta$ . Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $B\Theta$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A$ ,  $B\Gamma$ , περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $HB$ ,  $B\Gamma$ , ἴση δὲ ἡ  $BH$  τῇ  $A$ · τὸ δὲ  $BK$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A$ ,  $BA$ , περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $HB$ ,  $BA$ , ἴση δὲ ἡ  $BH$  τῇ  $A$ · τὸ δὲ  $\Delta\Lambda$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A$ ,  $\Delta E$ , ἴση γὰρ ἡ  $\Delta K$ , τοῦτ' ἐστὶν ἡ  $BH$ , τῇ  $A$ · καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ  $E\Theta$  τὸ ὑπὸ τῶν  $A$ ,  $E\Gamma$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A$ ,  $B\Gamma$  ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ  $A$ ,  $BA$ , καὶ τῷ ὑπὸ  $A$ ,  $\Delta E$ , καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ  $A$ ,  $E\Gamma$ . Ἐάν ἄρα ὥσι, καὶ τὰ εἴης.

Æquale utique est  $B\Theta$  ipsis  $BK$ ,  $\Delta\Lambda$ ,  $E\Theta$ ; et est quidem  $B\Theta$  ipsum sub  $A$ ,  $B\Gamma$ , continetur enim sub  $HB$ ,  $B\Gamma$ , æqualis autem  $BH$  ipsi  $A$ ;  $BK$  vero ipsum sub  $A$ ,  $BA$ , continetur enim sub  $HB$ ,  $BA$ , æqualis autem  $BH$  ipsi  $A$ ;  $\Delta\Lambda$  vero ipsum sub  $A$ ,  $\Delta E$ , æqualis enim  $\Delta K$ , hoc est  $BH$ , ipsi  $A$ ; et etiam similiter  $E\Theta$  ipsum sub  $A$ ,  $E\Gamma$ ; ergo ipsum sub  $A$ ,  $B\Gamma$  æquale est ipsi sub  $A$ ,  $BA$ , et ipsi sub ipsis  $A$ ,  $\Delta E$ , et etiam ipsi sub  $A$ ,  $E\Gamma$ . Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$  σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $A\Gamma$  περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcunque, ipsa sub tota et utroque segmentorum contenta rectangula æqualia sunt ipsi ex tota quadrato.

Recta enim  $AB$  secetur utcunque in  $\Gamma$  puncto; dico ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  contentum rectangulum, cum ipso sub  $BA$ ,  $A\Gamma$  contento rectangulo, æquale esse ipsi ex  $AB$  quadrato.

Le rectangle  $B\Theta$  est égal aux rectangles  $BK$ ,  $\Delta\Lambda$ ,  $E\Theta$ . Mais  $B\Theta$  est le rectangle sous  $A$ ,  $B\Gamma$ , puisqu'il est contenu sous  $HB$ ,  $B\Gamma$ , et que  $BH$  est égal à  $A$ ;  $BK$  est le rectangle sous  $A$ ,  $BA$ , puisqu'il est contenu sous  $HB$ ,  $BA$ , et que  $BH$  est égal à  $A$ ;  $\Delta\Lambda$  est le rectangle sous  $A$ ,  $\Delta E$ , puisque  $\Delta K$ , c'est-à-dire  $BH$ , est égal à  $A$ ; et semblablement,  $E\Theta$  est le rectangle sous  $A$ ,  $E\Gamma$ ; donc le rectangle contenu sous  $A$ ,  $B\Gamma$  est égal au rectangle sous  $A$ ,  $BA$ , au rectangle sous  $A$ ,  $\Delta E$ , et encore au rectangle sous  $A$ ,  $E\Gamma$ . Donc, etc.

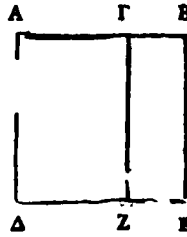
PROPOSITION II.

Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au carré de la droite entière.

Que la droite  $AB$  soit coupée à volonté en un point  $\Gamma$ ; je dis que le rectangle contenu sous  $AB$ ,  $B\Gamma$ , avec le rectangle contenu sous  $AB$ ,  $A\Gamma$ , est égal au quarré de  $AB$ .

Αναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ῥηθῶ διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

Describatur enim ex AB quadratum ΑΔΕΒ, et ducatur per Γ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΕ parallela ΓΖ.



Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον· τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γάρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γάρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est ΑΕ ipsis ΑΖ, ΓΕ; et est quidem ΑΕ ipsum ex AB quadratum, ΑΖ vero ipsum sub ΒΑ, ΑΓ contentum rectangulum, continetur etenim sub ΔΑ, ΑΓ, æqualis autem ΑΔ ipsi ΑΒ; ΓΕ vero ipsum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΕ ipsi ΑΒ; ipsum igitur sub ΒΑ, ΑΓ, cum ipso sub ΑΒ, ΒΓ, æquale est ipsi ex AB quadrato. Si igitur recta, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

### PROPOSITIO III.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum æquale est et ipsi sub segmentis contento rectangulo, et ipsi ex prædicto segmento quadrato.

Avec AB décrivons le quarré ΑΔΕΒ (46. 1), et par le point Γ conduisons ΓΖ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΕ (31. 1).

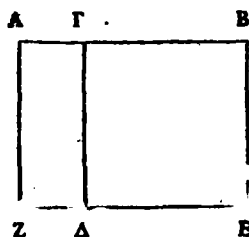
Le quarré ΑΕ est égal aux rectangles ΑΖ, ΓΕ; mais ΑΕ est le quarré de ΑΒ, ΑΖ est le rectangle contenu sous ΑΒ, ΑΓ, puisqu'il est contenu sous ΔΑ, ΑΓ, et que ΑΔ est égal à ΑΒ; et ΓΕ est le rectangle contenu sous ΑΒ, ΒΓ; puisque ΒΕ est égal à ΑΒ; donc le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, est égal au quarré de ΑΒ. Donc, etc.

### PROPOSITION III.

Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la droite entière et l'un des segments, est égal au rectangle contenu sous les segments et au quarré du segment premièrement dit,

Εὐθεῖα γὰρ ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$ · λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  τετραγώνου.

Αὐκγεγράθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον τὸ  $\Gamma\Delta EB$ , καὶ διήχθω  $^4$  ἡ  $EA$  ἐπὶ τὸ  $Z$ , καὶ διὰ τοῦ  $A$  ὁποτέρᾳ τῶν  $\Gamma\Delta$ ,  $BE$  παράλληλος ἦχθω ἡ  $AZ$ .



Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ  $AE$  τοῖς  $\Delta\Delta$ ,  $\Gamma E$ · καὶ ἐστὶ τὸ μὲν  $AE$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BE$ , ἴση δὲ ἡ  $BE$  τῇ  $B\Gamma$ · τὸ δὲ  $\Delta\Delta$  τὸ  $^5$  ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$ , ἴση γὰρ ἡ  $\Delta\Gamma$  τῇ  $\Gamma B$ · τὸ δ'  $\Delta B$  τὸ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, κατὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $GB$  τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Recta enim  $AB$  secetur utcumque in  $\Gamma$ ; dico ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  contentum rectangulum æquale esse ipsi sub  $AG$ ,  $GB$  contento rectangulo, cum ipso ex  $B\Gamma$  quadrato.

Describatur enim ex  $GB$  quadratum  $\Gamma\Delta EB$ , et producat  $EA$  in  $Z$ , et per  $A$  alterutri ipsarum  $\Gamma\Delta$ ,  $BE$  parallela ducatur  $AZ$ .

Æquale utique est  $AE$  ipsis  $\Delta\Delta$ ,  $\Gamma E$ ; et est quidem  $AE$  ipsum sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  contentum rectangulum, continetur etenim sub  $AB$ ,  $BE$ ; æqualis autem  $BE$  ipsi  $B\Gamma$ ;  $\Delta\Delta$  vero ipsum sub  $AG$ ,  $GB$ , æqualis enim  $\Delta\Gamma$  ipsi  $\Gamma B$ ;  $\Delta B$  autem ex  $GB$  est quadratum; ipsum igitur sub  $AB$ ,  $B\Gamma$  contentum rectangulum æquale est ipsi sub  $AG$ ,  $GB$  contento rectangulo, cum ipso ex  $GB$  quadrato. Si igitur recta, etc.

Que la droite  $AB$  soit coupée à volonté au point  $\Gamma$ ; je dis que le rectangle contenu sous  $AB$ ,  $B\Gamma$  est égal au rectangle contenu sous  $AG$ ,  $GB$ , avec le carré de  $B\Gamma$ .

Avec  $GB$  décrivons le carré  $\Gamma\Delta EB$  (46. 1), prolongeons  $EA$  en  $Z$ , et par le point  $A$  conduisons  $AZ$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $\Gamma\Delta$ ,  $BE$  (31. 1).

Le rectangle  $AE$  est égal aux rectangles  $\Delta\Delta$ ,  $\Gamma E$ ; mais  $AE$  est le rectangle contenu sous  $AB$ ,  $B\Gamma$ , puisqu'il est contenu sous  $AB$ ,  $BE$ , et que  $BE$  est égal à  $B$ ;  $\Delta\Delta$  est le rectangle sous  $AG$ ,  $GB$ , puisque  $\Delta\Gamma$  est égal à  $\Gamma B$ ; et  $\Delta B$  est le carré de  $\Gamma B$ ; donc le rectangle contenu sous  $AB$ ,  $GB$  est égal au rectangle contenu sous  $AG$ ,  $GB$ , avec le carré de  $\Gamma B$ . Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

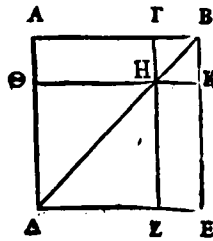
## PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Εὐθεῖα γάρ γραμμὴ ἡ  $AB$  τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ  $\Gamma$ . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  περιεχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum ex totâ quadratum æquale est et ipsis ex segmentis quadratis, et ipsi his sub segmentis contento rectangulo.

Recta enim linea  $AB$  secetur utcumque in  $\Gamma$ ; dico ipsum ex  $AB$  quadratum æquale esse et ipsis ex  $AG$ ,  $GB$  quadratis, et ipsi his sub  $AG$ ,  $GB$  contento rectangulo.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνου τὸ  $ADEB$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $BA$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Gamma$  ὁποτέρᾳ τῶν  $AD$ ,  $EB$  παραλλήλος ἤχθω ἡ  $GHZ$ , διὰ δὲ τοῦ  $H$  ὁποτέρᾳ τῶν  $AB$ ,  $DE$  παραλλήλος ἤχθω ἡ  $\Theta K$ .

Describatur enim ex  $AB$  quadratum  $ADEB$ , et jungatur  $BA$ , et per  $\Gamma$  quidem alterutri ipsarum  $AD$ ,  $EB$  parallela ducatur  $GHZ$ , per  $H$  vero alterutri ipsarum  $AB$ ,  $DE$  parallela ducatur  $\Theta K$ .

## PROPOSITION IV,

Si la droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite  $AB$  soit coupée à volonté au point  $\Gamma$ ; je dis que le carré de  $AB$  est égal aux carrés des segments  $AG$ ,  $GB$ , et à deux fois le rectangle contenu sous  $AG$ ,  $GB$ .

Avec  $AB$  décrivons le carré  $ADEB$  (46. 1); joignons  $BA$ ; par le point  $\Gamma$  conduisons  $GHZ$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $AD$ ,  $EB$  (31. 1), et par le point  $H$  conduisons  $\Theta K$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $AB$ ,  $DE$ ,

Καὶ ἐπὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ  
 εἰς αὐτὰς ἐμπίπτειν ἡ ΒΔ, ἡ ἰσὺς γωνία ἡ  
 ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ  
 ὑπὸ ΑΔΒ. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν  
 ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση·  
 καὶ ἡ ὑπὸ ΤΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν  
 ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν  
 ἴση<sup>2</sup>. ΑΛΛὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ  
 τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσο-  
 πλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ  
 ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΗ  
 τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπτεται ἡ ΓΒ<sup>3</sup>. αἱ ἄρα  
 ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι<sup>4</sup>.  
 Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ.  
 Ὡστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ  
 ὀρθαὶ εἰσὶν ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Ἐδείχθη  
 δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἴστιν  
 ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ τὸ ΘΖ τετρά-  
 γωνόν ἐστι, καὶ ἴστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἐστὶν  
 ἀπὸ<sup>5</sup> τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ  
 τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσὶ. Καὶ ἐπὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ  
 ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση

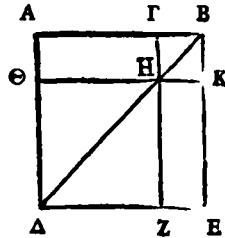
Et quoniam parallela est ΓΖ ipsi ΑΔ, et in  
 ipsas incidit ΒΔ, exterior angulus ΓΗΒ æqualis  
 est interiori et opposito ΑΔΒ. Sed ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ  
 est æqualis, quoniam et latus ΒΑ ipsi ΑΔ est  
 æquale; et ΓΗΒ igitur angulus ipsi ΗΒΓ est  
 æqualis; quare et latus ΒΓ lateri ΓΗ est æquale.  
 Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero  
 ipsi ΒΚ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΒ est æqualis; æqui-  
 laterum igitur est ΓΗΚΒ. Dico etiam et rectangu-  
 lum, Quoniam enim parallela est ΓΗ ipsi ΒΚ, et  
 in ipsas incidit ΓΒ; ipsi igitur ΚΒΓ, ΒΓΗ anguli  
 duobus rectis sunt æquales. Rectus autem est  
 ΚΒΓ; rectus igitur et ΒΓΗ. Quare et oppositi  
 ΓΗΚ, ΗΚΒ recti sunt; rectangulum igitur est  
 ΓΗΚΒ. Ostensum autem est et æquilaterum;  
 quadratum igitur est, et est ex ΓΒ. Propterea dem-  
 utique et ΘΖ quadratum est, et est ex ΘΗ, hoc est  
 ex ΑΓ; ipsa igitur ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ,  
 ΓΒ sunt. Et quoniam æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ,  
 et est ΑΗ ipsum sub ΑΓ, ΓΒ, æqualis enim

Puisque ΓΖ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΔ tombe sur ces deux droites, l'angle  
 extérieur ΓΗΒ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΔΒ (29. 1). Mais l'angle ΑΔΒ  
 est égal à l'angle ΑΒΔ (5. 1), puisque le côté ΒΑ est égal au côté ΑΔ; donc  
 l'angle ΓΗΒ est égal à l'angle ΗΒΓ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (6. 1);  
 mais ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΓΗ égal à ΒΚ; donc ΗΚ est égal à ΚΒ; donc  
 le quadrilatère ΓΗΚΒ est équilatéral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓΗ  
 est parallèle à ΒΚ, et que ΓΒ tombe sur ces deux droites, les angles ΚΒΓ, ΒΓΗ sont  
 égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle ΚΒΓ est droit (déf. 30. 1); donc  
 l'angle ΒΓΗ est droit. Donc les angles opposés ΓΗΚ, ΗΚΒ sont droits aussi  
 (34. 1); donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est  
 équilatéral; donc ce quadrilatère est un carré, et ce carré est décrit avec ΓΒ.  
 Par la même raison ΘΖ est aussi un carré, et ce carré est décrit avec ΘΗ, c'est-  
 à-dire avec ΑΓ; donc ΘΖ, ΓΚ sont des carrés décrits avec ΑΓ, ΓΒ. Et puisque le  
 rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), et que le rectangle ΑΗ est com-



γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ  
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ  
δὲς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ  
τετραγώνων ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ  
ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν  
ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ

ΗΓ ipsi ΓΒ; et HE igitur æquale ipsi sub ΑΓ,  
ΓΒ; ipsa igitur ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ipsi bis  
sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et ΘΖ, ΓΚ quadrata  
ex ΑΓ, ΓΒ; ergo quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ  
æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et  
ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Sed



περιχομένην ὀρθογώνιῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ΘΖ,  
ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ  
τῆς ΑΒ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετρα-  
γώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετρα-  
γώνοις καὶ τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιχομένην  
ὀρθογώνιῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἰζῆς.

quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ totum sunt ΑΔΕΒ,  
quod est ex ΑΒ quadratum; ergo ex ΑΒ qua-  
dratum æquale est et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis  
et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Si  
igitur recta, etc.

pris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, car ΗΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΗΕ est égal au  
rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le  
rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quarrés ΘΖ, ΓΚ sont décrits avec les droites ΑΓ, ΓΒ;  
donc les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ  
et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quatre figures ΘΖ, ΓΚ,  
ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΔΕΒ, qui est le quarré de ΑΒ; donc le quarré de ΑΒ  
est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous  
ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΖ'.

ET ALITER.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Επὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἵπαι ἴση ἐστὶν ἡ BA τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἵπαι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ<sup>3</sup> Α· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. Ἐχὺ δὲ καὶ ἑρῶν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετραγώνων ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἐστὶν

Dico ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo.

Quoniam enim, in eadem figurâ, æqualis est BA ipsi ΑΔ, æqualis est et angulus ABA ipsi ΑΔΒ; et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo ΑΒΔ trianguli tres anguli ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ duobus rectis æquales sunt. Rectus autem ΒΑΔ; reliqui igitur ΑΒΔ, ΑΔΒ uni recto æquales sunt; et sunt æquales; uterque igitur ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΒ dimidius est recti. Rectus est autem ΒΓΗ, æqualis enim est interiori et opposito qui ad Α; reliquus igitur ΓΗΒ dimidius est recti; æqualis igitur est ΓΗΒ angulus ipsi ΓΒΗ; et latus ΒΓ ipsi ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; æquilaterum igitur est ΓΚ. Habet autem et rectum ΓΒΚ angulum; quadratum igitur est ΓΚ, et est ex ΓΒ. Propter

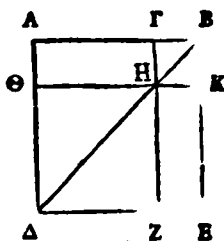
ET AUTREMENT.

Je dis que le carré de AB est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ.

Car puisque, dans la même figure, BA est égal à ΑΔ, l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΑΔΒ (5. 1); et puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΒΑΔ est droit; donc les deux angles restants ΑΒΔ, ΑΔΒ sont égaux à un droit; et ils sont égaux; donc chacun des angles ΑΒΔ, ΑΔΒ est la moitié d'un droit. Mais l'angle ΒΓΗ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé en Α; donc l'angle restant ΓΗΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΓΗΒ est égal à ΓΒΗ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (34. 1). Mais ΓΒ est égal à ΗΚ, et ΓΗ égal à l'angle ΒΚ (34. 1); donc ΓΚ est équilatéral. Mais il a l'angle droit ΓΒΚ; donc ΓΚ

ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΘΖ τε-  
τράγωνόν ἐστι<sup>5</sup>, καὶ ἐστὶν ἴσον<sup>6</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ·  
τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσα  
τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἵπαι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ  
τῷ ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,  
ἴση ἐστὶ<sup>7</sup> γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα<sup>8</sup> ἴσον  
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ  
τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ

eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est æ-  
quale ipsi ex ΑΓ; ergo ΓΚ, ΘΖ quadrata sunt,  
et sunt æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam  
æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub  
ΑΓ, ΓΒ, æqualis est enim ΓΗ ipsi ΓΒ; et ΕΗ  
igitur æquale est ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ergo ΑΗ, ΗΕ  
æqualia sunt ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et



ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ,  
ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δις  
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Αλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ,  
ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΒ τε-  
τράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ  
τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις  
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἐπι-  
τὴν διζῆται.

ipsa ΓΚ, ΘΖ æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ; ergo ΓΚ,  
ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ et  
ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed ΓΚ, ΘΖ et ΑΗ, ΗΕ  
totum sunt ΑΕ, quod est ex ΑΒ quadratum;  
ergo ex ΑΒ quadratum æquale est et ipsis ex  
ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ con-  
tento rectangulo. Quod oportebat ostendere.

est un carré, et il est le carré de ΓΒ. Par la même raison, ΘΖ est un carré, et il est égal à celui de ΑΓ; donc ΓΚ, ΘΖ sont des carrés, et ils sont égaux à ceux des droites ΑΓ, ΓΒ. Et puisque ΑΗ est égal à ΗΕ (31. 1), et que ΑΗ est sous ΑΓ, ΓΒ, car ΓΗ est égal à ΓΒ; le rectangle ΕΗ est égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les carrés ΓΚ, ΘΖ sont égaux aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ; donc les figures ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les figures ΓΚ, ΘΖ, et ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΕ, qui est le carré de ΑΒ, donc le carré de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἐστίν.

Ex his utique evidens est, in quadratis spatiis, circa diametrum parallelogramma quadrata esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

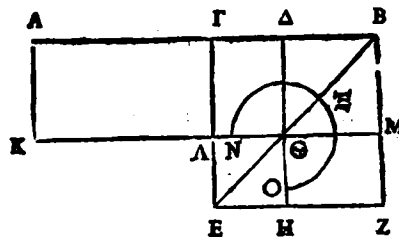
PROPOSITIO V.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ipsum sub inæqualibus totius segmentis contentum rectangulum cum ipso ex ipsâ inter sectiones quadrato æquale est ipsi ex dimidiâ quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ

Recta enim aliqua AB secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico



ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

ipsum sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΒ quadrato.

COROLLAIRE.

De là il est évident que, dans les quarrés, les parallélogrammes autour de la diagonale sont des quarrés.

PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière.

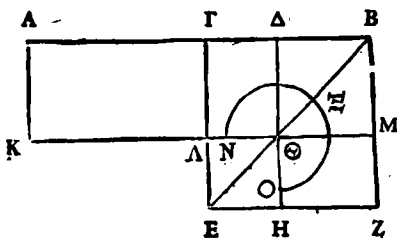
Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ, et en deux parties inégales au point Δ, je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓΒ.

Αναγινγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπιζεύχω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ῥχθῶ ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ῥχθῶ ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ῥχθῶ ἡ ΑΚ'.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῇ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλον τῇ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ

Describatur enim ex ΓΒ quadratum ΓΕΖΒ, et jungatur ΒΕ; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓΕ, ΒΖ parallela ducatur ΔΗ, per Θ vero alterutri ipsarum ΑΒ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ, et rursus per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΒΜ parallela ducatur ΑΚ.

Et quoniam æquale est ΓΘ complementum ipsi ΘΖ complemento, commune addatur ΔΜ; totum igitur ΓΜ toti ΔΖ æquale est. Sed ΓΜ



τὸ ΓΜ τῇ ΑΑ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴστί· καὶ τὸ ΑΑ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῇ ΝΞΟ γνώμονι<sup>3</sup> ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν<sup>4</sup> ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ<sup>5</sup> ΔΘ τῇ ΔΒ<sup>6</sup>. καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὃ ἐστίν ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῃ ὀρθογώνιῳ καὶ τῇ

ipsi ΑΑ æquale est, quia et ΑΓ ipsi ΓΒ est æqualis; et ΑΑ igitur ipsi ΔΖ æquale est. Commune addatur ΓΘ; totum igitur ΑΘ ipsi ΝΞΟ gnomoni æquale est. Sed ΑΘ quidem ipsum sub ΑΔ, ΔΒ est, æqualis enim ΔΘ ipsi ΔΒ; et ΝΞΟ igitur gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ. Commune addatur ΛΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΑ; ergo ΝΞΘ gnomon et ΛΗ æqualia sunt ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.

Avec la droite ΓΒ décrivons le quarré ΓΕΖΒ (46. 1), et joignons ΒΕ; par le point Δ conduisons ΔΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΒΖ (31. 1): par le point Θ conduisons ΚΜ parrallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΕΖ; et par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΒΜ,

Puisque le complément ΓΘ est égal au complément ΘΖ (43. 1), ajoutons le quarré commun ΔΜ, le rectangle entier ΓΜ sera égal au rectangle entier ΔΖ. Mais ΓΜ est égal à ΑΑ (36. 3), puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ; donc le rectangle ΑΑ est égal au rectangle ΔΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΘ, le rectangle entier ΑΘ sera égal au gnomon ΝΞΟ; mais ΑΘ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, puisque ΔΘ est égal à ΔΒ; donc le gnomon ΝΞΟ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le quarré commun ΛΗ, qui est égal au quarré de ΓΑ (corol. 4. 2), le gnomon ΝΞΟ et le quarré ΛΗ seront égaux au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, et au quarré

ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνῶμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθείᾳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed NZO gnomon et ΛΗ totum sunt ΓΕΖΒ quadratum, quod est ex ΓΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale est ipsi ex ΓΒ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

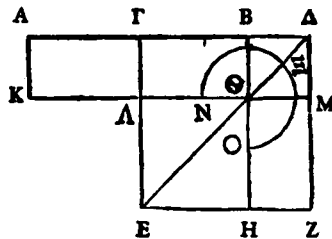
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστιθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἐκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημῖον, προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα

PROPOSITIO VI.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsum sub totâ cum adjeciâ, et sub adjeciâ contentum rectangulum cum ipso ex dimidiâ quadrato æquale est ipsi ex compositâ ex dimidiâ et adjeciâ tanquam ex unâ descripto quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secetur bifariam ad Γ punctum, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in



ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

directum ΒΔ; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΒ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΔ quadrato.

de ΓΔ. Mais le gnomon ΝΞΟ et ΛΗ sont le quarré entier ΓΕΖΒ, qui est décrit avec ΓΒ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓΒ. Donc,

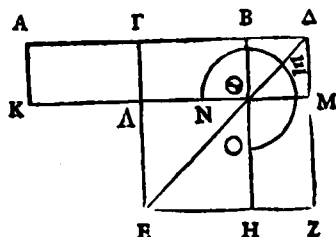
PROPOSITION VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite ΑΒ soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite ΒΔ; j'en dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΗ, est égal au quarré de ΓΔ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ᾗ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ᾗ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΔΜ παράλληλος ᾗ ΧΘ ἢ ΑΚ.

Describatur enim ex ΓΔ quadratum ΓΕΖΔ, et jungatur ΔΕ, et per Β quidem punctum alterutri ipsarum ΓΕ, ΔΖ parallela ducatur ΒΗ; per Θ vero punctum alterutri ipsarum ΑΔ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ; et adhuc per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΔΜ parallela ducatur ΑΚ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΕΖ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΕΖ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν προσκείμεν τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΕΟ γνῶμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΕΟ ἄρα γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Κοινὸν προσκείμεν τὸ ΑΗ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μιτὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, æquale est et ΑΛ ipsi ΓΘ. Sed ΓΘ ipsi ΕΖ æquale est; et ΑΛ igitur ipsi ΕΖ est æquale. Commune addatur ΓΜ; totum igitur ΑΜ ipsi ΝΕΘ γνομονι est æquale. Sed ΑΜ est ipsum sub ΑΔ, ΔΒ, æqualis enim est ΔΜ ipsi ΔΒ; et igitur ΝΕΘ γνομον æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΒ quadrato; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ΝΕΘ γνομονι et ipsi ΑΗ. Sed ΝΕΘ gno-

Avec la droite ΓΔ décrivons le carré ΓΕΖΔ (46. 1); joignons ΔΕ; par le point Β conduisons ΒΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (31. 1); par le point Θ, conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΕΖ, et enfin par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΔΜ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΕΖ (43. 1); donc le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΕΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΜ, le rectangle entier ΑΜ sera égal au gnomon ΝΕΟ. Mais ΑΜ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, car ΔΜ est égal à ΔΒ (4. 2); donc le gnomon ΝΕΟ est égal au rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le carré ΑΗ qui est égal au carré de ΓΒ; le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le carré de ΓΒ sera égal au gnomon ΝΕΟ et au carré ΑΗ.

ΞΟ γνῶμονι καὶ τῇ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνῶ-  
μων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον,  
ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ  
περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ  
τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.  
Εάν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

mon et ΛΗ totum sunt ΓΕΖΔ quadratum, quod  
est ex ΓΔ; ergo sub ΑΔ, ΔΒ contentum rec-  
tangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi  
ex ΓΔ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

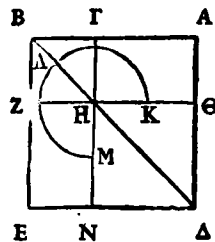
PROPOSITIO VII.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ, τὸ ἀπὸ  
τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ  
συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῇ τε δις  
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περι-  
εχομένην ὀρθογώνιῳ καὶ τῇ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ  
τμήματος τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcunque, ipsa ex totâ  
et ex uno segmentorum, simul sumpta quadrata  
æqualia sunt et ipsi bis sub totâ et dicto  
segmento contento rectangulo, et ipsi ex reli-  
quo segmento quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχῃ  
κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ,

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit utcunque in  
Γ puncto; dico ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia



ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῇ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ,  
ΒΓ περιεχομένην ὀρθογώνιῳ καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΓΑ  
τετραγώνῳ.

esse et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectan-  
gulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.

Mais le gnomon ΝΞΟ, et le quarré ΛΗ sont le quarré entier ΓΕΖΔ, qui est le quarré  
de ΓΔ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le quarré de ΓΒ est égal au  
quarré de ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si une ligne droite est coupée d'une manière quelconque, le quarré de la droite  
entière et le quarré de l'un des segments, pris ensemble, sont égaux à deux fois  
le rectangle compris sous la droite entière et ledit segment, et au quarré du  
segment restant.

Qu'une droite ΑΒ soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis  
que les quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris  
sous ΑΒ, ΒΓ, et au quarré de ΓΑ.

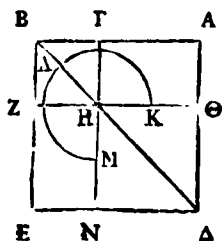


Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλον τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΑΜ ἐστὶ γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΑΜ ἄρα γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἐστὶ δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γάρ

Describatur enim ex AB quadratum AΔΕΒ; et construatür figura.

Quoniam igitur æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, commune addatur ΓΖ; totum igitur ΑΖ toti ΓΕ æquale est; ergo ΑΖ, ΓΕ dupla sunt ipsius ΑΖ. Sed ΑΖ, ΓΕ ipso ΚΑΜ sunt gnomon et ΓΖ quadratum; ΚΑΜ igitur gnomon et ΓΖ dupla sunt ipsius ΑΖ. Est autem ipsius ΑΖ duplum et ipsum bis sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΖ



ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΝ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνῶμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΚΑΜ γνῶμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ

ipsi ΒΓ; ergo ΚΑΜ gnomon et ΓΖ quadratum æqualia sunt ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ. Commune addatur ΘΝ, quod est ex ΑΓ quadratum; ergo ΚΑΜ gnomon et ΓΖ, ΘΝ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectangulo et ipsi ex ΑΓ quadrato. Sed ΚΑΜ gnomon et ΓΖ, ΘΝ quadrata totum sunt ΑΔΕΒ et ΓΖ, quæ sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia sunt ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ con-

Avec AB décrivons le carré ΑΔΕΒ (46. 1); et construisons la figure.

Puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), ajoutons le carré commun ΓΖ; le rectangle entier ΑΖ sera égal au rectangle entier ΓΕ; donc les rectangles ΑΖ, ΓΕ sont doubles du rectangle ΑΖ. Mais les rectangles ΑΖ, ΓΕ sont le gnomon ΚΑΜ et le carré ΓΖ; donc le gnomon ΚΑΜ et le carré ΓΖ sont doubles du rectangle ΑΖ. Mais deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle ΑΖ, car ΒΖ est égal à ΒΓ (cor. 4. 2); donc le gnomon ΚΑΜ et le carré ΓΖ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Ajoutons le carré commun ΘΝ, qui est le carré de ΑΓ; le gnomon ΚΑΜ et les carrés ΓΖ, ΘΝ seront égaux à deux fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, et au carré de ΑΓ. Mais le gnomon ΚΑΜ et les carrés ΓΖ, ΘΝ sont les carrés entiers ΑΔΕΒ, ΓΖ, qui sont les

τῶν AB, BG τετραγώνων ἴσα ἔστι, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BG περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου. Εἰς ἄρα εὐθείᾳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

tento rectangulo cum ex AG quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἦ.

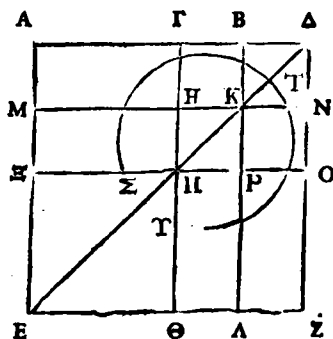
PROPOSITIO VIII.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἴτυχι, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὶς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἑλαιοῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἔστι τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημίου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφίντι τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, quater sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum cum ipso ex reliquo segmento quadrato æquale est ipsi ex totâ et dicto segmento tanquam ex unâ descripto quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω ὡς ἴτυχι κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB,

Recta enim aliqua AB secta sit utcumque in Γ puncto; dico et quater sub AB, BG conten-



BG περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου, ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς AB, BG ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφίντι τετραγώνῳ.

tum rectangulum cum ipso ex AG quadrato æquale esse ipsi ex ipsâ AB, BG tanquam ex unâ descripto quadrato.

quarrés des droites AB, BG; donc les quarrés des droites AB, BG sont égaux à deux fois le rectangle compris sous AB, BG, et au quarré de AG. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, avec le quarré du segment restant, est égal au quarré décrit avec la droite entière et ledit segment, comme avec une seule droite.

Qu'une droite AB soit coupée d'une manière quelconque au point Γ: je dis que quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BG, avec le quarré de AG, est égal au quarré décrit avec les droites AB, BG, comme avec une seule droite.

3r.

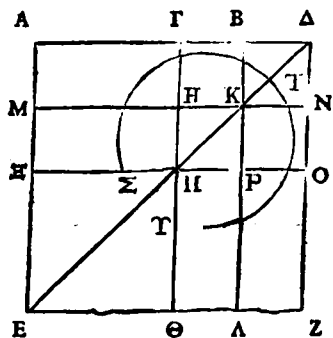


Εκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ AB εὐθεία ἡ BA, καὶ κείσθω ἴση τῇ GB ἡ BA<sup>2</sup>, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AA τετράγωνον τὸ AEZA, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ BG τῇ BA, ἀλλὰ ἡ μὲν GB τῇ HK ἴσθιν ἴση, ἡ δὲ BA τῇ KN, καὶ ἡ HK ἄρα<sup>3</sup> τῇ KN ἴσθιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΠP τῇ PO ἴσθιν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν<sup>4</sup> GB τῇ BA, ἡ δὲ HK τῇ KN· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>5</sup> τὸ μὲν<sup>6</sup> ΓK

Producatur enim in directum ipsi AB recta BA, et ponatur æqualis ipsi GB ipsa BA, et describatur ex AA quadratum AEZA, et construatür dupla figura.

Quoniam igitur æqualis est BG ipsi BA, sed GB quidem ipsi HK est æqualis, et BA ipsi KN; et HK igitur ipsi KN est æqualis. Propter eadem utique et PP ipsi PO est æqualis. Et quoniam æqualis est GB quidem ipsi BA, et HK ipsi KN;



τῷ BN, τὸ δὲ HP τῷ KO. Αλλὰ τὸ ΓK τῷ PN ἴσθιν ἴσον<sup>7</sup>, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓO παραλληλογράμμου· καὶ τὸ BN ἄρα τῷ HP ἴσον ἐστὶν<sup>8</sup>. τὰ τέσσαρα ὅρα τὰ ΓK, ΚΔ, HP, PN ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓK. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ GB τῇ BA, ἀλλὰ ἡ μὲν BA τῇ BK, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΓH ἐστὶν<sup>9</sup> ἴση, ἡ δὲ GB τῇ HK, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΗΠ ἐστὶν

æquale igitur est GK quidem ipsi BN, et HP ipsi KO. Sed GK ipsi PN est æquale, complementa enim sunt ipsius GO parallelogrammi; et BN igitur ipsi HP æquale est; quatuor igitur GK, ΚΔ, HP, PN æqualia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius GK. Rursus, quoniam æqualis est GB ipsi BA, sed BA quidem ipsi BK, hoc est, ipsi GH est æqualis, GB vero ipsi HK, hoc est,

Conduisons la droite BA dans la direction de AB; faisons BA égal à BG; décrivons avec AA le carré AEZA (46. 2), et construisons une double figure.

Puisque BG est égal à BA, que GB est égal à HK (34. 1), et BA égal à KN, la droite HK est égale à la droite KN. La droite PP est égale à la droite PO, par la même raison. Et puisque GB est égal à BA, et HK égal à KN, le rectangle GK est égal au rectangle BN, et le rectangle HP égal au rectangle KO (36. 1). Mais le rectangle GK est égal au rectangle PN (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme GO; donc le rectangle BN est égal au rectangle HP; donc les quatre rectangles GK, ΚΔ, HP, PN sont égaux l'un à l'autre; donc ces quatre rectangles sont le quadruple du rectangle GK. De plus, puisque GB est égal à BA, et BA égal à BK, c'est-à-dire à GH (34. 1), et que GB est égal à HK, c'est-à-dire à HP, la

ἴση<sup>10</sup>. καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἰστί<sup>11</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἰστί<sup>11</sup> ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἰστί καὶ τὸ μὲν<sup>12</sup> ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. Αλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἰστί<sup>12</sup> ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΑ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἰστί<sup>12</sup>. τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἰστί<sup>12</sup>. τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσια ἰστί<sup>13</sup>. Εδίδχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ἐκτὼς ἂ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα τετραπλάσια ἰστί τοῦ ΑΚ<sup>14</sup>. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἰστί<sup>14</sup>, ἴση γὰρ<sup>15</sup> ἡ ΚΒ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἰστί τοῦ ΑΚ. Εδίδχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἰστί τῷ ΣΤΥ γνώμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὃ ἰστί ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ<sup>16</sup> τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἰστί τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. Αλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἰστί τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὃ ἰστί ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ,

ipsi ΗΠ est æqualis; et ΓΗ igitur ipsi ΗΠ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΓΗ quidem ipsi ΗΠ, et ΠΡ ipsi ΡΟ; æquale est et ΑΗ quidem ipsi ΜΠ, et ΠΛ ipsi ΡΖ. Sed ΜΠ ipsi ΠΛ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΜΑ parallelogrammi; et ΑΗ igitur ipsi ΡΖ æquale est; quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ æqualia inter se sunt; quatuor igitur ipsius ΑΗ quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ ipsius ΓΚ quadrupla; ergo octo quæ continet ΣΤΥ gnomon quadrupla sunt ipsius ΑΚ. Et quoniam ΑΚ ipsum sub ΑΒ, ΒΔ est, æqualis enim est ΚΒ ipsi ΒΔ; ergo ipsum quater sub ΑΒ, ΒΔ quadruplum est ipsius ΑΚ. Ostensus est autem ipsius ΑΚ quadruplus et ΣΤΥ gnomon. Ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni. Commune addatur ΞΘ, quod æquale est ipsi ex ΑΓ quadrato; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ contentum rectangulum cum ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni et ipsi ΞΘ. Sed ΣΤΥ gnomon et ΞΘ totum sunt ΑΕΖΔ quadratum, quod est ex

droite ΓΗ est égale à la droite ΗΠ. Et puisque ΓΗ est égal à ΗΠ, et que ΠΡ est égal à ΡΟ, le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΜΠ, et le rectangle ΠΛ égal au rectangle ΡΖ (36. 1). Mais le rectangle ΜΠ est égal au rectangle ΠΛ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΜΑ; donc le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΡΖ; donc les quatre rectangles ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont quadruples du rectangle ΑΗ. Mais on a démontré que les quatre quarrés ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ sont quadruples du quarré ΓΚ; donc les huit figures qui composent le gnomon ΣΤΥ sont quadruples du rectangle ΑΚ. Mais le rectangle ΑΚ est sous ΑΒ, ΒΔ; car ΚΒ est égal à ΒΔ (cor. 4. 2); donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est quadruple du rectangle ΑΚ. Mais on a démontré que le gnomon ΣΤΥ est quadruple du rectangle ΑΚ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est égal au gnomon ΣΤΥ. Ajoutons le quarré commun ΞΘ, qui est égal au quarré de ΑΓ (cor. 4. 2); quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΔ, avec le quarré de ΑΓ sera égal au gnomon ΣΤΥ et au quarré ΞΘ. Mais le gnomon ΣΤΥ et le quarré ΞΘ sont le quarré entier ΑΕΖΔ, qui est décrit avec ΑΔ; donc quatre fois

ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>17</sup> ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>18</sup> ΑΔ τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ<sup>19</sup>· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>20</sup> ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὥς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Εἰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΑΔ; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ cum ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato. Æqualis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ; ergo quater sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato, hoc est, ex ipsâ ΑΒ et ΒΓ tanquam ex unâ descripto quadrato. Si igitur recta, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

## PROPOSITIO IX.

Εἰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετραγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου,

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἡχθῶ γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἐκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἵπ-

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ex inæqualibus totius segmentis quadrata dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex ipsâ inter sectiones quadrati.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla esse ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum.

Ducatur enim a Γ ipsi ΑΒ ad rectos ΓΕ, et ponatur æqualis utrique ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et jun-

le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ avec le quarré de ΒΓ est égal au quarré de ΑΔ. Mais ΒΔ est égal à ΒΓ; donc quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ avec le quarré de ΑΓ est égal au quarré de ΑΔ, c'est-à-dire au quarré décrit avec ΑΒ et ΒΓ comme avec une seule droite. Donc; etc.

## PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, les quarrés des segments inégaux de la droite entière sont doubles du quarré de la moitié de cette droite et du quarré de la droite placée entre les sections.

Que la droite ΑΒ soit coupée en parties égales en Γ, et en parties inégales en Δ; je dis que les quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ.

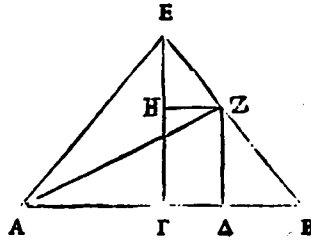
Du point Γ conduisons ΓΕ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1); faisons la droite ΒΓ égale à l'une et à l'autre des droites ΑΓ, ΓΒ, et joignons ΑΕ, ΕΒ; par le point

εξιύχθωσαν αἱ  $AE, EB$ , καὶ διὰ μὲν τοῦ  $\Delta$  τῇ  $EF$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $\Delta Z$ , διὰ δὲ τοῦ  $Z$  τῇ  $AB$  παράλληλος ᾗχθω ἡ  $ZH$ , καὶ ἐπιεῦχθω ἡ  $AZ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $AG$  τῇ  $GE$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $EAG$  γωνία τῇ ὑπὸ  $AEG$ . Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ  $G$ , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ  $EAG, AEG$  μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶν, καὶ εἰσὶν ἴσαι<sup>20</sup> ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $GEA, GAE$ . Διὰ τὰ αὐτὰ

gantur  $AE, EB$ , et per  $\Delta$  quidem ipsi  $EF$  parallela ducatur  $\Delta Z$ , per  $Z$  vero ipsi  $AB$  parallela ducatur  $ZH$ , et jungatur  $AZ$ .

Et quoniam æqualis est  $AG$  ipsi  $GE$ , æqualis est et  $EAG$  angulus ipsi  $AEG$ . Et quoniam rectus est ad  $G$ , reliqui igitur  $EAG, AEG$  uni recto æquales sunt, et sunt æquales; dimidius igitur recti est uterque ipsorum  $GEA, GAE$ . Propter eadem utique et



δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ  $GEB, EBG$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $AEB$  ὀρθὴ ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  $HEZ$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $EHZ$ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ  $EGB$ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $EZH$  ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ὑπὸ  $HEZ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $EZH$ . ὥστε καὶ πλευρά ἡ  $EH$  πλευρᾷ τῇ  $HZ$  ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ  $B$  γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ  $ZAB$ , ἴση

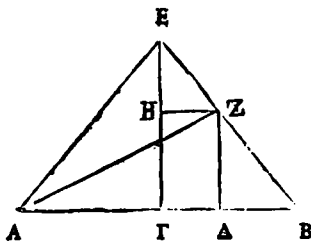
uterque ipsorum  $GEB, EBG$  dimidius est recti; totus igitur  $AEB$  rectus est. Et quoniam  $HEZ$  dimidius est recti, rectus autem  $EHZ$ , æqualis enim est interiori et opposito  $EGB$ ; reliquus igitur  $EZH$  dimidius est recti; æqualis igitur est  $HEZ$  angulus ipsi  $EZH$ ; quare et latus  $EH$  lateri  $HZ$  est æquale. Rursus quoniam ad  $B$  angulus dimidius est recti, rectus autem  $ZAB$ , æqualis enim est rursus interiori et opposito

$\Delta$  conduisons  $\Delta Z$  parallèle à  $EF$  (31. 1), et par le point  $Z$  conduisons  $ZH$  parallèle à  $AB$ , et joignons  $AZ$ .

Puisque  $AG$  est égal à  $GE$ , l'angle  $EAG$  est égal à l'angle  $AEG$  (5. 1). Et puisque l'angle en  $G$  est droit, les angles restants  $EAG, AEG$  sont égaux à un droit (32. 1); mais ils sont égaux; donc chacun des angles  $GEA, GAE$  est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles  $GEB, EBG$  est la moitié d'un droit; donc l'angle entier  $AEB$  est droit. Et puisque l'angle  $HEZ$  est la moitié d'un droit, et que l'angle  $EHZ$  est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé  $EGB$  (29. 1), l'angle  $EZH$  est la moitié d'un droit; donc l'angle  $HEZ$  est égal à l'angle  $EZH$ ; donc le côté  $EH$  est égal au côté  $HZ$  (6. 1). De plus, puisque l'angle en  $B$  est la moitié d'un droit, et que l'angle  $ZAB$  est droit, car il est égal à l'angle intérieur

γὰρ ἰστὶ πάλιν<sup>5</sup> τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ  
 ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν  
 ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ  
 ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλειυρὰ ἡ ΖΔ πλειυρὰ τῇ ΔΒ  
 ἰστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον  
 ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς<sup>6</sup> ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>7</sup> ΓΕ· τὰ  
 ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι  
 τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>8</sup> ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον  
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὁρθὴ γὰρ ἡ

ΕΓΒ; reliquus igitur ΔΖΒ dimidius est recti;  
 æqualis igitur ad Β angulus ipsi ΔΖΒ; quare  
 et latus ΖΔ lateri ΔΒ est æquale. Et quoniam  
 æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æquale est et ipsum  
 ex ΑΓ ipsi ex ΓΕ; ergo ex ΑΓ, ΓΕ quadrata dupla  
 sunt ipsius ex ΑΓ. Ipsius autem ex ΑΓ, ΓΕ æquale  
 est ex ΑΕ quadratum, rectus enim est ΑΓΕ  
 angulus; ipsum igitur ex ΑΕ duplum est ip-  
 sius ex ΑΓ. Rursus quoniam æqualis est ΕΗ



ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν  
 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς<sup>9</sup> ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ  
 τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ<sup>10</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς  
 ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλά-  
 σιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ  
 τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  
 ΕΖ τετράγωνον<sup>11</sup>· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν  
 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον  
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ<sup>12</sup>· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλά-  
 σιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς

ipsi ΗΖ, æquale est et ipsum ex ΕΗ ipsi ex ΗΖ;  
 ergo ex ΕΗ, ΗΖ quadrata dupla sunt ipsius ex ΗΖ  
 quadrati. Ipsius autem ex ΕΗ, ΗΖ quadratis æquale  
 est ipsum ex ΕΖ quadratum; ergo ex ΕΖ quadra-  
 tum duplum est ipsius ex ΗΖ quadrati. Sed æ-  
 quale est ipsum ex ΗΖ ipsi ex ΓΔ; ipsum igitur ex  
 ΕΖ duplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem ipsum ex  
 ΕΑ duplum ipsius ex ΑΓ; ergo ex ΑΕ, ΕΖ qua-  
 drata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum; ipsis  
 vero ex ΑΕ, ΕΖ æquale est ex ΑΖ quadratum,

et opposé ΕΓΒ (29. 1), l'angle restant ΔΖΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle en Β  
 est égal à l'angle ΔΖΒ; donc le côté ΖΔ est égal au côté ΔΒ (6. 1). Et puisque ΑΓ  
 est égal à ΓΕ, le quarré de ΑΓ est égal au quarré de ΓΕ; donc les quarrés des  
 droites ΑΓ, ΓΕ sont doubles du quarré de ΑΓ. Mais le quarré de ΑΕ est égal aux  
 quarrés des droites ΑΓ, ΓΕ (47. 1), car l'angle ΑΓΕ est droit; donc le quarré de  
 ΑΕ est double du quarré de ΑΓ. De plus, puisque ΕΗ est égal à ΗΖ, le quarré de ΕΗ  
 est égal au quarré de ΗΖ; donc les quarrés des droites ΕΗ, ΗΖ sont doubles du  
 quarré de ΗΖ. Mais le quarré de ΕΖ est égal aux quarrés des droites ΕΗ, ΗΖ  
 (47. 1); donc le quarré de ΕΖ est double du quarré de ΗΖ. Mais ΗΖ est égal à ΓΔ  
 (34. 1); donc le quarré de ΕΖ est double du quarré de ΓΔ. Mais le quarré de ΕΑ est

ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετραγώνον, ὁρθὴ γὰρ ἐστὶν<sup>14</sup> ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετραγώνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὁρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἰσὴ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Εὰν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

rectus enim est AEZ angulus; ergo AZ quadratum duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi vero ex AZ æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΖ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsa igitur ex ΑΔ, ΔΖ dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Æqualis autem ΔΖ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐκ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετραγώνων, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἑκ' τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὥς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου<sup>1</sup>.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsa ex totâ cum adjectâ et ex adjectâ, simul sumpta quadrata, dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex compositâ ex dimidiâ et adjectâ tanquam ex unâ descripti quadrati.

double du carré de ΑΓ; donc les carrés des droites ΑΕ, ΕΖ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le carré de ΑΖ est égal aux carrés des droites ΑΕ, ΕΖ (47. 1), car l'angle ΑΕΖ est droit; donc le carré ΑΖ est double des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les carrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont égaux au carré de ΑΖ (47. 1), car l'angle en Δ est droit; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais ΔΖ est égal à ΔΒ; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION X.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le carré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le carré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du carré de la moitié de la droite entière, et du carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

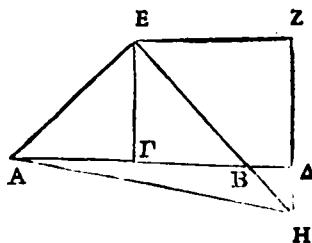


Εὐθείᾳ γὰρ τις ἡ  $AB$  τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ὅπ' εὐθείας ἡ  $BA$ . λῖγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $AD$ ,  $AB$  τετράγωνα διπλάσια ἴσιν τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $GE$ , καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν  $AG$ ,  $GB$ , καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ  $EA$ ,  $EB$ · καὶ διὰ μὲν τοῦ  $E$  τῇ  $AD$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $EZ$ · διὰ δὲ τοῦ  $\Delta$  τῇ

Recta enim aliqua  $AB$  secta sit bifariam in  $\Gamma$ , adjiciatur autem aliqua ei recta in directum  $BA$ ; dico ex  $AD$ ,  $AB$  quadrata dupla esse ex  $AG$ ,  $GB$  quadratorum.

Ducatur enim a  $\Gamma$  puncto ipsi  $AB$  ad rectos  $GE$ , et ponatur æqualis utrique ipsorum  $AG$ ,  $GB$ , et jungantur  $EA$ ,  $EB$ ; et per  $E$  quidem ipsi  $AD$  parallela ducatur  $EZ$ ; per  $\Delta$  vero ipsi  $GE$



$GE$  πάλιν<sup>2</sup> παράλληλος ἤχθω ἡ  $ZD$ . Καὶ ἐπὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς  $EG$ ,  $ZD$  εὐθεῖα τις ἐνέπυσιν ἡ  $EZ$ , αἱ ὑπὸ  $GEZ$ ,  $EZA$  ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ  $ZEB$ ,  $EZA$  δύο ὀρθῶν ἱλασσόνες εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἱλασσόνων ἡ δύο ὀρθῶν ἑκαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα  $EB$ ,  $ZD$  ἑκαλλόμεναι ἐπὶ τὰ  $BA$  μέρη συμπίπτουσιν. Εκτελέσθωσαν, καὶ συμπεπντίωσαν κατὰ τὸ  $H$ , καὶ ἐπιζεύχω ἡ  $AH$ .

rursus parallela ducatur  $ZD$ . Et quoniam in parallelas rectas  $EG$ ,  $ZD$  recta aliqua incidit  $EZ$ , anguli  $GEZ$ ,  $EZA$  igitur duobus rectis æquales sunt; ergo  $ZEB$ ,  $EZA$  duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ conveniunt; ergo  $EB$ ,  $ZD$  productæ ad partes  $BA$  convenient. Producantur, et conveniant in  $H$ , et jungatur  $AH$ .

Qu'une droite  $AB$  soit coupée en deux parties égales en  $\Gamma$ , et qu'on lui ajoute directement une droite  $BA$ ; je dis que les quarrés des droites  $AD$ ,  $AB$  sont doubles des quarrés des droites  $AG$ ,  $GB$ .

Du point  $\Gamma$  conduisons  $GE$  perpendiculaire à  $AB$  (11. 1); faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites  $AG$ ,  $GB$ ; joignons  $EA$ ,  $EB$ ; par le point  $E$  conduisons  $EZ$  parallèle à  $AD$ ; et par le point  $\Delta$  conduisons  $ZD$  parallèle à  $GE$  (31. 1). Puisque la droite  $EZ$  tombe sur les parallèles  $EG$ ,  $ZD$ , les angles  $GEZ$ ,  $EZA$  sont égaux à deux droits (29. 1); donc les angles  $ZEB$ ,  $EZA$  sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits (dém. 5); donc les droites  $EB$ ,  $ZD$  prolongées se rencontreront du côté  $BA$ . Prolongeons ces droites; qu'elles se rencontrent au point  $H$ ; et joignons  $AH$ .

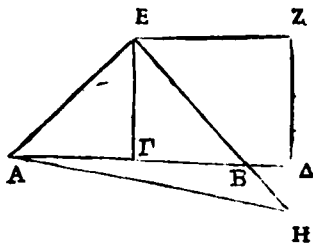
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΓΕ$ , ἴση ἐστὶ καὶ  
 γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΕΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΑΓ$ , καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς  
 τὸ  $Γ$  ἡμίση αἶρα ὀρθῆς ἐστὶν<sup>3</sup> ἑκατέρω τῶν ὑπὸ  
 $ΕΑΓ$ ,  $ΑΕΓ$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἑκατέρω τῶν  
 ὑπὸ  $ΓΕΒ$ ,  $ΕΒΓ$  ἡμίση αἶρα ὀρθῆς<sup>4</sup> ὀρθὴ αἶρα  
 ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΑΕΒ$ . Καὶ ἐπεὶ ἡμίση αἶρα ὀρθῆς ἐστὶν  
 ἡ ὑπὸ  $ΕΒΓ$ , ἡμίση αἶρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ  $ΔΒΗ$ .  
 Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ΒΔΗ$  ὀρθὴ, ἴση γάρ ἐστι τῇ  
 ὑπὸ  $ΔΓΕ$ , ἰσάλαξ γάρ· λοιπὴ αἶρα ἡ ὑπὸ  $ΔΗΒ$ <sup>5</sup>  
 τῇ ὑπὸ  $ΔΒΗ$  ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ  $ΒΔ$   
 πλευρὰ τῇ  $ΔΗ$  ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ  
 $ΕΗΖ$  ἡμίση αἶρα ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῇ  $Ζ$ ,  
 ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῇ  $Γ$ · λοιπὴ  
 αἶρα ἡ ὑπὸ  $ΖΕΗ$  ἡμίση αἶρα ὀρθῆς· ἴση αἶρα ἡ  
 ὑπὸ  $ΕΗΖ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΖΕΗ$ · ὥστε καὶ πλευρὰ  
 ἡ  $ΗΖ$  πλευρὰ τῇ  $ΖΕ$  ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  
 $ΕΓ$  τῇ  $ΓΑ$ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς<sup>6</sup>  $ΕΓ$  τετρά-  
 γωνον τῇ ἀπὸ τῆς  $ΓΑ$  τετραγώνου· τὰ αἶρα ἀπὸ τῶν  
 $ΕΓ$ ,  $ΓΑ$  τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  
 $ΓΑ$  τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  $ΕΓ$ ,  $ΓΑ$  ἴσον  
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΕ$ · τὸ αἶρα ἀπὸ τῆς  $ΕΑ$  τετρά-  
 γωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  τετραγώ-  
 νου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΖΗ$  τῇ  $ΖΕ$ , ἴσον ἐστὶ

Et quoniam æqualis est  $ΑΓ$  ipsi  $ΓΕ$ , æqualis  
 est et angulus  $ΑΕΓ$  ipsi  $ΕΑΓ$ ; atque rectus est  
 ad  $Γ$ ; dimidius igitur recti est uterque ipso-  
 rum  $ΕΑΓ$ ,  $ΑΕΓ$ . Propter eadem utique et uterque  
 ipsorum  $ΓΕΒ$ ,  $ΕΒΓ$  dimidius est recti; rectus  
 igitur est  $ΑΕΒ$ . Et quoniam dimidius recti est  $ΕΒΓ$ ,  
 dimidius igitur recti est et  $ΔΒΗ$ . Est autem et  $ΒΔΗ$   
 rectus; æqualis enim est ipsi  $ΔΓΕ$  alterno. Reli-  
 quus igitur  $ΔΗΒ$  ipsi  $ΔΒΗ$  est æqualis; quare et  
 latus  $ΒΔ$  lateri  $ΔΗ$  est æquale. Rursus, quoniam  
 $ΕΗΖ$  dimidius est recti, rectus autem est qui  
 ad  $Ζ$ , æqualis enim est opposito qui ad  $Γ$ ; reli-  
 quus igitur  $ΖΕΗ$  dimidius est recti; æqualis igitur  
 $ΕΗΖ$  angulus ipsi  $ΖΕΗ$ ; quare et latus  $ΗΖ$  lateri  
 $ΖΕ$  est æquale. Et quoniam æqualis est  $ΕΓ$  ipsi  $ΓΑ$ ,  
 æquale est et ex  $ΕΓ$  quadratum ipsi ex  $ΓΑ$  qua-  
 drato. Ergo ex  $ΕΓ$ ,  $ΓΑ$  quadrata dupla sunt ex  $ΓΑ$   
 quadrati. Ipsi autem ex  $ΕΓ$ ,  $ΓΑ$  æquale est ipsum  
 ex  $ΑΕ$ ; ergo ex  $ΕΑ$  quadratum duplum est ipsius  
 ex  $ΑΓ$  quadrati. Rursus, quoniam æqualis est  $ΖΗ$   
 ipsi  $ΖΕ$ , æquale est et ipsum ex  $ΗΖ$  ipsi ex  $ΖΕ$ . Ipsa  
 igitur ex  $ΗΖ$ ,  $ΖΕ$  dupla sunt ipsius ex  $ΕΖ$ . Ipsi  
 autem ex  $ΗΖ$ ,  $ΖΕ$  æquale est ipsum ex  $ΕΗ$ . Ipsum

Puisque  $ΑΓ$  est égal à  $ΓΕ$ , l'angle  $ΑΕΓ$  est égal à l'angle  $ΕΑΓ$  (5. 1); mais l'angle  
 en  $Γ$  est droit; donc chacun des angles  $ΕΑΓ$ ,  $ΑΕΓ$  est la moitié d'un droit (32. 1).  
 Par la même raison, chacun des angles  $ΓΕΒ$ ,  $ΕΒΓ$  est la moitié d'un droit, donc  
 l'angle  $ΑΕΒ$  est droit. Et puisque l'angle  $ΕΒΓ$  est la moitié d'un angle droit, l'angle  
 $ΔΒΗ$  est la moitié d'un droit (15. 1). Mais l'angle  $ΒΔΗ$  est droit (29. 1), car il est  
 égal à l'angle alterne  $ΔΓΕ$ ; donc l'angle restant  $ΔΗΒ$  est égal à l'angle  $ΔΒΗ$ ; donc le  
 côté  $ΒΔ$  est égal au côté  $ΔΗ$  (6. 1). De plus, puisque l'angle  $ΕΗΖ$  est la moitié d'un  
 droit, et que l'angle en  $Ζ$  est droit, car il est égal à l'angle opposé en  $Γ$  (34. 1),  
 l'angle restant  $ΖΕΗ$  est la moitié d'un droit; donc l'angle  $ΕΗΖ$  est égal à l'angle  
 $ΖΕΗ$ ; donc le côté  $ΗΖ$  est égal au côté  $ΖΕ$  (6. 1). Et puisque  $ΕΓ$  est égal à  $ΓΑ$ , le  
 carré de  $ΕΓ$  est égal au carré de  $ΓΑ$ ; donc les carrés des droites  $ΕΓ$ ,  $ΓΑ$   
 sont doubles du carré de  $ΓΑ$ . Mais le carré de  $ΑΕ$  est égal aux carrés des  
 droites  $ΕΓ$ ,  $ΓΑ$  (47. 1); donc le carré de  $ΕΑ$  est double du carré de  $ΑΓ$ . De

καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τῷ ἀπὸ τῆς ZE<sup>8</sup>. τὰ  
 ἄρα ἀπὸ τῶν HZ, ZE διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ  
 τῆς EZ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν HZ, ZE ἴσων ἐστὶ  
 τὸ ἀπὸ τῆς EH<sup>9</sup>. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH δι-  
 πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Ἰση δὲ EZ τῇ  
 ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετραγώνον διπλά-  
 σιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Εἰδείχθη δὲ καὶ τὸ  
 ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα  
 ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν

igitur ex EH duplum est ipsius ex EZ. *Æqualis*  
 autem EZ ipsi ΓΔ; ergo ex EH quadratum du-  
 plum est ipsius ex ΓΔ. Demonstratum est au-  
 tem et ipsum ex EA duplum ipsius ex ΑΓ; ergo  
 ex ΑΕ, ΕΗ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ  
 quadratorum. Ipsis autem ex ΑΕ, ΕΗ qua-  
 dratis *æquale* est ex ΑΗ quadratum; ipsum igitur  
 ex ΑΗ duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi  
 autem ex ΑΗ *æqualia* sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΗ; ipsa



ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν  
 ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ  
 τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι  
 τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα  
 ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν  
 ΑΔ, ΔΗ<sup>10</sup> διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ,  
 ΓΔ<sup>11</sup>. Ἰση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ,  
 ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ,  
 ΓΔ τετραγώνων. Εἰ ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur ex ΑΔ, ΔΗ dupla sunt ipsorum ex ΑΓ,  
 ΓΔ. *Æqualis* autem est ΔΗ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ,  
 ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum.  
 Si igitur recta, etc.

plus, puisque ZH est égal à ZE, le carré de HZ est égal au carré de ZE; donc  
 les carrés des droites HZ, ZE sont doubles du carré de EZ. Mais le carré de EH  
 est égal aux carrés des droites HZ, ZE (47. 1); donc le carré de EH est double  
 du carré de ΓΔ. Mais on a démontré que le carré de EA est double du carré  
 de ΑΓ; donc les carrés des droites ΑΕ, ΕΗ sont doubles des carrés des droites  
 ΑΓ, ΓΔ. Mais le carré de ΑΗ est égal aux carrés des droites ΑΕ, ΕΗ (47. 1); donc  
 le carré ΑΗ est double des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les carrés des droites  
 ΑΔ, ΔΗ sont égaux au carré de ΑΗ (47. 1); donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΗ  
 sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ; mais la droite ΔΗ est égale à la droite  
 ΔΒ; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ.  
 Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ

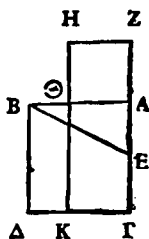
PROPOSITIO XI.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Datam rectam secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Sit data recta AB; oportet igitur ipsam AB secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.



Αναγινράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ὑπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγινράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ

Describatur enim ex AB quadratum ABΔΓ, et secetur ΑΓ bifariam in E puncto, et jungatur BE, et producaturs ΓΑ in Z, et ponatur ipsi BE æqualis EZ, et describatur ex AZ quadratum ZΘ, et producaturs HΘ ad K; dico AB sectam

PROPOSITION XI.

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

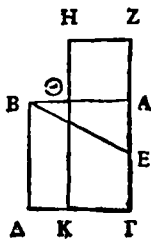
Avec la droite AB décrivons le carré ABΔΓ (46. 1); coupons ΑΓ en deux parties égales au point E (10. 1); joignons BE, prolongeons ΓΑ vers Z; faisons EZ égal à BE (3. 1); décrivons avec ΑΖ le carré ZΘ; et prolongeons HΘ vers K; je dis que la

διήχθω ἡ  $H\Theta$  ἐπὶ τὸ  $K$ · λέγω ὅτι ἡ  $AB$  τέτμηται κατὰ τὸ  $\Theta$ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $B\Theta$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιῇν<sup>1</sup> τῷ ἀπὸ τῆς  $A\Theta$  τετραγώνῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ  $AG$  τέτμηται δίχα κατὰ τὸ  $E$ , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ  $AZ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $GZ$ ,  $ZA$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EZ$

esse in  $\Theta$ , ita ut sub  $AB$ ,  $B\Theta$  contentum rectangulum æquale faciat ipsi ex  $A\Theta$  quadrato.

Quoniam enim recta  $AG$  secatur bifariam in  $E$ , adjicitur autem ei ipsa  $AZ$ ; ergo sub  $GZ$ ,  $ZA$  contentum rectangulum cum ex  $AE$  quadrato æquale est ipsi ex  $EZ$  quadrato. *Æqua-*



τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ  $EZ$  τῇ  $EB$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $GZ$ ,  $ZA$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$  τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EB$  τετραγώνῳ<sup>2</sup>. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>3</sup>  $EB$  ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AE$ , ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῇ  $A$  γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $GZ$ ,  $ZA$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $AE$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $BA$ ,  $AE$ . Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς  $AE$ · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $GZ$ ,  $ZA$  περιεχόμενον ὀρθογώνιον<sup>4</sup> ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  τετραγώνῳ. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν  $GZ$ ,  $ZA$

lis autem  $EZ$  ipsi  $EB$ ; ergo sub  $GZ$ ,  $ZA$  contentum rectangulum cum ex  $AE$  quadrato æquale est ipsi ex  $EB$  quadrato. Sed ipsi ex  $EB$  æqualia sunt ipsa ex  $BA$ ,  $AE$ , rectus enim est ad  $A$  angulus; ipsum igitur sub  $GZ$ ,  $ZA$  cum ipso ex  $AE$  æquale est ipsis ex  $BA$ ,  $AE$ . Commune auferatur ipsum ex  $AE$ ; reliquum igitur sub  $GZ$ ,  $ZA$  contentum rectangulum æquale est ipsi ex  $AB$  quadrato. Et est ipsum quidem sub  $GZ$ ,  $ZA$  ipsum  $ZK$ , æqualis enim est  $AZ$  ipsi  $ZH$ ; ipsum

droite  $AB$  est coupée en  $\Theta$ , de manière que le rectangle compris sous  $AB$ ,  $B\Theta$  est égal au carré de  $A\Theta$ .

Puisque la droite  $AG$  est coupée en deux parties égales en  $E$ , que  $AZ$  lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites  $GZ$ ,  $ZA$  avec le carré de  $AE$  est égal au carré de  $EZ$  (6. 2). Mais  $EZ$  est égal à  $EB$ ; donc le rectangle compris sous  $GZ$ ,  $ZA$  avec le carré de  $AE$ , est égal au carré de  $EB$ . Mais les carrés des droites  $BA$ ,  $AE$  sont égaux au carré de  $EB$  (47. 1), car l'angle en  $A$  est droit; donc le rectangle sous  $GZ$ ,  $ZA$  avec le carré de  $AE$  est égal aux carrés des droites  $BA$ ,  $AE$ . Retranchons le carré commun de  $AE$ ; le rectangle restant compris sous  $GZ$ ,  $ZA$  sera égal au carré de  $AB$ . Mais le rectangle sous les droites  $GZ$ ,  $ZA$  est le rectangle

τὸ ΖΚ, ἴση γάρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφ-  
 ἡρᾶσθαι τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον  
 ἐστὶ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΘ· τὸ δὲ  
 ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ  
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  
 ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τίτμηται κατὰ  
 τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον  
 ὀρθογώνιον ἴσον ποιῇν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.  
 Οὔτις ἴδιαι ποιῆσαι.

vero ex AB ipsum AD; ipsum igitur ZK æquale  
 est ipsi AD. Commune auferatur AK; reliquum  
 igitur ZΘ ipsi ΘΔ æquale est. Et est quidem ZΘ  
 ipsum ex ΑΘ; ipsum vero ΘΔ ipsum sub ΑΒ,  
 ΒΘ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΘ contentum rec-  
 tangelum æquale est ipsi ex ΘΑ quadrato.

Ergo data recta AB secta est in Θ, ita ut ipsum  
 sub ΑΒ, ΒΘ contentum rectangelum æqualo fa-  
 ciat ipsi ex ΘΑ quadrato. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

PROPOSITIO XII.

Εν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς  
 τὴν ἀμβλείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τε-  
 τράγωνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλείαν  
 γωνίαν περιχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ  
 περιεχομένῳ δὲ ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμ-  
 βλείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκληθεῖσαν ἡ καθέτος  
 πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς  
 καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

In obtusangulis triangulis quadratum ex latere  
 obtusum angulum subtendente majus est quam  
 quadrata ex lateribus obtusum angulum conti-  
 nentibus, contento bis sub uno ipsorum circa  
 obtusum angulum in quod productum perpen-  
 dicularis cadit, et assumptâ extra a perpendi-  
 culari ad obtusum angulum.

ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le quarré de AB est le quarré AD; donc le  
 rectangle ZK est égal au quarré AD. Retranchons le rectangle commun AK; le quarré  
 restant ZΘ sera égal au rectangle ΘΔ. Mais ZΘ est le quarré de ΑΘ, et ΘΔ est le  
 rectangle sous ΑΒ, ΒΘ; donc le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΘ est égal au quarré  
 de ΘΑ.

Donc la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous  
 ΑΒ, ΒΘ est égal au quarré de ΘΑ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

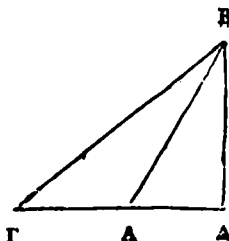
Dans les triangles obtusangles, le quarré du côté qui soutend l'angle obtus est  
 plus grand que les quarrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux fois  
 le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement du-  
 quel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la perpen-  
 diculaire à l'angle obtus.

Εστω ἄμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἄμβλειαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκτεταθείσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον μείζον ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΑ τέτμηται ὡς ἱσυχὴ κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲ ὑπὸ

Sit obtusangulum triangulum ΑΒΓ obtusum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur a Β puncto ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ; dico ex ΒΓ quadratum majus esse quam ex ΒΑ, ΑΓ quadrata, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo.

Quoniam enim recta ΓΑ secatur utcumque in Α puncto; ipsum igitur ex ΓΔ æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΔ quadratis, et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento



τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Κοινὸν προσκείμεθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον ἴσον ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ

rectangulo. Commune addatur ipsum ex ΔΒ; ipsa igitur ex ΓΔ, ΔΒ æqualia sunt ipsis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. Sed ipsis quidem ex ΓΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΓΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΑΒ; ergo ex ΓΒ quadratum æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo; quare ex ΓΒ quadratum quam ipsa ex ΓΑ, ΑΒ

Soit le triangle obtusangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΒΑΓ obtus; du point Β conduisons ΒΔ perpendiculaire sur ΓΑ prolongé; je dis que le carré de ΒΓ est plus grand que les carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ.

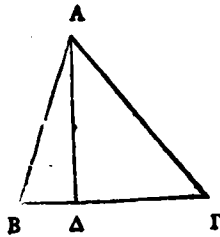
Car puisque la droite ΓΑ est coupée d'une manière quelconque au point Α, le carré de ΓΔ est égal aux carrés des droites ΓΑ, ΑΔ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ (4. 2). Ajoutons le carré commun de ΔΒ; les carrés de ΓΔ, ΔΒ seront égaux aux carrés des droites ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ. Mais le carré de ΓΒ est égal aux carrés des droites ΓΔ, ΔΒ (47.), car l'angle en Δ est droit, et le carré de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΔ, ΔΒ;

δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιχομένη ὀρθογωνία· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μείζον ἴστί, τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιχομένη ὀρθογωνία. Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις, καὶ τὰ ἰξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τρίγωνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνου ἑλαττόν ἴστί τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιχοσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιχομένη δὲς ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν γωνίαν ἢ ἢ καθέτος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξείαν ἔχον τὴν πρὸς τῇ Β γωνίαν, καὶ ἔχθω ἀπὸ τοῦ Α ση-



μίου ἐπὶ τὴν ΒΓ καθέτος ἢ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἑλαττόν ἴστί τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιχομένη ὀρθογωνία.

quadrata majus est, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. In obtusangulis igitur, etc.

PROPOSITIO XIII.

In acutangulis triangulis ex latere acutum angulum subtendente quadratum minus est quam quadrata ex lateribus acutum angulum continentibus contento bis sub uno ipsorum circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, et assumptâ intus a perpendiculari ad acutum angulum.

Sit acutangulum triangulum ΑΒΓ acutum habens ad Β angulum, et ducatur ab Α puncto

ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico ex ΒΓ quadratum minus esse quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo.

donc le quarré de ΓΒ est égal aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ; donc le quarré de ΓΒ est plus grand que les quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ de deux fois le rectangle sous ΓΑ, ΑΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

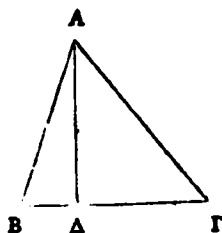
Dans les triangles acutangles, le quarré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les quarrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

Soit le triangle acutangle ΑΒΓ ayant l'angle aigu en Β; du point Α conduisons sur la droite ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΑΒ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ.



Επει γὰρ εὐθεία ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετραγῶνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγῶνῳ. Κοινὸν προσκίεθαι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετραγῶνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετραγῶνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ

Quoniam enim recta ΓΒ secta es utcumque in Δ; ergo ex ΓΒ, ΒΔ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsi ex ΔΓ quadrato. Commune addatur ex ΔΑ quadratum; ergo ex ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsis ex ΔΑ, ΔΓ quadratis. Sed



τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγῶνοισι. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὸν γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ<sup>4</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν<sup>5</sup> ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ<sup>6</sup> ἀπὸ τῆς ΑΓ ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγῶνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις, καὶ τὰ ἴξῃς.

ipsis quidem ex ΒΔ, ΔΑ æquale est ex ΑΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsum ex ΑΓ; ipsa igitur ex ΓΒ, ΒΑ æqualia sunt et ipsi ex ΑΓ, et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ; quare solum ex ΑΓ minus est quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo. Ergo in acutangulis, etc.

Car, puisque la droite ΓΒ est coupée d'une manière quelconque au point Δ, les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ et au quarré de ΔΓ (7. 2). Ajoutons le quarré commun de ΔΑ; les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ seront égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ, et aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ. Mais le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΒΔ, ΔΑ (47. 1), car l'angle en Δ est droit, et le quarré de ΑΓ est égal aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ; donc les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ sont égaux au quarré de ΑΓ et à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ; donc le seul quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Τῇ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συ-  
στήσασθαι.

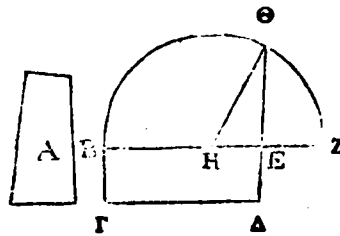
Ἐστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὲ τῇ  
Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνιστάτω γάρ τῇ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παρὰ  
ἀλληλόγραμμοι ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση  
ἴσθιν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γωνιὸς ἀνείη τὸ ἐπιταχθῆν. Συν-  
ίσταται γὰρ τῇ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον

Dato rectilineo æquale quadratum consti-  
tuere.

Sit datum rectilineum Α; oportet igitur ipsi  
Α rectilineo æquale quadratum constituere.

Constituatur enim ipsi Α rectilineo æquale  
parallelogrammum rectangulum ΒΔ. Si igitur  
æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, factum erit proposi-  
tum; constitutum est enim ipsi Α rectilineo



τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὐ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἴσθιν.  
Ἐστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπὶ τὸ Ζ,  
καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ  
δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῇ Η, δια-  
στήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γηράφθω  
τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκτελέσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ  
ὑπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ  
τὸ Η, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,

æquale quadratum ΒΔ; si autem non, una ip-  
sarum ΒΕ, ΕΔ major est. Sit major ΒΕ, et  
producatur ad Ζ, et ponatur ipsi ΕΔ æqualis  
ΕΖ, et secetur ΒΖ bifariam in Η, et centro  
quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΒ,  
ΗΖ semicirculus describatur ΒΘΖ, et produ-  
catur ΔΕ in Θ, et jungatur ΗΘ.

Quoniam igitur ΒΖ secta est in æqualia quæ-  
dem in Η, in inæqualia vero in Ε; ergo sub

PROPOSITION XIV.

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

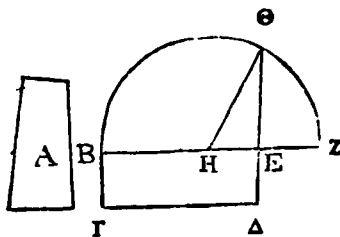
Soit Α la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette  
figure rectiligne.

Construisons un parallélogramme rectangle ΒΔ égal à la figure rectiligne donnée  
Α (45. 1). Si ΒΕ était égal à ΕΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré  
ΒΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne Α. Si cela n'est point, l'un des  
côtés ΒΕ, ΕΔ est plus grand que l'autre. Que ΒΕ soit le plus grand, prolongeons-le  
vers Ζ, et faisons ΕΖ égal à ΕΔ (3. 1); coupons ΒΖ en deux parties égales au  
point Η; du centre Η et d'un intervalle égal à l'une des droites ΗΒ, ΗΖ, décrivons  
la demi-circonférence ΒΘΖ (dem. 3); prolongeons ΔΕ vers Θ, et joignons ΗΘ.

Puisque ΒΖ est partagé en deux parties égales au point Η, et en deux parties

ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ  
τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ.  
Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ  
μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ.  
Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ  
τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ  
ἀπὸ τῆς<sup>3</sup> ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ.  
Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοι-

BE, EZ contentum rectangulum cum ex HE quadrato æquale est ipsi ex HZ quadrato. Æqualis autem HZ ipsi HO; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsi ex HO. Ipsi autem ex HO æqualia sunt ex OE, EH quadrata; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsis ex OE, EH. Commune auferatur ex HE quadratum; reliquum igitur sub



πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ περιεχόμενοι ὀρθογώνιοι ἴσον ἰστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ τὸ ὑπὸ τῶν BE, ΕΔ ἰστὶν<sup>4</sup>, ὥση γὰρ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμοι ἴσον ἰστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἰσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· καὶ<sup>5</sup> τὸ Α ἄρα εὐθυγράμμοι ἴσον ἰστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοῖντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. Ὅπῃ ἴδιαι ποιεῖσαι.

**BE**, **EZ** contentum rectangulum æquale est ipsi ex **EΘ** quadrato. Sed ipsum sub **BE**, **EZ** ipsum sub **BE**, **EA** est, æqualis enim est **EZ** ipsi **EA**; ergo **BA** parallelogrammum æquale est ipsi ex **ΘE** quadrato. Æquale autem est **BA** ipsi **A** rectilineo; et **A** igitur rectilineum æquale est ipsi ex **EΘ** descripto quadrato.

Ergo dato rectilineo  $A$  æquale quadratum  
constituitur ex  $E\Theta$  descriptum. Quod oportebat  
facere.

inégales au point E ; le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE, est égal au carré de HZ ( 5. 2 ). Mais HZ est égal à HΘ ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE est égal au carré de HΘ. Mais les carrés des droites ΘE, EH sont égaux au carré de HΘ, ( 47. 1 ) ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE, est égal aux carrés de droites ΘE, EH. Retrançons le carré commun de HE ; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au carré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ ; donc le parallélogramme BΔ est égal au carré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A ; donc la figure rectiligne A est égale au carré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec  $E\Theta$  a été construit égal à la figure rectiligne donnée  $A$  ; ce qu'il fallait faire.

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

## ΟΡΟΙ.

α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διαμέτροι ἴσαι εἰσὶν· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον ἐπὶ μηδέτερα μέρη<sup>2</sup>.

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἳ τινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ<sup>3</sup> τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴται ὅσι.

## DÉFINITIONES.

1. *Æquales circuli sunt, quorum diametri æquales sunt; vel quorum quæ ex centris æquales sunt.*

2. *Recta circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum et producta secat circulum in neutrá parte.*

3. *Circuli tangere sese dicuntur, qui sese tangentes non sese secant.*

4. *In circulo æqualiter distare a centro rectæ dicuntur, quando ex centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt.*

## LIVRE TROISIÈME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### DÉFINITIONS.

1. Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux, ou ceux dont les droites menées des centres aux circonférences sont égales.

2. Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle.

3. Les cercles qui se touchent, mais qui ne se coupent point, sont dits tangents entr'eux.

4. Dans un cercle, on dit que les droites sont également éloignées du centre, lorsque les perpendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales.

ε. Μείζον δὲ ἀπέχειν λίγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κἀδύτος πίπτει.

ς'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας.

η. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἧτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσai τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λίγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφέρειας.

ια. Ὁμοῖα τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ διχομνηα γωνίας ἴσας· ὅ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam major perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est contenta figura et ab rectâ et circuli circumferentiâ.

7. Segmenti autem angulus est, qui continetur ab rectâ et circuli circumferentiâ.

8. In segmento autem angulus est, quando in circumferentiâ segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectæ quæ est basis segmenti conjunguntur rectæ, contentus angulus ab junctis rectis.

9. Quando autem continentes angulum rectæ assumunt aliquam circumferentiam, illi dicuntur insistere angulus.

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli positus est angulus, contenta figura et ab angulum continentibus rectis et assumptâ ab ipsis circumferentiâ.

11. Similia segmenta circuli sunt, quæ capiunt æquales angulos; vel in quibus anguli æquales inter se sunt.

5. La droite sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire est dite la plus éloignée du centre.

6. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par une circonférence de cercle.

7. L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et par une circonférence de cercle.

8. L'angle dans le segment est l'angle compris par les droites menées d'un point pris dans la circonférence du segment aux extrémités de la droite qui est la base du segment.

9. Mais lorsque les droites qui comprennent l'angle embrassent une portion de la circonférence, cet angle est dit appuyé à la circonférence.

10. Un secteur de cercle est une figure comprise entre deux rayons qui font un angle au centre et la portion de la circonférence qu'embrassent ces deux rayons.

11. Les segments des cercles sont semblables, lorsqu'ils reçoivent des angles égaux ou lorsque les angles qu'ils contiennent sont égaux entr'eux.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

PROPOSITIO I.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

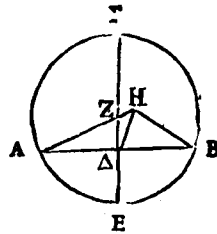
Dati circuli centrum invenire.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δι' δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Sit datus circulus ΑΒΓ; oportet igitur ΑΒΓ circuli centrum invenire.

Ἦχθω' τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου<sup>2</sup>.

Ducatur aliqua in ipso utcumque recta ΑΒ, et secetur bifariam in Δ puncto, et a Δ ipsi ΑΒ ad rectos ducatur ΓΔ, et producat in Ε, et secetur ΓΕ bifariam in Ζ; dico Ζ centrum esse ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἴστω τὸ Η, καὶ ἐπιζύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ βάσεις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση<sup>4</sup>, ἡ κέντρον γὰρ τοῦ Η<sup>5</sup>· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνία

Non enim, sed si possibile sit Η, et jungantur ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem ΔΗ, duæ utique ΑΔ, ΔΗ duabus ΗΔ, ΔΒ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΗΑ basi ΗΒ est æqualis, ex centro enim Η; angulus igitur ΑΔΗ

PROPOSITION PREMIÈRE.

Trouver le centre d'un cercle donné.

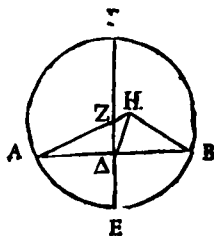
Soit ΑΒΓ le cercle donné; il faut trouver le centre du cercle ΑΒΓ.

Conduisons dans le cercle une droite quelconque ΑΒ, partageons-la en deux parties égales au point Δ (10. 1); du point Δ conduisons ΓΔ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1), prolongeons ΓΔ en Ε, et partageons ΓΕ en deux parties égales en Ζ; je dis que le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Que Ζ ne le soit pas, et que Η le soit, si cela est possible. Joignons ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et puisque ΑΔ est égal à ΔΒ et que ΔΗ est commun, les deux droites ΑΔ, ΔΗ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΒ, chacune à chacune; mais la base ΗΑ est égale à la base ΗΒ; car ce sont deux rayons (déf. 15. 1); donc l'angle ΑΔΗ est égal à l'angle ΗΔΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur

τῇ ὑπὸ  $HAB$  ἴση ἐστίν<sup>6</sup>. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $HAB$ . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZAB$  ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  $ZAB$  τῇ ὑπὸ  $HAB$ , ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι<sup>8</sup>, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ  $H$  κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου. Ομοίως δὲ δείζομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ  $Z$ .

angulo  $HAB$  æqualis est. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est  $HAB$ . Est autem et  $ZAB$  rectus; æqualis igitur est  $ZAB$  ipsi  $HAB$ , minor majori, quod est impossibile. Non igitur  $H$  centrum est  $ABΓ$  circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam præter  $Z$ .



Τὸ  $Z$  ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  $ABΓ$  κύκλου<sup>9</sup>. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι<sup>10</sup>.

Ergo  $Z$  punctum est centrum  $ABΓ$  circuli. Quod oportebat facere.

#### ΠΟΡΙΣΜΑ.

#### COROLLARIUM.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι εἰάν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις<sup>11</sup> εὐθεῖαν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου<sup>12</sup>.

Ex hoc utique evidens est, si in circulo recta quædam rectam quamdam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

une droite fait avec elle les angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10. 1); donc l'angle  $HAB$  est droit. Mais l'angle  $ZAB$  est droit; donc l'angle  $ZAB$  est égal à l'angle  $HAB$ ; le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point  $H$  n'est point le centre du cercle  $ABΓ$ . On démontrera semblablement que tout autre point, excepté  $Z$ , ne l'est pas.

Donc le point  $Z$  est le centre du cercle  $ABΓ$ . Ce qu'il fallait faire.

#### COROLLAIRE.

De là il est évident que si dans un cercle une droite en coupe une autre en deux parties égales, et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

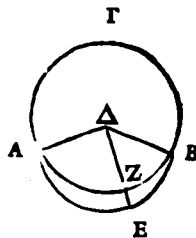
PROPOSITIO II.

Εάν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφέρειᾶς ληθῇ δύο τυ-  
χόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζυ-  
γυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσῇ τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφέρειᾶς  
αὐτοῦ εἰληθῶ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω  
ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα  
ἐντὸς πεσῇ τοῦ κύκλου.

Si in circuli circumferentiâ sumantur duo  
quælibet puncta, hæc puncta conjungens recta  
intra cadet circumulum.

Sit circulus ΑΒΓ, et in circumferentiâ ipsius  
sumantur duo quælibet puncta Α, Β; dico ab  
ipso Α ad Β conjunctam rectam intra cadere  
circulum.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὥς ἡ  
ΑΕΒ, καὶ εἰληθῶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,  
καὶ ἵστω τὸ Δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ,  
καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ<sup>3</sup>.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἔρα καὶ  
γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώ-  
νου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέλλεται ἡ ΑΕΒ,

Non enim, sed si possibile, cadat extra ut  
ΑΕΒ, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli, et sit Δ,  
et jungantur ΔΑ, ΔΒ, et ducatur ΔΖΕ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΒ, æqua-  
lis igitur et angulus ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; et quoniam  
trianguli ΔΑΕ unum latns ΑΕΒ producitur,

PROPOSITION II.

Si dans une circonférence de cercle, on prend deux points quelconques, la  
droite qui joindra ces deux points tombera dans le cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ; qu'on prenne deux points quelconques Α, Β, dans sa cir-  
conférence; je dis que la droite menée du point Α au point Β, tombera dans  
le cercle.

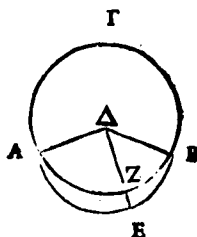
Car que cela ne soit point, et qu'elle tombe en dehors, si c'est possible, comme  
ΑΕΖ; prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Δ, joignons ΔΑ, ΔΒ, et  
menons ΔΖΕ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΒ, l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ (5. 1); et puis-  
que l'on a prolongé un côté ΑΕΒ du triangle ΔΑΕ, l'angle ΔΕΒ est plus grand



μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἰση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ

major igitur est ΔΕΒ angulus ipso ΔΑΕ. Ἐqualis autem ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; major igitur est ΔΕΒ ipso ΔΒΕ. Majorem autem angulum majus latus subtendit; major igitur est ΔΒ ipsa ΔΕ. Ἐqualis autem ΔΒ ipsi ΔΖ; major igitur est ΔΖ



τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς περὶτῆται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα περὶτῆται. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsa ΔΕ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur ab Α ad Β conjuncta recta extra cadet circumulum. Similiter utique ostendemus, neque in ipsam circumferentiam; intus igitur cadet. Si igitur circuli, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ',

## PROPOSITIO III.

Εὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ

Si in circulo recta aliqua per centrum rectam aliquam non per centrum bifariam secet,

que l'angle ΔΑΕ (16. 1). Mais l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ; donc l'angle ΔΕΒ est plus grand que l'angle ΔΒΕ. Mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (18. 1); donc ΔΒ est plus grand que ΔΕ. Mais ΔΒ est égal à ΔΖ; donc ΔΖ est plus grand que ΔΕ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Α au point Β ne tombe pas hors du cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe pas dans la circonférence; donc elle tombe en dedans du cercle. Donc, etc.

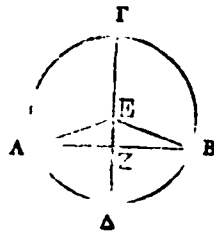
## PROPOSITION III.

Si dans un cercle une droite menée par le centre coupe en deux parties égales une droite non menée par le centre, elle la coupera à angles

πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐ-  
τὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖα τις  
διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ  
κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Ζ σημεῖον·  
λίγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνεται.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ  
ἵστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ  
ΖΕ, δύο δὴ δυνὸν ἴσαι εἶναι, καὶ βάσεις ἡ ΕΑ  
βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γω-  
νία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπὶ  
εὐθείᾳ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλή-  
λαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν·  
ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ. Ἡ  
ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὔσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ  
τοῦ κέντρου οὔσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρ-  
θὰς αὐτὴν τέμνει.

et ad rectos ipsam secat; et si eam ad rectos  
secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ipso recta aliqua ΓΔ  
per centrum, rectam aliquam ΑΒ non per cen-  
trum bifariam secet in Ζ puncto; dico quod  
et ad rectos ipsam secat.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit  
Ε, et jungantur ΕΑ, ΕΒ.

Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, commu-  
nis autem ΖΕ, duæ utique duabus æquales sunt,  
et basis ΕΑ basi ΕΒ æqualis; angulus igitur  
ΑΖΕ angulo ΕΖΒ æqualis est. Quando autem  
recta super rectam insistens deinceps angulos æ-  
quales inter se facit, rectus uterque æqualium  
angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum  
ΑΖΕ, ΕΖΕ. Ergo ΓΔ per centrum ducta ipsam ΑΒ  
non per centrum ductam bifariam secans, et ad  
rectos ipsam secat.

droits; et si elle la coupe à angles droits, elle la coupera en deux parties  
égales.

Soit le cercle ΑΒΓ; que dans ce cercle, la droite ΓΔ menée par le centre coupe  
en deux parties égales au point Ζ la droite ΑΒ non menée par le centre; je  
dis qu'elle la coupe à angles droits.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3); qu'il soit Ε, et joignons ΕΑ, ΕΒ.

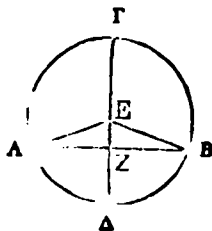
Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite ΖΕ est commune, deux droites sont  
égales à deux droites; mais la base ΕΑ est égale à la base ΕΒ; donc l'angle  
ΑΖΕ est égal à l'angle ΕΖΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur une autre  
droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit;  
donc chacun des angles ΑΖΕ, ΒΖΕ est droit. Donc la droite ΓΔ, menée par le centre,  
et qui coupe en deux parties égales la droite ΑΒ non menée par le centre, coupe  
aussi cette droite à angles droits.

Αλλὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ῥθὰς τιμήτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἴση ἰστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἰστὶν ἡ<sup>8</sup> ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἰστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ

Sed et ΓΔ ipsam ΑΒ ad rectos secet; dico et bifarium ipsam secare, hoc est, æqualem esse ΑΖ ipsi ΖΒ.

Eisdem enim constructis, quoniam æqualis est ΕΑ ipsi ΕΒ, æqualis est et angulus ΕΑΖ ipsi ΕΒΖ. Est autem et rectus ΑΖΕ recto ΒΖΕ æqua-



ΑΖΕ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα<sup>9</sup> τρίγωνα ἴσι τὰ ΕΑΖ, ΕΒΖ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis; duo igitur triangula sunt ΕΑΖ, ΕΒΖ duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsis ΕΖ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur est ΑΖ ipsi ΖΒ. Si igitur in circulo, etc.

Mais que la droite ΓΔ coupe la droite ΑΒ à angles droits; je dis qu'elle la coupe en deux parties égales, c'est-à-dire que ΑΖ est égal à ΖΒ.

Faisons la même construction; puisque ΕΑ est égal à ΕΒ, l'angle ΕΑΖ est égal à l'angle ΕΒΖ (5. 1). Mais l'angle droit ΑΖΕ est égal à l'angle droit ΒΖΕ; donc ΕΑΖ, ΕΒΖ sont deux triangles qui ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, c'est-à-dire leur côté commun ΕΖ, qui soutend un des angles égaux; donc ces deux triangles auront les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc ΑΖ est égal à ΖΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

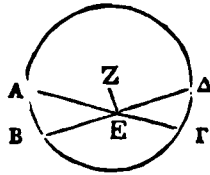
PROPOSITIO IV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὄσας· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, non per centrum ductæ, non sese secabunt bifariam.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε ση-  
μῖον<sup>1</sup>, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὄσας· λέγω ὅτι οὐ  
τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secant in Ε puncto, non per centrum ductæ; dico non eas sese secare bifariam.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσων εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἰπιζεύχθω ἡ ΖΕ.

Si enim possibile, sese secant bifariam, ita ut æqualis sit ΑΕ quidem ipsi ΕΓ, et ΒΕ ipsi ΕΔ; et sumatur centrum ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et jungatur ΖΕ.

Επεὶ οὖν εὐθεῖαί τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐ-  
θεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου<sup>2</sup> τὴν ΑΓ δίχα  
τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει<sup>3</sup> ὀρθῇ ἄρα

Quoniam igitur recta aliqua ΖΕ per cen-  
trum rectam aliquam ΑΓ non per centrum  
bifariam secat, et ad rectos ipsam secat;

PROPOSITION IV.

Si dans un cercle deux droites non menées par le centre se coupent, elles ne se coupent point en deux parties égales.

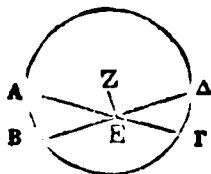
Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que dans ce cercle les deux droites ΑΓ, ΒΔ, non menées par le centre, se coupent au point Ε; je dis qu'elles ne se coupent point en deux parties égales.

Car si cela est possible, qu'elles se coupent en deux parties égales, de manière que ΑΕ soit égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΔ; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ, et joignons ΖΕ.

Puisque la droite ΖΕ, menée par le centre, coupe en deux parties égales la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits (3. 3);

ἔστιν ἡ ὑπὸ ZEA. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ZE  
εὐθεῖαν τινὰ τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα  
τίμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τίμνει· ὀρθὴ ἄρα<sup>5</sup>

rectus igitur est ZEA. Rursus, quoniam recta  
aliqua ZE rectam aliquam BA non per centrum,  
bifariam secat, et ad rectos ipsam secat; rectus



ἡ ὑπὸ ZEB. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEA ὀρθή· ἴση ἄρα  
ἡ ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEB, ἥδ' ἰσάκτων τῇ μείζονι,  
ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τίμνουσιν  
ἀλλήλας δίχα. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur est ZEB. Ostensus est autem et ZEA rec-  
tus; æqualis igitur ZEA ipsi ZEB, minor majori,  
quod est impossibile. Non igitur ΑΓ, ΒΔ sese  
secant bifariam. Si igitur in circulo, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

## PROPOSITIO V.

Εὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἴσται  
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρο.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τέμνεται ἀλ-  
λήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεία· λέγω ὅτι οὐκ ἴσται  
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω  
ἡ ΕΓ, καὶ δίχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχι.

Si duo circuli sese secant, non erit ipsorum  
idem centrum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΗ sese secant in Β,  
Γ punctis; dico non esse ipsorum idem cen-  
trum.

Si enim possibile, sit Ε, et jungatur ΕΓ, et  
ducatur ΕΖΗ utcumque.

donc l'angle ZEA est droit. De plus, puisque la droite ZE coupe en deux parties égales la droite BA non menée par le centre, elle la coupera à angles droits; donc l'angle ZEB est droit. Mais on a démontré que l'angle ZEA est droit; donc l'angle ZEA est égal à l'angle ZEB, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les droites ΑΓ, ΒΔ ne se coupent point en deux parties égales. Donc, etc.

## PROPOSITION V.

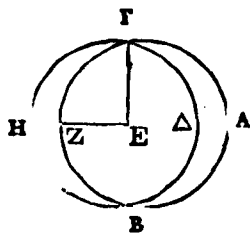
Si deux cercles se coupent, leur centre ne sera pas le même.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ se coupent aux deux points Β, Γ; je dis que leur centre ne sera pas le même.

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Ε; joignons ΕΓ, et me-  
nons ΕΖΗ d'une manière quelconque.

Καὶ ἵπαι τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἵπαι τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ

Et quoniam E punctum centrum est ΑΒΓ circuli, æqualis est ΕΓ ipsi ΕΖ. Rursus, quoniam E punctum centrum est ΓΔΗ circuli, æqualis est ΓΕ ipsi ΕΗ. Ostensa est autem et ΕΓ



ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπῃ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi ΕΖ æqualis; et ΖΕ igitur ipsi ΕΗ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur E punctum centrum est ΑΒΓ, ΓΔΗ circulorum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

PROPOSITIO VI.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἐστὶ αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si duo circuli sese intra tangant, non erit ipsorum idem centrum.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτόμεθα ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἐστὶ αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΕ sese tangant in Γ punete; dico non esse ipsorum idem centrum.

Puisque le point Ε est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΕΓ est égale à ΕΖ (déf. 15. 1). De plus, puisque le point Ε est le centre du cercle ΓΔΗ, la droite ΓΕ est égale à ΕΗ. Mais on a démontré que ΕΓ est égal à ΕΖ; donc ΖΕ est égal à ΕΗ, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible. Donc le point Ε n'est pas le centre des cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, leur centre n'est pas le même.

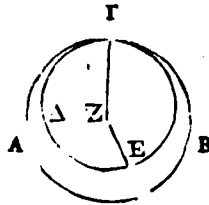
Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΕ se touchent au point Γ; je dis que leur centre n'est pas le même.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ZEB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZΓ τῇ BZ. Πάλιν, ἵπεί τὸ Z σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν

Si enim possibile, sit Z, et jungatur ZΓ, et ducatur utcumque ZEB.

Quoniam igitur Z punctum centrum est ABΓ circuli, æqualis est ZΓ ipsi BZ. Rursus, quoniam Z punctum centrum est ΓΔΕ circuli, æ-



ZΓ τῇ ZE. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ ZB ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>, ἡ ἑλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν<sup>6</sup> ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z σημείον κέντρον ἐστὶ τῶν ABΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἴζης.

qualis est ZΓ ipsi ZE. Ostensa est autem et ZΓ ipsi ZB æqualis; et ZE igitur ipsi ZB est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Z punctum centrum est ABΓ, ΓΔΕ circulorum. Si igitur duo, etc.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

#### PROPOSITIO VII.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληθῇ τι σημείον ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτῶσιν εὐθεῖαι

Si in circuli diametro sumatur aliquod punctum quod non sit centrum circuli, ab ipso autem puncto in circulum cadant rectæ quæ-

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Z; joignons ZΓ, et menons ZEB d'une manière quelconque.

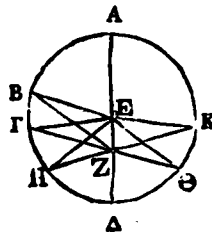
Puisque le point Z est le centre du cercle ABΓ, la droite ZΓ est égale à BZ. De plus, puisque le point Z est le centre du cercle ΓΔΕ, la droite ZΓ est égale à ZE. Mais on a démontré que ZΓ est égal à ZB; donc ZE est égal à ZB, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible; donc le point Z n'est point le centre des cercles ABΓ, ΓΔΕ. Donc, etc.

#### PROPOSITION VII.

Si dans le diamètre d'un cercle on prend un point qui ne soit pas le centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circon-

τινὲς<sup>1</sup>· μείζουσι μὲν ἴσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ· τῶν δὲ ἄλλων, αὐτὴ ἡ ἑγγύσιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζουσι<sup>2</sup>· δύο δὲ μόνον<sup>3</sup> ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπίπτουσιν πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάστην τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἴστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰληφθῶσι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μὴ ἴσται κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἴστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι τινες



αὶ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μείζουσι μὲν ἴσται ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζουσι, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπιεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ πάντες τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονός εἰσιν, αἱ ΕΒ, ΕΖ ἄρα<sup>3</sup> τῆς ΒΖ μεί-

dam, maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major est; duæque solum æquales ab eodem puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, et in ipsâ ΑΔ sumatur aliquod punctum Ζ, quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit Ε, et a Ζ in ΑΒΓΔ circulum cadant rectæ quædam ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; dico ma-

ximam quidem esse ΖΑ, minimam vero ΖΔ; aliarum autem, ΖΒ quidem majorem ipsâ ΖΓ, et ΖΓ ipsâ ΖΗ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ipsæ ΕΒ, ΕΖ igitur ipsâ ΒΖ

férence; la plus grande sera celle dans laquelle est le centre, et la plus petite la droite restante; quant aux autres droites, la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui en est plus éloignée; et du même point on ne peut mener à la circonférence que deux droites égales de l'un et l'autre côté de la plus petite.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, que ΑΔ soit son diamètre, prenons dans ΑΔ un point quelconque Ζ qui ne soit pas le centre de ce cercle, que le centre du cercle soit le point Ε, du point Ζ menons à la circonférence ΑΒΓΔ les droites ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; je dis que ΖΑ est la plus grande, et ΖΔ la plus petite; et que parmi les autres, la droite ΖΒ est plus grande que ΖΓ, et la droite ΖΓ plus grande que ΖΗ.

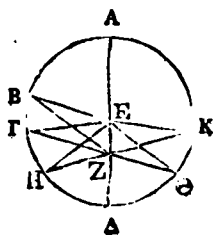
Joignons ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Puisque deux côtés d'un triangle sont plus grands que le côté restant



ζονίς εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ  $AE$  τῇ  $BE$ , αἱ ἄρα  $BE$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσὶ τῇ  $AZ$ · μείζων ἄρα ἡ  $AZ$  τῆς  $BZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BE$  τῇ  $FE$ , κοινὴ δὲ ἡ  $ZE$ , δύο δὲ αἱ  $BE$ ,  $EZ$  δυοῖ ταῖς  $FE$ ,  $EZ$  ἴσαι εἰσιν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $BEZ$  γωνίας τῆς ὑπὸ  $FEZ$  μείζων· βάσις ἄρα ἡ  $BZ$  βάσιως τῆς  $FZ$  μείζων ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $FZ$  τῆς μείζων ἐστὶ<sup>5</sup>.

maiores sunt.  $\mathcal{A}$ equalis autem  $AE$  ipsi  $BE$ ; ergo  $BE$ ,  $EZ$   $\mathcal{A}$ quales sunt ipsi  $AZ$ ; major igitur est  $AZ$  ipsa  $BZ$ . Rursus, quoniam  $\mathcal{A}$ qualis est  $BE$  ipsi  $FE$ , communis autem  $ZE$ , duæ utique  $BE$ ,  $EZ$  duabus  $FE$ ,  $EZ$   $\mathcal{A}$ quales sunt. Sed et angulus  $BEZ$  angulo  $FEZ$  major; basis igitur  $BZ$  basi  $FZ$  major est. Propter eadem utique et  $FZ$  ipsa  $HZ$  major est.



Πάλιν, ἐπεὶ αἱ  $HZ$ ,  $ZE$  τῆς  $EH$  μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ  $EH$  τῇ  $EA$ · αἱ ἄρα  $HZ$ ,  $ZE$  τῆς  $EA$  μείζονες εἰσι. Κοινὴ ἀφηρησθῶ ἡ  $EZ$ · λοιπὴ ἄρα ἡ  $HZ$  λοιπῆς τῆς  $ZA$  μείζων ἐστὶ. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ  $ZA$ , ἐλάχιστη δὲ ἡ  $ZA$ · μείζων δὲ ἡ μὲν  $ZB$  τῆς  $ZΓ$ , ἡ δὲ  $ZΓ$  τῆς  $ZH$ .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ  $Z$  σημείου δύο μόνον ἴσαι<sup>6</sup> προσπίπτουσιν πρὸς τὸν  $ABΓΔ$  κύκλον,

Rursus, quoniam  $HZ$ ,  $ZE$  ipsa  $EH$  majores sunt,  $\mathcal{A}$ qualis autem  $EH$  ipsi  $EA$ ; ergo  $HZ$   $ZE$  ipsa  $EA$  majores sunt. Communis auferatur  $EZ$ ; reliqua igitur  $HZ$  reliqua  $ZA$  major est. Maxima quidem igitur  $ZA$ , minima vero  $ZA$ ; major autem  $ZB$  quidem ipsa  $ZΓ$ , et  $ZΓ$  ipsa  $ZH$ .

Dico et a  $Z$  puncto duas solum  $\mathcal{A}$ quales cadere in  $ABΓΔ$  circulum, ex utrâque parte ip-

(21. 1), les droites  $EB$ ,  $EZ$  sont plus grandes que la droite  $BZ$ . Mais la droite  $AB$  est égale à la droite  $BE$ ; donc les droites  $BE$ ,  $EZ$  sont égales à la droite  $AZ$ ; donc la droite  $AZ$  est plus grande que la droite  $BZ$ . De plus, puisque  $BE$  est égal à  $FE$ , et que la droite  $ZE$  est commune, les deux droites  $BE$ ,  $EZ$  sont égales aux deux droites  $FE$ ,  $EZ$ . Mais l'angle  $BEZ$  est plus grand que l'angle  $FEZ$ ; donc la base  $BZ$  est plus grande que la base  $FZ$  (24. 1). Par la même raison la droite  $FZ$  est plus grande que la droite  $HZ$ .

De plus, puisque les droites  $HZ$ ,  $ZE$  sont plus grandes que la droite  $EH$ , et que  $EH$  est égal à  $EA$ , les droites  $HZ$ ,  $ZE$  sont plus grandes que  $EA$ . Retranchons la droite commune  $EZ$ ; la droite restante  $HZ$  sera plus grande que la droite restante  $ZA$ . Donc la droite  $ZA$  est la plus grande, et la droite  $ZA$  la plus petite; donc la droite  $ZB$  est plus grande que la droite  $ZΓ$ , et la droite  $ZΓ$  plus grande que la droite  $ZH$ .

Je dis que du point  $Z$ , on ne peut mener à la circonférence  $ABΓΔ$  que deux

ἰσὺς ἑκάτερας τῆς ΖΔ ἰσχυρίσθης. Συνιστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπιζυγῶμεν ἢ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἢ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἢ ΖΗ βάσις τῇ ΖΘ ἴση ἐστί. Λίγω δὲ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπισιῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἢ ΖΚ. Καὶ ἵπαι ἢ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴσιν ἴσην, ἀλλὰ μὲν καὶ ἢ ΖΘ τῇ ΖΗ<sup>8</sup>, καὶ ἢ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἴσιν ἴσην, ἢ ἰγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ<sup>10</sup> ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ καὶ οὕτως. ἐπιζυγῶμεν ἢ ΕΚ. Καὶ ἵπαι ἴση ἐστὶν ἢ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἢ ΕΖ, καὶ βάσις ἢ ΖΗ βάσις τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστὶν. Ἀλλ' ἢ ὑπὸ ΗΕΖ<sup>11</sup> τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἴσιν ἴση· καὶ ἢ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴσιν ἴση, ἢ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἴσιν<sup>12</sup> ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπισιῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

sus  $ZA$  minimæ. Constituatur enim ad  $EZ$  rectam, et ad punctum in ea  $E$ , ipsi  $HEZ$  angulo æqualis  $ZEΘ$ , et jungatur  $ZΘ$ . Quoniam igitur æqualis est  $HE$  ipsi  $EΘ$ , communis autem  $EZ$ , duæ utique  $HE$ ,  $EZ$  duabus  $ΘΕ$ ,  $EZ$  æquales sunt; et angulus  $HEZ$  angulo  $ΘEZ$  æqualis; basis igitur  $ZH$  basi  $ZΘ$  æqualis est. Dico autem ipsi  $ZH$  aliam æqualem non cadere in circulum a  $Z$  puncto. Si enim possibile, cadat  $ZK$ . Et quoniam  $ZK$  ipsi  $ZH$  est æqualis, sed quidem et  $ZΘ$  ipsi  $ZH$ ; et  $ZK$  igitur ipsi  $ΘZ$  est æqualis, propinquior ei quæ per centrum remotiori æqualis, quod impossibile.

Vel et hoc modo. Jungatur  $EK$ . Et quoniam æqualis est  $HE$  ipsi  $EK$ , communis autem  $EZ$ , et basis  $ZH$  basi  $ZK$  æqualis; angulus igitur  $HEZ$  angulo  $ΚΕΖ$  æqualis est. Sed  $HEZ$  ipsi  $ZEΘ$  est æqualis; et  $ZEΘ$  igitur ipsi  $ΚΕΖ$  est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur a  $Z$  puncto alia aliqua cadet in circulum æqualis ipsi  $HZ$ ; una igitur sola. Si igitur circuli, etc.

droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite  $ZA$ . Car sur la droite  $EZ$  et, au point  $E$  de cette droite, faisons l'angle  $ZEΘ$  égal à l'angle  $HEZ$  (23. 1), et joignons  $ZΘ$ . Puisque la droite  $HE$  est égale à la droite  $EΘ$ , et que la droite  $EZ$  est commune, les deux droites  $HE$ ,  $EZ$  sont égales aux deux droites  $ΘΕ$ ,  $EZ$ ; mais l'angle  $HEZ$  est égal à l'angle  $ΘEZ$ ; donc la base  $ZH$  est égale à la base  $ZΘ$  (4. 1). Je dis que du point  $Z$  on ne peut mener à la circonférence une autre droite égale à  $ZH$ . Car si cela est possible, menons  $ZK$ . Puisque  $ZK$  est égal à  $ZH$ , et  $ZΘ$  égal à  $ZH$ , la droite  $ZK$  est égale à la droite  $ΘZ$ , une droite plus près de celle qui passe par le centre, égale à une droite qui en est plus éloignée, ce qui est impossible.

Ou de cette autre manière. Joignons  $EK$ . Et puisque  $HE$  est égal à  $EK$ , que la droite  $EZ$  est commune, et que la base  $ZH$  est égale à la base  $ZK$ , l'angle  $HEZ$  est égal à l'angle  $ΚΕΖ$  (8. 1). Mais l'angle  $HEZ$  est égal à l'angle  $ZEΘ$ ; donc l'angle  $ZEΘ$  est égal à l'angle  $ΚΕΖ$ , le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc du point  $Z$ , on ne peut pas mener à la circonférence une autre droite qui soit égale à  $HZ$ ; donc on n'en peut mener qu'une seule. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εάν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχῃ· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλῃ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τι σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἔστιν ἰλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπίπτουσιν πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερας τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ ἐλάβρωμεν τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν

## PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectæ quædam, quarum una per centrum, reliquæ autem utcunque; ipsarum quidem ad concavam circumferentiam cadentium rectarum maxima quidem est quæ per centrum; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major erit; ipsarum vero in convexam circumferentiam cadentium rectarum minima quidem est quæ inter et punctum et diametrum; aliarum autem, semper propinquior minimæ remotiore est minor. Duæ autem solum æquales a puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓ, et extra ipsum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ab eo ducantur rectæ quædam ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, sit autem ΔΑ per centrum; dico earum quidem in ΑΕΖΓ concavæ

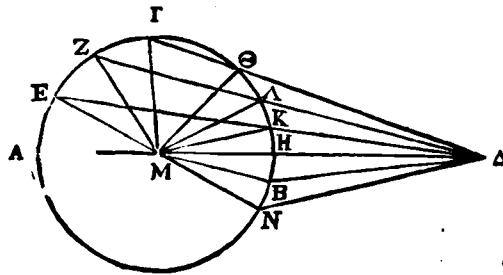
## PROPOSITION VIII.

Si hors d'un cercle on prend un point quelconque, si de ce point on mène à ce cercle des droites, si une d'elles est menée par le centre, et les autres comme on voudra; parmi les droites menées à la circonférence concave, la plus grande est celle qui passe par le centre, et parmi les autres celle qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est entre le point pris hors du cercle et le diamètre, et parmi les autres celle qui est plus près de la plus petite est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; et du point pris hors du cercle, on ne peut mener à la circonférence de l'un et l'autre côté de la plus petite, que deux droites égales.

Soit le cercle ΑΒΓ, et hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ; de ce point menons à ce cercle les droites ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, et que ΔΑ passe

ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν  
 μεγίστη μὲν ἴστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰ  
 δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον  
 μείζων ἴσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς  
 ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν  
 προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἡ ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ  
 μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΔΗ·  
 αἰ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττω ἴσται  
 τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ  
 τῆς ΔΘ'.

vam circumferentiam cadentium rectarum ma-  
 ximam quidem esse ΔΑ quæ per centrum;  
 semper autem propinquior ei quæ per centrum  
 remotiore major erit, ΔΕ quidem ipsâ ΔΖ, et  
 ΔΖ ipsâ ΔΓ; ipsarum autem in ΘΑΚΗ con-  
 vexam circumferentiam cadentium rectarum,  
 minima quidem ΔΗ, quæ inter et punctum Δ  
 et diametrum ΔΗ; semper autem propinquior  
 ipsi ΔΗ minimæ minor est remotiore, ΔΚ qui-  
 dem ipsâ ΔΛ, et ΔΛ ipsâ ΔΘ.



Εἰλήθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ  
 ἴστω τὸ Μ· καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ,  
 ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Μ·  
 et jungantur ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστιν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσ-  
 κείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἴσται ταῖς ΕΜ, ΜΔ.  
 Αἱ δὲ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ

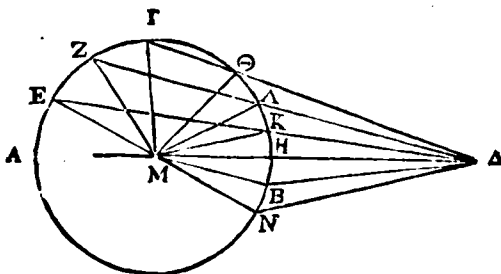
Et quoniam æqualis est ΑΜ ipsi ΕΜ, com-  
 munis addatur ΜΔ; ergo ΑΔ æqualis est ipsis  
 ΕΜ, ΜΔ. Sed ΕΜ, ΜΔ ipsâ ΕΔ majores sunt;

par le centre; je dis que de toutes les droites menées à la circonférence con-  
 cave ΑΕΖΓ, la plus grande est la droite ΔΑ, menée par le centre, et que la droite  
 qui est plus près de celle qui passe par le centre sera toujours plus grande que  
 celle qui s'en éloigne davantage, la droite ΔΕ plus grande que ΔΖ, et la droite ΔΖ  
 plus grande que ΔΓ; mais, parmi les droites menées à la circonférence con-  
 vexa ΘΑΚΗ, la droite ΔΗ placée entre le point Δ et le diamètre ΔΗ est la plus  
 petite, et la droite placée plus près de la plus petite ΔΗ est toujours plus petite  
 que celle qui s'en éloigne davantage; la droite ΔΚ plus petite que ΔΛ, et la  
 droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit le point Μ; et joignons  
 ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Puisque la droite ΑΜ est égale à la droite ΕΜ, ajoutons la droite com-  
 mune ΜΔ; la droite ΑΔ sera égale aux droites ΕΜ, ΜΔ. Mais les droites ΕΜ,

ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προσκείμεθα<sup>3</sup> ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὸν ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάττω ἐστίν, ἐλάχιστη ἄρα ἐστί. Καὶ ἐπεὶ τρίγωνου τοῦ ΜΑΔ ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθείαι ἐντὸς συνιστάθησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα<sup>4</sup> τῶν ΜΑ, ΑΔ ἐλάττω ἐῖσιν· ἴση δὲ<sup>5</sup> ἡ ΜΚ τῇ ΜΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΑ ἐλάττω

et  $AD$  igitur ipsa  $ED$  major est. Rursus, quoniam æqualis est  $EM$  ipsi  $ZM$ , communis addatur  $MD$ ; ergo  $EM$ ,  $MD$  ipsis  $ZM$ ,  $MD$  æquales sunt, et angulus  $EMD$  angulo  $ZMD$  major est. Basis igitur  $ED$  basi  $ZD$  major est. Similiter autem ostendemus, et  $ZD$  ipsa  $GD$  majorem esse; maxima quidem igitur est  $DA$ , major vero  $DE$  ipsa  $DZ$ , et  $DZ$  ipsa  $DΓ$ .

Et quoniam  $MK$ ,  $KD$  ipsa  $MD$  majores sunt, æqualis autem  $MH$  ipsi  $MK$ , reliqua igitur  $KD$  reliqua  $HD$  major est; quare et  $DH$  ipsa  $DK$  minor est; minima igitur est. Et quoniam trianguli  $MAD$  super uno laterum  $MD$ , duæ rectæ intus constituuntur;  $MK$ ,  $KD$  igitur ipsis  $MA$ ,  $AD$  minores sunt; æqualis autem  $MK$  ipsi  $MA$ ; reliqua igitur  $DK$  reliqua  $DA$  minor est. Similiter

$MD$  sont plus grandes que la droite  $ED$  (20. 1); donc la droite  $AD$  est plus grande que la droite  $ED$ . De plus, puisque la droite  $EM$  est égale à la droite  $ZM$ , ajoutons la droite commune  $MD$ , les droites  $EM$ ,  $MD$  seront égales aux droites  $ZM$ ,  $MD$ ; mais l'angle  $EMD$  est plus grand que l'angle  $ZMD$ ; donc la base  $ED$  est plus grande que la base  $ZD$  (24. 1). Nous démontrerons semblablement que la droite  $ZD$  est plus grande que la droite  $GD$ ; donc la droite  $DA$  est la plus grande, la droite  $DE$  plus grande que  $DZ$ , et la droite  $DZ$  plus grande que  $DΓ$ .

De plus, puisque les droites  $MK$ ,  $KD$  sont plus grandes que la droite  $MD$  (20. 1), et que la droite  $MH$  est égale à la droite  $MK$ , la droite restante  $KD$  est plus grande que la droite restante  $HD$ ; donc la droite  $DH$  est plus petite que la droite  $DK$ ; donc elle est la plus petite. Et puisque sur un des côtés  $MD$  du triangle  $MAD$  on a construit intérieurement deux droites, les droites  $MK$ ,  $KD$  sont plus petites que les droites  $MA$ ,  $AD$  (21. 1); mais  $MK$  est égal à  $MA$ ; donc la droite

ἴστί. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἑλάττω ἴστί· ἑλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἑλάττω δὲ ἢ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἢ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι<sup>β</sup> ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπισοῦνται<sup>γ</sup> πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἑλαχίστης. Συνιστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστί ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὲ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι ὡσίν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση<sup>δ</sup>. βάσεις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἴστί. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπισοῖται πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἴστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἴστί ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἴστί ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἴστί ἴση<sup>ε</sup>, ἢ ἑγγιον τῆς ΔΗ ἑλαχίστης τῇ ἀπώτερῳ ἴστί ἴση, ὅπερ ὀδύνατον εἰδέχθαι.

Ἡ καὶ ἄλλως. Ἐπιζεύχθω ἡ ΜΝ. Ἐπεὶ<sup>ζ</sup> ἴση ἴστί ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσεις ἡ

autem ostendimus et ΔΛ ipsā ΔΘ minorem esse; minima quidem igitur est ΔΗ, minor vero ΔΚ ipsā ΔΛ, et ΔΛ ipsā ΔΘ.

Dico et duas solum æquales a Δ puncto cadere in circulum, ex utrâque parte ipsius ΔΗ minimæ. Constituatur ad ΜΔ rectam, et ad punctum in eâ Μ, ipsi ΚΜΔ angulo æqualis angulus ΔΜΒ, et jungatur ΔΒ. Et quoniam æqualis est ΜΚ ipsi ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ utique ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΚΜΔ angulo ΒΜΔ æqualis; basis igitur ΔΚ basi ΔΒ æqualis est. Dico autem ipsi ΔΚ rectæ aliam æqualem non cadere in ΑΒΓ circulum a Δ puncto. Si enim possibile, cadat, et sit ΔΝ. Quoniam igitur ΔΚ ipsi ΔΝ est æqualis, sed ΔΚ ipsi ΔΒ est æqualis; et ΔΒ igitur ipsi ΔΝ est æqualis; propinquior minimæ ipsius ΔΗ remotiori est æqualis, quod impossibile ostensum est.

Vel et aliter. Jungatur ΜΝ. Quoniam æqualis est ΚΜ ipsi ΜΝ, communis autem ΜΔ, et basis

restante ΔΚ est plus petite que la droite restante ΔΛ. Nous démontrerons semblablement que la droite ΔΛ est plus petite que la droite ΔΘ; donc la droite ΔΗ est la plus petite, et la droite ΔΚ est plus petite que la droite ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Je dis aussi que du point Δ, on ne peut mener au cercle que deux droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ. Construisons sur la droite ΜΔ, et au point Μ de cette droite, un angle ΔΜΒ égal à l'angle ΚΜΔ (23. 1), et joignons ΔΒ. Puisque la droite ΜΚ est égale à ΜΒ, et que la droite ΜΔ est commune, les deux droites ΚΜ, ΜΔ sont égales aux deux droites ΒΜ, ΜΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc la base ΔΚ est égale à la base ΔΒ (4. 1). Je dis qu'on ne saurait mener du point Δ au cercle ΑΒΓ une autre droite égale à ΔΚ. Qu'elle soit menée, s'il est possible, et qu'elle soit ΔΝ. Puisque ΔΚ est égal à ΔΝ, et ΔΚ égal à ΔΒ, la droite ΔΒ est égale à ΔΝ: donc une droite plus près de la plus petite ΔΗ est égale à une droite qui s'en éloigne davantage, ce qui a été démontré impossible.

Ou autrement. Joignons ΜΝ. Puisque la droite ΚΜ est égale à ΜΝ, que la

ΔΚ βάσι τῇ ΔΝ ἴση· ᾧ ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἵστί. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἵστί ἴση<sup>1</sup>· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ᾧ ἄρα<sup>1</sup> τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἵστί ἴση<sup>4</sup>, ἡ ἱσάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἴστί ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι<sup>1</sup> πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἰφ' ἑκάτερας τῆς ΔΗ ἰσαχίστης προσπινοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι<sup>1</sup>, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἵστί τοῦ κύκλου.

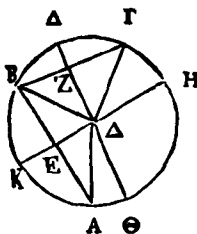
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτε-

ΔΚ basi ΔΝ æqualis; angulus igitur ΚΜΔ angulo ΝΜΔ æqualis est. Sed ΚΜΔ ipsi ΒΜΔ est æqualis; et ΒΜΔ igitur ipsi ΝΜΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur plures quam duæ æquales in ΑΒΓ circulum a Δ puncto ex utraq̃ue parte ipsius ΔΗ minimæ cadent. Si igitur extra circulum, etc.

## PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, sumptum punctum centrum est circuli.

Sit circulus ΑΒΓ, intra autem ipsum punctum Δ, et a Δ in ΑΒΓ circulum cadant plures



τωςαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι<sup>2</sup>, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἵστί τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· dico Δ punctum centrum esse ΑΒΓ circuli.

droite ΔΑ est commune et que la base ΔΚ est égale à la base ΔΝ, l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ (8. 1). Mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc l'angle ΒΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc il est impossible de mener du point Δ au cercle ΑΒΓ, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ, plus de deux droites égales. Donc, etc.

## PROPOSITION IX.

Si dans un cercle, l'on prend un point quelconque, et si plus de deux droites menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles, le point qu'on aura pris sera le centre du cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ, et le point intérieur Δ, et que plus de deux droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, menées du point Δ à la circonférence, soient égales entre elles, je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ AB, BG καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ E, Z σημεία, καὶ ἐπιζευχθείσαι αἱ EA, ZA διήχθωσαν ἐπὶ τὰ K, H, Λ, Θ σημεία.

Επεὶ οὖν ἐστὶν ἴση<sup>3</sup> ἡ AE τῇ EB, κοινὴ δὲ ἡ EA· δύο δὲ αἱ AE, EA δυσὶ ταῖς BE, EA ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσεις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση<sup>4</sup>. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AEA γωνία τῇ ὑπὸ BEA ἴση ἐστίν· ὁρτὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AEA, BEA γωνιῶν· ἡ HK ἄρα τὴν AB τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς<sup>5</sup>. Καὶ ἵπαι, εἰάν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθείαν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου<sup>7</sup>. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ HK, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου. Εἰάν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Jungantur enim AB, BG, et secentur bifariam in E, Z punctis, et junctæ EA, ZA producantur ad K, H, Λ, Θ puncta.

Quoniam igitur æqualis est AE ipsi EB, communis autem EA; duæ utique AE, EA duabus BE, EA æquales sunt; et basis ΔΑ ipsi ΔΒ æqualis; angulus igitur AEA angulo BEA æqualis est; rectus igitur uterque AEA, BEA angulorum; HK igitur ipsam AB secat bifariam et ad rectos. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos secet, in secante est centrum circuli; in HK igitur est centrum ipsius ABΓ circuli. Propter eadem utique et in ΘΛ est centrum ipsius ABΓ circuli. Et nullum aliud commune habent HK, ΘΛ rectæ quam Δ punctum; Δ igitur punctum centrum est ABΓ circuli. Si igitur circuli, etc.

Joignons les droites AB, BG, coupons-les en deux parties égales aux points E, Z (10. 1), et ayant joint les droites EA, ZA, prolongeons-les vers les points K, H, Λ, Θ.

Puisque AE est égal à EB, et que la droite EA est commune, les deux droites AE, EA sont égales aux deux droites BE, EA; mais la base ΔΑ est égale à la base ΔΒ; donc l'angle AEA est égal à l'angle BEA (8. 1); donc chacun des angles AEA, BEA est droit; donc la droite HK coupe la droite AB en deux parties égales et à angles droits. Mais lorsque, dans un cercle, une droite coupe une autre droite en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante (cor. 1. 3); donc le centre du cercle ABΓ est dans HK. Par la même raison, le centre du cercle ABΓ est dans ΘΛ. Mais les droites HK, ΘΛ n'ont d'autre point commun que le point Δ; donc le point Δ est le centre du cercle ABΓ. Donc, etc.

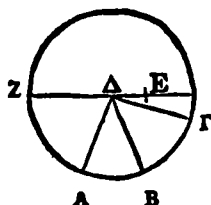


ΑΛΛΩΖ.

ALITER.

Κύκλου γάρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημῖον ἐν τῷ  
τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλου προσ-  
πιπτίτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ,  
ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ λαβόντι σημῖον τὸ Δ κέντρον  
ἔστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Intra enim circulum ΑΒΓ sumatur aliquod  
punctum Δ, a Δ autem in ΑΒΓ circulum cadant  
plures quam duæ æquales rectæ, insæ ΔΑ, ΔΒ,  
ΔΓ; dico sumptum punctum Δ centrum esse  
ipsius ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπι-  
ξευθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεία, ἡ  
ΖΗ ἄρα<sup>8</sup> διάμετρος ἔστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ  
οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου  
εἰληπταί τι σημῖον τὸ Δ, ὃ μὴ ἔστι κέντρον  
τοῦ κύκλου<sup>9</sup>, μείσσει μὲν ἔσται ἡ ΔΗ, μείζων  
δὲ ἢ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἢ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ  
ἴση, ὅπῃ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Ε κέντρον  
ἔστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

Non enim, sed si possibile, sit Ε, et juncta  
ΔΕ producat in Ζ, Η puncta; ergo ΖΗ diamet-  
ter est ipsius ΑΒΓ circuli. Quoniam igitur circuli  
ΑΒΓ in ΖΗ diametro sumptum est aliquod  
punctum Δ, quod non est centrum circuli, ma-  
xima quidem erit ΔΗ, major vero ΔΓ ipsā  
ΔΒ, et ΔΒ ipsā ΔΑ. Sed et æqualis, quod est  
impossibile; non igitur Ε centrum est ipsius ΑΒΓ  
circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud

## A U T R E M E N T.

Dans le cercle ΑΒΓ soit pris un point quelconque Δ, et que plus de deux  
droites égales tombent du point Δ dans le cercle ΑΒΓ, les droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ;  
je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Qu'il ne le soit point, mais s'il est possible, que ce soit le point Ε; ayant  
joint ΔΕ, prolongeons cette droite vers les points Ζ, Η; la droite ΖΗ sera le  
diamètre du cercle ΑΒΓ. Puisque l'on a pris dans le diamètre ΖΗ du cercle ΑΒΓ  
un point Δ, qui n'est pas le centre de ce cercle, la droite ΔΗ sera la plus grande,  
la droite ΔΓ plus grande que la droite ΔΒ, et la droite ΔΒ plus grande que la  
droite ΔΑ (7. 3). Mais elle lui est égale, ce qui est impossible, donc le

οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ὅρα σημείον κέν-  
τρον ἴστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου<sup>10</sup>.

præter Δ; ergo Δ punctum centrum est ipsius  
ΑΒΓ circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

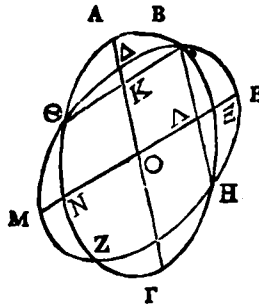
PROPOSITIO X.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα ση-  
μεῖα ἢ δύο<sup>1</sup>.

Circulus circulum non secat in pluribus punc-  
tis quam duobus.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ  
τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,

Si enim possibile, circulus ΑΒΓ circulum  
ΔΕΖ secet in pluribus punctis quam duobus, in



Ζ, Θ, καὶ ἐπιζωχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνί-  
σθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεία· καὶ ἀπὸ τῶν Κ,  
Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ  
διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεία<sup>2</sup>.

ipsis Β, Η, Ζ, Θ, et junctæ ΒΘ, ΒΗ bifariam  
secentur in Κ, Λ punctis; et ab ipsis Κ, Λ ipsis  
ΒΘ, ΒΗ ad rectos ductæ ΚΓ, ΛΜ producantur  
in Α, Ε puncta.

point E n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement  
qu'aucun autre point, excepté Δ, ne peut l'être; donc le point Δ est le centre  
du cercle ΑΒΓ.

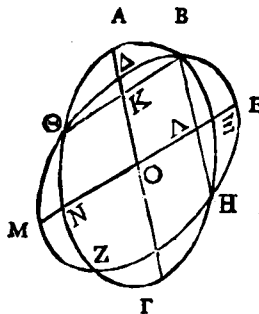
PROPOSITION X.

Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΓ coupe le cercle ΔΕΖ en plus de deux  
points, aux points Β, Η, Ζ, Θ; joignons les droites ΒΘ, ΒΗ; coupons-les en  
deux parties égales aux points Κ, Λ, et par les points Κ, Λ, ayant conduit  
les droites ΚΓ, ΛΜ perpendiculaires à ΒΘ, ΒΗ, prolongeons-les vers les  
points Α, Ε.

Επειὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ  $AB\Gamma$  εὐθεῖά τις ἡ  $ΑΓ$  εὐθεῖαν τινὰ τὴν  $ΒΘ$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει<sup>3</sup>, ἐπὶ τῆς  $ΑΓ$  ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ  $AB\Gamma$  εὐθεῖά τις ἡ  $ΝΞ$  εὐθεῖαν τινὰ τὴν  $ΒΗ$  δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς  $ΝΞ$  ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς

Quoniam igitur in circulo  $AB\Gamma$  recta aliqua  $ΑΓ$  rectam aliquam  $ΒΘ$  bifariam et ad rectos secat, in  $ΑΓ$  igitur est centrum ipsius  $AB\Gamma$  circuli. Rursus, quoniam in circulo eodem  $AB\Gamma$  recta aliqua  $ΝΞ$  rectam aliquam  $ΒΗ$  bifariam et ad rectos secat, in  $ΝΞ$  igitur centrum est ipsius  $AB\Gamma$  circuli. Ostensum autem ipsum esse et in  $ΑΓ$ , et



$ΑΓ$ , καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΝΞ$  εὐθεῖαι ἀλλήλαις<sup>4</sup> ἢ κατὰ τὸ  $Ο$ . τὸ  $Ο$  ἄρα σημειὸν κέντρον ἐστὶ τοῦ  $AB\Gamma$  κύκλου. Ομοίως δὲ διζόμεν, ὅτι καὶ τοῦ  $ΔΕΖ$  κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ  $Ο$ . δύο ἄρα κύκλοι τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν  $AB\Gamma$ ,  $ΔΕΖ$ , τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ  $Ο$ <sup>5</sup>, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἰζῆς.

in nullo puncto conveniunt  $ΑΓ$ ,  $ΝΞ$  rectæ inter se præterquam in  $Ο$ ; ergo  $Ο$  punctum centrum est ipsius  $AB\Gamma$  circuli. Similiter autem ostendemus, et ipsius  $ΔΕΖ$  circuli centrum esse  $Ο$ ; duorum igitur circularum sese secantium  $AB\Gamma$ ,  $ΔΕΖ$ , idem erit centrum  $Ο$ , quod est impossibile. Non igitur circulus, etc.

Puisque dans le cercle  $AB\Gamma$ , la droite  $ΑΓ$  coupe la droite  $ΒΘ$  en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle  $AB\Gamma$  est dans la droite  $ΑΓ$  (cor. 1. 3). De plus, puisque dans le même cercle  $AB\Gamma$  la droite  $ΝΞ$  coupe la droite  $ΒΗ$  en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle  $AB\Gamma$  est dans la droite  $ΝΞ$ . Mais on a démontré qu'il est dans la droite  $ΑΓ$ , et les deux droites  $ΑΓ$ ,  $ΝΞ$  ne se rencontrent qu'au point  $Ο$ ; donc le point  $Ο$  est le centre du cercle  $AB\Gamma$ . Nous démontrerons semblablement que le point  $Ο$  est le centre du cercle  $ΔΕΖ$ ; donc le même point  $Ο$  est le centre des deux cercles  $AB\Gamma$ ,  $ΔΕΖ$ , qui se coupent mutuellement, ce qui est impossible (5. 3). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

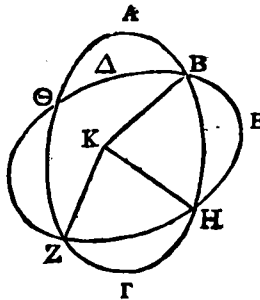
ALITER.

Κύκλος γάρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ  
τεμνίτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,  
Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ  
Κ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Επεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἵληπταί τι ση-  
μεῖον ἐντός, τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν

Circulus enim rursus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ se-  
cet in pluribus punctis quam duobus, in ipsis Β,  
Η, Ζ, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓ circuli,  
ipsum Κ, et jungantur ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Quoniam igitur intra circulum ΔΕΖ sumptum  
est aliquod punctum Κ, et a Κ in ΔΕΖ circu-



ΔΕΖ κύκλον προσπιπτόμεσι πλείους ἢ δύο εὐ-  
θεῖαι ἴσαι<sup>6</sup>, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημεῖον  
κέντρον ἐστὶ<sup>7</sup> τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ  
ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τε-  
μνόντων ἀλλήλους τὸ<sup>8</sup> αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ,  
ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

lum incidunt plures quam duæ rectæ æquales,  
ipsæ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ; ergo Κ punctum centrum est  
ipsius ΔΕΖ circuli. Est autem et ipsius ΑΒΓ circuli  
centrum ipsum Κ; duorum igitur circulorum  
sese secantium idem centrum est Κ, quod im-  
possibile. Non igitur circulus, etc.

A U T R E M E N T.

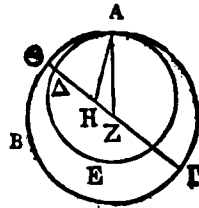
Car que le cercle ΑΒΓ coupe encore le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux  
points Β, Η, Ζ; prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ, et joignons ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Puisque dans le cercle ΔΕΖ, on a pris un point Κ, et que plus de deux droites  
égales ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ tombent du point Κ dans le cercle ΔΕΖ, le point Κ est  
le centre du cercle ΔΕΖ (9. 3). Mais le point Κ est le centre du cercle ΑΒΓ;  
donc le même point Κ est le centre de deux cercles qui se coupent; ce qui  
est impossible (5. 3).

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ λαβῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πιστεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτίσθωσαν<sup>2</sup> ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου<sup>3</sup> κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λήγω δτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α<sup>4</sup> πιστεῖται.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πίπτειω ὡς ἡ ΖΗΘ καὶ ἐπιζυγυθῶσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ τοῦτ' ἐστὶ τῆς ΖΘ<sup>5</sup>, μείζονες εἰσι, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν,

Si duo circuli sese contingant intus, et sumantur eorum centra, centra eorum conjungens recta producta in contactum cadet circumulorum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant intus in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius autem ΑΔΕ ipsum Η; dico ab Η ad Ζ conjungentem rectam productam in Α cadere.

Non enim, sed si possibile, cadat ut ΖΗΘ, et jungantur ΑΖ, ΑΗ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ ipsā ΖΑ, hoc est ipsā ΖΘ majores sunt, communis auferatur ΖΗ; reliqua igitur ΑΗ reliquā ΗΘ major est. Æqualis autem ΑΗ ipsi ΔΗ; et ΗΔ igitur ipsā ΗΘ

## PROPOSITION XI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, et si on prend leurs centres, la droite qui joint leurs centres étant prolongée tombera au contact de ces cercles.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent intérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Η au point Ζ, étant prolongée, tombera en Α.

Que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΗΘ; et joignons ΑΖ, ΑΗ.

Puisque les droites ΑΗ, ΗΖ sont plus grandes que ΖΑ (20. 1), c'est-à-dire que ΖΘ, retranchons la droite commune ΖΗ; la droite restante ΑΗ sera plus grande que la droite restante ΗΘ. Mais ΑΗ est égal à ΔΗ; donc ΗΔ est plus grand que ΘΗ,

ἢ ἱλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.  
Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζυγυμμένη  
εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῶς πίσιται·  
κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πίσιται. Ἐὰν  
ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΑΛΛΩΣ.

Αλλὰ δὴ πίπτειτω ὡς ἡ ΗΖΓ, καὶ ἐκτελέσθω<sup>8</sup>  
ἐκ εὐθείας ἡ ΗΖΓ ἐπὶ τὸ Θ συμμῖον, καὶ ἐπι-  
ζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Ἐπὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ,  
ἀλλὰ ἡ ΖΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΓ, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΖΘ,  
κοινὴ ἀφγρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς  
τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν, τοῦτ' ἐστὶν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ,  
ἢ ἱλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.  
Ομοίως, καὶ ἐκτὸς τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ  
μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἀποποιῶ.

major est, minor majore, quod est impossibile.  
Non igitur a Z ad H conjuncta recta extra con-  
tactum ad A cadet. Ergo in contactum ad A  
cadet. Si igitur duo circuli, etc.

ALITER.

Sed etiam cadat ut HZΓ, et producat in  
directum ipsa HΓZ ad Θ punctum, et jungan-  
tur ΑΗ, ΑΖ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ majores sunt ipsā ΑΖ,  
sed ΖΑ æqualis est ipsi ΖΓ, hoc est ipsi ΖΘ,  
communis auferatur ΖΗ; reliqua igitur ΑΗ re-  
liquā ΗΘ major est, hoc est ΗΔ ipsā ΗΘ, minor  
majore, quod est impossibile. Similiter, et si  
extra parvum sit centrum majoris circuli, osten-  
demus hoc idem absurdum.

le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée  
du point z au point H ne tombera pas hors du contact en A; donc elle tombera  
dans le contact en A. Donc, etc.

AUTREMENT.

Mais qu'elle tombe comme HZΓ, prolongeons HZΓ directement vers le point  
Θ, et joignons ΑΗ, ΑΖ.

Puisque les droites ΑΗ, ΗΖ sont plus grandes que ΑΖ, et que ΖΑ est égal à ΖΓ,  
c'est-à-dire à ΖΘ, retranchons la droite commune ΖΗ; la droite restante ΑΗ sera  
plus grande que la droite restante ΗΘ, c'est-à-dire, ΗΔ plus grand que ΗΘ, le plus  
petit que le plus grand, ce qui est impossible. Si le centre du grand cercle  
était hors du petit cercle, nous démontrerions semblablement qu'il s'en suivrait  
une absurdité.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

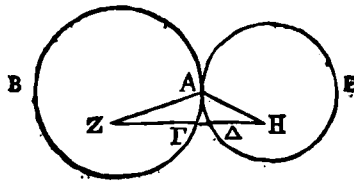
## PROPOSITIO XII.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἄλλήλων ἐκτός, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγμένη εὐθεῖα<sup>2</sup> διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γάρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτίσθωσαν ἄλλήλων ἐκτός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου<sup>3</sup> κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται,

Si duo circuli sese contingant extra, centra ipsorum conjungens recta per contactum transibit.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant extra in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius vero ΑΔΕ ipsum Η; dico a Ζ ad Η conjungentem rectam per contactum ad Α transire.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓ, ΔΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

Επεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ

Non enim, sed si possibile, eat ut ΖΓ, ΔΗ, et jungantur ΖΑ, ΑΗ.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli, æqualis est ΖΑ ipsi ΖΓ. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ipsius ΑΔΕ circuli, æqualis est ΑΗ ipsi ΗΔ. Ostensa est

## PROPOSITION XII.

Si deux cercles se touchent extérieurement, la droite qui joint leurs centres passera par le contact.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent extérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Ζ au point Η passera par le contact en Α.

Car que cela ne soit point, mais, s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΓ, ΔΗ, et joignons ΖΑ, ΑΗ.

Puisque le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΖΑ est égale à ΖΓ. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΑΔΕ, la droite ΑΗ est égale à ΗΔ. Mais on a démontré que ΖΑ est égal à la droite ΖΓ; donc les droites ΖΑ

ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζυγυγμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

est autem ΖΑ ipsi ΖΓ æqualis; ipsæ igitur ΖΑ, ΑΗ ipsis ΖΓ, ΔΗ æquales sunt; quare tota ΖΗ ipsis ΖΑ, ΑΗ major est. Sed et minor, quod impossibile. Non igitur a Ζ ad Η ducta recta per contactum ad Α non transibit; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

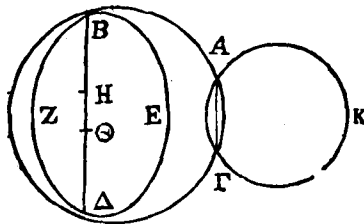
PROPOSITIO XIII.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς ἐφάπτηται εἴαν τε ἐκτός'.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΔΓ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτιέσθω<sup>2</sup> πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ Β, Δ.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

Si enim possibile, circulus ΑΒΔΓ circulum ΕΒΖΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in Β, Δ.



Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Et sumatur ipsius quidem ΑΒΔΓ circuli centrum Η; ipsius autem ΕΒΖΔ, ipsum Θ.

ΑΗ sont égales aux droites ΖΓ, ΔΗ; donc la droite entière ΖΗ est plus grande que les droites ΖΑ, ΑΗ. Mais au contraire, elle est plus petite (20. 1), ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Ζ au point Η ne peut pas ne pas passer par le contact en Α; donc elle y passe. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

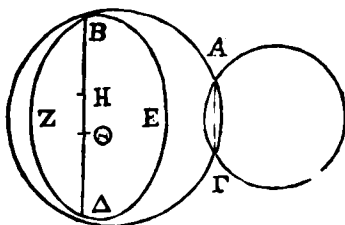
Un cercle ne touche point un cercle en plus d'un point, soit qu'il le touche intérieurement, ou extérieurement.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΔΓ touche d'abord intérieurement le cercle ΕΒΖΔ en plus d'un point, aux points Β, Δ.

Prenons le centre Η du cercle ΑΒΔΓ, et le centre Θ du cercle ΕΒΖΔ.



Η ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγυμένη εὐ-  
θεΐα<sup>3</sup> ἐπὶ τὰ Β, Δ πεισῖται. Πιπτεύω ὡς ἡ ΒΗΘΔ.  
Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ  
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ  
ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλὰ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ.  
Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ  
ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ. Εδείχθη  
δὲ αὐτῆς καὶ πολλὰ μείζων, ὅπερ ἄδύνατον·  
οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ  
πλείονα σημεία ἢ ἓν.



Λέγω δὲ ὅτι οὐδε ἑκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύ-  
κλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ<sup>5</sup> ΑΒΔΓ ἐφάπτεσθαι ἐκτός  
κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ Α, Γ, καὶ ἐπι-  
ζεύχθω ἡ ΑΓ.

Επὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ  
τῆς περιφέρειας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεία τὰ  
Α, Γ, ἡ ἄρα<sup>6</sup> ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεία ἐπιζευγυμένη

Ipsa igitur ab H ducta recta ad Θ in puncta  
B, Δ cadet. Cadat ut ΒΗΘΔ. Et quoniam H punc-  
tum centrum est ipsius ΑΒΔΓ circuli, æqualis est  
BH ipsi ΗΔ; major igitur BH ipsa ΘΔ; ergo  
multo major ΒΘ ipsa ΘΔ. Rursus, quoniam Θ  
punctum centrum est ipsius ΕΒΖΔ circuli, æqua-  
lis est ΒΘ ipsi ΘΔ. Ostensa est autem ipsa et  
multo major, quod impossibile; non igitur  
circulus circulum contingit intus in pluribus  
punctis quam in uno.

Dico etiam neque extra. Si enim possibile,  
circulus ΑΓΚ circulum ΑΒΔΓ contingat extra  
in pluribus punctis quam in uno, in Α, Γ, et  
jungatur ΑΓ.

Quoniam igitur circulorum ΑΒΔΓ, ΑΓΚ sumpta  
sunt in circumferentiis utriusque duo quælibet  
puncta Α, Γ, hæc utique puncta conjungens recta

La droite menée du point H au point Θ passera par les points Β, Δ (11. 3).  
Qu'elle tombe comme ΒΗΘΔ. Puisque le point H est le centre du cercle ΑΒΔΓ,  
la droite ΒΗ est égale à ΗΔ; donc ΒΗ est plus grand que ΘΔ; donc ΒΘ est beaucoup  
plus grand que ΘΔ. De plus, puisque le point Θ est le centre du cercle ΕΒΖΔ,  
la droite ΒΘ est égale à ΘΔ. Mais on a démontré qu'elle est beaucoup plus grande,  
ce qui est impossible; donc un cercle ne touche pas intérieurement un cercle en  
plus d'un point.

Je dis aussi qu'il ne le touche pas extérieurement en plus d'un point. Car, s'il  
est possible, que le cercle ΑΓΚ touche extérieurement le cercle ΑΒΔΓ en plus d'un  
point, aux points Α, Γ; joignons ΑΓ.

Puisque dans la circonférence des cercles ΑΒΔΓ, ΑΓΚ, on a pris deux points  
quelconques Α, Γ, la droite qui joindra ces deux points tombera dans

εὐθεῖα ἐντὸς ἐκατέρου πεισῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν  $ΑΒΔΓ$  ἐντὸς ἔπιει, τοῦ δὲ  $ΑΓΚ$  ἐκτός, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτός κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν. Εδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

intra utrumque cadet. Sed quidem intra ipsum  $ΑΒΔΓ$  cadit, extra vero ipsum  $ΑΓΚ$ , quod absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur, etc,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

In circulo æquales rectæ æqualiter distant a centro, et quæ æqualiter distant a centro æquales inter se sunt.

Ἐστω κύκλος ὁ  $ΑΒΔΓ$ , καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἴστωσαν αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ · λήγῃ ὅτι αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Sit circulus  $ΑΒΔΓ$ , et in eo æquales rectæ sint  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ ; dico ipsas  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  æqualiter distare a centro.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ  $ΑΒΔΓ$  κύκλου, καὶ ἴστω τὸ  $Ε$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $Ε$  ἐπὶ τὰς  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  καθέτοι ἤχθωσαν αἱ  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $ΑΕ$ ,  $ΓΕ$ .

Sumatur enim centrum ipsius  $ΑΒΔΓ$  circuli, et sit  $Ε$ , et ab  $Ε$  ad  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  perpendiculares ductantur  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$ , et jungantur  $ΑΕ$ ,  $ΓΕ$ .

l'un et l'autre cercle (2. 3). Mais elle tombe dans le cercle  $ΑΒΔΓ$ , et hors du cercle  $ΑΓΚ$  (déf. 3. 3), ce qui est absurde; donc un cercle ne touche pas extérieurement un cercle en plus d'un point. Mais on a démontré qu'il ne le touche pas intérieurement en plus d'un point. Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

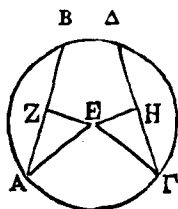
Dans un cercle les droites égales sont également éloignées du centre, et les droites également éloignées du centre sont égales entr'elles.

Soit le cercle  $ΑΒΔΓ$ , et que dans ce cercle les droites  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  soient égales; je dis que les droites  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$  sont également éloignées du centre.

Prenons le centre du cercle  $ΑΒΔΓ$ , qu'il soit le point  $Ε$ , du point  $Ε$  menons les droites  $ΕΖ$ ,  $ΕΗ$  perpendiculaires aux droites  $ΑΒ$ ,  $ΓΔ$ , et joignons  $ΑΕ$ ,  $ΓΕ$ .

Επει οὖν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ  
εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς  
ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἰση ἄρα  
ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ· διπλῇ ἔρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῇ, καὶ ἔστιν  
ἴση ἡ<sup>3</sup> ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. Καὶ  
ἵπαι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  
ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum  
rectam aliquam AB non per centrum ad rectos  
secat, et bifariam ipsam secat. Æqualis igitur AZ  
ipsi BZ; dupla igitur AB ipsius AZ. Propter  
eadem utique et ΓΔ ipsius ΓΗ est dupla, et est  
æqualis AB ipsi ΓΔ; æqualis igitur et AZ ipsi  
ΓΗ. Et quoniam æqualis est AE ipsi EG, æquale  
et ipsum ex AE ipsi ex EG. Sed ipsi quidem



ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ  
Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  
ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα  
ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ,  
ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση  
γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  
ΖΕ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα<sup>3</sup> ἡ  
ΖΕ τῇ ΕΗ. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ  
κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέν-

ex AE æqualia ipsa ex AZ, ZE, rectus enim  
ad Z angulus; ipsi vero ex EG æqualia ipsa  
ex EH, HG, rectus enim ad H angulus; ipsa  
igitur ex AZ, ZE æqualia sunt ipsis ex ΓΗ, ΗΕ,  
quorum ipsum ex AZ æquale est ipsi ex ΓΗ,  
æqualis enim est AZ ipsi ΓΗ; reliquum igitur  
ipsum ex ZE reliquo ex EH æquale est, æqualis  
igitur ZE ipsi EH. In circulo autem æqualiter  
distare a centro rectæ dicuntur, quando a cen-

Puisque la droite EZ menée par le centre, coupe à angles droits la droite AB, non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3 3.). Donc AZ est égal à BZ; donc AB est double de AZ. Par la même raison ΓΔ est double de ΓΗ; mais AB est égal à ΓΔ; donc AZ est égal à ΓΗ. Et puisque AE est égal à EG, le carré de AE est égal au carré de EG. Mais les carrés des droites AZ, ZE sont égaux au carré de AE (47. 1), car l'angle en Z est droit; et les carrés des droites EH, HG sont égaux au carré de EG, car l'angle en H est droit; donc les carrés des droites AZ, ZE sont égaux aux carrés des droites ΓΗ, ΗΕ; mais le carré de AZ est égal au carré de ΓΗ, car AZ est égal à ΓΗ; donc le carré restant de ZE est égal au carré restant de EH; donc ZE est égal à EH. Mais dans un cercle les droites sont dites également éloignées du centre, lorsque les per-

τρον ἰπ' αὐτάς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὧσιν· αἱ ἄρα AB, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Αλλὰ δὴ αἱ AB, ΓΔ εὐθείαι ἴσον ἀπέχονται ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἐστίν, ἴση ἴστω ἡ EZ τῇ EH· λίγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλὴ ἐστίν ἡ μὲν AB τῆς AZ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἰπεί ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EZ, ZA, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ, ZA ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν EH, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἐστὶν ἴσον<sup>5</sup>, ἴση γὰρ ἡ EZ τῇ EH. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν<sup>6</sup>. ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ ΓΗ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AZ διπλὴ ἡ AB, τῆς δὲ ΓΗ διπλὴ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ AB τῇ ΓΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τα ἐξῆς.

tro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt; ergo AB, ΓΔ æqualiter distant a centro.

Sed demum æqualiter AB, ΓΔ rectæ distant a centro, hoc est, æqualis sit EZ ipsi EH; dico æqualem esse et AB ipsi ΓΔ.

Etenim iisdem constructis, similiter utique ostendemus duplam esse quidem AB ipsius AZ, et ΓΔ ipsius ΓΗ; et quoniam æqualis est AE ipsi ΓΕ, æquale est ipsum ex AE ipsi ex ΓΕ; sed ipsi quidem ex AE æqualia sunt ipsa ex EZ, ZA, ipsi vero ex ΓΕ ipsa ex EH, ΗΓ; ipsa igitur ex EZ, ZA æqualia sunt ipsis ex EH, ΗΓ, quorum ipsum ex EZ ipsi ex EH est æquale, æqualis enim EZ ipsi EH; reliquum igitur ex AZ reliquo ex ΓΗ est æquale; æqualis igitur AZ ipsi ΓΗ, et est ipsius quidem AZ dupla AB, ipsius vero ΓΗ dupla ΓΔ. Æqualis igitur AB ipsi ΓΔ. In circulo igitur, etc.

pendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales (déf. 4. 3); donc les droites AB, ΓΔ sont également éloignées du centre.

Mais que les droites AB, ΓΔ soient également éloignées du centre, c'est-à-dire, que ZE soit égal à EH; je dis que AB est égal à ΓΔ.

En effet, les mêmes constructions étant faites, nous démontrerons semblablement que AB est double de AZ, et ΓΔ double de ΓΗ. Et puisque AE est égal à ΓΕ, le carré de AE est égal au carré de ΓΕ. Mais les carrés des droites EZ, ZA sont égaux au carré de AE (47. 1), et les carrés des droites EH, ΗΓ égaux au carré de ΓΕ; donc les carrés des droites EZ, ZA sont égaux aux carrés des droites EH, ΗΓ; mais le carré de EZ est égal au carré de EH, car EZ est égal à EH; donc le carré restant de AZ est égal au carré restant de ΓΗ; donc AZ est égal à ΓΗ; mais AB est double de la droite AZ, et ΓΔ double de ΓΗ; donc AB est égal à ΓΔ. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

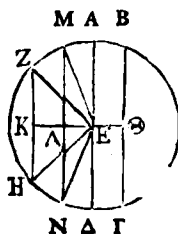
## PROPOSITIO XV.

Εν κύκλῳ μάλιστα μὲν ἴστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἴστί.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μάλιστα μὲν ἴστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore major est.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, centrum vero Ε, et propinquior quidem ipsi Ε centro sit ΒΓ, remotior vero ΖΗ; dico maximam esse ΑΔ, majorem vero ΒΓ ipsâ ΖΗ.



Ἠχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε<sup>3</sup> κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἴστιν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΑΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Ducantur enim ab Ε centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. Et quoniam propinquior quidem centro est ΒΓ, remotior vero ΖΗ, major igitur ΕΚ ipsâ ΕΘ. Ponatur ipsi ΕΘ æqualis ΕΛ, et per Α ipsi ΕΚ ad rectos ducta ΑΜ producatur ad Ν, et jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

## PROPOSITION XV.

Dans un cercle le diamètre est la plus grande de toutes les droites, et parmi les autres, celle qui est plus près du centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Soit le cercle ΑΒΓΔ; que ΑΔ en soit le diamètre, et Ε le centre, et que ΒΓ soit plus près du centre que ΖΗ; je dis que la droite ΑΔ est la plus grande, et que ΒΓ est plus grand que ΖΗ.

Menons du centre Ε les droites ΕΘ, ΕΚ perpendiculaires aux droites ΒΓ, ΖΗ. Et puisque ΒΓ est plus près du centre que ΖΗ, la droite ΕΚ est plus grande que ΕΘ (déf. 5. 3). Faisons la droite ΕΛ égale à ΕΘ, par le point Α menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΕΚ, prolongeons-la vers Ν, et joignons ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἰπεί ἴση ἰστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἰστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἰπεί ἴση ἰστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΕΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἰστὶν. Αλλ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονες εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἰστί. Ἰση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἰστί. Καὶ ἰπεί δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὲρ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων<sup>5</sup>. βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσιως τῆς ΖΗ μείζων ἰστὶν. Αλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἰδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἰστὶν. Μιγίστη μὲν<sup>6</sup> ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Εν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam æqualis est ΕΘ ipsi ΕΛ, æqualis est et ΒΓ ipsi ΜΝ. Rursus, quoniam æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΜ, et ΕΔ ipsi ΕΝ, ergo ΕΔ ipsis ΜΕ, ΕΝ æqualis est. Sed ΜΕ, ΕΝ ipsâ ΜΝ majores sunt, et ΑΔ ipsâ ΜΝ major est. Æqualis autem ΜΝ ipsi ΒΓ, ergo ΑΔ ipsâ ΒΓ major est. Et quoniam duæ ΜΕ, ΕΝ duabus ΖΕ, ΕΗ æquales sunt, et angulus ΜΕΝ angulo ΖΕΗ major; basis igitur ΜΝ basi ΖΗ major est. Sed ΜΝ ipsi ΒΓ ostensa est æqualis, et ΒΓ ipsâ ΖΗ major est. Maxima quidem igitur ΑΔ diameter, major vero ΒΓ ipsâ ΖΗ. In circulo igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

PROPOSITIO XVI.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ἑρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγχεμένη ἐκτὸς πεσίνεται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφρείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπίπτει<sup>1</sup>· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάτης γωνίας ἑξείας<sup>2</sup> εὐθυγράμμου μείζων ἰστὶν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Recta diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta extra cadet circumulum; et in locum inter et rectam et circumferentiam altera recta non cadet; et quidem semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus vero minor.

Puisque ΕΘ est égal à ΕΛ, la droite ΒΓ est égale à ΜΝ (14. 3). De plus, puisque ΑΕ est égal à ΕΜ, et ΕΔ égal à ΕΝ, la droite ΕΔ est égale aux droites ΜΕ, ΕΝ. Mais les droites ΜΕ, ΕΝ sont plus grandes que ΜΝ; donc ΑΔ est plus grand que ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΒΓ: donc ΑΔ est plus grand que ΒΓ. Et puisque les deux droites ΜΕ, ΕΝ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΗ, et que l'angle ΜΕΝ est plus grand que l'angle ΖΕΗ, la base ΜΝ est plus grande que la base ΖΗ (24. 1). Mais on a démontré que ΜΝ est égal à ΒΓ; donc ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc le diamètre ΑΔ est la plus grande de toutes les droites, et ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

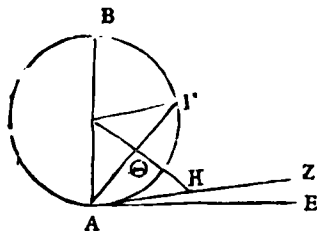
Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée de l'une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite, et l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ  
διάμετρον τὴν ΑΒ· λίγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ  
πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγχιμένη ἐκτὸς πεσεῖται  
τοῦ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτεῖτω ἐντός, ὡς  
ἢ ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ.

Sit circulus  $AB\Gamma$  circa centrum  $\Delta$  et diame-  
trum  $AB$ ; dico ipsam ab  $A$  ad  $AB$  ad rectos ab  
extremitate ductam extra cadere circulum.

Non enim, sed si possibile, cadat intus, ut  $\Delta\Gamma$ , et jungatur  $\Delta\Gamma$ .



Επὶ ἴση ἔστιν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  
ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἔστιν<sup>3</sup>. Ὄρθῃ δὲ ἡ  
ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου  
δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἰεὶ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ  
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον.  
Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ἰρθάς  
ἀγομένη ἐντὸς πιστεύεται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ  
δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς  
ἄρα πιπτάτω, ὡς ἡ ΑΕ.

Λίγω δὴ<sup>5</sup> ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε  
ΑΕ υἱότητος καὶ τῆς ΓΘΑ περιφειρίας, ἰτίρα ὠ-  
θεῖα οὐ περιμπισεῖται.

Quoniam æqualis est  $\Delta A$  ipsi  $\Delta \Gamma$ , et angulus  $\Delta A \Gamma$  angulo  $\Gamma A \Delta$  æqualis est. Rectus autem  $\Delta A \Gamma$ , rectus igitur et  $\Gamma A \Delta$ ; trianguli utique  $\Gamma A \Delta$  duo anguli  $\Delta A \Gamma$ ,  $\Gamma A \Delta$  duobus rectis æquales sunt, quod est impossibile. Non igitur ab  $A$  puncto, ipsi  $BA$  ad rectos ducta intra cadet circumlm. Similiter utique ostendemus, neque in circumferentiam; extra igitur cadet, ut  $AE$ .

Dico etiam in locum inter  $AE$  rectam et  $\Gamma\Theta A$  circumferentiam alteram rectam non cadere.

Soit le cercle  $AB\Gamma$  ayant pour centre le point  $\Delta$ , et pour diamètre la droite  $AB$ ; je dis que la perpendiculaire menée du point  $A$  à la droite  $AB$ , tombe hors du cercle.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe en-dedans comme  $AT$ , et joignons  $\Delta T$ .

Puisque  $\Delta A$  est égal à  $\Delta \Gamma$ , l'angle  $\Delta A \Gamma$  est égal à l'angle  $A \Gamma \Delta$  (5. 1); mais l'angle  $\Delta A \Gamma$  est droit; donc l'angle  $A \Gamma \Delta$  est droit aussi; donc les angles  $\Delta A \Gamma$ ,  $A \Gamma \Delta$  du triangle  $A \Gamma \Delta$  sont égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (17. 1); donc la perpendiculaire menée du point  $A$  au diamètre  $AB$ , ne tombe point dans le cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe point dans la circonférence; donc elle tombe en-dehors comme  $AE$ .

Je dis encore qu'aucune droite ne peut tomber dans l'espace qui est entre la droite AE et la circonférence rOA.

Εἰ γὰρ δυνατόν, περιπίπτειν ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἔχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ. μίζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἰσὴ δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μίζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μίζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα περιμπεσιῖται.

Λίγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιχομένη ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας<sup>δ</sup> εὐθυγράμμου μίζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιχομένη ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστὶ τις γωνία εὐθύγραμμος, μίζων μὲν τῆς περιχομένης ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα<sup>δ</sup> περιμπεσιῖται, ὅτις ποιήσει μίζονα μὲν τῆς περιχομένης ὑπὸ τε

Si enim possibile, cadat ut ΖΑ, et ducatur a puncto Δ ad ΖΑ perpendicularis ΔΗ.

Et quoniam rectus est ΑΗΔ, minor autem recto ipse ΔΑΗ; major igitur ΑΔ ipsa ΔΗ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΔΘ; major igitur ΔΘ ipsa ΔΗ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur in locum inter rectam et circumferentiam altera recta cadet.

Dico et quidem semicirculi angulum, comprehensum et a ΒΑ rectâ et ΓΘΑ circumferentiâ, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero comprehensum et a ΓΘΑ circumferentiâ et ΑΕ rectâ, quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, major quidem comprehenso et a ΒΑ rectâ et ΓΘΑ circumferentiâ, minor vero comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiâ et ΑΕ rectâ, in locum inter et ΓΘΑ circumferentiam et ΑΕ rectam recta cadet, quæ faciet angulum a rectis comprehensum, majorem quidem comprehenso et a ΒΑ rectâ

Car si cela est possible, qu'elle tombe comme ΖΑ, et du point Δ menons ΔΗ perpendiculaire à ΖΑ.

Puisque l'angle ΑΗΔ est droit, et que l'angle ΔΑΗ est plus petit qu'un droit, la droite ΑΔ est plus grande que ΔΗ. Mais ΑΔ est égal à ΔΘ; donc ΔΘ est plus grand que ΔΗ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc une droite ne peut pas tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence.

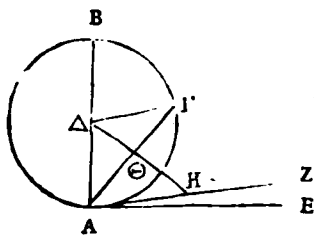
Je dis enfin, que l'angle du demi-cercle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ est plus grand que tout angle rectiligne aigu, et que l'angle restant compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ est plus petit que tout angle rectiligne aigu.

Car s'il y a un angle rectiligne plus grand que l'angle compris par la droite ΒΑ et par la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, dans l'espace compris entre la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, il y aura une droite qui fera un angle plus grand



τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐ-  
θειῶν περιχομένην, ἐλάττωτα δὲ τῆς περιχομέ-  
νης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐ-  
θείας. Οὐ παρεμπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιχο-  
μένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ  
περιφερείας ἴσται μείζων ἐξεία ὑπὸ εὐθειῶν περι-  
χομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττω τῆς περιχομένης  
ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας.  
Οπερ ἔδει δεῖξαι.

et ΓΘΑ circumferentiā, minorem vero com-  
prehensio et ΓΘΑ circumferentiā et AE rectā.  
Non cadit autem; non igitur comprehenso an-  
gulo et a BA rectā et ΓΘΑ circumferentiā erit  
major acutus a rectis comprehensus, neque  
quidem minor comprehenso et a ΓΘΑ circum-  
ferentiā et AE rectā. Quod oportebat ostendere.



## ΠΟΡΙΣΜΑ.

## COROLLARIUM.

Εκ δὲ τούτου<sup>10</sup> φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ  
τοῦ κύκλου πρὸς ἑκάς ἀπ' ἑκρας ἀγομένη  
ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ἔτι εὐθεῖα κύκλου  
καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημείον. Επεὶ δὲ περ  
καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῶ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ  
πίπτουσα ἐδείχθη<sup>11</sup>.

Ex hoc ulique manifestum est rectam diame-  
tro circuli ad rectos ab extremitate ductam con-  
tingere circulum; et rectam circulum in unico  
contingere puncto. Quoniam et recta in duobus  
ipsi occurrens intra ipsum cadere ostensa est.

que l'angle compris par la droite BA et la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite AE. Mais il n'y en a point; donc il n'y a point d'angle aigu, compris par les droites, plus grand que l'angle compris par la droite BA et la circonférence ΓΘΑ, ni d'angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite AE. Ce qu'il fallait démontrer.

## COROLLAIRE.

De là il est évident que la droite perpendiculaire au diamètre, et menée d'une de ses extrémités, touche la circonférence, et que cette droite ne la touche qu'en un seul point. Puisqu'il a été démontré que la droite qui rencontre un cercle en deux points entre dans ce cercle (2. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

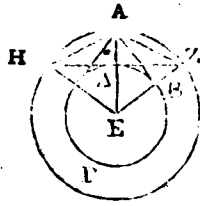
PROPOSITIO XVII.

Απὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἑφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω τὸ μὲν δοθεὶς σημεῖον τὸ Α, ὃ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἑφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ circulum datum contingat.

Sit datum quidem punctum Α, datus vero circulus ΒΓΔ; oportet igitur ab Α puncto rectam lineam ducere, quæ ΒΓΔ circulum contingat.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρον μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἑφαπτομένη ἔκται ἡ ΑΒ.

Επεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ

Sumatur enim centrum circuli Ε; et jungatur ΑΕ, et centro quidem Ε, intervallo vero ΕΑ circulus describatur ΑΖΗ, et a Α ipsi ΕΑ ad rectos ducatur ΑΖ, et jungantur ΕΖ, ΑΒ; dico quod ab Α puncto ipsum ΒΓΔ circulum contingens ducta est ipsa ΑΒ.

Quoniam enim Ε centrum est ΒΓΔ, ΑΖΗ circulorum, æqualis igitur est quidem ΕΑ ipsi ΕΖ,

PROPOSITION XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

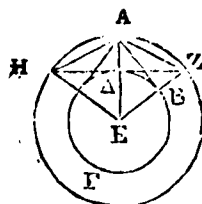
Soit Α le point donné, et ΒΓΔ le cercle donné; il faut mener du point Α une ligne droite qui touche le cercle ΒΓΔ

Prenons le centre Ε de ce cercle, joignons ΑΕ, du centre Ε et de l'intervalle ΕΑ, décrivons le cercle ΑΖΗ (dém. 3); par le point Α menons ΑΖ perpendiculaire à ΕΑ, et joignons ΕΖ, ΑΒ; je dis que la droite ΑΒ, menée du point Α, touche le cercle ΒΓΔ.

Car puisque le point Ε est le centre des cercles ΒΓΔ, ΑΖΗ, la droite ΕΑ est

ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυοὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν<sup>2</sup> πρὸς τῇ Ε· βάσεις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῇ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ<sup>3</sup>. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. Καὶ

et ΕΔ ipsi ΕΒ; duæ utique ΑΕ, ΕΒ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, et angulum communem comprehendunt ad Ε; basis igitur ΔΖ basi ΑΒ æqualis est; et ΕΔΖ triangulum ΕΒΑ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis; æqualis igitur ΕΔΖ ipsi ΕΒΑ. Rectus autem ΕΔΖ, rectus igitur et ΕΒΑ; et est ΕΒ ex cen-



ἐστὶν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ἑρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΑ<sup>4</sup> κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος<sup>5</sup> σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἔκται ἡ ΑΒ. Ὅπρι ἴδει ποιῆσαι.

tro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum; ΑΒ igitur contingit ΒΓΑ circulum.

A dato igitur puncto Α datum circulum ΒΓΔ contingens recta linea ducta est ΑΒ. Quod oportebat facere.

égale à ΕΖ, et ΕΔ égal à ΕΒ; donc les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΔ; mais ces droites comprennent un angle commun en Ε; donc la base ΔΖ est égale à la base ΑΒ, le triangle ΕΔΖ égal au triangle ΕΒΑ, et les angles restants égaux aux angles restants (4. 1); donc l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΕΒΑ. Mais l'angle ΕΔΖ est droit; donc l'angle ΕΒΑ est droit aussi. Mais la droite ΕΒ est menée par le centre, et la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une des extrémités du diamètre touche le cercle (16. 3); donc la droite ΑΒ touche le cercle ΒΓΑ.

Donc la ligne droite ΒΑ, menée par le point donné Α, touche le cercle ΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

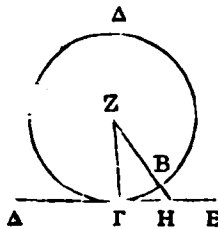
PROPOSITIO XVIII.

Εάν κύκλου ἰφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφ' ἣν ἐπιζυχῇ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζυχθῆσα κάθετος ἴσται ἐπὶ τὴν ἰφαπτομένην<sup>1</sup>.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἰφαπτίσθω<sup>2</sup> τις εὐθεΐα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζυχῶ ἡ ΖΓ· λίγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετος ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, conjungens perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli Ζ, et a Ζ ad Γ conjungatur ΖΓ; dico ΖΓ perpendicularem esse ad ΔΕ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

Επεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθὴ ἐστὶν, ὁξεία ἔρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλειυρὰ ὑποτείνει, μείζων ἔρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἔρα καὶ<sup>3</sup> ΖΒ τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ

Si enim non, ducatur a Ζ ad ΔΕ perpendicularis ΖΗ.

Quoniam igitur ΖΗΓ angulus est rectus, acutus igitur est ΖΓΗ; majorem autem angulum majus latus subtendit, major igitur ΖΓ ipsâ ΖΗ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; major igitur et ΖΒ ipsâ ΖΗ, minor majore, quod est impossibile.

PROPOSITION XVIII.

Si une droite touche un cercle, et si du centre on mène une droite au point de contact, cette droite sera perpendiculaire à la tangente.

Que la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et du point Ζ au point Γ menons ΖΓ; je dis que la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ.

Car si elle ne l'est pas, du point Ζ menons ΖΗ perpendiculaire à ΔΕ (12. 1).

Puisque l'angle ΖΗΓ est droit, l'angle ΖΓΗ est aigu (17. 1); mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (19. 1); donc ΖΓ est plus grand que ΖΗ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc la droite ΖΒ est plus grande que la droite ΖΗ,

ἴσθιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστίν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστίν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἰξῆς.

Non igitur ZH perpendicularis est ad ΔΕ. Similiter utique ostendemus neque aliam quampiam præter ipsam ΖΓ; ergo ΖΓ perpendicularis est ad ΔΕ. Si igitur circulum, etc.

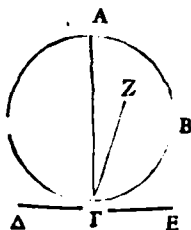
## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Εὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἀπείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἔστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad rectos recta linea ducatur, in ducta erit centrum circuli.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et a Γ ipsi ΔΕ ad rectos ducatur ΓΑ; dico in ΑΓ esse centrum circuli.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΖ.

Non enim, sed si possibile, sit Ζ, et jungatur ΓΖ.

la plus petite que la plus grande, ce qui est impossible; donc ZH n'est pas une perpendiculaire à ΔΕ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre, excepté ΖΓ; donc ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ. Donc, etc.

## PROPOSITION XIX.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une ligne droite perpendiculaire à la tangente, le centre du cercle sera dans la droite qui aura été menée.

Car qu'une droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ, et du point Γ menons ΓΑ perpendiculaire à ΔΕ; je dis que le centre du cercle est dans ΑΓ.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, que le centre soit Ζ, et joignons ΓΖ.

Ἐπὶ οὖν<sup>3</sup> κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις εὐθεΐα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀρὴν πίπτει ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἰσάκτων τῇ μίζονι, ὅπῃ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΔΕ, a centro autem ad contactum ducta est ΖΓ, ΖΓ ergo perpendicularis est ad ΔΕ; rectus igitur est ΖΓΕ. Est autem et ΑΓΕ rectus; æqualis igitur est ΖΓΕ ipsi ΑΓΕ, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Ζ centrum est ΑΒΓ circuli. Similiter utique ostendemus, neque aliud aliquod esse præterquam in ipsâ ΑΓ. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερίᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερίᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίῳ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

In circulo, ad centrum angulus duplus est ipsius ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

Sit circulus ΑΒΓ, et ad centrum quidem ejus angulus sit ΒΕΓ, ad circumferentiam vero ipsi ΒΑΓ, habeant autem eandem circumferentiam pro basi ΒΓ; dico duplum esse ΒΕΓ angulum ipsius ΒΑΓ.

Puisque la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΖΓ a été mené du centre au point de contact, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ (18. 3); donc l'angle ΖΓΕ est droit. Mais l'angle ΑΓΕ est droit aussi; donc l'angle ΖΓΕ est égal à l'angle ΑΓΕ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point Ζ n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point ne peut l'être, à moins qu'il ne soit dans ΑΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

Soit le cercle ΑΒΓ, que l'angle ΒΕΓ soit au centre de ce cercle, que l'angle ΒΑΓ soit à la circonférence, et que ces angles aient pour base le même arc ΒΓ; je dis que l'angle ΒΕΓ est double de l'angle ΒΑΓ.

Επιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Επεὶ οὖν ἴση ἵστιν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλασθαί εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἵστί διπλῇ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἵστί διπλῇ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἵστί διπλῇ.

Juncta enim AE producat ad Z.

Quoniam igitur æqualis est EA ipsi EB, æqualis et angulus EAB ipsi EBA; anguli igitur EAB, EBA ipsius EAB dupli sunt. Æqualis autem BEZ ipsis EAB, EBA; et BEZ igitur ipsius EAB est duplus. Propter eadem utique et ZEG ipsius EAG est duplus; totus igitur BEG totius BAG est duplus.



Κεκλίσθω δὲ πάλιν, καὶ ἴστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκτελῆσθω ἐπὶ τὸ Η. Ομοίως δὲ διίξομεν, ὅτι διπλῇ ἵστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὅν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῇ ἵστί τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῇ ἵστί τῆς ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Inclinetur autem rursus, et sit alter angulus BΔΓ, et juncta ΔΕ producat ad Η. Similiter utique ostendemus duplum esse ΗΕΓ angulum ipsius ΗΔΓ, quorum ΗΕΒ duplus est ipsius ΗΔΒ; reliquus igitur ΒΕΓ duplus est ipsius ΒΔΓ. In circulo igitur, etc.

Joignons la droite AE, et prolongeons-la vers Z.

Puisque EA est égal à EB, l'angle EAB est égal à l'angle EBA (5. 1); donc les angles EAB, EBA sont doubles de l'angle EAB. Mais l'angle BEZ est égal aux angles EAB, EBA (32. 1); donc l'angle BEZ est double de l'angle EAB. L'angle ZEG est double de l'angle EAG par la même raison; donc l'angle entier BEG est double de l'angle entier BAG.

Que l'angle BAG change de position, et qu'il soit un autre angle BΔΓ; ayant joint la droite ΔΕ, prolongeons-la vers Η. Nous démontrerons semblablement que l'angle HER est double de l'angle ΗΔΓ; mais l'angle HEB est double de l'angle ΗΔΒ; donc l'angle restant BER est double de l'angle restant ΒΔΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

PROPOSITIO XXI.

Εν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

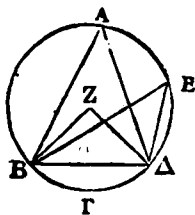
Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἴστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γάρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

In circulo in eodem segmento anguli æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in eodem segmento ΒΑΕΔ anguli sint ΒΑΔ, ΒΕΔ; dico ΒΑΔ, ΒΕΔ angulos æquales inter se esse.

Sumatur enim ΑΒΓΔ circuli centrum, et sit Ζ, et jungantur ΒΖ, ΖΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφέρειᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίῳ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam quidem ΒΖΔ angulus ad centrum est, ipse vero ΒΑΔ ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam ΒΓΔ pro basi; ergo οΒΖΔ angulus duplus est ipsius ΒΑΔ. Propter eadem utique ΒΖΔ et ipsius ΒΕΔ est duplus; æqualis igitur ΒΑΔ ipsi ΒΕΔ. In circulo igitur, etc.

PROPOSITION XXI.

Dans un cercle, les angles placés dans le même segment sont égaux entr'eux.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ soient dans le même segment ΒΑΕΔ; je dis que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ sont égaux entr'eux.

Car prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit Ζ, et joignons ΒΖ, ΖΔ.

Puisque l'angle ΒΖΔ est au centre, que l'angle ΒΑΔ est à la circonférence, et que ces deux angles ont pour base le même arc ΒΓΔ, l'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΑΔ (20. 3). L'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΕΔ, par la même raison; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΒΕΔ (not. 7). Donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

## PROPOSITIO XXII.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

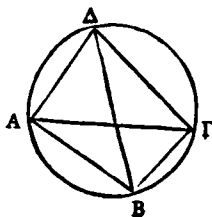
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετραπλευρον ἴστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

In circulis quadrilaterorum oppositi anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso quadrilaterum sit ΑΒΓΔ; dico oppositos ipsius angulos duobus rectis æquales esse.

Jungantur ΑΓ, ΒΔ.



Ἐπὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἰση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ,

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ipsius ΑΒΓ trianguli tres anguli ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus rectis æquales sunt. Æqualis autem quidem ΓΔΒ ipsi ΒΑΓ, etenim in eodem sunt segmento ΒΑΔΓ, et ΑΓΒ ipsi ΑΔΒ, etenim in eodem sunt segmento ΑΔΓΒ. Totus igitur ΑΔΓ ipsis ΒΑΓ, ΑΓΒ æqualis est. Communis addatur ΑΒΓ; ergo ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ

## PROPOSITION XXII.

Les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que le quadrilatère ΑΒΓΔ lui soit inscrit; je dis que les angles opposés de ce quadrilatère sont égaux à deux droits.

Joignons ΑΓ, ΒΔ.

Puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ du triangle ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΒΑΓ (21. 3), car ils sont dans le même segment ΒΑΔΓ; et l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, car ils sont dans le même segment ΑΔΓΒ; donc l'angle entier ΑΔΓ est égal aux angles ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ajoutons l'angle

ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα<sup>3</sup> δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis ABΓ, ΑΔΓ æquales sunt. Sed ABΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ABΓ, ΑΔΓ igitur duobus rectis æquales sunt. Similiter utique ostendemus, et ΒΑΔ, ΔΓΒ angulos duobus rectis esse. In circulis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

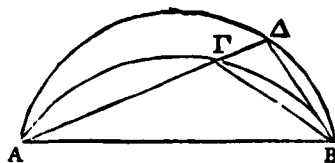
PROPOSITIO XXIII.

Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὁμοία καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται' ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Super eadem rectâ duo segmenta circularum similia et inæqualia non constituentur ex eadem parte.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὁμοία καὶ ἄνισα συν-εστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

Si enim possibile, ad eandem rectam ΑΒ duo segmenta circularum similia et inæqualia constituentur ex eadem parte ΑΓΒ, ΑΔΒ, et ducatur ΑΓΔ, et jungantur ΓΒ, ΔΒ.



Επεὶ οὖν ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμήμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὁμοία δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δι-

Quoniam igitur simile est ΑΓΒ segmentum ipsi ΑΔΒ segmento, similia autem segmenta

commun ABΓ; les angles ABΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ seront égaux aux angles ABΓ, ΑΔΓ. Mais les angles ABΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits; donc les angles ABΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux angles droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΔ, ΔΓΒ sont aussi égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Sur une même droite, on ne peut pas décrire du même côté deux segments de cercles semblables et inégaux.

Car si cela est possible, décrivons du même côté, sur la même droite ΑΒ les deux segments de cercles ΑΓΒ, ΑΔΒ semblables et inégaux; menons ΑΓΔ, et joignons ΓΒ, ΔΒ.

Puisque le segment ΑΓΒ est semblable au segment ΑΔΒ, et que les segments

# 164 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

χόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἐξῆς.

circularum sunt quæ capiunt angulos æquales; æqualis igitur est ΑΓΒ angulus ipsi ΑΔΒ, exterior interiori, quod est impossibile. Non igitur super eadem rectâ, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

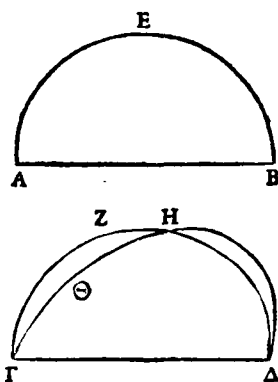
Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω

## PROPOSITIO XXIV.

Super æqualibus rectis similia segmenta circularum æqualia inter se sunt.

Sint enim super æqualibus rectis ΑΒ, ΓΔ similia segmenta circularum ipsa ΑΕΒ, ΓΖΔ;



ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα τῇ ΓΖΔ τμήματι.

dico æquale esse ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ segmento.

de cercles semblables sont ceux qui recoivent des angles égaux (déf. 11. 3 ), l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, l'angle intérieur à l'angle extérieur ; ce qui est impossible ( 16. 1 ). Donc , etc.

## PROPOSITION XXIV.

Sur des droites égales , les segments de cercles semblables sont égaux entr'eux.

Que sur les droites égales ΑΒ, ΓΔ soient décrits les segments de cercles semblables ΑΕΒ, ΓΖΔ ; je dis que le segment ΑΕΒ est égal au segment ΓΖΔ.

Εφαρμοζομένου γάρ τοῦ AEB τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ AB ὑθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν AB τῇ ΓΔ· τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης<sup>2</sup>, ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ AB ὑθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἥτοι ἐντὸς αὐτοῦ πιεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ<sup>3</sup>, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB ὑθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἴσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων ὑθειῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Congruente enim AEB segmento ipsi ΓΖΔ, et posito quidem Α puncto super Γ, rectā vero AB super ΓΔ, congruet et Β punctum ipsi Δ puncto, propterea quod æqualis est AB ipsi ΓΔ; ipsā autem AB ipsi ΓΔ congruente, congruet et AEB segmentum ipsi ΓΖΔ. Si enim AB recta ipsi ΓΔ congruat, segmentum autem AEB ipsi ΓΖΔ non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel situm mutabit ut ΓΘΗΔ, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis Γ, Η, Δ, quod est impossibile. Non igitur congruente AB rectā ipsi ΓΔ non congruet et AEB segmentum ipsi ΓΖΔ. Congruet igitur, et æquale ipsi erit. Ergo super æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπὲρ ἐστὶ τμήμα.

Circuli segmento dato, describere circulum cujus est segmentum.

Car le segment AEB étant appliqué sur le segment ΓΖΔ, le point Α étant posé sur le point Γ, et la droite AB sur la droite ΓΔ, le point Β tombera sur le point Δ, parce que la droite AB est égale à la droite ΓΔ; mais la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB coïncidera avec le segment ΓΖΔ. Car si la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB ne coïncidait pas avec le segment ΓΖΔ, ou il tomberait en dedans, ou en dehors, ou bien prenant une position comme ΓΘΗΔ, un cercle couperait un cercle en plus de deux points, aux points Γ, Η, Δ, ce qui est impossible (10.3). Donc la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AΒΔ ne peut pas ne pas coïncider avec le segment ΓΖΔ; donc il coïncide avec lui, et lui est par conséquent égal. Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

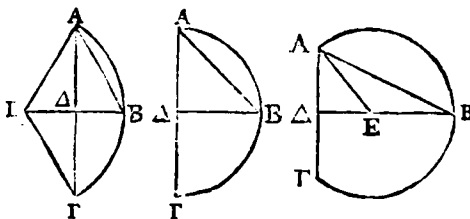
Un segment de cercle étant donné, décrire le cercle dont il est le segment.

Εστω τὸ δοθὲν τμήμα κύκλου, τὸ  $AB\Gamma$ . δεῖ δὴ<sup>1</sup> προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ  $ΑΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $\Delta$ , καὶ ῥχθω ἀπὸ τοῦ  $\Delta$  σημείου τῇ  $ΑΓ$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $\Delta B$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $AB$ . ἡ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνία ἂρα<sup>2</sup> τῆς ὑπὸ  $BA\Delta$  ἢτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττω.

Sit datum circuli segmentum  $AB\Gamma$ ; oportet igitur describere circulum, cujus est  $AB\Gamma$  segmentum.

Secetur enim  $ΑΓ$  bifariam in  $\Delta$ , et ducatur a  $\Delta$  puncto ipsi  $ΑΓ$  ad rectos  $\Delta B$ , et jungatur  $AB$ . Ergo  $AB\Delta$  angulus ipso  $BA\Delta$  vel major est, vel æqualis, vel minor,



Εστω πρότερον μείζων, καὶ συνστάτω πρὸς τῇ  $BA$  εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $A$ , τῇ ὑπὸ  $AB\Delta$  γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ  $BAE$ , καὶ διήχθω ἡ  $\Delta B$  ἐπὶ τὸ  $E$ <sup>3</sup>, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΕΓ$ . Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BAE$ , ἴση ἂρα ἐστὶ καὶ ἡ  $BE$  εὐθεῖα εὐθείᾳ<sup>4</sup> τῇ  $EA$ . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $\Delta Γ$ , κοινὴ δὲ ἡ  $\Delta E$ , δύο δὲ αἱ  $ΑΔ$ ,  $\Delta E$  δυοῖς ταῖς  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta E$  ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $ΑΔE$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\GammaΔE$  ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα<sup>6</sup> βάσις<sup>6</sup> ἂρα

Sit primum major, et constituatur ad  $BA$  rectam, et ad punctum in eâ  $A$ , ipsi  $AB\Delta$  angulo æqualis ipse  $BAE$ , et producat  $\Delta B$  ad  $E$ , et jungatur  $ΕΓ$ . Et quoniam igitur æqualis est  $ABE$  angulus ipsi  $BAE$ , æqualis utique est et  $BE$  rectæ  $EA$ . Et quoniam æqualis est  $ΑΔ$  ipsi  $\Delta Γ$ , communis autem  $\Delta E$ , duæ utique  $ΑΔ$ ,  $\Delta E$  duabus  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta E$  æquales sunt, utraque utrique, et angulus  $ΑΔE$  angulo  $\GammaΔE$  est æqualis; rectus enim uterque; basis igitur  $AE$  basi  $ΓE$  est æqua-

Soit  $AB\Gamma$  le segment de cercle donné ; il faut décrire le cercle dont  $AB\Gamma$  est le segment.

Coupons la droite  $ΑΓ$  en deux parties égales au point  $\Delta$  (10. 1), du point  $\Delta$  menons  $\Delta B$  perpendiculaire à  $ΑΓ$ , et joignons  $AB$  (11. 1); l'angle  $AB\Delta$  sera ou plus grand que l'angle  $BA\Delta$ , ou il lui sera égal, ou il sera plus petit.

Qu'il soit d'abord plus grand ; sur la droite donnée  $BA$ , et au point  $A$  de cette droite faisons l'angle  $BAE$  égal à l'angle  $AB\Delta$  (23. 1); prolongeons  $\Delta B$  vers  $E$ , et joignons  $ΕΓ$ . Puisque l'angle  $ABE$  est égal à l'angle  $BAE$ , la droite  $BE$  est égale à la droite  $EA$  (6. 1). Et puisque  $ΑΔ$  est égal à  $\Delta Γ$ , et que la droite  $\Delta E$  est commune, les deux droites  $ΑΔ$ ,  $\Delta E$  sont égales aux deux droites  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta E$ , chacune à chacune ; mais l'angle  $ΑΔE$  est égal à l'angle  $\GammaΔE$ , car ils sont droits l'un et l'autre

ἡ ΑΕ βάσι τῇ ΓΕ ἴσιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ εἰδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἴσιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ<sup>8</sup> Ε, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος κύκλος<sup>9</sup>. Κύκλου ἄρα τμήματος δεθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμήμα ἑλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ<sup>10</sup> τυγχάνειν.

Ομοίως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ<sup>11</sup> τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γινομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπιπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Εὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττω ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α<sup>12</sup>, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πιστεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ ὡς τὸ Ε<sup>13</sup>, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

lis. Sed ΑΕ ipsi ΕΒ ostensa est æqualis; et ΒΕ igitur ipsi ΓΕ est æqualis; tres igitur ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ æquales inter se sunt; ergo centro Ε, intervallo autem unâ ipsarum ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est ΑΒΓ segmentum minus esse semicirculo, propterea quod Ε centrum extra ipsum cadit.

Similiter et si angulus ΑΒΔ æqualis sit ipsi ΒΑΔ, ipsâ ΑΔ æquali factâ alterutri ipsarum ΒΔ, ΔΓ, tres igitur ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ æquales inter se erunt, et erit autem Δ centrum completi circuli, et erit utique ΑΒΓ semicirculus.

Si autem ΑΒΔ minor sit ipso ΒΑΔ, et si constituamus ad ΒΑ rectam, et ad punctum in eâ Α, ipsi ΑΒΔ angulum æqualem, intra ΑΒΓ segmentum cadet centrum in ΔΒ, ut Ε, et erit utique ΑΒΓ segmentum majus semicirculo.

donc la base ΑΕ est égale à la base ΓΕ (4. 1). Mais ΑΕ a été démontré égal à ΕΒ; donc ΒΕ est égal à ΓΕ; donc les trois droites ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ sont égales entre elles; donc le cercle décrit du centre Ε et d'un intervalle égal à une des droites ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, passera par les autres points, et le cercle sera décrit. Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment (9. 3). Il est évident que le segment ΑΒΓ est plus petit qu'un demi-cercle; car le centre Ε tombe hors du segment.

Semblablement, si l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΒΑΔ, la droite ΑΔ étant égale à chacune des droites ΒΔ, ΔΓ, les trois droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ seront égales entre elles; donc le point Δ sera le centre du cercle entier (9. 3), et le segment ΑΒΓ sera évidemment un demi-cercle.

Mais si l'angle ΑΒΔ est plus petit que l'angle ΒΑΔ, et si sur la droite ΒΑ, et au point Α de cette droite, nous faisons l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΑΒΔ, le centre tombera en dedans du segment ΑΒΓ dans la droite ΔΒ, comme en Ε, et le segment sera évidemment plus grand qu'un demi-cercle.

168 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγί-  
γραπται ὁ κύκλος, οὗ πέρ ἐστι τὸ τμήμα<sup>14</sup>. Ὅπερ  
ἔδει ποιῆσαι.

Circuli igitur segmento dato, descriptus est  
circulus cujus est segmentum. Quod oportebat  
facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

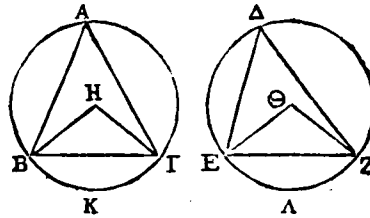
PROPOSITIO XXVI.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων  
περιφερειῶν βεβῆκασιν, ἴαντι πρὸς τοῖς κέντροις  
ἴαντι πρὸς ταῖς περιφερίαις ὥς βεβηκυῖαι.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqua-  
libus circumferentiis insistent, sive ad centra,  
sive ad circumferentias sint insistentes.

Ἐστωσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ  
ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι<sup>2</sup>

Sint enim æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et  
in ipsis quidem ad centra æquales anguli



ἴστωσαν, αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς  
περιφερίαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση  
ἴσιν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερίᾳ.

sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, et ad circumferentias ipsi  
ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico æqualem esse ΒΚΓ circum-  
ferentiam ipsi ΕΛΖ circumferentiæ.

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.

Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il  
est le segment ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Dans des cercles égaux, les angles égaux s'appuient sur des arcs égaux,  
soit qu'ils soient placés aux centres, ou bien aux circonférences.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, que les angles égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ soient aux  
centres, et que les angles égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ soient aux circonférences ; je dis que  
l'arc ΒΚΓ est égal à l'arc ΕΛΖ.

Joignons ΒΓ, ΕΖ.

## LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 169

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὲ αἱ  $BH$ ,  $HΓ$  δυσὶν ταῖς  $EΘ$ ,  $ΘZ$  ἴσαι εἰσὶν<sup>3</sup>. καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ  $H$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Θ$  ἴση ἐστὶ<sup>4</sup>. βάσεις ἄρα ἡ  $BΓ$  βάσει τῇ  $EZ$  ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ  $A$  γωνία τῇ πρὸς τῷ  $Δ$ , ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $BAΓ$  τμήμα τῷ  $EΔZ$  τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν  $BΓ$ ,  $EZ$ · τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὁμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν<sup>6</sup>. ἴσον ἄρα τὸ  $BAΓ$  τμήμα τῷ  $EΔZ$  τμήματι<sup>7</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ  $ABΓ$  κύκλος ὅλῳ τῷ  $ΔEZ$  κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα  $BKΓ$  τμήμα λοιπῷ  $EΔZ$  ἴσον· ἡ ἄρα  $BKΓ$  περιφέρειά ἐστὶν ἴση τῇ  $EΔZ$  περιφερείᾳ<sup>8</sup>. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam æquales sunt  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  circuli, æquales sunt ipsæ ex centris; duæ igitur  $BH$ ,  $HΓ$  duabus  $EΘ$ ,  $ΘZ$  æquales sunt; et angulus ad  $H$  angulo ad  $Θ$  æqualis est; basis igitur  $BΓ$  basi  $EZ$  est æqualis. Et quoniam æqualis est ad  $A$  angulus ipsi ad  $Δ$ , simile igitur est  $BAΓ$  segmentum ipsi  $EΔZ$  segmento, et sunt super æquales rectas  $BΓ$ ,  $EZ$ ; ipsa autem super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt; æquale igitur  $BAΓ$  segmentum ipsi  $EΔZ$  segmento. Est autem et totus  $ABΓ$  circulus toti  $ΔEZ$  circulo æqualis; reliquum igitur  $BKΓ$  segmentum reliquo  $EΔZ$  æquale; ergo  $BKΓ$  circumferentia æqualis est  $EΔZ$  circumferentiæ. Si igitur in æqualibus, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἢ ἀν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἢ ἀν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥς βεβηκυῖαι.

### PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis ipsi æqualibus circumferentiis insistentes anguli æquales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes.

Puisque les cercles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites  $BH$ ,  $HΓ$  sont égales aux deux droites  $EΘ$ ,  $ΘZ$ ; mais l'angle en  $H$  est égal à l'angle en  $Θ$ ; donc la base  $BΓ$  est égale à la base  $EZ$  (4. 1). Mais l'angle en  $A$  est égal à l'angle en  $Δ$ ; donc le segment  $BAΓ$  est semblable au segment  $EΔZ$  (déf. 11. 3); mais ils sont placés sur les droites égales  $BΓ$ ,  $EZ$ , et les segments de cercles semblables, qui sont placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3); donc le segment  $BAΓ$  est égal au segment  $EΔZ$ . Mais le cercle entier  $ABΓ$  est égal au cercle entier  $ΔEZ$ ; donc le segment restant  $BKΓ$  est égal au segment restant  $EΔZ$ ; donc l'arc  $BKΓ$  est égal à l'arc  $EΔZ$ . Donc, etc.

### PROPOSITION XXVII.

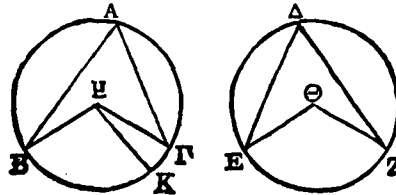
Dans les cercles égaux, les angles qui comprennent des arcs égaux sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient aux centres, ou aux circonférences.



170 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέντων αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερίαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λῆγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἴσθιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσθιν ἴση<sup>3</sup>.

In æqualibus enim circulis ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualibus circumferentiis ΒΓ, ΕΖ, ad Η, Θ quidem centra anguli insistant ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico ΒΗΓ quidem angulum ipsi ΕΘΖ esse æqualem, ipsum vero ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἴσθαι 4. Εστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκέντων, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾤσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερίᾳ. ΑΛΛ' ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴσθιν ἴση, καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἴσθιν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. Κατεστὶ τῆς

Si enim inæqualis sit ΒΗΓ ipsi ΕΘΖ, unus ipsorum major erit. Sit major ΒΗΓ, et constitutur ad ΒΗ rectam, et ad punctum in eâ Η, ipsi ΕΘΖ angulo æqualis ipse ΒΗΚ; æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistant, quando ad centra sunt; æqualis igitur ΒΚ circumferentia ipsi ΕΖ circumferentiæ. Sed ΕΖ ipsi ΒΓ æqualis est, et ΒΚ igitur ipsi ΒΓ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur inæqualis est ΒΗΓ angulus ipsi ΕΘΖ; æqualis igitur. Et est ipsius quidem ΒΗΓ

Que dans les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ placés aux centres Η, Θ, et les angles ΒΑΓ, ΕΔΖ placés aux arcs ΒΓ, ΕΖ comprennent les arcs égaux ΒΓ, ΕΖ; je dis que l'angle ΒΗΓ est égal à l'angle ΕΘΖ, et l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ.

Carsi les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ sont inégaux, l'un d'eux sera le plus grand. Que l'angle ΒΗΓ soit le plus grand; sur la droite ΒΗ, et au point Η de cette droite, faisons l'angle ΒΗΚ égal à l'angle ΕΘΖ (23. 1). Puisque les angles égaux comprennent des arcs égaux, lorsqu'ils sont aux centres (26. 3), l'arc ΒΚ est égal à l'arc ΕΖ. Mais l'arc ΕΖ est égal à l'arc ΒΓ; donc l'arc ΒΚ est égal à l'arc ΒΓ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ ne sont pas inégaux; donc ils sont

μὲν ὑπὸ BHΓ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ  
ΕΘΖ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς  
τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις,  
καὶ τὰ ἕξῃς.

dimidius ipse ad A, ipsius vero EZ dimidius  
ipse ad Δ; æqualis igitur et ad A angulus ipsi  
ad Δ. In æqualibus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

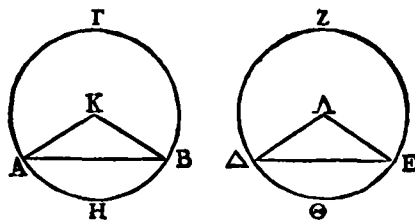
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας πε-  
ριφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι,  
τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττωι.

Ἐστώσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν  
αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἕστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, τὰς  
μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦ-

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ æquales  
circumferentias auferunt, majorem quidem ma-  
jori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis  
æquales rectæ sint ΑΒ, ΔΕ, ipsas quidem ΑΓΒ,  
ΔΖΕ circumferentias majores auferentes, ipsas



σαι, τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττωνας· λέγω ὅτι  
ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ  
μείζονι περιφέρειᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέ-  
ρεια τῇ ΔΘΕ ἐλάττωι.

vero ΑΗΒ, ΔΘΕ minores; dico ipsam quidem  
ΑΓΒ majorem circumferentiam æqualem esse  
ipsi ΔΖΕ majori circumferentiæ, ipsam vero  
ΑΗΒ minorem ipsi ΔΘΕ minori.

égaux. Mais l'angle en A est la moitié de l'angle BHΓ, et l'angle en Δ la moitié  
de l'angle ΕΘΖ (20. 3); donc l'angle en A est égal à l'angle en Δ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Dans des cercles égaux, les droites égales soutendent des arcs égaux, le  
plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, et que dans ces cercles, les droites  
égales ΑΒ, ΔΕ soutendent les plus grands arcs ΑΓΒ, ΔΖΕ, et les plus petits arcs  
ΑΗΒ, ΔΘΕ; je dis que le plus grand arc ΑΓΒ est égal au plus grand arc ΔΖΕ,  
et que le plus petit arc ΑΗΒ est égal au plus petit arc ΔΘΕ.

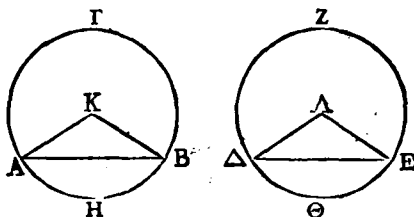
# 172 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ  $K, \Lambda$ , καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ  $BK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ  $AK, KB$  δυσὶ ταῖς  $\Delta\Lambda, \Lambda E$  ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ  $AB$  βάσις τῇ  $\Delta E$  ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $AKB$  γωνία τῇ ὑπὸ

Sumantur enim centra circulorum,  $K, \Lambda$ , et jungantur  $BK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$ .

Et quoniam æquales circuli sunt, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur  $AK, KB$  duabus  $\Delta\Lambda, \Lambda E$  æquales sunt, et basis  $AB$  basi  $\Delta E$  æqualis; angulus igitur  $AKB$  ipsi  $\Delta\Lambda E$  æqua-



$\Delta\Lambda E$  ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾖσιν· ἴση ἄρα ἡ  $AHB$  περιφέρεια τῇ  $\Delta\Theta E$  περιφέρειᾳ<sup>3</sup>. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ  $AB\Gamma$  κύκλος ὅλῳ τῷ  $\Delta E Z$  κύκλῳ ἴσος· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ  $A\Gamma B$  περιφέρεια λοιπῇ τῇ  $\Delta Z E$  περιφέρειᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis est. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt; æqualis igitur  $AHB$  circumferentia ipsi  $\Delta\Theta E$  circumferentiæ. Est autem et totus  $AB\Gamma$  circulus toti  $\Delta E Z$  circulo æqualis; reliqua igitur et  $A\Gamma B$  circumferentia reliquæ  $\Delta Z E$  circumferentiæ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

Prenons les centres  $K, \Lambda$  de ces cercles (1. 3), et joignons  $AK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$ .

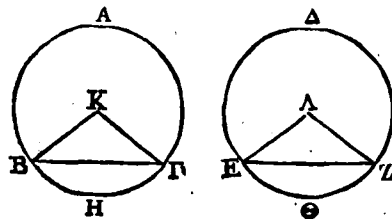
Puisque ces cercles sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites  $AK, KB$  sont égales aux deux droites  $\Delta\Lambda, \Lambda E$ ; mais la base  $AB$  est égale à la base  $\Delta E$ ; donc l'angle  $AKB$  est égal à l'angle  $\Delta\Lambda E$  (8. 1). Mais des angles égaux comprennent des arcs égaux, quand ils sont aux centres (26. 3); donc l'arc  $AHB$  est égal à l'arc  $\Delta\Theta E$ . Mais la circonférence entière  $AB\Gamma$  est égale à la circonférence entière  $\Delta E Z$ ; donc l'arc restant  $A\Gamma B$  est égal à l'arc restant  $\Delta Z E$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Εστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἕστω<sup>3</sup> τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας ἰσχυροῦσι βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectæ subtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis æquales circumferentiæ sumantur ΒΗΓ, ΕΘΖ, et jungantur ΒΓ, ΕΖ rectæ; dico æqualem esse ΒΓ rectam ipsi ΕΖ.

Sumantur enim centra circulorum, et sint Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Et quoniam æqualis est ΒΗΓ circumferentia ipsi ΕΘΖ circumferentiæ, æqualis est et angulus ΒΚΓ ipsi ΕΛΖ. Et quoniam æquales sunt ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur ΒΚ, ΚΓ duabus ΕΛ, ΛΖ æquales sunt, et angulos æquales continent; basis igitur ΒΓ basi ΕΖ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

PROPOSITION XXIX.

Dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des droites égales.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ; dans ces cercles prenons les arcs égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ, et joignons les droites ΒΓ, ΕΖ; je dis que la droite ΒΓ est égale à la droite ΕΖ.

Prenons les centres de ces cercles, qu'ils soient Κ, Λ, et joignons ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Puisque l'arc ΒΗΓ est égal à l'arc ΕΘΖ, l'angle ΒΚΓ est égal à l'angle ΕΛΖ (27. 3). Mais les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égaux; donc leurs rayons seront égaux; donc les deux droites ΒΚ, ΚΓ sont égales aux deux droites ΕΛ, ΛΖ; mais ces droites comprennent des angles égaux; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ (4. 1). Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

## PROPOSITIO XXX.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμῖν<sup>1</sup>.

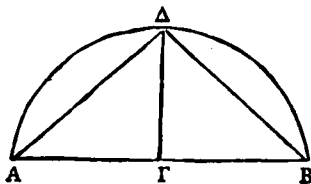
Εστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ  $\Lambda\Delta\text{B}$ · διῷ δὲ τὴν  $\Lambda\Delta\text{B}$  περιφέρειαν δίχα τεμῖν<sup>2</sup>.

Επιζεύχθω ἡ  $\text{AB}$ , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $\Gamma$  σημείου τῇ  $\text{AB}$  εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $\text{AD}$ ,  $\Delta\text{B}$ .

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia  $\Lambda\Delta\text{B}$ ; oportet igitur  $\Lambda\Delta\text{B}$  circumferentiam bifariam secare.

Jungatur  $\text{AB}$ , et secetur bifariam in  $\Gamma$ , et a  $\Gamma$  puncto ipsi  $\text{AB}$  rectæ ad rectos ducatur  $\Gamma\text{B}$ , et jungantur  $\text{AD}$ ,  $\Delta\text{B}$ .



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $\text{A}\Gamma$  τῇ  $\Gamma\text{B}$ , κοινὴ δὲ ἡ  $\Gamma\Delta$ · δύο δὲ αἱ  $\text{A}\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  δυσὶ ταῖς  $\text{B}\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  ἴσαι εἰσί. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\text{A}\Gamma\Delta$  γωνία τῇ ὑπὸ  $\text{B}\Gamma\Delta$  ἴση, ὀρθὴ γὰρ κατέρω· βάσεις ἄρα<sup>3</sup> ἡ  $\text{AD}$  βάσει τῇ  $\Delta\text{B}$  ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττω· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν  $\text{AD}$ ,  $\Delta\text{B}$  περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ  $\text{AD}$  περιφέρεια τῇ  $\Delta\text{B}$  περιφέρειᾳ.

Et quoniam æqualis est  $\text{A}\Gamma$  ipsi  $\Gamma\text{B}$ , communis autem  $\Gamma\Delta$ ; duæ igitur  $\text{A}\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  duabus  $\text{B}\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  æquales sunt. Et angulus  $\text{A}\Gamma\Delta$  angulo  $\text{B}\Gamma\Delta$  æqualis, rectus enim uterque; basis igitur  $\text{AD}$  basi  $\Delta\text{B}$  æqualis est. Æquales autem rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; et est utraque ipsarum  $\text{AD}$ ,  $\Delta\text{B}$  circumferentiarum minor semicirculo; æqualis igitur  $\text{AD}$  circumferentia ipsi  $\Delta\text{B}$  circumferentiæ.

## PROPOSITION XXX.

Couper un arc donné en deux parties égales.

Soit  $\Lambda\Delta\text{B}$  l'arc donné; il faut couper l'arc  $\Lambda\Delta\text{B}$  en deux parties égales.

Joignons la droite  $\text{AB}$ , et coupons-la en deux parties égales en  $\Gamma$  (10. 1); du point  $\Gamma$  menons  $\Gamma\Delta$  perpendiculaire à la droite  $\text{AB}$  (11. 1), et joignons  $\text{AD}$ ,  $\Delta\text{B}$ .

Puisque  $\text{A}\Gamma$  est égal à  $\Gamma\text{B}$ , et que la droite  $\Gamma\Delta$  est commune, les deux droites  $\text{A}\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  sont égales aux deux droites  $\text{B}\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$ . Mais l'angle  $\text{A}\Gamma\Delta$  est égal à l'angle  $\text{B}\Gamma\Delta$ ; car ils sont droits l'un et l'autre; donc la base  $\text{AD}$  est égale à la base  $\Delta\text{B}$  (4. 1). Mais des droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit (28. 3), et l'un et l'autre des arcs  $\text{AD}$ ,  $\Delta\text{B}$  est plus petit que la demi-circonférence; donc l'arc  $\text{AD}$  est égal à l'arc  $\Delta\text{B}$ .

# LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 175

Η ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχῃ τέμνεται  
κατὰ τὸ Δ σημεῖον<sup>4</sup>. Ὅπῃ ἔδει ποιῆσαι.

Ergo data circumferentia bifariam secta est  
in Δ puncto. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

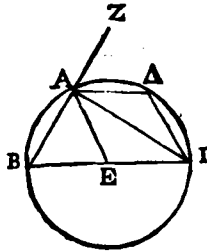
Εν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή  
ἔστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς·  
ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ  
ἐπεὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων  
ἔστιν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία  
ἐλάττων ὀρθῆς<sup>2</sup>.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ  
ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχωσαν

## PROPOSITIO XXXI.

In circulo, ipse quidem in semicirculo angu-  
lus rectus est; ipse vero in majore segmento  
minor recto; ipse autem in minore segmento  
major recto. Et insuper ipse quidem majoris  
segmenti angulus major est recto; ipse vero mi-  
noris segmenti angulus minor recto.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit  
ΒΓ, centrum vero Ε, et jungantur ΒΑ, ΑΓ,



αὶ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ  
ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ<sup>3</sup> ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ

ΑΔ, ΔΓ; dico ipsum quidem in ΒΑΓ semicir-  
culo angulum ΒΑΓ rectum esse; ipsum autem in

Donc l'arc donné a été coupé en deux parties égales au point Δ. Ce qu'il  
fallait faire.

## PROPOSITION XXXI.

Dans un cercle, l'angle placé dans le demi-cercle est droit; l'angle placé  
dans un segment plus grand est plus petit qu'un droit; l'angle placé dans  
un segment plus petit est plus grand qu'un droit; l'angle du plus grand seg-  
ment est plus grand qu'un droit, et l'angle du plus petit segment est plus  
petit qu'un droit.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, dont le diamètre est ΒΓ et le centre le point Ε; joignons  
ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ placé dans le demi-cercle ΒΑΓ est droit;

# 176 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐν τῷ  $AB\Gamma$  μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἢ ὑπὸ  $AB\Gamma$ , ἐλάττων ὀρθῆς· ἢ δὲ ἐν τῷ  $A\Delta\Gamma$  ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ  $A\Delta\Gamma$  μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

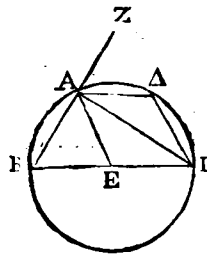
Ἐπιεύχθω ἡ  $AE$ , καὶ διήχθω ἡ  $BA$  ἐπὶ τὸ  $Z$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $BE$  τῇ  $EA$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ  $ABE$  τῇ ὑπὸ  $BAE$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $GE$  τῇ  $EA$ , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ  $AGE$  τῇ ὑπὸ

$AB\Gamma$  majore semicirculo segmento angulum  $AB\Gamma$  minorem recto; ipsum vero in  $A\Delta\Gamma$  minorem semicirculo segmento angulum  $A\Delta\Gamma$  majorem esse recto.

Jungatur  $AE$ , et producaturs  $BA$  ad  $Z$ .

Et quoniam æqualis est  $BE$  ipsi  $EA$ , æqualis est et angulus  $ABE$ , ipsi  $BAE$ . Rursus, quoniam æqualis est  $GE$  ipsi  $EA$ , æqualis est et  $AGE$  ipsi



$\Gamma AE$ · ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ  $BAG$  δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  ἴση ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  $ZAG$  ἐκτὸς τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου δυοὶ ταῖς ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ  $BAG$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ZAG$ , ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἢ ἄρα ἐν τῷ  $BAG$  ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ  $BAG$  ὀρθὴ ἐστὶ.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $BAG$  δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ

$\Gamma AE$ ; totus igitur  $BAG$  duobus  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  æqualis est. Est autem et ipse  $ZAG$ , extra  $AB\Gamma$  triangulum, duobus  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  angulis æqualis; æqualis igitur et  $BAG$  angulus ipsi  $ZAG$ ; recus igitur uterque; ipse igitur in  $BAG$  semicirculo angulus  $BAG$  rectus est.

Et quoniam  $AB\Gamma$  trianguli duo anguli  $AB\Gamma$ ,  $BAG$  duobus rectis minores sunt, rectus autem

que l'angle  $AB\Gamma$  placé dans le segment  $AB\Gamma$  plus grand que le demi-cercle  $AB\Gamma$  est plus petit qu'un droit, et que l'angle  $A\Delta\Gamma$  placé dans le segment  $A\Delta\Gamma$  plus petit que le demi-cercle, est plus grand qu'un droit.

Joignons  $AE$ , et prolongeons  $BA$  vers  $Z$ .

Puisque  $BE$  est égal à  $EA$ , l'angle  $ABE$  est égal à l'angle  $BAE$  (5. 1). De plus, puisque  $GE$  est égal à  $EA$ , l'angle  $AGE$  est égal à l'angle  $\Gamma AE$ ; donc l'angle entier  $BAG$  est égal aux deux angles  $AB\Gamma$ ,  $AGB$ . Mais l'angle  $ZAG$  placé hors du triangle  $AB\Gamma$  est égal aux deux angles  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  (32. 1); donc l'angle  $BAG$  est égal à l'angle  $ZAG$ ; donc chacun de ces angles est droit (déf. 10. 1); donc l'angle  $BAG$ , placé dans le demi-cercle  $BAG$ , est droit.

Puisque les deux angles  $AB\Gamma$ ,  $BAG$  du triangle  $AB\Gamma$  sont plus petits que deux

δὲ ἢ ὑπὸ ΒΑΓ<sup>6</sup>· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλείρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι<sup>7</sup>.

Λέγω<sup>8</sup> ὅτι καὶ ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε<sup>9</sup> τῆς ΑΒΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἢ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε<sup>10</sup> τῆς ΑΔΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἢ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία<sup>11</sup> ἐστὶν, ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἢ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν· ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΔ περιφέρειας περιεχομένη<sup>12</sup> ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΒΑΓ; minor igitur recto est ΑΒΓ angulus, et in ΑΒΓ segmento semicirculo majore.

Et quoniam in circulo quadrilatum est ΑΒΓΔ, in circulis autem quadrilatorum oppositi duobus rectis æquales sunt; ipsi igitur ΑΒΓ, ΑΔΓ duobus rectis æquales sunt. Et est ΑΒΓ minor recto; reliquus igitur ΑΔΓ angulus major recto est, et est in ΑΔΓ segmento semicirculo minore.

Dico autem et majoris quidem segmenti angulum comprehensum et ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, majorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum et ab ΑΔΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quoniam enim ipse a ΒΑ, ΑΓ rectis comprehensus rectus angulus est, ergo ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ comprehensus major est recto. Rursus, quoniam ipse ab ΑΓ, ΑΖ rectis comprehensus rectus est, ergo a ΓΑ rectâ, et ΑΓΔ circumferentiâ comprehensus minor est recto. In circulo igitur, etc.

droits (17. 1), et que l'angle ΒΑΓ est droit, l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΒΓ plus grand que le demi-cercle.

Puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est dans un cercle, et que les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits (22. 3), les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle restant ΑΔΓ est plus grand qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΔΓ plus petit que le demi-cercle.

Je dis aussi que l'angle du plus grand segment, compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ, est plus grand qu'un droit, et que l'angle du plus petit segment, compris par l'arc ΑΔΓ et la droite ΑΓ, est plus petit qu'un droit, ce qui est évident; car puisque l'angle compris par les droites ΒΑ, ΑΓ est droit, l'angle compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ est plus grand qu'un droit. De plus, puisque l'angle compris par les droites ΑΓ, ΑΖ est droit, l'angle compris par la droite ΓΑ et l'arc ΑΓΔ est plus petit qu'un droit. Donc, etc.

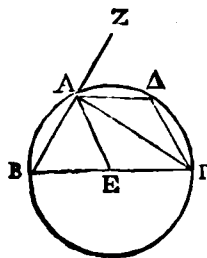


ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Η<sup>13</sup> ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλὴ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Demonstratur rectum esse ΒΑΓ. Quoniam duplus est ΑΕΓ ipsius ΒΑΕ, æqualis enim duobus interioribus et oppositis; est autem et ΑΕΒ duplus ipsius ΕΑΓ; ipsi igitur ΑΕΒ, ΑΕΓ dupli sunt ipsius ΒΑΓ. Sed ipsi ΑΕΒ, ΑΕΓ duobus rectis æquales sunt; ergo ΒΑΓ rectus est. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἂν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾗ, ὀρθή ἐστὶν ἡ γωνία.

Ex hoc utique manifestum, si unus angulus trianguli duobus æqualis sit, rectum esse angulum.

AUTREMENT.

On démontre autrement que l'angle ΒΑΓ est droit. En effet, puisque l'angle ΑΕΓ est double de l'angle ΒΑΕ, car il est égal aux deux angles intérieurs et opposés (32. 1), et que l'angle ΑΕΒ est double de l'angle ΕΑΓ, les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont doubles de l'angle ΒΑΓ. Mais les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle ΒΑΓ est droit. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit, parce que son angle extérieur est égal à ces

διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἔκτος ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν<sup>14</sup>.

lum, propterea quod et ejus angulus exterior iisdem est æqualis. Quando autem ipsi deinceps sunt æquales, recti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

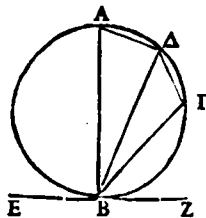
PROPOSITIO XXXII.

Εὰν κύκλου ἐφαπτήται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφ᾽ ἧς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένη ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γάρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτίσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου

Si circumulum contingat aliqua recta, a contactu autem in circumulum ducatur aliqua recta ducta secans circumulum, quos facit angulos ad contingentem ipsi æquales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Circulum enim ΑΒΓΔ contingat aliqua recta ΕΖ in Β puncto, et a Β puncto ducatur aliqua



διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιῇ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γω-

recta ΒΔ in ΑΒΓΔ circumulum secans ipsum; dico quos facit angulos ΒΔ cum ΕΖ contingente eos æquales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est ΖΒΔ quidem angulum æ-

mêmes angles, et que quand deux angles de suite sont égaux, ils sont droits (déf. 10. 1).

PROPOSITION XXXII.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle.

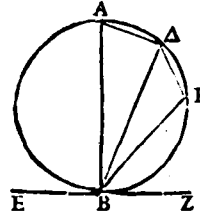
Qu'une droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et du point Β menons une droite ΒΔ qui coupe le cercle ΑΒΓΔ; je dis que les angles que fait ΒΔ avec la tangente ΕΖ sont égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle;

νίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ZBA γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ BAA τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΔBE γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓB τμήματι συνισταμένη γωνία<sup>3</sup>.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ EZ πρὸς ὀρθὰς ἡ BA, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς BD περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

qualem esse angulo in BAA segmento constituto, ΔBE vero angulum æqualem esse in ΔΓB segmento constituto.

Ducatur enim a B ipsi EZ ad rectos BA, et sumatur in BD circumferentiâ quodlibet punctum Γ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.



Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ABΓΔ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα EZ κατὰ τὸ B, ἀπὸ δὲ τῆς<sup>4</sup> ἀφ᾽ ἧς ἤκται τῇ ἐφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς ἡ BA, ἐπὶ τῆς BA ἄρα<sup>5</sup> τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓΔ κύκλου. Ἡ BA ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ABΓΔ κύκλου<sup>6</sup>. ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔB γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὕσα ὀρθή ἐστὶ· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ BAA, ABA μὲν ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABZ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ BAA, ABA. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ABA· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBZ γωνία ἴση ἐστὶ

Et quoniam circumulum ABΓΔ contingit aliqua recta EZ in B a contactu autem ducta est tangenti ad rectas BA, in BA igitur centrum est ABΓΔ circuli. BA igitur diameter est ABΓΔ circuli; ergo ΑΔB angulus in semicirculo constitutus rectus est; reliqui igitur BAA, ABA uni recto æquales sunt. Est autem et ABZ rectus; ergo ABZ æqualis est ipsis BAA, ABA. Communis auferatur ABA; reliquus igitur ΔBZ angulus æqualis est angulo BAA in alterno

c'est-à-dire, que l'angle ZBA est égal à l'angle placé dans le segment BAA, et que l'angle ABE est égal à l'angle placé dans le segment ΔΓB.

D'un point B menons la droite BA perpendiculaire à EZ (11. 1), et dans l'arc BA, prenons un point quelconque Γ, et joignons ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Puisque la droite EZ touche le cercle ABΓΔ au point B, et que la droite BA, menée du point de contact B, est perpendiculaire à la tangente EZ, le centre du cercle ABΓΔ est dans la droite BA (19. 3). Donc BA est le diamètre du cercle ABΓΔ; donc l'angle ΑΔB, placé dans le demi-cercle, est droit (31. 3). Donc les angles restants BAA, ABA sont égaux à un droit. Mais l'angle ABZ est droit; donc l'angle ABZ est égal aux angles BAA, ABA (not. 10). Retranchons l'angle commun ABA; l'angle restant ΔBZ sera égal à l'angle BAA

τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνία, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὲν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὲν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἰδέιχθῃ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῇ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἰστὶν ἴση. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἰζῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου, διχομόνον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῇ Γ· διττὴ δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου, διχομόνον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῇ Γ'. Ἡ δὲ πρὸς τῇ Γ γωνία<sup>2</sup> ἢ τοι ὀξεία ἐστίν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεία.

segmento circuli. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΑΒΓΔ, oppositi ejus anguli duobus rectis æquales sunt. Sunt autem et ipsi ΔΒΖ, ΔΒΕ duobus rectis æquales; ipsi igitur ΔΒΖ, ΔΒΕ ipsis ΒΑΔ, ΒΓΔ æquales sunt, quorum ΒΑΔ ipsi ΔΒΖ ostensus est æqualis; reliquus igitur ΔΒΕ angulo ΔΓΒ in alterno circuli segmento ΔΓΒ æqualis est. Si igitur circulum, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

Super datâ rectâ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit data recta ΑΒ, datus autem angulus rectilineus ad Γ; oportet igitur super datâ rectâ ΑΒ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Ipse autem ad Γ angulus vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

placé dans le segment alterne du cercle. Et puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est inscrit dans le cercle, ses angles opposés sont égaux à deux droits (22. 3). Mais les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux à deux droits; donc les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux aux angles ΒΑΔ, ΒΓΔ (13. 1); mais on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΔΒΖ; donc l'angle restant ΔΒΕ est égal à l'angle ΑΓΒ placé dans le segment alterne du cercle ΔΓΒ; donc, etc.

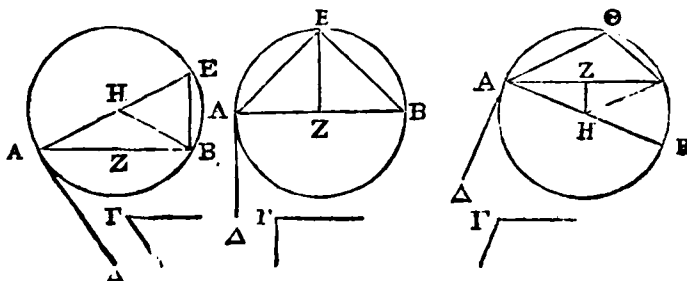
PROPOSITION XXXIII.

Sur une droite donnée, décrire un segment de cercle, qui recoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒ la droite donnée et Γ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite donnée ΑΒ décrire un segment de cercle qui recoive un angle égal à l'angle donné Γ. L'angle Γ est aigu, ou droit, ou obtus.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς<sup>3</sup> ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ BAA· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAA. Καὶ<sup>5</sup> ἤχθω τῇ AA ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τεμήσθω ἡ AB δίχῃ κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB,

Sit primum acutus, ut in primâ figurâ, et constitutur ad AB rectam et ad punctum in A, ipsi ad Γ angulo æqualis ipse BAA; acutus igitur est et BAA. Ducatur ipsi AA ab A puncto ad rectos ipsa AE, et secetur AB bifariam in Z, et ducatur a Z puncto ipsi AB ad rectos ipsa ZH, et jungatur HB. Et quoniam æqualis est AZ ipsi ZB, communis autem ZH, duæ utique



κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὲ αἱ AZ, ZH δυσὶ ταῖς ZB, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία<sup>6</sup> τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσεις ἄρα ἡ AH· βάσεις τῇ HB ἴση ἐστίν. Ο ἄρα κέντρω μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ HA, κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τοῦ B. Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ BE. Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἀκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A, τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ AA, ἡ AA ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ

AZ, ZH duabus ZB, ZH æquales sunt, et angulus AZH ipsi angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi HB æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Describatur, et sit ABE, et jungatur BE. Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos est AA, ipsa utique AA contingit circumulum. Quoniam igitur circumulum ABE tangit aliqua recta AA, et a

Premièrement qu'il soit aigu, comme dans la première figure; sur la droite AB et au point A construisons un angle BAA égal à l'angle Γ (π5. 1); l'angle BAA sera aigu. Du point A menons AE perpendiculaire à AA (11. 1); coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1), et du point Z menons ZH perpendiculaire à AB, et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites ZB, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base HB (4. 1). Donc le cercle décrit du centre H, et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il soit décrit, et qu'il soit ABE, et joignons EB. Puisque la droite AA menée de l'extrémité A du diamètre AE est perpendiculaire à AE, la droite AA touchera le cercle (16. 3). Puisque la droite AA touche le cercle ABE,

οὗν κύκλου τοῦ ABE ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ AΔ<sup>7</sup>, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἀφ᾽ ἧς εἰς<sup>8</sup> τὸ ABE κύκλον διῆκται τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ κύκλου<sup>9</sup> τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ AEB. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB, διέχονον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

ΑΛΛὰ δὴ ὁρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δεῖον ἔστω πάλιν<sup>10</sup> ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμήμα κύκλου διέχονον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὁρθῇ γωνίᾳ<sup>11</sup>. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὁρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAA, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρον μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ὅποτέρῳ τῶν ZA, ZB, κύκλος γεγράφθω ὁ AEB. Εφάπτεται ἄρα ἡ AΔ εὐθεῖα τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὁρθὸν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAA γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι<sup>12</sup>, ὁρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὔσα. Αλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ<sup>13</sup>. Καὶ ἡ ἐν

contactu ad A in ABE circulum ducta est aliqua AB, angulus utique ΔAB æqualis est angulo AEB in alterno circuli segmento. Sed ΔAB ipsi ad Γ est æqualis; et ad Γ igitur angulus æqualis est ipsi AEB. Super datâ igitur rectâ AB segmentum circuli descriptum est AEB, capiens angulum AEB æqualem dato ad Γ.

Sed et rectus sit ipse ad Γ; et oporteat rursus super AB describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ recto angulo. Constituatur enim rursus ipsi ad Γ recto angulus æqualis BAA, ut se habet in secundâ figurâ, et secetur AB bifariam in Z, et centro quidem Z, intervallo vero alterutrâ ipsarum AZ, ZB, circulus describatur AEB; contingit igitur AΔ recta ABE circulum, propterea quod rectus est ad A angulus. Et æqualis est quidem BAA angulus ipsi in AEB segmento, rectus enim et ipse est in semicirculo consistens. Sed BAA ipsi ad Γ æqualis est; et ipse

et que du point de contact en A on a mené une droite AB dans le cercle ABE, l'angle ΔAB est égal à l'angle AEB placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle ΔAB est égal à l'angle Γ; donc l'angle Γ est égal à l'angle AEB. Donc sur la droite donnée AB, on a décrit un segment de cercle AEB qui reçoit un angle AEB égal à l'angle donné Γ.

Mais que l'angle Γ soit droit, et qu'il faille encore décrire sur la droite AB un segment de cercle qui reçoive un angle égal à l'angle droit Γ. Construisons un angle BAA égal à l'angle droit Γ (25. 1), comme dans la seconde figure; coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1); du centre Z, et d'un intervalle égal à l'une ou à l'autre des droites ZA, ZB, décrivons le cercle AEB. La droite AΔ sera tangente au cercle ABE (16. 3), parce que l'angle est droit en A. Mais l'angle BAA est égal à l'angle qui est placé dans le segment AEB, car cet angle est droit, puisqu'il est placé dans un demi-cercle (31. 3). Mais l'angle BAA est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment est égal à l'angle Γ,

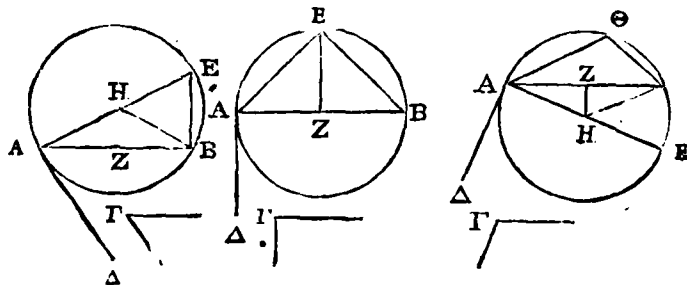
184 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ<sup>14</sup>.  
γεγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς AB τμήμα κύ-  
κλου τὸ AEB, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς  
τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεία ἔστω, καὶ  
συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ  
Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης  
καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ὃ

in AEB segmento igitur æqualis est ipsi ad Γ.  
Descriptum est igitur rursus super AB segmen-  
tum circuli AEB, capiens angulum æqualem ipsi  
ad Γ.

Sed etiam ad Γ obtusus sit, et consti-  
tuatur ipsi æqualis ad AB rectam et ad Α punc-  
tum ipse ΒΑΔ, ut se habet in tertiâ figurâ, et  
ipsi ΑΔ ad rectos ducatur ΑΕ, et secetur rur-



ΑΕ, καὶ τετμήσω πάλιν ἡ AB δίχα κατὰ τὸ  
Ζ, καὶ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπε-  
ξεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ  
τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ  
δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ<sup>15</sup> ὑπὸ  
ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ΑΗ  
βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ο ἄρα κέντρον μὲν τῷ  
Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος  
ἦξει καὶ διὰ τοῦ Β. Ερχίσθω ὥς ὁ AEB<sup>16</sup>. Καὶ

sus AB bifariam in Z, et ipsi AB ad rectos du-  
catur ZH, et jungatur HB. Et quoniam rursus  
æqualis est AZ ipsi ZB, et communis ZH, duæ  
utique AZ, ZH duabus BZ, ZH æquales sunt,  
et angulus AZH angulo BZH æqualis; basis igi-  
tur AH basi BH æqualis est. Ergo centro qui-  
dem H, intervallo vero HA, circulus descrip-  
tus transibit et per B. Transeat ut AEB. Et Quo-  
niam ipsi AB diametro ab extremitate ad rec-

donc on a décrit sur la droite AB un segment de cercle AEB qui reçoit un angle égal à l'angle droit Γ.

Mais enfin que l'angle Γ soit obtus. Sur la droite AB et au point A cons-  
truisons un angle ΒΑΔ égal à l'angle Γ (23. 1), et menons ΑΕ perpendiculaire à ΑΔ  
(11. 1); coupons la droite AB en deux parties égales en Ζ (10. 1); menons ΖΗ  
perpendiculaire à ΑΒ (11. 1), et joignons ΗΒ. Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite  
ΖΗ est commune, les deux droites ΑΖ, ΖΗ sont égales aux deux droites ΒΖ,  
ΖΗ; mais l'angle ΑΖΗ est égal à l'angle ΒΖΗ; donc la base ΑΗ est égale à la  
base ΒΗ (4. 1). Donc le cercle décrit du point Η et de l'intervalle ΗΑ passera  
par le point Β. Qu'il y passe comme ΑΕΒ, puisqu'on a mené de l'extrémité du

ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἔκται<sup>20</sup> ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένη γωνία. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας<sup>21</sup> τῆς ΑΒ γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ'.

tos ducta est ΑΔ, ipsa ΑΔ igitur contingit ΑΕΒ circum. Et a contactu ad Α ducta est ΑΒ; ergo ΒΑΔ angulus æqualis est angulo constituto in alterno circuli segmento ΑΘΒ. Sed ΒΑΔ angulus ipsi ad Γ æqualis est. Et ipse in ΑΘΒ igitur segmento angulus æqualis est ipsi ad Γ. Ergo super datam rectam ΑΒ descriptum est segmentum circuli ΑΘΒ, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datus vero angulus rectilineus ad Δ; oportet igitur ab ΑΒΓ circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo ad Δ.

diamètre ΑΕ, la droite ΑΔ perpendiculaire à ce diamètre, la droite ΑΔ touchera le cercle ΑΕΒ (16. 3). Et puisque la droite ΑΒ a été menée du point de contact Α, l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΑΘΒ du cercle. Mais l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment ΑΘΒ est égal à l'angle Γ. Donc on a décrit sur la droite donnée ΑΒ un segment de cercle ΑΘΒ, qui reçoit un angle égal à l'angle Γ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXIV.

D'un cercle donné, retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut du cercle ΑΒΓ retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ.

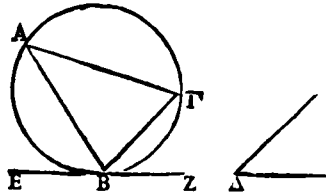


Ἡχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου<sup>2</sup> ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ

Ducatur ipsum ΑΒΓ circulum contingens ΕΖ ad Β punctum, et constituatur ad ΕΖ rectam et ad punctum in eâ Β ipsi ad Δ angulo æqualis ΖΒΓ.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΕΖ, et a contactu ad Β ducta est ΒΓ; ipse ΖΒΓ igitur æqualis est angulo constituto



ΒΑΓ ἑναλλάξ τμήματι συνισταμένη γωνία. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ<sup>3</sup>.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμήμα ἀφίρπται τὸ ΒΑΓ, διχομένον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω τῇ πρὸς τῷ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

in ΒΑΓ alterno segmento. Sed ΖΒΓ ipsi ad Δ æqualis est; et ipse in ΒΑΓ igitur segmento æqualis est ipsi ad Δ angulo.

A dato igitur circulo ΑΒΓ segmentum ablatum est ΒΑΓ, capiens angulum æqualem ipsi dato angulo rectilineo ad Δ. Quod oportebat facere.

Menons une droite ΕΖ qui touche le cercle ΑΒΓ au point Β (17. 3), et sur la droite ΕΖ, et au point Β de cette droite, faisons l'angle ΖΒΓ égal à l'angle Δ (23. 1).

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΒΓ a été menée du point de contact Β, l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΒΑΓ du cercle (32. 3). Mais l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle Δ; donc l'angle placé dans le segment ΒΑΓ est égal à l'angle Δ.

Donc du cercle donné ΑΒΓ on a retranché un segment ΒΑΓ, qui reçoit un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

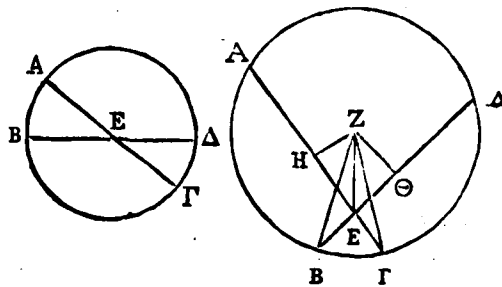
PROPOSITIO XXXV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Εν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνεταισιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε ση-  
μαῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, ipsum sub unius segmentis contentum rectangulum æquale est ipsi sub alterius segmentis contento rectangulo.

In circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secant in Ε puncto; dico ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.



• Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὖσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Si igitur ipsæ quidem ΑΓ, ΒΔ per centrum sunt, ita ut Ε centrum sit ipsius ΑΒΓΔ circuli; manifestum est æqualibus existentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, et ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.

PROPOSITION XXXV.

Si dans un cercle, deux droites se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

Que dans le cercle ΑΒΓΔ les deux droites ΑΓ, ΒΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

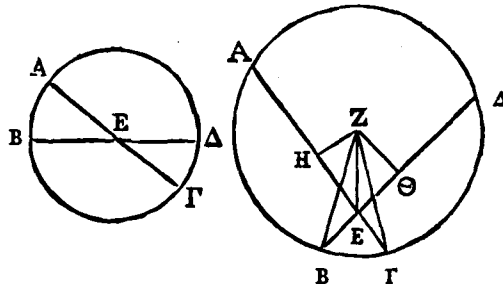
Si les droites ΑΓ, ΒΔ passent par le centre, de manière que le point Ε soit le centre du cercle ΑΒΓΔ, il est évident que les droites ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ étant égales, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

Μὴ<sup>2</sup> ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου<sup>3</sup>, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση

Non sint autem ΑΓ, ΔΒ per centrum, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et a Ζ ad ΑΓ, ΔΒ rectas perpendiculares ductantur ΖΗ, ΖΘ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Et quoniam recta aliqua ΖΗ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat; æqualis igitur



ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Προσκειῖσθω κοινὸν<sup>5</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ<sup>5</sup> τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴσον<sup>6</sup> ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ

ΑΗ ἰπσὶ ΗΓ. Quoniam igitur ΑΓ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε, ipsum utique sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΗΕ quadrato æquale est ipsi ex ΗΓ. Commune addatur ipsum ex ΗΖ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ eum ipsis ex ΖΗ, ΗΕ æquale est ipsis ex ΓΗ, ΗΖ. Sed ipsis quidem ex ΕΗ, ΗΖ est æquale ipsum ex ΖΕ, ipsis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale est ipsi ex ΖΓ; ipsum igitur

Mais que les droites ΑΓ, ΔΒ ne passent pas par le centre; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ; du point Ζ menons les droites ΖΗ, ΖΘ perpendiculaires à ΑΓ, ΔΒ (12. 1), et joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Puisque la droite ΖΗ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 3); donc ΑΗ est égal à ΗΓ. Puisque ΑΓ est coupé en deux parties égales en Η, et en deux parties inégales en Ε, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΗΕ, est égal au carré de ΗΓ (5. 2). Ajoutons le carré commun de ΗΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec les carrés des droites ΖΗ, ΗΕ sera égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ. Mais le carré de ΖΕ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1), et le carré de ΖΓ égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ.

τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἰση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Εδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ· Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ, æquale est ipsi ΖΓ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ, ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΕΖ æquale est ipsi ex ΖΒ. Propter eadem utique et ipsum sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi ex ΖΒ. Ostensum est autem et ipsum sub ΑΕ ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale esse ipsi ex ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ. Commune auferatur ipsum ex ΖΕ; reliquum igitur sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ'.

PROPOSITIO XXXVI.

Ἐὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἰσάπτεται· ἴσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνοῦσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit ipsum sub totâ secante et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et convexam

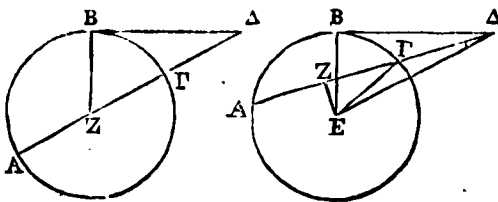
HZ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΓ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΕΖ, est égal au quarré de ΖΒ. Par la même raison, le rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΒ. Mais on a démontré que le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ est égal au rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le quarré de ΖΕ. Retranchons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle restant compris sous ΑΕ, ΕΓ sera égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise exté-

τοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφέρειας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τέμνεται τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτῶν· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ΔΓΑ ἢ τοι δια τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὐ.



Ἐστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπὶ εὐθείᾳ ἡ ΑΓ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ<sup>3</sup> μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἴση δὲ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ

circumferentiam contentum rectangulum æquale ipsi ex contingente quadrato.

Extra circumulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et a Δ ad ΑΒΓ circumulum cadant duæ rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet ΑΒΓ circumulum, ipsa vero ΔΒ contingat; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex ΔΒ quadrato. Ipsa igitur ΔΓΑ vel per centrum est, vel non.

Sit primum per centrum, et sit Ζ centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et jungatur ΖΒ; rectus igitur est ΖΒΔ. Et quoniam recta ΑΓ bifariam secta est in Ζ, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΓ æquale est ipsi ex ΖΔ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΒ æquale est ipsi

rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la tangente.

Hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ, et de ce point menons les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ; que la droite ΔΓΑ coupe le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΔΒ lui soit tangente; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΓ est égal au carré de ΔΒ, soit que la droite ΔΓΑ passe par le centre, ou non.

Qu'elle passe premièrement par le centre du cercle, et que Ζ soit le centre du cercle ΑΒΓ, joignons ΖΒ; l'angle ΖΒΔ sera droit (18. 3). Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΖΓ, est égal au carré de ΖΔ (6. 2). Mais la droite ΖΓ est égale à la droite ΖΒ; donc le rectangle

τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὁρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ<sup>5</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἰσαπτεμένῃς.

Αλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἴστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἔχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπὶ εὐθείᾳ τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὁρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν διμεῖ· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπὶ εὐθείᾳ ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον<sup>6</sup>, πρόκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον<sup>7</sup> ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Αλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ

ex ZΔ. Ipsi vero ex ZΔ æqualia sunt ipsa ex ZB, ΒΔ, rectus enim ipse ZBΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ZB æquale est ipsis ex ZB, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ZB; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ contingente.

Sed et ΔΓΑ non sit per centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et sumatur centrum Ε, et ex Ε ad ΑΓ perpendicularis ducatur ΕΖ, et jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; rectus igitur est ΕΖΔ. Et quoniam recta aliqua ΕΖ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secatur, et bifariam ipsam secabit; ΑΖ igitur ipsi ΖΓ est æqualis. Et quoniam recta ΑΓ secatur bifariam in Ζ puncto, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ΖΓ æquale est ipsi ex ZΔ. Commune addatur ex ΖΕ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsis ex ΔΖ, ΖΕ. Sed ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΓ, rectus enim ΕΖΓ angulus; ip-

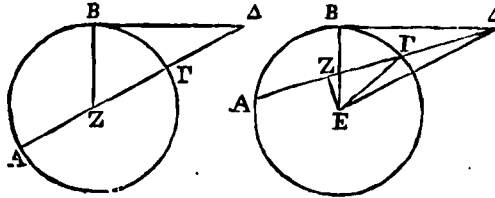
sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal au quarré de ΖΔ. Mais les quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΖΔ (47. 1), car l'angle ΖΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal aux quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΖΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de la tangente ΔΒ.

Mais que la droite ΔΓΑ ne passe pas par le centre du cercle ΑΒΓ; prenons le centre Ε, et du point Ε menons ΕΖ perpendiculaire à ΑΓ (12. 1); et joignons ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; l'angle ΕΖΔ sera droit. Et puisque la droite ΕΖ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, la droite ΕΖ coupe la droite ΑΓ en deux parties égales (3. 3); donc la droite ΑΖ est égale à la droite ΖΓ. Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous les droites ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΓ, est égal au quarré de ΖΔ (6. 2). Ajoutons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec les quarrés des droites ΓΖ, ΖΕ, sera égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ. Mais le quarré de ΕΓ est égal aux quarrés de ΓΖ, ΖΕ (47. 1), car l'angle ΕΖΓ

192 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὁρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ<sup>8</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἰση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ

sis autem ex ΔΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΔ. Ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΓ æquale est ipsi ex ΕΔ. Æqualis autem ΕΓ ipsi ΕΒ; ipsum igitur ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsi ex ΕΔ. Ipsi autem ex ΕΔ æqua-



ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὁρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Εὰν ἄρα κύκλον, καὶ τὰ ἐξῆς.

lia sunt ipsa ex ΕΒ, ΒΔ, rectus enim ΕΒΔ angulus; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsis ex ΕΒ, ΒΔ. Comune auferatur ipsum ex ΕΒ; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ. Si igitur extra circumulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'

PROPOSITIO XXXVII.

Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ

Si extra circumulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circumulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circumulum altera, vero

est droit, et le quarré de ΕΔ est égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΕΓ, est égal au quarré de ΕΔ. Mais ΕΓ est égal à ΕΒ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΕΒ est égal au quarré de ΕΔ. Mais les quarrés des droites ΕΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΕΔ (47. 1), car l'angle ΕΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré ΕΒ, est égal aux quarrés des droites ΕΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΕΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de ΔΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVII.

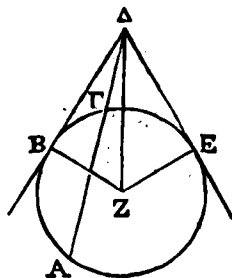
Si l'on prend un point quelconqué hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'angle tombe sur

προσπίπτῃ, ἥ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς<sup>1</sup> τεμνού-  
σης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ  
τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφέρειας ἴσον  
τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἢ προσπίπτουσα  
ἐφάπεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς  
τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσ-  
πιπτεύσων δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν

in eum cadat, sit autem ipsum sub totâ secante  
et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et con-  
vexam circumferentiam æquale ipsi ex incidente;  
incidens continget circulum.

Extra circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punc-  
tum Δ, et ex Δ in ΑΒΓ circulum incident duæ  
rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet



ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἢ δὲ ΔΒ προσπιπτεύω,  
ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ<sup>2</sup> ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  
ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ  
εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω  
τὸ Ζ<sup>3</sup>, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα  
ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθὴ ἐστίν.

Καὶ ἵπαι ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου,  
τίμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον

circulum, ipsa vero ΔΒ in eum incidat, sit  
autem ipsum sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ;  
dico ipsam ΔΒ contingere ΑΒΓ circulum.

Ducatur enim ipsum ΑΒΓ contingens ipsa  
ΔΕ, et sumatur centrum circuli ΑΒΓ, et sit  
Ζ, et jungantur ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; ipse igitur ΖΕΑ  
rectus est.

Et quoniam ΔΕ contingit ΑΒΓ circulum, se-  
cat autem ipsa ΔΓΑ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ

ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise exté-  
rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au quarré de  
la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur le cercle sera tan-  
gente à ce cercle.

Hors du cercle ΑΒΓ prenons un point quelconque Δ, et menons de ce point  
les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ, que la droite ΔΓΑ coupe le cercle, et que la droite  
ΔΒ tombe sur le cercle; que le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ soit égal au quarré de  
ΔΒ; je dis que la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ.

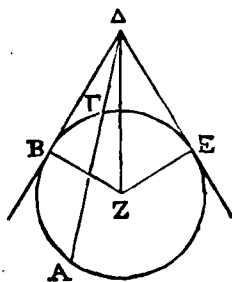
Menons la droite ΔΕ tangente au cercle ΑΒΓ (17. 3), prenons le centre du  
cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Ζ; joignons ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; l'angle ΖΕΑ sera droit (18. 3).

Puisque ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΔΓΑ le coupe, le rectangle sous ΑΔ,



ἴσσι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ἦν δὲ καὶ<sup>4</sup> τὸ ὑπὸ τῶν  
ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς  
ΔΕ ἴσον ἴστιν<sup>5</sup> τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ  
τῇ ΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὲ αἱ  
ΔΕ, ΕΖ δυοὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις  
αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία

æquale est ipsi ex  $\Delta E$ . Erat autem et ipsum sub  $\Delta A$ ,  $\Delta \Gamma$  æquale ipsi ex  $\Delta B$ ; ipsum igitur ex  $\Delta E$  æquale est ipsi ex  $\Delta B$ ; æqualis igitur  $\Delta E$  ipsi  $\Delta B$ . Est autem et  $ZE$  ipsi  $ZB$  æqualis, duæ igitur  $\Delta E$ ,  $EZ$  duabus  $\Delta B$ ,  $BZ$  æquales sunt, et basis ipsarum communis  $ZD$ ; angulus igitur



τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἔστιν ἴση. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΖ ἑκαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὲ διευχθήσεται καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνει. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

$\Delta EZ$  angulo  $\Delta BZ$  est æqualis. Rectus autem  $\Delta EZ$ ; rectus igitur et  $\Delta BZ$ . Et est  $BZ$  producta diameter, ipsa vero diametro circuli ab extremitate ducta contingit et circulum; ipsa  $\Delta B$  igitur contingit  $\Delta BF$  circulum. Similiter autem ostendemus, et si centrum in  $AF$  sit. Si igitur extra circulum, etc.

$\Delta\Gamma$  est égal au carré de  $\Delta E$  (36. 3). Mais le rectangle sous  $\Delta\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$  est égal au carré de  $\Delta B$ ; donc le carré de  $\Delta E$  est égal au carré de  $\Delta B$ ; donc  $\Delta E$  est égal à  $\Delta B$ . Mais  $ZE$  est égal à  $ZB$ ; donc les deux droites  $\Delta E$ ,  $EZ$  sont égales aux deux droites  $\Delta B$ ,  $BZ$ ; mais la base  $Z\Delta$  est commune; donc l'angle  $\Delta EZ$  est égal à l'angle  $\Delta BZ$  (8. 1). Mais l'angle  $\Delta EZ$  est droit; donc l'angle  $\Delta BZ$  est droit aussi. Mais la droite  $BZ$  prolongée est un diamètre, et une droite perpendiculaire au diamètre et menée d'une de ses extrémités est tangente au cercle (16. 3). Donc la droite  $\Delta B$  est tangente au cercle  $AB\Gamma$ . La démonstration serait la même si le centre était dans  $\Delta\Gamma$ . Donc, etc.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R Q U A R T U S.

---

#### ΟΡΟΙ.

α. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

β. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγρᾶφισθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

#### DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figurā rectilineā inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulorum unumquodque latus ipsius in quā inscribitur contingit.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

## LIVRE QUATRIEME

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### DÉFINITIONS.

1. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une figure rectiligne, lorsque chacun des angles de la figure inscrite touche chaque côté de celle dans laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement une figure est dite circonscrite à une figure, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche chaque angle de la figure à laquelle elle est circonscrite.

γ'. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἄπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

δ'. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας<sup>2</sup>.

εἰ Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφεισθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

ς'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἢ τοῦ κύκλου.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῇ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circumscriptum dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figurâ similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini ejus in circumferentiâ sunt circuli.

#### PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ, non majori existenti circuli diametro, æqualem rectam aptare.

3. Une figure rectiligne est dite inscrite dans un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

4. Une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche la circonférence de ce cercle.

5. Semblablement un cercle est dit inscrit dans une figure rectiligne, lorsque la circonférence du cercle touche chaque côté de la figure dans laquelle il est inscrit.

6. Un cercle est dit circonscrit à une figure, lorsque la circonférence du cercle touche chaque angle de la figure à laquelle il est circonscrit.

7. Une droite est dite adaptée dans un cercle, lorsque ses extrémités sont dans la circonférence de ce cercle.

#### PROPOSITION PREMIÈRE.

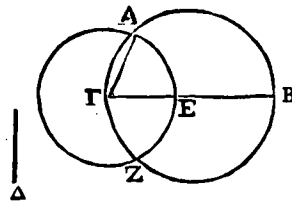
Dans un cercle donné, adapter une droite égale à une droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· διτὴ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἱσαρμόσαι.

Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονός δὲ εἶναι τὸ ἐπιταχθῆναι. ἐνῆρμωσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω<sup>2</sup> τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κίν-

Sit datus circulus ΑΒΓ, data autem recta Δ non major circuli diametro; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualem rectam aptare.

Ducatur ΑΒΓ circuli diameter ΒΓ. Si quidem igitur æqualis est ΒΓ ipsi Δ, factum erit propositum. Aptata est enim in ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualis ΒΓ. Si vero major est ΒΓ ipsa Δ, ponatur ipsi Δ æqualis ΓΕ, et centro



τρω μὲν<sup>3</sup> τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ<sup>4</sup> ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ<sup>5</sup>, ἴση ἐνῆρμωσται ἡ ΓΑ. Ὅπερ ἱδοὶ ποιῆσαι.

quidem Γ, intervallo vero ΓΕ, circulus describatur ΑΕΖ, et jungatur ΓΑ.

Quoniam igitur Γ punctum centrum est ipsius ΑΕΖ circuli, æqualis est ΓΑ ipsi ΓΕ. Sed ipsi Δ ipsa ΓΕ est æqualis; et Δ igitur ipsi ΓΑ est æqualis.

In dato igitur circulo ΑΒΓ, datæ rectæ Δ, æqualis aptata est ΓΑ. Quod oportebat facere.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ la droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre de ce cercle; il faut dans le cercle ΑΒΓ adapter une droite égale à la droite Δ.

Menons le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ. Si la droite ΒΓ est égale à la droite Δ, on aura fait ce qui était proposé. Car on aura adapté dans le cercle ΑΒΓ, une droite ΒΓ égale à la droite Δ. Mais si la droite ΒΓ est plus grande que la droite Δ, faisons ΓΕ égal à Δ (3. 1), du centre Γ et de l'intervalle ΓΕ décrivons le cercle ΑΕΖ, et joignons ΓΑ.

Puisque le point Γ est le centre du cercle ΑΕΖ, la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΕ; mais Δ est égal à ΓΕ; donc Δ est égal à ΓΑ.

Donc dans le cercle donné ΑΒΓ on a adapté une droite ΓΑ égale à la droite donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

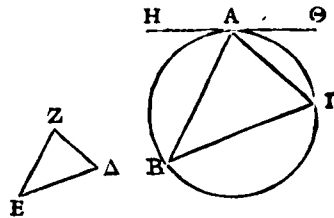
## PROPOSITIO II.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθεὶν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· διὲ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

In dato circulo dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum vero triangulum ΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνστάτω πρὸς<sup>1</sup> τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς<sup>2</sup> τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ<sup>3</sup> ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ducatur ΑΒΓ circulum contingens ipsa ΗΘ in Α, et constituatur ad ΑΘ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΘΑΓ; rursus, ad ΗΑ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΖΔΕ æqualis ΗΑΒ, et jungatur ΒΓ.

## PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut dans le cercle ΑΒΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔΕΖ.

Menons la droite ΗΘ, de manière qu'elle touche le cercle ΑΒΓ en un point Α, et sur la droite ΑΘ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΘΑΓ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1). De plus sur la droite ΗΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΗΑΒ égal à l'angle ΖΔΕ, et joignons ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις εὐ-  
θεΐα ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς  
τὸν κύκλον διῆκται εὐθεΐα ἡ ΑΓ<sup>4</sup>. ἡ ἄρα ὑπὸ  
ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου  
τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ  
τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γω-  
νία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ  
ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα  
ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσο-  
γώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τρι-  
γώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον<sup>5</sup>.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τρι-  
γώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει  
ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ  
ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Puisque la droite ΘΑ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΑΓ a été menée dans le cercle du point de contact Α, l'angle ΘΑΓ est égal à l'angle ΑΒΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle ΘΑΓ est égal à l'angle ΔΕΖ; donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ. Par la même raison l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΖΔΕ; donc l'angle restant ΒΑΓ est égal à l'angle restant ΕΖΔ (32. 1); donc le triangle ΑΒΓ est équiangle avec le triangle ΔΕΖ, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓ (déf. 3. 4).

Donc dans le cercle donné, on a inscrit un triangle équiangle avec un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III.

Aun cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

Quoniam igitur ΑΒΓ circumulum contingit ali-  
qua recta ΘΑ, a contactu autem ad Α in cir-  
culo ducta est recta ΑΓ, ipse utique ΘΑΓ æqua-  
lis est ipsi in alterno circuli segmento angulo  
ΑΒΓ. Sed ipse ΘΑΓ ipsi ΔΕΖ est æqualis; et  
ΑΒΓ igitur angulus ipsi ΔΕΖ est æqualis. Prop-  
ter eadem utique et ipse ΑΓΒ ipsi ΖΔΕ est æ-  
qualis, et reliquus igitur ΒΑΓ reliquo ΕΖΔ est  
æqualis. Æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangu-  
lum ipsi ΔΕΖ triangulo, et inscriptum est in ΑΒΓ  
circulo.

In dato igitur circulo dato triangulo æquian-  
gulum triangulum descriptum est. Quod oport-  
tebat facere.

PROPOSITIO III.

Circa datum circumulum dato triangulo æqui-  
angulum triangulum circumscribere.

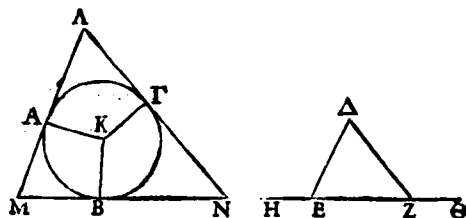
200 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἴτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Εκτελέσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum autem triangulum ΔΕΖ; oportet igitur circa ΑΒΓ circulum ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Producatur ΕΖ ex utràque parte ad Η, Θ puncta, et sumatur ΑΒΓ circuli centrum Κ, et ducatur utcumque recta ΚΒ, et constituatur ad ΚΒ rectam et ad punctum in εἰ Κ ipsi qui-



αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἑφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεία, καὶ ἐπιζυγύμεναι εἰσιν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι

dem ΔΕΗ angulo æqualis ΒΚΑ, ipsi vero ΔΖΘ æqualis ΒΚΓ, et per Α, Β, Γ puncta ducantur tangentes ipsum ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Et quoniam contingunt ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ in Α, Β, Γ punctis, et junctæ sunt ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ; recti utique sunt ipsi ad Α, Β, Γ puncta anguli. Et quoniam ΑΜΒΚ quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales sunt, quandoqui-

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut au cercle ΑΒΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔΕΖ.

Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont

τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπεὶ δὴ πῆρ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ AMBK, καὶ εἶσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, KBM γωνίαι<sup>3</sup>. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB, AMB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AKB, AMB ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANM τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MAN λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AMN τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ABΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

dem et in duo triangula dividitur AMBK, et sunt recti MAK, KBM anguli; reliqui igitur AKB, AMB duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ΔΕΗ, ΔΕΖ duobus rectis æquales; ipsi igitur AKB, AMB ipsis ΔΕΗ, ΔΕΖ æquales sunt, quorum AKB ipsi ΔΕΗ est æqualis; reliquus igitur AMB reliquo ΔΕΖ est æqualis. Similiter utique ostendetur et ipsum ANM ipsi ΔΖΕ esse æqualem; et reliquus igitur MAN reliquo ΕΔΖ est æqualis. Æquiangulum igitur est AMN triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo, et circumscibitur circum ABΓ circumulum.

Circa datum igitur circumulum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère AMBK peut se diviser en deux triangles; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles MAK, KBM sont droits; donc les angles restants AKB, AMB sont égaux à deux droits. Mais les angles ΔΕΗ, ΔΕΖ sont égaux à deux droits (13. 1); donc les angles AKB, AMB sont égaux aux angles ΔΕΗ, ΔΕΖ; mais l'angle AKB est égal à l'angle ΔΕΗ; donc l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ΔΕΖ. Nous démontrerons semblablement que l'angle ANM est égal à l'angle ΔΖΕ; donc l'angle restant MAN est égal à l'angle restant ΕΔΖ (32. 1). Donc le triangle AMN est équiangle avec le triangle ΔΕΖ, et il est circonscrit au cercle ABΓ (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

## PROPOSITIO IV.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

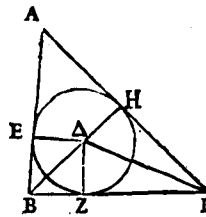
Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ  $ABΓ$ . διττῶς εἰς τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ABΓ$  γωνίαι δίχα ταῖς  $BD$ ,  $ΓΔ$  εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ  $Δ$  σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ  $Δ$  ἐπὶ τὰς  $AB$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΑ$  εὐθείας κάθετοι αἱ  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$ ,  $ΔΗ$ .

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum  $ABΓ$ ; oportet igitur in  $ABΓ$  triangulo circulum inscribere.

Secentur  $ABΓ$ ,  $ABΓ$  anguli bifariam ab ipsis  $BD$ ,  $ΓΔ$  rectis, et convenient inter se in  $Δ$  puncto, et ducantur a  $Δ$  ad  $AB$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΑ$  rectas perpendiculares  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$ ,  $ΔΗ$ .



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ABΔ$  γωνία τῇ ὑπὸ  $ΔΒΓ$ , ἵστί δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  $BEΔ$  ὀρθὴ τῇ ὑπὸ  $BZΔ$  ἴση, δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶ τὰ  $EBΔ$ ,  $ZBΔ$ , τὰς δύο γωνίας ταῖς<sup>2</sup> δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ<sup>2</sup> πλευρᾷ ἴσην, τὴν<sup>3</sup> ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν  $BD$ ,

Et quoniam æqualis est  $ABΔ$  angulus ipsi  $ΔΒΓ$ , est autem et rectus  $BEΔ$  recto  $BZΔ$  æqualis; duo igitur triangula sunt  $EBΔ$ ,  $ZBΔ$ , duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, sustendens unum æquale angulorum, commune iis ipsum  $BD$ . Et

## PROPOSITION IV.

Inscrire un cercle dans un triangle donné.

Soit  $ABΓ$  le triangle donné; il faut dans le triangle  $ABΓ$  inscrire un cercle.

Partageons en deux parties égales les angles  $ABΓ$ ,  $ABΓ$  par les droites  $BD$ ,  $ΓΔ$ ; que ces droites se rencontrent au point  $Δ$ , et du point  $Δ$  menons aux droites  $AB$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΑ$  les perpendiculaires  $ΔΕ$ ,  $ΔΖ$ ,  $ΔΗ$  (12. 1).

Puisque l'angle  $ABΔ$  est égal à l'angle  $ΔΒΓ$ , et que l'angle droit  $BEΔ$  est égal à l'angle droit  $BZΔ$ , les deux triangles  $EBΔ$ ,  $ZBΔ$  ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun  $BD$  qui soutend un des

καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευ-  
ραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς  
ἄρα εὐθείαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν<sup>4</sup>.  
ὁ ἄρα κέντρον τῷ Δ, καὶ<sup>5</sup> διαστήματι ἐνὶ τῶν  
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ  
τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπτεται τῶν ΑΒ,  
ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὁρθὰς εἶναι τὰς πρὸς  
τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμνῇ  
αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς  
ὁρθὰς ἀπ' ἁκρὰς ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ  
κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη<sup>6</sup>. οὐκ ἄρα ὅτ' κέν-  
τρον Δ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γρα-  
φόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας.  
ἐφάπτεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμ-  
μένος εἰς<sup>8</sup> τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Εγγεγράφθω ὡς  
ΖΕΗ<sup>9</sup>.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος  
ἐγγράπτεται ὁ<sup>10</sup> ΕΖΗ. Οπερ εἶδει ποιῆσαι.

reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia  
habebunt; æqualis igitur ΔΕ ipsi ΔΖ. Propter  
eadem utique et ΔΗ ipsi ΔΖ est æqualis. Tres igitur  
rectæ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ æquales inter se sunt; ergo  
centro Δ, et intervallo unâ ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ  
circulus descriptus transibit et per reliqua puncta,  
et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas, propterea  
quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η puncta anguli. Si  
enim secet ipsas, erit ipsa diametro circuli ad  
rectos ab extremitate ducta intra ipsum cadens  
circulum, quod absurdum ostensum est; non  
igitur centro Δ, intervallo autem unâ ipsarum  
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ descriptus circulus secat ΑΒ, ΒΓ,  
ΓΑ rectas; contingit igitur ipsas, et erit cir-  
culus descriptus in ΑΒΓ triangulo. Inscribatur  
ut ΖΕΗ.

In dato igitur triangulo ΑΒΓ circulus ins-  
criptus est ΕΖΗ. Quod oportebat facere.

angles égaux; ils ont donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1);  
donc ΔΕ est égal à ΔΖ. Par la même raison ΔΗ est égal à ΔΖ. Donc les trois  
droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ sont égales entr'elles; donc le cercle décrit du point Δ  
et d'un intervalle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ passera par les autres  
points, et touchera les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, les angles étant droits en Ε, Ζ, Η.  
Car si le cercle coupait ces droites, une perpendiculaire au diamètre d'un  
cercle et menée d'une de ses extrémités tomberait dans ce cercle, ce qui a  
été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du point Δ et d'un inter-  
valle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ne coupera point les droites ΑΒ, ΒΓ,  
ΓΑ; donc elle les touchera, et ce cercle sera inscrit dans le triangle ΑΒΓ (déf. 5. 4).  
Qu'il soit inscrit comme ΖΕΗ.

Donc dans le triangle donné ΑΒΓ, on a inscrit le cercle ΕΖΗ. Ce qu'il fallait  
faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

## PROPOSITIO V.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

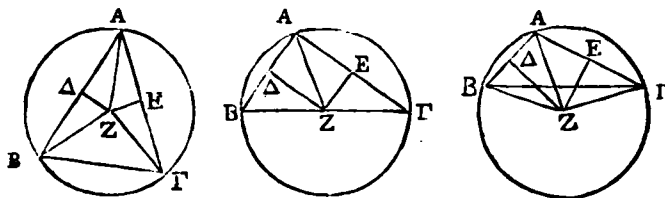
Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Εστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὲ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Sit datum triangulum ΑΒΓ; oportet igitur circa datum triangulum ΑΒΓ circulum circumscribere.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι<sup>1</sup> δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΖΕ· συμπίπτουνται δὲ ἥτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

Secentur ΑΒ, ΑΓ rectæ bifariam in Δ, Ε punctis, et ab ipsis Δ, Ε punctis ipsis ΑΒ, ΑΓ ad rectos ducantur ΔΖ, ΖΕ. Convenient autem vel intra ΑΒΓ triangulum, vel in ΒΓ rectâ, vel extra ΒΓ.



Συμπίπτειν οὖν<sup>2</sup> ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΔ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση<sup>3</sup>.

Convenient igitur intus primum in Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΒΔ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Simi-

## PROPOSITION V.

Circonscrire un cercle à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné; il faut au triangle donné ΑΒΓ circonscrire un cercle.

Coupons les droites ΑΒ, ΑΓ en deux parties égales aux points Δ, Ε (10. 1), et des points Δ, Ε menons aux droites ΑΒ, ΑΓ les perpendiculaires ΔΖ, ΖΕ (11. 1); ces perpendiculaires se rencontreront ou dans le triangle ΑΒΓ, ou dans la droite ΒΓ, ou hors de la droite ΒΓ.

Premièrement que ces perpendiculaires se rencontrent dans le triangle, au point Ζ; joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΑ. Puisque ΑΔ est égal à ΒΔ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν<sup>4</sup> ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο ἄρα κέντρον τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφέσθω<sup>5</sup> ὡς ὁ ΑΒΓ.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσεις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν<sup>6</sup> ἴση· ὁ ἄρα πάλιν<sup>7</sup> κέντρον τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος

liter utique ostendemus et ipsam ΓΖ ipsi ΑΖ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ æquales inter se sunt. Ergo centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circulus circa ΑΒΓ triangulum. Circumscribatur ut ΑΒΓ.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient in ΒΓ rectâ in Ζ, ut se habet in secundâ figurâ, et jungatur ΑΖ. Similiter utique ostendemus Ζ punctum centrum esse ipsius circa ΑΒΓ triangulum circumscripti circuli.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient extra ΑΒΓ triangulum, in Ζ rursus, ut se habet in tertiâ figurâ, et jungantur ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Et quoniam rursus æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Similiter utique ostendemus et ΖΓ ipsi ΖΑ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; ergo rursus centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per

démontrerons semblablement que ΓΖ est égal à ΑΖ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ; donc les trois droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ sont égales entr'elles. Donc si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce cercle passera par les autres points, et ce cercle sera circonscrit au triangle ΑΒΓ (déf. 6. 4). Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓ.

Mais que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent dans la droite ΒΓ, au point Ζ, comme dans la seconde figure; joignons ΑΖ. Nous démontrerons semblablement que le point Ζ est le centre du cercle circonscrit au triangle ΑΒΓ.

Mais enfin, que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent hors du triangle ΑΒΓ, au point Ζ, comme dans la troisième figure, et joignons ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Puisque ΑΔ est encore égal à ΔΒ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous démontrerons semblablement que ΖΓ est égal à ΖΑ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ; donc encore si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce

## 206 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς  $AB\Gamma^8$ .

Περὶ τὸ δευτὲρ ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

reliqua puncta, et erit circumscriptus circa  $AB\Gamma$  triangulum. Et describatur ut  $AB\Gamma$ .

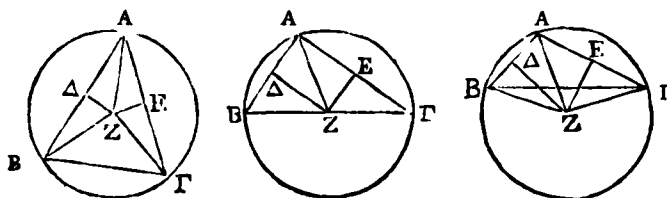
Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία

### COROLLARIUM.

Et manifestum est, quando quidem intra triangulum cadit centrum circuli, ipsum  $BA\Gamma$  angu-



νία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς  $B\Gamma$  εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ἔτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει<sup>9</sup>, ἢ ὑπὸ  $BA\Gamma$ , ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ<sup>10</sup> ἡμικυκλίου

lum, in segmento majore quam semicirculo existentem, minorem esse recto; quando autem in  $B\Gamma$  rectam centrum cadit, ipsum  $BA\Gamma$  angulum, in semicirculo existentem, rectum esse; quando vero centrum circuli extra triangulum cadit, ipsum  $BA\Gamma$ , in segmento minore quam semicir-

cercle passera par les points restants, et il sera circonscrit au triangle  $AB\Gamma$ . Qu'il soit circonscrit comme  $AB\Gamma$ .

Donc un cercle a été circonscrit dans un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

### COROLLAIRE.

Il est évident que si le centre du cercle tombe dans le triangle, l'angle  $BA\Gamma$  compris dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est plus petit qu'un angle droit; que si le centre du cercle tombe dans la droite  $B\Gamma$ , l'angle  $BA\Gamma$  compris dans un demi-cercle, est droit; que si enfin le centre du cercle tombe hors du triangle  $BA\Gamma$ , l'angle  $BA\Gamma$  compris dans un segment plus petit qu'un demi-

τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὡστε καὶ ὅταν ἐλάττωσιν ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ δεδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπίπτουσιν αἱ  $\Delta Z$ ,  $EZ$ . ὅταν δὲ ὀρθὴ, ἐπὶ τῆς  $B\Gamma$  ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐντὸς τῆς  $B\Gamma$ .

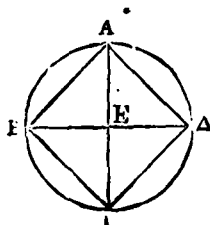
culo, majorem esse recto. Quare et quando minor recto est datus angulus, intra triangulum convenient  $\Delta Z$ ,  $EZ$ ; quando autem rectus, in  $B\Gamma$ ; quando vero major recto, extra  $B\Gamma$ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἰγγράψαι.  
Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ  $ΑΒΓΔ$ . διττὴ δὲ εἰς τὸν  $ΑΒΓΔ$  κύκλον τετράγωνον ἰγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum inscribere.  
Sit datus circulus  $ΑΒΓΔ$ ; oportet igitur in  $ΑΒΓΔ$  circulo quadratum inscribere.



Ἦχθασαν τοῦ  $ΑΒΓΔ$  κύκλου δύο<sup>2</sup> διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ . καὶ ἐπιζεύχθω αἱ  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$ ,  $ΔΑ$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ  $ΒΕ$  τῇ  $ΕΔ$ , κέντρον γὰρ τὸ  $Ε$ , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ΕΑ$ . βάσεις ἄρα ἡ  $ΑΒ$  βάσει τῇ  $ΑΔ$  ἴση ἐστί. Διὰ<sup>3</sup> τὰ αὐτὰ

Ducantur ipsius  $ΑΒΓΔ$  circuli duæ diametri  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  ad rectos inter se, et jungantur  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$ ,  $ΔΑ$ .

Et quoniam æqualis est  $ΒΕ$  ipsi  $ΕΔ$ , centrum enim  $Ε$ , communis autem et ad rectos ipsa  $ΕΑ$ ; basis igitur  $ΑΒ$  basi  $ΑΔ$  æqualis est. Propter

cercle, est plus grand qu'un angle droit. C'est pourquoi si l'angle donné est plus petit qu'un droit, les droites  $\Delta Z$ ,  $EZ$  se rencontreront dans le triangle; s'il est droit, elles se rencontreront dans  $B\Gamma$ , et s'il est plus grand qu'un droit, elles se rencontreront hors de la droite  $B\Gamma$ .

PROPOSITION VI.

Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Soit  $ΑΒΓΔ$  le cercle donné; il faut inscrire un quarré dans le cercle  $ΑΒΓΔ$ .

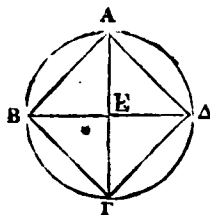
Menons les diamètres  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$  du cercle  $ΑΒΓΔ$  perpendiculaires l'un à l'autre (II. 1), et joignons  $ΑΒ$ ,  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$ ,  $ΔΑ$ .

Puisque  $ΒΕ$  est égal à  $ΕΔ$ , car le point  $Ε$  est le centre, et que la droite  $ΕΑ$  est commune et à angles droits, la base  $ΑΒ$  est égale à la base  $ΑΔ$  (4. 1).

## 208 LE QUATRIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  ἑκατέρα τῶν  $ΒΑ$ ,  $ΑΔ$  ἴση ἔστιν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓΔ$  τετράπλευρον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ  $ΒΔ$  εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ  $ΑΒΓΔ$  κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΒΑΔ$ · ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΒΑΔ$  γωνία<sup>4</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ  $ΑΒΓ$ ,  $ΒΓΔ$ ,  $ΓΔΑ$  ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθογώ-

eadem utique et utraque ipsarum  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  utrique ipsarum  $ΒΑ$ ,  $ΑΔ$  æqualis est ; æquilaterum igitur est  $ΑΒΓΔ$  quadrilaterum. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim  $ΒΔ$  recta diameter est ipsius  $ΑΒΓΔ$  circuli, semicirculum igitur est  $ΒΑΔ$  ; rectus igitur  $ΒΑΔ$  angulus. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum  $ΑΒΓ$ ,



νιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΑΒΓΔ$  τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα  $ΑΒΓΔ$  κύκλον<sup>5</sup>.

$ΒΓΔ$ ,  $ΓΔΑ$  rectus est ; rectangulum igitur est  $ΑΒΓΔ$  quadrilaterum. Ostensum est autem et æquilaterum ; quadratum igitur est. Et inscriptum est in dato  $ΑΒΓΔ$  circulo.

Εἰς ἄρα δοθέντα<sup>6</sup> κύκλον τὸν  $ΑΒΓΔ$  τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ  $ΑΒΓΔ$ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

In dato igitur circulo  $ΑΒΓΔ$  quadratum inscriptum est  $ΑΒΓΔ$ . Quod oportebat facere.

Par la même raison, chacune des droites  $ΒΓ$ ,  $ΓΔ$  est égale à chacune des droites  $ΒΑ$ ,  $ΑΔ$  ; donc le quadrilatère  $ΑΒΓΔ$  est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite  $ΒΔ$  est un diamètre du cercle  $ΑΒΓΔ$ , la figure  $ΒΑΔ$  est un demi-cercle. Donc l'angle  $ΒΑΔ$  est droit (31. 1). Par la même raison, chacun des angles  $ΑΒΓ$ ,  $ΒΓΔ$ ,  $ΓΔΑ$  est droit aussi ; donc le quadrilatère  $ΑΒΓΔ$  est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral ; donc ce quadrilatère est un carré. Et ce carré est inscrit dans le cercle  $ΑΒΓΔ$ .

Donc on a inscrit le carré  $ΑΒΓΔ$  dans le cercle donné  $ΑΒΓΔ$ . Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

PROPOSITIO VII.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

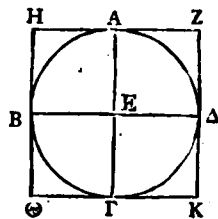
Εστω δοθὴς κύκλος ὁ' ΑΒΓΔ· διττὸν δὲ<sup>2</sup> περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἠχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτίμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et per Α, Β, Γ, Δ puncta ducantur contingentes ΑΒΓΔ circulum ipsæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.



Ἐπεὶ οὖν ἐφαπττεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἵσα· ὅν ἐπιζεύχεται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ<sup>3</sup> αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθὴ καὶ

Quoniam igitur contingit ΖΗ ipsum ΑΒΓΔ circulum, ab Ε autem centro ad contactum Α ducitur ΕΑ; ipsi igitur ad Α anguli recti sunt. Propter eadem utique et ad Β, Γ, Δ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est ΑΕΒ angulus, est autem rectus et ΕΒΗ; parallela

PROPOSITION VII.

Circonscrire un quarré à un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut circonscrire un quarré au cercle ΑΒΓΔ.

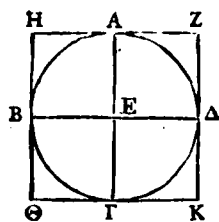
Menons dans le cercle ΑΒΓΔ, les deux diamètres ΑΓ, ΒΔ perpendiculaires l'un à l'autre, et par les points Α, Β, Γ, Δ menons les droites ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ tangentes au cercle ΑΒΓΔ (17. 3).

Puisque la droite ΖΗ est tangente au cercle ΑΒΓΔ, et que la droite ΕΑ a été menée du centre Ε au point de contact Α, les angles sont droits en Α (28. 3). Par la même rasion, les angles sont droits aux points Β, Γ, Δ. Et puisque l'angle ΑΕΒ est droit, et que l'angle ΕΒΗ est droit aussi, la droite ΗΘ est paral-



ἡ ὑπὸ EBH· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ τῇ ΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος<sup>4</sup>. Ὅσπερ καὶ ἡ HΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος<sup>5</sup>. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάτερα τῶν HZ, ΘΚ τῇ BEΔ ἐστὶ παράλληλος. Παράλληλόγραμμά ἐστι τὰ HK, ΗΓ, AK, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν HZ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ HΘ τῇ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκάτερα τῶν ΗΘ, ΖΚ<sup>7</sup>, ἡ δὲ ΕΔ ἑκα-

igitur est HΘ ipsi ΑΓ. Propter eadem utique et ΑΓ ipsi ΖΚ est parallela; quare et HΘ ipsi ΖΚ est parallela. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum HZ, ΘΚ ipsi BEΔ esse parallelam. Parallelograma igitur sunt HK, ΗΓ, AK, ΖΒ, ΒΚ; æqualis igitur est HZ quidem ipsi ΘΚ, ipsa vero HΘ ipsi ΖΚ. Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΒΔ, sed et ipsa quidem ΑΓ utrique ipsarum ΗΘ, ΖΚ, ipsa vero ΕΔ utrique ipsarum



τέρα τῶν HZ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκάτερα τῶν HZ, ΘΚ ἐστὶν ἴση<sup>8</sup>. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ZHΘΚ τετράπλευρον. Λέγω δὲ<sup>9</sup> ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ HBEA, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AEB· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ AHB. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ZHΘΚ τετράπλευρον<sup>10</sup>.

HZ, ΘΚ est æqualis; et uterque igitur ipsarum ΗΘ, ΖΚ utrique ipsarum HZ, ΘΚ est æqualis. Æquilaterum igitur est ZHΘΚ quadrilaterum. Dico et rectangulum. Quoniam enim parallelogrammum est HBEA, et est rectus AEB; rectus igitur et AHB. Similiter utique ostendemus et ipsos ad Θ, Κ, Ζ angulos rectos esse; rectangulum igitur est ZHΘΚ quadrilaterum. Os-

lèle à la droite ΑΓ (28. 1). Par la même raison, la droite ΑΓ est parallèle à la droite ΖΚ. Donc ΗΘ est parallèle à ΖΚ. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites HZ, ΘΚ est parallèle à la droite BEΔ. Donc les figures HK, ΗΓ, AK, ΖΒ, ΒΚ sont des parallélogrammes; donc HZ est égal à ΘΚ (34. 1), et ΗΘ égal à ΖΚ; et puisque ΑΓ est égal à ΒΔ, que ΑΓ est égal à l'une et à l'autre des droites ΗΘ, ΖΚ, et que ΒΔ est égal à l'une et à l'autre des droites HZ, ΘΚ, les droites ΗΘ, ΖΚ sont égales aux droites HZ, ΘΚ. Donc le quadrilatère ZHΘΚ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle, car puisque HBEA est un parallélogramme, et que l'angle AEB est droit, l'angle AHB est droit aussi (34. 1). Nous démontrerons semblablement que les angles sont droits en Θ, Κ, Ζ; donc le quadrilatère ZHΘΚ est rectangle; mais on

# LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 211

Εδίδθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον τετράγωνον ἄρα ἴστί.  
Καί περιγίγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγίγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

tensum est autem et æquilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa ΑΒΓΔ circum.

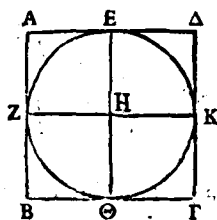
Circa datum igitur circumulum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.  
Εστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὲ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

## PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato circumulum inscribere.  
Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ quadrato circumulum inscribere.



Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ, δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεία, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ,

Secetur utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam in Ε, Ζ punctis, et per Ε quidem alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallela ducatur ΕΘ; per Ζ vero alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ducatur ΖΚ; parallelogramum igitur est unumquodque ipso-

a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔ.

On a donc circonscrit un quarré à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION VIII.

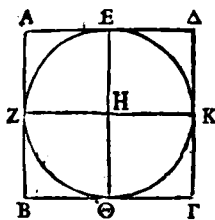
Inscrire un cercle dans un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut inscrire un cercle dans le quarré ΑΒΓΔ.

Coupons en deux parties égales l'une et l'autre des droites ΑΒ, ΑΔ aux points Ζ, Ε (10. 1), et par le point Ε menons ΕΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΓΔ (31. 1), et par le point Ζ menons aussi la droite ΖΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ; donc chacune des figures ΑΚ,

KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσὶ<sup>1</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΔ ἡμίση ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίση ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσὶν<sup>2</sup>, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρα τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν<sup>3</sup>. Ο ἄρα κέν-

rum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ, et opposita ipsorum latera utique æqualia sunt. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΒ, et est ipsius quidem ΑΔ dimidia ΑΕ, ipsius vero ΑΒ dimidia ΑΖ, æqualis igitur et ΑΕ ipsi ΑΖ; quare et opposita æqualia sunt, æqualis igitur et ΖΗ ipsi ΗΕ. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum ΗΘ, ΗΚ utrique ipsarum ΖΗ, ΗΕ esse æqualem. Quatuor igitur ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ æquales



τρον μὲν τῷ Η, διαστήματι διενὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάπτεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τιμῇ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐντὸς πιεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἀτοπον εἰδείχθη<sup>4</sup>. Οὐκ ἄρα ὁ

inter sesunt. Ipse igitur centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ rectas, propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Θ, Κ anguli; si enim secat circulus ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta intra cadet circulum, quod absurdum osten-

KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ est un parallélogramme, et leurs côtés opposés sont égaux (34. 1). Et puisque ΑΔ est égal à ΑΒ, que ΑΕ est la moitié de ΑΔ, et ΑΖ la moitié de ΑΒ, la droite ΑΕ est égale à ΑΖ; donc les côtés opposés sont égaux; donc ΖΗ est égal à ΗΕ. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΗΘ, ΗΚ est égale à l'une et à l'autre des droites ΖΗ, ΗΕ. Donc les quatre droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre H, et d'un intervalle égal à une des droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ passera par les autres points, et sera tangent aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, parce que les angles sont droits en Ε, Ζ, Θ, Κ; car si ce cercle coupait les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une de ses extrémités tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3). Donc le cercle décrit du centre H, et

# LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 213

κέντρο μὲν<sup>5</sup> τῷ Η, διαστήματι δὲ ἰσὺν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Εφάπτεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθέν<sup>6</sup> τετράγωνον κύκλος ἐγγράφεται. Ὅπερ εἶναι ποιεῖσθαι.

sum est. Non igitur centro quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ circulus descriptus secat ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ rectas. Continget igitur ipsas et erit inscriptus in ΑΒΓΔ quadrato.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

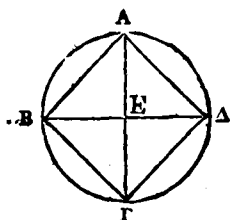
Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράφαι.

Εστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· διὸ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράφαι.

## PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ quadratum circulum circumscribere.



Επιζητούμεν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέσθαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Junctæ enim ΑΓ, ΒΔ, sese secant in Ε.

d'un intervalle égal à des droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ne coupe point les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Donc il sera tangent à ces droites, et il sera inscrit dans le quarré ΑΒΓΔ (déf. 5. 4).

Donc on a inscrit un cercle dans un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION IX.

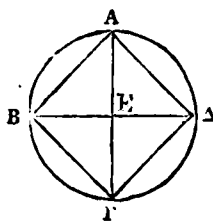
Circonscrire un cercle à un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut circonscrire un cercle au quarré ΑΒΓΔ. Joignons ΑΓ, ΒΔ, et que ces droites se coupent au point Ε.

214 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση<sup>1</sup>. γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ<sup>2</sup>. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ æqualis; angulus igitur æqualis est ΔΑΓ ipsi ΒΑΓ; ipse igitur ΔΑΒ angulus bifariam sectus est ab ΑΓ. Similiter utique ostendemus et unumquemque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ bifariam sectum esse ab ΑΓ, ΔΒ rectis. Et quoniam æqualis est ΔΑΒ angulus ipsi ΑΒΓ, et est ipsius quidem ΔΑΒ di-



μήμεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίμεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ εἰσὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκατέρα τῶν ΕΑ, ΕΒ εὐθειῶν ἐκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστὶν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο ἄρα κέντρω τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος

midius ipse ΕΑΒ, et ipsius ΑΒΓ dimidius ipse ΕΒΑ; et ΕΑΒ igitur ipsi ΕΒΑ est æqualis. Quare et latus ΕΑ lateri ΕΒ est æquale. Similiter utique ostendemus, et utramque ΕΑ, ΕΒ rectarum utrique ipsarum ΕΓ, ΕΔ æqualem esse; quatuor igitur ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ε, et intervallo unâ ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus tran-

Puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, et que la droite ΑΓ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ; ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8. 1); donc l'angle ΔΑΒ est coupé en deux parties égales par la droite ΑΓ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est coupé en deux parties égales par les droites ΑΓ, ΔΒ. Et puisque l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΑΒΓ, que l'angle ΕΑΒ est la moitié de l'angle ΔΑΒ, et l'angle ΕΒΑ la moitié de l'angle ΑΒΓ, l'angle ΕΑΒ est égal à l'angle ΕΒΑ; donc le côté ΕΑ est égal au côté ΕΒ (6. 1). Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΔ est égale à l'une et à l'autre des droites ΕΓ, ΕΔ; donc les quatre droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Ε, et d'un intervalle égal à une des droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ passera par les autres points,

γραφόμενος ἔξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγράφεται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sibit et per reliqua puncta, et erit circumscrip-  
tus circa ΑΒΓΔ quadratum. Circumscribatur  
ut ΑΒΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus cir-  
cumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

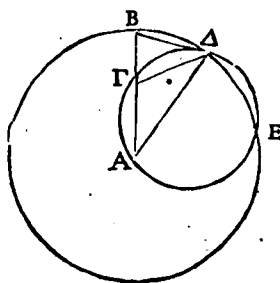
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκα-  
τέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διαπλάσιναι  
τῆς λοιπῆς.

Εκκείσθω τις εὐθεΐα ἡ ΑΒ, καὶ τετμησθῶ κατὰ  
τὸ Γ σημείον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιχο-

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere, habens utrum-  
que ipsorum ad basim angulorum duplum re-  
liqui.

Exponatur aliqua recta ΑΒ, et secetur in Γ  
puncto, ita ut ipsum sub ΑΒ, ΒΓ contentum



μινον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τε-  
τραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α, καὶ διαστήματι τῷ  
ΑΒ' κύκλος περιγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν

rectangulum æquale sit ipsi ex ΓΑ quadrato;  
et centro Α, et intervallo ΑΒ circulus descri-  
batur ΒΔΕ, et aptetur in ΒΔΕ circulo ipsi ΑΓ

et il sera circonscrit au carré ΑΒΓΔ. Qu'il soit circonscrit comme  
ΑΒΓΔ.

Donc on a circonscrit un cercle à un carré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Construire un triangle isocele, qui ait chacun des angles de la base double  
de l'angle restant.

Soit une droite ΑΒ; que cette droite soit coupée en un point Γ, de manière  
que le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ soit égal au carré de ΓΑ (11. 2); du  
centre Α et de l'intervalle ΑΒ décrivons le cercle ΒΔΕ (dém. 3); dans le cercle

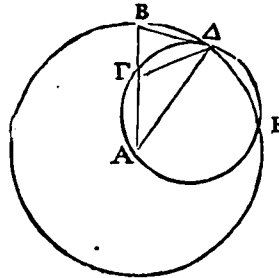
## 216 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθείᾳ ἡ ΒΔ· καὶ ἐπιζεύχουσιν αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ

rectæ, non majori existenti ipsâ ΒΔΓ circuli diametro, æqualis recta ΒΔ; et jungantur ΑΔ, ΓΔ, et circumscribatur circa ΑΓΔ triangulum circulus ΑΓΔ.

Et quoniam ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est quadrato ex ΑΓ, æqualis autem ΑΓ, ipsi ΒΔ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΓ æquale est ipsi ex ΒΔ. Et quoniam extra circulum ΑΓΔ sumptum est



Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπιπτῶσιν δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐν ἀλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ

aliquod punctum Β, et a Β in ΑΓΔ circulum cadunt duæ rectæ ΒΑ, ΒΔ, et altera quidem ipsarum secat, altera vero incidit; et est ipsum sub ΑΒ, ΒΓ æquale ipsi ex ΒΔ; ipsa ΒΔ igitur contingit ΑΓΔ. Et quoniam contingit quidem ipsa ΒΔ, a contactu vero ad Δ ducta est ΔΓ; ipse igitur ΒΔΓ angulus æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo ΔΓΑ. Quoniam igitur æ-

ΒΔΕ adaptons une droite ΒΔ égale à la droite ΑΓ, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle ΒΔΕ (1. 4); joignons ΑΔ, ΓΔ, et circonscrivons le cercle ΑΓΔ au triangle ΑΓΔ (5. 4).

Puisque le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré ΑΓ, et que ΑΓ est égal à ΒΔ, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΒΔ. Et puisque le point Β a été pris hors du cercle ΑΓΔ, que les droites ΒΑ, ΒΔ vont du point Β au cercle ΑΓΔ, que l'une d'elles le coupe, et que l'autre ne le coupe point, et que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est égal au carré de ΒΔ, la droite ΒΑ est tangente au cercle ΑΓΔ (37. 3). Donc, puisque la droite ΒΔ est tangente, et que la droite ΔΓ a été menée du point de contact Δ, l'angle ΒΔΓ est égal à

ΔΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείμεναι ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνία<sup>5</sup> τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίου<sup>6</sup>. Ἰση δὲ καὶ<sup>7</sup> ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ<sup>8</sup>. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

Ἰσοσκελεὶς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίου τῆς λοιπῆς. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

qualis est ΒΔΓ ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ. Totus igitur ΒΔΑ æqualis est duobus ΓΔΑ, ΔΑΓ. Sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ æqualis est exterior ΒΓΔ; ipse igitur ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. Sed ΒΔΑ ipsi ΓΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΔΑ ipsi ΑΒ est æquale; quare et ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ est æqualis. Tres igitur ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΒΓΔ, æquale est et latus ΒΔ lateri ΔΓ. Sed ΒΔ ipsi ΓΑ ponitur æqualis; et ΑΓ igitur ipsi ΓΔ est æqualis; quare et angulus ΓΔΑ angulo ΔΑΓ est æqualis; ipsi igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ ipsius ΔΑΓ sunt dupli. Æqualis autem et ΒΓΔ ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ; et ΒΓΔ igitur ipsius ΔΑΓ est duplus. Æqualis autem et ΒΓΔ utrique ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ; et uterque igitur ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΒΑΔ est duplus.

Isosceles igitur triangulum constitutum est ΑΔΒ habens utrumque ipsorum ad ΑΒ basim angulorum duplum reliqui. Quod oportebat facere.

l'angle ΔΑΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΑΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔΑ, l'angle entier ΒΔΑ sera égal aux deux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ. Mais l'angle extérieur ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Mais l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΓΒΔ (5. 1), puisque le côté ΔΑ est égal au côté ΑΒ; donc l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Donc les trois angles ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, le côté ΒΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté ΒΔ est supposé égal au côté ΓΑ; donc le côté ΑΓ est égal au côté ΓΔ; donc l'angle ΓΔΑ est égal à l'angle ΔΑΓ (5. 1); donc les angles ΓΔΑ, ΔΑΓ sont doubles de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΓΔ est double de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal à chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ; donc chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ est double de l'angle ΒΑΔ.

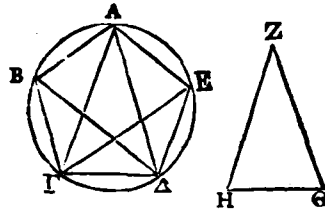
Donc on a construit un triangle isocèle ΑΔΒ, ayant chacun des angles de la base ΒΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εἰσὼ οὗτος κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι'.



Εκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιών τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ

In dato circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Exponatur triangulum isosceles ΖΗΘ, duplum habens utrumque ipsorum ad Η, Θ angulorum ipsius ad Ζ, et inscribatur in ΑΒΓΔΕ circulo, ipsi ΖΗΘ triangulo æquiangulum triangulum ΑΓΔ, ita ut ipsi quidem Ζ angulo æqualis sit ipse ΓΑΔ, uterque vero ipsorum ad Η, Θ æqualis utrique ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ; et uterque igitur ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ ipsius ΓΑΔ est duplus. Sec-

## PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut inscrire dans le cercle ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ΖΗΘ, ayant chacun des angles en Η, Θ double de l'angle Ζ (10. 4); inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le triangle ΑΓΔ équiangle avec le triangle ΖΗΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓΑΔ soit égal à l'angle Ζ, et que chacun des angles Η, Θ soit égal à chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ; chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ sera double de l'angle ΓΑΔ. Coupons chacun des angles ΑΓΔ

ΓΑΔ ἔστι διπλῇ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας<sup>3</sup> τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ<sup>4</sup>.

Επεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίον ἔστι τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειάς ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτίθουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἔστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Επεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερίᾳ ἔστιν ἴση<sup>5</sup>, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΔΓΒ περιφερίᾳ ἔστιν ἴση<sup>6</sup>. Καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερίας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερίας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία<sup>7</sup> τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἔστιν ἴση<sup>8</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκα-

tur autem uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam ab utrâque ipsarum ΓΕ, ΔΒ rectarum, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Quoniam igitur uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ angulorum duplus est ipsius ΓΑΔ; et secti sunt bifariam à ΓΕ, ΔΒ rectis; quinque igitur anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistant; quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; quinque igitur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Dico et æquiangulum. Quoniam enim ΑΒ circumferentia ipsi ΔΕ circumferentiæ est æqualis, communis addatur ΒΓΔ; tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti ΕΔΓΒ circumferentiæ est æqualis. Et insistent ipsi quidem ΑΒΓΔ circumferentiæ angulus ΑΕΔ, ipsi vero ΕΔΓΒ circumferentiæ angulus ΒΑΕ, et ΒΑΕ igitur angulus ipsi ΑΕΔ est æqualis. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ angulo-

ΓΑΔ en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ (9. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Puisque chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ est double de l'angle ΓΑΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ, les cinq angles ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3); donc les cinq arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc les cinq droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égales entr'elles; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΑΒ est égal à l'arc ΔΕ, ajoutons l'arc commun ΒΓΔ; l'arc entier ΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒ. Mais l'angle ΑΕΔ est appuyé sur l'arc ΑΒΓΔ, et l'angle ΒΑΕ sur l'arc ΕΔΓΒ; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΑΕΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ est égal à chacun des angles ΒΑΕ,

## 220 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τίρα τῶν ὑπὸ BAE, AED ἴσιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἴστί τὸ ABΓΔΕ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράφεται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράφει.

Εστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ABΓΔΕ· δι' δὲ περὶ τὸν ABΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράφει.



Νενόσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεία, τὰ A, B, Γ, Δ, E, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA περιφερείας·

rum utrique ipsorum BAE, AED est æqualis; æquiangulum igitur est ABΓΔΕ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum;

In dato igitur circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABΓΔΕ; oportet igitur circa ABΓΔΕ circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Intelligantur inscripti pentagoni angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E, ita ut æquales sint AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA circumferentiæ; et per A,

AED; donc le pentagone ABΓΔΕ est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XII.

Circonscrire à un cercle donné un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ABΓΔΕ le cercle donné; il faut au cercle ABΓΔΕ circonscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Concevons que A, B, Γ, Δ, E soient les sommets des angles du pentagone inscrit (11. 4), de manière que les arcs AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA soient égaux;

καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύ-  
κλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ·  
καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ,  
καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ  
ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου  
ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐτίθεται ἡ ΖΓ· ἡ  
ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὁρθὴ ἄρα  
ἐστίν<sup>1</sup> ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιών. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι  
ὁρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὁρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γω-  
νία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  
ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ,  
ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ<sup>2</sup>. ὥστε τὰ<sup>3</sup> ἀπὸ τῶν  
ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὡν  
τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον·  
λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπὸν<sup>4</sup> τῷ ἀπὸ  
τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ<sup>5</sup>. Καὶ  
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο  
δὲ αἱ ΒΖ, ΖΚ δύοι ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ  
βάσεις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα  
ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ

Β, Γ, Δ, Ε ducantur circulum contingentes  
ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ; et sumatur ΑΒΓΔΕ  
circuli centrum Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ,  
ΖΛ, ΖΔ.

Et quoniam recta quidem ΚΛ contingit  
ΑΒΓΔΕ circulum in Γ, ab ipso vero Ζ centro  
in contactum ad Γ ducta est ΖΓ; ergo ΖΓ per-  
pendicularis est ad ΚΛ; rectus igitur est uterque  
ipsorum ad Γ angulorum. Propter eadem uti-  
que et ipsi ad Β, Δ puncta anguli recti sunt.  
Et quoniam rectus est ΖΓΚ angulus, ipsum igitur  
ex ΖΚ æquale est ipsis ex ΖΓ, ΓΚ. Propter  
eadem utique et ipsis ex ΖΒ, ΒΚ æquale est ip-  
sum ex ΖΚ; quare ipsa ex ΖΓ, ΓΚ ipsis ex ΖΒ,  
ΒΚ æqualia sunt, quorum ipsum ex ΖΓ ipsi ΖΒ  
est æquale; reliquum igitur ex ΓΚ reliquo  
ex ΒΚ est æquale; æqualis igitur ΓΚ ipsi ΒΚ.  
Et quoniam æqualis est ΖΒ ipsi ΖΓ, et communis  
ΖΚ, duæ utique ΒΖ, ΖΚ duabus ΓΖ, ΖΚ æquales  
sunt, et basis ΒΚ basi ΓΚ est æqualis; angulus  
igitur quidem ΒΖΚ angulo ΚΖΓ est æqualis,  
ipse vero ΒΚΖ ipsi ΖΚΓ est æqualis; duplus igitur

par les points Α, Β, Γ, Δ, Ε, menons au cercle les tangentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ (17. 3); prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓΔΕ, et joignons ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Puisque la droite ΚΛ touche le cercle ΑΒΓΔΕ au point Γ, et que la droite ΖΓ est menée du centre Ζ au point de contact Γ, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΚΛ (18. 3); donc chacun des angles en Γ est droit. Chacun des angles aux points Β, Δ est droit, par la même raison. Et puisque l'angle ΖΓΚ est droit, le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΓ, ΓΚ (47. 1). Le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ, par la même raison; donc les carrés des droites ΖΓ, ΓΚ sont égaux aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ; mais le carré de ΖΓ est égal au carré de ΖΒ; donc le carré restant de ΓΚ est égal au carré restant de ΒΚ; donc ΓΚ est égal à ΒΚ. Et puisque ΖΒ est égal à ΖΓ, et que la droite ΖΚ est commune, les deux droites ΒΖ, ΖΚ sont égales aux deux droites ΓΖ, ΖΚ; mais la base ΒΚ est égale à la base ΓΚ; donc l'angle ΒΖΚ

δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἔστιν ἴση<sup>6</sup>. διπλῇ ἄρα  
 ἢ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἢ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς  
 ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ  
 τῆς ΓΖΔ ἔστι διπλῇ, ἢ δὲ ὑπὸ ΓΑΔ τῆς ὑπὸ  
 ΓΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἢ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ,  
 ἴση ἔστι καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. Καὶ  
 ἔστιν ἢ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῇ, ἢ δὲ  
 ὑπὸ ΔΖΓ διπλῇ<sup>7</sup> τῆς ὑπὸ ΑΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἢ  
 ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ἢ ὑπὸ ΖΓΚ

tur ipse quidem  $\text{BZ}\Gamma$  ipsius  $\text{KZ}\Gamma$ , ipse vero  $\text{BK}\Gamma$  ipsius  $\text{ZK}\Gamma$ . Propter eadem utique et ipse quidem  $\Gamma\text{Z}\Delta$  ipsius  $\Gamma\text{Z}\Lambda$  est duplus, ipse vero  $\Gamma\Delta\Delta$  ipsius  $\Gamma\text{AZ}$ . Et quoniam æqualis est  $\text{B}\Gamma$  circumferentia ipsi  $\Gamma\Delta$ , æqualis est et angulus  $\text{BZ}\Gamma$  ipsi  $\Gamma\text{Z}\Delta$ . Et est ipse quidem  $\text{BZ}\Gamma$  ipsius  $\text{KZ}\Gamma$  duplus, ipse vero  $\Delta\text{Z}\Gamma$  duplus ipsius  $\Lambda\text{Z}\Gamma$ ; æqualis igitur et  $\text{KZ}\Gamma$  ipsi  $\Lambda\text{Z}\Gamma$ ; est autem et  $\text{Z}\Gamma\text{K}$  angulus ipsi  $\text{Z}\Gamma\Lambda$  æqualis. Duo utique triangula sunt  $\text{ZK}\Gamma$ ,  $\text{Z}\Delta\Gamma$  duos an-



γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση<sup>8</sup>. Δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶν  
τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις  
ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ<sup>10</sup>, καὶ μίαν πλευ-  
ρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ  
τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς  
ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γω-  
νίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ  
ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

gulos duobus angulis æquales habentia utrumque utrique , et unum latus uni lateri æquale , commune ipsis ipsum  $Z\Gamma$  , et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt , et reliquum angulum reliquo angulo ; æqualis igitur ipsa quidem  $K\Gamma$  recta ipsi  $\Gamma A$  , ipse vero  $ZK\Gamma$  angulus ipsi  $Z\Gamma A$  . Et quoniam æqualis est  $K\Gamma$  ipsi  $\Gamma A$  , dupla igitur  $KA$  ipsius  $K\Gamma$  . Propter eadem

est égal à l'angle  $KZ\Gamma$ , et l'angle  $BKZ$  à l'angle  $ZK\Gamma$  (8. 1); donc l'angle  $BZ\Gamma$  est double de l'angle  $KZ\Gamma$ , et l'angle  $BK\Gamma$  double de l'angle  $ZK\Gamma$ . Par la même raison, l'angle  $Z\Gamma\Delta$  est double de l'angle  $\Gamma Z\Lambda$ , et l'angle  $\Gamma\Lambda\Delta$  double de l'angle  $\Gamma\Lambda Z$ . Et puisque l'arc  $B\Gamma$  est égal à l'arc  $\Gamma\Delta$ , l'angle  $BZ\Gamma$  est égal à l'angle  $\Gamma Z\Delta$  (27. 3). Mais l'angle  $BZ\Gamma$  est double de l'angle  $KZ\Gamma$ , et l'angle  $\Delta Z\Gamma$  double de l'angle  $\Lambda Z\Gamma$ ; donc l'angle  $KZ\Gamma$  est égal à l'angle  $\Lambda Z\Gamma$ ; mais l'angle  $Z\Gamma K$  est égal à l'angle  $Z\Gamma\Lambda$ ; donc les triangles  $ZK\Gamma$ ,  $Z\Lambda\Gamma$  ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, le côté  $Z\Gamma$ , qui leur est commun; donc ces deux triangles ont les côtés restants égaux aux côtés restants, et l'angle restant égal à l'angle restant (26. 1); donc la droite  $K\Gamma$  est égale à la droite  $\Gamma\Lambda$ , et l'angle  $ZK\Gamma$  est égal à l'angle  $Z\Lambda\Gamma$ . Mais  $K\Gamma$  est égal à  $\Gamma\Lambda$ ; donc

ἡ ΚΓ τῇ ΓΑ, διπλῇ ἄρα ἢ ΚΑ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ διχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῇ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση<sup>11</sup>· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΑ ἔστιν ἴση. Ομοίως δὲ διχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΑ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἔστι τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, καὶ ἰδίχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῇ ἢ ὑπὸ ΘΚΑ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΑΓ διπλῇ ἢ ὑπὸ ΚΑΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΑΜ ἔστιν ἴση. Ομοίως δὲ διχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΚΑΜ ἴση· αἱ πῖντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγύραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

utique ostendetur, et ΘΚ ipsius ΒΚ dupla. Et est ΒΚ ipsi ΚΓ æqualis; et ΘΚ igitur ipsi ΚΑ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unaquæque ipsarum ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ utrique ipsarum ΘΚ, ΚΑ æqualis; æquilaterum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Dico autem et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΚΓ angulus ipsi ΖΑΓ, et ostensus est ipsius quidem ΖΚΓ duplus ipse ΘΚΑ, ipsius vero ΖΑΓ duplus ipse ΚΑΜ; et ΘΚΑ igitur ipsi ΚΑΜ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unusquisque ipsorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ utrique ipsorum ΘΚΑ, ΚΑΜ æqualis; quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ æquales inter se sunt. Æquiangulum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et circumscriptum est circa ΑΒΓΔΕ circum. Quod oportebat facere.

ΚΑ est double de ΚΓ. On démontrera de la même manière que ΘΚ est double de ΒΚ. Mais ΒΚ est égal à ΚΓ; donc ΘΚ est égal à ΚΑ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ est égale à l'une et à l'autre des droites ΘΚ, ΚΑ; donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle; car puisque l'angle ΖΚΓ est égal à l'angle ΖΑΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΘΚΑ est double de l'angle ΖΚΓ, et l'angle ΚΑΜ double de l'angle ΖΑΓ, l'angle ΘΚΑ est égal à l'angle ΚΑΜ. On démontrera semblablement que chacun des angles ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ est égal à l'un et à l'autre des angles ΘΚΑ, ΚΑΜ; donc les cinq angles ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ sont égaux entr'eux. Donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équiangle. Mais nous avons démontré qu'il est équilatéral, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔΕ. Ce qu'il fallait faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

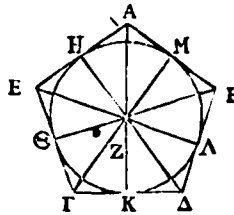
## PROPOSITIO XIII.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

In dato pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum inscribere.

Sit datum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inscribere.



Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἶσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστὶ<sup>3</sup>. βάσεις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶ ἴσον<sup>4</sup>,

Secetur enim uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utrâque ipsarum ΓΖ, ΔΖ rectarum; et a Ζ puncto, in quo conveniunt inter se ΓΖ, ΔΖ rectæ, ducantur ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectæ. Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ utique ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ æquales sunt, et angulus ΒΓΖ angulo ΔΓΖ æqualis est; basis igitur ΒΖ basi ΔΖ est æqualis, et ΒΖΓ triangulum ipsi ΔΖΓ triangulo est æquale,

## PROPOSITION XIII.

Dans un pentagone équilatéral et équiangle donné, inscrire un cercle.

Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut inscrire un cercle dans le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Coupons chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ en deux parties égales par les droites ΓΖ, ΔΖ (9. 1); et du point Ζ où les deux droites ΓΖ, ΔΖ se rencontrent, menons les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque ΒΓ est égal à ΓΔ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΒΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΔΓ, ΓΖ; mais l'angle ΒΓΖ est égal à l'angle ΔΓΖ; donc la base ΒΖ est égale à la base ΔΖ (4. 1), et le triangle ΒΖΓ est égal au triangle ΔΖΓ, et les angles restants

καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται<sup>5</sup>, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ<sup>6</sup>, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ηχθωσαν δὲ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ<sup>7</sup> τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς<sup>8</sup> δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθετῇ. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστὶν· αἱ πέντε

et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΓΒΖ angulus ipsi ΓΔΖ. Et quoniam duplus est ΓΔΕ ipsius ΓΔΖ, æqualis autem ipse quidem ΓΔΕ ipsi ΑΒΓ, ipse vero ΓΔΖ ipsi ΓΒΖ, et ΓΒΑ igitur ipsius ΓΒΖ est duplus; æqualis igitur ΑΒΖ angulus ipsi ΖΒΓ. Ergo ΑΒΓ angulus bifariam secatur à ΒΖ rectâ. Similiter utique ostendetur et utrumque ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ bifariam secari ab utrâque ipsarum ΖΑ, ΖΕ rectarum. Ducantur autem à Ζ puncto ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ rectas perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Et quoniam æqualis est ΘΓΖ angulus ipsi ΚΓΖ, est autem et rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis, duo utique triangula sunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsorum ΖΓ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur ΖΘ perpendicularis ipsi ΖΚ perpendiculari. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΑ, ΖΜ, ΖΗ, utrique ipsarum ΖΘ,

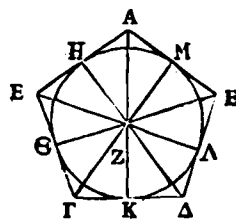
égaux aux angles restants, ceux qui soutendent des côtés égaux (4. 1); donc l'angle ΓΒΖ est égal à l'angle ΓΔΖ. Et puisque l'angle ΓΔΕ est double de l'angle ΓΔΖ, que ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΓ, et que ΓΔΖ est égal à ΓΒΖ, l'angle ΓΒΑ est double de l'angle ΓΒΖ; donc l'angle ΑΒΖ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc l'angle ΑΒΓ est coupé en deux parties égales par la droite ΒΖ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΑ, ΖΕ. Du point Ζ menons sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ les perpendiculaires ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Puisque l'angle ΘΓΖ est égal à l'angle ΚΓΖ, et que l'angle droit ΖΘΓ est égal à l'angle droit ΖΚΓ, les deux triangles ΖΘΓ, ΖΚΓ auront deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΖΓ qui soutend un des angles égaux; ils auront donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc la perpendiculaire ΖΘ est égale à la perpendiculaire ΖΚ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΑ, ΖΜ, ΖΗ est égale à l'une et à l'autre



## 226 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα εὐθείαι αἱ  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ  $Z$ , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπτεται τῶν  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς  $H, \Theta, K, \Lambda, M$  σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπτεται αὐτῶν, ἀλλὰ τιμῇ αὐτάς, συμβύσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς

$ZK$  æqualem esse ; quicunque igitur rectæ  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  æquales inter se sunt. Ergo centro  $Z$ , intervallo vero unâ ipsarum  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  rectas ; propterea quod recti sunt ad  $H, \Theta, K, \Lambda, M$  puncta anguli. Si enim non contingit ipsas, sed secat ipsas, eveniet ut ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta



πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἀτοπον εἰδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῷ  $Z$ , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος, τιμῇ τὰς  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  εὐθείας. Εφαπτεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ  $H\Theta K\Lambda M$ .

intra cadat circulum, quod absurdum ostensum est. Non igitur centro  $Z$ , intervallo vero unâ ipsarum  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  rectarum descriptus circulus secabit ipsas  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  rectas ; continget igitur ipsas. Describatur ut  $H\Theta K\Lambda M$ .

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τι καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

In dato igitur pentagono, quod est æquilateralumque et æquiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

des droites  $Z\Theta, ZK$  ; donc les cinq droites  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$  sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre  $z$ , et d'un intervalle égal à une des droites  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ , passera par les autres points, et touchera les droites  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ , parce que les angles sont droits en  $H, \Theta, K, \Lambda, M$ . Car s'il ne les touchait pas, et s'il les coupait, la perpendiculaire menée d'une de ses extrémités au diamètre, tomberait dans le cercle ; ce qui a été démontré absurde (16. 3) ; donc le cercle décrit du centre  $z$ , et d'un intervalle égal à une des droites  $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ , ne coupera point les droites  $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$  ; donc il les touchera. Décrivons le cercle  $H\Theta K\Lambda M$ .

Donc on a inscrit un cercle dans un pentagone équilatéral et équiangle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

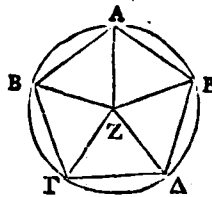
PROPOSITIO XIV.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum circumscribere.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Sit datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulum circumscribere.



Τετμήσθω δὴ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπιζυχθῶσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ομοίως δὲ τὸ πρὸς τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία

Secetur quidem uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utraque ipsarum ΓΖ, ΖΔ, et a Ζ puncto, in quo conveniunt rectæ, ad Β, Α, Ε puncta ducantur rectæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Similiter utique ut antea ostendetur et unumquemque ipsorum ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ angulorum bifariam secari ab unaquaque ipsarum ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectarum. Et quoniam æqualis est

PROPOSITION XIV.

Circonscrire un cercle à un pentagone équilatéral et équiangle donné.

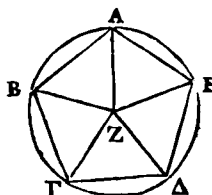
Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut au pentagone ΑΒΓΔΕ circonscrire un cercle.

Coupons en deux parties égales chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ par les droites ΓΖ, ΖΔ (9. 1), et du point Ζ où ces droites se rencontrent, menons aux points Β, Α, Ε les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Nous démontrerons, comme auparavant, que chacun des angles ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque l'angle ΒΓΔ est égal à l'angle ΓΔΕ, et

# 228 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμί-  
σεια ἢ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ  
ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση·  
ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση.  
Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ,  
ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε  
ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλή-

ΒΓΔ angulus ipsi ΓΔΕ, et est ipsius quidem  
ΒΓΔ dimidius ipse ΖΓΔ, ipsius vero ΓΔΕ di-  
midius ΓΔΖ, et ΖΓΔ igitur ipsi ΖΔΓ est æqualis;  
quare et latus ΖΓ lateri ΖΔ est æquale. Similiter  
utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΒ,  
ΖΑ, ΖΕ utrique ipsarum ΖΓ, ΖΔ esse æqua-  
lem; quinque igitur rectæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ



λαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρον τῷ Ζ, καὶ διαστήματι<sup>3</sup>  
ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμε-  
νος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται  
περιγεγραμμένος<sup>4</sup>. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ  
ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν<sup>5</sup> πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσό-  
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγράφεται.  
Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ζ et in-  
tervallo unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ cir-  
culus descriptus transibit et per reliqua puncta,  
et erit circumscriptus. Circumscribatur, et sit  
ΑΒΓΔΕ.

Circa datum igitur pentagonum, quod est  
æquilaterumque et æquiangulum, circulus cir-  
cumscriptus est. Quod oportebat facere.

que l'angle ΖΓΔ est la moitié de l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΔΖ la moitié de l'angle  
ΓΔΕ, l'angle ΖΓΔ est égal à l'angle ΖΔΓ; donc le côté ΖΓ est égal au côté ΖΔ  
(6. 1). On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ  
est égale à chacune des droites ΖΓ, ΖΔ; donc les cinq droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ,  
ΖΕ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du point Ζ et d'un intervalle  
égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ passera par les autres points, et sera  
circonsrit. Qu'il soit circonsrit, et qu'il soit ΑΒΓΔΕ.

Donc un cercle a été circonsrit à un pentagone équilatéral et équiangle  
donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

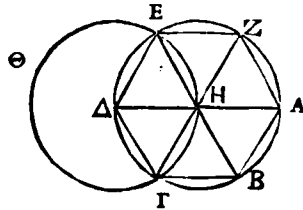
PROPOSITIO XV.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

In dato circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕΖ ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕΖ circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεία, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἴστί καὶ ἰσογώνιον.

Επεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἴστί τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἴστί ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ

Ducatur ΑΒΓΔΕΖ circuli diameter ΑΔ, et sumatur centrum circuli Η, et centro quidem Δ, intervallo vero ΔΗ circulus describatur ΕΗΓΘ, et junctæ ΕΗ, ΓΗ producantur ad Β, Ζ puncta, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ; dico ΑΒΓΔΕΖ hexagonum æquilaterumque esse et æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum est ΑΒΓΔΕΖ circuli, æqualis est ΗΕ ipsi ΗΔ. Rur-

PROPOSITION XV.

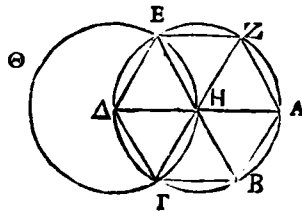
Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné ; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à

Δ σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ΑΛΛ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, ἐπειδὴ περ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν.



Ομοίως δὲ δείχνησεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἑξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ,

sus, quoniam Δ punctum centrum est ΕΗΓΘ circuli, æqualis est ΔΕ ipsi ΔΗ. Sed ΗΕ ipsi ΗΔ ostensa est æqualis, ΗΕ igitur ipsi ΕΔ æqualis est; æquilaterum igitur est ΕΗΔ triangulum, et tres igitur ipsius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ æquales inter se sunt, quia isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales; ipse igitur ΕΗΔ angulus tertia pars

est duorum rectorum. Similiter utique ostendetur et ΔΗΓ tertia pars duorum rectorum. Et quoniam ΓΗ recta super ΕΒ insistens deinceps angulos ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales facit, et reliquus igitur ΓΗΒ tertia pars est duorum rectorum; ipsi igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ anguli æquales inter se sunt; quare et ad verticem ipsi ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales sunt ipsis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ; sex igitur anguli ΕΗΔ,

ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits; donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ

ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἔξ ἄρα περιφέρειαι αἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας αἱ<sup>2</sup> ἴσαι εὐθεΐαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἔξ ἄρα εὐθεΐαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἐξάγωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείμεναι ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ<sup>3</sup> ὅλη τῇ ΕΔΓΒΑ<sup>4</sup> ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφέρειας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφέρειας<sup>5</sup> ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ομοίως δὲ<sup>6</sup> δειχθήσονται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἐξάγωνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ<sup>7</sup> τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἐξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγράπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τῶν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

AHZ, ZHE sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs AB, BG, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἄquales inter se sunt. Ἄquales autem anguli ἄqualibus circumferentiis insistent; sex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἄquales inter se sunt. Ἄquales autem circumferentias ἄquales rectæ subtendunt; sex igitur rectæ ἄquales inter se sunt; ἄquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum; dico etiam et ἄquiangulum. Quoniam enim ἄqualis est ΖΑ circumferentia ipsi ΕΔ circumferentiæ, communis addatur ΑΒΓΔ circumferentia; tota igitur ΖΑΒΓΔ toti ΕΔΓΒΑ est ἄqualis, et insistent quidem ipsi ΖΑΒΓΔ circumferentiæ ipse ΖΕΔ angulus, ipsi vero ΕΔΓΒΑ circumferentiæ ipse ΑΖΕ angulus. Ἄqualis igitur ΑΖΕ angulus ipsi ΖΕΔ. Similiter utique ostendetur et reliquos angulos ipsius ΑΒΓΔΕΖ hexagoni secundum unum ἄquales esse alterutri ipsorum ΑΖΕ, ΖΕΔ angulorum. Ἄquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. Ostensum est autem et ἄquilaterum, et inscriptum est in ΑΒΓΔΕΖ circulo.

In dato igitur circulo hexagonum ἄquilaterumque et ἄquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ εἰὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων<sup>8</sup> ἑφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφῆσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν<sup>9</sup>.

## COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus æquale esse ipsi ex circuli centro.

Et si per Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ puncta contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum æquilaterumque et æquiangulum, congruenter eis de pentagono dictis. Et etiam congruenter eis de pentagono dictis, in dato hexagono circulum inscribemusque et circumscribemus.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· διὸ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

## PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

## COROLLAIRE.

De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

Semblablement si par les points Α, Β, Δ, Γ, Ε, Ζ nous menons des tangentes au cercle, on circonscrira à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscrirons un cercle à un hexagone donné.

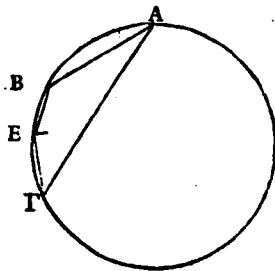
## PROPOSITION XVI.

Inscrire dans un cercle donné un quindecagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindecagone équilatéral et équiangle.

Εγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἷον ἄρα ἴστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἴσται πέντε. ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὔσα τοῦ κύκλου, ἴσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω

Inscribatur in ΑΒΓΔ circulo trianguli quidem æquilateri in ipso inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri ipsum ΑΒ; qualium igitur est ΑΒΓΔ circulus æqualium segmentorum quindecim, talium ΑΒΓ quidem circumferentia tertia pars existens circuli erit quinque; ΑΒ vero circumferentia, quinta existens circuli, erit trium; reliqua igitur ΒΓ æqualium duarum. Secetur



ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντικαίδεκατον ἴσται<sup>2</sup> τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Εὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας<sup>3</sup>, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἵναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἴσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντικαίδεκγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΓ bifariam in Ε, utraq̃ue igitur ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima erit ΑΒΓΔ circuli. Si igitur jungentes ipsas ΒΕ, ΕΓ rectas, æquales ipsis in continuum rectas aptemus in ΑΒΓΔ circulo, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Quod oportebat facere.

Inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le côté ΑΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté ΑΒ d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ΑΒΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ΑΒΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc ΑΒ qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant ΒΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant ΒΓ en deux parties égales au point Ε (30. 3), chacun des arcs ΒΕ, ΕΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓΔ. Donc, si ayant joint les droites ΒΕ, ΕΓ, nous adaptons dans le cercle ΑΒΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindecagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.



## 234 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ομοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἂν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἱφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημίνοισι<sup>4</sup>, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαϊδεκάγωνον, ὃ ἔστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον<sup>5</sup>, κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν<sup>6</sup>.

Congruenter autem eis quæ de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circumducamus, circumscribetur circa circum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Et insuper congruenter eis de pentagono dictis, et in dato quindecagono circum inscribemus et circumscribemus.

Conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, si par les points de divisions d'un cercle, on mène des tangentes à ce cercle, on circonscrira à ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. De plus, conformément à ce qui a été dit pour les démonstrations du pentagone, nous inscrirons et nous circonscrirons une circonférence de cercle à un quindécagone équilatéral et équiangle donné.

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R Q U I N T U S.

---

#### ΟΡΟΙ.

α. Μέρος ἐστὶ μέγθος μεγίθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρήῃ τὸ μείζον.

β. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρήται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ. Λόγος ἐστὶ δύο μεγιθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σκέσις'.

#### DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando mensurat majorem.

2. Multiplex autem major minoris, quando mensuratur a minore.

3. Ratio est duorum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem inter se quædam habitudo.

## LIVRE CINQUIEME

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

δ'. Αναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης<sup>2</sup>.

ε'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερίχειν.

ς'. Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεῦτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμον, ἑκατέρων ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερίχη, ἢ ἅμα ἴσα ᾤ, ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατέλληλα<sup>3</sup>.

ζ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, ἀνάλογον καλεῖσθαι.

η'. Όταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερίχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερίχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεῦτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη<sup>5</sup> ἐστίν.

4. Proportio autem, rationum identitas.

5. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese superare.

6. In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æque multiples, secundæ et quartæ æque multiples, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficient comparatæ inter se.

7. Ipsæ autem eandem rationem habentes magnitudines proportionales vocentur.

8. Quando vero æque multiplicium, primæ quidem multiplex superat secundæ multiplicem, tertiæ vero multiplex non superat quartæ multiplicem, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

9. Proportio autem in tribus terminis minima est.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équi-multiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équi-multiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équi-multiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

ι. Όταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια. Όταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ τρίτον· καὶ αἱ ἑξῆς ὁμοίως ὥς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ. Ομόλογα μεγέθη λέγεται<sup>8</sup>, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

ιγ. Εναλλάξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.

ιδ. Ανάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἐπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.

ιε. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἐπομένου ὡς ἐπὶ πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

ις. Διείρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπερ-  
οχῆς, ἥ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς  
αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur, ejus quam ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines proportionales sint, prima ad quartam triplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio rationis est sumptio excessûs, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

ιζ'. Αναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἥ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου.

ιη'. Διῖσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων<sup>10</sup> τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἢ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Ἡ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιβ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἢ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι<sup>11</sup>.

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων<sup>12</sup> τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο

17. *Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens consequentem.*

18. *Ex æqualitate ratio est, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, binis sumptis et in eadem ratione, quando est ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.*

19. *Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; est autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.*

20. *Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, fit, ut quidem in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus*

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

17. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières gran-

τι, οὕτως ἐν τοῖς διυτίροις μεγέθειν<sup>13</sup> ἄλλό τι  
πρὸς ἡγούμενον.

consequens ad aliam quampiam, ita in secundis  
magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

PROPOSITIO I.

Εὰν ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγέθων ἴσων  
τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκεις πολλαπλά-  
σιον· ὡσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγέθων ἑνὸς, το-  
σαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque  
magnitudinum æqualium multitudine, singulæ  
singularum æque multiplices, quam multiplex  
est una magnitudinum unius, tam multiplices  
erunt et omnes omnium.

Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὅποσωνοῦν  
μεγέθων τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκά-  
στου ἰσάκεις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὡσαπλάσιόν  
ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ  
ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

Sint quotcunque magnitudines ΑΒ, ΓΔ quot  
cunque magnitudinum Ε, Ζ æqualium multitu-  
dine, singulæ singularum æque multiplices; dico  
quam multiplex est ΑΒ ipsius Ε, tam multipli-  
ces esse et ΑΒ, ΓΔ ipsarum Ε, Ζ.

|   |   |   |
|---|---|---|
| Α | Η | Β |
|   |   |   |
| Ε |   |   |
|   |   |   |
| Γ | Θ | Δ |
|   |   |   |
| Ζ |   |   |

Ἐπὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ  
τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ

Quoniam enim æque est multiplex ΑΒ ipsius Ε  
ac ΓΔ ipsius Ζ; quot igitur sunt in ΑΒ magni-

deurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes  
grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres  
grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des  
secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des  
secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

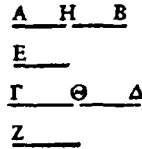
Soient ΑΒ, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à  
d'autres grandeurs Ε, Ζ, chacune étant le même multiple de chacune; je dis  
que ΑΒ est le même multiple de Ε, que la somme de ΑΒ et de ΓΔ l'est de la  
somme de Ε et de Ζ.

Puisque ΑΒ est multiple de Ε, que ΓΔ l'est de Ζ, il y aura dans ΑΒ autant

240 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μεγέθη<sup>2</sup> ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μέγθη ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλῆθει τῶν ΓΘ, ΘΔ<sup>2</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ το μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ

tudines æquales ipsi E, tot sunt et in ΓΔ æquales ipsi Z. Dividatur AB quidem in magnitudines AH, HB æquales ipsi E, ipsa vero ΓΔ in ipsas ΓΘ, ΘΔ æquales ipsi Z; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΓΘ, ΘΔ. Et quoniam æqualis est AH quidem ipsi E, ipsa vero ΓΘ ipsi Z; æqualis igitur et AH, ΓΘ



ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z<sup>3</sup>. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα τοῖς E, Z· ὅσαπλᾶσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z. Εὰν ἄρα ἢ ὁποσαεὺν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis E, Z; propter eadem utique æqualis est HB ipsi E, et ΘΔ ipsi Z; æquales igitur et HB, ΘΔ ipsis E, Z; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB, ΓΔ æquales ipsis E, Z; quam multiplex igitur est AB ipsius E, tam multiplices erunt et AB, ΓΔ ipsarum E, Z. Si igitur quocunque etc.

de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ, l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

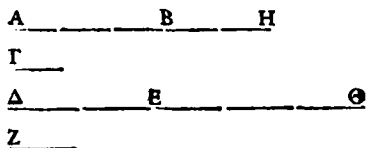
PROPOSITIO II.

Εὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτου δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτου δευτέρου ἰσάκεις ἴσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sit autem et quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; et simul sumptæ prima et quinta secundæ æque erunt multiplices ac tertia et sexta quartæ.

Prima enim AB secundæ Γ æque sit multiplex ac tertia ΔE quartæ Z, sit autem et quinta BH



Z, ἴστω δὲ καὶ πέμπτου τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ EΘ τετάρτου τοῦ Z· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτου τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἴσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Z.

secundæ Γ æque multiplex ac sexta EΘ quartæ Z; dico et simul sumptas primam et quintam AH secundæ Γ æque fore multiplices ac tertiam et sextam ΔΘ ipsius Z.

PROPOSITION II.

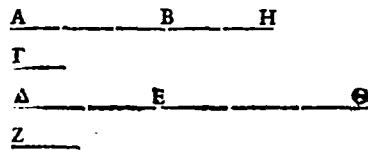
Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième.

Que la première AB soit le même multiple de la seconde r que la troisième ΔE l'est de la quatrième z, et que la cinquième BH soit le même multiple de la seconde r que la sixième EΘ l'est de la quatrième z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde r que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième z.



Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθει ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Propter eadem utique et quot sunt in BH æquales ipsi Γ, tot et in ΕΘ æquales ipsi Ζ; quot igitur sunt in totâ AH æquales ipsi Γ, tot et in



ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα πλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα<sup>2</sup> πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH διυτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

totâ ΔΘ æquales ipsi Ζ; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ, tam multiplex erit et ΔΘ ipsius Ζ; et simul sumptæ igitur prima et quinta AH secundæ Γ æque erunt multiplices ac tertia et sexta ΔΘ quartæ Ζ. Si igitur prima, etc.

Puisque AB est le même multiple de  $\Gamma$  que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à  $\Gamma$  qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Par la même raison, il y a dans BH autant de grandeurs égales à  $\Gamma$  qu'il y a dans ΕΘ de grandeurs égales à Ζ. Il y a donc dans la grandeur entière AH autant de grandeurs égales à  $\Gamma$  qu'il y a dans la grandeur entière ΔΘ de grandeurs égales à Ζ. Donc AH est le même multiple de  $\Gamma$  que ΔΘ l'est de Ζ; donc la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde  $\Gamma$  que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εάν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληθῇ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δίσσου τῶν ληθόντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γάρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λίσσω ὅτι ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον<sup>1</sup> τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

E ————— K ————— Z  
A —————  
B —————

H ————— Λ ————— Θ  
Γ —————  
Δ —————

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα<sup>2</sup> καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διηρήσθω τὸ μὲν<sup>3</sup> ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη

Quoniam enim æque est multiplex ΕΖ ipsius Α ac ΗΘ ipsius Γ; quot igitur sunt in ΕΖ æquales ipsi Α, tot et in ΗΘ æquales ipsi Γ. Dividatur ΕΖ quidem in magnitudines ipsi Α æqua-

PROPOSITION III.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième, le multiple de la première sera, par égalité, le même multiple de la seconde que le multiple de la troisième l'est de la quatrième.

Que la première Α soit le même multiple de la seconde Β que la troisième Γ l'est de la quatrième Δ; prenons les équimultiples ΕΖ, ΗΘ de Α et de Γ; je dis que ΕΖ est le même multiple de Β que ΗΘ l'est de Δ.

Puisque ΕΖ est le même multiple de Α que ΗΘ l'est de Γ, il y a dans ΕΖ autant de grandeurs égales à Α qu'il y a dans ΗΘ de grandeurs égales à Γ. Di-

## 244 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλῆθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ.

les ΕΚ, ΚΖ, ipsa vero ΗΘ in magnitudines ipsi Γ æquales ΗΛ, ΛΘ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΕΚ, ΚΖ multitudini ipsarum ΗΛ, ΛΘ. Et quoniam æque est multiplex Α ipsius Β ac Γ ipsius Δ; æqualis autem ΒΚ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΛ ipsi Γ; æque igitur est multiplex ΕΚ ipsius Β ac ΗΛ ipsius Δ. Propter eadem utique æque est multiplex ΚΖ ipsius Β ac ΛΘ ipsius Δ. Quoniam

$$\begin{array}{c} \text{E} \quad \text{K} \quad \text{Z} \\ \text{A} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{B} \quad \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{H} \quad \text{Λ} \quad \text{Θ} \\ \text{Γ} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ \text{Δ} \quad \text{---} \end{array}$$

Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντιθεὶν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur prima ΕΚ secundæ Β æque est multiplex ac tertia ΗΛ quartæ Δ; est autem et quinta ΚΖ secundæ Β æque multiplex ac sexta ΛΘ quartæ Δ; et simul sumptæ igitur prima et quinta ΕΖ secundæ Β æque sunt multiplices ac tertia et sexta ΗΘ quartæ Δ. Si igitur prima, etc.

visons ΕΖ en grandeurs égales à Α, et que ces grandeurs soient ΕΚ, ΚΖ; divisons ΗΘ en grandeurs égales à Γ, et que ces grandeurs soient ΗΛ, ΛΘ. Le nombre des parties ΕΚ, ΚΖ sera égal au nombre des parties ΗΛ, ΛΘ. Et puisque Α est le même multiple de Β que Γ l'est de Δ, que ΕΚ est égal à Α, et ΗΛ égal à Γ, la grandeur ΕΚ est le même multiple de Β que ΗΛ l'est de Δ. Par la même raison, ΚΖ est le même multiple de Β que ΛΘ l'est de Δ. Et puisque la première ΕΚ est le même multiple de la seconde Β que la troisième ΗΛ l'est de la quatrième Δ, et que la cinquième ΚΖ est le même multiple de la seconde Β que la sixième ΛΘ l'est de la quatrième Δ, la somme de la première et de la cinquième, qui est ΕΖ, sera le même multiple de la seconde Β, que la somme de la troisième et de la sixième, qui est ΗΘ, l'est de la quatrième Δ (2. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γάρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

K \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_  
A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
H \_\_\_\_\_  
M \_\_\_\_\_

τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Α, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam; et æque multiples primæque et tertiæ ad æque multiples secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eamdem habebunt rationem inter se comparatæ.

Prima enim Α ad secundam Β eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, et su-

Λ \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Θ \_\_\_\_\_  
Ν \_\_\_\_\_ \*

mantur ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcumque æque multiples Η, Θ; dico esse ut Ε ad Η, ita Ζ ad Θ.

Sumantur enim ipsarum quidem Ε, Ζ æque multiples Κ, Α, ipsarum vero Η, Θ aliæ utcumque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION IV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième, auront entre eux la même raison.

Car que la première Α ait avec la seconde Β la même raison que Γ avec Δ, prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de Β et de Δ; je dis que Ε est à Η comme Ζ est à Θ.

Prenons des équi-multiples quelconques Κ, Α de Ε et de Ζ, et d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Η et de Θ.

## 246 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν  $E$  τοῦ  $A$ , τὸ δὲ  $Z$  τοῦ  $\Gamma$ , καὶ εἴληπται τῶν  $E$ ,  $Z$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K$ ,  $\Lambda$ . ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $K$  τοῦ  $A$  καὶ τὸ  $\Lambda$  τοῦ  $\Gamma$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ  $M$  τοῦ  $B$  καὶ τὸ  $N$  τοῦ  $\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $B$  οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν  $A$ ,  $\Gamma$  ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $K$ ,  $\Lambda$ , τῶν

Et quoniam æque est multiplex  $E$  quidem ipsius  $A$ , ipsa vero  $Z$  ipsius  $\Gamma$ , et sumptæ sunt ipsarum  $E$ ,  $Z$  æque multiplices  $K$ ,  $\Lambda$ ; æque igitur est multiplex  $K$  ipsius  $A$  ac  $\Lambda$  ipsius  $\Gamma$ . Propter eadem utique æque est multiplex  $M$  ipsius  $B$  ac  $N$  ipsius  $\Delta$ . Et quoniam est ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ , et sumptæ sunt ipsarum quidem  $A$ ,  $\Gamma$  æque multiplices  $K$ ,  $\Lambda$ , ipsarum vero  $B$ ,  $\Delta$  aliæ utcuq;

|           |                 |
|-----------|-----------------|
| $K$ _____ | $\Lambda$ _____ |
| $E$ _____ | $Z$ _____       |
| $A$ _____ | $\Gamma$ _____  |
| $B$ _____ | $\Delta$ _____  |
| $H$ _____ | $\Theta$ _____  |
| $M$ _____ | $N$ _____       |

δὲ  $B$ ,  $\Delta$  ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ  $M$ ,  $N$ . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $K$  τοῦ  $M$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $\Lambda$  τοῦ  $N$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν  $K$ ,  $\Lambda$  τῶν  $E$ ,  $Z$  ἰσάκεις πολλαπλάσια<sup>3</sup>, τὰ δὲ  $M$ ,  $N$  τῶν  $H$ ,  $\Theta$  ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια. ἐστὶν ἄρα ὥς τὸ  $E$  πρὸς τὸ  $H$ , οὕτως τὸ  $Z$  πρὸς τὸ  $\Theta$ . Εἰ ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

que æque multiplices  $M$ ,  $N$ ; si igitur superat  $K$  ipsam  $M$ , superat et  $\Lambda$  ipsam  $N$ ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt  $K$ ,  $\Lambda$  quidem ipsarum  $E$ ,  $Z$  æque multiplices, ipsæ vero  $M$ ,  $N$  ipsarum  $H$ ,  $\Theta$  aliæ utcunque multiplices; est igitur ut  $E$  ad  $H$ , ita  $Z$  ad  $\Theta$ . Si igitur prima, etc.

Puisque  $E$  est le même multiple de  $A$  que  $Z$  l'est de  $\Gamma$ , et que l'on a pris des équimultiples  $K$ ,  $\Lambda$  de  $E$  et de  $Z$ , la grandeur  $K$  est le même multiple de  $A$  que  $\Lambda$  l'est de  $\Gamma$  (3. 5). Par la même raison,  $M$  est le même multiple de  $B$  que  $N$  l'est de  $\Delta$ . Et puisque  $A$  est à  $B$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$ , que l'on a pris des équimultiples quelconques  $K$ ,  $\Lambda$  de  $A$  et de  $\Gamma$ , et d'autres équimultiples quelconques  $M$ ,  $N$  de  $B$  et de  $\Delta$ , si  $K$  surpasse  $M$ ,  $\Lambda$  surpasse  $N$ ; si  $K$  est égal à  $M$ ,  $\Lambda$  est égal à  $N$ , et si  $K$  est plus petit que  $M$ ,  $\Lambda$  est plus petit que  $N$  (déf. 5. \*). Mais  $K$ ,  $\Lambda$  sont des équimultiples quelconques de  $E$  et de  $Z$ , et  $M$ ,  $N$  d'autres équimultiples quelconques de  $H$  et de  $\Theta$ ; donc  $E$  est à  $H$  comme  $Z$  est à  $\Theta$  (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Επεὶ οὖν ἰδείχθη, ὅτι ἡ  $\epsilon$  ὑπερέχει τὸ  $\kappa$  τοῦ  $\mu$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $\lambda$  τοῦ  $\nu$ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ  $\mu$  τοῦ  $\kappa$ , ὑπερέχει καὶ τὸ  $\nu$  τοῦ  $\lambda$ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἴσται καὶ ὡς τὸ  $\eta$  πρὸς τὸ  $\epsilon$ , οὕτως τὸ  $\theta$  πρὸς τὸ  $\zeta$ . Ἐκ δὲ τοῦτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἴσται.

Quoniam igitur ostensum est, si superat  $\kappa$  ipsam  $\mu$ , superare et  $\lambda$  ipsam  $\nu$ ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; manifestum est et si  $\mu$  superat  $\kappa$ , superare et  $\nu$  ipsam  $\lambda$ ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; et propter hoc erit et ut  $\eta$  est ad  $\epsilon$ , ita  $\theta$  ad  $\zeta$ . Ex hoc utique manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sunt, et inversione proportionales fore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Εὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκῃ ἢ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκῃ ἴσται πολλαπλάσιον, ὅσα πλάσιόν ἐστι τὸ ἕλον τοῦ ὅλου.

Si magnitudo magnitudinis æque sit multiplex ac ablata ablatæ, et reliqua reliquæ æque erit multiplex ac multiplex est tota totius.

COROLLAIRE.

Puisqu'il a été démontré que si  $\kappa$  surpasse  $\mu$ ,  $\lambda$  surpasse  $\nu$ ; que si  $\kappa$  est égal à  $\mu$ ,  $\lambda$  est égal à  $\nu$ , et que si  $\kappa$  est plus petit que  $\mu$ ,  $\lambda$  est plus petit que  $\nu$ , il est évident que si  $\mu$  surpasse  $\kappa$ ,  $\nu$  surpasse  $\lambda$ ; que si  $\mu$  est égal à  $\kappa$ ,  $\nu$  est égal à  $\lambda$ , et que si  $\mu$  est plus petit que  $\kappa$ ,  $\nu$  est plus petit que  $\lambda$ ; par conséquent  $\eta$  est à  $\epsilon$  comme  $\theta$  est à  $\zeta$ . De là il est évident que si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

PROPOSITION V.

Si une grandeur est le même multiple d'une grandeur que la grandeur retranchée l'est de la grandeur retranchée, le reste sera le même multiple du reste que le tout l'est du tout.

Μέγεθος γάρ τὸ AB μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρέθην τὸ ΑΕ ἀφαιρέθentos τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιον ἔστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

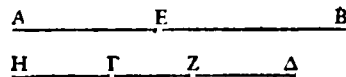
Ὅσαπλάσιον γάρ ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γιγνέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ· κειῖται δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλά-

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓΔ æque sit multiplex ac ablata ΑΕ ablatæ ΓΖ; dico et reliquam EB reliquæ ΖΔ æque fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓΔ.

Quam multiplex enim est ΑΕ ipsius ΓΖ, tam multiplex fiat et ΕΒ ipsius ΓΗ.

Et quoniam æque multiplex est ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΓΗ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΗΖ; ponitur autem æque multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex ΑΒ utriusque



σιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφαιρέσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλα-

ipsarum ΗΖ, ΓΔ; æqualis igitur ΗΖ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΖ; reliqua igitur ΗΓ reliquæ ΔΖ est æqualis. Et quoniam æque est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΓΗ, æqualis autem ipsi ΗΓ ipsa ΔΖ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΖΔ. Æque autem ponitur multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex ΕΒ ipsius

Que la grandeur AB soit le même multiple de la grandeur ΓΔ que la grandeur retranchée ΑΕ l'est de la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante ΕΒ sera le même multiple de la grandeur restante ΖΔ que la grandeur entière ΑΒ l'est de la grandeur entière ΓΔ.

Que ΑΕ soit le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΓΗ.

Puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΓΗ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΗΖ (1. 5). Mais l'on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΓΔ; donc ΑΒ est le même multiple de ΗΖ et de ΓΔ; donc ΗΖ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; le reste ΗΓ sera égal au reste ΔΖ. Et puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΓΗ, et que ΖΔ est égal à ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ

# LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 249

πλάσιον τὸ EB τοῦ ZΔ καὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ ἰσάκεις ἴστα<sup>2</sup>· πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Εἰ ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ZΔ ac AB ipsius ΓΔ; et reliqua igitur EB reliquæ ZΔ æque erit multiplex ac multiplex est tota AB totius ΓΔ. Si igitur magnitudo, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

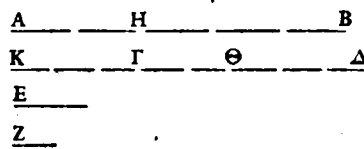
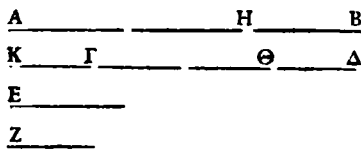
## PROPOSITIO VI.

Εάν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθῆντα τίνα τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἢ τοῖς ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρε-

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque sint multiplices, et ablata quædam earumdem æque sint multiplices; et reliquæ iisdem vel æquales sunt, vel æque earum multiplices.

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ duarum magnitudinum E, Z æque sint multiplices, et



θῆντα τὰ AH, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z ἢ τοῖς ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

ablata AH, ΓΘ earumdem E, Z æque sint multiplices; dico et reliquas HB, ΘΔ ipsis E, Z vel æquales esse, vel æque earum multiplices.

que AB l'est de ΓΔ; donc EB est le même multiple de ZΔ que AB l'est de ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ. Donc, etc.

## PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs sont des équi-multiples de deux grandeurs, et si certaines grandeurs retranchées sont des équi-multiples des dernières, les grandeurs restantes seront égales à ces dernières, ou des équi-multiples de ces dernières.

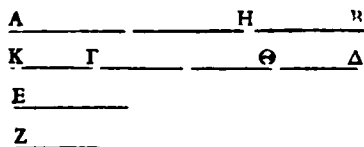
Que les deux grandeurs AB, ΓΔ soient des équi-multiples des deux grandeurs E, Z, et que les grandeurs retranchées AH, ΓΘ soient des équi-multiples de E et de Z; je dis que les grandeurs restantes HB, ΘΔ sont égales aux grandeurs E, Z, ou des équi-multiples de ces grandeurs.



## 250 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστί. Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Καὶ<sup>2</sup> ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ

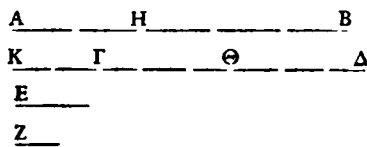


τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῆς ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφῆρῆσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Ζ τὸ ΚΓ<sup>3</sup> ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν<sup>4</sup>. Ὡστε εἰ<sup>5</sup> τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πολλαπλάσιον ἢ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sit enim primum HB ipsi E æqualis; dico et ΘΔ ipsi Z æqualem esse. Ponatur enim ipsi Z æqualis ΓΚ.

Et quoniam æque est multiplex AH ipsius E ac ΓΘ ipsius Z, æqualis autem HB quidem ipsi E, ipsa vero ΚΓ ipsi Z; æque igitur est multiplex AB ipsius E ac ΚΘ ipsius Z. Æque autem ponitur multiplex AB ipsius E ac ΓΔ ip-



sus Z; æque igitur est multiplex ΚΘ ipsius Z ac ΓΔ ipsius Z. Et quoniam utraque ipsarum ΚΘ, ΓΔ ipsius Z æque est multiplex; æqualis igitur est ΚΘ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΘ; reliqua igitur ΚΓ reliquæ ΘΔ æqualis est. Sed ipsi Z ipsa ΚΓ est æqualis; et ΘΔ igitur ipsi Z æqualis est. Quare si HB ipsi E æqualis est, et ΘΔ æqualis erit ipsi Z.

Similiter utique ostendemus et si multiplex est HB ipsius E, multiplicem fore et magnitudinem ΘΔ ipsius Z. Si igitur duæ, etc.

Premièrement, que HB soit égal à E; je dis que ΘΔ est égal à Z. Faisons ΓΚ égal à Z.

Puisque AH est le même multiple de E que ΓΘ l'est de Z, que HB est égal à E, et ΚΓ égal à Z, AB est le même multiple de E que ΚΘ l'est de Z (2. 5). Mais on a supposé que AB est le même multiple de E que ΓΔ l'est de Z; donc ΚΘ est le même multiple de Z que ΓΔ l'est de Z. Et puisque les grandeurs ΚΘ, ΓΔ sont chacune le même multiple de Z, ΚΘ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΘ; la grandeur restante ΚΓ sera égale à la grandeur restante ΘΔ. Mais ΚΓ est égal à Z; donc ΘΔ est égal à Z; donc si HB est égal à E, ΘΔ sera égal à Z.

Nous démontrerons semblablement, que si HB est un multiple de E, la grandeur ΘΔ sera le même multiple de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Εστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τι ὁ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἐκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, et eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines Α, Β, alia autem quælibet magnitudo Γ; dico utramque ipsarum Α, Β ad Γ habere eandem rationem, et Γ ad utramque ipsarum Α, Β.

Sumantur enim ipsarum Α, Β quidem æque multiplices Δ, Ε, ipsius vero Γ alia utcunque multiplex Ζ.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_

Δ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

Επεὶ οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἄλλο δὲ ὁ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον<sup>3</sup>· εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερίχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον

Quoniam igitur æque est multiplex Δ ipsius Α ac Ε ipsius Β, æqualis autem Α ipsi Β; æqualis igitur et Δ ipsi Ε. Alia vero Ζ ipsius Γ utcunque multiplex; si igitur superat Δ ipsam Ζ, superat et Ε ipsam Ζ; et si æqualis, æqua-

PROPOSITION VII.

Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales Α, Β, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs Α, Β a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β.

Prenons des équi-multiples quelconques Δ, Ε de Α et de Β, et un autre multiple quelconque Ζ de Γ.

Puisque Δ est le même multiple de Α que Ε l'est de Β, et que Α est égal à Β, Δ est égal à Ε. Mais Ζ est un autre multiple quelconque de Γ; donc, si Δ surpasse Ζ, Ε surpasse Ζ; si Δ est égal à Ζ, Ε est égal à Ζ; et si Δ est plus petit

## 252 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν  $\Delta$ ,  $E$  τῶν  $A$ ,  $B$  ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ  $Z$  τοῦ  $\Gamma$  ἄλλο ὃ ἔτυχι πολλαπλάσιον ἔστιν<sup>4</sup>. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $A$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ , οὕτως τὸ  $B$  πρὸς τὸ  $\Gamma$ .

Λέγω δὴ<sup>5</sup> ὅτι καὶ τὸ  $\Gamma$  πρὸς ἑκάτερον τῶν  $A$ ,  $B$  τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

lis; et si minor, minor. Et sunt quidem  $\Delta$ ,  $E$  ipsarum  $A$ ,  $B$  æque multiples, ipsa vero  $Z$  ipsius  $\Gamma$  alia utcunque multiplex est; est igitur ut  $A$  ad  $\Gamma$ , ita  $B$  ad  $\Gamma$ .

Dico autem et  $\Gamma$  ad utramque ipsarum  $A$ ,  $B$  eandem habere rationem.

$A$  \_\_\_\_\_  
 $B$  \_\_\_\_\_  
 $\Gamma$  \_\_\_\_\_

$\Delta$  \_\_\_\_\_  
 $E$  \_\_\_\_\_  
 $Z$  \_\_\_\_\_

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἰμοίως δὴ<sup>6</sup> δείξομεν ὅτι ἴσον ἔστι τὸ  $\Delta$  τῷ  $E$ . ἄλλο δὲ τι τὸ  $Z$ . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ  $Z$  τοῦ  $\Delta$ , ὑπερέχει τὸ  $Z$  καὶ τοῦ  $E$ . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν  $Z$  τοῦ  $\Gamma$  πολλαπλάσιον, τὰ δὲ  $\Delta$ ,  $E$  τῶν  $A$ ,  $B$  ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $A$ , οὕτως τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $B$ . Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς<sup>8</sup>.

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus æqualem esse  $\Delta$  ipsi  $E$ ; alia vero quædam  $Z$ ; si igitur superat  $Z$  ipsam  $\Delta$ , superat  $Z$  et ipsam  $E$ ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et est  $Z$  quidem ipsius  $\Gamma$  multiplex; ipsæ autem  $\Delta$ ,  $E$  ipsarum  $A$ ,  $B$  aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut  $\Gamma$  ad  $A$ , ita  $\Gamma$  ad  $B$ . Æquales igitur, etc.

que  $Z$ ,  $E$  est plus petit que  $Z$ . Mais  $\Delta$ ,  $E$  sont des équimultiples quelconques de  $A$  et de  $B$ , et  $Z$  est un autre multiple quelconque de  $\Gamma$ ; donc  $A$  est à  $\Gamma$  comme  $B$  est à  $\Gamma$  (déf. 6. 5).

Je dis aussi que  $\Gamma$  a la même raison avec chacune des grandeurs  $A$ ,  $B$ .

La même construction étant faite, nous démontrerons semblablement que  $\Delta$  est égal à  $E$ ; mais  $Z$  est un autre multiple quelconque; donc si  $Z$  surpasse  $\Delta$ ,  $Z$  surpasse  $E$ ; si  $Z$  est égal à  $\Delta$ ,  $Z$  est égal à  $E$ , et si  $Z$  est plus petit que  $\Gamma$ ,  $Z$  est plus petit que  $E$ . Mais  $Z$  est un multiple de  $\Gamma$ , et  $\Delta$ ,  $E$  sont d'autres équimultiples quelconques de  $A$  et de  $B$ ; donc  $\Gamma$  est à  $A$  comme  $\Gamma$  est à  $B$  (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ μείζον.

Ἐστω ἀνισα μεγέθη τὰ  $AB$ ,  $\Gamma$ , καὶ ἔστω μείζον τὸ  $AB$ , ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχι τὸ  $\Delta$ · λέγω ὅτι τὸ  $AB$  πρὸς τὸ  $\Delta$  μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ  $\Gamma$  πρὸς τὸ  $\Delta$ , καὶ τὸ  $\Delta$  πρὸς τὸ  $\Gamma$  μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ  $AB$ .

Inæqualium magnitudinum, major ad eandem majorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem majorem rationem habet quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines  $AB$ ,  $\Gamma$ , et sit major  $AB$ , alia vero utcunque  $\Delta$ ; dico  $AB$  ad  $\Delta$  majorem rationem habere quam  $\Gamma$  ad  $\Delta$ , et  $\Delta$  ad  $\Gamma$  majorem rationem habere quam ad  $AB$ .

$A$  —  $E$  —  $B$   
 $\Gamma$  —  
 $\Delta$  —

$Z$  —  $H$  —  $\Theta$   
 $K$  —  
 $\Lambda$  —  
 $M$  —  
 $N$  —

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$ , κείσθω τῷ  $\Gamma$  ἴσον τὸ  $BE$ , τὸ δὲ ἔλασσον τῶν  $AE$ ,  $EB$  πολλαπλασιαζόμενον ἐστὶ ποτὶ τοῦ  $\Delta$  μείζον. Ἐστω πρότερον τὸ  $AE$  ἔλαττον τοῦ  $EB$ , καὶ πολλαπλασιάσθω τὸ  $AE$ , καὶ ἔστω<sup>2</sup> αὐτοῦ πολλαπλάσιον

Quoniam enim major est  $AB$  ipsâ  $\Gamma$ , ponatur ipsi  $\Gamma$  æqualis  $BE$ , minor utique ipsarum  $AE$ ,  $EB$  multiplicata, erit aliquando ipsâ  $\Delta$  major. Sit primum  $AE$  minor ipsâ  $EB$ , et multiplicetur  $AE$ , et sit ipsius multiplex  $ZH$  major

PROPOSITION VIII.

Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande.

Soient les grandeurs inégales  $AB$ ,  $\Gamma$ ; que  $AB$  soit la plus grande, et que  $\Delta$  soit une autre grandeur quelconque; je dis que  $AB$  a avec  $\Delta$  une plus grande raison que  $\Gamma$  avec  $\Delta$ , et que  $\Delta$  a avec  $\Gamma$  une plus grande raison qu'avec  $AB$ .

Car puisque  $AB$  est plus grand que  $\Gamma$ , faisons  $BE$  égal à  $\Gamma$ ; la plus petite des grandeurs  $AE$ ,  $EB$  étant multipliée, deviendra enfin plus grande que  $\Delta$  (déf. 5. 5). Que  $AE$  soit d'abord plus petit que  $EB$ ; multiplions  $AE$ , que son multiple

τὸ ΖΗ μείζον ὃν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γιγνέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἐνὶ πλείον ἕως οὗ<sup>3</sup> τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γίνηται τοῦ Δ, πρῶτως δὲ μείζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρῶτως δὲ μείζον τοῦ Κ.

ipsâ Δ, et quam multiplex est ΖΗ ipsius ΑΕ, tam multiplex fiat et ΗΘ quidem ipsius ΕΒ, ipsa vero Κ ipsius Γ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem ipsa Λ, tripla vero Μ, et deinceps unâ major quoad sumpta multiplex quidem fiat ipsius Δ, primum vero major ipsâ Κ. Sumatur, et sit Ν quadrupla quidem ipsius Δ, primum vero major ipsâ Κ.

A — E — B  
Γ —  
Δ —

Z — H — Θ  
Κ —  
Λ —  
Μ —  
Ν —

Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρῶτως ἐστὶν ἥλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἐστὶν ἥλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολ-

Quoniam igitur Κ ipsâ Ν primum est minor, ipsa Κ igitur ipsâ Μ non est minor. Et quoniam æque est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΗΘ ipsius ΕΒ, æque igitur est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΖΘ ipsius ΑΒ. Æque autem est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac Κ ipsius Γ; æque igitur est multiplex ΖΘ ipsius ΑΒ ac Κ ipsius Γ; ipsæ ΖΘ, Κ igitur ipsarum ΑΒ, Γ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque est multiplex ΗΘ ipsius

ΖΗ soit plus grand que Δ, et que ΗΘ soit le même multiple de ΕΒ, et Κ le même multiple de Γ, que ΖΗ l'est de ΑΕ. Prenons la grandeur Λ double de Δ, la grandeur Μ triple de Δ, et ainsi de suite, une fois de plus, jusqu'à ce que le multiple de Δ devienne pour la première fois plus grand que Κ. Prenons ce multiple; que Ν, quadruple de Δ, soit plus grand que Κ, pour la première fois.

Puisque Κ est pour la première fois plus petit que Ν, la grandeur Κ n'est pas plus petite que Μ. Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΗΘ l'est de ΕΒ; donc ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΖΘ l'est de ΑΒ (1. 5). Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ est le même multiple de ΑΒ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ, Κ sont des équimultiples de ΑΒ et de Γ. De plus, puis-

λαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἑλαττόν· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἑλαττόν ἐστι. Μείζον δὲ τὸ Δ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν. Ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστίν· ἴσα· ἐπιδὴ περ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐκ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχεν πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δειξομέν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐκ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

EB ac K ipsius Γ, æqualis autem EB ipsius Γ; æqualis igitur et K ipsi ΗΘ. Ipsa vero K ipsā M non est minor; non igitur ΗΘ ipsā M minor est. Major autem ΖΗ ipsā Δ; tota igitur ΖΘ utrisque simul Δ, Μ major est. Sed utræque simul Δ, Μ ipsi Ν sunt æquales, quandoquidem Μ ipsius Δ est tripla, utræque autem simul Δ, Μ ipsius Δ sunt quadruplæ, est vero et Ν ipsius Δ quadrupla, utræque simul igitur Μ, Δ ipsi Ν æquales sunt. Sed ΖΘ ipsis Δ, Μ major est; ΖΘ igitur ipsam Μ superat. Κ vero ipsam Ν non superat. Et sunt ipsæ quidem ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque multiplicæ, ipsa vero Ν ipsius Δ alia utcunque multiplex; ΑΒ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico autem et Δ ad Γ majorem rationem habere, quam Δ ad ΑΒ.

Isdem enim constructis, similiter ostendemus, Ν quidem ipsam Κ superare, Ν vero ipsam ΖΘ non superare. Et est Ν quidem ipsius Δ multiplex, et ipsæ ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ aliæ utcunque æque multiplicæ; Δ igitur ad Γ majorem rationem habet quam Δ ad ΑΒ.

que ΗΘ est le même multiple de ΕΒ que Κ l'est de Γ, et que ΕΒ est égal à Γ, ΗΘ est égal à Κ. Mais Κ n'est pas plus petit que Μ; donc ΗΘ n'est pas plus petit que Μ. Mais ΖΗ est plus grand que Δ; donc la grandeur entière ΖΘ est plus grande que Δ et Μ pris ensemble. Mais Δ, Μ pris ensemble sont égaux à Ν, puisque Μ est triple de Δ, que Δ, Μ pris ensemble sont quadruples de Δ, et que Ν est quadruple de Δ, les grandeurs Μ, Δ prises ensemble sont égales à Ν. Mais ΖΘ est plus grand que Δ, Μ; donc ΖΘ surpasse Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, et ΖΘ, Κ sont des équi-multiples de ΑΒ et de Γ, et Ν est un autre multiple quelconque de Δ; donc ΑΒ a une plus grande raison avec Δ, que Γ avec Δ (déf. 8. 5).

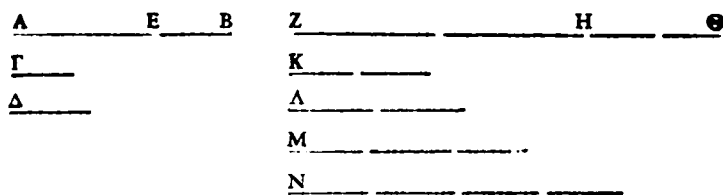
Je dis de plus que Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que Ν surpasse Κ, et que Ν ne surpasse pas ΖΘ. Mais Ν est un multiple de Δ, et ΖΘ, Κ sont d'autres équi-multiples quelconques de ΑΒ et de Γ; donc Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ (déf. 8. 5).

## 256 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μείζον ἔστω· τὸ δὲ ἑλάττω τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὶ τοῦ Δ μείζον. Πολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μείζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τσαυταπλάσιον γεγόνετω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρῶτως

Sed et ΑΕ ipsā ΕΒ major sit ; minor ΕΒ utique multiplicata, erit aliquando ipsā Δ major. Multiplicetur, etsit ΗΘ multiplex quidem ipsius ΕΒ, major vero ipsā Δ ; et quam multiplex est ΗΘ ipsius ΕΒ, tam multiplex fiat et ΖΗ quidem ipsius ΑΕ, ipsa vero Κ ipsius Γ. Similiter utique ostendemus ipsas ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque esse multiples. Et sumatur similiter Ν multiplex quidem ipsius Δ, primum vero major ipsā ΖΗ ;



δὲ μείζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ μὴ ἴλασσαν εἶναι<sup>β</sup>, μείζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ἔλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ τουτίστι τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδὴ περ καὶ τὸ ΖΗ μείζον ὢν τοῦ ΗΘ, τουτίστι τὸ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡσαύτως<sup>γ</sup> κατακολουθοῦντες τοῖς ἑπάνω πειράνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀρίστων, καὶ τὰ ἐξῆς.

quare rursus ΖΗ ipsā Μ non minor erit, major autem ΗΘ ipsā Δ ; tota igitur ΖΘ ipsas Δ, Μ, hoc est Ν superat, Κ vero ipsam Ν non superat, quandoquidem et ΖΗ quæ major est ipsā ΗΘ, hoc est ipsā Κ, ipsam Ν non superat. Et similiter subsequentes superiora absolvemus demonstrationem. Ergo inæqualium, etc.

Mais que ΑΕ soit plus grand que ΕΒ ; la plus petite grandeur ΕΒ étant multipliée deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Qu'elle soit multipliée, et que ΗΘ soit un multiple de ΕΒ plus grand que Δ, et que ΖΗ soit le même multiple de ΑΕ, et Κ de Γ, que ΗΘ l'est de ΕΒ. Nous démontrerons semblablement que ΖΘ, Κ sont des équimultiples de ΑΒ et de Γ. Prenons semblablement un multiple Ν de Δ qui soit plus grand pour la première fois que ΖΗ ; ΖΗ ne sera pas plus petit que Μ. Mais ΗΘ est plus grand que Δ ; donc la grandeur entière ΖΘ surpasse Δ, Μ pris ensemble, c'est-à-dire Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, parce que ΖΗ étant plus grand que ΗΘ, c'est-à-dire que Κ, ne surpasse pas Ν. Et conformément à ce qui a été dit auparavant, nous achèverons la démonstration. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ᾧ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν'.

Εχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Quæ ad eandem eandem habent rationem, æquales inter se sunt; et ad quas eandem eandem habet rationem, illæ æquales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum Α, Β ad Γ eandem rationem; dico æqualem esse Α ipsi Β.

Si enim non, non utraque ipsarum Α, Β ad Γ eandem haberet rationem, habet autem; æqualis igitur est Α ipsi Β.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_

Εχέτω δὲ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Habeat autem rursus Γ ad utramque Α, Β eandem rationem; dico æqualem esse Α ipsi Β.

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum Α, Β eandem haberet rationem; habet autem; æqualis igitur est Α ipsi Β. Quæ igitur ad eandem, etc.

PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entr'elles, et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entr'elles.

Que chacune des grandeurs Α, Β ait avec Γ la même raison; je dis que Α est égal à Β.

Car, si cela n'était point, chacune des grandeurs Α, Β n'aurait pas avec Γ la même raison (8. 5); mais elle l'a; donc Α est égal à Β.

Que Γ ait la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β; je dis que Α est égal à Β.

Car, si cela n'était point, la grandeur Γ n'aurait pas la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β (8. 5). Mais elle l'a; donc Α est égal à Β. Donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

## PROPOSITIO X.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἴστι. Πρὸς δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἴστιν.

Εἴτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἥπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μείζον ἴστι τὸ Α τοῦ Β.

Ipsarum ad eandem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est; ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Habeat enim Α ad Γ majorem rationem, quam Β ad Γ; dico majorem esse Α ipsā Β.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἴστί τὸ Α τῷ Β, ἢ ἑλασσόν. Ἰσον μὲν οὖν οὐκ ἴστι τὸ Α τῷ Β, ἐκείνῳ γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἴστί τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὲν ἑλασσόν ἴστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον, ἥπερ

Si enim non, vel æqualis est Α ipsi Β, vel minor. Æqualis autem non est Α ipsi Β, utraque enim ipsarum Α, Β ad Γ eandem haberet rationem. Non habet vero; non igitur æqualis est Α ipsi Β. Neque tamen minor est Α ipsā Β, nam Α ad Γ minorem haberet rationem quam

## PROPOSITION X.

Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite.

Que Α ait avec Γ une plus grande raison que Β avec Γ; je dis que Α est plus grand que Β.

Car, si cela n'est pas, Α est égal à Β, ou plus petit. Α n'est pas égal à Β, car chacune des grandeurs Α, Β aurait la même raison avec Γ (7. 5). Mais chacune de ces grandeurs n'a pas la même raison avec Γ; donc Α n'est pas égal à Β. Α n'est pas cependant plus petit que Β; car Α aurait avec Γ une plus petite raison que Β avec Γ (8. 5). Mais Α n'a pas avec Γ une plus petite raison que

τὸ B πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἑλασσόν ἐστι τὸ A τοῦ B. Εδείχθη δὲ ὅτι<sup>3</sup> οὐδὲ ἴσον, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ A τοῦ B.

Εἰτά δὲ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔπαι τὸ Γ πρὸς τὸ A· λέγω ὅτι ἑλασσόν ἐστι τὸ B τοῦ A.

Εἰ γὰρ μὴ, ἥτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μείζον. Ἰσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ B τῷ A, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸ αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B. Οὐ δὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ A, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ B ἑλάσσονα λόγον εἶχεν ἢ πρὸς τὸ A. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ A. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἑλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ B τοῦ A. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

B ad Γ. Non habet autem, non igitur minor est A ipsâ B. Ostensa autem est neque æqualis, major igitur est A ipsâ B.

Habeat autem rursus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A; dico minorem esse B ipsâ A.

Si enim non, vel æqualis est, vel major. Æqualis quidem non est B ipsi A, nam Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem. Non habet vero, non igitur æqualis est A ipsi B. Non autem tamen major est B ipsâ A, nam Γ ad B minorem rationem haberet quam ad A. Non habet vero, non igitur major est B ipsâ A. Ostensa autem est neque æqualis, minor igitur est B ipsâ A. Ipsarum igitur ad eandem, etc.

B avec Γ; donc A n'est pas plus petit que B. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc A est plus grand que B.

De plus, que Γ ait avec B une raison plus grande que Γ avec A; je dis que B est plus petit que A.

Car, si cela n'est pas, il lui est égal, ou il est plus grand. Mais la grandeur B n'est pas égale à A; car alors la grandeur Γ aurait la même raison avec chacune des grandeurs A, B (7. 5). Mais elle ne l'a pas; donc A n'est pas égal à B. La grandeur B n'est pas cependant plus grande que A; car alors Γ aurait avec B une raison plus petite qu'avec A (8. 5). Mais Γ n'a pas avec B une raison plus petite qu'avec A; donc B n'est pas plus grand que A. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc B est plus petit que A. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

## PROPOSTIO XI.

Οἱ τῶ αὐτῶ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἐστώσαν γάρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Eidem rationes eadem, et inter se sunt eadem.

Sint enim ut Α quidem ad Β ita Γ ad Δ, ut Γ vero ad Δ, ita Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.

Sumantur enim ipsarum Α, Γ, Ε quidem æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Α, Μ, Ν.

Η \_\_\_\_\_  
Α \_\_\_\_\_  
Β \_\_\_\_\_  
Λ \_\_\_\_\_

Θ \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Μ \_\_\_\_\_

Κ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_  
Ν \_\_\_\_\_

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ<sup>3</sup>· εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερίχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque multiples Α, Μ; si igitur Η superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ; et si æqualis, æqualis; et

## PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que Α soit à Β comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme Ε est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Γ; et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ de Β et de Δ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ;

καὶ εἰ ἴσον, ἴσον<sup>4</sup>· καὶ εἰ ἑλάττω, ἑλάττω<sup>5</sup>.  
 Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ  
 Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μιν<sup>6</sup> Γ, Ε ἰσά-  
 κεις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα  
 ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα  
 ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν·  
 καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττω, ἑλάττω.  
 Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ  
 τὸ Η τοῦ Α· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττω,  
 ἑλάττω· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α,  
 ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ  
 εἰ ἑλάττω, ἑλάττω. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Η, Κ  
 τῶν Α, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Α, Ν  
 τῶν Β, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια·  
 ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς  
 τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

si minor, minor. Rursus, quoniam est ut  $\Gamma$  ad  
 $\Delta$  ita  $E$  ad  $Z$ , et sumptæ ipsarum quidem  $\Gamma$ ,  $E$   
 $\propto$ que multiples  $\Theta$ ,  $K$ , ipsarum vero  $\Delta$ ,  $Z$  aliæ  
 utcumque  $\propto$ que multiples  $M$ ,  $N$ ; si igitur su-  
 perat  $\Theta$  ipsam  $M$ , superat et  $K$  ipsam  $N$ ; et si  
 $\propto$ qualis,  $\propto$ qualis; et si minor, minor. Sed si su-  
 perat  $\Theta$  ipsam  $M$ , superat et  $H$  ipsam  $A$ ; et si  
 $\propto$ qualis,  $\propto$ qualis; et si minor, minor; quare et  
 si superat  $H$  ipsam  $A$ , superat et  $K$  ipsam  $N$ ; et  
 si  $\propto$ qualis,  $\propto$ qualis; et si minor, minor. Et sunt  
 $H$ ,  $K$  quidem ipsarum  $A$ ,  $E$   $\propto$ que multiples,  
 ipsæ vero  $A$ ,  $N$  ipsarum  $B$ ,  $Z$  aliæ utcumque  
 multiples; est igitur ut  $A$  ad  $B$  ita  $E$  ad  $Z$ .  
 Ergo eidem, etc.

et si  $H$  est plus petit que  $A$ ,  $\Theta$  est plus petit que  $M$  (déf. 6. 5). De plus,  
 puisque  $\Gamma$  est à  $\Delta$  comme  $E$  est à  $Z$ , et qu'on a pris des équimultiples quel-  
 conques  $\Theta$ ,  $K$  de  $\Gamma$  et de  $E$ , et d'autres équimultiples quelconques  $M$ ,  $N$  de  
 $\Delta$  et de  $Z$ ; si  $\Theta$  surpasse  $M$ ,  $K$  surpasse  $N$ ; si  $\Theta$  est égal à  $M$ ,  $K$  est égal à  $N$ ,  
 et si  $\Theta$  est plus petit que  $M$ ,  $K$  est plus petit que  $N$ . Mais si  $\Theta$  surpasse  $M$ ,  
 $H$  surpasse  $A$ ; si  $\Theta$  est égal à  $M$ ,  $H$  est égal à  $A$ , et si  $\Theta$  est plus petit que  $M$ ,  
 $H$  est plus petit que  $A$ ; donc, si  $H$  surpasse  $A$ ,  $K$  surpasse  $N$ ; si  $H$  est égal à  
 $A$ ,  $K$  est égal à  $N$ , et si  $H$  est plus petit que  $A$ ,  $K$  est plus petit que  $N$ . Mais  
 $H$ ,  $K$  sont des équimultiples quelconques de  $A$  et de  $E$ , et  $A$ ,  $N$  d'autres équimul-  
 tiples quelconques de  $B$  et de  $Z$ ; donc  $A$  est à  $B$  comme  $E$  est à  $Z$  (déf. 6. 5).  
 Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

## PROPOSITIO XII.

Εάν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἰπόμενα.

Εστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

H \_\_\_\_\_  
Θ \_\_\_\_\_  
Κ \_\_\_\_\_  
Α \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_

Λ \_\_\_\_\_  
Μ \_\_\_\_\_  
Ν \_\_\_\_\_  
Β \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Α, Μ, Ν.

Et quoniam est Α ad Β ita Γ ad Δ et Ε ad Ζ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque

## PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ; que l'on a pris

τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Α, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερίχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὡστε καὶ εἰ ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερίχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν<sup>1</sup>. καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον<sup>2</sup>. Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἐπειδὴ πρὸς ἂν<sup>3</sup> ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη ὁποσαοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάνεις πολλαπλάσια<sup>4</sup>, ὁσαπλασίον ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Α, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ<sup>5</sup> Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Εὰν ἄρα ἢ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

multiplices Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiplices Α, Μ, Ν; si igitur Η superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ, et Κ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare et si superat Η ipsam Α, superant et Η, Θ, Κ ipsas Α, Μ, Ν; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Et est Η quidem et Η, Θ, Κ ipsius Α et ipsarum Α, Γ, Ε æque multiplices; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Propter eadem utique et Α et Α, Μ, Ν ipsius Β et ipsarum Β, Δ, Ζ æque sunt multiplices; est igitur ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ. Si igitur sint quotcunque, etc.

des équi-multiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équi-multiples quelconques Α, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ; si Η surpasse Α, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν; si Η est égal à Α, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν; et si Η est plus petit que Α, Θ est plus petit que Μ, et Κ plus petit que Ν (déf. 6. 5). Donc, si Η surpasse Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; si Η est égal à Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; et si Η est plus petit que Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Α, Μ, Ν. Mais la grandeur Η et la somme des grandeurs Η, Θ, Κ sont des équi-multiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Α et la somme des grandeurs Α, Μ, Ν sont des équi-multiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

## PROPOSITIO XIII.

Εάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς πέμπτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ περὶ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ περὶ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν<sup>3</sup> γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima quidem enim Α ad secundam Β eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, tertia vero Γ ad quartam Δ maiorem rationem

M \_\_\_\_\_  
A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
N \_\_\_\_\_

H \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Κ \_\_\_\_\_

Θ \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_  
Z \_\_\_\_\_  
Λ \_\_\_\_\_

μείζονα λόγον ἔχεται ἢ περὶ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἔξει ἢ περὶ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ<sup>5</sup>.

Επεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ<sup>6</sup>, ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε

habeat quam quinta Ε ad sextam Ζ; dico et primam Α ad secundam Β maiorem rationem habituram esse quam quintam Ε ad sextam Ζ.

Quoniam enim Γ ad Δ maiorem rationem habet quam Ε ad Ζ, sunt quædam ipsarum

## PROPOSITION XIII.

Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième.

Que la première Α ait avec la seconde Β la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que la troisième Γ ait avec la quatrième Δ une raison plus grande que la cinquième Ε avec la sixième Ζ; je dis que la première Α aura avec la seconde Β une raison plus grande que la cinquième Ε avec la sixième Ζ.

Puisque Γ a avec Δ une raison plus grande que Ε avec Ζ, parmi des équi-

ισάκεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἢ ἑταυχὴν ἰσάκεις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλάσιου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλάσιου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἢ ἑταυχὴν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαυτάσιον μὲν ἔστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυτάπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαυτάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυτάπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἢ ἑταυχὴν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάσσον, ἑλάσσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια; τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἢ ἑταυχὴν

quidem Γ, Ε æque multiples, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples; et ipsius quidem Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superat, ipsius vero Ε multiplex ipsius Ζ multiplicem non superat. Sumantur, et sint ipsarum quidem Γ, Ε æque multiples Η, Θ; ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ; ita ut Η quidem ipsam Κ superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex quidem est Η ipsius Γ, tam multiplex sit et Μ ipsius Α; quam vero multiplex Κ ipsius Δ, tam multiplex sit et Ν ipsius Β.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Μ, Η, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Ν, Κ; si igitur superat Μ ipsam Ν, superat et Η ipsam Κ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superat autem Η ipsam Κ, superat igitur et Μ ipsam Ν. Ipsa vero Θ ipsam Λ non superat; et sunt Μ, Θ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples, ipsæ vero Ν, Λ ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque æque multiples; ergo Α

multiples quelconques de Γ et de Ε, et parmi d'autres équivultiples quelconques de Δ et de Ζ, un multiple de Γ surpasse un multiple de Δ, et un multiple de Ε ne surpasse pas un multiple de Ζ (déf. 8. 5). Prenons ces équivultiples, et que Η, Θ soient des équivultiples de Γ et de Ε, et que Κ, Λ soient d'autres équivultiples quelconques de Δ et de Ζ, de manière que Η surpasse Κ, et que Θ ne surpasse pas Λ; et que Μ soit le même multiple de Α que Η l'est de Γ, et que Ν soit le même multiple de Β que Κ l'est de Δ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équivultiples quelconques Μ, Η de Α et de Γ, et d'autres équivultiples quelconques Ν, Κ de Β et de Δ; si Μ surpasse Ν, Η surpasse Κ; si Μ est égal à Ν, Η est égal à Κ; et si Μ est plus petit que Ν, Η est plus petit que Κ (déf. 6. 5). Mais Η surpasse Κ; donc Μ surpasse Ν. Mais Θ ne surpasse pas Λ; et Μ, Θ sont des équivultiples quelconques de Α et de Ε; et Ν, Λ sont d'autres équivultiples quelconques de Β



## 266 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ισάκεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ E πρὸς τὸ Z. Εἰς ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ad B majorem rationem habet quam E ad Z. Si igitur prima, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

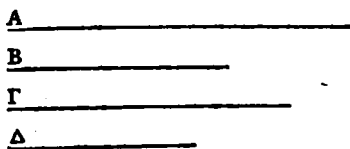
### PROPOSITIO XIV.

Εἰς πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τέταρτου μείζον ἴσται καὶ ἴσον καὶ ἑλάσσον.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia major sit, et secunda tertia major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

Prima enim A ad secundam B eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, major



τὸ Δ, μείζον δὲ ἴσται τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἴσται.

autem sit A ipsâ Γ; dico et B ipsâ Δ majorem esse.

Επὶ γὰρ μείζον ἴσται τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὁ ἴσται μείζον· τὸ B τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia autem utcumque magnitudo B; ergo A ad B majorem

et de z; donc A a avec B une raison plus grande que E avec z (déf. 8. 5). Donc, etc.

### PROPOSITION XIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième γ avec la quatrième Δ, et que A soit plus grand que γ; je dis que B est plus grand que Δ.

Puisque A est plus grand que γ, et que B est une autre grandeur quelconque,

# LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 267

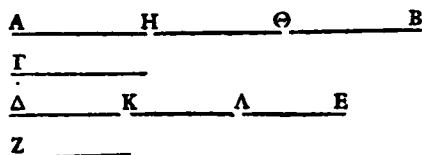
λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἐστιν· ἑλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· καὶ ἑλασσον ἢ τὸ Α τοῦ Γ, ἑλασσον ἔσται, καὶ<sup>3</sup> τὸ Β τοῦ Δ. Εάν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάκεις πολλαπλασίον τὸ ΑΒ τοῦ



Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

rationem habet quam Γ ad Β. Ut autem Α ad Β, ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Β. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur Δ ipsa Β; quare major est Β ipsa Δ.

Similiter utique ostendemus et si æqualis sit Α ipsi Γ, æqualem fore et Β ipsi Δ; et si minor sit Α ipsa Γ, minorem fore et Β ipsa Δ. Si igitur prima, etc.

## PROPOSITIO XV.

Partes inter se comparatæ eandem habent rationem quam æque multiplices.

Sit enim æque multiplex ΑΒ ipsius Γ ac

ΔΕ ipsius Ζ; dico esse ut Γ ad Ζ ita ΑΒ ad ΔΕ.

A a avec B une plus grande raison que Γ avec Β (8. 5). Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Β (13. 5). Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a la plus grande raison est la plus petite (10. 5); donc Δ est plus petit que Β, et par conséquent Β plus grand que Δ.

Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ, Β sera égal à Δ, et que si Α est plus petit que Γ, Β sera plus petit que Δ. Donc, etc.

## PROPOSITION XV.

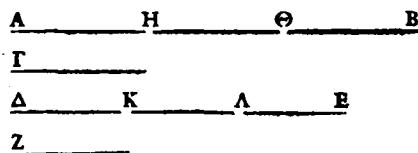
Les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples.

Que ΑΒ soit le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ; je dis que Γ est à Ζ comme ΑΒ est à ΔΕ.

## 268 LE CINQUIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῇ AB μεγέθει ἴσα τῇ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῇ ΔΕ ἴσα τῇ Ζ. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῇ Γ μεγέθει ἴσα, τὰ AH, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῇ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, ΗΘ, ΘΒ τῇ πλῆθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἵπεται ἴσα ἐστὶ τὰ AH, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἴσται δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλή-

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot sunt et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Dividatur AB quidem in magnitudines ipsi Γ æquales AH, ΗΘ, ΘΒ, ipsa vero ΔΕ in ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ipsi Ζ æquales; erit ntique æqualis multitudo ipsarum AH, ΗΘ, ΘΒ multitudini ipsarum ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et quoniam æquales sunt AH, ΗΘ, ΘΒ inter se, sunt autem



λοις· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἴσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν AH τῇ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῇ Ζ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔΕ. Τα ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἐξῆς.

et ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ æquales inter se; est igitur ut AH ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, et ΘΒ ad ΛΕ; erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut AH ad ΔΚ ita AB ad ΔΕ. Æqualis autem AH quidem ipsi Γ, ipsa vero ΔΚ ipsi Ζ; est igitur ut Γ ad Ζ ita AB ad ΔΕ. Ergo partes, etc.

Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Divisons AB en parties égales à Γ, et que ces parties soient AH, ΗΘ, ΘΒ; divisons aussi ΔΕ en parties égales à Ζ, et que ces parties soient ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Le nombre des parties AH, ΗΘ, ΘΒ sera égal au nombre des parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et puisque les parties AH, ΗΘ, ΘΒ sont égales entr'elles, et que les parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ sont aussi égales entr'elles, AH est à ΔΚ comme ΗΘ est à ΚΛ, et comme ΘΒ est à ΛΕ (7. 5); donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); donc AH est à ΔΚ comme AB est à ΔΕ. Mais AH est égal à Γ, et ΔΚ égal à Ζ; donc Γ est à Ζ comme AB est à ΔΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσται.

Εστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἰστίν', ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

E \_\_\_\_\_  
A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Z \_\_\_\_\_

Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἂ ἐτυχὲν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἰστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατὰλληλα<sup>2</sup>. ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales esse, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.

H \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Θ \_\_\_\_\_

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Β æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ ut-cunque æque multiples Η, Θ.

Et quoniam æque est multiplex Ε ipsius Α ac Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. Ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ; et ut igitur

PROPOSITION XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Β, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de Γ et de Δ.

Puisque Ε est le même multiple de Α que Ζ l'est de Β, et que les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équi-multiples (15. 5), la grandeur Α est à Β comme Ε est à Ζ. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc

270 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὥς ἄρα τὸ Γ πρὸς  
τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η,  
Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς  
τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ  
πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὥς ἄρα τὸ  
Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Εὰν δὲ  
τίσσερα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ  
τρίτου μίζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου

Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Rursus, quoniam Η, Θ  
ipsarum Γ, Δ æque sunt multiples; est igitur  
ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. Ut autem Γ ad Δ ita Ε  
ad Ζ; et ut igitur Ε ad Ζ ita Η ad Θ. Si  
autem quatuor magnitudines proportionales sint,  
prima autem tertiâ major sit, et vero secunda  
quartâ major erit; et si æqualis, æqualis; et  
si minor, minor. Si igitur superat Ε ipsam Η,

E \_\_\_\_\_  
A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Z \_\_\_\_\_

H \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Θ \_\_\_\_\_

μίζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασ-  
σον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ  
τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον,  
ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσά-  
κεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα  
ἀἴτιυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  
Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Εὰν ἄρα τίς-  
σαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

superat et Ζ ipsam Θ; et si æqualis, æqualis;  
et si minor, minor. Et sunt ipsæ quidem Ε, Ζ  
ipsarum Α, Β æque multiples, ipsæ vero Η,  
Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcumque æque multipli-  
ces; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Si igitur  
quatuor, etc.

Γ est à Δ comme Ε est à Ζ (11. 5). De plus, puisque Η, Θ sont des équi-  
multiples de Γ et de Δ; Γ est à Δ comme Η est à Θ. Mais Γ est à Δ comme  
Ε est à Ζ; donc Ε est à Ζ comme Η est à Θ (11. 5). Mais si quatre gran-  
deurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième,  
la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la  
troisième, la seconde est égale à la quatrième, et si la première est plus  
petite que la troisième, la seconde est plus petite que la quatrième (14. 5).  
Donc si Ε surpasse Η, Ζ surpasse Θ; si Ε est égal à Η, Ζ est égal à Θ; et si  
Ε est plus petit que Η, Ζ est plus petit que Θ. Mais Ε, Ζ sont des équimul-  
tiples quelconques de Α et de Β, et Η, Θ sont d'autres équimultiples quel-  
conques de Γ et de Δ; donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

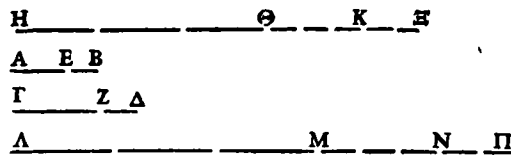
PROPOSITIO XVII.

Εὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ διαι-  
ριθέντα ἀνάλογον ἴσται.

Εστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ AB,  
BE, ΓΔ, ΔΖ, ὥς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ  
ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιριθέντα ἀνά-  
λογον ἴσται, ὥς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΖ  
πρὸς τὸ ΖΔ.

Si compositæ magnitudines proportionales  
sint, et divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales  
AB, BE, ΓΔ, ΔΖ, ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔΖ;  
dico et divisas proportionales fore, ut AE ad  
EB ita ΓΖ ad ΖΔ.



Εἰληφθῶ γὰρ τῶν μὲν AE, EB, ΓΖ, ΖΔ ἰσάνεις  
πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ  
EB, ΖΔ ἄλλα ἂ ἑτυχὴν ἰσάνεις πολλαπλάσια,  
τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ  
τοῦ AE καὶ τὸ ΘΚ τοῦ EB· ἰσάνεις ἄρα ἐστὶ  
πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ AE καὶ τὸ ΗΚ τοῦ AB.

Sumantur enim ipsarum quidem AE, EB, ΓΖ,  
ΖΔ æque multiples ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ip-  
sarum vero EB, ΖΔ alia utcunque æque multi-  
plices ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque est multiplex ΗΘ ip-  
sius AE ac ΘΚ ipsius EB; æque igitur est  
multiplex ΗΘ ipsius AE ac ΗΚ ipsius AB.

PROPOSITION XVII.

Si des grandeurs étant composées sont proportionnelles, ces grandeurs étant  
divisées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs composées AB, BE, ΓΔ, ΔΖ soient proportionnelles, c'est-  
à-dire que AB soit à BE comme ΓΔ est à ΔΖ; je dis que ces grandeurs étant  
divisées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que AE sera à EB comme  
ΓΖ est à ΖΔ.

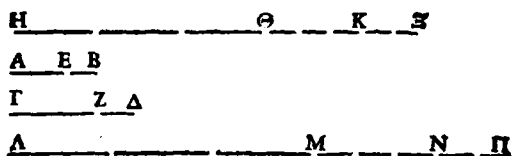
Prenons des équi-multiples quelconques ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ des grandeurs AE,  
EB, ΓΖ, ΖΔ, et d'autres équi-multiples quelconques ΚΞ, ΝΠ de EB et de ΖΔ.

Puisque ΗΘ est le même multiple de AE que ΘΚ l'est de EB, ΗΘ est le même  
multiple de AE que ΗΚ l'est de AB (1. 5). Mais ΗΘ est le même multiple de

272 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἰσάκεις δὲ ἐστὶ<sup>1</sup> πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ<sup>2</sup>. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκεις δὲ ἢ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΑΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ

Æque autem est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΑΜ ipsius ΓΖ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΜ ipsius ΓΖ. Rursus, quoniam æque est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; æque igitur est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΑΝ ipsius ΓΔ. Æque autem erat multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΗΚ ipsius ΑΒ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΝ ipsius ΓΔ; ipsæ ΗΚ, ΑΝ igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque



πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθεὶν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΑΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἂ ἔτυχιν<sup>3</sup> ἰσάκεις πολλαπλά-

est multiplex ΘΚ ipsius ΕΒ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; est autem et ΚΞ ipsius ΕΒ æque multiplex ac ΝΠ ipsius ΖΔ; et composita ΘΞ ipsius ΕΒ æque est multiplex ac ΜΠ ipsius ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, et sumptæ sunt ipsarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΑΝ, ipsarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ, ΜΠ;

ΑΕ que ΑΜ l'est de ΓΖ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΜ l'est de ΓΖ. De plus, puisque ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΜΝ l'est de ΖΔ, ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΑΝ l'est de ΓΔ. Mais ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΗΚ l'est de ΑΒ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΝ l'est de ΓΔ; donc ΗΚ, ΑΝ sont des équi-multiples de ΑΒ et de ΓΔ. De plus, puisque ΘΚ est le même multiple de ΕΒ que ΜΝ l'est de ΖΔ, et que ΚΞ est le même multiple de ΕΒ que ΝΠ l'est de ΖΔ, la grandeur composée ΘΞ est le même multiple de ΕΒ que ΜΠ l'est de ΖΔ (2. 5). Et puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; que ΗΚ, ΑΝ sont des équi-multiples quelconques de ΑΒ et de ΓΔ, et que ΘΞ et ΜΠ sont d'autres équi-multiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΑΝ sur-

σια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιριθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Αλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιριθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΝΠ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΝΠ· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΗΘ, ΑΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἂ ἔτυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Εὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἑξῆς.

si igitur superat HK ipsam ΘΞ, superat et ΑΝ ipsam ΜΠ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superet autem HK ipsam ΘΞ, et communi ablatâ ΘΚ, superat igitur et ΗΘ ipsam ΚΞ. Sed si superat HK ipsam ΘΞ, superat et ΑΝ ipsam ΜΠ· superat igitur et ΑΝ ipsam ΜΠ; et communi ΜΝ ablatâ, superat et ΑΜ ipsam ΝΠ; quare si superat ΗΘ ipsam ΚΞ, superat et ΑΜ ipsam ΝΠ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit ΗΘ ipsi ΚΞ, æqualem fore et ΑΜ ipsi ΝΠ; et si minor, minorem. Et sunt ΗΘ, ΑΜ quidem ipsarum ΑΕ, ΓΖ æque multiplices, ipsæ vero ΚΞ, ΝΠ ipsarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ. Si igitur compositæ, etc.

passé ΜΠ; si ΗΚ est égal à ΘΞ, ΑΝ est égal à ΜΠ, et si ΗΚ est plus petit que ΘΞ, ΑΝ est plus petit que ΜΠ (déf. 6. 5). Que ΗΚ surpasse ΘΞ; ayant retranché la partie commune ΘΚ, ΗΘ surpassera encore ΚΞ. Mais si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΑΝ surpassera ΜΠ. Donc ΑΝ surpassera ΜΠ; retranchons la partie commune ΜΝ; la grandeur ΑΜ surpassera ΝΠ. Donc, si ΗΘ surpasse ΚΞ, ΑΜ surpassera ΝΠ. Nous démontrerons semblablement que si ΗΘ est égal à ΚΞ, ΑΜ sera égal à ΝΠ, et que si ΗΘ est plus petit que ΚΞ, ΑΜ sera plus petit que ΝΠ. Mais ΗΘ, ΑΜ sont des équimultiples quelconques de ΑΕ et de ΓΖ, et ΚΞ et ΝΠ d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ (déf. 6. 5). Donc, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

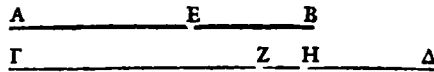
PROPOSITIO XVIII.

Εὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ συντι-  
θέντα ἀνάλογον ἔσται.

Εστώ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ,  
ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ  
πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντιθέντα ἀνάλογον  
ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς  
τὸ ΖΔ.

Si divisæ magnitudines proportionales sint,  
et compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales ΑΕ,  
ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ;  
dico et compositas proportionales fore, ut ΑΒ  
ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ.



Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως  
τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ  
οὕτως τὸ ΓΔ, ἥτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ  
πρὸς μείζον.

Εστώ πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ ΔΗ. Καὶ  
ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ  
πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν·  
ὥστε καὶ διαιριθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα

Si enim non est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ;  
erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ, vel ad minorem ipsâ  
ΔΖ, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem ΔΗ. Et quoniam est  
ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΗ, composita magni-  
tudines proportionales sunt; quare et divisæ  
proportionales erunt; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ

PROPOSITION XVIII.

Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, étant divisées, soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΕ soit à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ; je dis que ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ.

Car, si ΑΒ n'est pas à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ, ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΔΖ ou à une grandeur plus grande.

Que ΑΒ soit premièrement à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΖΔ, savoir à ΔΗ. Puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΗ, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles; donc ces grandeurs étant divisées seront

## LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 275

ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἑλάσσον τοῦ ΖΔ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διηρημένα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ita  $\Gamma\text{H}$  ad  $\text{H}\Delta$ . Ponitur autem et ut  $\text{A}\text{E}$  ad  $\text{E}\text{B}$  ita  $\text{G}\text{Z}$  ad  $\text{Z}\Delta$ ; et ut igitur  $\text{G}\text{H}$  ad  $\text{H}\Delta$  ita  $\text{G}\text{Z}$  ad  $\text{Z}\Delta$ . Major autem prima  $\text{G}\text{H}$  tertiâ  $\text{G}\text{Z}$ ; major igitur et secunda  $\text{H}\Delta$  quartâ  $\text{Z}\Delta$ . Sed, et minor, quod est impossibile; non igitur est ut  $\text{A}\text{B}$  ad  $\text{B}\text{E}$  ita  $\text{G}\Delta$  ad minorem ipsâ  $\text{Z}\Delta$ . Similiter utique ostendemus neque ad majorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisæ, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ᾗ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἴσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἐστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως

### PROPOSITIO XIX.

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota  $\text{A}\text{B}$  ad totam  $\text{G}\Delta$  ita ablata

encore proportionnelles (17. 5). Donc  $\text{A}\text{E}$  est à  $\text{E}\text{B}$  comme  $\text{G}\text{H}$  est à  $\text{H}\Delta$ . Mais on a supposé que  $\text{A}\text{E}$  est à  $\text{E}\text{B}$  comme  $\text{G}\text{Z}$  est à  $\text{Z}\Delta$ ; donc  $\text{G}\text{H}$  est à  $\text{H}\Delta$  comme  $\text{G}\text{Z}$  est à  $\text{Z}\Delta$  (11. 5). Mais la première  $\text{G}\text{H}$  est plus grande que la troisième  $\text{G}\text{Z}$ ; donc la seconde  $\text{H}\Delta$  est plus grande que la quatrième  $\text{Z}\Delta$  (14. 5). Mais elle est plus petite, ce qui est impossible; donc  $\text{A}\text{B}$  n'est pas à  $\text{B}\text{E}$  comme  $\text{G}\Delta$  est à une grandeur plus petite que  $\text{Z}\Delta$ . Nous démontrerons semblablement que  $\text{A}\text{B}$  n'est pas à  $\text{B}\text{E}$  comme  $\text{G}\Delta$  est à une grandeur plus grande que  $\text{Z}\Delta$ ; donc  $\text{A}\text{B}$  est à  $\text{B}\text{E}$ , comme  $\text{G}\Delta$  est à  $\text{Z}\Delta$ . Donc, etc.

### PROPOSITION XIX.

Si une grandeur entière est à une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière.

Que la grandeur entière  $\text{A}\text{B}$  soit à la grandeur entière  $\text{G}\Delta$  comme la grandeur

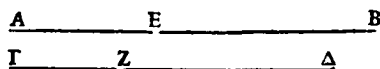
## 276 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ<sup>1</sup> οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἵπεται συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα

AB ad ablatam ΓΖ; dico et reliquam EB ad reliquam ΖΔ fore ut tota AB ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et alterne ut BA ad AE ita ΔΓ ad ΓΖ. Et quoniam compositæ magnitudines proportionales sunt, et divisæ proportionales



ἀνάλογον ἴσται· ὡς ἄρα<sup>2</sup> τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἐναλλάξ<sup>3</sup>, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν ΔΖ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἐὰν ἄρα ᾖ, καὶ τὰ ἱξῆς.

erunt; ut igitur BE ad EA ita ΔΖ ad ΖΓ; et alterne, ut BE ad ΔΖ ita ΕΑ ad ΖΓ. Ut autem AE ad ΓΖ ita posita est tota AB ad totam ΓΔ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΔΖ erit ut tota AB ad totam ΓΔ. Si igitur sit, etc.

retranchée AE est à la grandeur retranchée rz; je dis que la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ΖΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ.

Car puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme AE est à ΓΖ, par permutation, BA est à AE comme ΔΓ est à ΓΖ (16. 5). Et puisque les grandeurs composées sont proportionnelles, les grandeurs divisées seront encore proportionnelles (17. 5); donc BE est à EA comme ΔΖ est à ΖΓ; donc, par permutation, BE est à ΔΖ comme ΕΑ est à ΖΓ. Mais, par supposition, AE est à ΓΖ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera à la grandeur restante ΔΖ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (11. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι<sup>4</sup>. Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέφαντι ἀνάλογον ἔσται. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

COROLLARIUM.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et alterne ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓΖ; compositæ igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est ut AB ad EB ita ΔΓ ad ΖΔ, et est per conversionem. Ex hoc utique manifestum est si compositæ magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ<sup>1</sup> ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δίσσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτοῦ μείζον ἔσται· καὶ ἐὰν<sup>2</sup> ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν<sup>3</sup> ἥλασσον, ἥλασσον.

PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione, ex æquo autem prima tertiâ major sit; et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

COROLLAIRE.

Puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, par permutation (16. 5), AB est à AE comme ΓΔ est à ΓΖ; donc ces grandeurs étant composées sont proportionnelles. Mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ΖΔ; ce qui est par conversion. De là il est évident que si des grandeurs composées sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison; si, par égalité, la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

## 278 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἀλλὰ αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δίσσου δὲ μίζον ἴστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μίζον ἴσται· καὶ ἴσον· καὶ ἑλασσον, ἑλασσον.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsas æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eâdem ratione, ut quidem Α ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Β ad Γ ita Ε ad Ζ, ex æquo autem major sit Α ipsâ Γ; dico et Δ ipsâ Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

|          |          |
|----------|----------|
| <u>Α</u> | <u>Δ</u> |
| <u>Β</u> | <u>Ε</u> |
| <u>Γ</u> | <u>Ζ</u> |

Επεὶ γὰρ μίζον ἴστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τίς τὸ Β, τὸ δὲ μίζον πρὸς τὸ αὐτὸ μίζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἑλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μίζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως<sup>5</sup> τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ<sup>6</sup> Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μίζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μίζονα λόγον ἔχον

Quoniam enim major est Α ipsâ Γ, alia autem quædam Β, et major vero ad eandem majorem rationem habet quam minor; ipsa igitur Α ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Γ ad Β per inversionem ita Ζ ad Ε; et Δ igitur ad Ε majorem habet rationem quam Ζ ad Ε. Ipsarum autem ad eandem rationem habentium, majorem rationem habens major est; major

Soient Α, Β, Γ trois grandeurs, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; que, par égalité, Α soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera aussi plus grand que Ζ; que si Α est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque la grandeur Α est plus grande que la grandeur Γ, et que Β est une autre grandeur quelconque, la plus grande grandeur aura avec celle-ci une plus grande raison que la plus petite (8. 5); donc Α a avec Β une raison plus grande que Γ avec Β. Mais Α est à Β comme Δ est à Ε, et, par inversion, Γ est à Β comme Ζ est à Ε; donc Δ a avec Ε une plus grande raison que Ζ avec Ε. Mais, parmi les grandeurs qui ont une raison avec une même grandeur, celle-là est la plus grande qui a une plus grande raison (10. 5); donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ,

# LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 279

μειζόν ἴστι· μείζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἑλάττων, ἑλάττων. Ἐὰν ἄρα ἢ, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur est Δ ipsa Z. Similiter ostendemus, et si A æqualis sit ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur sint, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

## PROPOSITIO XXI.

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δίσσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτοῦ μείζον ἴσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλάττων, ἑλάττων.

Ἐστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμ-

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ex æquo autem prima tertiâ major sit, et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ et

|   |   |
|---|---|
| A | Δ |
| B | E |
| Γ | Z |

βανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ

in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Β ad Γ ita Δ ad Ε, ex æquo autem

Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

## PROPOSITION XXI.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison; si leur proportion est troublée, et si par égalité la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; et si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison; que leur raison soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ,

Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διίσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἴστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον· καὶ ἑλάττω, ἑλάττω.

Επεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὥς δὲ τὸ Γ πρὸς

A ipsâ Γ major sit; dico et Δ ipsâ Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia vero quædam Β; ergo A ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut A quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Γ ad Β per inversionem ita

|   |   |
|---|---|
| A | Δ |
| B | E |
| Γ | Z |

τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλασσόν ἔστιν· ἑλασσον ἄρα ἔστι τὸ Ζ τοῦ Δ· μείζον ἔστι<sup>2</sup> ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον<sup>3</sup> ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἑλασσον, ἑλασσον. Εὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἐξῆς.

E ad Δ; et E igitur ad Ζ majorem rationem habet quam E ad Δ. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur est Ζ ipsâ Δ; major est igitur Δ ipsâ Ζ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit A ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Ζ; et si minor, minorem. Si igitur tres, etc.

que B soit à Γ comme Δ est à Ε, et que par égalité A soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera plus grand que Ζ; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur, A aura avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme Ε est à Ζ, et par inversion, Γ est à B comme Ε est à Δ; donc Ε a avec Ζ une plus grande raison que Ε avec Δ. Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a une raison plus grande est la plus petite (10, 5); donc Ζ est plus petit que Δ; donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Εάν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ· καὶ διίσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἴσται.

Εστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὥς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διίσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἴσται, ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint quotcunque magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eadem ratione, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo in eadem ratione fore, ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

H \_\_\_\_\_  
Κ \_\_\_\_\_  
Μ \_\_\_\_\_  
Θ \_\_\_\_\_  
Λ \_\_\_\_\_  
Ν \_\_\_\_\_

Εἰλήθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἂ ἑτυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἂ ἑτυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ, et insuper ipsarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION XXII.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, elles auront la même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de grandeurs que l'on voudra, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que ces grandeurs auront la même raison par égalité, c'est-à-dire que Α sera à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ; prenons d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε, et enfin d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de Γ et de Ζ.



# 282 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ

Et quoniam est ut Α ad Β ita Δ ad Ε, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ utcumque æque multiples Κ, Λ; est igitur ut Η ad Κ ita Θ ad Λ. Propter eadem utique et ut Κ ad Μ ita Λ ad Ν. Et quoniam tres magnitudi-

Α  
Β  
Γ  
Δ  
Ε  
Ζ

Η  
Κ  
Μ  
Θ  
Λ  
Ν

πρὸς τὸ Ν. Επεὶ οὖν τρία μεγέθη ἰσὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διίσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ<sup>3</sup>. Εὰν ἄρα ᾗ ποσοαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

nes sunt Η, Κ, Μ, et aliæ ipsis æquales multitudindine Θ, Λ, Ν binæ sumptæ et in eadem ratione; ex æquo igitur si superat Η ipsam Μ, superat et Θ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Η, Θ quidem ipsarum Α, Δ æque multiples, ipsæ vero Μ, Ν ipsarum Γ, Ζ aliæ utcumque æque multiples; est igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur quotcunque, etc.

Puisque Α est à Β comme Δ est à Ε, que l'on a pris des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ, et d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε; Η est à Κ comme Θ est à Λ (4. 5). Par la même raison, Κ est à Μ comme Λ est à Ν. Donc, puisque l'on a trois grandeurs Η, Κ, Μ, et d'autres grandeurs Θ, Λ, Ν égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison; si, par égalité, Η surpasse Μ, Θ surpasse Ν; si Η est égal à Μ, Θ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Μ, Θ est plus petit que Ν (20. 5). Mais Η, Θ sont des équimultiples quelconques de Α et de Δ, et Μ, Ν d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Ζ; donc Α est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσται.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ

|                |                |
|----------------|----------------|
| <u>A</u> _____ | <u>H</u> _____ |
| <u>B</u> _____ | <u>Θ</u> _____ |
| <u>Γ</u> _____ | <u>Λ</u> _____ |
| <u>Δ</u> _____ | <u>Κ</u> _____ |
| <u>Ε</u> _____ | <u>Μ</u> _____ |
| <u>Ζ</u> _____ | <u>Ν</u> _____ |

αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἴστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem

ratione Δ, Ε, Ζ, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

Sumantur ipsarum quidem Α, Β, Δ æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Γ, Ε, Ζ aliæ utcunque æque multiples Α, Μ, Ν.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, et que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Β, Δ, et d'autres équimultiples quelconques Α, Μ, Ν des grandeurs Γ, Ε, Ζ.

Καὶ ἰπεί ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἴσάυτως πολλαπλάσις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἰπεί ἐστὶν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλάξ

Et quoniam æque sunt multiples Η, Θ ipsarum Α, Β, partes vero eandem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Θ. Propter eadem utique ut Ε ad Ζ ita Μ ad Ν; et est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; et ut igitur Η ad Θ ita Μ ad Ν. Et quoniam est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε, et alterne ut Β ad Δ ita Γ ad Ε. Et quoniam Θ, Κ ipsarum Β, Δ æque sunt multiples; partes autem eam-

|   |   |
|---|---|
| A | H |
| B | Θ |
| Γ | Λ |
| Δ | Κ |
| E | Μ |
| Z | N |

ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἰπεί τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάνεις πολλαπλάσις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἰπεί τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ.

dem habent rationem quam æque multiples; est igitur ut Β ad Δ ita Θ ad Κ; sed ut Β ad Δ ita Γ ad Ε; et ut igitur Θ ad Κ ita Γ ad Ε. Rursus quoniam Λ, Μ ipsarum Γ, Ε æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad Ε ita Λ ad Μ. Sed ut Γ ad Ε ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita Λ ad Μ, et alterne ut Θ ad Λ ita Κ ad Μ. Ostensum autem est et ut Η ad Θ ita Μ ad Ν; et quoniam tres magnitudines sunt

Puisque Η, Θ sont des équi-multiples de Α et de Β, et que les parties ont la même raison que leurs équi-multiples (15. 5); Α est à Β comme Η est à Θ. Par la même raison, Ε est à Ζ comme Μ est à Ν; mais Α est à Β comme Β est à Ζ; donc Η est à Θ comme Μ est à Ν (11. 5). Et puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, Β est à Δ par permutation, comme Γ est à Ε. Et puisque Θ, Κ sont des équi-multiples de Β et de Δ, et que les parties ont la même raison que leurs équi-multiples, Β est à Δ comme Θ est à Κ. Mais Β est à Δ comme Γ est à Ε; donc Θ est à Κ comme Γ est à Ε. De plus, puisque Λ, Μ sont des équi-multiples de Γ et de Ε, Γ est à Ε comme Λ est à Μ. Mais Γ est à Ε comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Λ est à Μ, et par permutation, Θ est à Λ

Αλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Εδείχθη δὴ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἴσιν, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἴσιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· δίσκου ἄρα εἰ ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερίχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἱλαττον, ἱλαττον. Καὶ ἴσιν τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἴσιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα ᾖ τρία, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

comme K est à M. Mais on a démontré que H est à Θ comme M est à N ; donc, puisque l'on a trois grandeurs H , Θ , Λ , et d'autres grandeurs K , Μ , Ν égales en nombre aux premières ; que ces grandeurs , prises deux à deux , ont la même raison , et que leur proportion est troublée ; si , par égalité , H surpasse Λ , K surpasse Ν ; si H est égal à Λ , K est égal à Ν ; et si H est plus petit que Λ , K est plus petit que Ν (21. 5). Mais H , K sont des équi-multiples de Α et de Δ , et Λ , Ν des équi-multiples de Γ et de Ζ ; donc Α est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc , etc.

PROPOSITION XXIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la cinquième a avec la seconde la même raison que la sixième avec la quatrième, la somme de la première et de la cinquième aura la même raison avec la seconde que la somme de la troisième et de la sixième avec la quatrième.

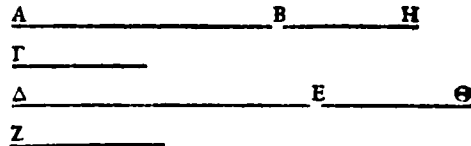
H , Θ , Λ , et aliæ ipsis æquales multitudinc, ipsæ K , Μ , Ν , binæ sumptæ in eadem ratione , et est earum perturbata proportio ; ex æquo igitur si superat H ipsam Α , superat et K ipsam Ν ; et si æqualis , æqualis ; et si minor , minor. Etsunt H , K quidem ipsarum Α , Δ æque multiples, ipsæ vero Α , Ν ipsarum Γ , Ζ ; est igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur sint tres , etc.

PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam ; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam ; et simul sumptæ prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

Πρῶτον μὲν<sup>2</sup> γὰρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἔχεται δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέν<sup>3</sup> πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Prima quidem enim AB ad secundam Γ eamdem habeat rationem quam tertia ΔΕ ad quartam Ζ; habeat vero et quinta ΒΗ ad secundam Γ eamdem rationem quam sexta ΕΘ ad quartam Ζ; dico et simul sumptas primam et quintam ΑΗ ad secundam Γ eamdem habituras esse rationem quam tertia et sexta ΔΘ ad quartam Ζ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διῖσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἵππερ διηρημένα μετέβη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογόν ἐσται· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· διῖσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam enim est ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; per inversionem igitur ut Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ. Et quoniam est ut ΑΒ ad Γ ita ΔΕ ad Ζ, ut autem Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ; ex æquo igitur est ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΘ. Et quoniam divisæ magnitudines proportionales sunt, et compositæ proportionales erunt; ut igitur ΑΗ ad ΒΗ ita ΔΘ ad ΕΘ. Est autem et ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; ex æquo igitur est ut ΑΗ ad Γ ita ΔΘ ad Ζ. Si igitur prima, etc.

Que la première AB ait avec la seconde Γ la même raison que la troisième ΔΕ a avec la quatrième Ζ, et que la cinquième ΒΗ ait avec la seconde Γ la même raison que la sixième ΕΘ avec la quatrième Ζ; je dis que la somme de la première et de la cinquième ΑΗ aura avec la seconde Γ la même raison que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ a avec la quatrième Ζ.

Puisque ΒΗ est à Γ comme ΕΘ est à Ζ, par inversion, Γ est à ΒΗ comme Ζ est à ΕΘ (cor. 4. 5). Mais ΑΒ est à Γ comme ΔΕ est à Ζ, et Γ est à ΒΗ comme Ζ est à ΕΘ; donc, par égalité, ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΘ (22. 5); donc, puisque ces grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles (18. 5); donc ΑΗ est à ΒΗ comme ΔΘ est à ΕΘ. Mais ΒΗ est à Γ comme ΕΘ est à Ζ; donc, par égalité, ΑΗ est à Γ comme ΔΘ est à Ζ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

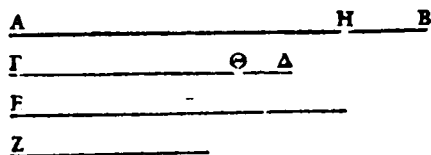
PROPOSITIO XXV.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον<sup>1</sup> δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ AB, ΓΔ, E, Z, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴστω δὲ μέγιστον μὲν<sup>2</sup> αὐτῶν τὸ AB, ἐλάχιστον δὲ τὸ Z· λέγω ὅτι τὰ AB, Z τῶν ΓΔ, E μείζονά ἐστι.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis majores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; sit autem maxima quidem ipsarum AB, minima vero Z; dico AB, Z ipsis ΓΔ, E majores esse.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν E ἴσον τὸ AH, τῷ δὲ Z ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν<sup>3</sup> ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴσον δὲ τὸ μὲν E τῷ AH, τὸ δὲ Z τῷ ΓΘ<sup>1</sup>· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AH πρὸς

Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AH, ipsi vero Z æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem ipsa quidem E ipsi AH, ipsa vero Z ipsi ΓΘ; est igitur ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. Et quoniam est ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; et reliqua

PROPOSITION XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

Que les quatre grandeurs AB, ΓΔ, E, Z soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; que AB soit la plus grande, et Z la plus petite; je dis que les grandeurs AB, Z sont plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E.

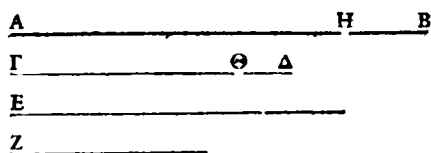
Faisons AH égal à E, et ΓΘ égal à Z.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z, AB est à ΓΔ comme AH est à ΓΘ, et puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée AH est à la grandeur

288 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρῆθ' τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ HB πρὸς  
λοιπὸν τὸ ΘΔ ἴσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον  
τὸ ΓΔ. Μειζὸν δὲ τὸ AB τοῦ ΓΔ· μείζον ἄρα καὶ  
τὸ HB τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπὶ ἴσον ἴστί τὸ μὲν AH  
τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· τὰ ἄρα AH, Z ἴσα ἴστί  
τοῖς ΓΘ, E. Καὶ ἐπὶ ἰὰν ἀνίστοις ἴσα προστεθῇ,

igitur HB ad reliquam ΘΔ erit ut tota AB ad  
totam ΓΔ. Major autem AB ipsā ΓΔ; ma-  
jor igitur et HB ipsā ΘΔ. Et quoniam æqualis  
est AH quidem ipsi E, ΓΘ vero ipsi Z; ipsæ  
igitur AH, Z æquales sunt ipsis ΓΘ, E. Et quo-  
niam si inæqualibus æqualia addantur, tota



τὰ ὅλα ἀνίσα ἐστίν· ἐὰν ἄρα τῶν HB, ΘΔ ἀνί-  
σων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ HB, τῷ μὲν<sup>6</sup> HB  
προστεθῇ τὰ AH, Z, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ  
ΓΘ, E, συνάγεται τὰ AB, Z μείζονα τῶν ΓΔ,  
E. Εἰς ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

inæqualia sunt; si igitur ipsis HB, ΘΔ inæqua-  
libus existentibus, et maiore ipsā HB, ipsi  
quidem HB addantur AH, Z, ipsi vero ΘΔ  
addantur ΓΘ, E, fient AB, Z majores ipsis  
ΓΔ, E. Si igitur quatuor, etc.

retranchée ΓΘ, la grandeur restante HB sera à la grandeur restante ΘΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (19. 5). Mais AB est plus grand que ΓΔ; donc HB est plus grand que ΘΔ. Mais AH est égal à E, et ΓΘ à Z; donc les grandeurs AH, Z sont égales aux grandeurs ΓΘ, E. Mais si on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales, les grandeurs entières sont inégales; donc, puisque les grandeurs HB, ΘΔ sont inégales, et que HB est la plus grande, si l'on ajoute à HB les grandeurs AH, Z, et à ΘΔ les grandeurs ΓΘ, E, les grandeurs AB, Z seront plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E. Donc, etc.

FIN DU CINQUIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R S E X T U S.

---

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Ομοία σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχουσιν κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β'. Ἀντιπεπονητότα δι' σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῃ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ὑπομεινόμενοι λόγοι ὦσιν.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ et angulos æquales habent singulos singulis, et circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciproce autem figuræ sunt, quando in utràque figurarum antecedentesque et consequentes rationum sunt,

## LIVRE SIXIEME

# DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.



γ'. Ακρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τιτμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾗ ὡς ἡ<sup>2</sup> ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

3. Secundum extremam et mediam rationem recta secta esse dicitur, quando est ut tota ad majus segmentum ita majus ad minus.

δ'. Ὑψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη<sup>3</sup>.

4. Altitudo est omnis figuræ a vertice ad basim perpendicularis ducta.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

## PROPOSITIO I.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Triangula et parallelogramma, sub eadem altitudine existentia, inter se sunt ut bases.

Ἐστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην<sup>1</sup>. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, parallelogramma vero ΕΓ, ΓΖ, sub eadem altitudine existentia, ipsâ ab Α ad ΒΔ perpendiculari ductâ; dico esse ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum, et ΕΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum.

Ἐκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ

Producatur enim ΒΔ ex utrâque parte ad Θ, Λ puncta, et ponantur ipsi quidem ΒΓ basi

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

## PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

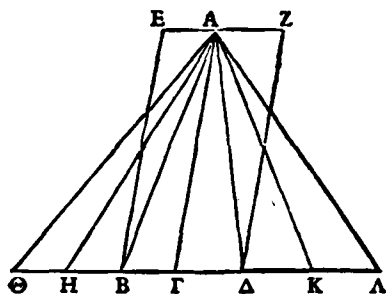
Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Λ; prenons tant

βάσει ἴσαι ὡσαυδηποτοῦν αἱ BH, HΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὡσαυδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπιζεύχουσιν αἱ AH, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, BH, HΘ ἀλλή-  
λαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρί-  
γωνα ἀλλήλοις· ὡσαυδασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ  
βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ  
τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ

æquales quotcunque BH, HΘ, ipsi vero ΓΔ  
basi æquales quotcunque ΔΚ, ΚΛ, et jungan-  
tur AH, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Et quoniam æquales sunt ipsæ ΓΒ, BH, HΘ  
inter se, æquales sunt et ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ trian-  
gula inter se; quam multiplex igitur est ΘΓ basis  
ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est et ΑΘΓ trian-  
gulum ipsius ΑΒΓ trianguli. Propter eadem uti-



αὐτὰ δὲ ὡσαυδασίων ἐστὶν ἡ ΓΑ βάσις τῆς ΓΔ  
βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρί-  
γωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ  
βάσις τῇ ΓΑ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον  
τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς  
ΓΑ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ  
ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Τισσά-  
ρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ,

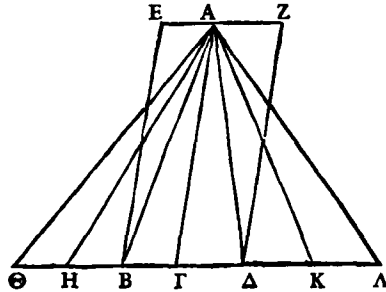
que quam multiplex est ΓΑ basis ipsius ΓΔ  
basis, tam multiplex est et ΑΛΓ triangulum  
ipsius ΑΓΔ trianguli; et si æqualis est ΘΓ basis  
ipsi ΓΑ basi, æquale est et ΑΘΓ triangulum  
ipsi ΑΛΓ triangulo; et si superat ΘΓ basis ip-  
sam ΓΑ basim, superat et ΑΘΓ triangulum  
ipsum ΑΛΓ triangulum; et si minor, minus.  
Quatuor igitur existentibus magnitudinibus,

de droites qu'on voudra BH, HΘ, égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites  
qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons AH, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, BH, HΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. 1); donc le triangle ΑΘΓ est le même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base ΓΑ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΑ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΑ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. 1); et si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΑ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre

ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δίδικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ

duabus quidem basibus ΒΓ, ΓΔ, duobus vero triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem ΒΓ et ΑΒΓ trianguli, ipsa ΘΓ basis et ΑΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ et trianguli ΑΓΔ alia utcumque æque multiplicia, ipsaque ΓΛ basis et ΑΛΓ triangulum. Et ostensum est si superat ΘΓ basis ipsam ΓΛ basim, superare et ΑΘΓ triangulum ipsum ΑΛΓ triangulum;



ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττων, ἑλάττων<sup>3</sup>. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίους τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὥς τὸ ΑΒΓ

et si æqualis, æquale; et si minor, minus; est igitur ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ quidem duplum est ΕΓ parallelogrammum, ipsius vero ΑΓΔ trianguli duplum est ΖΓ parallelogrammum, partes autem eamdem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad

grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équi-multiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équi-multiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a démontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5).

Puisque le parallélogramme ΕΓ est double du triangle ΑΒΓ, que le parallélogramme ΖΓ est double aussi du triangle ΑΓΔ (prop. 41. 1), et que les parties

τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον<sup>5</sup>, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον<sup>6</sup> οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸν ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον<sup>7</sup>. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis quidem ΒΓ ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum; ut autem ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum; et ut igitur ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Ergo triacula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Εὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα<sup>1</sup>, ἀνάλογον τομεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἰὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζυγμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν<sup>2</sup>.

Si trianguli juxta unum laterum ducatur quædam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, ipsa sectiones conjungens recta juxta reliquum erit trianguli latus.

ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5)., le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ. Puisqu'on a démontré que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ, la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Τριγώνου γὰρ τοῦ  $ABΓ$  παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ  $ΒΓ$  ἤχθω ἡ  $ΔΕ$ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$  οὕτως ἡ  $ΓΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ .

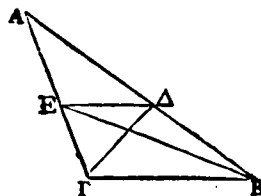
Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ  $ΒΕ$ ,  $ΓΔ$ .

Ἰσον δὴ<sup>3</sup> ἐστὶ τὸ  $ΒΔΕ$  τρίγωνον τῷ  $ΓΔΕ$  τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς  $ΔΕ$  καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς  $ΔΕ$ ,  $ΒΓ$ . Ἄλλο δέ τι τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα

Trianguli enim  $ABΓ$  parallela uni laterum  $ΒΓ$  ducatur  $ΔΕ$ ; dico esse ut  $ΒΔ$  ad  $ΔΑ$  ita  $ΓΕ$  ad  $ΕΑ$ .

Jungantur enim  $ΒΕ$ ,  $ΓΔ$ .

Æquale utique est  $ΒΔΕ$  triangulum ipsi  $ΓΔΕ$  triangulo, in eadem enim basi sunt  $ΔΕ$  et intra easdem parallelas  $ΔΕ$ ,  $ΒΓ$ . Aliud autem quoddam  $ΑΔΕ$  triangulum; æqualia vero ad idem eandem habent rationem; est igitur ut



ὡς τὸ  $ΒΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον· οὕτως τὸ  $ΓΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ  $ΒΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$  οὕτως ἡ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$ · ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ  $Ε$  ἐπὶ τὴν  $ΑΒ$  κάθετον ἀγομίνην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ<sup>5</sup> ὡς τὸ  $ΓΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΑΔΕ$  οὕτως ἡ  $ΓΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$  οὕτως ἡ  $ΓΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΑ$ .

$ΒΔΕ$  triangulum ad  $ΑΔΕ$  triangulum, ita  $ΓΔΕ$  triangulum ad  $ΑΔΕ$  triangulum. Sed ut  $ΒΔΕ$  quidem triangulum ad  $ΑΔΕ$  ita  $ΒΔ$  ad  $ΔΑ$ ; nam cum sub eadem altitudine sint, sub ipsâ ab  $Ε$  ad  $ΑΒ$  perpendiculari ductâ, inter se sunt ut bases. Propter eadem utique ut  $ΓΔΕ$  triangulum ad  $ΑΔΕ$  ita  $ΓΕ$  ad  $ΕΑ$ ; et ut igitur  $ΒΔ$  ad  $ΔΑ$  ita  $ΓΕ$  ad  $ΕΑ$ .

Menons  $ΔΕ$  parallèle à un des côtés  $ΒΓ$  du triangle  $ΑΒΓ$ ; je dis que  $ΒΔ$  est à  $ΔΑ$  comme  $ΓΕ$  est à  $ΕΑ$ .

Joignons  $ΒΕ$ ,  $ΓΔ$ .

Le triangle  $ΒΔΕ$  sera égal au triangle  $ΓΔΕ$  (37. 1), parce qu'ils ont la même base  $ΔΕ$ , et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles  $ΔΕ$ ,  $ΒΓ$ . Mais  $ΑΔΕ$  est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle  $ΒΔΕ$  est au triangle  $ΑΔΕ$  comme le triangle  $ΓΔΕ$  est au triangle  $ΑΔΕ$ . Mais le triangle  $ΒΔΕ$  est au triangle  $ΑΔΕ$  comme  $ΒΔ$  est à  $ΔΑ$ ; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point  $Ε$  sur la droite  $ΑΒ$ , sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle  $ΓΔΕ$  est au triangle  $ΑΔΕ$  comme  $ΓΕ$  est à  $ΕΑ$ ; donc  $ΒΔ$  est à  $ΔΑ$  comme  $ΓΕ$  est à  $ΕΑ$  (11. 3).

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ  $ABΓ$  τριγώνου πλευραὶ αἱ  $AB$ ,  $ΑΓ$  ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ  $\Delta$ ,  $E$  σημεία, ὥς ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $\Delta A$  οὕτως ἢ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $EA$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $\Delta E$ . λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ  $\Delta E$  τῇ  $BΓ$ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $\Delta A$  οὕτως ἢ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $EA$ , ἀλλ' ὥς μὲν ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $\Delta A$  οὕτως τὸ  $B\Delta E$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Delta\Delta E$  τρίγωνον<sup>6</sup>, ὥς δὲ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $EA$  οὕτως τὸ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Delta\Delta E$  τρίγωνον<sup>7</sup>. καὶ ὥς ἄρα τὸ  $B\Delta E$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Delta\Delta E$  τρίγωνον<sup>8</sup> οὕτως τὸ  $\Gamma\Delta E$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $\Delta\Delta E$  τρίγωνον<sup>9</sup>. Ἐκατέρον ἄρα τῶν  $B\Delta E$ ,  $\Gamma\Delta E$  τριγώνων πρὸς τὸ  $\Delta\Delta E$  τρίγωνον<sup>10</sup> τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἰσὸν ἄρα ἐστὶ τὸ  $B\Delta E$  τρίγωνον τῷ  $\Gamma\Delta E$  τριγώνῳ· καὶ εἴσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς  $\Delta E$ . Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ<sup>11</sup> ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Delta E$  τῇ  $BΓ$ . Ἐάν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed et  $ABΓ$  trianguli latera  $AB$ ,  $ΑΓ$  proportionaliter secta sint in  $\Delta$ ,  $E$  punctis, ut  $BA$  ad  $\Delta A$  ita  $ΓE$  ad  $EA$ , et jungatur  $\Delta E$ ; dico parallelam esse  $\Delta E$  ipsi  $BΓ$ .

Isidem enim constructis, quoniam est ut  $BA$  ad  $\Delta A$  ita  $ΓE$  ad  $EA$ , sed ut  $BA$  quidem ad  $\Delta A$  ita  $B\Delta E$  triangulum ad  $\Delta\Delta E$  triangulum, ut  $ΓE$  vero ad  $EA$  ita  $\Gamma\Delta E$  triangulum ad  $\Delta\Delta E$  triangulum; et ut igitur  $B\Delta E$  triangulum ad  $\Delta\Delta E$  triangulum ita  $\Gamma\Delta E$  triangulum ad  $\Delta\Delta E$  triangulum. Utrumque igitur  $B\Delta E$ ,  $\Gamma\Delta E$  triangulorum ad  $\Delta\Delta E$  triangulum eandem habet rationem.  $\mathcal{A}$ -quale igitur est  $B\Delta E$  triangulum ipsi  $\Gamma\Delta E$  triangulo; et sunt super eadem basi  $\Delta E$ .  $\mathcal{A}$ equalia autem triangula et super eadem basi constituta et intra easdem parallelas sunt. Parallela igitur est  $\Delta E$  ipsi  $BΓ$ . Si igitur trianguli, etc.

Mais que les côtés  $AB$ ,  $ΑΓ$  du triangle  $ABΓ$  soient coupés proportionnellement aux points  $\Delta$ ,  $E$ , c'est-à-dire que  $BA$  soit à  $\Delta A$  comme  $ΓE$  est à  $EA$ , et joignons  $\Delta E$ ; je dis que  $\Delta E$  est parallèle à  $BΓ$ .

Faisons la même construction. Puisque  $BA$  est à  $\Delta A$  comme  $ΓE$  est à  $EA$ , que  $BA$  est à  $\Delta A$  comme le triangle  $B\Delta E$  est au triangle  $\Delta\Delta E$  (1. 6), et que  $ΓE$  est à  $EA$  comme le triangle  $\Gamma\Delta E$  est au triangle  $\Delta\Delta E$ , le triangle  $B\Delta E$  est au triangle  $\Delta\Delta E$  comme le triangle  $\Gamma\Delta E$  est au triangle  $\Delta\Delta E$  (11. 5). Donc chacun des triangles  $B\Delta E$ ,  $\Gamma\Delta E$  a la même raison avec le triangle  $\Delta\Delta E$ . Donc le triangle  $B\Delta E$  est égal au triangle  $\Gamma\Delta E$  (9. 5); et ils sont sur la même base  $\Delta E$ . Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39. 1). Donc  $\Delta E$  est parallèle à  $BΓ$ . Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

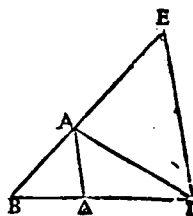
## PROPOSITIO III.

Εάν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Εστω τρίγωνον τὸ  $AB\Gamma$ , καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνία δίχα ὑπὸ τῆς  $AD$  εὐθείας· λόγῳ ὅτι ἐστὶν ὥς ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $DA$  οὕτως ἡ  $BA$  πρὸς τὴν  $AD$ ,

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basim; basis segmenta eandem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si basis segmenta eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, ipsa a vertice ad sectionem ducta recta bifariam secat trianguli angulum.

Sit triangulum  $AB\Gamma$ , et secetur  $BA\Gamma$  angulus bifariam ab ipsâ  $AD$  rectâ; dico esse ut  $BA$  ad  $DA$  ita  $BA$  ad  $AD$ .



Ἡχθῶ γὰρ διὰ τοῦ  $\Gamma$  τῇ  $DA$  παραλλήλος ἡ  $GE$ , καὶ διαχθεῖσα ἡ  $BA$  συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ  $E$ .

Ducatur enim per  $\Gamma$  ipsi  $DA$  parallela  $GE$ , et producta  $BA$  conveniat cum ipsâ in  $E$ .

## PROPOSITION III.

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle  $AB\Gamma$ , que l'angle  $BA\Gamma$  soit partagé en deux parties égales par la droite  $AD$ ; je dis que  $BA$  est à  $DA$  comme  $BA$  est à  $AD$ .

Par le point  $\Gamma$  menons  $GE$  parallèle à  $DA$  (31. 1), et que  $BA$  prolongé rencontre  $GE$  au point  $E$ .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐ-  
θεῖα ἐνέπυσιν<sup>3</sup> ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία  
ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ  
ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ  
ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλή-  
λους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπυσιν ἡ ΒΑΕ, ἡ  
ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ  
ὑπὸ ΑΕΓ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ  
ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία<sup>4</sup> τῇ ὑπὸ ΑΕΓ  
ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ  
ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν  
τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἔκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα  
ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς  
τὴν ΑΕ. Ἰση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα<sup>5</sup> ἡ ΒΔ πρὸς  
τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Αλλὰ δὴ ἴστω ὡς<sup>6</sup> ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως  
ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπιτεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω  
ὅτι δίχα τέμνεται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς  
ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν  
ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ,  
ἄλλα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν<sup>7</sup> ἡ

Et quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit  
ΑΓ; ergo ΑΓΕ angulus æqualis est ipsi ΓΑΔ.  
Sed ΓΑΔ ipsi ΒΑΔ ponitur æqualis; et ΒΑΔ  
igitur ipsi ΑΓΕ est æqualis. Rursus quoniam in  
parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit ΒΑΕ, exterior  
angulus ΒΑΔ æqualis est interiori ΑΕΓ. Ostensus  
autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΔ æqualis; et ΑΓΕ  
igitur angulus ipsi ΑΕΓ est æqualis; quare et  
latus ΑΕ lateri ΑΓ est æquale. Et quoniam  
trianguli ΒΓΕ juxta unum laterum ΕΓ ducta  
est ipsa ΑΔ; proportionaliter igitur est ut ΒΔ  
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ. Æqualis autem est ΑΕ  
ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Sed et sit ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; et  
jungatur ΑΔ; dico bifariam sectum esse ΒΑΓ  
angulum ab ΑΔ rectâ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ  
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ, sed et ut ΒΔ ad ΔΓ ita  
est ΒΑ ad ΑΕ; trianguli enim ΒΓΕ juxta unum

Puisque la droite ΑΓ tombe sur les parallèles ΑΔ, ΕΓ, l'angle ΑΓΕ est égal à  
l'angle ΓΑΔ (29. 1). Mais l'angle ΓΑΔ est supposé égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle  
ΒΑΔ est égal à l'angle ΑΓΕ. De plus, puisque la droite ΒΑΕ tombe sur les parallèles  
ΑΔ, ΕΓ, l'angle extérieur ΒΑΔ est égal à l'angle intérieur ΑΕΓ (29. 1). Mais on  
a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle ΑΓΕ est égal  
à l'angle ΑΕΓ; donc le côté ΑΕ sera égal au côté ΑΓ (6. 1). Et puisqu'on a mené  
la droite ΑΔ parallèle à un des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΔ est à ΔΓ  
comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6). Mais ΑΕ est égal à ΑΓ; donc ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ  
est à ΑΓ (7. 5).

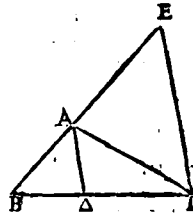
Mais que ΒΔ soit à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ; joignons ΑΔ; je dis que l'angle  
ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ, et  
que ΒΑ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6), car la droite ΑΔ est parallèle à un



BA πρὸς τὴν AE· τριγώνου γὰρ τοῦ BΓE παρὰ  
μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EF ἕκται<sup>8</sup> ἡ AD· καὶ  
ὥς ἄρα ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ BA πρὸς  
τὴν AE· ἴση ἄρα ἡ AG τῇ AE, ὥστε καὶ γω-  
νία ἡ ὑπὸ AEF γωνία τῇ ὑπὸ AGE ἴσιν ἴση.

laterum EF ducta est ipsa AD; et ut igitur BA  
ad AG ita BA ad AE; æqualis igitur AG ipsi  
AE; quare et angulus AEF angulo AGE est  
æqualis. Sed AEF quidem exteriori BAA æqua-  
lis, ipse vero et AGE alterno ΓΑΔ est æqualis;



Αλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEF τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ BAA ἴση,  
ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AGE τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ  
ἴσιν ἴση<sup>9</sup>· καὶ ἡ ὑπὸ BAA ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ  
ἴσιν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ BAG γωνία δίχα<sup>10</sup> τέτμη-  
ται ὑπὸ τῆς AD εὐθείας. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ  
τὰ ἕξῃς.

et BAA igitur ipsi ΓΑΔ est æqualis. Ipse BAG  
igitur angulus bifariam sectus est ab AD rectā.  
Si igitur trianguli, etc.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

#### PROPOSITIO IV.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ  
πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι  
αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί'.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia  
sunt latera circa æquales angulos; et homo-  
loga æquales angulos subtendunt latera.

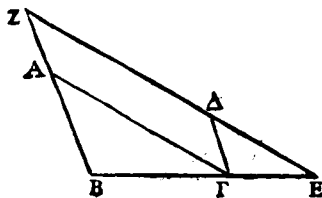
des côtés EF du triangle BEG, la droite BA est à AG comme BA est à AE; donc  
AG est égal à AE (9. 5); donc l'angle AEF est égal à l'angle AGE (5. 1). Mais  
l'angle AEF est égal à l'angle extérieur BAA (29. 1), et l'angle AGE égal à l'angle  
alterne ΓΑΔ; donc l'angle BAA est égal à l'angle ΓΑΔ; donc l'angle BAG est partagé  
en deux parties égales par la droite AD. Donc, etc.

#### PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont  
proportionnels; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homo-  
logues.

Εστω<sup>2</sup> ἰσογώνια τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ἴσων ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΓΔΕ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ  $ABΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΓΕ$ <sup>3</sup>. λέγω ὅτι τῶν  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$  τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ<sup>4</sup>.

Sint æquiangula triangula  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , æqualem habentia  $BAΓ$  quidem angulum ipsi  $ΓΔΕ$ , ipsum vero  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , et præterea ipsum  $ABΓ$  ipsi  $ΔΓΕ$ ; dico  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$  triangulorum proportionalia esse latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendere latera.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ  $BΓ$  τῇ  $ΓΕ$ . Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , αἱ ἄρα ὑπὸ<sup>5</sup>  $ABΓ$ ,  $ΔΕΓ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν· αἱ  $BA$ ,  $ΕΔ$  ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. Ἐκτελέσθωσαν, καὶ συμπίπτειν κατα τὸ  $Z$ .

Ponatur enim in directum ipsa  $BΓ$  ipsi  $ΓΕ$ . Et quoniam  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  anguli duobus rectis minores sunt, æqualis autem  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , ipsi igitur  $ABΓ$ ,  $ΔΕΓ$  duobus rectis minores sunt; ipsæ  $BA$ ,  $ΕΔ$  igitur productæ convenient. Producantur, et convenient in  $Z$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΔΓΕ$  γωνία τῇ ὑπὸ<sup>6</sup>  $ABΓ$ , παραλλήλος ἄρα<sup>7</sup> ἐστὶν ἡ  $BZ$  τῇ  $ΓΔ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , παράλληλος ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΖΕ$ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΖΑΓΔ$ . ἴση ἄρα ἡ μὲν  $ΖΑ$

Et quoniam æqualis est  $ΔΓΕ$  angulus ipsi  $ABΓ$ , parallela igitur est  $BZ$  ipsi  $ΓΔ$ . Rursus, quoniam æqualis est  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , parallela est  $ΑΓ$  ipsi  $ΖΕ$ ; parallelogrammum igitur est  $ΖΑΓΔ$ ; æqualis igitur  $ΖΑ$  quidem ipsi  $ΔΓ$ , ipsa

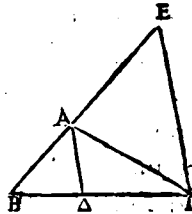
Soient les triangles équiangles  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ayant l'angle  $BAΓ$  égal à l'angle  $ΓΔΕ$ , l'angle  $ΑΓΒ$  égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , et l'angle  $ABΓ$  égal à l'angle  $ΔΓΕ$ ; je dis que dans les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

Plaçons la droite  $BΓ$  dans la direction de  $ΓΕ$ . Et puisque les angles  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  sont plus petits que deux droits (17. 1), et que l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , les angles  $ABΓ$ ,  $ΔΕΓ$  sont plus petits que deux droits; donc les droites  $BA$ ,  $ΕΔ$ , étant prolongées, se rencontreront (not. com. 11); qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en  $Z$ .

Et puisque l'angle  $ΔΓΕ$  est égal à l'angle  $ABΓ$ , la droite  $BZ$  est parallèle à la droite  $ΓΔ$  (28. 1). De plus, puisque l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , la droite  $ΑΓ$  est parallèle à  $ΖΕ$ ; donc la figure  $ΖΑΓΔ$  est un parallélo-

BA πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ  
μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἥκται<sup>8</sup> ἢ ΑΔ· καὶ  
ὥς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς  
τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥστε καὶ γω-  
νία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση.

laterum ΕΓ ducta est ipsa ΑΔ; et ut igitur ΒΑ  
ad ΑΓ ita ΒΑ ad ΑΕ; æqualis igitur ΑΓ ipsi  
ΑΕ; quare et angulus ΑΕΓ angulo ΑΓΕ est  
æqualis. Sed ΑΕΓ quidem exteriori ΒΑΔ æqua-  
lis, ipse vero et ΑΓΕ alterno ΓΑΔ est æqualis;



Αλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση,  
ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλαξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ  
ἐστὶν ἴση<sup>9</sup>· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ  
ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα<sup>10</sup> τέτμη-  
ται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ  
τὰ ἐξῆς.

et ΒΑΔ igitur ipsi ΓΑΔ est æqualis. Ipse ΒΑΓ  
igitur angulus bifariam sectus est ab ΑΔ rectā.  
Si igitur trianguli, etc.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

#### PROPOSITIO IV.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ  
πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι  
αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί<sup>1</sup>.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia  
sunt latera circa æquales angulos; et homo-  
loga æquales angulos subtendunt latera.

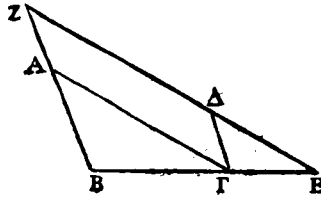
des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΑ est à ΑΓ comme ΒΑ est à ΑΕ; donc  
ΑΓ est égal à ΑΕ (9. 5); donc l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΑΓΕ (5. 1). Mais  
l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle extérieur ΒΑΔ (29. 1), et l'angle ΑΓΕ égal à l'angle  
alterne ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΓ est partagé  
en deux parties égales par la droite ΑΔ. Donc, etc.

#### PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont  
proportionnels; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homo-  
logues.

Εστω<sup>2</sup> ἰσογώνια τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ἴσων ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ  $BAΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΓΔΕ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ  $ABΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΓΕ$ <sup>3</sup>. λέγω ὅτι τῶν  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$  τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ<sup>4</sup>.

Sint æquiangula triangula  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , æqualem habentia  $BAΓ$  quidem angulum ipsi  $ΓΔΕ$ , ipsum vero  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , et præterea ipsum  $ABΓ$  ipsi  $ΔΓΕ$ ; dico  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$  triangulorum proportionalia esse latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendere latera.



Κεῖσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ  $BΓ$  τῇ  $ΓΕ$ . Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , αἱ ἄρα ὑπὸ<sup>5</sup>  $ABΓ$ ,  $ΔΕΓ$  δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν· αἱ  $BA$ ,  $ΕΔ$  ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. Ἐκτεβλήσθωσαν, καὶ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ  $Z$ .

Ponatur enim in directum ipsa  $BΓ$  ipsi  $ΓΕ$ . Et quoniam  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  anguli duobus rectis minores sunt, æqualis autem  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , ipsi igitur  $ABΓ$ ,  $ΔΕΓ$  duobus rectis minores sunt; ipsæ  $BA$ ,  $ΕΔ$  igitur productæ convenient. Producantur, et convenient in  $Z$ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΔΓΕ$  γωνία τῇ ὑπὸ<sup>6</sup>  $ABΓ$ , παραλλήλος ἄρα<sup>7</sup> ἐστὶν ἡ  $BZ$  τῇ  $ΓΔ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΓ$ , παράλληλος ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΖΕ$ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ZAGΔ$ . ἴση ἄρα ἡ μὲν  $ZA$

Et quoniam æqualis est  $ΔΓΕ$  angulus ipsi  $ABΓ$ , parallela igitur est  $BZ$  ipsi  $ΓΔ$ . Rursus, quoniam æqualis est  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΕΓ$ , parallela est  $ΑΓ$  ipsi  $ΖΕ$ ; parallelogrammum igitur est  $ZAGΔ$ ; æqualis igitur  $ZA$  quidem ipsi  $ΔΓ$ , ipsa

Soient les triangles équiangles  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , ayant l'angle  $BAΓ$  égal à l'angle  $ΓΔΕ$ , l'angle  $ΑΓΒ$  égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , et l'angle  $ABΓ$  égal à l'angle  $ΔΓΕ$ ; je dis que dans les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔΓΕ$ , les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

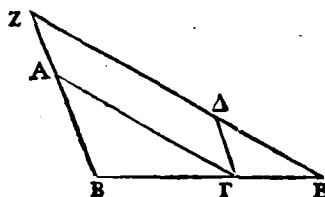
Plaçons la droite  $BΓ$  dans la direction de  $ΓΕ$ . Et puisque les angles  $ABΓ$ ,  $ΑΓΒ$  sont plus petits que deux droits (17. 1), et que l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , les angles  $ABΓ$ ,  $ΔΕΓ$  sont plus petits que deux droits; donc les droites  $BA$ ,  $ΕΔ$ , étant prolongées, se rencontreront (not. com. 11); qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en  $Z$ .

Et puisque l'angle  $ΔΓΕ$  est égal à l'angle  $ABΓ$ , la droite  $BZ$  est parallèle à la droite  $ΓΔ$  (28. 1). De plus, puisque l'angle  $ΑΓΒ$  est égal à l'angle  $ΔΕΓ$ , la droite  $ΑΓ$  est parallèle à  $ΖΕ$ ; donc la figure  $ZAGΔ$  est un parallélo-

### 300 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλιυρῶν<sup>9</sup> τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἰσὴ δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ

vero ΑΓ ipsi ΖΔ. Et quoniam trianguli ΖΒΕ juxta unum laterum ΖΕ ducta est ΑΓ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΓΔ; ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita ΒΓ ad ΓΕ, et alterne ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. Rursus, quoniam parallela est ΓΔ ipsi ΒΖ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. Æqualis autem ΖΔ ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad



πρὸς τὴν ΔΕ. Ἰσὴ δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλάξ ἄρα<sup>9</sup> ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ<sup>10</sup> ἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ<sup>11</sup> διίστου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΕΔ, alterne igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. Et quoniam ostensum est, ut ΑΒ quidem ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ; ut vero ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; et ex æquo igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ. Æquiangulorum igitur, etc.

gramme; donc ΖΑ est égal à ΔΓ, et ΑΓ égal à ΖΔ (34. 1). Et puisqu'un des côtés ΑΓ du triangle ΖΒΕ, est parallèle au côté ΖΕ, ΒΑ est à ΑΖ comme ΒΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΑΖ est égal à ΓΔ; donc ΒΑ est à ΓΔ comme ΒΓ est à ΓΕ (7. 5), et, par permutation (16. 5), ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ (16. 5). De plus, puisque ΓΔ est parallèle à ΒΖ, ΒΓ est à ΓΕ comme ΖΔ est à ΔΕ. Mais ΖΔ est égal à ΑΓ; donc ΒΓ est à ΓΕ comme ΑΓ est à ΕΔ, et, par permutation, ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ. Et puisqu'on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ, et que ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ, ΒΑ sera à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

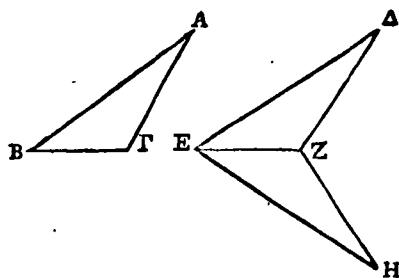
Εὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὑφ' αἷ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτί-  
νουν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$  τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν  $AB$  πρὸς τὴν  $ΒΓ$  οὕτως τὴν  $ΔΕ$  πρὸς τὴν  $ΕΖ$ , ὡς δὲ τὴν  $ΒΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΑ$  οὕτως τὴν  $ΕΖ$  πρὸς τὴν  $ΖΔ$ , καὶ ἔτι ὡς ἡ

PROPOSITIO V.

Si duo triacula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triacula; et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triacula  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$  latera proportionalia habentia, ut  $AB$  quidem ad  $ΒΓ$  ita  $ΔΕ$  ad  $ΕΖ$ , ut  $ΒΓ$  vero ad  $ΓΑ$  ita  $ΕΖ$  ad  $ΖΔ$ ; et adhuc ut  $ΒΑ$  ad  $ΑΓ$  ita  $ΕΔ$  ad  $ΔΖ$ ;



$BA$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  οὕτως τὴν  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΖ$ · λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΕΖ$  τρίγῳ, καὶ ἴσας ἔξουσιν τὰς γωνίας, ὑφ' αἷ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτίνουν, τὴν μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΕΖ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $ΒΓΑ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΖΔ$ , καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$ .

dico æquiangulum esse  $ABΓ$  triangulum ipsi  $ΔΕΖ$  triangulo, et æquales illa habitura esse angulos, quos homologa latera subtendunt, ipsum quidem  $ABΓ$  ipsi  $ΔΕΖ$ , ipsum vero  $ΒΓΑ$  ipsi  $ΕΖΔ$ ; et insuper ipsum  $ΒΑΓ$  ipsi  $ΕΔΖ$ .

PROPOSITION V.

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entr'eux.

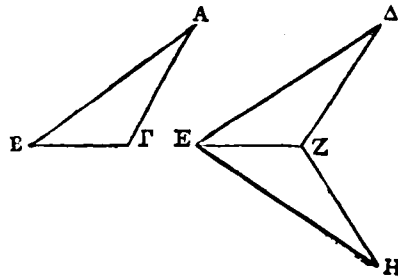
Soient deux triangles  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$ , ayant les côtés proportionnels, que  $AB$  soit à  $ΒΓ$  comme  $ΔΕ$  est à  $ΕΖ$ , que  $ΒΓ$  soit à  $ΓΑ$  comme  $ΕΖ$  est à  $ΖΔ$ , et que  $ΒΑ$  soit à  $ΑΓ$  comme  $ΕΔ$  est à  $ΔΖ$ ; je dis que les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔΕΖ$  sont équiangles, et que les angles soutendus par les côtés homologues seront égaux, l'angle  $ABΓ$  égal à l'angle  $ΔΕΖ$ , l'angle  $ΒΓΑ$  égal à l'angle  $ΕΖΔ$ , et enfin l'angle  $ΒΑΓ$  égal à l'angle  $ΕΔΖ$ .

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ZEH, τῇ δὲ ὑπὸ BΓA ἴση ἡ ὑπὸ EZH· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ H ἴστιν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ EHZ· τῶν ἄρα ABΓ, EHZ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ

Constituatur enim ad EZ rectam, et ad puncta in eâ E, Z, ipsi quidem ABΓ angulo æqualis ZEH, ipsi vero æqualis BΓA ipse EZH; reliquus igitur ad Δ reliquo ad H est æqualis.

Æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi EHZ; ipsorum igitur ABΓ, EHZ triangulorum proportionalia sunt latera, circum æquales an-



ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ. Αλλ' ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΔE, HE πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῇ HE. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔZ τῇ HZ ἴστιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔE τῇ EH, κοινὴ δὲ ἡ EZ, δύο δὲ αἱ ΔE,

gulos, et homologa æquales angulos latera subtendunt; est igitur ut AB ad BΓ ita HE ad EZ. Sed ut AB ad BΓ ita ponitur ΔE ad EZ; et ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ; utraque igitur ipsarum ΔE, HE ad EZ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΔE ipsi HE. Propter eadem utique et ΔZ ipsi HZ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΔE ipsi EH, communis autem EZ; duæ utique ΔE, EZ duabus HE, EZ

Construisons sur EZ et aux points E, z l'angle ZEH égal à l'angle ABΓ et l'angle EZH égal à l'angle BΓA (23. 1); l'angle restant Δ sera égal à l'angle restant H (32. 1).

Les triangles ABΓ, EHZ seront équiangles; donc dans les triangles ABΓ, EHZ, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues (4. 6); donc AB est à BΓ comme HE est à EZ. Mais AB est supposé être à BΓ comme ΔE est à EZ; donc ΔE est à EZ comme HE est à EZ (11. 5); donc chacune des droites ΔE, HE a la même raison avec EZ; donc ΔE est égal à HE (9. 5). La droite ΔZ est égale à HZ, par la même raison. Donc, puisque ΔE est égal à EH, et que la droite EZ est

ΕΖ δυὸ ταῖς HE, EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ  
βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση<sup>5</sup>. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ  
γωνία τῇ ὑπὸ HEZ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔΕΖ τρί-  
γωνον τῷ HEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ  
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' ἂς αἱ  
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  
μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία τῇ ὑπὸ HZE, αἱ δὲ ὑπὸ  
ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ  
τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ HEZ τῇ  
ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση<sup>6</sup>. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία  
τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ  
μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι  
ἡ πρὸς τῷ Α πρὸς τῷ Δ<sup>8</sup>. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ  
τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὰν ἄρα  
δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μὴ γωνία ἴσην  
ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνά-  
λογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας  
ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἂς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ  
ὑποτείνουσιν.

commune, les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites HE, ΕΖ; mais  
la base ΖΔ est égale à la base ΖΗ; donc l'angle ΔΕΖ est égal à l'angle HEZ  
(8. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle HEZ, et les autres angles que  
soutendent des côtés égaux sont égaux; donc l'angle ΔZE est égal à l'angle  
HZE, et l'angle ΕΔΖ égal à l'angle ΕΗΖ. Et puisque ΖΕΔ est égal à l'angle ΖΕΗ,  
et que l'angle HEZ est égal à l'angle ΑΒΓ, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ.  
Par la même raison, l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔZE, et l'angle en Α égal  
à l'angle en Δ; donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des  
angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les  
angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

æquales sunt, et basis ΖΔ basi ΖΗ est æqualis;  
angulus igitur ΔΕΖ angulo HEZ est æqualis. Et  
ΔΕΖ triangulum ipsi HEZ triangulo æquale, et  
reliqui anguli reliquis angulis æquales, quos  
æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est et  
ΔZE quidem angulus ipsi HZE, ipse vero ΕΔΖ  
ipsi ΕΗΖ. Et quoniam ipse quidem ΖΕΔ ipsi  
ΖΕΗ est æqualis, sed HEZ ipsi ΑΒΓ est æqua-  
lis, et ΑΒΓ igitur angulus ipsi ΔΕΖ est æqualis.  
Propter eadem utique ipse quidem ΑΒΓ ipsi  
ΔZE est æqualis, et insuper ipse ad Α ipsi ad Δ;  
æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi  
ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO VI.

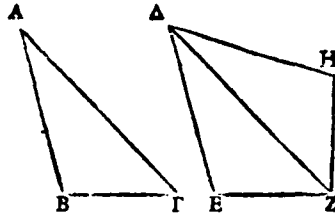
Si duo triangula unum angulum uni angulo  
æqualem habeant, circa æquales autem angu-  
los latera proportionalia; æquiangula erunt  
triangula, et æquales habebunt angulos, quos  
homologa latera subtendunt.



304 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ  $BAΓ$  μιᾶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ΕΔΖ$  ἴσῃ ἔχοντα, περὶ δὲ τὰ ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὥς τὴν  $BA$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  οὕτως τὴν  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΖ$ . λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔEZ$  τριγώνῳ, καὶ ἴσῃ ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ  $ABΓ$  γωνίαν τῇ ὑπὸ  $ΔEZ$ , τὴν δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΖΕ$ .

Sint duo triangula  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , unum angulum  $BAΓ$  uni angulo  $ΕΔΖ$  æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut  $BA$  ad  $ΑΓ$  ita  $ΕΔ$  ad  $ΔΖ$ ; dico æquiangulum esse  $ABΓ$  triangulum ipsi  $ΔEZ$  triangulo, et æqualem habiturum esse  $ABΓ$  quidem angulum ipsi  $ΔEZ$ , ipsum vero  $ΑΓΒ$  ipsi  $ΔΖΕ$ .



Συνιστάται γὰρ πρὸς μὲν τῇ  $ΔΖ$  εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $Δ$ ,  $Z$ , ὅποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ  $BAΓ$ ,  $ΕΔΖ$  ἴση ἢ ὑπὸ  $ZΔΗ$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $ΑΓΒ$  ἴση ἢ ὑπὸ  $ΔΖΗ$ .

Constituatur enim ad  $ΔΖ$  quidem rectam, et ad puncta in ipsâ  $Δ$ ,  $Z$ , alterutri ipsorum quidem  $BAΓ$ ,  $ΕΔΖ$  æqualis angulus  $ZΔΗ$ , ipsi vero  $ΑΓΒ$  æqualis ipse  $ΔΖΗ$ .

Λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ  $B$  γωνία<sup>2</sup> λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ  $H$  ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΔΗΖ$  τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  οὕτως ἢ  $ΗΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΖ$ . Ὑπόκειται δὲ καὶ ὥς ἢ  $BA$  πρὸς τὴν  $ΑΓ$  οὕτως ἢ  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΖ$ · καὶ ὥς ἄρα ἢ  $ΕΔ$  πρὸς τὴν

Reliquus igitur ad  $B$  angulus reliquo ad  $H$  æqualis est; æquiangulum igitur est  $ABΓ$  triangulum ipsi  $ΔΗΖ$  triangulo; proportionaliter igitur est ut  $BA$  ad  $ΑΓ$  ita  $ΗΔ$  ad  $ΔΖ$ . Ponitur autem et ut  $BA$  ad  $ΑΓ$  ita  $ΕΔ$  ad  $ΔΖ$ ; et ut igitur  $ΕΔ$  ad  $ΔΖ$  ita  $ΗΔ$  ad  $ΔΖ$ ;

Soient les deux triangles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$ , ayant l'angle  $BAΓ$  égal à l'angle  $ΕΔΖ$ , et les côtés autour des angles égaux proportionnels, de manière que  $BA$  soit à  $ΑΓ$  comme  $ΕΔ$  est à  $ΔΖ$ ; je dis que les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔEZ$  sont équiangles, et que l'angle  $ABΓ$  est égal à l'angle  $ΔEZ$ , et l'angle  $ΑΓΒ$  égal à l'angle  $ΔΖΕ$ .

Sur la droite  $ΔΖ$ , et aux points  $Δ$ ,  $Z$  de cette droite, construisons l'angle  $ZΔΗ$  égal à l'un ou à l'autre des angles  $BAΓ$ ,  $ΕΔΖ$ , et l'angle  $ΔΖΗ$  égal à l'angle  $ΑΓΒ$  (23. 1).

L'angle restant en  $B$  sera égal à l'angle restant en  $H$  (32. 1); donc les triangles  $ABΓ$ ,  $ΔΗΖ$  sont équiangles; donc  $BA$  est à  $ΑΓ$  comme  $ΗΔ$  est à  $ΔΖ$  (4. 6). Mais on suppose que  $BA$  est à  $ΑΓ$  comme  $ΕΔ$  est à  $ΔΖ$ ; donc  $ΕΔ$  est à  $ΔΖ$  comme  $ΗΔ$

ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση<sup>3</sup>. βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἴστί· καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται<sup>4</sup>, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ<sup>5</sup>. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εἰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἰζήσ.

æqualis igitur ΕΔ ipsi ΔΗ, et communis ΔΖ; duæ igitur ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ æquales sunt, et angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ æqualis; basis igitur ΕΖ basi ΖΗ est æqualis, et ΔΕΖ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΔΖΗ quidem ipsi ΔΖΕ, ipse vero ΔΗΖ ipsi ΔΕΖ. Sed ipse ΔΖΗ ipsi ΑΓΒ est æqualis, et ΑΓΒ igitur ipsi ΔΖΕ est æqualis. Ponitur autem et ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ æqualis; et reliquus igitur ad Β reliquo ad Ε æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triacula, etc.

est à ΔΖ (11. 5); donc ΕΔ est égal à ΔΗ (9. 5); mais ΔΖ est commun; donc les deux droites ΕΔ, ΔΖ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΖ; mais l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΗΔΖ; donc la base ΕΖ est égale à la base ΖΗ (4. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΔΗΖ, et les autres angles seront égaux aux autres angles, savoir, ceux qui sont soutendus par des côtés égaux; donc l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΔΗΖ égal à l'angle ΔΕΖ. Mais l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΑΓΒ; donc l'angle ΑΓΒ est égal à ΔΖΕ. Mais l'angle ΒΑΓ est supposé égal à l'angle ΕΔΖ; donc l'angle restant en Β est égal à l'angle restant en Ε (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

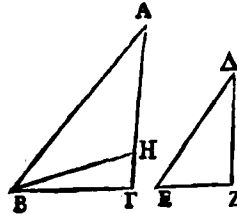
## PROPOSITIO VII.

Εὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μίᾳ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἢ τοὶ ἰλάσσονα, ἢ μὴ ἰλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἴσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ αἷς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , μίαν γωνίαν μίᾳ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ  $BAG$  τῇ

Si duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triacula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Sint duo triacula  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum  $BAG$



ὑπὸ  $E\Delta Z$ , περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν  $AB$  πρὸς τὴν  $B\Gamma$  οὕτως τὴν  $\Delta E$  πρὸς τὴν  $EZ$ , τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς  $\Gamma$ ,  $Z$  πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἰλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἴσται τὸ  $AB\Gamma$

ipsi  $E\Delta Z$ , circa alios autem angulos  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , latera proportionalia, ut  $AB$  ad  $B\Gamma$  ita  $\Delta E$  ad  $EZ$ , reliquorum vero ad  $\Gamma$ ,  $Z$  primum utrumque simul minorem recto; dico æquiangulum esse  $AB\Gamma$  triaculum ipsi  $\Delta EZ$

## PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Soient les deux triangles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , ayant un angle égal à un angle, savoir, l'angle  $BAG$  égal à l'angle  $E\Delta Z$ , et les côtés autour des autres angles  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$  proportionnels entr'eux, de manière que  $AB$  soit à  $B\Gamma$  comme  $\Delta E$  est à  $EZ$ , et que chacun des autres angles en  $\Gamma$ ,  $Z$  soit d'abord plus petit qu'un angle droit;

τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τρίγωνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔστιν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἵπαι ἴση ἔστιν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία<sup>3</sup> τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἔστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τρίγωνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ ὑπόκειται οὕτως<sup>4</sup> ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ<sup>5</sup>, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ<sup>6</sup>· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἔστιν ἴση<sup>7</sup>. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἔστιν ὀρθῆς<sup>9</sup> ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἔστιν ὀρθῆς. Καὶ εἰδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα

triangulo, et æqualem fore ΑΒΓ angulum ipsi ΔΕΖ, et reliquum videlicet ad Γ reliquo ad Ζ æqualem.

Si enim inæqualis est ΑΒΓ'angulus ipsi ΔΕΖ, unus ipsorum major est. Sit major ΑΒΓ; et constituatur ad ΑΒ rectam et ad punctum in eâ Β, ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΑΒΗ.

Et quoniam æqualis est Α quidem angulus ipsi Δ, ipse vero ΑΒΗ angulus ipsi ΔΕΖ, reliquus igitur ΑΗΒ reliquo ΔΖΕ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; est igitur ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΖ. Ut autem ΔΕ ad ΕΖ ponitur ita ΑΒ ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΗ, ipsa igitur ΑΒ ad utramque ipsarum ΒΓ, ΒΗ eamdem habet rationem; æqualis igitur est ΒΓ ipsi ΒΗ; quare et angulus ad Γ angulo ΒΗΓ est æqualis. Minor autem recto ponitur ipse ad Γ; minor igitur est recto ipse ΒΗΓ, quare ipse ei deinceps angulus ΑΗΒ major est recto. Et ostensus est æqualis esse ipsi ad Ζ, et ipse ad Ζ igitur major est recto. Ponitur autem

je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle restant en Γ égal à l'angle restant en Ζ.

Car si l'angle ΑΒΓ n'est pas égal à l'angle ΔΕΖ, l'un des deux sera plus grand. Que l'angle ΑΒΓ soit le plus grand; et construisons sur la droite ΑΒ et au point Β de cette droite, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1).

Et puisque l'angle Α est égal à l'angle Δ, et l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ l'angle restant ΑΗΒ est égal à l'angle restant ΔΖΕ (32. 1); donc les triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ sont équiangles; donc ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΖ (4. 6). Mais ΔΕ est supposé être à ΕΖ comme ΑΒ est à ΒΓ (11. 5); donc ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΗ; donc la droite ΑΒ a la même raison avec chacune des droites ΒΓ, ΒΗ; donc ΒΓ est égal à ΒΗ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle ΒΗΓ (5. 1). Mais l'angle en Γ est supposé plus petit qu'un droit; donc l'angle ΒΗΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle de suite ΑΗΒ est plus grand qu'un droit (13. 1). Mais on a démontré qu'il est égal à l'angle Ζ; donc l'angle Ζ est plus grand qu'un

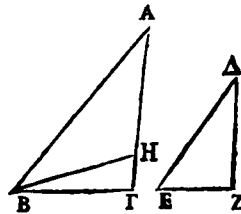
# 308 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μείζων ἔστιν ὀρθῆς. ὑπὲρ αὐτῶν οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Z μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λίγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ<sup>10</sup> τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

minor recto, quod absurdum; non igitur inæqualis est ABΓ angulus ipsi ΔEZ, æqualis igitur. Est autem et ipse ad A æqualis ei ad Δ, et reliquus igitur ad Γ reliquo ad Z æqualis est; æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.

Sed et rursus ponatur uterque ipsorum ad Γ, Z non minor recto; dico rursus et sic æquiangulum esse ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BH· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ BHΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ἑρῶς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ BHΓ. Τριγώνου δὲ<sup>11</sup> τοῦ BHΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττωτες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. Ἐστὶ

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus æqualem esse BΓ ipsi BH; quare et angulus ad Γ ipsi BHΓ æqualis est. Non minor autem recto ad Γ; non minor igitur recto neque ipse BHΓ. Trianguli igitur BHΓ duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod est impossibile; non igitur rursus inæqualis est ABΓ angulus ipsi ΔEZ; æqualis igitur.

droit. Mais on a supposé qu'il était plus petit qu'un droit, ce qui est absurde; donc les angles ABΓ, ΔEZ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Z; donc les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles.

Mais que chacun des angles Γ, Z ne soit pas plus petit qu'un droit; je dis encore que les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que BΓ est égal à BH; donc l'angle en Γ est égal à l'angle BHΓ. Mais l'angle Γ n'est pas plus petit qu'un droit; donc l'angle BHR n'est pas plus petit qu'un droit. Donc deux angles du triangle BHR ne sont pas plus petits que deux droits, ce qui est impossible (17. 1), donc les angles ABΓ, ΔEZ ne sont pas encore

δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ  
ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν·  
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ τρι-  
γώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Est autem et ipse ad A ipsi ad Δ æqualis, re-  
liquus igitur ad Γ reliquo ad Ζ æqualis est;  
æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi  
ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triacula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

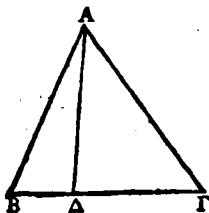
Ἐὰν ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γω-  
νίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ  
καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλή-  
λοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον  
τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab recto angulo ad  
basim perpendicularis ducatur; ipsa ad per-  
pendicularem triacula similia sunt et toti et  
inter se.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum  
habens ΒΑΓ angulum, et ducatur ab Α ad ΒΓ



τὴν ΒΓ κάθετος ἢ ΑΔ· λέγω ὅτι ὁμοιόν ἐστιν ἐκά-  
τερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ  
ἐπὶ ἀλλήλοις.

perpendicularis ΑΔ; dico simile esse utrum-  
que ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΓ triangulorum toti ΑΒΓ  
et insuper, inter se.

inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en Α est égal à l'angle en Δ; donc  
l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Ζ (32. 1); donc les triangles  
ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

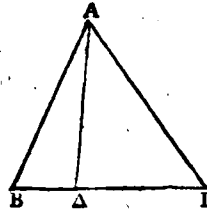
PROPOSITION VIII.

Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit  
sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au  
triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; du point Α menons sur la  
base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables  
au triangle entier ΑΒΓ et semblables entr'eux.

Επει γάρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γάρ ἐκάτερα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ

Quoniam enim æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΑΔΒ, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis et ΑΒΓ et ΑΒΔ ipse ad Β; reliquus igitur ΑΓΒ reliquo ΒΑΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo. Est igitur ut ΒΓ subtendens rectum ipsius ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum rectum ipsius ΑΒΔ trianguli, ita eadem ΑΒ subtendens ipsum ad Γ angulum ipsius



ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ<sup>2</sup>, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τριγώνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιον τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοίον ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

ΑΒΓ trianguli ad ΒΔ subtendentem angulum æqualem ipsi ad Γ, ipsum ΒΑΔ ipsius ΑΒΔ trianguli; et etiam ΑΓ ad ΑΔ subtendentem ipsum ad Β angulum, communem duobus triangulis; ipsum ΑΒΓ igitur triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo et æquiangulum est, et ipsa circa æquales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ trian-

Car puisque l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΑΔΒ, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en Β est commun aux deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ, l'angle restant ΑΓΒ est égal à l'angle restant ΒΑΔ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles. Donc le côté ΒΓ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΔ, comme le côté ΑΒ qui soutend l'angle en Γ du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΔ qui soutend un angle égal à l'angle Γ, c'est-à-dire l'angle ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ, et comme le côté ΑΓ est au côté ΑΔ qui soutend l'angle Β, commun aux deux triangles; donc les triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6); donc le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle ΑΔΓ est

καὶ τῷ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνῳ ὅμοιον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον<sup>4</sup>. ἑκάτερον ἄρα τῶν  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνων ὁμοίον ἐστὶν ὅλῳ τῷ  $AB\Gamma$  τριγώνῳ<sup>5</sup>.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  τρίγωνα.

Ἐπεὶ γάρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ  $B\Delta A$  ὀρθὴ τῇ ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$  ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$  τῇ πρὸς τῷ  $\Gamma$  εἰδίχθῃ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ  $B$  λοιπῇ τῇ ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ  $B\Delta$  τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ  $B\Delta\Delta$ , πρὸς τὴν  $\Delta A$  τοῦ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ  $\Gamma$  γωνίαν<sup>6</sup>, ἴσην τῇ ὑπὸ  $B\Delta\Delta$ , οὕτως αὐτὴ ἡ  $\Delta\Delta$  τοῦ  $AB\Delta$  τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ  $B$  γωνίαν, πρὸς τὴν  $\Delta\Gamma$  ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$  τοῦ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ  $B$ · καὶ ἔτι ἡ  $BA$  ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $\Delta\Delta B$ , πρὸς τὴν  $A\Gamma$  ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ  $\Delta\Delta\Gamma$ · ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $AB\Delta$  τρίγωνον τῷ  $\Delta\Delta\Gamma$  τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulo. Similiter utique ostendemus et ipsi  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulo simile esse  $AB\Gamma$  triangulum; utrumque igitur ipsorum  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulorum simile est toti  $AB\Gamma$  triangulo.

Dico etiam et inter se esse similia  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  triangula.

Quoniam enim rectus  $B\Delta A$  recto  $\Delta\Delta\Gamma$  est æqualis, sed quidem et ipse  $B\Delta A$  ipsi ad  $\Gamma$  ostensus est æqualis, et reliquus igitur ad  $B$  reliquo  $\Delta\Delta\Gamma$  est æqualis; æquiangulum igitur est  $AB\Delta$  triangulum ipsi  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulo. Est igitur ut  $B\Delta$  ipsius  $AB\Delta$  trianguli, subtendens ipsum  $B\Delta\Delta$ , ad  $\Delta A$  ipsius  $\Delta\Delta\Gamma$  trianguli, subtendentem ipsum ad  $\Gamma$  angulum, æqualem ipsi  $B\Delta\Delta$ , ita eadem  $\Delta\Delta$  ipsius  $AB\Delta$  trianguli, subtendens ipsum ad  $B$  angulum, ad  $\Delta\Gamma$  subtendentem  $\Delta\Delta\Gamma$  angulum ipsius  $\Delta\Delta\Gamma$  trianguli, æqualem ipsi ad  $B$ , et etiam  $BA$  subtendens rectum  $\Delta\Delta B$ , ad  $A\Gamma$  subtendentem rectum  $\Delta\Delta\Gamma$ ; simile igitur est  $AB\Delta$  triangulum ipsi  $\Delta\Delta\Gamma$  triangulo. Si igitur in rectangulo, etc.

semblable au triangle  $AB\Gamma$ ; donc chacun des triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  est semblable au triangle entier  $AB\Gamma$ .

Je dis aussi que les triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit  $B\Delta A$  est égal à l'angle droit  $\Delta\Delta\Gamma$ , et qu'on a démontré que l'angle  $B\Delta\Delta$  est égal à l'angle en  $\Gamma$ , l'angle restant en  $B$  est égal à l'angle restant  $\Delta\Delta\Gamma$  (32. 1); donc les deux triangles  $AB\Delta$ ,  $\Delta\Delta\Gamma$  sont équiangles. Donc le côté  $B\Delta$  du triangle  $AB\Delta$ , qui soutend l'angle  $B\Delta\Delta$ , est au côté  $\Delta A$  du triangle  $\Delta\Delta\Gamma$ , qui soutend l'angle  $\Gamma$ , égal à l'angle  $B\Delta\Delta$ , comme le côté  $\Delta\Delta$  du triangle  $AB\Delta$ , qui soutend l'angle en  $B$ , est au côté  $\Delta\Gamma$ , qui soutend l'angle  $\Delta\Delta\Gamma$  du triangle  $\Delta\Delta\Gamma$ , égal à l'angle en  $B$ ; et comme le côté  $BA$ , qui soutend l'angle droit  $\Delta\Delta B$ , est au côté  $A\Gamma$  qui soutend l'angle droit  $\Delta\Delta\Gamma$  (4. 6); donc le triangle  $AB\Delta$  est semblable au triangle  $\Delta\Delta\Gamma$  (déf. 1. 6). Donc, etc.



## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν<sup>8</sup>· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῇ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφαιεῖν.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ · δεῖ δὴ τῆς  $AB$  τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφαιεῖν.

Επιτιτάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τὴς εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ  $A$  ἡ  $AG$ , γωνίαν περιέχουσα μίτα τῆς  $AB$  τυχοῦσαν· καὶ εἰληφθῶ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς  $AG$  τὸ  $\Delta$ , καὶ κείσθωσαν τῇ

## COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in rectangulo triangulo a recto angulo ad basim perpendicularis ducta fuerit, ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basim et unum utriuslibet segmentorum, ipsum ad segmentum latus, medium proportionale esse.

## PROPOSITIO IX.

Ab datâ rectâ imperatam partem auferre.

Sit data recta  $AB$ ; oportet igitur ab ipsâ  $AB$  imperatam partem auferre.

Imperetur et tertia; et ducatur quædam recta  $AG$  ab  $A$ , quemlibet angulum contineus cum ipsâ  $AB$ ; et sumatur quodlibet punctum  $\Delta$  in  $AG$ , et ponantur ipsi  $AD$  æquales  $DE$ ,  $EG$ ;

## COROLLAIRE.

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment contigu.

## PROPOSITION IX.

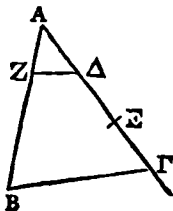
D'une droite donnée retrancher la partie demandée.

Soit  $AB$  la droite donnée; il faut de la droite  $AB$  retrancher la partie demandée.

Soit demandé le tiers; du point  $A$  menons une droite quelconque  $AG$  qui fasse un angle quelconque avec la droite  $AB$ ; prenons dans  $AG$  un point quel-

## LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 313

ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic du-  
διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ᾗχθω ἡ ΔΖ. catur ΔΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ᾗκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῇ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῇ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπι-  
ταχθὲν τρίτον μέρος αἰρήσεται τὸ ΑΖ. Οπερ ἔδει  
ποιῆσαι.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ juxta unum la-  
terum ΒΓ ducta est ipsa ΖΔ; proportionaliter  
igitur est ut ΓΔ ad ΔΑ ita ΒΖ ad ΖΑ. Dupla  
autem ΓΔ ipsius ΔΑ; dupla igitur et ΒΖ ipsius  
ΖΑ; tripla igitur ΒΑ ipsius ΑΖ.

Ab ipsa igitur datâ rectâ ΑΒ imperata tertia  
pars ablata est ipsa ΑΖ. Quod oportebat fa-  
cere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

### PROPOSITIO X.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἡμιστον τῇ δοθείσῃ  
τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Datam rectam insectam datæ sectæ similiter  
secare.

conque Δ, et faisons les droites ΔΕ, ΕΓ égales à ΑΔ (3. 1); joignons ΒΓ, et  
par le point Δ menons ΔΖ parallèle à ΓΒ (31. 1).

Puisqu'on a mené ΔΖ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite  
ΓΔ est à ΔΑ comme ΒΖ est à ΖΑ (2. 6). Mais ΓΔ est double de ΔΑ; donc  
ΒΖ est double de ΖΑ; donc ΒΑ est triple de ΑΖ.

On a donc retranché de la droite donnée ΑΒ la troisième partie demandée  
ΑΖ. Ce qu'il fallait faire.

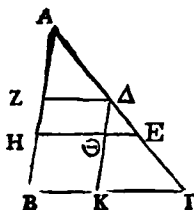
### PROPOSITION X.

Partager une droite donnée, qui n'est point partagée de la même manière  
qu'une droite donnée est partagée.

### 314 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμῆτος ἡ  $AB$ , ἡ δὲ τετμημένη ἡ  $ΑΓ$ , κατὰ τὰ  $\Delta$ ,  $E$  σημεία, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τερεοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $ΓB$ , καὶ διὰ τῶν  $\Delta$ ,  $E$  τῇ  $ΒΓ$  παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ  $\Delta Z$ ,  $EH$ , διὰ δὲ τοῦ  $\Delta$  τῇ  $AB$  παράλληλος ἤχθω ἡ  $\Delta\Theta K$ .

Sit data quidem recta insecta  $AB$ , ipsa vero secta  $ΑΓ$  in  $\Delta$ ,  $E$  punctis, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et jungatur  $ΓB$ , et per  $\Delta$ ,  $E$  ipsi  $ΒΓ$  parallelæ ducantur  $\Delta Z$ ,  $EH$ , per  $\Delta$  autem ipsi  $AB$  parallela ducatur  $\Delta\Theta K$ .



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν  $Z\Theta$ ,  $\Theta B$ . Ἰση ἄρα ἡ μὲν  $\Delta\Theta$  τῇ  $ZH$ , ἡ δὲ  $\Theta K$  τῇ  $HB$ . Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $\Delta KΓ$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $KΓ$  εὐθεῖα ἤκται ἡ  $\Theta E$  ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $ΕΔ$  οὕτως ἡ  $K\Theta$  πρὸς τὴν  $\Theta\Delta$ . Ἰσὶ δὲ ἡ μὲν  $K\Theta$  τῇ  $BH$ , ἡ δὲ  $\Theta\Delta$  τῇ  $HZ$ · ἴστιν ἄρα ὡς ἡ  $ΓE$  πρὸς τὴν  $ΕΔ$  οὕτως ἡ  $BH$  πρὸς τὴν  $HZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ  $AHE$  παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν  $ΕΗ$  ἤκται ἡ  $\Delta Z$  ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $ΕΔ$  πρὸς τὴν  $\Delta A$  οὕτως ἡ  $HZ$  πρὸς τὴν  $ZA$ . Εδείχθη δὲ καὶ

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum  $Z\Theta$ ,  $\Theta B$ ; æqualis igitur ipsa quidem  $\Delta\Theta$  ipsi  $ZH$ , ipsa vero  $\Theta K$  ipsi  $HB$ . Et quoniam trianguli  $\Delta KΓ$  juxta unum laterum  $KΓ$  recta ducta est  $\Theta E$ ; proportionaliter igitur est ut  $ΓE$  ad  $ΕΔ$  ita  $K\Theta$  ad  $\Theta\Delta$ . Æqualis autem ipsa quidem  $K\Theta$  ipsi  $BH$ , ipsa vero  $\Theta\Delta$  ipsi  $HZ$ ; est igitur ut  $ΓE$  ad  $ΕΔ$  ita  $BH$  ad  $HZ$ . Rursus, quoniam trianguli  $AHE$  juxta unum laterum  $ΕΗ$  ducta est  $\Delta Z$ ; proportionaliter igitur est ut  $ΕΔ$  ad  $\Delta A$  ita  $HZ$  ad  $ZA$ . De-

Soit  $AB$  la droite donnée qui n'est point partagée, et  $ΑΓ$  une droite partagée aux points  $\Delta$ ,  $E$ ; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque. joignons  $ΒΓ$ , et par les points  $\Delta$ ,  $E$ , menons les droites  $\Delta Z$ ,  $EH$  parallèles à  $ΒΓ$  (31. 1), et par le point  $\Delta$  menons  $\Delta\Theta K$  parallèle à  $AB$ .

Les figures  $Z\Theta$ ,  $\Theta B$  seront des parallélogrammes; donc  $\Delta\Theta$  est égal à  $ZH$ , et  $\Theta K$  égal à  $HB$  (34. 1). Et puisqu'on a mené la droite  $\Theta E$  parallèle à un des côtés  $KΓ$  du triangle  $\Delta KΓ$ , la droite  $ΓE$  est à  $ΕΔ$  comme  $K\Theta$  est à  $\Theta\Delta$  (2. 6). Mais  $K\Theta$  est égal à  $BH$ , et  $\Theta\Delta$  est égal à  $HZ$ ; donc  $ΓE$  est à  $ΕΔ$  comme  $BH$  est à  $HZ$ . De plus, puisqu'on a mené la droite  $\Delta Z$  parallèle à un des côtés  $ΕΗ$  du triangle  $AHE$ , la droite  $ΕΔ$  est à  $\Delta A$  comme

# LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ·  
ἴσθιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ  
πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ  
ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἀκριβὲς ἡ ΑΒ τῇ δο-  
θείσῃ εὐθείᾳ, τετμημένη τῇ ΔΓ ὁμοίως τέτμηται.  
Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

monstratum autem est et ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΒΗ  
ad ΗΖ; est igitur ut ΓΕ quidem ad ΕΔ ita  
ΒΗ ad ΗΖ, ut vero ΕΔ ad ΔΑ ita ΗΖ ad ΖΑ.

Data igitur recta insecta ΑΒ datæ rectæ  
sectæ ΔΓ similiter secta est. Quod oportebat  
facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 11.

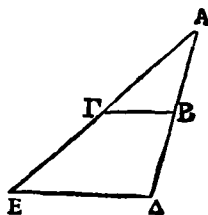
## PROPOSITIO XI.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προ-  
σσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθω-

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem  
invenire.

Sint datæ ΑΒ, ΑΓ, et ponantur ita ut an-



σαν γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν· δεῖ δὲ τῶν  
ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν<sup>2</sup>.

gulum quemlibet contineant; oportet igitur  
ipsis ΑΒ, ΑΓ tertiam proportionalem invenire.

ΗΖ est à ΖΑ. Mais on a démontré que ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ; donc  
ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ, et ΕΔ est à ΔΑ comme ΗΖ est à ΖΑ.

Donc la droite donnée ΑΒ, qui n'est pas partagée, a été partagée de la même  
manière que la droite donnée ΑΓ. Ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION XI.

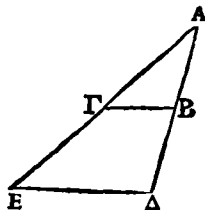
Deux droites étant données, trouver une troisième proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΑΓ les deux droites données; posons-les de manière qu'elles  
comprènent un angle quelconque; il faut trouver une troisième propor-  
tionnelle aux droites ΑΒ, ΑΓ.

### 316 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτελέσωσαν γὰρ αἱ AB, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεία, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπιεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ<sup>3</sup> ἦχθω ἡ ΔΕ.

Producantur enim AB, ΑΓ ad Δ, Ε puncta, et ponatur ipsi ΑΓ æqualis ΒΔ, et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic ducatur ΔΕ.



Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Quoniam igitur trianguli ΑΔΕ, juxta unum latus ΔΕ ducta est BG, proportionaliter est ut AB ad ΒΔ ita ΑΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΒΔ ipsi ΑΓ, est igitur ut AB ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσιύρεται ἡ ΓΕ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Duabus igitur datis rectis AB, ΑΓ, tertia proportionalis inventa est ΓΕ. Quod oportebat facere.

Prolongeons les droites AB, ΑΓ vers les points Δ, Ε : faisons ΒΔ égal à ΑΓ ; joignons ΒΓ, et par le point Δ menons ΔΕ parallèle à ΒΓ (31. 1).

Puisque la droite ΒΓ est parallèle à un des côtés ΔΕ du triangle ΑΔΕ, la droite AB est à ΒΔ comme ΑΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΒΔ est égal à ΑΓ ; donc AB est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΕ.

Donc les deux droites AB, ΑΓ étant données, on a trouvé une troisième proportionnelle ΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

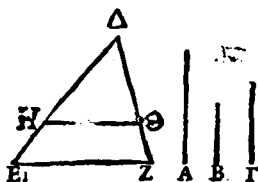
PROPOSITIO XII.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσυρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· διὰ δὲ τῶν Α, Β, Γ<sup>1</sup> τετάρτην ἀνάλογον προσυρεῖν.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae Α, Β, Γ; oportet igitur ipsis Α, Β, Γ quartam proportionalem invenire.



Εκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν<sup>2</sup> τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἦχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν<sup>3</sup> τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΕΖ.

Exponantur duæ rectæ ΔΕ, ΔΖ, angulum continentes quemlibet ΕΔΖ; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΗ, ipsi vero Β æqualis ΗΕ, et insuper ipsi Γ æqualis ΔΘ; et junctâ ΗΘ, parallela illi ducatur per Ε ipsa ΕΖ.

Et quoniam trianguli ΔΕΖ juxta unum laterum ΕΖ ducta est ΗΘ, est igitur ut ΔΗ ad ΗΕ ita ΔΘ ad ΕΖ. Æqualis autem ΔΗ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΕ ipsi Β, ipsa autem ΔΘ ipsi Γ; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad ΕΖ.

PROPOSITION XII.

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient Α, Β, Γ les trois droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites Α, Β, Γ.

Soient les deux droites ΔΕ, ΔΖ, comprenant un angle quelconque ΕΔΖ; faisons la droite ΔΗ égale à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint ΗΘ, par le point Ε menons ΕΖ parallèle à ΗΘ.

Puisque la droite ΗΘ est parallèle à un des côtés ΕΖ du triangle ΔΕΖ, la droite ΔΗ est à ΗΕ comme ΔΘ est à ΕΖ (2. 6). Mais ΔΗ est égal à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc Α est à Β comme Γ est à ΕΖ.



### 318 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΘΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Tribus igitur datis rectis Α, Β, Γ, quarta proportionalis inventa est ΘΖ. Quod oportebat facere.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

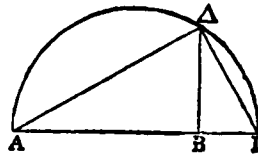
#### PROPOSITIO XIII.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Εστώσαν αἱ δοθείσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δι' δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Sint datæ duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; oportet igitur ipsis ΑΒ, ΒΓ mediam proportionalem invenire.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἦχου ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ponantur in directum, et describatur super ipsâ ΑΓ semicirculus ΑΔΓ, et ducatur a Β puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΒΔ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὴν

Et quoniam in semicirculo angulus est ΑΔΓ, rectus est. Et quoniam in rectangulo triangulo ΑΔΓ a recto angulo ad basim per-

Donc trois droites Α, Β, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘΖ. Ce qu'il fallait faire.

#### PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΒΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre ΑΒ, ΒΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite ΑΓ décrivons le demi-cercle ΑΔΓ; du point Β menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΔ, ΔΓ (II. 1).

Puisque l'angle ΑΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle ΑΔΓ on a mené de l'angle droit la droite

## LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

βάσει κάθετος ἔκται  $\triangle AB$  ἡ  $\triangle B$  ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  μέση ἀνάλογον ἔστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$ , μέση ἀνάλογον προσεύρεται ἡ  $BA$ . Ὅπερ ἴδι πειῆσαι.

perpendicularis ducta est  $\triangle B$ ; ipsa  $\triangle B$  igitur inter basis segmenta  $AB$ ,  $B\Gamma$  media proportionalis est.

Duabus igitur datis rectis  $AB$ ,  $B\Gamma$ , media proportionalis inventa est  $BA$ . Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

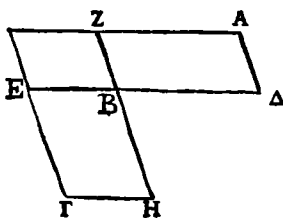
Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων<sup>1</sup> παραλληλογράμμων ἀντιπρόσθεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας<sup>2</sup> καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων<sup>3</sup>, ἀντιπρόσθεναι αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια<sup>3</sup> παραλληλόγραμ-

### PROPOSITIO XIV.

Æqualiumque et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

Sint æqualiaque et æquiangula parallelo-



μα τὰ  $AB$ ,  $B\Gamma$ , ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῇ  $B$  γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐκ' εὐθείας αἱ  $AB$ ,  $BE$ ,

gramma  $AB$ ,  $B\Gamma$ , æquales habentia ipsos ad  $B$  angulos, et ponantur in directum  $AB$ ,  $BE$ ,

$\triangle B$  perpendiculaire à la base, la droite  $\triangle B$  est moyenne proportionnelle entre les segments  $AB$ ,  $B\Gamma$  de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites  $AB$ ,  $B\Gamma$  étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle  $BA$ . Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XIV.

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient  $AB$ ,  $B\Gamma$  deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles



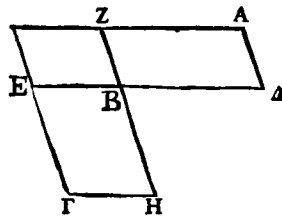
### 320 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμ-  
μον.

in directum igitur sunt et ΖΒ, ΒΗ; dico ip-  
sorum ΑΒ, ΒΓ reciproca esse latera circa æqua-  
les angulos, hoc est esse ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΗΒ  
ad ΒΖ.

Complectatur enim ΖΕ parallelogrammum.



Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον  
τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ·  
ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ  
πρὸς τὸ ΖΕ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ  
οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ  
ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ  
πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΑΒ,  
ΒΓ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ  
πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπόνθίτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ  
περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς

Et quoniam æquale est ΑΒ parallelogram-  
mum ipsi ΒΓ parallelogrammo, aliud autem  
quoddam ΖΕ; est igitur ut ΑΒ ad ΖΕ ita ΒΓ  
ad ΖΕ. Sed ut ΑΒ quidem ad ΖΕ ita ΑΒ ad  
ΒΕ, ut vero ΒΓ ad ΖΕ ita ΗΒ ad ΒΖ; et ut  
igitur ΑΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ. Ipsorum ΑΒ,  
ΒΓ igitur parallelogrammorum reciproca sunt  
latera, circa æquales angulos.

Sed et reciproca sint latera circa æquales  
angulos, et sit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ; dico

égaux en B, plaçons BE dans la direction de AB, la droite BH sera dans la  
direction de ZB (14. 1); je dis que les côtés des parallélogrammes AB, BG  
autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que  
AB est à BE comme HB est à BZ.

Achevons le parallélogramme ZE.

Puisque le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BG, et que ZE  
est un autre parallélogramme, AB est à ZE comme BG est à ZE (7. 5). Mais  
AB est à ZE comme AB est à BE (1. 6); et BG est à ZE comme HB est à BZ;  
donc AB est à BE comme HB est à BZ (11. 5); donc les côtés des parallélo-  
grammes AB, BG autour des angles égaux sont réciproquement propor-  
tionnels.

Mais que les côtés adjacents aux angles égaux soient réciproquement pro-

τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BG παραλληλόγραμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HB πρὸς τὴν BZ οὕτως τὸ BG παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον<sup>δ</sup>· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ BG πρὸς τὸ ZE· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BG παραλληλόγραμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquale esse AB parallelogrammum ipsi BG parallelogrammo.

Quoniam enim est ut AB ad BE ita HB ad BZ, sed ut AB quidem ad BE ita AB parallelogrammum ad ZE parallelogrammum, ut HB vero ad BZ ita BG parallelogrammum ad ZE parallelogrammum; et ut igitur AB ad ZE ita BG ad ZE; æquale igitur est AB parallelogrammum ipsi BG parallelogrammo. Ergo æqualium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO XV.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων<sup>ι</sup>, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

Æqualium et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum, unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

portionnels, c'est-à-dire que AB soit à BE comme HB est à BZ; je dis que le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BG.

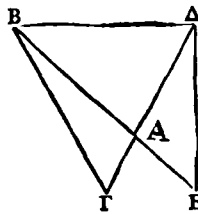
Puisque AB est à BE comme HB est à BZ, que AB est à BE comme le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE (1. 6), et que HB est à BZ comme le parallélogramme BG est au parallélogramme ZE, AB est à ZE comme BG est à ZE (11. 5); donc le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BG (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.

Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , μίαν μὲν ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ΒΑΓ$  τῇ ὑπὸ  $ΔΑΕ$ . λέγω ὅτι τῶν  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$  τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτο ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΒ$ .

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $ΓΑ$  τῇ  $ΑΔ$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $ΕΑ$  τῇ  $ΑΒ$ . Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $ΒΔ$ .



Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ  $ABΓ$  τρίγωνον τῷ  $ΑΔΕ$  τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ  $ΑΒΔ$ · ἔστιν ἄρα ὡς τὸ  $ΓΑΒ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  τρίγωνον οὕτως τὸ  $ΑΔΕ$  τρίγωνον πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  τρίγωνον<sup>3</sup>. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ  $ΓΑΒ$  πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$ , ὡς δὲ τὸ  $ΕΑΔ$ <sup>4</sup> πρὸς τὸ  $ΒΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΒ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $ΓΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΔ$  οὕτως ἡ  $ΕΑ$  πρὸς τὴν  $ΑΒ$ · τῶν  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$  ἄρα τριγώνων<sup>5</sup> ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Sint æqualia triangula  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , unum uni æqualem habentia angulum  $ΒΑΓ$  ipsi  $ΔΑΕ$ ; dico  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$  triangulorum reciproca esse latera, circa æquales angulos, hoc est esse ut  $ΓΑ$  ad  $ΑΔ$  ita  $ΕΑ$  ad  $ΑΒ$ .

Ponantur enim ita ut in directum sit  $ΓΑ$  ipsi  $ΑΔ$ ; in directum igitur est et  $ΕΑ$  ipsi  $ΑΒ$ . Et jungatur  $ΒΔ$ .

Et quoniam æquale est  $ABΓ$  triangulum ipsi  $ΑΔΕ$  triangulo, aliud autem  $ΑΒΔ$ ; est igitur ut  $ΓΑΒ$  triangulum ad  $ΒΑΔ$  triangulum ita  $ΑΔΕ$  triangulum ad  $ΒΑΔ$  triangulum. Sed ut  $ΓΑΒ$  quidem ad  $ΒΑΔ$  ita  $ΓΑ$  ad  $ΑΔ$ , ut  $ΕΑΔ$  vero ad  $ΒΑΔ$  ita  $ΕΑ$  ad  $ΑΒ$ ; et ut igitur  $ΓΑ$  ad  $ΑΔ$  ita  $ΕΑ$  ad  $ΑΒ$ ; ipsorum  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$  igitur triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos.

Soient les triangles égaux  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , ayant un angle égal à un angle, l'angle  $ΒΑΓ$  égal à l'angle  $ΔΑΕ$ ; je dis que les côtés des triangles  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que  $ΓΑ$  est à  $ΑΔ$  comme  $ΕΑ$  est à  $ΑΒ$ .

Plaçons ces triangles de manière que  $ΓΑ$  soit dans la direction de  $ΑΔ$ ; la droite  $ΕΑ$  sera dans la direction de  $ΑΒ$  (14. 1). Joignons  $ΒΔ$ .

Puisque le triangle  $ABΓ$  est égal au triangle  $ΑΔΕ$ , et que  $ΑΒΔ$  est un autre triangle, le triangle  $ΓΑΒ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  comme le triangle  $ΑΔΕ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  (7. 5). Mais le triangle  $ΓΑΒ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  comme  $ΓΑ$  est à  $ΑΔ$  (1. 6), et le triangle  $ΕΑΔ$  est au triangle  $ΒΑΔ$  comme  $ΕΑ$  est à  $ΑΒ$ ; donc  $ΓΑ$  est à  $ΑΔ$  comme  $ΕΑ$  est à  $ΑΒ$  (11. 5); donc les côtés des triangles  $ABΓ$ ,  $ΑΔΕ$ , qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Αλλὰ δὴ ἀντιπαραβέβαιον αἱ πλευραὶ τῶν  
ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν  
ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ  
τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Επιζευχθεὶς γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεὶ ἐστὶν  
ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ,  
ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ  
τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς  
τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ  
τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ  
οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον  
ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει  
λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ  
τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Sed utique reciproca sint latera ipsorum  
ΑΒΓ, ΑΔΕ triangulorum, et sit ut ΓΑ ad ΑΔ ita  
ΕΑ ad ΑΒ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum  
ipsi ΑΔΕ triangulo.

Juncta enim rursus ΒΔ, quoniam est ut ΓΑ  
ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ, sed ut ΓΑ quidem ad ΑΔ  
ita ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ triangulum, ut ΕΑ  
vero ad ΑΒ ita ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ trian-  
gulum; ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ ita  
ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ; utrumque igitur ip-  
sorum ΑΒΓ, ΑΔΕ ad ΒΑΔ eandem habet ra-  
tionem; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi  
ΕΑΔ triangulo. Æqualium igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ ὑπὸ  
τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ  
ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ· καὶ

PROPOSITIO XVI.

Si, quatuor rectæ proportionales sint, sub  
extremis contentum rectangulum æquale est  
ipsi sub mediis contento rectangulo; et si sub

Mais que les côtés des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ soient réciproquement propor-  
tionnels, c'est-à-dire que ΓΑ soit à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ; je dis que le triangle  
ΑΒΓ est égal au triangle ΑΔΕ.

Joignons encore ΒΔ. Puisque ΓΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ, que ΓΑ est  
à ΑΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ (1. 6), et que ΕΑ est à ΑΒ  
comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ, le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ  
comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ (11. 5); donc chacun des triangles  
ΑΒΓ, ΑΔΕ a la même raison avec le triangle ΒΑΔ; donc le triangle ΑΒΓ est égal  
au triangle ΕΑΔ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les  
deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes; et si le

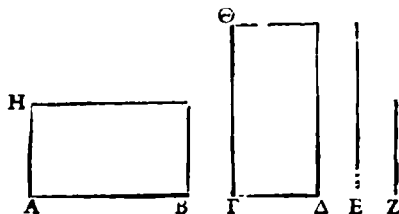
# 324 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ὑπὲρ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται.

Ἐστωσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, E, Z, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub extremis contento rectangulo, quatuor rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; dico sub AB, Z contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.



Ἡχθωσαν γὰρ<sup>3</sup> ἀπὸ τῆς A, Γ σημείων ταῖς AB, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH, τῇ δὲ E ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπληρώσθωσαν τὰ BH, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Z τῇ AH· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· τῶν BH, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων<sup>4</sup> ἀντιτεπόνθασιν αἱ πλευραὶ,

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis AB, ΓΔ rectis ad rectas ipsæ AH, ΓΘ, et ponatur ipsi quidem Z æqualis AH, ipsi vero E æqualis ΓΘ, et compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem E quidem ipsi ΓΘ, ipsa vero Z ipsi AH; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH; ipsorum BH, ΔΘ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales an-

rectangle compris sous les extrêmes et égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

Soient AB, ΓΔ, E, Z quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; je dis que le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Des points A, Γ, et sur les droites AB, ΓΔ, menons les perpendiculaires AH, ΓΘ (11. 1); faisons AH égal à Z, et ΓΘ égal à E; et achevons les parallélogrammes BH, ΔΘ.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que E est égal à ΓΘ, et Z égal à AH, AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à AH (7. 5); donc les côtés des parallélogrammes BH, ΔΘ, placés autour des angles égaux, sont réciproquement propor-

αἱ<sup>5</sup> περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡς δὲ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπνένθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z, ἴση γὰρ ἡ AH τῇ Z· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E<sup>6</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν<sup>7</sup> ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z τὸ BH, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AH τῇ Z<sup>8</sup>. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E· τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ<sup>9</sup>. καὶ ἐστὶν<sup>10</sup> ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπνένθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα

gulos. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est BH parallelogrammum ipsi ΔΘ parallelogrammo. Et est BH quidem sub AB, Z, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero ΔΘ ipsum sub ΓΔ, E, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur sub AB, Z contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.

Sed utique ipsum sub AB, Z contentum rectangulum æquale sit ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub AB, Z æquale est ipsi sub ΓΔ, E, et est ipsum quidem sub AB, Z ipsum BH, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero sub ΓΔ, E ipsum ΔΘ, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur BH æquale est ipsi ΔΘ; et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa

tionnels. Mais lorsque les côtés des parallélogrammes équiangles, placés autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, ces parallélogrammes sont égaux (14. 6); donc le parallélogramme BH est égal au parallélogramme ΔΘ. Mais le parallélogramme BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z; et le parallélogramme ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Mais que le rectangle compris sous AB, Z soit égal au rectangle compris sous les droites ΓΔ, E; je dis que ces quatre droites sont proportionnelles, c'est-à-dire que AB est à ΓΔ comme E est à Z.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous AB, Z est égal au rectangle sous ΓΔ, E, que le rectangle BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z, et que le rectangle ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc BH est égal à ΔΘ; et ils sont équiangles. Mais les côtés des parallélogrammes égaux et équiangles, placés autour des angles sont égaux, sont réciproquement propor-

# 326 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἴστιν ἄρα ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ. Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquales angulos; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad ΑΗ. Æqualis autem ΓΘ quidem ipsi Ε, ipsa vero ΑΗ ipsi Ζ; est igitur ut AB ad ΓΔ ita Ε ad Ζ. Si igitur quatuor, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἴστιν ἄρα ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Εὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

## PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale est ipsi ex mediâ quadrato; et si sub extremis contentum rectangulum æquale sit ipsi ex mediâ quadrato, tres rectæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico sub Α, Γ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex Β quadrato.

Ponatur ipsi Β æqualis Δ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Β ad Γ, æqualis autem Β ipsi Δ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Si autem quatuor rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale

tionnels (14. 6); donc AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à ΑΗ; mais ΓΘ est égal à Ε, et ΑΗ à Ζ; donc AB est à ΓΔ comme Ε est à Ζ. Donc, etc.

## PROPOSITION XVII.

Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne, ces trois droites seront proportionnelles.

Soient Α, Β, Γ trois droites proportionnelles, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le rectangle compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

Faisons Δ égal à Β.

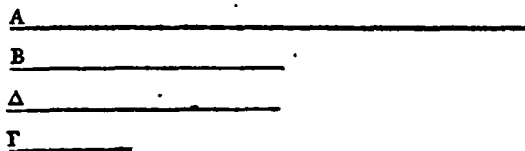
Puisque Α est à Β comme Β est à Γ, et que Β égal à Δ, Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous

περιχομένον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιχομένῳ ὀρθογώνιῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστίν<sup>4</sup>, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιχομένον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἴστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

est ipsi sub mediis contento rectangulo; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Sed ipsum sub Β, Δ ipsum ex Β est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ contentum rectangulum æquale est ipsi ex Β quadrato.

Sed et ipsum sub Α, Γ æquale sit ipsi ex Β; dico esse ut Α ad Β ita Β ad Γ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστίν<sup>5</sup>, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. Εἰ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾗ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἰση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. Εἰ ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub Α, Γ æquale est ipsi ex Β, sed ipsum ex Β ipsum sub Β, Δ est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Si autem ipsum sub extremis æquale est ipsi sub mediis, quatuor rectæ proportionales sunt; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Æqualis autem Β ipsi Δ; ut igitur Α ad Β ita Β ad Γ. Si igitur tres, etc.

les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Β, Δ. Mais le rectangle sous Β, Δ est égal au carré de Β, car Β est égal à Δ; donc le rectangle compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

Mais que le rectangle sous Α, Γ soit égal au carré de Β; je dis que Α est à Β comme Β est à Γ.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous Α, Γ est égal au carré de Β, et que le carré de Β est le rectangle sous Β, Δ, car Β est égal à Δ, le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous les droites Β, Δ. Mais si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes, les quatre droites sont proportionnelles (16. 6); donc Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais Β est égal à Δ; donc Α est à Β comme Β est à Γ. Donc, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

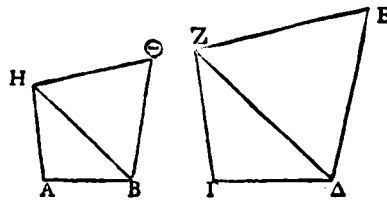
PROPOSITIO XVIII.

Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῇ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ  $AB$ , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ  $ΓΕ$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς  $AB$  εὐθείας τῇ  $ΓΕ$  εὐθύγραμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφαι.

Ex datâ rectâ ipsi dato rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Sit data quidem recta  $AB$ , datum autem rectilineum  $ΓΕ$ ; oportet igitur ex  $AB$  rectâ ipsi  $ΓΕ$  rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.



Ἐπιζεύχθω ἡ  $ΔΖ$ , καὶ συνστάτω πρὸς τῇ  $AB$  εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς  $A$ ,  $B$  τῇ μὲν πρὸς τῇ  $Γ$  γωνία ἴση ἡ ὑπὸ  $HAB$ , τῇ δὲ ὑπὸ  $ΓΔΖ$  ἴση ἡ ὑπὸ  $ABH$ · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  $ΓΖΔ$  λοιπὴ<sup>3</sup> τῇ ὑπὸ  $AHB$  ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΖΓΔ$  τρίγωνον τῇ  $HAB$  τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $ΖΔ$  πρὸς τὴν  $HB$  οὕτως ἡ

Jungatur  $ΔΖ$ , et constituatur ad  $AB$  rectam et ad puncta in eâ  $A$ ,  $B$  ipsi quidem ad  $Γ$  angulo æqualis ipsi sub  $HAB$ , ipsi vero sub  $ΓΔΖ$  æqualis ipse sub  $ABH$ ; reliquus igitur sub  $ΓΖΔ$  reliquo sub  $AHB$  est æqualis; æquiangulum igitur est  $ΖΓΔ$  triangulum ipsi  $HAB$  triangulo; proportionaliter igitur est ut  $ΖΔ$  ad  $HB$  ita

PROPOSITION XVIII.

Sur une droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Soit  $AB$  la droite donnée, et  $ΓΕ$  la figure rectiligne donnée; il faut sur la droite  $AB$  décrire une figure rectiligne semblable à la figure rectiligne  $ΓΕ$ , et semblablement placée.

Joignons  $ΔΖ$ , et sur la droite  $AB$  et aux points  $A$ ,  $B$  de cette droite, faisons l'angle  $HAB$  égal à l'angle en  $Γ$ , et l'angle  $ABH$  égal à l'angle  $ΓΔΖ$  (23. 1); l'angle restant  $ΓΖΔ$  sera égal à l'angle restant  $AHB$  (32. 1); donc les triangles  $ΖΓΔ$ ,  $HAB$  sont équiangles; donc  $ΖΔ$  est à  $HB$  comme  $ΖΓ$  est à  $HA$ , et comme

ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνιστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴσιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ τε ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἵπτι ἴση ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἔστιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἔστιν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν<sup>5</sup> πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοιον ἄρα ἔστι τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ. Rursus, constituatur ad ΒΗ rectam et ad puncta in eâ Β, Η ipsi quidem ΔΖΕ angulo æqualis ΒΗΘ, ipsi vero ΖΔΕ æqualis ΗΒΘ; reliquus igitur ad Ε reliquo ad Θ est æqualis; æquiangulum igitur est ΖΔΕ triangulum ipsi ΗΒΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΔΖ ad ΗΒ ita ΖΕ ad ΗΘ, et ΕΔ ad ΘΒ. Ostensum est autem et ut ΖΔ ad ΗΒ et ita ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ; et ut igitur ΖΓ ad ΑΗ ita et ΓΔ ad ΑΒ et ΖΕ ad ΗΘ, et adhuc ΕΔ ad ΘΒ. Et quoniam æqualis est ipse quidem ΓΖΑ angulus ipsi ΑΗΒ, ipse vero ΔΖΕ ipsi ΒΗΘ; totus igitur ΓΖΕ toti ΑΗΘ est æqualis. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΒΘ est æqualis, est autem et ipse quidem ad Γ ipsi ad Α æqualis, ipse vero ad Ε ipsi ad Θ; æquiangulum igitur est ΑΘ ipsi ΓΕ, et circa æquales angulos cum ipso latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΘ rectilineum ipsi ΓΕ rectilinco.

ΓΔ est à ΑΒ (4. 6). De plus, construisons sur la droite ΒΗ, et aux points Β, Η de cette droite, l'angle ΒΗΘ égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΗΒΘ égal à l'angle ΖΔΕ; l'angle restant en Ε sera égal à l'angle restant en Θ; donc les triangles ΖΔΕ, ΗΒΘ sont équiangles; donc ΔΖ est à ΗΒ comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (4. 6). Mais on a démontré que ΖΔ est à ΗΒ comme ΖΓ est à ΗΑ, et comme ΓΔ est à ΑΒ; donc ΖΓ est à ΑΗ comme ΓΔ est à ΑΒ, comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (11. 5). Mais l'angle ΓΖΔ est égal à l'angle ΑΗΒ, et l'angle ΔΖΕ égal à l'angle ΒΗΘ; donc l'angle entier ΓΖΕ est égal à l'angle entier ΑΗΘ. Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΘ, l'angle en Γ égal à l'angle en Α, et l'angle en Ε égal à l'angle en Θ; donc les figures ΑΘ, ΓΕ sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels entr'eux; donc les deux figures ΑΘ, ΓΕ sont semblables (déf. 1. 6).

# 330 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Απὸ τῆς δεθείσης ἔρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφεται τὸ ΑΘ. Ὅπερ ἴδι ποιῆσαι.

A datâ igitur rectâ AB dato rectilineo ΓΕ simileque et similiter positum rectilineum descriptum est ΑΘ. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 19.

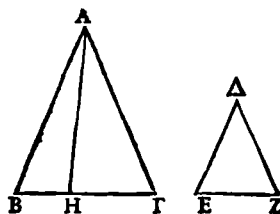
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσῃ ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε,

## PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum.

Sicut similia triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualem habentia ipsum ad Β angulum ipsi ad Ε, ut



ὥς δὲ τὴν AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

autem AB ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, ita ut homologum sit ΒΓ ipsi ΕΖ; dico ΑΒΓ triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habere ejus quam ΒΓ ad ΕΖ.

Donc, sur la droite donnée AB, on a décrit la figure rectiligne ΑΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΓΕ, et semblablement placée. Ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

Soient les triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle en Β égal à l'angle en Ε, et que AB soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, de manière que le côté ΒΓ soit l'homologue du côté ΕΖ; je dis que le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ.

Είλιφθω γάρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἢ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων<sup>2</sup> ἀντιπρόπινθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ, μίαν μὲν ἴσιν ἔχόντων γωνίαν τριγώνων<sup>3</sup>, ἀντιπρόπινθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνων· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλάσιον λόγον ἔχειν λέγεται ἢ ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλάσιον λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ

Sumatur enim ipsis ΒΓ, ΕΖ tertia proportionalis ΒΗ, ita ut sit ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; et jungatur ΗΑ.

Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; alterne igitur est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. Sed ut ΒΓ ad ΕΖ ita est ΕΖ ad ΒΗ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΕ ita ΕΖ ad ΒΗ; ipsorum igitur ΑΒΗ, ΔΕΖ triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos. Quorum autem unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; si autem tres rectæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; ΒΓ igitur ad ΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΑΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Æquale autem ΑΒΗ

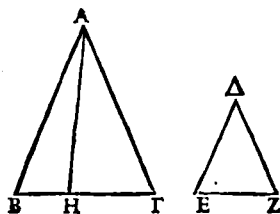
Prenons une troisième proportionnelle ΒΗ aux droites ΒΓ, ΕΖ, de manière que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; et joignons ΗΑ (11. 6).

Puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, par permutation, ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ (16. 6). Mais ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; donc ΑΒ est à ΔΕ comme ΕΖ est à ΒΗ (11. 5); donc les côtés des triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ, autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux, réciproquement proportionnels (15. 6); donc le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ. Et puisque ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ, et que lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle que la première a avec la seconde (10. 5), la droite ΒΓ a avec la droite ΒΗ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais ΒΓ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ (déf. 1. 6); donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΑΒΗ une raison double

### 332 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ABH διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἰσὸν δὲ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ<sup>6</sup>. καὶ τὸ ABΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἰζῆς.

triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; et ABΓ igitur triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ergo similia, etc.



#### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθείαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἴστιν ὅς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον<sup>8</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον ἐπιείπερ ἰδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον, τουτίστι τὸ ΔΕΖ<sup>9</sup>.

#### COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si tres rectæ proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ triangulum ad ipsum ex secundâ simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut ΓΒ ad ΒΗ ita ABΓ triangulum ad ABH triangulum, hoc est ΔΕΖ.

de'celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais le triangle ABH est égal au triangle ΔΕΖ; donc le triangle ABΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ (7. 5). Donc, etc.

#### COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le triangle décrit sur la première est au triangle semblable décrit semblablement sur la seconde; puisqu'il a été démontré que ΓΒ est à ΒΗ comme le triangle ABΓ est au triangle ABH, c'est-à-dire ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.

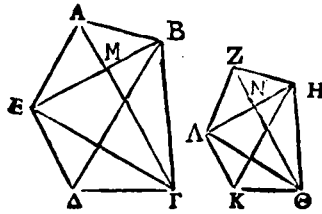
PROPOSITIO XX.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαι-  
ρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς  
ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον δι-  
πλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν  
πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν.

Ἐστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ,  
ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λήθω ὅτι τὰ

Similia polygona in similia triacula divi-  
duntur, et in æqualia multitudine et homo-  
loga totis; et polygonum ad polygonum duplam  
rationem habet ejus quam homologum latus ad  
homologum latus.

Sint similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ho-  
mologum vero sit ΑΒ ipsi ΖΗ; dico ΑΒΓΔΕ,



ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρί-  
γωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμό-  
λογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς  
τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει  
ἢ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπιζύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

ΖΗΘΚΛ polygona et in similia triacula dividi  
et in æqualia multitudine et homologa totis;  
et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum  
duplam rationem habere ejus quam ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

PROPOSITION XX.

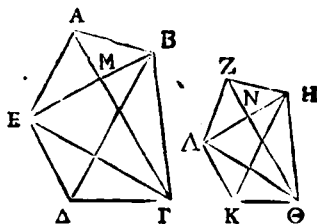
Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables,  
égaux en nombre, et homologues aux polygones; et le polygone a avec le  
polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté  
homologue.

Soient les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que ΑΒ soit l'homologue de  
ΖΗ; je dis que les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ peuvent être divisés en triangles  
semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones, et que le po-  
lygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que ΑΒ  
a avec ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολυγώνων  
τῷ ΖΗΘΚΑ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ  
γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ  
οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά  
ἐστὶ τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην  
ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς  
ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον  
τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοίον· ἴση ἄρα ἐστὶν  
ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη

Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum  
ipsi ΖΗΘΚΑ polygono, æqualis est ΒΑΕ an-  
gulus ipsi ΗΖΛ; et est ut ΒΑ ad ΑΕ ita  
ΖΗ ad ΖΛ. Et quoniam duo triacula sunt  
ΑΒΕ, ΖΗΛ unum angulum uni angulo æqua-  
lem habentia, circa æquales autem angulos  
latera proportionalia; æquiangulum igitur est  
ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, quare et  
simile; æqualis igitur est ΑΒΕ angulus ipsi



ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἔλη τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν  
ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ  
ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ  
ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώ-  
νων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς  
ΖΗ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πο-  
λυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ  
πρὸς ΗΘ· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ  
οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γω-

ΖΗΛ. Est autem et totus ΑΒΓ toti ΖΗΘ æqua-  
lis, propter similitudinem polygonorum; re-  
liquus igitur ΕΒΓ angulus reliquo ΛΗΘ est  
æqualis. Et quoniam propter similitudinem  
ipsorum ΑΒΕ, ΖΗΛ triangulorum, est ut ΕΒ  
ad ΒΑ ita ΛΗ ad ΖΗ, sed utique et propter si-  
militudinem polygonorum, est ut ΑΒ ad ΒΓ, ita  
ΖΗ ad ΗΘ; ex æquo igitur est ut ΕΒ ad ΒΓ ita  
ΛΗ ad ΗΘ, et circa æquales angulos ΕΒΓ,

Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΑ, l'angle  
ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ; et ΒΑ est à ΑΕ comme ΖΗ est à ΖΛ. Mais  
les deux triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ ont un angle égal à un angle, et les côtés autour  
des angles égaux proportionnels; donc les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont équiangles  
(6. 6), et par conséquent semblables (4. 6); donc l'angle ΑΒΕ est égal à  
l'angle ΖΗΛ. Mais l'angle entier ΑΒΓ est égal à l'angle entier ΖΗΘ, à cause de  
la similitude des polygones; donc l'angle restant ΕΒΓ est égal à l'angle res-  
tant ΛΗΘ. Mais à cause de la similitude des triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ, ΕΒ est à ΒΑ  
comme ΛΗ est à ΖΗ, et à cause de la similitude des polygones, ΑΒ est à ΒΓ  
comme ΖΗ est à ΗΘ; donc, par égalité, ΕΒ est à ΒΓ comme ΛΗ est à ΗΘ (22. 5);

νίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΑΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν  
εἰσιν<sup>3</sup>. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ  
ΑΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρι-  
γώνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ<sup>4</sup>. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ  
ΕΓΔ τρίγωνον ὁμοιον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ· τὰ  
ἄρα ὁμοία πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ εἰς τε  
ὁμοία τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν,  
ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα  
μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἐπίμεινα δὲ αὐτῶν  
τὰ ΖΗΑ, ΑΗΘ, ΑΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πο-  
λύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον διπλασίονα  
λόγον ἔχει ἢ πρὸς ὁμόλογον πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμό-  
λογον πλευρὰν, τουτέστιν ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Επιζύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων  
ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ  
ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ·  
ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τρι-  
γώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία<sup>5</sup> τῇ  
ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ  
ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ,

ΑΗΘ latera proportionalia sunt; æquiangulum  
igitur est ΕΒΓ triangulum ipsi ΑΗΘ triangulo,  
quare et simile adhuc ΕΒΓ triangulum ipsi  
ΑΗΘ triangulo. Propter eadem utique et ΕΓΔ  
triangulum simile est ipsi ΑΘΚ triangulo; ergo  
similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ et in similia  
triangula dividuntur et in æqualia multitudine.

Dico et homologa totis, hoc est, ut pro-  
portionalia sint triangula, et antecedentia qui-  
dem siut ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, consequentia vero  
eorum ipsa ΖΗΑ, ΑΗΘ, ΑΘΚ, et ΑΒΓΔΕ po-  
lygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum duplam ratio-  
nem habere ejus quam homologum latus ad  
homologum latus, hoc est, ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur enim ΑΓ, ΖΘ.

Et quoniam propter similitudinem polygo-  
norum æqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΖΗΘ, et  
est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; æquiangulum  
est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΗΘ triangulo; æqualis  
igitur est quidem ΒΑΓ angulus ipsi ΗΖΘ, ipse  
vero ΒΓΑ ipsi ΗΘΖ. Et quoniam æqualis est ΒΑΜ  
angulus ipsi ΗΖΝ, ostensum autem est et ΑΒΜ

donc les côtés autour des angles égaux ΕΒΓ, ΑΗΘ sont proportionnels; donc  
les triangles ΕΒΓ, ΑΗΘ sont équiangles (6. 6); donc le triangle ΕΒΓ est sem-  
blable au triangle ΑΗΘ. Le triangle ΕΓΔ est semblable au triangle ΑΘΚ, par la  
même raison (4. 6); donc les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ sont divisés  
en triangles semblables et égaux en nombre.

Je dis de plus que ces triangles sont homologues aux polygones, c'est-à-  
dire que ces triangles sont proportionnels, que les antécédents sont ΑΒΕ, ΕΒΓ,  
ΕΓΔ, et que leurs conséquents sont ΖΗΑ, ΑΗΘ, ΑΘΚ; et que de plus le po-  
lygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΑ une raison double de celle qu'un  
côté a avec un côté, c'est-à-dire de celle que ΑΒ a avec ΖΗ.

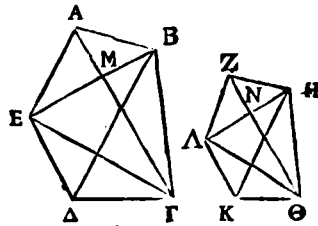
Joignons ΑΓ, ΖΘ.

Puisqu'à cause de la similitude des polygones, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle  
ΖΗΘ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ, les triangles ΑΒΓ, ΖΗΘ sont  
équiangles (6. 6); donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΗΖΘ, et l'angle ΒΓΑ égal  
à l'angle ΗΘΖ. Et puisque l'angle ΒΑΜ est égal à l'angle ΗΖΝ, et qu'il a été



ἰδείχθη<sup>6</sup> δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABM τῇ ὑπὸ ZHN ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ZNH ἴση ἐστίν<sup>7</sup>. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABM τρίγωνον τῷ ZHN τριγώνῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ BMΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ HNΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ AM πρὸς MB οὕτως ἡ ZN πρὸς NH, ὡς δὲ ἡ BM πρὸς MΓ οὕτως ἡ HN πρὸς NΘ. ὥστε καὶ διίστου, ὡς ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως ἡ ZN πρὸς NΘ. ΑΛΛ'

ipsi ZHN æqualis; et reliquus igitur AMB reliquo ZNH æqualis est; æquiangulum igitur est ABM triangulum ipsi ZHN triangulo. Similiter utique ostendemus et BMΓ triangulum æquiangulum esse ipsi HNΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut AM quidem ad MB ita ZN ad NH, ut vero BM ad MΓ ita HN ad NΘ; quare, et ex æquo ut AM ad MΓ ita ZN ad NΘ. Sed ut AM ad MΓ ita ABM triangulum ad



ὡς μὲν<sup>8</sup> ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως τὸ ABM τρίγωνον πρὸς MBΓ, καὶ τὸ AME πρὸς EMΓ, πρὸς ἀλλήλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα<sup>9</sup> ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ὑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ὑπομένα· ὡς ἄρα τὸ AMB τρίγωνον πρὸς τὸ BMΓ οὕτως τὸ ABE πρὸς τὸ ΓBE. ΑΛΛ' ὡς τὸ AMB πρὸς τὸ BMΓ οὕτως ἡ AM πρὸς MΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ

MBΓ, et AME ad EMΓ, inter se enim sunt ut bases; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur AMB triangulum ad BMΓ ita ABE ad ΓBE. Sed ut AMB ad BMΓ ita AM ad MΓ; et ut igitur AM ad MΓ ita ABE triangulum ad EBΓ triangulum. Propter eadem utique et ut ZN ad NΘ ita ZHA triangulum ad HAΘ triangulum. Et est

démontré que l'angle ABM est égal à l'angle ZHN, l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ZNH (32. 1); donc les deux triangles ABM, ZHN sont équiangles. Nous démontrerons semblablement que les deux triangles BMΓ, HNΘ sont équiangles; donc AM est à MB comme ZN est à NH, et BM est à MΓ comme HN est à NΘ (4. 6); donc, par égalité, AM est à MΓ comme ZN est à NΘ (22. 5). Mais AM est à MΓ comme le triangle ABM est au triangle MBΓ, et comme le triangle AME est au triangle EMΓ, car ils sont entr'eux comme leurs bases (1. 6), et un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle AMB est au triangle BMΓ comme le triangle ABE est au triangle ΓBE. Mais AMB est à BMΓ comme AM est à MΓ; donc AM est à MΓ comme le triangle ABE est au triangle EBΓ (11. 5).

ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ<sup>10</sup> ΗΛΘ τρίγωνον. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΑ τρίγωνον, καὶ ἑαλλάξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον<sup>11</sup>. Ομοίως δὲ διζόμεν, ἐπιχειρησῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον<sup>12</sup> πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον<sup>13</sup> οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ὑγούμενων πρὸς ἐν τῶν ὑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ὑγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ὑπόμεινα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον<sup>14</sup> διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔσσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς

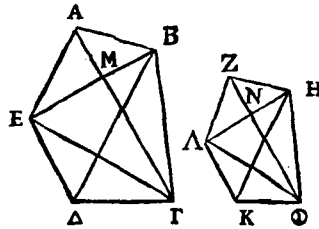
ut AM ad MG ita ZN ad NΘ; et ut igitur ABE triangulum ad BEΓ triangulum ita ZHA triangulum ad HΘA triangulum, et alterne ut ABE triangulum ad ZHA triangulum ita BEΓ triangulum ad HΛΘ triangulum. Similiter utique ostendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, et ut BEΓ triangulum ad ΗΛΘ triangulum ita ΕΓΔ triangulum ad ΛΘΚ triangulum. Et quoniam est ut ΛΗΘ triangulum ad ΖΗΑ ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ, et insuper ΕΓΔ ad ΛΘΚ; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut ABE triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum. Sed ABE triangulum ad ΖΗΑ triangulum duplam rationem habet ejus quam AB homologum latus, ad ΖΗ homologum latus; Similia enim triaṅgula in duplā ratione sunt homologorum laterum; et ΑΒΓΔΕ igitur polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum duplam ra-

Par la même raison, ΖΝ est à ΝΘ comme le triangle ΖΗΑ est au triangle ΗΛΘ. Mais ΑΜ est à ΜΓ comme ΖΝ est à ΝΘ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΒΕΓ comme le triangle ΖΗΑ est au triangle ΗΘΑ (11. 5), et par permutation, le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΛΘ (16. 5). Nous démontrerons semblablement, après avoir joint ΒΔ, ΗΚ, que le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΛΘ comme le triangle ΕΓΔ est au triangle ΛΘΚ. Et puisque le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΛΗΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ, un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΑ. Mais le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que le côté homologue ΑΒ a avec le côté homologue ΖΗ; car les triangles semblables sont en raison double des côtés homologues; donc le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le

# 338 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει  
ἢ περ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμό-  
λογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἰζῆς.

tionem habet ejus quam AB homologum la-  
tus ad ZH homologum latus. Ergo simi-  
lia, etc.



## ΠΟΡΙΣΜΑ α.

## COROLLARIUM. I.

Ὡσαύτως δὲ<sup>15</sup> καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύ-  
ρων διχθῆσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ  
τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν  
τριγώνων· ὥστε καὶ<sup>16</sup> καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύ-  
γραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι  
λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει  
δείξαι<sup>17</sup>.

Similiter utique et in similibus quadrilateris  
ostendetur, ea in duplâ ratione esse homo-  
logorum laterum. Ostensum autem est et in  
triangulis; quare et universe similes rectilineæ  
figuræ inter se in duplâ ratione sunt homolo-  
gorum laterum. Quod oportebat ostendere.

polygone ΖΗΘΚΑ une raison double de celle que le côté homologue AB a avec  
le côté homologue ZH. Donc, etc.

## COROLLAIRE I.

On démontrera de la même manière que les quadrilatères sont en raison  
double des côtés homologues; mais cela a été démontré pour les triangles  
semblables (cor. 19. 6); donc généralement les figures rectilignes semblables  
sont entr'elles en raison double des côtés homologues. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

COROLLARIUM II.

Καὶ ἰὰν τῶν  $AB, ZH$  τρίτην ἀνάλογον λάβω-  
 μιν τὴν  $\Xi$ , ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Xi$  διπλασίονα λόγον  
 ἔχει ἢ περ ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ZH$ . Ἐχει δὲ καὶ τὸ  
 πολὺγωνον πρὸς τὸ πολὺγωνον, καὶ<sup>18</sup> τὸ τετρά-  
 πλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον  
 ἢ περ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευ-  
 ράν<sup>19</sup>, τοὔτ' ἐστιν ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $ZH$ . ἐδείχθη δὲ  
 τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθό-  
 λου φανερὸν, ὅτι ἰὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον  
 ᾖσιν, ἴσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως  
 τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευ-  
 τέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Et si ipsis  $AB, ZH$  tertiam proportionalem  $\Xi$   
 sumamus,  $AB$  ad  $\Xi$  duplam rationem habet ejus  
 quam  $AB$  ad  $ZH$ . Habet autem et polygonum  
 ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilate-  
 rum duplam rationem ejus quam homologum  
 latus ad homologum latus, hoc est  $AB$  ad  
 $ZH$ ; ostensum est autem hoc et in triangulis;  
 quare et universe manifestum est, si tres  
 rectæ proportionales sint, ut prima ad tertiam  
 ita futuram esse ipsam a primâ figuram ad ip-  
 sam a secundâ, similem et similiter descriptam.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Δείξομεν δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα  
 τὰ τρίγωνα.

Ostendemus utique et aliter expeditius ho-  
 mologa triangula.

COROLLAIRE II.

Si nous prenons une troisième proportionnelle  $\Xi$  aux droites  $AB, ZH$ , la  
 droite  $AB$  aura avec  $\Xi$  une raison double de celle que  $AB$  a avec  $ZH$  (déf. 10. 5).  
 Mais le polygone a avec le polygone, et le quadrilatère avec le quadrilatère  
 une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue,  
 c'est-à-dire, de celle que  $AB$  a avec  $ZH$ ; et cela a été démontré pour les  
 triangles; il est donc généralement évident que si trois droites sont propor-  
 tionnelles, la première est à la troisième comme la figure décrite sur la  
 première est à la figure semblable et décrite semblablement sur la seconde.

AUTREMENT.

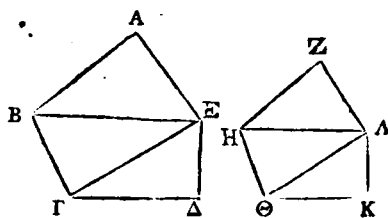
Nous démontrerons autrement et plus brièvement que les triangles sont  
 homologues.

Εκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ πολύγωνα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΑΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς

Exponentur enim rursus ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ polygona, et jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΑΘ; dico esse ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ et ΓΔΕ ad ΘΚΑ.

Quoniam enim simile est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, ΑΒΕ igitur triangulum ad ΖΗΛ duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΛ. Propter eadem utique et ΕΒΓ triangulum ad ΛΗΘ



τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον<sup>20</sup> οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΛ; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΛ triangulum ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ. Rursus, quoniam simile est ΕΒΓ triangulum ipsi ΛΗΘ triangulo; ΕΒΓ igitur ad ΛΗΘ duplam rationem habet ejus quam ΓΕ recta ad ΘΛ. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum ad ΛΘΚ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΓΕ ad ΘΛ; est igitur ut ΕΒΓ triangulum ad ΛΗΘ ita ΕΓΔ ad

Soient les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, et joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΑΘ; je dis que le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme ΕΒΓ est à ΛΗΘ, et comme ΓΔΕ est à ΘΚΑ.

Puisque les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont semblables, le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΛ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΛ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΗΛΘ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΛ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΛ comme le triangle ΕΒΓ est au triangle ΛΗΘ (11. 5). De plus, puisque le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΛΗΘ, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΛΗΘ une raison double de celle que la droite ΓΕ a avec ΘΛ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΓΔ a avec le triangle ΛΘΚ une raison double de celle que ΓΕ a avec ΘΛ; donc le

# LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 341

πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Ἐδεί-  
χθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ  
ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς  
τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ  
πρὸς τὸ ΛΘΚ<sup>21</sup>. Ὅπρι ἴδει δειξαι.

ΛΘΚ. Ostensum est autem et ut ΕΒΓ ad ΛΗΘ  
ita ΑΒΕ ad ΖΗΛ; et ut igitur ΑΒΕ ad ΖΗΛ ita  
ΒΕΓ ad ΗΛΘ et ΕΓΔ ad ΛΘΚ. Quod oportebat  
ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

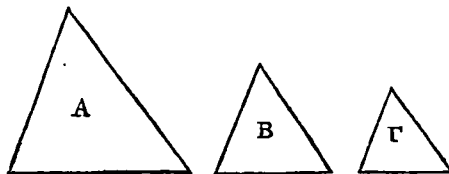
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις  
ἴσιν ὅμοια.

Ἐστω γάρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων  
τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἴσιν  
ὅμοιον.

## PROPOSITIO XXI.

Ipsa eidem rectilineo similia, et inter se  
sunt similia.

Sit enim utrumque ipsorum Α, Β rectili-  
neorum ipsi Γ simile; dico et Α ipsi Β esse  
simile.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιον ἴσιν τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιον  
τε ἴσιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας  
πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἵπρι ὅμοιον ἴσιν

Quoniam enim est simile Α ipsi Γ, et  
æquiangulum est ipsi, et circa æquales an-  
gulos latera proportionalia habet. Rursus, quo-

triangle ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ (11. 5). Mais on a démontré que  
ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΑΒΕ est à ΖΗΛ; donc ΑΒΕ est à ΖΗΛ comme ΒΕΓ est à  
ΗΛΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION XXI.

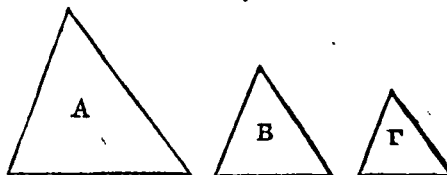
Les figures rectilignes semblables à une même figure sont semblables  
entr'elles.

Que chacune des figures rectilignes Α, Β soit semblable à la figure Γ; je  
dis que la figure Α est semblable à la figure Β.

Car, puisque la figure Α est semblable à la figure Γ, ces deux figures sont  
équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (déf. 1. 6).

τὸ B τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἴσθιν αὐτῶ, καὶ τὰς  
περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει·  
ἑκάτερον ἄρα τῶν A, B τῷ Γ ἰσογώνιον τε ἴσθι

niam simile est B ipsi Γ, et æquiangulum est  
ipsi, et circa æquales angulos latera propor-  
tionalia habet; utrumque igitur ipsorum A,



καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον  
ἔχει<sup>2</sup>. Ομοιον ἄρα ἴσθι τὸ A τῷ B. Ὅπερ ἴδι  
δείξαι.

B ipsi Γ et æquiangulum est et circa æquales  
angulos latera proportionalia habet. Simile igitur  
est A ipsi B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, καὶ τὰ ἀπ'  
αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀνα-  
γεγραμμένα, ἀνάλογον ἴσται· καὶ τὰ ἀπ' αὐ-  
τῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγε-  
γραμμένα ἀνάλογον ᾦ, καὶ αὗται αἱ εὐθεῖαι  
ἀνάλογον ἴσονται.

Si quatuor rectæ proportionales sint, et ab  
ipsis rectilinea, similiaque et similiter descripta,  
proportionalia erunt; et si ab ipsis rectilinea  
similiaque et similiter descripta proportionalia  
sint, et ipsæ rectæ proportionales erunt,

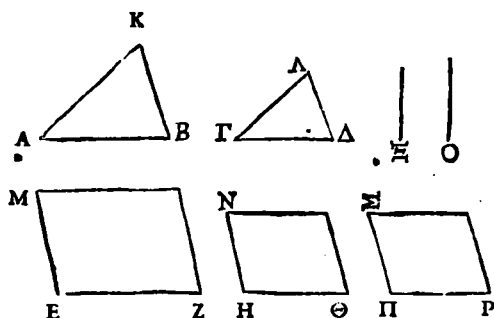
De plus, puisque la figure B est semblable à la figure Γ, ces deux figures  
sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels;  
donc chacune des figures A, B est équiangle avec la figure Γ, et elles ont  
les côtés autour des angles égaux proportionnels. Donc la figure A est sem-  
blable à la figure B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et  
semblablement construites sur ces droites, seront proportionnelles; et si des  
figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont  
proportionnelles, ces mêmes droites seront proportionnelles.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ , καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ  $KAB$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$ , ἀπὸ δὲ τῶν  $EZ$ ,  $H\Theta$  ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ  $MZ$ ,  $N\Theta$ . λῖγα ἔτι ἐστὶν ὡς τὸ  $KAB$  πρὸς τὸ  $\Lambda\Gamma\Delta$  οὕτως τὸ  $MZ$  πρὸς τὸ  $N\Theta$ .

Sint quatuor rectæ proportionales  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$ , ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita  $EZ$  ad  $H\Theta$ , et describantur ab ipsis quidem  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  similiaque et similiter posita rectilinea  $KAB$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$ , ab ipsis vero  $EZ$ ,  $H\Theta$  similiaque et similiter posita rectilinea  $MZ$ ,  $N\Theta$ ; dico esse ut  $KAB$  ad  $\Lambda\Gamma\Delta$  ita  $MZ$  ad  $N\Theta$ .



Εἰλήφθω γάρ τῶν μὲν  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  τρίτη ἀνάλογον ἡ  $\Xi$ , τῶν δὲ  $EZ$ ,  $H\Theta$  τρίτη ἀνάλογον ἡ  $O$ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $H\Theta$ , ὡς δὲ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὴν  $\Xi$  οὕτως ἡ  $H\Theta$  πρὸς τὴν  $O$ . Διόσου ἀρα ἐστὶν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Xi$  οὕτως ἡ  $EZ$  πρὸς τὴν  $O$ . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ  $AB$

Sumatur enim ipsis quidem  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  tertia proportionalis  $\Xi$ , ipsis vero  $EZ$ ,  $H\Theta$  tertia proportionalis  $O$ . Et quoniam est ut  $AB$  quidem ad  $\Gamma\Delta$  ita  $EZ$  ad  $H\Theta$ , ut  $\Gamma\Delta$  vero ad  $\Xi$  ita  $H\Theta$  ad  $O$ ; ex æquo igitur est ut  $AB$  ad  $\Xi$  ita  $EZ$  ad  $O$ . Sed ut  $AB$  quidem ad  $\Xi$  ita  $KAB$  ad

Soient  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ ,  $EZ$ ,  $H\Theta$  quatre droites proportionnelles, de manière que  $AB$  soit à  $\Gamma\Delta$  comme  $EZ$  est à  $H\Theta$ ; soient décrites sur les droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  les figures rectilignes semblables et semblablement placées  $KAB$ ,  $\Lambda\Gamma\Delta$ , et sur les droites  $EZ$ ,  $H\Theta$ , les figures semblables et semblablement placées  $MZ$ ,  $N\Theta$ ; je dis que  $KAB$  est à  $\Lambda\Gamma\Delta$  comme  $MZ$  est à  $N\Theta$ .

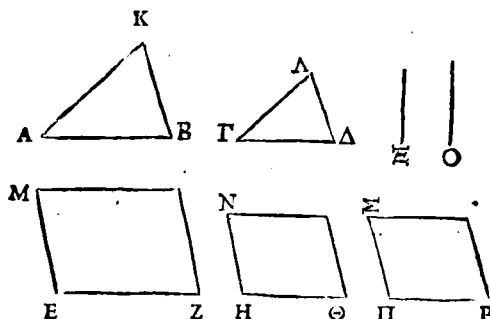
Prenons une troisième proportionnelle  $\Xi$  aux droites  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ , et une troisième proportionnelle  $O$  aux droites  $EZ$ ,  $H\Theta$  (11. 6). Puisque  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$  comme  $EZ$  est à  $H\Theta$ , [et que  $\Gamma\Delta$  est à  $\Xi$  comme  $H\Theta$  est à  $O$ ], par égalité,  $AB$  est à  $\Xi$  comme  $EZ$  est à  $O$  (22. 5). Mais  $AB$  est à  $\Xi$  comme  $KAB$  est



344 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὴν Ε οὕτως τὸ<sup>2</sup> KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἈΓΔ, ut EZ vero ad O ita MZ ad ΝΘ; et ut  
ἢ EZ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ<sup>3</sup> igitur KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad ΝΘ.  
ὡς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς  
τὸ ΝΘ.

Αλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως Sed et sit ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad ΝΘ;  
τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἔστι καὶ ὡς ἡ dico esse et ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.  
AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΗΘ.



Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως  
EZ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω<sup>5</sup> ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ  
οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ  
τῆς ΠΡ ὁμοίῳ τῶν MZ, ΝΘ ὁμοίον τε καὶ  
ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Επεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ  
EZ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφται ἀπὸ μὲν  
τῶν AB, ΓΔ ὁμοίᾳ τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB,  
ΑΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, ΠΡ ὁμοίᾳ τε καὶ ὁμοίως

Si enim non est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ,  
sit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ, et describatur  
a ΠΡ alterutri ipsorum MZ, ΝΘ simileque et  
similiter positum rectilineum ΣΡ.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ,  
et descripta sunt ab ipsis quidem AB, ΓΔ, si-  
milique et similiter posita KAB, ΑΓΔ, ab ipsis  
vero EZ, ΠΡ, simileque et similiter posita

à ΛΓΔ (cor. 2. prop. 10. 6), et EZ est à O comme MZ est à ΝΘ; donc KAB  
est à ΛΓΔ comme MZ est à ΝΘ (11. 5).

Mais que KAB soit à ΛΓΔ comme MZ est à ΝΘ; je dis que AB est à ΓΔ comme  
EZ est à ΗΘ.

Car si AB n'est pas à ΓΔ comme EZ est à ΗΘ, que AB soit à ΓΔ comme EZ est  
à ΠΡ (12. 6), et sur ΠΡ décrivons la figure rectiligne ΠΡ de manière qu'elle  
soit semblable à chacune des figures MZ, ΝΘ, et semblablement placée (18. 6).

Puisque AB est à ΓΔ comme EZ est à ΠΡ, que les figures KAB, ΑΓΔ décrites  
sur AB, ΓΔ sont semblables et semblablement placées, et que les figures

εἰμένα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ<sup>6</sup>. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ<sup>8</sup> ΗΘ τῇ ΠΡ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΜΣ, ΣΡ; est igitur ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΣΡ. Ponitur autem et ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ; et ut igitur ΜΖ ad ΣΡ ita ΜΖ ad ΝΘ; ergo ΜΖ ad utrumque ipsorum ΝΘ, ΣΡ eandem habet rationem; æquale igitur est ΝΘ ipsi ΣΡ. Est autem ipsi simile et similiter positum; æqualis igitur ΗΘ ipsi ΠΡ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, æqualis autem ΠΡ ipsi ΗΘ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ. Si igitur quatuor, etc.

ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ, εἰν εὐθύγραμμα ἴσα ἢ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Ἐστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

LEMMA.

Si autem rectilinea æqualia sint et similia, homologa ipsorum latera æqualia inter se esse, sic ostendemus.

Sint æqualia et similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ, et sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ; dico æqualem esse ΡΠ ipsi ΘΗ.

ΜΖ, ΣΡ décrites sur les droites ΕΖ, ΠΡ sont semblables et semblent placées, la figure ΚΑΒ est à la figure ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΣΡ. Mais on a supposé que ΚΑΒ est à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc ΜΖ est à ΣΡ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc la figure ΜΖ a la même raison avec chacune des figures ΝΘ, ΣΡ (11. 5); donc la figure ΝΘ est égale à la figure ΣΡ (9. 5). Mais elle lui est semblable, et elle est semblablement placée; donc ΗΘ est égal à ΠΡ (lem. suiv.). Et puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ, et que ΠΡ est égal à ΗΘ, ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ (7. 5). Donc, etc.

LEMME.

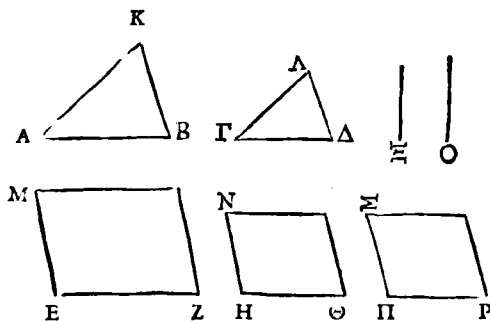
Si des figures rectilignes sont égales et semblables, nous démontrerons de cette manière que leurs côtés homologues sont égaux entr'eux.

Que les figures rectilignes ΝΘ, ΣΡ soient égales et semblables, et que ΗΘ soit à ΗΝ comme ΡΠ est à ΠΣ; je dis que ΡΠ est égal à ΘΗ.

# 346 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ ἀνισοὶ εἴσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων

Si enim inæquales sint, una ipsarum major est. Sit major ΡΠ ipsâ ΘΗ. Et quoniam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ, et alterne ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. Major autem ΠΡ ipsâ ΘΗ; major igitur et ΠΣ ipsâ



ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀνισοὶ ἐστὶν ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, ἴση ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

HN; quare et ΡΣ majus est ipso ΘΝ; sed et æquale, quod est impossibile; non igitur inæqualis est ΠΡ ipsi ΗΘ, æqualis igitur. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

## PROPOSITIO XXIII.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Æquiaugula parallelogramma inter se rationem habent compositam ex lateribus.

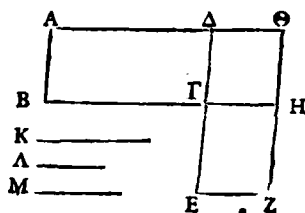
Car si ces droites sont inégales, une d'elles est plus grande. Que ΡΠ soit plus grand que ΘΗ. Puisque ΡΠ est à ΠΣ comme ΘΗ est à ΗΝ, par permutation, ΡΠ est à ΘΗ comme ΠΣ est à ΗΝ (16. 5). Mais ΚΡ est plus grand que ΘΗ; donc ΠΣ est plus grand que ΗΝ; donc la figure ΡΣ est plus grande que la figure ΘΝ (20. 6); mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc les droites ΠΡ, ΗΘ ne sont pas inégales; donc elles sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION XXIII.

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Εστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσιν ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγχείμινον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ'.

Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum ipsi ΕΓΗ; dico ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum rationem habere compositam ex lateribus, ex eâ quam habet ΒΓ ad ΓΗ et ex eâ quam habet ΑΓ ad ΓΕ.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τῆς εὐθείας ἡ Κ, καὶ γιγνέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Ponantur enim ita ut in directum sit ΒΓ ipsi ΓΗ; in directum igitur est et ΔΓ ipsi ΓΕ; et compleatur ΔΗ parallelogrammum, et exponatur quædam recta Κ, et fiat ut ΒΓ quidem ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut ΔΓ vero ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοὶ εἰσὶ ποῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Αλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς

Rationes igitur et ipsius Κ ad Λ et ipsius Λ ad Μ eædem sunt quæ rationes laterum, et ipsius ΒΓ ad ΓΗ et ipsius ΔΓ ad ΓΕ. Sed ipsius Κ ad Μ ratio componitur et ex ratione ipsius Κ ad Λ et ex ratione ipsius Λ ad Μ;

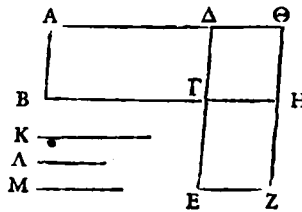
Soient les parallélogrammes équiangles ΑΓ, ΓΖ, ayant l'angle ΒΓΔ égal à l'angle ΕΓΗ; je dis que le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés, c'est-à-dire de celle que ΒΓ a avec ΓΗ, et de celle que ΔΓ a avec ΓΕ.

Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite ΒΓ soit dans la direction de la droite ΓΗ; la droite ΔΓ sera dans la direction de ΓΕ (14. 1). Achévon le parallélogramme ΔΗ; prenons une droite quelconque Κ; faisons en sorte que ΒΓ soit à ΓΗ comme Κ est à Λ, et que ΔΓ soit à ΓΕ comme Λ est à Μ (12. 6).

Les raisons de Κ à Λ et de Λ à Μ seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est-à-dire que celle de ΒΓ à ΓΗ et que celle de ΔΓ à ΓΕ. Mais la raison de Κ à Μ est composée de celle de Κ à Λ, et de celle de Λ à Μ.

τὴν  $M^2$ . ὥστε καὶ ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $M$  λόγον ἔχει τὸν συγχείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . ἀλλ' ὡς ἡ  $BΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΗ$  οὕτως ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $Λ$  καὶ ὡς ἄρα ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $Λ$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  πρὸς τὸ  $ΓΘ$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$  οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$ . ἀλλ' ὡς ἡ  $ΔΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΕ$

quare et  $K$  ad  $M$  rationem habet compositam ex lateribus. Et quoniam est ut  $BΓ$  ad  $ΓΗ$  ita  $ΑΓ$  parallelogrammum ad  $ΓΘ$ ; sed ut  $BΓ$  ad  $ΓΗ$  ita  $K$  ad  $Λ$ ; et ut igitur  $K$  ad  $Λ$  ita  $ΑΓ$  ad  $ΓΘ$ . Rursus, quoniam est ut  $ΔΓ$  ad  $ΓΕ$  ita  $ΓΘ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$ ; sed ut  $ΔΓ$  ad  $ΓΕ$  ita  $Λ$  ad  $M$ ; et ut igitur  $Λ$  ad  $M$  ita  $ΓΘ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$  parallelogrammum.



οὕτως ἡ  $Λ$  πρὸς τὴν  $M$  καὶ ὡς ἄρα ἡ  $Λ$  πρὸς τὴν  $M$  οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον. Επεὶ οὖν ἰδείχθη, ὡς μὲν ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $Λ$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ  $Λ$  πρὸς τὴν  $M$  οὕτως τὸ  $ΓΘ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον<sup>3</sup>. διίτου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ  $K$  πρὸς τὴν  $M$  οὕτως τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ  $ΓΖ$  παραλληλόγραμμον<sup>4</sup>. Ἡ δὲ  $K$  πρὸς τὴν  $M$

Quoniam igitur ostensum est ut  $K$  quidem ad  $Λ$  ita  $ΑΓ$  parallelogrammum ad  $ΓΘ$  parallelogrammum, ut  $Λ$  vero ad  $M$  ita  $ΓΘ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$  parallelogrammum; ex æquo igitur est ut  $K$  ad  $M$  ita  $ΑΓ$  parallelogrammum ad  $ΓΖ$  parallelogrammum. At vero  $K$  ad  $M$  rationem habet compositam ex lateribus; et  $ΑΓ$  igitur ad  $ΓΖ$  rationem ha-

$M$ ; donc la droite  $K$  a avec la droite  $M$  une raison composée des côtés. Et puisque  $BΓ$  est à  $ΓΗ$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΘ$  (1. 6), et que  $BΓ$  est à  $ΓΗ$  comme  $K$  est à  $Λ$ ,  $K$  est à  $Λ$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΘ$  (11. 5). De plus, puisque  $ΔΓ$  est à  $ΓΕ$  comme le parallélogramme  $ΓΘ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$ , et que  $ΔΓ$  est à  $ΓΕ$  comme  $Λ$  est à  $M$  (1. 6),  $Λ$  est à  $M$  comme le parallélogramme  $ΓΘ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$  (11. 5). Mais on a démontré que  $K$  est à  $Λ$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΘ$ , et  $Λ$  est à  $M$  comme le parallélogramme  $ΓΘ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$ ; donc, par égalité,  $K$  est à  $M$  comme le parallélogramme  $ΑΓ$  est au parallélogramme  $ΓΖ$  (22. 5). Mais la

# LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 349

λόγον ἔχει τὴν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ  
ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ  
τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια, καὶ τὰ ἰζήσ.

bet compositam ex lateribus. Ergo æquian-  
gula, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

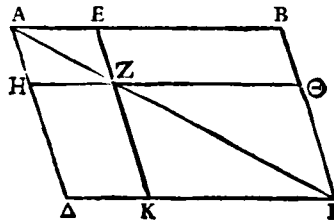
## PROPOSITIO XXIV.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διά-  
μετρον παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῷ τε  
ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμε-  
τρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλλη-  
λόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον  
τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὁμοίον ἐστὶν  
ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Omnis parallelogrammi circa diametrum pa-  
rallelogramma similia sunt et toti et inter se.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter au-  
tem ejus ipsa ΑΓ, circa ΑΓ autem parallelo-  
gramma sint ΕΗ, ΘΚ; dico utrumque ipsorum  
ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum simile esse toti  
ΑΒΓΔ et inter se.



Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν  
πλευρῶν τὴν ΒΓ ἕκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς

Quoniam enim trianguli ΑΒΓ juxta unum  
laterum ΒΓ ducta est ΕΖ, proportionaliter est

droite K a avec la droite M une raison composée des côtés; donc le parallé-  
gramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés.  
Donc, etc.

## PROPOSITION XXIV.

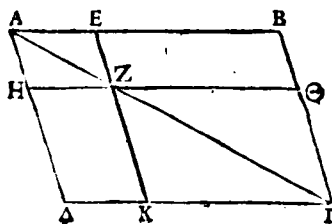
Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes autour de la diagonale  
sont semblables au parallélogramme entier et semblables entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de la  
diagonale ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ; je dis que les parallélogrammes  
ΕΗ, ΘΚ sont semblables au parallélogramme entier ΑΒΓΔ, et semblables entr'eux.

Puisqu'on a mené ΕΖ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite

ἡ BE πρὸς τὴν EA οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἵπεί τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἤκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα<sup>3</sup> ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ΑΛΛ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ BE πρὸς τὴν EA· καὶ ὡς ἄρα ἡ<sup>4</sup> BE πρὸς τὴν EA οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντε-  
θίντι<sup>5</sup> ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν<sup>6</sup> ΑΗ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς

ut BE ad EA ita ΓΖ ad ΖΑ. Rursus, quoniam trianguli ΑΓΔ juxta unum laterum ΓΔ ducta est ΖΗ, proportionaliter igitur est ut ΓΖ ad ΖΑ ita ΔΗ ad ΗΑ. Sed ut ΓΖ ad ΖΑ ita os-  
tensa est et BE ad EA; et ut igitur BE ad EA ita ΔΗ ad ΗΑ, et per compositionem, ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΑ ad ΑΗ, et alterne ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΗ; ipsorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ  
parallelogrammorum proportionalia sunt latera



τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ<sup>7</sup> παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἵπεί παραλλήλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ<sup>8</sup>, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΑΓΒ

circa communem angulum ΒΑΔ. Et quoniam parallela est ΗΖ ipsi ΔΓ, æqualis est ipse quidem ΑΗΖ angulus ipsi ΑΔΓ, ipse vero ΗΖΑ ipsi ΔΓΑ, et communis duobus triangulis ΑΔΓ, ΑΗΖ ipse ΔΑΓ angulus; æquiangulum igitur est ΑΔΓ triangulum ipsi ΑΗΖ triangulo. Propter eadem utique et ΑΓΒ triangulum æquiangulum est ipsi ΑΖΕ triangulo; et totum igitur ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΗ parallelo-

BE est à EA comme ΓΖ est à ΖΑ (2. 6). De plus, puisqu'on a mené ΖΗ parallèle à un des côtés ΓΔ du triangle ΑΓΔ, la droite ΓΖ est à ΖΑ comme ΔΗ est à ΗΑ. Mais on a démontré que ΓΖ est à ΖΑ comme BE est à ΕΑ; donc BE est à ΕΑ comme ΔΗ est à ΗΑ (11. 5); et par composition, ΒΑ est à ΑΕ comme ΔΑ est à ΑΗ (18. 5), et par permutation, ΒΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΗ (16. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ autour de l'angle commun ΒΑΔ sont proportionnels. Et puisque ΗΖ est parallèle à ΔΓ, l'angle ΑΗΖ est égal à l'angle ΑΔΓ (29. 1), et l'angle ΗΖΑ égal à l'angle ΔΓΑ; mais l'angle ΔΑΓ est commun aux deux triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ; donc les triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ sont équi-

τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ AZE τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἐστίν<sup>9</sup>. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ<sup>10</sup> ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· δίσσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ABΓΔ, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ<sup>11</sup> τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστίν· ἑκάτερον ἄρα τῶν EH, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ABΓΔ παραλληλογράμμῳ<sup>12</sup> ὁμοίον ἐστὶ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ EH ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστὶ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

grammo æquiangulum est; proportionaliter igitur est ut  $AD$  ad  $ΔΓ$  ita  $AH$  ad  $HZ$ . Ut autem  $ΔΓ$  ad  $ΓΑ$  ita  $HZ$  ad  $ΖΑ$ , ut  $ΑΓ$  vero ad  $ΓΒ$  ita  $AZ$  ad  $ΖΕ$ , et insuper ut  $ΓΒ$  ad  $ΒΑ$  ita  $ΖΕ$  ad  $ΕΑ$ ; et quoniam ostensum est ut  $ΔΓ$  quidem ad  $ΓΑ$  ita  $HZ$  ad  $ΖΑ$ , ut  $ΑΓ$  vero ad  $ΓΒ$  ita  $AZ$  ad  $ΖΕ$ ; ex æquo igitur est ut  $ΔΓ$  ad  $ΒΓ$  ita  $HZ$  ad  $ΖΕ$ . Ipsorum igitur  $ABΓΔ$ ,  $EH$  parallelogrammorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; simile igitur est  $ABΓΔ$  parallelogrammum ipsi  $EH$  parallelogrammo. Propter eadem utique et  $ABΓΔ$  parallelogrammum et ipsi  $ΘΚ$  parallelogrammo simile est; utrumque igitur ipsorum  $EH$ ,  $ΘΚ$  parallelogrammorum ipsi  $ABΓΔ$  parallelogrammo simile est. Ipsa autem eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia; et  $EH$  igitur parallelogrammum ipsi  $ΘΚ$  parallelogrammo simile est. Omnis igitur, etc.

angles. Les triangles  $ΑΓΒ$ ,  $AZE$  sont équiangles, par la même raison; donc le parallélogramme entier  $ABΓΔ$ , et le parallélogramme  $EH$  sont équiangles; donc  $AD$  est à  $ΔΓ$  comme  $AH$  est à  $HZ$  (4. 6). Mais  $ΔΓ$  est à  $ΓΑ$  comme  $HZ$  est à  $ΖΑ$ , et  $ΑΓ$  est à  $ΓΒ$  comme  $AZ$  est à  $ΖΕ$ , de plus,  $ΓΒ$  est à  $ΒΑ$  comme  $ΖΕ$  est à  $ΕΑ$ , et l'on a démontré que  $ΔΓ$  est à  $ΓΑ$  comme  $HZ$  est à  $ΖΑ$ , et que  $ΑΓ$  est à  $ΓΒ$  comme  $AZ$  est à  $ΖΕ$ ; donc, par égalité,  $ΔΓ$  est à  $ΒΓ$  comme  $HZ$  est à  $ΖΕ$  (22. 5); donc les côtés des parallélogrammes  $ABΓΔ$ ,  $EH$ , autour des angles égaux, sont proportionnels; donc le parallélogramme  $ABΓΔ$  est semblable au parallélogramme  $EH$  (déf. 1. 6). Le parallélogramme  $ABΓΔ$  est semblable au parallélogramme  $ΘΚ$ , par la même raison; donc chacun des parallélogrammes  $EH$ ,  $ΘΚ$  est semblable au parallélogramme  $ABΓΔ$ . Mais les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont semblables entr'elles (21. 6); donc le parallélogramme  $EH$  est semblable au parallélogramme  $ΘΚ$ . Donc, etc.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

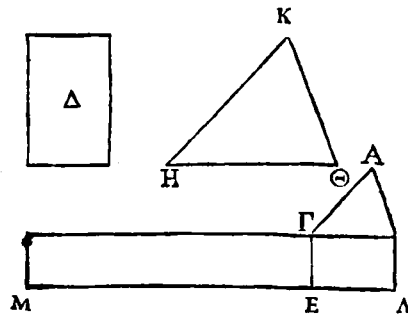
PROPOSITIO XXV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὁμοιον συστήσασθαι, τὸ  $AB\Gamma$ , ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ  $\Delta$ . δεῖ δὴ τῷ μὲν  $AB\Gamma$  ὁμοιον, τῷ δὲ  $\Delta$  ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, ipsum  $AB\Gamma$ , cui vero oportet æquale ipsum  $\Delta$ ; oportet igitur ipsi quidem  $AB\Gamma$  simile, ipsi vero  $\Delta$  æquale idem constituere.



Παραβελήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν  $B\Gamma$  τῷ  $AB\Gamma$  τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ  $BE$ , παρὰ δὲ τὴν  $ΓΕ$  τῷ  $\Delta$  ἴσόν παραλληλόγραμμον τὸ  $ΓΜ$  ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ  $ZΓΕ$ , ἥ ἐστίν ἴση τῇ ὑπὸ  $ΓΒΑ$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν  $B\Gamma$  τῇ  $ΓΖ$ , ἡ δὲ  $ΑΕ$

Applicetur enim ad ipsam quidem  $B\Gamma$  ipsi  $AB\Gamma$  triangulo æquale parallelogrammum  $BE$ , ad ipsam vero  $ΓΕ$  ipsi  $\Delta$  æquale parallelogrammum  $ΓΜ$  in angulo  $ZΓΕ$ , qui est æqualis ipsi  $ΓΒΑ$ ; in directum igitur est  $B\Gamma$  quidem

PROPOSITION XXV.

Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Soit  $AB\Gamma$  la figure rectiligne donnée, à laquelle il faut construire une figure semblable, et  $\Delta$  la figure rectiligne à laquelle il faut la faire égale; il faut construire une figure qui soit semblable à la figure  $AB\Gamma$  et égale à la figure  $\Delta$ .

Construisons sur  $B\Gamma$  un parallélogramme  $BE$  qui soit égal au triangle  $AB\Gamma$  (44 et 45. 1), et sur  $ΓΕ$  et dans l'angle  $ZΓΕ$  qui est égal à l'angle  $ΓΒΑ$ , construisons un parallélogramme  $ΓΜ$  qui soit égal à la figure  $\Delta$ ; la droite  $B\Gamma$  sera dans la direction de  $ΓΖ$ , et  $ΑΕ$  dans la direction de  $ΕΜ$  (14. 1). Prenons

τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μίση ἀνάλογον ἢ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὁμοίον τε<sup>2</sup> καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἰὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾤσιν, ἔστιν<sup>3</sup> ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοίον καὶ ὁμοίως ἀναγεγόμενον ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον<sup>4</sup>. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἰναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἰσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἔστιν ἴσον· καὶ

ipsi ΓΖ, ipsa vero ΑΕ ipsi ΕΜ. Et sumatur inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, et describatur ex ΗΘ ipsi ΑΒΓ simileque et similiter positum ipsum ΚΗΘ.

Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ proportionales sint, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figura ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; est igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum. Sed et ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; et ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; alterne igitur ut ΑΒΓ triangulum ad ΒΕ parallelogrammum ita ΚΗΘ triangulum ad ΕΖ parallelogrammum. Æquale autem ΑΒΓ triangulum ipsi ΒΕ parallelogrammo; æquale igitur et ΚΗΘ triangulum ipsi ΕΖ parallelogrammo. Sed ΕΖ parallelogrammum ipsi Δ est æquale; et ΚΗΘ igitur ipsi Δ est æquale. Est autem ΚΗΘ et ipsi ΑΒΓ simile; ipsi igitur dato

une moyenne proportionnelle ΗΘ entre les droites ΒΓ, ΓΖ (13. 6), et sur ΗΘ construisons une figure ΚΗΘ semblable à la figure ΑΒΓ et semblablement placée (18. 6).

Puisque ΒΓ est à ΗΘ comme ΗΘ est à ΓΖ, et puisque, lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable construite sur la seconde, et semblablement placée (cor. 2. prop. 20. 6), la droite ΒΓ est à la droite ΓΖ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ. Mais ΒΓ est à ΓΖ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ (1. 6); donc le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ; donc, par permutation, le triangle ΑΒΓ est au parallélogramme ΒΕ comme le triangle ΚΗΘ est au parallélogramme ΕΖ (16. 5). Mais le triangle ΑΒΓ est égal au parallélogramme ΒΕ; donc le triangle ΚΗΘ est égal au parallélogramme ΕΖ. Mais le parallélogramme ΕΖ est égal à la figure Δ; donc le triangle ΚΗΘ est égal à la figure Δ.

# 354 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἴστί· ἔστιν ἴσον. Ἐστὶ δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ<sup>5</sup> ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

rectilineo ΑΒΓ simile, et alteri dato Δ æquale idem constitutum est ΚΗΘ. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

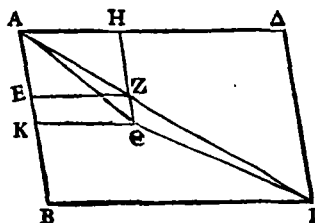
Εὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Απὸ παραλληλογράμμου γάρ<sup>1</sup> τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφαιρήσθω<sup>2</sup> τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον

## PROPOSITIO XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, et simile toti et similiter positum, communem angulum habens cum ipso, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum auferatur ΑΕΖΗ, simile ipsi ΑΒΓΔ



τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

et similiter positum, communem angulum habens ΔΑΒ cum ipso; dico circa eandem diametrum esse ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΑΕΖΗ.

Mais le triangle ΚΗΘ est semblable au triangle ΑΒΓ; on a donc construit la figure ΚΗΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΑΒΓ, et égale à une autre figure donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION XXVI.

Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.

Que du parallélogramme ΑΒΓΔ on retranche le parallélogramme ΑΕΖΗ, semblable au parallélogramme ΑΒΓΔ et semblablement placé, et ayant avec lui l'angle commun ΔΑΒ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est autour de la même diagonale que le parallélogramme ΑΕΖΗ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἴστω αὐτοῦ ἡ διά-  
μετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκκληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ  
τὸ Θ<sup>3</sup>, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ  
παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἴσθι τὸ  
ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὁμοίον ἴσθι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ<sup>5</sup>.  
ἴσθιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ  
πρὸς τὴν ΑΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα  
τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ, καὶ<sup>6</sup> ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕ-  
τως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς  
τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα<sup>7</sup>  
πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·  
ἴση ἄρα ἴσθιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι,  
ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ<sup>8</sup> ἴσθι περὶ τὴν  
αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐ-  
τὴν ἄρα ἴσθι διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλό-  
γραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ἄρα  
ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Non enim, sed si possibile, sit ipsius  
diameter ΑΘΓ, et ejecta ΗΖ producatūr ad Θ,  
et ducatur per Θ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ  
parallela ΘΚ.

Quoniam igitur circa eandem diametrum  
est ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ, si-  
mile est ΑΒΓΔ ipsi ΚΗ; est igitur ut ΔΑ ad  
ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. Est autem et propter simi-  
litudinem ipsorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, et ut ΔΑ ad ΑΒ  
ita ΗΑ ad ΑΕ; et ut igitur ΗΑ ad ΑΚ ita ΗΑ ad  
ΑΕ; ipsa ΗΑ igitur ad utramque ipsarum ΑΚ,  
ΑΕ eandem habet rationem; æqualis igitur est  
ΑΕ ipsi ΑΚ, minor majori, quod est impossi-  
bile; non igitur non est circa eandem diame-  
trum ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ; circa  
eandem igitur est diametrum ipsum ΑΒΓΔ  
parallelogrammum quam ΑΕΖΗ parallelogram-  
mum. Si igitur a parallelogrammo, etc.

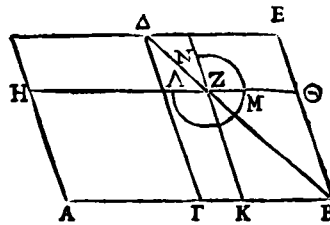
Que cela ne soit point, mais, si cela est possible, que ΑΘΓ soit sa diagonale;  
prolongeons ΗΖ vers Θ, et par le point Θ menons ΘΚ parallèle à l'une ou  
à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ.

Puisque les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ sont autour de la même diagonale,  
le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΚΗ (24. 6); donc  
ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΚ (déf. 1. 6). Mais à cause de la similitude  
des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ, la droite ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΕ;  
donc ΗΑ est à ΑΚ comme ΗΑ est à ΑΕ (11. 5); donc ΗΑ a la même raison  
avec chacune des droites ΑΚ, ΑΕ; donc ΑΕ est égal à ΑΚ (9. 5), le plus  
petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ,  
ΚΗ ne peuvent point ne pas être autour de la même diagonale; donc les pa-  
rallélogrammes ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ sont autour de la même diagonale. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν παρα-  
βαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόν-  
των ἰδίᾳ παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ  
ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγρα-  
φομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας  
παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον δὲ  
τῷ ἑλλείμματι.

Ἐστω εὐθεΐα ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ  
τὸ  $\Gamma$ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αὐτὴν  $AB$   
εὐθεΐαν τὸ  $AD$  παραλληλόγραμμον ἑλλειπὸν ἰδίᾳ



παραλληλογράμμῳ τῷ  $GE$ , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως  
κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς  
 $AB^2$ , τουτίστι τῆς  $GB$ . λέγω ὅτι πάντων τῶν

Omnium ad eandem rectam applicatorum  
parallelogrammorum et deficientium figuris  
parallelogrammis, similibusque et similiter  
positis ipsi ex dimidiâ descripto, maximum  
est ipsum ad dimidiam applicatum parallelo-  
grammum, simile existens defectui.

Sit recta  $AB$ , et secetur bifariam in  $\Gamma$ , et  
applicetur ad eandem  $AB$  rectam ipsum  $AD$   
parallelogrammum deficiens figurâ parallelo-

grammâ  $GE$ , similique et similiter positâ ei ex  
dimidiâ  $AB$  descriptæ, hoc est ex ipsâ  $GB$ ; dico  
omnium ad  $AB$  applicatorum parallelogram-

## PROPOSITION XXVII.

De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite, et qui sont défailants de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite, et semblablement placés, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut.

Soit la droite  $AB$ ; que cette droite soit coupée en deux parties égales au point  $\Gamma$ , et qu'à la droite  $AB$  soit appliqué le parallélogramme  $AD$ , défailant du parallélogramme  $GE$ , semblable à celui qui est décrit sur la moitié de la droite  $AB$ , c'est-à-dire sur  $GB$ , et semblablement placé; je dis que de tous les parallélo-

παρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμ-  
μων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδει παραλληλογράμ-  
μοις<sup>3</sup> ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κυμένοις τῷ ΓΕ,  
μείζιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ  
τὴν AB εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἑλ-  
λῖπον εἶδει παραλληλογράμμου τῷ ΚΘ, ὁμοίως  
τε καὶ ὁμοίως κυμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μείζον  
ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμ-  
μον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμου, περὶ τὴν αὐτὴν  
εἶσι διάμετρον. Ἦχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ  
καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσ-  
κείσθω τὸ ΚΘ<sup>4</sup>· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ  
ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ  
καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν<sup>5</sup>, καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ  
ΕΚ ἐστὶν ἴσον<sup>6</sup>. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον  
ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΑΜΝ γνώμονι ἐστὶν ἴσον· ὥστε<sup>7</sup>  
τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ,  
τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μείζον ἐστίν.

morum, et deficientium figuris parallelogram-  
mis similibusque et similiter positis ipsi ΓΕ,  
maximum esse ΑΔ. Applicetur enim ad AB  
rectam ipsum ΑΖ parallelogrammum, deficiens  
figurâ parallelogrammâ ΚΘ, similique et simi-  
liter positâ ipsi ΓΕ; dico majus esse ΑΔ ipso  
ΑΖ.

Quoniam simile enim est ΓΕ parallelogram-  
mum ipsi ΚΘ parallelogrammo, circa eandem  
sunt diametrum. Ducatur eorum diameter ΔΒ,  
det describatur figura.

Quoniam igitur æquale est ΓΖ ipsi ΖΕ, com-  
mune addatur ΚΘ; totum igitur ΓΘ toti ΚΕ  
est æquale. Sed ΓΘ ipsi ΓΗ est æquale, quo-  
niam et ipsa ΑΓ ipsi ΓΒ æqualis est; et ΗΓ  
igitur ipsi ΕΚ est æquale. Commune addatur  
ΓΖ; totum igitur ΑΖ ipsi ΑΜΝ gnomoni est  
æquale; quare et ΓΕ parallelogrammum, hoc  
est ΑΔ, ipso ΑΖ parallelogrammo majus est.

grammes qui sont appliqués à la droite AB, et qui sont défail-  
lantes de parallélogrammes semblables au parallélogramme ΓΕ, et semblablement placés, le plus  
grand est le parallélogramme ΑΔ. Car appliquons à la droite AB le paral-  
lélogramme ΑΖ, défail-  
lant du parallélogramme ΚΘ semblable au parallé-  
logramme ΓΕ, et semblablement placé; je dis que le parallélogramme ΑΔ est plus  
grand que le parallélogramme ΑΖ.

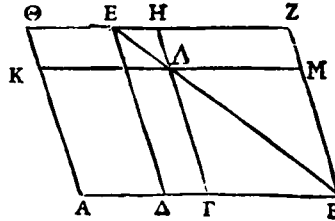
Car puisque le parallélogramme ΓΕ est semblable au parallélogramme ΚΘ,  
ces deux parallélogrammes sont placés autour de la même diagonale (26. 6).  
Menons leur diagonale ΔΒ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΓΖ est égal au parallélogramme ΖΕ (43. 1),  
ajoutons le parallélogramme commun ΚΘ; le parallélogramme entier ΓΘ sera  
égal au parallélogramme entier ΚΕ. Mais ΓΘ est égal à ΓΗ (36. 1), parce que  
la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ; donc ΗΓ est égal à ΕΚ. Ajoutons le pa-  
rallélogramme commun ΓΖ, le parallélogramme entier ΑΖ sera égal au gnomon  
ΑΜΝ; donc le parallélogramme ΓΕ, c'est-à-dire le parallélogramme ΑΔ, est plus  
grand que le parallélogramme ΑΖ (36. 1).

# 358 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γὰρ πάλιν ἡ  $AB$  τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , καὶ παραβληθὲν τὸ  $AA$  ἑλλειπὸν εἶδει τῷ  $GM$ , καὶ παραβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν  $AB$  τὸ  $AE$  παραλληλόγραμμον ἑλλειπὸν τῷ  $\Delta Z$ , ὁμοίω τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς  $AB$ , τῷ  $GM$ . λήγῃ ὅτι μείζον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς<sup>8</sup> ἡμισείας παραβληθὲν τὸ  $AA$  τοῦ  $AE$ .

Sit enim rursus  $AB$  secta bifariam in  $\Gamma$ , et applicatum ipsum  $AA$ , deficiens figurâ  $GM$ , et applicetur rursus ad  $AB$  ipsum  $AE$  parallelogrammum, deficiens ipso  $\Delta Z$ , similique et similiter posito ipsi  $GM$  ex dimidiâ  $AB$ ; dico majus esse ipsum ad dimidiam applicatum  $AA$  ipse  $AE$ .



Ἐπεὶ γὰρ ὁμοιόν ἐστι τὸ  $\Delta Z$  τῷ  $GM$ , περὶ τὴν αὐτὴν εἶσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ  $EB$ , καὶ καταγυγράφω τὸ σχῆμα.

Quoniam enim simile est  $\Delta Z$  ipsi  $GM$ , circa eandem sunt diametrum; sit eorum diameter  $EB$ , et describatur figura.

Καὶ ἵπαι ἴσον ἐστὶ τὸ  $AZ$  τῷ  $\Lambda\Theta$ , ἵπαι καὶ ἡ  $ZH$  τῇ  $H\Theta$ . μείζον ἄρα τὸ  $AZ$  τοῦ  $KE$ . Ἰσον δὲ τὸ  $AZ$  τῷ  $\Delta\Lambda$ . μείζον ἄρα καὶ τὸ  $\Delta\Lambda$  τοῦ  $EK$ . Κοινὸν προσκείσθω τὸ  $K\Delta$ . ὅλον ἄρα τὸ  $AA$  ὅλου τοῦ  $AE$  μείζον ἔστιν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam æquale est  $AZ$  ipsi  $\Lambda\Theta$ , quoniam et ipsa  $ZH$  ipsi  $H\Theta$ ; majus igitur  $AZ$  ipso  $KE$ . Æquale autem  $AZ$  ipsi  $\Delta\Lambda$ ; majus igitur et  $\Delta\Lambda$  ipso  $EK$ . Commune addatur  $K\Delta$ ; totum igitur  $AA$  toto  $AE$  majus est. Omnium igitur, etc.

Coupons de nouveau la droite  $AB$  en deux parties égales au point  $\Gamma$ , et appliquons à cette droite le parallélogramme  $AA$ , défailant du parallélogramme  $GM$ , et de plus appliquons à la droite  $AB$  le parallélogramme  $AE$  défailant du parallélogramme  $\Delta Z$ , semblable au parallélogramme décrit sur la moitié de  $AB$ , et semblablement placé; je dis que le parallélogramme  $AA$  qui est appliqué à la moitié de cette droite est plus grand que le parallélogramme  $AE$ .

Car, puisque les parallélogrammes  $\Delta Z$ ,  $GM$  sont semblables, ces deux parallélogrammes sont autour de la même diagonale (26. 6); soit  $EB$  leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque  $AZ$  est égal à  $\Lambda\Theta$  (36. 1), car  $ZH$  est égal à  $H\Theta$ ,  $AZ$  est plus grand que  $KE$ . Mais  $AZ$  est égal à  $\Delta\Lambda$  (43. 1); donc  $\Delta\Lambda$  est plus grand que  $EK$ . Ajoutons le parallélogramme commun  $K\Delta$ ; le parallélogramme entier  $AA$  sera plus grand que le parallélogramme entier  $AE$ . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

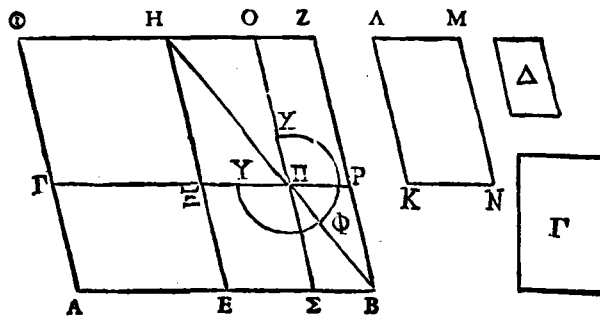
PROPOSITIO XXVIII.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δι' ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἑλλειμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δι' ὅμοιον ἑλλείπειν<sup>2</sup>.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθέν

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ simili ipsi dato; oportet utique datum rectilineum cui oportet æquale applicare, non majus esse ipso ad dimidiam applicato, similibus existentibus defectibus et ipso ad dimidiam et ipso cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta AB, datum vero Γ



εὐθύγραμμον, ᾧ δι' ἴσον παρά τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μείζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

rectilineum, cui oportet æquale ad AB applicare, non majus existens eo ad dimidiam

PROPOSITION XXVIII.

A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défaillant d'un parallélogramme semblable étant semblables entr'eux.

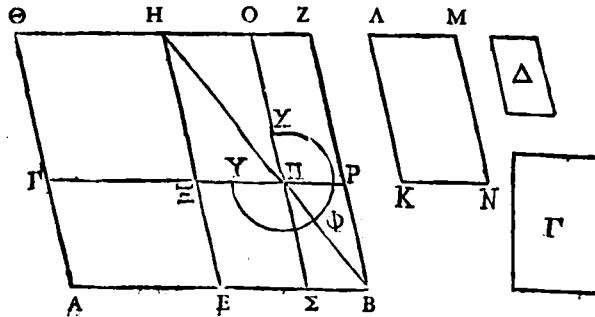
Soit AB la droite donnée, et Γ la figure rectiligne à laquelle doit être égal le parallélogramme qu'il faut appliquer à la droite AB; que la figure recti-



360 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἑλλειμμάτων<sup>3</sup>, ὃ δὲ δεῖ ὁμοίον ἑλλεῖπειν τὸ Δ· δεῖ δὲ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἑλλεῖπον εἶδει παραλληλογράμμου, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

applicato, similibus existentibus defectibus, ipsum autem Δ cui oportet simile deficere; oportet igitur ad datam rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ, simili existente ipsi Δ.



Τιτμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγράψθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EBZH, καὶ συμπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὲ AH ἥτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὁρισμὸν. Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ, γινόντος ἀν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι παραβέβηται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH, ἑλλεῖπον

Secetur AB bifariam in E puncto, et describatur ex ipsâ EB ipsi Δ simile et similiter positum EBZH, et complectatur AH parallelogrammum; AH utique vel æquale est ipsi Γ, vel majus ipso, ob determinationem. Et si quidem æquale est AH ipsi Γ, factum erit propositum; applicatum erit enim ad datam rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum AH, deficiens figurâ parallelogrammâ

ligne ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de AB, les défauts étant semblables, et soit Δ le parallélogramme auquel le défaut doit être semblable; il faut à la droite donnée AB appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui soit défailant d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons la droite AB en deux parties égales au point E (10. 1); sur EB décrivons le parallélogramme EBZH semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (18. 6), et terminons le parallélogramme AH; le parallélogramme AH sera égal à la figure Γ, ou plus grand, d'après ce qui a été dit. Si le parallélogramme AH est égal à la figure Γ, on aura fait ce qui était proposé; car on aura appliqué à la droite AB un parallélogramme AH semblable à la figure rectiligne

# LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 361

ἴδιον παραλληλογράμμω τῷ EZ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὐ, μείζον ἔστι τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἰσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὡς δὲ μείζον ἔστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνιστάτω τὸ ΚΑΜΝ. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἔστιν ὁμοίον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἔστι ὁμοίον. Ἐστω οὖν<sup>5</sup> ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΑ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἔστι τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μείζον ἄρα ἔστι τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζον ἄρα ἔστι καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΑΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΑΜ. Κείσθω τῇ μὲν<sup>6</sup> ΚΑ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΑΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἔστι τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ<sup>7</sup>. Ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὁμοίον ἔστι<sup>8</sup>· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὁμοίον ἔστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἔστι τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὣν τὸ

EZ simili existenti ipsi Δ. Si autem non, majus est ΘΕ ipso Γ. Æquale autem ΘΕ ipsi ΗΒ; majus igitur et ΗΒ ipso Γ. Quo utique majus est ΗΒ ipso Γ, ei excessui æquale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constituitur ΚΑΜΝ. Sed Δ ipsi ΗΒ est simile; et ΚΜ igitur ipsi ΗΒ est simile. Sit igitur homologa quidem ΚΑ ipsi ΗΕ, ipsa vero ΑΜ ipsi ΗΖ. Et quoniam æquale est ΗΒ ipsis Γ, ΚΜ, majus igitur est ΗΒ ipso ΚΜ; major igitur est et ipsa quidem ΗΕ ipsâ ΑΚ, ipsa vero ΗΖ ipsâ ΑΜ. Ponatur ipsi quidem ΚΑ æqualis ΗΞ, ipsi vero ΑΜ æqualis ΗΟ, et compleatur ΞΗΟΠ parallelogrammum; æquale igitur et simile est ipsi ΚΜ ipsum ΗΠ. Sed ΚΜ ipsi ΗΒ simile est; et ΗΠ igitur ipsi ΗΒ simile est; circa eandem igitur diametrum est ΗΠ· circa quam ΗΒ. Sit eorum diameter ΗΠΒ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΒΗ ipsis Γ, ΚΜ,

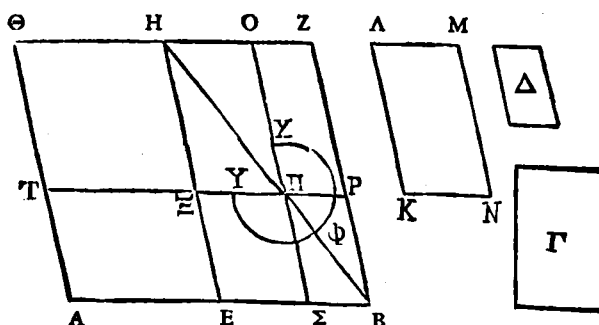
donnée r, et défailant d'un parallélogramme EZ semblable au parallélogramme Δ. Mais si cela n'est point, ΘΕ est plus grand que r. Mais ΘΕ est égal à ΗΒ; donc ΗΒ est plus grand que r. Construisons le parallélogramme ΚΑΜΝ égal à l'excès du parallélogramme ΗΒ sur la figure r, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6). Mais le parallélogramme Δ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ. Que la droite ΚΑ soit l'homologue de la droite ΗΕ, et la droite ΑΜ l'homologue de la droite ΗΖ. Puisque le parallélogramme ΗΒ est égal aux deux figures r, ΚΜ, le parallélogramme ΗΒ est plus grand que le parallélogramme ΚΜ; donc ΗΕ est plus grand que ΑΚ, et ΗΖ plus grand que ΑΜ (20. 6). Faisons ΗΞ égal à ΚΑ, et ΗΟ égal à ΑΜ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΞΗΟΠ (31. 1); le parallélogramme ΗΠ sera égal et semblable au parallélogramme ΚΜ (24. 6). Mais le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΗΠ est semblable au parallélogramme ΗΒ (21. 6); donc les parallélogrammes ΗΠ, ΗΒ sont autour de la même diagonale (26. 6). Soit ΗΠΒ leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΒΗ est égal aux deux figures r, ΚΜ, et que

# 362 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΗΠ τῷ ΚΜ ἴστί· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἴστί· ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἴστί· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἴστί· ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΥΦΧ γνώμονι ἴστί· ἴσον. Ἀλλὰ ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἰδίχθῃ ἴσος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἴστί· ἴσον.

quorum ΗΠ ipsi ΚΜ est æquale; reliquus igitur ΥΦΧ gnomon reliquo Γ est æqualis. Et quoniam æquale est ΟΡ ipsi ΞΣ, commune apponatur ΠΒ; totum igitur ΟΒ toti ΞΒ æquale est. Sed ΞΒ ipsi ΤΕ est æquale, quoniam et latus ΑΕ lateri ΕΒ est æquale; et ΤΕ igitur ipsi ΟΒ est æquale. Commune apponatur ΞΣ; totum igitur ΤΣ toti ΥΦΧ gnomoni est æquale. Sed ΥΦΧ gnomon ipsi Γ ostensus est æqualis; et ΑΠ igitur ipsi Γ est æquale.



Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ, ἰλλεῖπον εἶδει παραλληλόγραμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδὴ περ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὁμοίον ἐστίν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΣΤ, dificiens figurâ parallelogrammâ ΠΒ simili existenti ipsi Δ, quandoquidem ΠΒ ipsi ΗΠ simile est. Quod oportebat facere.

ΗΠ est égal à ΚΜ, le gnomon restant ΥΦΧ est égal à la figure restante Γ. Et puisque ΟΡ est égal à ΞΣ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun ΠΒ; le parallélogramme entier ΟΒ sera égal au parallélogramme entier ΞΒ. Mais ΞΒ est égal à ΤΕ (36. 1), parce que le côté ΑΕ est égal au côté ΕΒ; donc ΤΕ est égal à ΟΒ. Ajoutons le parallélogramme commun ΞΣ; le parallélogramme entier ΤΣ sera égal au gnomon entier ΥΦΧ. Mais on a démontré que le gnomon ΥΦΧ est égal à Γ; donc ΑΠ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite ΑΒ un parallélogramme ΣΤ, égal à la figure rectiligne donnée Γ, et défailant d'un parallélogramme ΠΒ semblable à Δ, puisque ΠΒ est semblable à ΗΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

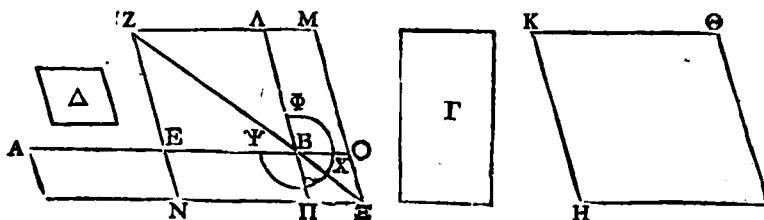
PROPOSITIO XXIX.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερέαλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθέν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρά τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρά τὴν AB εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερέαλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili datæ.

Sit data quidem recta AB, datum vero rectilineum Γ, cui oportet æquale ad AB applicare, Δ autem cui oportet simile applicare; oportet igitur ad AB rectam ipsi Γ rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἀναγέγραψθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ BZ, καὶ συναμφο-

Secetur AB bifariam in E, et describatur ex EB ipsi Δ simile et similiter positum parallelogrammum BZ, et utrisque simul quidem BZ,

PROPOSITION XXIX.

Appliquer à une droite donnée, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

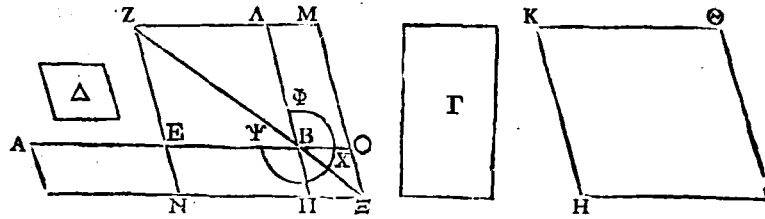
Soit AB la droite donnée, à laquelle il faut appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée r, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme Δ; il faut à la droite AB appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne r, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons AB en deux parties égales au point E (g. 1), sur la droite EB décrivons le parallélogramme BZ semblable au parallélogramme Δ et semblable-

# 364 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τέροις μὲν τοῖς BZ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνιστάτω τὸ ΗΘ· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ'. Ομολογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Εκτε-  
 λήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΑΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπλη-

Γ æquale, ipsi vero Δ simile et similiter posi-  
 tum idem constituatur ΗΘ; simile igitur est  
 ΗΘ ipsi ΕΛ. Homologa autem sit ΚΘ quidem  
 ipsi ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsi ΖΕ. Et quoniam  
 majus est ΗΘ ipso ΖΒ, major igitur est et ipsa  
 quidem ΚΘ ipsâ ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsâ ΖΕ.  
 Producantur ipsæ ΖΛ, ΖΕ, et ipsi quidem ΚΘ  
 æqualis sit ΖΑΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ



ρεύσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὁμοιον. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἰσὶν ὁμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὁμοιον ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ἠχθῶ αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ

et compleatur MN; ipsum MN igitur ipsi ΗΘ æqualeque est et simile. Sed ΗΘ ipsi ΕΛ est simile; et MN igitur ipsi ΕΛ simile est; circa eandem igitur diametrum est ipsum ΕΛ circa quam MN. Ducatur eorum diameter ΖΞ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ,

ment placé (18. 6), et construisons le parallélogramme ΗΘ égal aux deux figures ΕΛ, Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6); le parallélogramme ΗΘ sera semblable au parallélogramme ΕΛ. Que ΚΘ soit l'homologue de ΖΛ, et ΚΗ l'homologue de ΖΕ. Puisque ΗΘ est plus grand que ΖΒ, la droite ΚΘ est plus grande que ΖΛ, et la droite ΚΗ plus grande que ΖΕ. Prolongeons ΖΛ, ΖΕ, que ΖΑΜ soit égal à ΚΘ, et ΖΕΝ égal à ΚΗ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΜΝ. Le parallélogramme ΜΝ sera égal et semblable au parallélogramme ΗΘ. Mais le parallélogramme ΗΘ est semblable au parallélogramme ΕΛ; donc le parallélogramme ΜΝ est semblable au parallélogramme ΕΛ (21. 6); donc les deux parallélogrammes ΕΛ, ΜΝ sont autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΖΞ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΗΘ est égal aux figures ΕΛ, Γ, et que

τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν ἀφαιρέσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος<sup>1</sup>. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτίστι τῷ ΛΟ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τὸ Γ ἴσος ἐστὶ καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστὶν.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερέχον εἶδος παραλληλογράμμου τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὁμοίον τὸ ΟΠ<sup>5</sup>, ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

sed ΗΘ ipsi ΜΝ æquale est; et ΜΝ igitur ipsis ΕΛ, Γ æquale est. Commune auferatur ΕΛ; reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΒ, æquale est et ΑΝ ipsi ΝΒ, hoc est ipsi ΛΟ. Commune apponatur ΕΞ; totum igitur ΑΞ æquale est ipsi ΦΧΨ gnomoni. Sed ΦΧΨ gnomon ipsi Γ æqualis est; et ΑΞ igitur ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figurâ parallelogrammâ ΠΟ simili existenti ipsi Δ, quoniam et ipsi ΕΛ est simile ΟΠ. Quod oportebat facere.

ΗΘ est égal à ΜΝ, le parallélogramme ΜΝ est égal aux figures ΕΛ, Γ. Retrançons le parallélogramme commun ΕΛ; le gnomon restant ΨΧΦ sera égal à Γ. Et puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, le parallélogramme ΑΝ est égal au parallélogramme ΝΒ (36. 1), c'est-à-dire au parallélogramme ΛΟ (43. 1). Ajoutons le parallélogramme commun ΕΞ, le parallélogramme entier ΑΞ sera égal au gnomon entier ΦΧΨ. Mais le gnomon ΦΧΨ est égal à Γ; donc le parallélogramme ΑΞ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite donnée ΑΒ un parallélogramme ΑΞ qui est égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui est excédent d'un parallélogramme ΠΟ semblable au parallélogramme Δ, parce le parallélogramme ΕΛ est semblable au parallélogramme ΟΠ. Ce qu'il fallait faire.



αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EA οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB. Ἰσὴ δὲ ἡ μὲν ZE τῇ AG, τουτέστι τε AB<sup>2</sup>, ἡ δὲ EA τῇ AE· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB. Μείζων δὲ ἡ AB τῆς AE· μείζων ἄρα καὶ ἡ AE τῆς EB.

Ἡ ἄρα AB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τίμηται κατὰ τὸ E, καὶ τὸ<sup>3</sup> μείζον αὐτῆς τμήμα ἴστί τὸ AE. Ὅπρι εἶδε ποιῆσαι.

sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ZE ad EA ita AE ad EB. Æqualis autem ipsa quidem ZE ipsi AG, hoc est ipsi AB, ipsa vero EA ipsi AE; est igitur ut BA ad AE ita AE ad EB. Major autem AB ipsa AE; major igitur et AE ipsa EB.

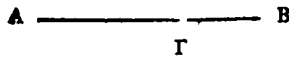
Ipsa igitur AB recta secundum extremam et mediam rationem secta est in E, et majus ejus segmentum est AE. Quod oportebat facere.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὲ τὴν AB<sup>4</sup> ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμήσιν.

ALITER.

Sit data recta AB; oportet igitur AB secundum extremam et mediam rationem secare.



Τετμήσθω γὰρ ἡ AB κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ

Secetur enim AB in Γ, ita ut ipsum sub AB, BΓ æquale sit ipsi ex ipsa AG quadrato.

Et quoniam ipsum sub AB, BΓ æquale est ipsi ex ΓΑ; est igitur ut AB ad AG ita AG ad BΓ;

autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ZE est à EA comme AE est à EB. Mais ZE est égal à AG (34. 1), c'est-à-dire à AB, et EA est égal à AE; donc BA est à AE comme AE est à EB. Mais AB est plus grand que AE; donc AE est plus grand que EB.

Donc la droite AB a été coupée au point E en moyenne et extrême raison, et AE est son plus grand segment. Ce qu'il fallait faire.

AUTREMENT.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB en moyenne et extrême raison.

Coupons AB au point Γ, de manière que le rectangle sous AB, BΓ soit égal au carré de AG (11. 2).

Puisque le rectangle sous AB, BΓ est égal au carré de ΓΑ, AB est à AG



# 368 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον  
τίτμνται κατὰ τὸ Γ. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

ipsa igitur AB secundum extremam et mediam  
rationem secia est in Γ. Quod oportebat facere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

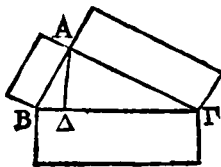
## PROPOSITIO XXXI.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν  
ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον  
ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιχου-  
σῶν πλευρῶν εἶδει, τοῖς ὁμοίοις τε<sup>1</sup> καὶ ὁμοίως  
ἀναγραφόμενοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν  
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς

In rectangulis triangulis, figura ex latere  
rectangulum angulum subtendente æqualis est  
figuris ex lateribus rectum angulum subten-  
dentibus, similibusque et similiter descriptis,

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum  
habens ΒΑΓ angulum; dico figuram ex ΒΓ



ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδει,  
τοῖς ὁμοίοις τε<sup>2</sup> καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἡχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

æqualem esse figuris ex ΒΑ, ΑΓ, similibusque  
et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis ΑΔ.

comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 6); donc la droite ΑΒ a été coupée en moyenne et  
extrême raison au point Γ (déf. 3. 6). Ce qu'il fallait faire.

## PROPOSITION XXXI.

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend  
l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur  
les côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; je dis que la figure  
construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur  
les côtés ΒΑ, ΑΓ.

Menons la perpendiculaire ΑΔ.

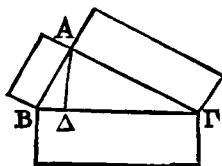
Επειὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα<sup>3</sup> πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὁμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἰση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδεισι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam in recto triangulo ΑΒΓ, ab ipso ad Α recto angulo super ΒΓ basim perpendicularis ducta est ΑΔ; ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur ad perpendicularem triangula similia sunt et toti ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. Et quoniam tres rectæ proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figurâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; ut igitur ΓΒ ad ΒΑ ita ex ipsâ ΓΒ figura ad ipsam ex ΒΑ, similem et similiter descriptam. Propter eadem utique et ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ipsâ ΒΓ figura, ad ipsam ex ΓΑ; quare et ut ΒΓ ad ipsas ΒΔ, ΔΓ ita ex ipsâ ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ, similes et similiter descriptas. Æqualis autem ΒΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ; æquale igitur et ex ipsâ ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

Puisque dans le triangle rectangle ΑΒΓ, on a mené de l'angle droit Α sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ, les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ, autour de la perpendiculaire, sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable, et semblablement construite sur la seconde (2. cor. 20. 6); donc ΓΒ est à ΒΔ comme la figure construite sur ΓΒ est à la figure semblable, et semblablement construite sur ΒΑ. Par la même raison, ΒΓ est à ΓΔ comme la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ; donc ΒΓ est à ΒΔ, ΔΓ comme la figure ΒΓ est aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ (24. 5). Mais la droite ΒΓ est égale aux droites ΒΔ, ΔΓ; donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ. Donc, etc.

## ΑΛΛΩΣ.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶν<sup>5</sup> τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος<sup>6</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος<sup>7</sup> οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ ὁ καὶ ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα.

Quoniam similes figuræ in duplâ ratione sunt homologorum laterum, ipsa ex ΒΓ igitur figura ad ipsam ex ΒΑ figuram duplam rationem habet ejus quam ΓΒ ad ΒΑ. Habet autem et ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum duplam rationem ejus quam ΓΒ ad ΒΑ; et ut igitur ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΒΑ figuram ita ex ΓΒ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum.

Propter eadem utique et ut ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΓΑ figuram ita ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΓΑ quadratum; quare et ut ex ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ figuras ita ex ΒΓ quadratum ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ quadrata. Æquale autem ex ΒΓ quadratum ipsis ex ΒΑ, ΑΓ qua-

## AUTREMENT.

Puisque les figures semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues (23. 6), la figure construite sur BR a avec la figure construite sur BA une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ. Mais le quarré de BR a avec le quarré de ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ (1. cor. 20. 6); donc la figure construite sur ΓΒ est à celle qui est construite sur ΒΑ comme le quarré de ΓΒ est au quarré de ΒΑ (11. 5). Par la même raison, la figure construite sur BR est à la figure construite sur ΓΑ comme le quarré de BR est au quarré de ΓΑ; donc la figure construite sur BR est aux figures construites sur ΒΑ, ΑΓ comme le quarré de BR est aux quarrés des droites ΒΑ,

## LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 371

Ἰσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδεσι, τοῖς<sup>8</sup> ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι<sup>9</sup>.

dratis; æqualis igitur et ex ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

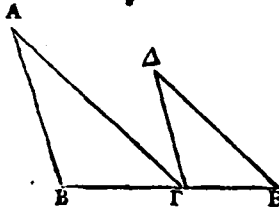
### PROPOSITIO XXXII.

Εὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Si duo triacula componentur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο

Sint duo triacula ΑΒΓ, ΔΓΕ; duo latera



πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὥς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς

ΒΑ, ΑΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔΕ proportionalia habentia, ut ΑΒ quidem ad ΑΓ ita ΔΓ

ΑΓ (24. 5). Mais le carré de ΒΓ est égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΓ (47. 1); donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les droites ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXXII.

Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les côtés restants des triangles seront dans la même direction.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, ayant les deux côtés ΒΑ, ΑΓ proportionnels aux deux côtés ΓΔ, ΔΕ, de manière que ΑΒ soit à ΑΓ comme ΔΓ

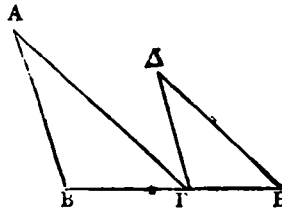
372 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλος δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐν-  
αλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις  
εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ  
᾽στὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν

ad ΔΕ, parallela vero ΑΒ quidem ipsi ΔΓ, ipsa vero ΑΓ ipsi ΔΕ; dico in directum esse ipsam ΒΓ ipsi ΓΕ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΔΓ, et in ipsas incidit recta ΑΓ, et alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΔ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΓΔ est æqualis; quare et ΒΑΓ ipsi ΓΔΕ est æqualis. Et quoniam duo



ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ  
μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς  
τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς  
πλευράς ἀνάλογον, ὥς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕ-  
τως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ  
ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ  
ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ  
ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ

triangula sunt ΑΒΓ, ΔΓΕ unum angulum ad Α uni angulo ad Δ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΓΕ triangulo; æqualis igitur ΑΒΓ angulus ipsi ΔΓΕ. Ostensus autem est et ΑΓΔ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ æqualis est. Communis

est à ΔΕ; et que ΑΒ soit parallèle à ΔΓ, et ΑΓ parallèle à ΔΕ; je dis que ΒΓ est dans la direction de ΓΕ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΔΓ, et que ΑΓ tombe sur ces deux droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΔ sont égaux entr'eux (29. 1.). Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΓΔ; donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΕ. Et puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ ont un angle en Α égal à un angle en Δ, et que les côtés qui comprennent ces angles égaux sont proportionnels, c'est-à-dire que ΒΑ est à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ, les triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΓΕ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle entier ΑΓΕ est égal aux deux

## LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 373

ταῖς ὑπὸ  $AB\Gamma$ ,  $BA\Gamma$  ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείμεθα ἢ ὑπὸ  $AGB$ · αἱ ἄρα ὑπὸ  $AGE$ ,  $AGB$  ταῖς ὑπὸ  $BA\Gamma$ ,  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ  $BA\Gamma$ ,  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν<sup>3</sup>· καὶ αἱ ὑπὸ  $AGE$ ,  $AGB$  ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ  $AG$ , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ  $\Gamma$ , δύο εὐθεῖαι αἱ  $B\Gamma$ ,  $GE$ , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ  $AGE$ ,  $AGB$  δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ  $B\Gamma$  τῇ  $GE$ . Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

opponatur  $AGB$ ; ipsi igitur  $AGE$ ,  $AGB$  ipsis  $BA\Gamma$ ,  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  æquales sunt. Sed ipsi  $BA\Gamma$ ,  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  duobus rectis æquales sunt; et ipsi  $AGE$ ,  $AGB$  igitur duobus rectis æquales sunt. Ad quamdam utique rectam  $AG$ , et ad punctum in eâ  $\Gamma$ , duæ rectæ  $B\Gamma$ ,  $GE$ , non ad easdem partes positæ, ipsos deinceps angulos  $AGE$ ,  $AGB$  duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est  $B\Gamma$  ipsi  $GE$ . Si igitur duo, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥς βεβηκῦνται· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Εστώσαν ἴσοι κύκλοι οἱ  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , καὶ πρὸς

### PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis anguli eamdem rationem habent quàm circumferentiæ in quas insistent, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes; adhuc etiam et sectores quippe ad centra constituti.

Sint æquales circuli  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ , et ad centra

angles  $AB\Gamma$ ,  $BA\Gamma$ . Ajoutons l'angle commun  $AGB$ ; les angles  $AGE$ ,  $AGB$  seront égaux aux angles  $BA\Gamma$ ,  $AB\Gamma$ ,  $AGB$ . Mais les angles  $BA\Gamma$ ,  $AB\Gamma$ ,  $AGB$  sont égaux à deux angles droits (32. 1); donc les angles  $AGE$ ,  $AGB$  sont égaux à deux angles droits. Donc avec une droite quelconque  $AG$ , et au point  $\Gamma$  de cette droite, les deux droites  $B\Gamma$ ,  $GE$ , placées de différents côtés, font les angles de suite  $AGE$ ,  $AGB$  égaux à deux angles droits; donc la droite  $B\Gamma$  est dans la direction de  $GE$  (14. 1). Donc, etc.

### PROPOSITION XXXIII.

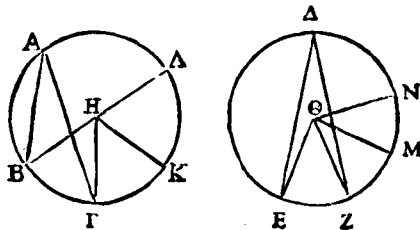
Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

Soient les cercles égaux  $AB\Gamma$ ,  $\Delta EZ$ ; que les angles  $BHG$ ,  $E\Theta Z$  soient placés à

374 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς  $H, \Theta$  γωνίαι ἴστανται αἱ ὑπὸ  $BHG, E\Theta Z$ , πρὸς δὲ ταῖς περιφερίαις αἱ ὑπὸ  $BAG, EAZ$ . λέγω ὅτι ἴστί· ὡς ἡ  $B\Gamma$  περιφέρεια πρὸς τὴν  $EZ$  περιφέρειαν οὕτως ἦτι ὑπὸ  $BHG$  γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ  $E\Theta Z$ , καὶ ἡ ὑπὸ  $BAG$  πρὸς τὴν ὑπὸ  $EAZ$ . καὶ ἔτι ὁ  $HBG$  τομὴς πρὸς τὸν  $\Theta EZ$  τομὴα<sup>2</sup>.

quidem ipsorum  $H, \Theta$  anguli sint  $BHG, E\Theta Z$ , ad circumferentias vero ipsi  $BAG, EAZ$ ; dico esse ut  $B\Gamma$  circumferentia ad  $EZ$  circumferentiam ita  $BHG$  angulum ad  $E\Theta Z$ , et ipsum  $BAG$  ad  $EAZ$ ; et adhuc  $HBG$  sectorem ad  $\Theta EZ$  sectorem.



Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν  $B\Gamma$  περιφέρειᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαιδηποτοῦν<sup>3</sup> αἱ  $\Gamma K, \Lambda A$ , τῇ δὲ  $EZ$  περιφέρειᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν<sup>4</sup> αἱ  $ZM, MN$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $HK, HA, \Theta M, \Theta N$ .

Επεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ  $B\Gamma, \Gamma K, \Lambda A$  περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ  $BHG, \Gamma HK, KHA$  γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίον ἄρα ἴστί· ἡ  $BA$  περιφέρεια τῇ  $B\Gamma$ , τοσαυταπλασίον ἴστί καὶ ἡ ὑπὸ  $BHA$  γωνία τῇ ὑπὸ  $BHG$ . Διὰ τὰ

Ponantur enim ipsi  $B\Gamma$  quidem circumferentiæ æquales deinceps quotcumque  $\Gamma K, \Lambda A$ , ipsi vero  $EZ$  circumferentiæ æquales quotcumque  $ZM, MN$ , et jungantur  $HK, HA, \Theta M, \Theta N$ .

Et quoniam igitur æquales sunt  $B\Gamma, \Gamma K, \Lambda A$  circumferentiæ inter se, æquales sunt et  $BHG, \Gamma HK, KHA$  anguli inter se. Quam multiplex igitur est  $BA$  circumferentia ipsius  $B\Gamma$ , tam multiplex et est  $BHA$  angulus ipsius  $BHG$ . Propter

leurs centres  $H, \Theta$ , et que les angles  $BAG, EAZ$  soient placés à leurs circonférences; je dis que l'arc  $B\Gamma$  est à l'arc  $EZ$  comme l'angle  $BHG$  est à l'angle  $E\Theta Z$ , comme l'angle  $BAG$  est à l'angle  $EAZ$ , et comme le secteur  $HBG$  est au secteur  $\Theta EZ$ .

Faisons tant d'arcs de suite  $\Gamma K, \Lambda A$ , qu'on voudra égaux chacun à l'arc  $B\Gamma$ , et tant d'arcs qu'on voudra  $ZM, MN$ , égaux chacun à l'arc  $EZ$ , et joignons  $HK, HA, \Theta M, \Theta N$ .

Puisque les arcs  $B\Gamma, \Gamma K, \Lambda A$  sont égaux entr'eux, les angles  $BHG, \Gamma HK, KHA$  sont aussi égaux entr'eux (27. 3); donc l'angle  $BHA$  est le même multiple de  $BHG$ , que l'arc  $BA$  l'est de l'arc  $B\Gamma$ . Par la même raison, l'angle  $E\Theta N$  est

αὐτὰ δὲ καὶ ὁσαυπλάσιον ἴσθιν ἡ EN περιφέρεια τῆς EZ, τοσαυπλάσιον ἴσθι καὶ ἡ ὑπὸ EON γωνία τῆς ὑπὸ EØZ. Εἰ ἄρα ἴση ἴσθιν ἡ BA περιφέρεια τῇ EN περιφέρειᾳ, ἴση ἴσθι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BHA τῇ ὑπὸ EON· καὶ εἰ μείζων ἴσθιν ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, μείζων ἴσθι καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῆς ὑπὸ EON γωνίας<sup>6</sup>· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τισσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν BΓ, EZ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ BHΓ, EØZ, εἴληπται τῆς μὲν BΓ περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ BHΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἢ τε BA περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία, τῆς δὲ EZ περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ EØZ γωνίας, ἢ τε EN περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ EON γωνία· καὶ διδκται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῆς ὑπὸ EON· καὶ εἰ ἴση, ἴση καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἴσθιν ἄρα ὡς BΓ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EØZ. Αλλ' ὡς ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EØZ οὕτως ἡ ὑπὸ BΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ EΔZ, διπλα-

eadem utique et quam multiplex est EN circumferentia ipsius EZ, tam multiplex est et EON angulus ipsius EØZ. Si igitur æqualis est BA circumferentia ipsi EN circumferentiæ, æqualis est et angulus BHA ipsi EON; et si major est BA circumferentia ipsâ EN circumferentiâ, major est et BHA angulus ipso EON angulo; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BΓ, EZ, duobus vero angulis BHΓ, EØZ, sumpta sunt ipsius quidem BΓ circumferentiæ, et ipsius BHΓ anguli æque multiplicia, et BA circumferentia et BHA angulus, ipsius vero EZ circumferentiæ et ipsius EØZ anguli, et EN circumferentia et EON angulus; et ostensum est si superat BA circumferentia ipsam EN circumferentiam, superare et BHA angulum ipsum EON; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; est igitur ut BΓ circumferentia ad ipsam EZ ita BHΓ angulus ad ipsum EØZ. Sed ut BHΓ angulus ad ipsum EØZ ita ipse BΑΓ ad ipsum EΔZ; duplus

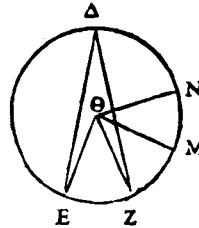
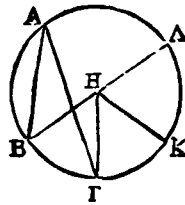
le même multiple de EØZ, que l'arc EN l'est de l'arc EZ. Donc si l'arc BA est égal à l'arc EN, l'angle BHA est égal à l'angle EON (27. 3); si l'arc BA est plus grand que l'arc EN, l'angle BHA est plus grand que l'angle EON; et si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, l'angle BHA est plus petit que l'angle EON. Ayant donc quatre grandeurs, deux arcs BΓ, EZ, et deux angles BHΓ, EHZ, on a pris des équimultiples de l'arc BΓ et de l'angle BHΓ, savoir, l'arc BA et l'angle BHA; on a pris aussi des équimultiples de l'arc EZ et de l'angle EØZ, savoir, l'arc EN et l'angle EON; et l'on a démontré que si l'arc BA surpasse l'arc EN, l'angle BHA surpasse l'angle EON; que si l'arc BA est égal à l'arc EN, l'angle BHA est égal à l'angle EON; que l'arc BA est plus petit que l'arc EN, l'angle BHA est plus petit que l'angle EON; donc l'arc BΓ est à l'arc EZ comme l'angle BHΓ est à l'angle EØZ (déf. 6. 5). Mais l'angle BHΓ est à l'angle EØZ comme l'angle BΑΓ est à l'angle EΔZ (15. 5), car ils sont



376 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σίαν γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἦτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

enim uterque utriusque; et ut igitur ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita et ΒΗΓ angulus ad ipsum ΕΘΖ, et ipse ΒΑΓ ad ipsum ΕΔΖ.



Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερίαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τι πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τι πρὸς ταῖς περιφερίαις ὥς τι βεβηκυῖαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

In æqualibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ in quas insistent; sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes. Quod oportebat ostendere.

Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Dico et ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.

Επιζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπιζεύχωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ,

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, et sumptis in ΒΓ, ΓΚ circumferentiis punctis Ξ, Ο, jungantur et ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ,

Et quoniam duo ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ

doubles les uns des autres (2 o. 3); donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, et comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ.

Donc, dans des cercles égaux, les angles sont proportionnels aux arcs, soit que ces angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences. Ce qu'il fallait démontrer.

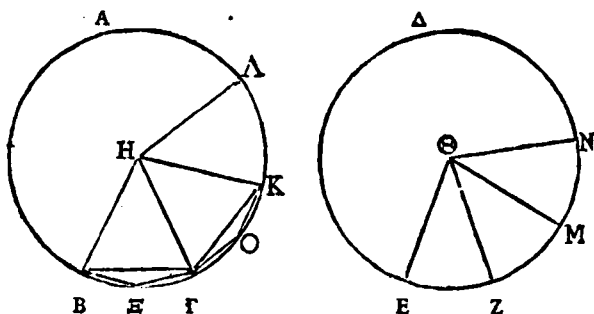
Je dis de plus que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

Joignons ΒΓ, ΓΚ, et ayant pris sur les arcs ΒΓ, ΓΚ, les points Ξ, Ο, joignons ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Puisque les deux droites ΒΗ, ΗΓ sont égales aux deux droites ΓΗ, ΗΚ,

ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ  
βάσεις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἴσταιν ἴση· ἴσον ἄρα ἴσταιν<sup>9</sup>  
καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ  
ἐπεὶ ἴση ἴσταιν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφε-  
ρείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον πε-  
ριφέρεια ἴση ἴσταιν τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον  
κύκλον περιφέρειᾳ<sup>10</sup>. ὅττι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΓ<sup>11</sup>

æquales sunt, et angulos æquales comprehen-  
dunt, et basis ΒΓ ipsi ΓΚ est æqualis; æquale  
igitur est et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ trian-  
gulo. Et quoniam æqualis est ΒΓ circumfe-  
rentia ipsi ΓΚ circumferentiæ, et reliqua  
totius circuli circumferentia æqualis est reli-  
quæ totius circuli circumferentiæ; quare et



τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἴσταιν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἴσταιν τὸ  
ΒΗΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καὶ εἰσιν ἐπὶ  
ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐ-  
θειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις  
ἴσταιν· ἴσον ἄρα ἴσταιν τὸ ΒΗΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ  
τμήματι. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ  
ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς

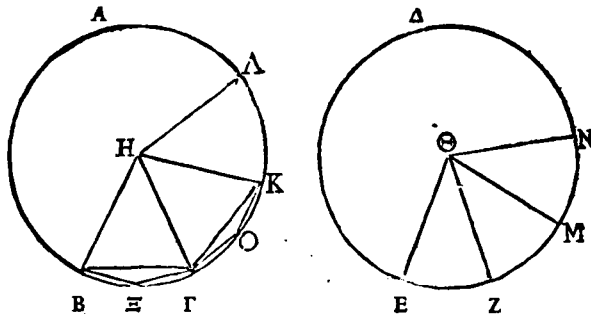
angulus ΒΗΓ angulo ΓΟΚ est æqualis; simile  
igitur est ΒΗΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento;  
et sunt super æquales rectas ΒΓ, ΓΚ. Sed  
super æquales rectas similia segmenta circu-  
lorum æqualia inter se sunt; æquale igitur est  
ΒΗΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento. Est autem  
et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ triangulo æquale;

et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΒΓ est égale à la base  
ΓΚ; donc le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ (4. 1). Mais l'arc ΒΓ  
est égal à l'arc ΓΚ; donc le reste de la circonférence du cercle entier  
est égal au reste de la circonférence du cercle entier (ax. 3); donc l'angle  
ΒΗΓ est égal à l'angle ΓΟΚ (27. 3); donc le segment ΒΗΓ est semblable au  
segment ΓΟΚ (déf. 11. 3), et ces deux segments sont sur les droites égales ΒΓ,  
ΓΚ. Mais les segments de cercles semblables placés sur des droites égales, sont  
égaux entr'eux (24. 3); donc le segment ΒΗΓ est égal au segment ΓΟΚ. Mais  
le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ; donc le secteur entier ΗΒΓ est égal

### 378 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴλῳ τῷ ΓΚ τομῆϊ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΑ τομὴς ἑκατέρῳ τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομῆς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν<sup>12</sup>. ὅσαυταπλασίῳ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίῳ

et totus igitur ΗΒΓ sector toti ΗΓΚ sectori æqualis est. Propter eadem utique et ΗΚΑ sector utrique ipsorum ΗΚΓ, ΗΓΒ æqualis est; tres igitur sectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sectores æquales inter se sunt; quam multiplex igitur est ΒΑ circumferentia



ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομὴς τοῦ ΗΒΓ τομῆος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαυταπλασίῳ ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίῳ ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομὴς τοῦ ΘΕΖ τομῆος. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ<sup>13</sup>, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομὴς τῷ ΘΕΝ τομῆϊ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια

ipsius ΒΓ circumferentiæ, tam multiplex est et ΗΒΑ sector ipsius ΗΒΓ sectoris. Propter eadem utique et quam multiplex est ΕΝ circumferentia ipsius ΕΖ circumferentiæ, tam multiplex est et ΘΕΝ sector ipsius ΘΕΖ sectoris; si igitur æqualis est ΒΑ circumferentia ipsi ΕΝ circumferentiæ, æqualis est et ΗΒΑ sector ipsi

au secteur entier ΓΗΚ (ax. 2). Par la même raison, le secteur ΗΚΑ est égal à l'un et l'autre des secteurs ΗΚΓ, ΗΓΒ; donc les trois secteurs ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ sont égaux entr'eux. Les secteurs ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sont égaux entr'eux, par la même raison; donc le secteur ΗΒΑ est le même multiple du secteur ΗΒΓ que l'arc ΒΑ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, le secteur ΘΕΝ est le même multiple du secteur ΘΕΖ que l'arc ΕΝ l'est de l'arc ΕΖ. Donc si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ; si l'arc ΒΑ surpasse l'arc

τῆς ΕΝ περιφέρειας, ὑπερίχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομὺς τοῦ ΘΕΝ τομῆως· καὶ εἰ ἑλλείπει, ἑλλείπει<sup>14</sup>. Τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομῶν, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφέρειας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομῆως, ἥτε ΒΑ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΑ τομὺς, τῆς δὲ ΕΖ περιφέρειας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομῆως ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομὺς. Καὶ δίδικται ὅτι εἰ ὑπερίχει ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφέρειας, ὑπερίχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομὺς τοῦ ΘΕΝ τομῆως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἑλλείπει, ἑλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομῆα.

ΘΕΝ sectori ; et si superat ΒΑ circumferentia ipsam ΕΝ circumferentiam, superat et ΗΒΑ sector ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem ΒΓ, ΕΖ circumferentiis, duobus vero ΗΒΓ, ΘΕΖ sectoribus, sumpta sunt æque multiplicia ipsius ΒΓ quidem circumferentiæ et ipsius ΗΒΓ sectoris, ipsa et ΒΑ circumferentia et ΗΒΑ sector, ipsius vero ΕΖ circumferentiæ et ipsius ΘΕΖ sectoris æque multiplicia, ipsa et ΕΝ circumferentia et ipse ΘΕΝ sector. Et ostensum est si superat ΒΑ circumferentia ipsam ΕΝ circumferentiam, superare et ΗΒΑ sectorem ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si æqualis, æqualem ; et si deficit, deficere ; est igitur ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ ita ΗΒΓ sector ad ΘΕΖ sectorem.

ΕΝ, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, et si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux arcs ΒΓ, ΕΖ, et les deux secteurs ΗΒΓ, ΘΕΖ, on a pris des équimultiples de l'arc ΒΓ et du secteur ΗΒΓ, savoir, l'arc ΒΑ et le secteur ΗΒΑ ; on a pris aussi des équimultiples de l'arc ΕΖ et du secteur ΘΕΖ, savoir, l'arc ΕΝ et le secteur ΘΕΝ. Et on a démontré que si l'arc ΒΑ surpasse l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, que si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ, et que si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ ; donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ (déf. 6. 5).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Καὶ δῆλον ὅτε καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν το-  
μῆα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Et manifestum est et ut sector ad sectorem ita  
et angulum ad angulum.

COROLLAIRE.

Il est évident que le secteur est au secteur comme l'angle est à l'angle  
(11. 5).

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R S E P T I M U S .

---

#### ΟΡΟΙ.

#### DEFINITIONES.

α. Μονάς ἐστὶ, καθ' ἣν ἑκάστων τῶν ὄντων  
ὡς λέγεται.

β. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον  
πλῆθος.

γ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἐλάσσω  
τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρήῃ τὸν μείζονα.

1. Unitas est secundum quam unumquodque  
existentium unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus composita  
multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris,  
quando metitur majorem.

## LIVRE SEPTIEME

# DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.
3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

## 382 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρήῃ.

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττω-  
νος, ὅταν καταμετρήται ὑπὸ τοῦ ἐλάττωτος.

ς'. Ἀρτίος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρού-  
μινος.

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμινος δίχα· ἢ  
ὁ<sup>2</sup> μονάδι διαφέρειν ἀρτίου ἀριθμοῦ.

η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ  
ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθ-  
μόν.

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός<sup>3</sup> ἐστιν, ὁ  
ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν  
ἀριθμόν.

ι'. Περισσάκις δὲ ἀρτίος ἐστιν, ὁ ὑπὸ περισ-  
σοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν<sup>4</sup>.

ια'. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν<sup>5</sup>, ὁ  
ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν  
ἀριθμόν.

ιβ'. Πρῶτως ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ  
μετρούμενος.

4. Parties autem, quando non metitur.

5. Multiplex autem, major minoris, quando  
mensuratur a minore.

6. Par autem numerus est ipse bifariam di-  
visus.

7. Impar vero, ipse non divisus bifariam;  
vel ipse unitate differens a pari numero.

8. Pariter par numerus est, ipse a pari nu-  
mero mensuratus per parem numerum.

9. Pariter autem impar numerus est, ipse a  
pari numero mensuratus per imparem nume-  
rum.

10. Impariter vero par est, ipse ab impari  
numero mensuratus per parem numerum.

11. Impariter vero impar numerus est, ipse  
ab impari numero mensuratus per imparem  
numerum.

12. Primus numerus est, ipse ab unitate  
solâ mensuratus.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.

5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand  
il est mesuré par le plus petit.

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.

7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties  
égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

8. Le nombre parement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair  
multiplié par un nombre pair.

9. Le nombre parement impair est celui qui est mesuré par un nombre  
pair multiplié par un nombre impair.

10. Le nombre impairement pair est celui qui est mesuré par un nombre  
impair, multiplié par un nombre pair.

11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre  
impair multiplié par un nombre impair.

12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

ιγ'. Πρῶτοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ μονάδι μὴν μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιδ'. Σύνθετος ἀριθμὸς ἐστίν, ὁ ἀριθμὸς τινι μετρούμενος.

ιε'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ισ'. Αριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι<sup>7</sup> εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις<sup>8</sup> συντιθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηται τις.

ιζ'. Οταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιη'. Οταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος στερεὸς καλεῖται<sup>9</sup>· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

13. Primi autem inter se numeri sunt, ipsi ab unitate solâ mensurati communi mensurâ.

14. Compositus numerus est, ipse a numero aliquo mensuratus.

15. Compositi vero inter se numeri sunt, ipsi a numero aliquo mensurati communi mensurâ.

16. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in eo unitates toties additur multiplicatus, et gignitur aliquis.

17. Quando autem duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus planus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

18. Quando autem tres numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus solidus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.



## 384 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ιβ'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστὶν ὁ ἰσάκεις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κ'. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκεις ἴσος ἰσάκεις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων<sup>11</sup> περιεχόμενος.

κα'. Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖσιν.

κβ'. Ομοιοὶ ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγ'. Τέλεις ἀριθμός ἐστὶν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρισιν ἴσος ᾧν.

19. Quadratus numerus est ipse æqualiter æqualis, vel ipse sub duobus æqualibus numeris contentus.

20. Cubus autem, ipse æqualiter æqualis æqualiter; vel ipse sub tribus numeris æqualibus contentus.

21. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi et tertius quarti æque est multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes sunt.

22. Similes plani et solidi numeri sunt, ipsi proportionalia habentes latera.

23. Perfectus numerus est, ipse suis ipsius partibus æqualis existens.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

### PROPOSITIO I.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀφαιρουμένου δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,

Duobus numeris inæqualibus expositis, deducto autem semper minore de majore, si

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

### PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché

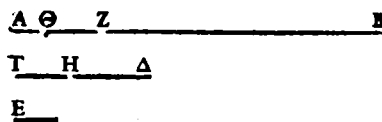
# LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 385

ἐάν· ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρήῃ τὸν πρὸς αὐτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἑξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀνίσων<sup>2</sup> ἀριθμῶν τῶν AB, ΓΔ ἀνθυ-  
φαιρουμένου αὐτὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,  
ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸς  
αὐτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ AB,  
ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τουτίστιν, ὅτι  
ταὺς AB, ΓΔ μονάς μόνη μετρεῖ<sup>3</sup>.

relictus nunquam metiatur ipsum præ se ipso  
quoad assumpta fuerit unitas; a principio nu-  
meri primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris AB,  
ΓΔ detracto semper minore de majore, re-  
lictus nunquam metiatur eum præ se ipso  
quoad assumpta fuerit unitas; dico ipsos AB,  
ΓΔ primos inter se esse, hoc est, ipsos AB,  
ΓΔ unitate solâ mensurari.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλ-  
λήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖται,  
καὶ ἔστω ὁ E, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν AB μετρῶν  
λειπέτω αὐτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΖΑ τὸν  
ΔΓ μετρῶν λειπέτω αὐτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ,  
ὁ δὲ ΗΓ, τὸν ΖΑ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν  
ΘΑ.

Ἐπὶ οὖν ὁ E τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν  
ΖΒ μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα τὸν ΖΒ μετρεῖ. Μετρεῖ

Si enim non sunt AB, ΓΔ primi inter se,  
metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et  
sit E, et ΓΔ quidem ipsum AB metiens re-  
linquat se ipso minorem ΖΑ, ipse vero ΖΑ  
ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem  
ΗΓ, ipse ΗΓ autem ipsum ΖΑ metiens relin-  
quat unitatem ΘΑ.

Quoniam et E ipsum ΓΔ metitur, ipse autem  
ΓΔ ipsum ΖΒ metitur; et ipse igitur E ipsum ΖΒ

du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on  
a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

Soient les deux nombres inégaux AB, ΓΔ; que le plus petit étant toujours  
retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant  
lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres AB, ΓΔ sont  
premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

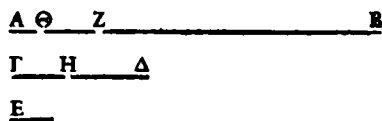
Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre  
les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ  
mesurant AB laisse ΖΑ plus petit que lui-même; que ΖΑ mesurant ΔΓ laisse  
ΗΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin ΗΓ mesurant ΖΑ laisse l'unité ΘΑ.

Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ΖΒ, le nombre E mesure ΖΓ. Mais

# 386 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὲ καὶ ὅλον τὸν AB· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ  
μετρήσει<sup>4</sup>. Ὁ δὲ AZ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα  
τὸν ΔΗ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ·  
καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει<sup>5</sup>. Ὁ δὲ ΓΗ τὸν  
ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει<sup>6</sup>. Με-

metitur. Metitur autem et totum AB; et reli-  
quum igitur AZ metietur. Ipse autem AZ ip-  
sum ΔΗ metitur; et Ε igitur ipsum ΔΗ metietur.  
Metitur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur  
ΓΗ metietur. Ipse autem ΓΗ ipsum ΖΘ metitur;



τρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν  
ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἐστὶν  
ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς με-  
τρήσει τις ἀριθμὸς· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς  
ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.

et Ε igitur ipsum ΖΘ metietur. Metitur autem  
et totum ΖΑ; et reliquam igitur ΑΘ unitatem  
metietur, numerus existens, quod est impossi-  
bile; non igitur AB, ΓΔ numeros metietur  
aliquis numerus; ipsi AB, ΓΔ igitur primi  
inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

## PROPOSITIO II.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλή-  
λους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duobus numeris datis non primis inter se,  
maximam eorum communem mensuram in-  
venire.

il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔΗ; donc Ε mesurera ΔΗ. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓΗ. Mais ΓΗ mesure ΖΘ; donc Ε mesurera ΖΘ. Mais il mesure ΖΑ tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante ΑΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

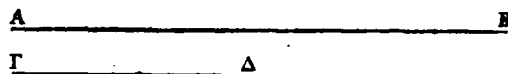
## PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

# LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 387

Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἴστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ<sup>1</sup>. διὸ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρίν.

Sint dati duo numeri non primi inter se ΑΒ, ΓΔ, et sit minor ΓΔ; oportet igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

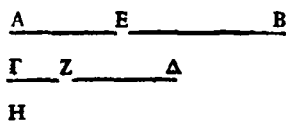


Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρίῃ, μετρίῃ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ<sup>2</sup> κοινὸν μέτρον ἴστω. Καὶ φανερόν ἐστι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Si ΓΔ quidem ipsum ΑΒ metitur, metitur vero et se ipsum; ipse ΓΔ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Et manifestum est et maximam; nullus enim major ipso ΓΔ ipsum ΓΔ metietur.

Εἰ δὲ οὐ μετρίῃ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἐλάττωτος ἀπὸ τοῦ μείζοντος, ληφθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει

Si autem non metitur ΓΔ ipsum ΑΒ, ipsorum ΑΒ, ΓΔ detracto semper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui me-



τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Μονὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται. Εἰ δὲ μὴ, ἴσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ληφθήσεται ἄρα τις

tietur eum præ se ipso. Unitas quidem non enim relinquetur. Si autem non, erunt ΑΒ, ΓΔ primi inter se, quod non ponitur; relin-

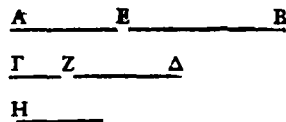
Soient donnés les deux nombres ΑΒ, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ.

Si ΓΔ mesure ΑΒ, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, ΑΒ, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas ΑΒ, et si on retranche toujours le plus petit des nombres ΑΒ, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres ΑΒ, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

ἀριθμὸς, ἧς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λιπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λιπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΕΑ μετρεῖται. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. Ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ

quetur igitur aliquis numerus, qui metietur eum præ se ipso. Et ipse quidem ΓΔ ipsum ΑΒ metiens relinquat se ipso minorem ΕΑ, ipse vero ΕΑ ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΖΓ, ipse autem ΓΖ ipsum ΕΑ metiatur. Et quoniam ΓΖ ipsum ΑΕ metitur, ipse autem ΑΕ ipsum ΔΖ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΔΖ metietur. Metitur autem et se ipsum; et totum igitur ΓΔ metietur. Ipse



μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἵπαι ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρήσει<sup>3</sup>. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν

autem ΓΔ ipsum ΒΕ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΒΕ metitur. Metitur autem et ipsum ΕΑ; et totum igitur ΒΑ metietur. Metitur autem et ipsum ΓΔ; ipse ΓΖ igitur ipsos ΑΒ, ΓΔ metitur; ΓΖ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Dico utique et maximam. Si enim non est ΓΖ ipsorum ΑΒ, ΓΔ maxima communis mensura, metietur aliquis ΑΒ, ΓΔ numeros numerus major existens ipso ΓΖ. Me-

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant ΑΒ laisse ΕΑ plus petit que lui-même; que ΕΑ mesurant ΔΓ laisse ΖΓ plus petit que lui-même; et enfin que ΓΖ mesure ΕΑ. Puisque ΓΖ mesure ΑΕ, et que ΑΕ mesure ΔΖ, le nombre ΓΖ mesurera ΔΖ. Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure ΒΕ; donc ΓΖ mesure ΒΕ. Mais il mesure ΕΑ; donc il mesurera ΒΑ tout entier. Mais il mesure ΓΔ; donc ΓΖ mesure ΑΒ et ΓΔ; donc ΓΖ est une commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓΖ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓΖ mesurera les nombres ΑΒ, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit Η. Puisque Η mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ΒΕ, le nombre Η mesurera ΒΕ. Mais il mesure ΒΑ tout entier; donc il mesurera le reste

BA· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει. Ο δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάττωτα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμούς ἀριθμὸς τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ΓZ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tiatur, et sit H. Et quoniam H ipsum ΓΔ metitur, ipse vero ΓΔ ipsum BE metitur; et ipse H igitur ipsum BE metietur. Metitur autem et totum BA; et reliquum igitur ipsum AE metietur. Ipse autem AE ipsum ΔZ metitur; et H igitur ipsum ΔZ metitur. Metitur autem et totum ΔΓ; et reliquum igitur ΓZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros numerus aliquis metietur, major existens ipso ΓZ; ipse ΓZ igitur ipsum AB, ΓΔ maxima est communis mensura. Quod oportebat ostendere.

### Η ΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰς ἀριθμὸς δύο ἀριθμούς μετρεῖ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει<sup>4</sup>.

### COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

AE. Mais AE mesure ΔZ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

### COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là, que si un nombre en mesure deux autres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

## PROPOSITIO III.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ  $A, B, \Gamma$ . δεῖ δὴ τῶν  $A, B, \Gamma$  τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se  $A, B, \Gamma$ ; oportet igitur ipsorum  $A, B, \Gamma$  maximam communem mensuram invenire.

$A$  \_\_\_\_\_  
 $B$  \_\_\_\_\_  
 $\Gamma$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta$  \_\_\_\_\_  
 $E$  \_\_\_\_\_

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν  $A, B$  τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον  $\Delta$ . ὁ δὲ  $\Delta$  τὸν  $\Gamma$  ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς  $A, B$ . ὁ  $\Delta$  ἄρα τοὺς  $A, B, \Gamma$  μετρεῖ. ὁ  $\Delta$  ἄρα τῶν  $A, B, \Gamma$  κοινὸν μέτρον ἐστίν. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ  $\Delta$  τῶν  $A, B, \Gamma$  μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τοὺς  $A, B, \Gamma$  ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ  $\Delta$ . Με-

Sumatur enim duorum  $A, B$  maxima communis mensura  $\Delta$ ; ipse utique  $\Delta$  ipsum  $\Gamma$  vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum, metitur autem et ipsos  $A, B$ ; ipse  $\Delta$  igitur ipsos  $A, B, \Gamma$  metitur; ipse  $\Delta$  igitur ipsorum  $A, B, \Gamma$  communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non est  $\Delta$  ipsorum  $A, B, \Gamma$  maxima communis mensura, metietur  $A,$

## PROPOSITION III.

Trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les trois nombres  $A, B, \Gamma$  non premiers entr'eux; il faut trouver leur plus grande commune mesure.

Prenons la plus grande commune mesure  $\Delta$  des deux nombres  $A, B$ ; le nombre  $\Delta$  mesure, ou ne mesure pas le nombre  $\Gamma$ . Premièrement, qu'il le mesure; mais il mesure aussi les nombres  $A, B$ ; donc il mesure les nombres  $A, B, \Gamma$ ; donc  $\Delta$  est une commune mesure des nombres  $A, B, \Gamma$ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si  $\Delta$  n'est pas la plus grande commune mesure des nombres  $A, B, \Gamma$ , un nombre plus grand que  $\Delta$  mesurera les nombres  $A, B, \Gamma$ .

τρεῖς, καὶ ἴστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει<sup>2</sup>, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἴσθιν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μετρήσει μείζων τοῦ Δ<sup>3</sup>. ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρεῖται δὲ ὁ Δ τὸν Γ· λόγῳ πρώτων, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς· ὁ δὲ τοὺς Α, Β, Γ με-

Β, Γ numeros numerus major existens ipso Δ. Metiatur, et sit E. Et quoniam E ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β igitur metietur, et ipsorum igitur Α, Β maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis mensura est Δ; ipse igitur E ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numeros numerus aliquis metietur major ipso Δ; ipse Δ igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Non metiatur autem Δ ipsum Γ; dico primum numeros Δ, Γ non esse primos inter se. Quoniam enim Α, Β, Γ non sunt primi inter se, metietur aliquis eos numerus; qui autem

A  
B  
Γ  
Δ  
Ε  
Ζ

τρῶν, καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμὸς τις μετρη-

ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β metietur, et ipsorum Α, Β maximam mensuram Δ metietur. Metitur autem et ipsum Γ; ipsos Δ, Γ igitur

Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit E. Puisque E mesure les nombres Α, Β, Γ, il mesurera les nombres Α, Β, et par conséquent leur plus grande commune mesure (cor. 2. 7). Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β; donc E mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Δ ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

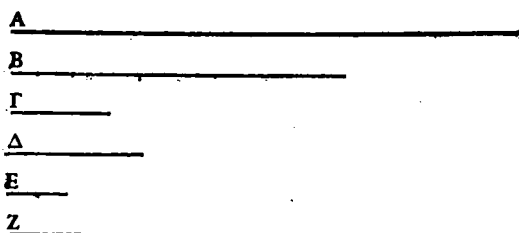
Que Δ ne mesure pas Γ; je dis premièrement que les nombres Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Car puisque les nombres Α, Β, Γ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, et celui qui mesure les nombres Α, Β, Γ, mesurera les nombres Α, Β, et mesurera aussi leur plus grande commune mesure Δ (cor. 2. 7). Mais il mesure aussi Γ; donc quelque nombre mesurera



### 392 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σει· οἱ  $\Delta$ ,  $\Gamma$  ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὃ  $E$ . Καὶ ἐπεὶ ὃ  $E$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ, ὃ δὲ  $\Delta$  τοὺς  $A$ ,  $B$  μετρεῖ καὶ ὃ  $E$  ἄρα τοὺς  $A$ ,  $B$  μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $\Gamma$ · ὃ  $E$  ἄρα τοὺς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  μετρεῖ· ὃ  $E$  ἄρα τῶν  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  κοινὸν ἐστὶ μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὃ  $E$  τῶν  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  τὸ μέγιστον

numerus aliquis metietur; ipsi  $\Delta$ ,  $\Gamma$  igitur non sunt primi inter se. Sumatur igitur eorum maxima communis mensura  $E$ . Et quoniam  $E$  ipsum  $\Delta$  metitur, ipse autem  $\Delta$  ipsos  $A$ ,  $B$  metitur; et  $E$  igitur ipsos  $A$ ,  $B$ , metitur. Metitur autem et ipsum  $\Gamma$ ; ipse  $E$  igitur ipsos  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  metitur; ipse  $E$  igitur ipsorum  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  communis est mensura. Dico autem et maximam.



κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ  $E$ . Μετρήτω, καὶ ἔστω ὃ  $Z$ . Καὶ ἐπεὶ ὃ  $Z$  τοὺς  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  μετρεῖ, καὶ τοὺς  $A$ ,  $B$  μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν  $A$ ,  $B$  ἄρα<sup>5</sup> μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν  $A$ ,  $B$  μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὃ  $\Delta$ · ὃ  $Z$  ἄρα τὸν  $\Delta$  μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $\Gamma$ · ὃ  $Z$  ἄρα τοὺς  $\Delta$ ,  $\Gamma$  μετρεῖ καὶ τὸ τῶν  $\Delta$ ,  $\Gamma$  ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει<sup>6</sup>. Τὸ δὲ τῶν  $\Gamma$ ,

Si enim non est  $E$  ipsorum  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  maxima communis mensura, metietur aliquis ipsos  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  numeros numerus major existens ipso  $E$ ; metiatur, et sit  $Z$ . Et quoniam  $Z$  ipsos  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  metitur, et ipsos  $A$ ,  $B$  metitur, et ipsorum  $A$ ,  $B$  igitur maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem  $A$ ,  $B$  maxima communis mensura est  $\Delta$ ; ipse  $Z$  igitur ipsum  $\Delta$  metitur. Metitur autem et ipsum  $\Gamma$ ; ipse  $Z$  igitur ipsos  $\Delta$ ,  $\Gamma$

les nombres  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ; donc  $\Delta$ ,  $\Gamma$  ne sont pas premiers entr'eux. Prenons leur plus grande commune mesure  $E$ . Puisque  $E$  mesure  $\Delta$ , et que  $\Delta$  mesure les nombres  $A$ ,  $B$ , le nombre  $E$  mesure  $A$  et  $B$ . Mais il mesure  $\Gamma$ ; donc  $E$  mesure les nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ; donc  $E$  est une commune mesure des nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si  $E$  n'est pas la plus grande commune mesure des nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , un nombre plus grand que  $E$  mesurera les nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ . Qu'il les mesure, et que ce soit  $Z$ . Puisque  $Z$  mesure les nombres  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ , il mesure  $A$  et  $B$ , et il mesurera par conséquent leur plus grande commune mesure. Mais  $\Delta$  est la plus grande commune mesure des nombres  $A$ ,  $B$ ; donc  $Z$  mesure  $\Delta$ . Mais il mesure aussi  $\Gamma$ ; donc  $Z$  mesure  $\Delta$  et  $\Gamma$ ; donc il mesure la plus grande commune mesure des nombres  $\Delta$ ,  $\Gamma$ . Mais  $E$  est la plus grande

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστιν κοινὸν μέτρον.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὑρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι. 7

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι εἰ ἂν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μέτρῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλείονων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρήσομεν<sup>8</sup>.

metitur; et ipsorum Δ, Γ igitur maximam communem mensuram metitur. Ipsorum autem Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ipse Ζ igitur ipsum Ε metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numerus aliquis metietur major existens ipso Ε; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, inventa est maxima communis mensura. Quod oportebat facere.

### COROLLARIUM.

Ex his utique manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

commune mesure des nombres Γ, Δ; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Ε ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Donc, trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, on a trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il fallait faire.

### COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là que si un nombre en mesure trois autres, il mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

Plusieurs nombres étant donnés, on trouvera de la même manière leur plus grande commune mesure.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

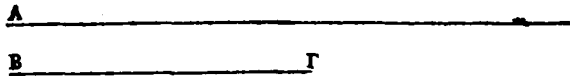
## PROPOSITIO IV.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἱλάσσων τοῦ μείζονος, ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρος.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ  $A$ ,  $B\Gamma$ , καὶ ἔστω ἱλάσσων ὁ  $B\Gamma$ . λέγω ὅτι ὁ  $B\Gamma$  τοῦ  $A$  ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρος.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri  $A$ ,  $B\Gamma$ , et sit minor  $B\Gamma$ ; dico  $B\Gamma$  ipsius  $A$  vel partem esse vel partes.



Οἱ  $A$ ,  $B\Gamma$  γὰρ ἥτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρῶτον οἱ  $A$ ,  $B\Gamma$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρεθέντος δὲ τοῦ  $B\Gamma$  εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἐκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ  $B\Gamma$  μέρος τι τοῦ  $A$ . ὥστε μέρος ἐστὶν ὁ  $B\Gamma$  τοῦ  $A$ .

Μὴ ἔστωσαν δὲ οἱ  $A$ ,  $B\Gamma$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὲ  $B\Gamma$  τὸν  $A$  ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Εἰ μὲν οὖν ὁ  $B\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ  $B\Gamma$  τοῦ  $A$ .

Ipsi  $A$ ,  $B\Gamma$  enim vel primi inter se sunt, vel non; sint primum  $A$ ,  $B\Gamma$  primi inter se, et diviso  $B\Gamma$  in unitates quæ in ipso, erit quæque unitas earum quæ in  $B\Gamma$  pars aliqua ipsius  $A$ ; quare partes est  $B\Gamma$  ipsius  $A$ .

Non sint autem  $A$ ,  $B\Gamma$  primi inter se; ipse utique  $B\Gamma$  ipsum  $A$  vel metitur, vel non metitur. Si autem  $B\Gamma$  ipsum  $A$  metitur, pars est  $B\Gamma$  ipsius  $A$ .

## PROPOSITION IV.

Tout nombre est ou une partie ou plusieurs parties de tout autre nombre, le plus petit du plus grand.

Soient deux nombres  $A$ ,  $B\Gamma$ , et que  $B\Gamma$  soit le plus petit; je dis que  $B\Gamma$  est ou une partie ou plusieurs parties de  $A$ .

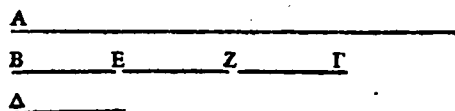
Car les nombres  $A$ ,  $B\Gamma$  sont premiers entr'eux, ou non; qu'ils soient d'abord premiers entr'eux; ayant divisé le nombre  $B\Gamma$  en ses unités, chacune des unités de  $B\Gamma$  sera quelque partie de  $A$  (déf. 1 et 2. 7); donc  $B\Gamma$  sera plusieurs parties de  $A$ .

Que les nombres  $A$ ,  $B\Gamma$  ne soient pas premiers entr'eux; le nombre  $B\Gamma$  mesure  $A$  ou ne le mesure pas. Si  $B\Gamma$  mesure  $A$ , le nombre  $B\Gamma$  est une partie de  $A$ .

# LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 395

Εἰ δὲ οὐ. Εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διηρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἵπαι ὁ Δ τὸν Α μετρίῃ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α. Ἴσος δὲ ἕκαστος

Si autem non. Sumatur ipsorum Α, ΒΓ maxima communis mensura Δ, et dividatur ΒΓ in numeros ipsi Δ æquales ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Et quoniam Δ ipsum Α metitur, pars est Δ ipsius Α.



τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. Ἀπας ἄρα ἀριθμὸς, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Æqualis igitur unicuique ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; et unusquisque igitur ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ ipsius Α pars est; quare partes est ΒΓ ipsius Α. Omnis igitur numerus, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

## PROPOSITIO V.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφοτέρους συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται, ὅπερ ὁ εἰς τοῦ ἐνός.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars; et uterque simul utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ<sup>1</sup> τοῦ ΒΓ μέρος ἴσται,

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter

S'il ne le mesure pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, ΒΓ (2. 7), et partageons ΒΓ en parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ égales à Δ. Puisque Δ mesure Α, le nombre Δ est une partie de Α. Mais Δ est égal à chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; donc chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ est une partie de Α; donc ΒΓ est plusieurs parties de Α. Donc, etc.

## PROPOSITION V.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, leur somme sera aussi la même partie de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

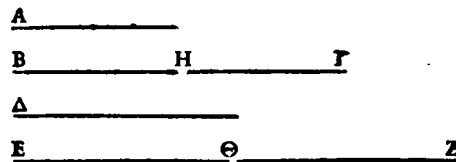
Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre

καὶ ἕτερος ὁ  $\Delta$  ἑτέρου τοῦ  $EZ$  τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ  $A$  τοῦ  $B\Gamma$ . λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρως ὁ  $A$ ,  $\Delta$  συναμφοτέρου τοῦ  $B\Gamma$ ,  $EZ$  τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ  $A$  τοῦ  $B\Gamma$ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ  $A$  τοῦ  $B\Gamma$ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ  $\Delta$  τοῦ  $EZ$ . ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ  $B\Gamma$  ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ  $A$ , τοσούτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ  $EZ$  ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ  $\Delta$ . Διηγήσθω ὁ μὲν  $B\Gamma$  ὡς τοὺς τῷ  $A$  ἴσους τοὺς  $BH$ ,  $H\Gamma$ . ὁ δὲ  $EZ$

$\Delta$  alterius  $EZ$  eadem pars, quæ ipse  $A$  ipsius  $B\Gamma$ ; dico et utrumque simul  $A$ ,  $\Delta$  utriusque simul  $B\Gamma$ ,  $EZ$  eandem partem esse quæ ipse  $A$  ipsius  $B\Gamma$ .

Quoniam enim quæ pars est  $A$  ipsius  $B\Gamma$ , eadem pars est et  $\Delta$  ipsius  $EZ$ ; quot igitur sunt in  $B\Gamma$  numeri æquales ipsi  $A$ , tot sunt et in  $EZ$  numeri æquales ipsi  $\Delta$ . Dividatur  $B\Gamma$  quidem in numeros ipsi  $A$  æquales  $BH$ ,  $H\Gamma$ ; ipse



εἰς τοὺς τῷ  $\Delta$  ἴσους τοὺς  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ . ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν  $BH$ ,  $H\Gamma$  τῷ πλῆθει τῶν  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ . Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν  $BH$  τῷ  $A$ , ὁ δὲ  $E\Theta$  τῷ  $\Delta$ . καὶ οἱ  $BH$ ,  $E\Theta$  ἄρα τοῖς  $A$ ,  $\Delta$  ἴσοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ  $H\Gamma$  τῷ  $A$  ἴσος ἐστὶν, ὁ δὲ  $\Theta Z$  τῷ  $\Delta$ . καὶ οἱ  $H\Gamma$ ,  $\Theta Z$  ἄρα τοῖς  $A$ ,  $\Delta$  ἴσοι εἰσὶν<sup>3</sup>. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ  $B\Gamma$  ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ  $A$ , τοσούτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς  $B\Gamma$ ,  $EZ$  ἴσοι τοῖς  $A$ ,  $\Delta$ . ὅσα πλάσιον ἄρα ἐστὶν ὁ  $B\Gamma$  τοῦ<sup>4</sup>  $A$ , τοσαυταπλάσιον ἐστὶ, καὶ συναμφοτέρος ὁ  $B\Gamma$ ,  $EZ$

vero  $EZ$  in numeros ipsi  $\Delta$  æquales  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ ; erit utique æqualis multitudo ipsorum  $BH$ ,  $H\Gamma$  multitudini ipsorum  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ . Et quoniam æqualis est  $BH$  quidem ipsi  $A$ , ipse vero  $E\Theta$  ipsi  $\Delta$ ; et  $BH$ ,  $E\Theta$  igitur ipsis  $A$ ,  $\Delta$  æquales. Propter eadem utique et  $H\Gamma$  ipsi  $A$  æqualis est, ipse autem  $\Theta Z$  ipsi  $\Delta$ ; et  $H\Gamma$ ,  $\Theta Z$  igitur ipsis  $A$ ,  $\Delta$  æquales sunt; quot igitur sunt in  $B\Gamma$  numeri æquales ipsi  $A$ , tot sunt et in ipsis  $B\Gamma$ ,  $EZ$  æquales ipsis  $A$ ,  $\Delta$ ; quam multiplex igitur est  $B\Gamma$  ipsius  $A$ , tam mul-

$\Delta$  soit la même partie d'un autre nombre  $EZ$ , que  $A$  l'est de  $B\Gamma$ ; je dis que la somme de  $A$  et de  $\Delta$  est la même partie de la somme de  $B\Gamma$  et de  $EZ$ , que  $A$  l'est de  $B\Gamma$ .

Car puisque  $A$  est la même partie de  $B\Gamma$ , que  $\Delta$  l'est de  $EZ$ , il y aura dans  $B\Gamma$  autant de nombres égaux à  $A$ , qu'il y a dans  $EZ$  de nombres égaux à  $\Delta$ . Partageons  $B\Gamma$  en nombres  $BH$ ,  $H\Gamma$  égaux à  $A$ , et  $EZ$  en nombres  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$  égaux à  $\Delta$ , la quantité des nombres  $BH$ ,  $H\Gamma$  sera égale à la quantité des nombres  $E\Theta$ ,  $\Theta Z$ . Mais  $BH$  est égal à  $A$ , et  $E\Theta$  égal à  $\Delta$ ; donc la somme de  $BH$  et de  $E\Theta$  est égale à la somme de  $A$  et de  $\Delta$ . Par la même raison,  $H\Gamma$  est égal à  $A$ , et  $\Theta Z$  égal à  $\Delta$ ; donc la somme de  $H\Gamma$  et de  $\Theta Z$  est égale à la somme de  $A$  et de  $\Delta$ ; il y a donc dans  $B\Gamma$  autant de nombres égaux à  $A$ , qu'il y a dans  $B\Gamma$ ,  $EZ$  de

συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. Ὅπρι ἴδι διζαι.

tiplex est et uterque simul ΒΓ, ΕΖ utriusque simul Α, Δ; quæ igitur pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et uterque simul Α, Δ utriusque simul ΒΓ, ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Σ'.

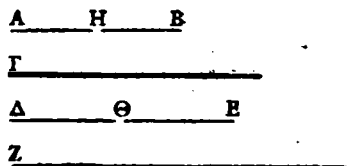
Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ καὶ συναμφοτέρος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπρι ὁ εἰς τοῦ ἰνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἅπρι ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπρι ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

PROPOSITIO VI.

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eadem partes est; et uterque simul utriusque simul eadem partes erit quæ unus unius.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes quæ ΑΒ ipsius Γ; dico et utrumque simul ΑΒ, ΔΕ utriusque simul Γ, Ζ eadem partes esse, quæ ΑΒ ipsius Γ.



Ἐπὶ γὰρ ἂ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν

Quoniam enim quæ partes est ΑΒ ipsius Γ eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur

nombres égaux aux nombres Α, Δ; donc ΒΓ est le même multiple de Α, que la somme de ΒΓ et de ΕΖ l'est de la somme de Α et de Δ; donc Α est la même partie de ΒΓ que la somme de Α et de Δ, l'est de la somme de ΒΓ et de ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

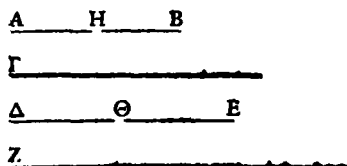
PROPOSITION VI.

Si un nombre est plusieurs parties d'un nombre, et si un autre nombre est les mêmes parties d'un autre nombre, leur somme sera les mêmes parties de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre ΑΒ soit plusieurs parties du nombre Γ, et qu'un autre nombre ΔΕ soit les mêmes parties d'un autre nombre Ζ, que ΑΒ l'est de Γ; je dis que la somme de ΑΒ et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ que ΑΒ l'est de Γ.

τῷ  $AB$  μέρη τοῦ  $\Gamma$ , τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ  $\Delta E$  μέρη τοῦ  $Z$ . Διηρήσθω ὁ μὲν  $AB$  εἰς τὰ τοῦ  $\Gamma$  μέρη τὰ  $AH$ ,  $HB$ , ὁ δὲ  $\Delta E$  εἰς τὰ τοῦ  $Z$  μέρη τὰ  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta E$ .

sunt in  $AB$  partes ipsius  $\Gamma$ , tot sunt et in  $\Delta E$  partes ipsius  $Z$ . Dividatur  $AB$  quidem in ipsius  $\Gamma$  partes  $AH$ ,  $HB$ , ipse vero  $\Delta E$  in ipsius  $Z$  partes  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta E$ .



Ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν  $AH$ ,  $HB$  τῷ πλῆθει τῶν  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta E$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ  $AH$  τοῦ  $\Gamma$ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ  $\Delta\Theta$  τοῦ  $Z$ · ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ  $AH$  τοῦ  $\Gamma$ , τὸ αὐτὸ<sup>3</sup> μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ  $AH$ ,  $\Delta\Theta$  συναμφοτέρου τοῦ  $\Gamma$ ,  $Z$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ  $HB$  τοῦ  $\Gamma$ , καὶ ὁ  $\Theta E$  τοῦ  $Z$ · ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ  $HB$  τοῦ  $\Gamma$ <sup>4</sup> καὶ συναμφοτέρως ὁ  $HB$ ,  $\Theta E$  συναμφοτέρου τοῦ  $\Gamma$ ,  $Z$ · ὁ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ  $AB$  τοῦ  $\Gamma$ , τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ  $AB$ ,  $\Delta E$  συναμφοτέρου τοῦ  $\Gamma$ ,  $Z$ . Ὅπερ ἴδι διίξαι.

Erit utique æqualis multitudo ipsorum  $AH$ ,  $HB$  multitudini ipsorum  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta E$ . Et quoniam quæ pars est  $AH$  ipsius  $\Gamma$ , eadem pars est et  $\Delta\Theta$  ipsius  $Z$ ; quæ igitur pars est  $AH$  ipsius  $\Gamma$ , eadem pars est et uterque simul  $AH$ ,  $\Delta\Theta$  utriusque simul  $\Gamma$ ,  $Z$ . Propter eadem utique et quæ pars est  $HB$  ipsius  $\Gamma$ , et ipse  $\Theta E$  ipsius  $Z$ ; ipse igitur pars est  $HB$  ipsius  $\Gamma$  et uterque simul  $HB$ ,  $\Theta E$  utriusque simul  $\Gamma$ ,  $Z$ ; quæ igitur partes est  $AB$  ipsius  $\Gamma$ , eadem partes est et uterque simul  $AB$ ,  $\Delta E$  utriusque simul  $\Gamma$ ,  $Z$ . Quod oportebat ostendere.

Puisque  $AB$  est les mêmes parties de  $\Gamma$  que  $\Delta E$  l'est de  $Z$ , il y a dans  $AB$  autant de parties de  $\Gamma$ , qu'il y a dans  $\Delta E$  de parties de  $Z$ . Partageons  $AB$  en parties de  $\Gamma$ , et que ces parties soient  $AH$ ,  $HB$ ; partageons aussi  $\Delta E$  en parties de  $Z$ , et que ces parties soient  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta E$ .

Le nombre des parties  $AH$ ,  $HB$  sera égal au nombre des parties  $\Delta\Theta$ ,  $\Theta E$ . Et puisque  $AH$  est la même partie de  $\Gamma$ , que  $\Delta\Theta$  l'est de  $Z$ ,  $AH$  est la même partie de  $\Gamma$ , que la somme de  $AH$  et de  $\Delta\Theta$  l'est de la somme de  $\Gamma$  et de  $Z$  (5. 7). Par la même raison,  $HB$  est la même partie de  $\Gamma$ , que  $\Theta E$  l'est de  $Z$ ; donc  $HB$  est la même partie de  $\Gamma$ , que la somme de  $HB$  et de  $\Theta E$  l'est de la somme de  $\Gamma$  et de  $Z$ ; donc la somme de  $AB$  et de  $\Delta E$  est les mêmes parties de la somme de  $\Gamma$  et de  $Z$ , que  $AB$  l'est de  $\Gamma$ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾗ, ὅπερ ἀφαιρέθῃς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἴστω, ὅπερ ἀφαιρέθῃς ὁ AE ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri pars est, quæ ablatuſ ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ pars sit, quæ ablatuſ AE ablati ΓΖ; dico et reliquum EB reliqui ΖΔ eandem partem esse, quæ totus AB totius ΓΔ.



Ο γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴστω καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΗΖ, ὁ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ

Quæ enim pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars sit et EB ipsius ΓΗ. Et quoniam quæ pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars est EB ipsius ΓΗ; quæ igitur pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars est et AB ipsius ΗΖ; quæ autem pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars ponitur et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est et AB ipsius

PROPOSITION VII.

Si un nombre est la même partie d'un nombre, que le nombre retranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera la même partie du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit la même partie du nombre ΓΔ, que le nombre retranché AE l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ.

Que EB soit la même partie de ΓΗ, que AE l'est de ΓΖ. Puisque AE est la même partie de ΓΖ, que EB l'est de ΓΗ; le nombre AE est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΗΖ (5. 7); mais on a supposé que AE est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de ΗΖ, que



ὁ AB τοῦ HZ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ<sup>2</sup>. ὁ AB ὅρα ἑκατέρου τῶν HZ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ HZ τῷ ΓΔ. Κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσος<sup>3</sup>. Καὶ ἵπαι ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ<sup>5</sup>. ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ

HZ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; ipse AB igitur utriusque ipsorum HZ, ΓΔ eadem pars est; æqualis igitur est HZ ipsi ΓΔ. Communis aufertur ΓΖ; reliquus igitur ΗΓ reliquo ΖΔ est æqualis. Et quoniam quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΗΓ, æqualis autem ΗΓ ipsi ΖΔ; quæ igitur pars est ΑΕ ipsius



ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ<sup>6</sup>. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Οὔτε ἔδει δεῖξαι.

ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΖΔ. Sed quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est ΕΒ ipsius ΖΔ, eadem pars est et ΑΒ ipsius ΓΔ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus ΑΒ totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de HZ et de ΓΔ; donc HZ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; la partie restante ΗΓ sera égale à la partie restante ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΗΓ, et ΗΓ est égal à ΖΔ; donc ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc ΕΒ est la même partie de ΖΔ, que AB l'est de ΓΔ; donc le nombre restant ΕΒ est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

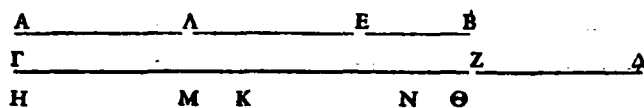
PROPOSITIO VIII.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, ἅπερ ἀφαιρέ-  
θῃς ἀφαιρέθῃς· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ  
αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἴστω,  
ἅπερ ἀφαιρέθῃς ὁ ΑΕ ἀφαιρέθῃς τοῦ ΓΖ·  
λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ  
αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὁλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri partes est, quæ ablatu  
ablati; et reliquus reliqui eadem partes erit,  
quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ partes sit,  
quæ ablatu AE ablati ΓΖ; dico et reliquum  
EB reliqui ΖΔ easdem partes esse, quæ totus  
AB totius ΓΔ.



Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἴσται  
ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται καὶ ὁ ΑΕ τοῦ  
ΓΖ. Διηρέσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ  
ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ·  
ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλῆθει  
τῶν ΑΛ, ΛΕ. Καὶ ἵπαι ὁ μέρος ἴσται ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,  
τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ· μείζων δὲ ὁ  
ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. Κείσθω  
τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὃ ἄρα μέρος ἴσται ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,

Ponatur enim ipsi AB æqualis ΗΘ; quæ  
igitur partes est ΗΘ ipsius ΓΔ, eadem partes  
est et ΑΕ ipsius ΓΖ. Dividatur ΗΘ quidem in  
ipsius ΓΔ partes ΗΚ, ΚΘ, ipse vero ΑΕ in  
ipsius ΓΖ partes ΑΛ, ΛΕ; erit igitur æqualis  
multitudo ΗΚ, ΚΘ ipsi multitudini ΑΛ, ΛΕ.  
Et quoniam quæ pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, ea-  
dem pars est et ΑΛ ipsius ΓΖ; major autem  
ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΗΚ ipso ΑΛ. Po-

PROPOSITION VIII.

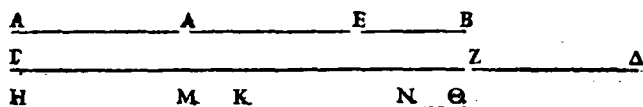
Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, que le nombre re-  
tranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera aussi les mêmes parties  
du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre ΓΔ, que le nombre  
retranché AE l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB  
est les mêmes parties du nombre restant ΖΔ, que le tout AB l'est du tout ΓΔ.

Faisons ΗΘ égal à AB; le nombre ΗΘ sera les mêmes parties de ΓΔ, que AB  
l'est de ΓΖ. Divisons ΗΘ en parties de ΓΔ, et que ces parties soient ΗΚ, ΚΘ;  
divisons ΑΕ en parties de ΓΖ, et que ces parties soient ΑΛ, ΛΕ; le nombre  
des parties ΗΚ, ΚΘ sera égal au nombre des parties ΑΛ, ΛΕ. Et puisque  
ΗΚ est la même partie de ΓΔ, que ΑΛ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que  
ΓΖ, ΗΚ est plus grand que ΑΛ. Faisons ΗΜ égal à ΑΛ; ΗΚ sera la même partie

τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ  $HM$  τοῦ  $\Gamma Z$ · καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ  $MK$  λοιποῦ τοῦ  $Z\Delta$ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ  $HK$  ὅλου τοῦ  $\Gamma\Delta$ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ  $K\Theta$  τοῦ  $\Gamma\Delta$ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ  $\Lambda E$  τοῦ  $\Gamma Z$ , μείζων δὲ ὁ  $\Gamma\Delta$  τοῦ  $\Gamma Z$ · μείζων ἄρα καὶ ὁ  $K\Theta$  τοῦ  $\Lambda E$ . Κείσθω τῷ  $\Lambda E$  ἴσος<sup>1</sup> ὁ  $KN$ · ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ  $K\Theta$  τοῦ  $\Gamma\Delta$ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ<sup>2</sup> καὶ ὁ  $KN$  τοῦ  $\Gamma Z$ · καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ  $N\Theta$  λοιποῦ τοῦ  $Z\Delta$  τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ

natur ipsi  $\Lambda\Lambda$  æqualis ipse  $HM$ ; quæ igitur pars est  $HK$  ipsius  $\Gamma\Delta$ , eadem pars est et  $HM$  ipsius  $\Gamma Z$ ; et reliquus igitur  $MK$  reliqui  $Z\Delta$  eadem pars est quæ totus  $HK$  totius  $\Gamma\Delta$ . Rursus, quoniam quæ pars est  $K\Theta$  ipsius  $\Gamma\Delta$ , eadem pars est et  $\Lambda E$  ipsius  $\Gamma Z$ , major autem  $\Gamma\Delta$  ipso  $\Gamma Z$ ; major igitur et  $K\Theta$  ipso  $\Lambda E$ . Ponatur ipsi  $\Lambda E$  æqualis ipse  $KN$ ; quæ igitur pars est  $K\Theta$  ipsius  $\Gamma\Delta$ , eadem pars est et  $KN$  ipsius  $\Gamma Z$ ; et res-



ὅλος ὁ  $K\Theta$  ὅλου τοῦ  $\Gamma\Delta$ . Εὐρίχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ  $MK$  λοιποῦ τοῦ  $Z\Delta$  τὸ αὐτὸ μέρος ὣν ὅπερ ὅλος ὁ  $KH$  ὅλου τοῦ  $\Delta\Gamma$ · καὶ συναμφοτέρος ἄρα ὁ  $MK$ ,  $N\Theta$  τοῦ  $\Delta Z$  τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ  $\Theta H$  ὅλου τοῦ  $\Delta\Gamma$ . Ἴσος δὲ συναμφοτέρος μὲν ὁ  $MK$ ,  $N\Theta$  τῷ  $EB$ , ὁ δὲ  $\Theta H$  τῷ  $BA$ · καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ  $EB$  λοιποῦ τοῦ  $Z\Delta$  τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ  $AB$  ὅλου τοῦ  $\Gamma\Delta$ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

liquis igitur  $N\Theta$  reliqui  $Z\Delta$  eadem pars est, quæ totus  $K\Theta$  totius  $\Gamma\Delta$ . Ostensum autem est et reliquum  $MK$  reliqui  $Z\Delta$  eandem partem esse quæ totus  $KH$  totius  $\Delta\Gamma$ ; et uterque simul igitur  $MK$ ,  $N\Theta$  ipsius  $\Delta Z$  eadem partes est quæ totus  $\Theta H$  totius  $\Delta\Gamma$ . Æqualis autem uterque simul  $MK$ ,  $N\Theta$  quidem ipsi  $EB$ , ipsa vero  $\Theta H$  ipsi  $BA$ ; et reliquus igitur  $EB$  reliqui  $Z\Delta$  eadem partes est quæ totus  $AB$  totius  $\Gamma\Delta$ . Quod oportebat ostendere.

de  $\Gamma\Delta$ , que  $HM$  l'est de  $\Gamma Z$ ; donc le reste  $MK$  est la même partie du reste  $Z\Delta$ , que le tout  $HK$  l'est du tout  $\Gamma\Delta$ . De plus, puisque  $K\Theta$  est la même partie de  $\Gamma\Delta$ , que  $\Lambda E$  l'est de  $\Gamma Z$ , et que  $\Gamma\Delta$  est plus grand que  $\Gamma Z$ ,  $K\Theta$  est plus grand que  $\Lambda E$ . Faisons  $KN$  égal à  $\Lambda E$ ;  $K\Theta$  sera la même partie de  $\Gamma\Delta$ , que  $KN$  l'est de  $\Gamma Z$ ; donc le reste  $N\Theta$  est la même partie du reste  $Z\Delta$ , que le tout  $K\Theta$  l'est du tout  $\Gamma\Delta$ . Mais on a démontré que le reste  $MK$  est la même partie du reste  $Z\Delta$ , que le tout  $KH$  l'est du tout  $\Delta\Gamma$ ; donc la somme de  $MK$  et de  $N\Theta$ , est les mêmes parties de  $\Delta Z$ , que le tout  $\Theta H$  l'est du tout  $\Delta\Gamma$ . Mais la somme de  $MK$  et de  $N\Theta$  est égale à  $EB$ , et  $\Theta H$  égal à  $BA$ ; donc le reste  $EB$  est les mêmes parties du reste  $Z\Delta$ , que le tout  $AB$  l'est du tout  $\Gamma\Delta$ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

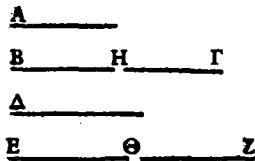
PROPOSITIO IX.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἦ· καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ἡ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἴστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ<sup>2</sup>. λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἡ μέρη.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars est; et alterne quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem pars erit vel eadem partes et secundus quarti.

Numerus enim A numeri ΒΓ pars sit, et alter Δ alterius ΕΖ eadem pars quæ A ipsius ΒΓ, minor autem sit A ipso Δ; dico et alterne quæ pars est A ipsius Δ vel partes, eadem partem esse et ΒΓ ipsius ΕΖ vel partes.



Ἐπὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ<sup>3</sup> ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσούτοι εἰσι καὶ ἐν

Quoniam enim quæ pars est A ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt

PROPOSITION IX.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, le premier est, par permutation, la même partie ou les mêmes parties du troisième, que le second l'est du quatrième.

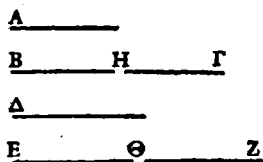
Que le nombre A soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre Δ soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que A l'est de ΒΓ, et que A soit plus petit que Δ; je dis que, par permutation, A est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ.

Puisque A est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y a dans ΒΓ autant de nombres égaux à A, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux

# 404 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. Διηγήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἴσον ἴσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

et in ΕΖ æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in ipsos ipsi Α æquales ΒΗ, ΗΓ, ipse vero ΕΖ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΘ, ΘΖ; æqualis erit utique multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ.



Καὶ ἵπαι ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴσος δὴ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΓ numeri inter se, sunt autem et ΕΘ, ΘΖ numeri æquales inter se, et est æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ; quæ igitur pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes, eadem pars est et ΗΓ ipsius ΘΖ vel eadem partes; quare et quæ pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes, eadem pars est et uterque simul ΒΓ, utriusque simul ΕΖ vel eadem partes; æqualis utique ΒΗ quidem ipsi Α, ipse vero ΕΘ ipsi Δ; quæ igitur pars est et Α ipsius Δ vel partes, eadem pars est et ΒΓ ipsius ΕΖ vel eadem partes. Quod oportebat ostendere.

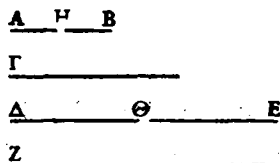
à Δ. Partageons ΒΓ en parties égales à Α, et que ces parties soient ΒΗ, ΗΓ; partageons aussi ΕΖ en parties égales à Δ, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ; le nombre des parties ΒΗ, ΗΓ sera égal au nombre des parties ΕΘ, ΘΖ.

Puisque les nombres ΒΗ, ΗΓ sont égaux entr'eux, que les nombres ΕΘ, ΘΖ sont aussi égaux entr'eux, et que la quantité des nombres ΒΗ, ΗΓ est égale à la quantité des nombres ΕΘ, ΘΖ, le nombre ΒΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΕΘ, que ΗΓ l'est de ΘΖ; donc ΒΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΕΘ, que la somme ΒΓ l'est de la somme ΕΖ (5 et 6. 7). Mais ΒΗ est égal à Α, et ΕΘ égal à Δ; donc Α est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἑναλλάξ ἃ μέρη ἔστιν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ AB τοῦ ΔΕ ἐλάσσων<sup>2</sup>· λήγω καὶ ἑναλλάξ ἃ μέρη ἔστιν ὁ AB τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ<sup>3</sup> μέρος.



Επεὶ γὰρ ἃ μέρη ἔστιν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηγήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ,

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eadem partes; et alterne quæ partes est primus tertii vel pars, eadem partes erit et secundus quarti vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes, sit autem AB ipso ΔΕ minor; dico et alterne quæ partes est AB ipsius ΔΕ vel pars, eadem partes esse et Γ ipsius Ζ vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes est AB ipsius Γ, eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in partes ΑΗ, ΗΒ ipsius Γ, ipse vero ΔΕ in partes ΔΘ, ΘΕ ipsius Ζ; erit utique æqualis multi-

PROPOSITION X.

Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, qu'un autre l'est d'un autre, le premier sera aussi, par permutation, les mêmes parties ou la même partie du troisième, que le second l'est du quatrième.

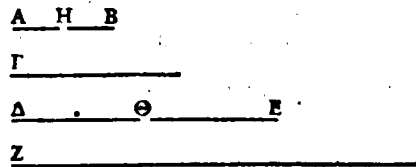
Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre Γ, qu'un autre nombre ΔΕ l'est d'un autre nombre Ζ, et que AB soit plus petit que ΔΕ; je dis que, par permutation, AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ; que Γ l'est de Ζ.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ, que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Divisons AB en parties de Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΒ; divisons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ; le nombre des parties ΑΗ, ΗΒ sera égal

406 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

HB τῷ πλείονι τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος  
 ἴστιν ὁ ΑΗ τοῦ<sup>4</sup> Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴστι καὶ ὁ  
 ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἴστιν ὁ ΑΗ τοῦ  
 ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἴστι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ  
 ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος  
 ἴστιν ὁ ΗΒ τοῦ<sup>5</sup> ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος  
 ἴστι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ  
 ὁ μέρος ἴστιν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ

tudo ipsarum ΑΗ, ΗΒ multitudini ipsarum ΔΘ,  
 ΘΕ. Et quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ,  
 eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ, et alterne quæ  
 pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars  
 est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes. Propter  
 eadem utique et quæ pars est ΗΒ ipsius ΘΕ  
 vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel  
 eadem partes; quare et quæ pars est ΑΗ ip-



μέρος ἴστι καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ  
 ὁ ἄρα μέρος ἴστιν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ  
 αὐτὸ μέρος ἴστι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ  
 μέρη<sup>6</sup>. ἀλλ' ὁ μέρος ἴστιν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη,  
 τὸ αὐτὸ μέρος ἴδὲν καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ  
 μέρη, καὶ ὁ ἄρα<sup>8</sup> μέρος ἴστιν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ  
 μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἴστι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ  
 αὐτὸ μέρος. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

sus ΔΘ vel partes, eadem pars est et ΗΒ  
 ipsius ΘΕ vel eadem partes; et quæ igitur pars  
 est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est  
 et ΑΒ ipsius ΔΕ vel eadem partes; sed quæ pars  
 est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars ostensa  
 est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes, et quæ igitur  
 partes est ΑΒ ipsius ΔΕ vel pars, eadem par-  
 tes est et Γ ipsius Ζ vel eadem pars. Quod  
 oportebat ostendere.

au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque ΑΗ est la même partie de Γ, que ΔΘ  
 l'est de Ζ; par permutation, ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ,  
 que Γ l'est de Ζ (9. 7). Par la même raison, ΗΒ est la même partie ou les  
 mêmes parties de ΘΕ, que Γ l'est de Ζ; donc ΑΗ est la même partie ou les  
 mêmes parties de ΔΘ, que ΗΒ l'est de ΘΕ (5 et 6. 7); donc ΑΗ est la même  
 partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que ΑΒ l'est de ΔΕ; mais on a démontré  
 que ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ;  
 donc ΑΒ est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ.  
 Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

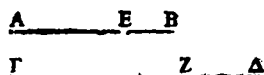
PROPOSITIO XI.

Εὰν ᾗ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Εστω ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ AE πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἔστιν ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Si est ut totus ad totum ita ablatum ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatum AE ad ablatum ΓΖ; dico et reliquum EB ad reliquum ΖΔ esse ut totus AB ad totum ΓΔ.



Επὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ AE πρὸς τὸν ΓΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ AB τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὰ αὐτὰ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ AE τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ὥστε AB τοῦ ΓΔ ἔστιν ἄρα ὡς EB πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ. Ὅπερ εἶδει διζῆσαι.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; quæ igitur pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars est et AE ipsius ΓΖ vel eadem partes; et reliquus igitur EB reliqui ΖΔ eadem pars est vel partes, quæ AB ipsius ΓΔ; est igitur ut EB ad ΖΔ ita AB ad ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XI.

Si le tout est au tout comme le nombre retranché est au nombre retranché, le nombre restant sera aussi au nombre restant comme le tout est au tout.

Que le tout AB soit au tout ΓΔ comme le nombre retranché AB est au nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est au nombre restant ΖΔ comme le tout AB est au tout ΓΔ.

Car, puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, AB est la même partie ou les mêmes parties de ΓΔ que AE l'est de ΓΖ; donc le reste EB est la même partie ou les mêmes parties du reste ΖΔ que AB l'est de ΓΔ (7 et 8. 7); donc EB est à ΖΔ comme AB est à ΓΔ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

## PROPOSITIO XII.

Εάν ὅσων ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἴσται ὥς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἱπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγουμένοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἱπομένους.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἴσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Si sunt quotcunque numeri proportionales, erit ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico esse ut Α ad Β ita ipsos Α, Γ ad ipsos Β, Δ.

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$$

Ἐπεὶ γὰρ ἴσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρους ἴσται ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη· καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β· ἴσται ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ. Ὅπρι ἴδι διῆξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel partes; et uterque simul igitur Α, Γ utriusque simul Β, Δ eadem pars est vel eadem partes, quæ Α ipsius Β; est igitur ut Α ad Β ita ipsi Α, Γ ad ipsos Β, Δ. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres proportionnels qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, Α est la même partie ou les mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc Α est la même partie ou les mêmes parties de Β que Γ l'est de Δ; donc la somme des nombres Α, Γ est la même partie ou les mêmes parties de la somme des nombres Β, Δ, que Α l'est de Β (5 et 6. 7); donc Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσι· καὶ ἱναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται.

Εστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἱναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Si quatuor numeri proportionales sunt ; et alterne proportionales erant.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ ; dico et alterne proportionales fore , ut Α ad Γ ita Β ad Δ.

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ τὰ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἱναλλάξ ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ τὰ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ ; quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes , eadem pars est et Γ ipsius Δ vel eædem partes ; alterne igitur quæ pars est Α ipsius Γ vel partes , eadem pars est et Β ipsius Δ vel eædem partes ; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XIII.

Si quatre nombres sont proportionnels ; ils seront encore proportionnels par permutation.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres proportionnels , et que Α soit à Β comme Γ est à Δ ; je dis qu'ils seront encore proportionnels , par permutation , c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ ; Α est la même partie ou les mêmes parties de Β , que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7) ; donc, par permutation , Α est la même ou les mêmes parties de Γ, que Β l'est de Δ (9 et 10. 7) ; donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Εὰν ὅσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ· καὶ διΐσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἴσονται.

Εστώσαν γάρ<sup>1</sup> ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ αἱ  $A, B, \Gamma$ , καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ<sup>2</sup> ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, οἱ  $\Delta, E, Z$ , ὥς μὲν ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $E$ , ὥς δὲ ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $Z$ . λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐστὶν ὥς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$ .

$A$  \_\_\_\_\_  
 $B$  \_\_\_\_\_  
 $\Gamma$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta$  \_\_\_\_\_  
 $E$  \_\_\_\_\_  
 $Z$  \_\_\_\_\_

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὥς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $E$ · ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὥς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Delta$  οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $E$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $Z$ · ἐναλλάξ

Si sunt quocunque numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint enim quocunque numeri  $A, B, \Gamma$ , et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione  $\Delta, E, Z$ , ut  $A$  quidem ad  $B$  ita  $\Delta$  ad  $E$ , ut  $B$  vero ad  $\Gamma$  ita  $E$  ad  $Z$ ; dico et ex æquo esse ut  $A$  ad  $\Gamma$  ita  $\Delta$  ad  $Z$ .

Quoniam enim est ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Delta$  ad  $E$ ; alterne igitur est ut  $A$  ad  $\Delta$  ita  $B$  ad  $E$ . Rursus, quoniam est ut  $B$  ad  $\Gamma$  ita  $E$  ad  $Z$ ; alterne igitur est ut  $B$  ad  $E$  ita  $\Gamma$  ad  $Z$ . Ut autem  $B$  ad

## PROPOSITION XIV.

Si l'on a tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres égaux en quantité aux premiers, et si ces nombres étant pris deux à deux sont en même raison, ils seront aussi en même raison par égalité.

Soient  $A, B, \Gamma$  tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres  $\Delta, E, Z$  égaux en quantité à ceux-ci, que ces nombres soient pris deux à deux et en même raison, c'est-à-dire que  $A$  soit à  $B$  comme  $\Delta$  est à  $E$ , et que  $B$  soit à  $\Gamma$  comme  $E$  est à  $Z$ ; je dis que, par égalité,  $A$  est à  $\Gamma$  comme  $\Delta$  est à  $Z$ .

Car, puisque  $A$  est à  $B$  comme  $\Delta$  est à  $E$ , par permutation,  $A$  est à  $\Delta$  comme  $B$  est à  $E$  (13. 7). De plus, puisque  $B$  est à  $\Gamma$  comme  $E$  est à  $Z$ ; par permu-

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 411

ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἑναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπρι ἴδι διῆξαι.

E ita A ad Δ; et ut igitur A ad Δ ita Γ ad Z; alterne igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

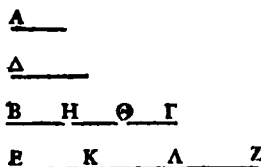
Ἐὰν μονὰς ἀριθμὸν τινα μετρήῃ, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινα ἀριθμὸν μετρήῃ· καὶ ἑναλλάξ ἰσάκεις ἢ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσῃ καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἢ Α ἀριθμὸν τινα τὸν ΒΓ μετρίτω, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινα ἀριθ-

### PROPOSITIO XV.

Si unitas numerum aliquem metitur, æqualiter autem alter numerus alium aliquem numerum metitur; et alterne æqualiter unitas tertium numerum metietur ac secundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem ΒΓ metiatur, æqualiter autem alter numerus Δ alium



μὸν τὸν ΕΖ μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ ἑναλλάξ ἰσάκεις ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρίῃ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

aliquem numerum EZ metiatur; dico et alterne æqualiter A unitatem ipsum Δ numerum metiri ac ΒΓ ipsum EZ.

tation, B est à E comme Γ est à Z. Mais B est à E comme A est à Δ; donc A est à Δ comme Γ est à Z; donc, par permutation, A est à Γ comme Δ est à Z. Ce qu'il fallait démontrer.

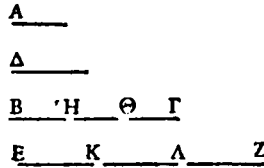
### PROPOSITION XV.

Si l'unité mesure un nombre autant de fois qu'un autre nombre mesure un autre nombre; par permutation, l'unité mesurera autant de fois le troisième nombre que le second mesure le quatrième.

Que l'unité A mesure un nombre ΒΓ autant de fois qu'un autre nombre Δ mesure un autre nombre ΕΖ; je dis que, par permutation, l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que ΒΓ mesure ΕΖ.

Επεὶ γὰρ ἰσάκεις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν  
μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ  
ΒΓ μονάδες τισοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ  
ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ  
μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ  
Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ  
πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ,  
ΚΛ, ΑΖ. Καὶ ἵπτι ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ  
μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ

Quoniam enim æqualiter Α unitas ipsum  
ΒΓ numerum metitur ac Δ ipsum ΕΖ; quot  
igitur sunt in ΒΓ unitates tot sunt et in ΕΖ  
numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem  
in ipsas in eo unitates ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ipse  
vero ΕΖ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ;  
erit igitur æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ,  
ΘΓ multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Et quo-  
niam æquales sunt ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitates inter



ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ πλῆθος  
τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ,  
ΚΛ, ΑΖ ἀριθμῶν· ἴσται<sup>3</sup> ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς  
τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν  
ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΑΖ  
ἀριθμὸν. Ἐσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων  
πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγού-  
μενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους· ἴστιν ἄρα ὡς  
ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν<sup>4</sup> οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς

se, sunt autem et ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ numeri æ-  
quales inter se, et est æqualis multitudo ip-  
sarum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitatum multitudini  
ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ numerorum; erit igitur  
ut ΒΗ unitas ad ΕΚ numerum ita ΗΘ unitas  
ad ΚΛ numerum, et ΘΓ unitas ad ΑΖ nume-  
rum. Erit igitur et ut unus antecedentium ad  
unum consequentium ita omnes anteceden-  
tes ad omnes consequentes; est igitur ut ΒΗ

Puisque l'unité Α mesure le nombre ΒΓ autant de fois que Δ mesure ΕΖ,  
il y aura dans ΒΓ autant d'unités, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ.  
Partageons ΒΓ en ses unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, et partageons ΕΖ en nombres égaux  
à Δ, et que ces nombres soient ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ; la quantité des unités ΒΗ,  
ΗΘ, ΘΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Puisque les unités  
ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sont égales entr'elles, que les nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ sont égaux  
entr'eux, et que la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ est égale à la quantité des  
nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ, l'unité ΒΗ sera au nombre ΕΚ comme l'unité ΗΘ est au  
nombre ΚΛ, et comme l'unité ΘΓ est au nombre ΑΖ. Donc un antécédent  
sera à son conséquent comme la somme des antécédents est à la somme  
des conséquents (12. 7); donc l'unité ΒΗ est au nombre ΕΚ comme ΒΓ est

# LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 413

τὸν ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ ἰσάκεις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

unitas ad ΕΚ numerum ita ΒΓ ad ΕΖ. Æqualis autem ΒΗ unitas ipsi Α unitati, ipse vero ΕΚ numerus ipsi Δ numero; est igitur ut Α unitas ad Δ numerum ita ΒΓ ad ΕΖ; æqualiter igitur Α unitas ipsum Δ numerum metitur ac ΒΓ ipsum ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινας· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β

## PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri multiplicantes sese faciunt aliquos; facti ex ipsis æquales inter se erunt.

Sint duo numeri Α, Β, et Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat, ipse vero Β

Ε  
Α  
Β  
Γ  
Δ

τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

ipsum Α multiplicans ipsum Δ faciat; dico æqualem esse Γ ipsi Δ.

à ΕΖ. Mais l'unité ΒΗ est égale à l'unité Α, et le nombre ΕΚ au nombre Δ; donc l'unité Α est au nombre Δ comme ΒΓ est à ΕΖ; donc l'unité Α mesure le nombre Δ autant de fois que ΒΓ mesure ΕΖ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un et l'autre en produisant d'autres; les nombres produits seront égaux entr'eux.

Soient les deux nombres Α, Β; que Α multipliant Β produise Γ, et que Β multipliant Α produise Δ; je dis que Γ est égal à Δ.

# 414 LE SEPTIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν<sup>1</sup> κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἰναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει· ὁ Α ἄρα τὸν

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit ; B igitur ipsum Γ metitur per ipsas in A unitates. Metitur autem et E unitas ipsum A numerum per ipsas in eo unitates ; æqualiter igitur E unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Γ ; alterne igitur æqualiter E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Rursus , quoniam B ipsum A multiplicans

E \_\_\_\_\_  
A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_

Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἰσάκεις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Δ fecit; ipse A igitur ipsum Δ metitur per ipsas in B unitates. Metitur autem et E unitas ipsum B per ipsas in eo unitates ; æqualiter igitur E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Δ. Æqualiter autem E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Æqualiter igitur A utrumque ipsorum Γ, Δ metitur; æqualis igitur est Γ ipsi Δ. Quod oportebat ostendere.

Car, puisque A multipliant B a produit Γ ; B mesure Γ par les unités qui sont en A (déf. 15. 7). Mais l'unité E mesure le nombre A par les unités qu'il contient ; donc l'unité E mesure le nombre A autant de fois que B mesure Γ ; donc , par permutation, l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ (15. 7). De plus, puisque B multipliant A a produit Δ, A mesure Δ par les unités qui sont en B. Mais l'unité E mesure le nombre B par les unités qu'il contient ; donc l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Δ. Mais l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ ; donc A mesure également Γ et Δ ; donc Γ est égal à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

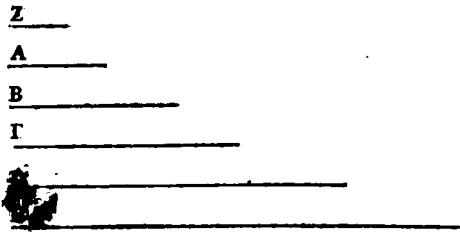
PROPOSITIO XVII.

Εάν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσιν ἰλόγον πολλαπλασιασθεῖσιν.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Si numerus duos numeros multiplicans facit aliquos, facti ex ipsis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

Numerus enim Α duos numeros Β, Γ multiplicans ipsos Δ, Ε faciat; dico esse ut Β ad Γ ita Δ ad Ε.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν<sup>2</sup> οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ

Quoniam enim Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; Β igitur ipsum Δ metitur per ipsas in Α unitates. Metitur autem et Ζ unitas ipsum Α numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur Ζ unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Δ; est igitur ut Ζ unitas ad Α numerum ita Β ad Δ. Propter eadem uti-

PROPOSITION XVII.

Si un nombre multipliant deux nombres en produit d'autres; les nombres produits auront la même raison que les nombres multipliés.

Que le nombre Α multipliant les nombres Β, Γ produise les nombres Δ, Ε; je dis que Β est à Γ comme Δ est à Ε.

Car, puisque Α multipliant Β a produit Δ; Β mesure Δ par les unités qui sont en Α (déf. 15. 7). Mais l'unité Ζ mesure le nombre Α par les unités qu'il contient; donc l'unité Ζ mesure le nombre Α autant de fois que Β mesure Δ; donc l'unité Ζ est au nombre Α comme Β est à Δ. Par la même raison,



## 416 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε<sup>3</sup>. ἑναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Οπερ εἶδει δεικνύει.

que et ut Z unitas ad A numerum ita Γ ad Ε; et ut igitur Β ad Δ ita Γ ad Ε; alterne igitur est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινὰ πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἔχουσι τὸν ἴσον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.  
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινὰ τὸν

### PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes faciunt aliquos; facti ex ipsis et eandem habebunt rationem quam multiplicantes.  
Duo enim numeri Α, Β numerum aliquem Γ

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_

Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιεῖτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

multiplicantes ipsos Δ, Ε faciant; dico esse ut Α ad Β ita Δ ad Ε.

L'unité Z est au nombre Α comme Γ est à Ε; donc Β est à Δ comme Γ est à Ε; donc, par permutation, Β est à Γ comme Δ est à Ε (13. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XVIII.

Si deux nombres multipliant un autre nombre en produisent d'autres; les nombres produits auront la même raison que les multiplicateurs.

Que les deux nombres Α, Β multipliant un nombre Γ produisent Δ, Ε; je dis que Α est à Β comme Δ est à Ε.

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 417

Επει γάρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πιποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἴσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἴσονται.

Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β,

|   |  |
|---|--|
| Α |  |
| Β |  |
| Γ |  |
| Δ |  |
| Ε |  |
| Ζ |  |
| Η |  |

Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε

Quoniam enim A ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit ; et Γ igitur ipsum Α multiplicans ipsum Δ fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum Β multiplicans ipsum Ε fecit ; numerus utique Γ duos numeros Α, Β multiplicans ipsos Δ, Ε fecit ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Ε. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales sunt, ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis erit ipsi ex secundo et tertio facto numero ; et si ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis est ipsi ex secundo et tertio , quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β,

Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Α quidem ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse vero Β

Puisque Α multipliant Γ produit Δ, Γ multipliant Α produit Δ (16. 7). Par la même raison Γ multipliant Β produit Ε ; donc Γ multipliant les deux nombres Α, Β produit les nombres Δ, Ε ; donc Α est à Β, comme Δ est à Ε (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

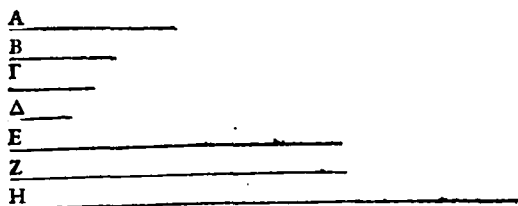
### PROPOSITION XIX.

Si quatre nombres sont proportionnels, le nombre produit par le premier et par le quatrième sera égal au nombre produit par le second et par le troisième ; et si le nombre produit par le premier et par le quatrième est égal au nombre produit par le second et par le troisième, les quatre nombres seront proportionnels.

Soient les quatre nombres proportionnels Α, Β, Γ, Δ ; que Α soit à Β comme Γ

# 418 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ποιεῖται, ὁ δὲ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Z ἴσους ἔστιν ὁ E τῷ Z. ipsum Γ multiplicans faciat ipsum Z; dico æqualem esse E ipsi Z.



Ο γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖται. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς<sup>2</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα<sup>3</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πιποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν<sup>4</sup> Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσους ἄρα ἔστιν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ipse enim Α ipsum Γ multiplicans ipsum Η faciat. Et quoniam Α ipsum Γ multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ε fecit; numerus utique Α duos numeros Γ, Δ multiplicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. Sed ut Γ ad Δ ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita Η ad Ε. Rursus, quoniam Α ipsum Γ multiplicans ipsum Η fecit, sed et Β ipsum Γ multiplicans ipsum Ζ fecit; duo utique numeri Α, Β numerum aliquem Γ multiplicantes ipsos Η, Ζ fecerunt; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Ζ. Sed et ut Α ad Β ita Η ad Ε; et ut igitur Η ad Ε ita Η ad Ζ; ipse Η igitur ad utrumque ipsorum Ε, Ζ eandem habet rationem; æqualis igitur est Ε ipsi Ζ.

est à Δ; que Α multipliant Δ produise Ε, et que Β multipliant Γ produise Ζ; je dis que Ε est égal à Ζ.

Que Α multipliant Γ produise Η. Puisque Α multipliant Γ produit Η, et que Α multipliant Δ produit Ε, le nombre Α multipliant les deux nombres Γ, Δ produit Η, Ε; donc Γ est à Δ comme Η est à Ε (17. 7). Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Η est à Ε. De plus, puisque Α multipliant Γ produit Η, et que Β multipliant Γ produit Ζ; les deux nombres Α, Β multipliant un nombre Γ produisent Η, Ζ (18. 7). Donc Α est à Β comme Η est à Ζ. Mais Α est à Β comme Η est à Ε; donc Η est Ε comme Η est Ζ; donc Η a la même raison avec chacun des nombres Ε, Ζ; donc Ε est égal à Ζ.

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 419

Εστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἴστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Εποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἰσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου<sup>2</sup>· εἰ δὲ ὁ ὑπὸ<sup>3</sup> τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται<sup>4</sup>.

Εστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Sit autem rursus æqualis E ipsi Z; dico esse ut A ad B ita Γ ad Δ.

Isdem enim constructis, quoniam A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. Æqualis autem E ipsi Z; est igitur ut Η ad Ε ita Η ad Ζ. Sed ut Η quidem ad Ε ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Η ad Ζ. Ut autem Η ad Ζ ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales sunt, ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio; si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico ipsum ex Α, Γ æqualem esse ipsi ex Β.

De plus, que E soit égal à z; je dis que A est à B comme Γ est à Δ.

Faisons la même construction. Puisque A multipliant les nombres Γ, Δ produit Η, Ε, le nombre Γ est à Δ comme Η est à Ε. Mais Ε est égal à z; donc Η est à Ε comme Η est à z. Mais Η est à Ε comme Γ est à Δ (18. 7); donc Γ est à Δ comme Η est à z. Mais Η est à z comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Γ est à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XX.

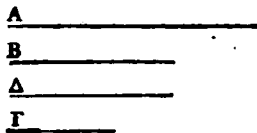
Si trois nombres sont proportionnels, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen; et si le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, les trois nombres seront proportionnels.

Soient Α, Β, Γ trois nombres proportionnels; que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le produit des nombres Α, Γ est égal au carré de Β.

## 420 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κείσθω γὰρ τῷ B ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Δ. Ο δὲ ἐκ τῶν B, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B· ἴσος γὰρ ὁ B τῷ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ'; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, Δ. Ipse autem ex B, Δ æqualis est ipsi ex B; æqualis enim B ipsi Δ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B.



Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἴστω τῷ ἀπὸ τοῦ B· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ.

Sed et ipse ex A, Γ æqualis sit ipsi ex B; dico esse ut A ad B ita B ad Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἴσος τῷ ὑπὸ<sup>5</sup> τῶν B, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ἰσος δὲ ὁ B τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipse ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, ipse autem ex B æqualis ipsi ex B, Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Æqualis autem B ipsi Δ; est igitur ut A ad B ita B ad Γ. Quod oportebat ostendere.

Que Δ soit égal à B; A sera à B comme Δ est à Γ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au produit des nombres B, Δ (19. 7). Mais le produit des nombres B, Δ est égal au carré de B; parce que B est égal à Δ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B.

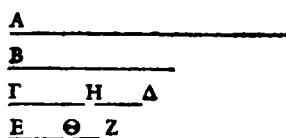
Mais que le produit des nombres A, Γ soit égal au carré de B; je dis que A est à B comme B est à Γ.

Car puisque le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B, et que le carré de B est égal au produit des nombres B, Δ; le nombre A est à B comme Δ est à Γ (19. 7). Mais B est égal à Δ; donc A est à B comme B est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα.

Ἐστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.



Ο ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρος. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρος ἔστιν ἄπειρ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῇ ΓΔ μέρος τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῇ ΕΖ μέρος τοῦ Β. Διηρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρος τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρος τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῇ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ

Minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter eos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem.

Sint enim minimi numeri ΓΔ, ΕΖ ipsorum eandem rationem habentium cum Α, Β; dico æqualiter ΓΔ ipsum Α metiri ac ΕΖ ipsum Β.

Ipse ΓΔ enim ipsius Α non est partes. Si enim possibile, sit; et ΕΖ igitur ipsius Β eadem partes est quæ ΓΔ ipsius Α; quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius Α, tot sunt et in ΕΖ partes ipsius Β. Dividatur ΓΔ quidem in ipsas ipsius Α partes ΓΗ, ΗΔ, ipse vero ΕΖ in ipsas ipsius Β partes ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ.

PROPOSITION XXI.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit.

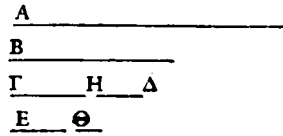
Que ΓΔ, ΕΖ soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Β; je dis que ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β.

Le nombre ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α; car, que cela soit, s'il est possible; ΕΖ sera les mêmes parties de Β que ΓΔ l'est de Α (déf. 20. 7). Il y aura donc dans ΓΔ autant de parties de Α qu'il y dans ΕΖ de parties de Β. Partageons ΓΔ en parties de Α, et que ces parties soient ΓΗ, ΗΔ; et ΕΖ en parties de Β, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ. Le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ sera égal au nombre

422 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν ἀλλήλοις<sup>2</sup>, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΟΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις<sup>3</sup>, καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΟΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἰπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς

Et quoniam æquales ΓΗ, ΗΔ sunt inter se, sunt autem et ΕΘ, ΟΖ numeri inter se æquales, et est æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΟΖ; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΟΖ; erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes



ἰπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσιν, ἐλάττωτες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδυνάτον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΓΔ ad ΕΖ; ipsi ΓΗ, ΕΘ igitur cum ipsis ΓΔ, ΕΖ in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; non igitur partes est ΓΔ ipsius Α; pars igitur; et ΕΖ ipsius Β eadem pars est quæ ΓΔ ipsius Α; æqualiter igitur ΓΔ ipsum Α metitur ac ΕΖ ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

des parties ΕΘ, ΟΖ; et puisque les parties ΓΗ, ΗΔ sont égales entr'elles, que les parties ΕΘ, ΟΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ est égal au nombre des parties ΕΘ, ΟΖ; la partie ΓΗ est à la partie ΕΘ comme ΗΔ est à ΟΖ; donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents (12. 7); donc ΓΗ est à ΕΘ comme ΓΔ est à ΕΖ; donc les nombres ΓΗ, ΕΘ sont en même raison que les nombres ΓΔ, ΕΖ qui sont plus petits que ces derniers, ce qui est impossible; car on a supposé que ΓΔ, ΕΖ sont les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; donc ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α. Donc il en est une partie; mais ΕΖ est la même partie de Β que ΓΔ l'est de Α; donc ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εάν ὡς τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται.

Εστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ<sup>2</sup>, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ δίσσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Si sunt tres numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres numeri Α, Β, Γ, et alii Δ, Ε, Ζ, ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico et ex æquo esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

|   |       |
|---|-------|
| Α | _____ |
| Β | _____ |
| Γ | _____ |
| Δ | _____ |
| Ε | _____ |
| Ζ | _____ |

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; ipse igitur ex Α, Ζ æqualis est ipsi ex Β, Ε. Rursus, quoniam ut Β ad Γ ita Δ ad Ε; ipse igitur ex Γ, Δ æqualis est ipsi ex Β, Ε. Os-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois nombres et autant d'autres nombres, si ces nombres pris deux à deux sont en même raison, et si leur proportion est troublée, ces nombres seront en même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ trois nombres, et autant d'autres nombres Δ, Ε, Ζ; que ces nombres pris deux à deux soient en même raison, et que leur proportion soit troublée; c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que par égalité Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Car puisque Α est à Β comme Ε est à Ζ, le produit des nombres Α, Ζ est égal au produit des nombres Β, Ε (19. 7). De plus, puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε; le produit des nombres Γ, Δ est égal au produit des nombres Β, Ε. Mais



## 424 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσῃ τῇ εἰς τῶν B, E. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Z ἴσος τῇ ἐκ τῶν B, E· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Z ἄρα ἴσος τῇ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tensus est autem et ipse A, Z æqualis ipsi ex B, E; et ipse ex A, Z igitur æqualis ipsi ex Γ, Δ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

### PROPOSITIO XXIII.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι εἰς τὴν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Εστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ A, B· λέγω ὅτι οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς.

Sint primi inter se numeri A, B; dico ipsos A, B minimos esse eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_

Εἰ γὰρ μὴ<sup>1</sup>, ἔσονται τινες τῶν A, B ἐλάσσονες<sup>2</sup> ἀριθμοὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B. Εστωσαν οἱ Γ, Δ.

Si enim non, erunt aliqui ipsis A, B minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis A, B. Sint Γ, Δ.

on a démontré que le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E; donc le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres Γ, Δ; donc A est à Γ comme Δ est à Z (19. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXIII.

Les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Que A, B soient des nombres premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Car s'ils ne le sont pas, il y aura des nombres plus petits que A, B qui auront la même raison avec A, B. Que ce soient Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα, τουτέστιν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον ἰσάκεις ἄρα ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ καὶ ὁ  $\Delta$  τὸν  $B$ . Ὡς αὖτις δὴ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ  $E$ · καὶ ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $E$  μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $E$  μονάδας· καὶ ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Gamma$  μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ  $E$  τὸν  $B$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὁ  $E$  ἄρα τοὺς  $A$ ,  $B$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν  $A$ ,  $B$  ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς  $A$ ,  $B$ · οἱ  $A$ ,  $B$  ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam minimi numeri eorum eandem rationem habentium metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur ac  $\Delta$  ipsum  $B$ . Quoties autem  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur, tot unitates sint in  $E$ ; et  $\Delta$  igitur ipsum  $B$  metitur per unitates quæ in  $E$ . Et quoniam  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $E$ ; et  $E$  igitur ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $\Gamma$ . Propter eadem utique et  $E$  ipsum  $B$  metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; ipse  $E$  igitur ipsos  $A$ ,  $B$  metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsi  $A$ ,  $B$  minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis  $A$ ,  $B$ ; ipsi  $A$ ,  $B$  igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Puisque les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; le nombre  $\Gamma$  mesurera le nombre  $A$  autant de fois que  $\Delta$  mesurera  $B$ . Qu'il y ait dans  $E$  autant d'unités que  $\Gamma$  mesure de fois  $A$ ; le nombre  $\Delta$  mesurera  $B$  par les unités qui sont en  $E$ . Mais  $\Gamma$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $E$ ; donc le nombre  $E$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $\Gamma$ . Par la même raison,  $E$  mesure  $B$  par les unités qui sont en  $\Delta$ ; donc  $E$  mesure les nombres  $A$ ,  $B$  qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc il n'y a point de nombres plus petits que  $A$ ,  $B$  qui ayent la même raison avec les nombres  $A$ ,  $B$ ; donc les nombres  $A$ ,  $B$  sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

## PROPOSITIO XXIV.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐστῶσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς οἱ  $A, B$ · λέγω ὅτι οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ  $A, B$ , μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ  $\Gamma$ . Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ  $\Delta$ , ὅσάκις δὲ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $B$  μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ  $E$ .

Minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis  $A, B$ ; dico  $A, B$  primos inter se esse.

Si enim non sunt primi inter se  $A, B$ , metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit  $\Gamma$ . Et quoties  $\Gamma$  quidem ipsum  $A$  metitur, tot unitates sint in  $\Delta$ , quoties vero  $\Gamma$  ipsum  $B$  metitur, tot unitates sint in  $E$ .

$A$  \_\_\_\_\_  
 $B$  \_\_\_\_\_  
 $\Gamma$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta$  \_\_\_\_\_  
 $E$  \_\_\_\_\_

Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὁ  $\Gamma$  ἄρα τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $E$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποιήκειν· ἀριθμός δὲ ὁ  $\Gamma$  δύο ἀριθμοὺς τοὺς  $\Delta, E$  πολλαπλασιάσας τοὺς

Et quoniam  $\Gamma$  ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; ipse  $\Gamma$  igitur ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $A$  fecit. Propter eadem utique et  $\Gamma$  ipsum  $E$  multiplicans ipsum  $B$  fecit; numerus igitur  $\Gamma$  duos numeros  $\Delta, E$  multiplicans ipsos  $A, B$

## PROPOSITION XXIV.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, sont premiers entr'eux.

Que  $A, B$  soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux.

Car si les nombres  $A, B$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $\Gamma$ . Qu'il y ait dans  $\Delta$  autant d'unités que  $\Gamma$  mesure de fois  $A$ , et qu'il y ait dans  $E$  autant d'unités que  $\Gamma$  mesure de fois  $B$ .

Puisque  $\Gamma$  mesure  $A$  par les unités qui sont dans  $\Delta$ , le nombre  $\Gamma$  multipliant  $\Delta$  produira  $A$ . Par la même raison,  $\Gamma$  multipliant  $E$  produit  $B$ ; donc le nombre  $\Gamma$  multipliant les deux nombres  $\Delta, E$  produira  $A, B$ ; donc  $\Delta$  est à  $E$  comme  $A$  est

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 427

Α, Β πιποίνκων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῇ αὐτῇ λόγῃ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοῖς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

fecit; est igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Β; ipsi Δ, Ε igitur cum ipsis Α, Β in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros numerus aliquis metietur; ipsi Α, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ τὸν ἓνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρεῖτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

### PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se sunt, numerus unum eorum metiens ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, ipsum autem Α metiatur aliquis numerus Γ; dico et ipsos Β, Γ primos inter se esse.

$\frac{A}{B}$   
 $\frac{B}{\Gamma}$   
 $\frac{\Gamma}{\Delta}$

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ

Si enim non sint Β, Γ primi inter se, metietur aliquis ipsos numeros. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ ipsum Γ metitur, ipse autem Γ

à Β (17. 7); donc les nombres Δ, Ε ont la même raison que les nombres Α, Β, qui sont plus petits qu'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres Α, Β; donc Α, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le nombre qui mesure l'un d'eux sera premier avec l'autre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux; et que quelque nombre Γ mesure Α; je dis que Β, Γ sont premiers entr'eux.

Car que Β, Γ ne soient pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera; que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure Γ, et que

## 428 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ.  
Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ,  
πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύ-  
νατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις  
μετρήσει· οἱ Γ, Β ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους  
εἰσίν. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρώτοι  
ᾧσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν  
πρώτος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς τινὰ ἀριθμὸν  
τὸν Γ πρώτοι ἕστωσαν<sup>1</sup>, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλα-  
πλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ  
πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A  
B  
Γ  
Δ  
E  
Z

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ, Δ πρώτοι πρὸς ἀλλή-  
λους, μετρήσει τις τοὺς Γ, Δ<sup>2</sup> ἀριθμός. Με-  
τρέιτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρώτοι

ipsum Α metitur; et Δ igitur ipsum Α metitur.  
Metitur autem et ipsum Β; ipse Δ igitur ipsos  
Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod  
est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros  
aliquis metietur; ipsi Γ, Β igitur primi  
inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi  
sunt, et ipse ex ipsis factus ad eum primus  
erit.

Duo enim numeri Α, Β ad aliquem numerum  
Γ primi sint, et Α ipsum Β multiplicans ipsum  
Δ faciat; dico Γ, Δ primos inter se esse.

Si enim non sint Γ, Δ primi inter se, metietur  
aliquis ipsos Γ, Δ numerus. Metiatur, et sit Ε.  
Et quoniam Γ, Α primi inter se sunt, ipsum

Γ mesure Α, le nombre Δ mesurera Α. Mais il mesure Β; donc Δ mesure Α, Β qui  
sont premiers entr'eux, ce qui est impossible (déf. 12. 7); donc quelque nombre ne  
mesurera pas Α, Β; donc Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXVI.

Si deux nombres sont premiers avec quelque nombre, le produit de ces deux  
nombres sera un nombre premier avec ce nombre.

Que les deux nombres Α, Β soient deux nombres premiers avec quelque  
nombre Γ, et que Α multipliant Β fasse Δ; je dis que Γ, Δ sont premiers entr'eux.

Car si Γ, Δ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera Γ, Δ. Que  
quelque nombre les mesure, et que ce soit Ε. Puisque Γ, Α sont premiers entr'eux,

πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οσαῖς δὲ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν· ἴσος ἄρα ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. Ἐάν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστιν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ὑπόμεινος τὸν ὑπόμεινον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

autem Γ metitur aliquis numerus Ε; ipsi Ε, Α igitur primi inter se sunt. Quoties autem Ε ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ζ; et Ζ igitur ipsum Δ metitur per unitates quæ in Ε; ipse Ε igitur ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed et Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Ζ ipsi ex Α, Β. Si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex mediis, quatuor numeri proportionales sunt; est igitur ut Ε ad Α ita Β ad Ζ. Ipsi autem Α, Ε primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Ε igitur ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Β, Γ metitur primos existentes inter se, quod est impossibile. Non igitur ipsos Γ, Α numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

et qu'un nombre Ε mesure Γ, les nombres Ε, Α seront premiers entr'eux (25. 7). Qu'il y ait dans Ζ autant d'unités que Ε mesure de fois Α; le nombre Ζ mesurera Α par les unités qui sont dans Ε; donc Ε multipliant Ζ produira Δ. Mais Α multipliant Β produit Δ; donc le produit de Ε par Ζ est égal au produit de Α par Β. Mais lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre nombres sont proportionnels (19. 7); donc Ε est à Α comme Β est à Ζ. Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux; et les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; donc Ε mesure Β; mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Β, Γ qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible. Donc quelque nombre ne mesurera pas Γ, Δ; donc Γ, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Εστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ  $A, B$ , καὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ  $\Gamma, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ.

## PROPOSITIO XXVII.

Si duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se  $A, B$ , et  $A$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Gamma$  faciat; dico  $\Gamma, B$  primos inter se esse.

$\underline{A}$   
 $\underline{B}$   
 $\underline{\Gamma}$   
 $\underline{\Delta}$

Κείσθω γὰρ τῷ  $A$  ἴσος ὁ  $\Delta$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ  $A$  τῷ  $\Delta$ · καὶ οἱ  $\Delta, B$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἐκάτερος ἄρα τῶν  $\Delta, A$  πρὸς τὸν  $B$  πρῶτος ἐστί· καὶ ὁ ἐκ τῶν  $\Delta, A$  ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν  $B$  πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν  $A, \Delta$  γενόμενος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ  $\Gamma$ · οἱ  $\Gamma, B$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ponatur enim ipsi  $A$  æqualis  $\Delta$ . Et quoniam  $A, B$  primi inter se sunt, æqualis autem  $A$  ipsi  $\Delta$ ; et  $\Delta, B$  igitur primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum  $\Delta, A$  ad  $B$  primus est; et ipse ex  $\Delta, A$  igitur factus ad ipsum  $B$  primus erit. Ipse autem ex  $A, \Delta$  factus numerus est  $\Gamma$ ; ipsi  $\Gamma, B$  igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre.

Que les deux nombres  $A, B$  soient premiers entr'eux, et que  $A$  multiplié par lui-même produise  $\Gamma$ ; je dis que  $\Gamma, B$  sont premiers entr'eux.

Que  $\Delta$  soit égal à  $A$ . Puisque  $A, B$  sont premiers entr'eux, et que  $A$  est égal à  $\Delta$ , les nombres  $\Delta, B$  sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres  $\Delta, A$  est premier avec  $B$ ; donc le produit de  $\Delta$  par  $A$  sera premier avec  $B$  (26. 7). Mais le produit de  $A$  par  $\Delta$  est  $\Gamma$ ; donc les nombres  $\Gamma, B$  sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ᾧσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γινόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ οἱ Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν

PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi sunt; et ipsi ex ipsis facti primi inter se erunt.

Duo enim numeri Α, Β ad duos numeros Γ, Δ, uterque ad utrumque, primi sint, et Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Ε faciat, ipse vero Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; dico Ε, Ζ primos inter se esse.

Quoniam enim uterque ipsorum Α, Β ad Γ primus est, et ipse ex Α, Β igitur factus ad Γ primus erit. Ipse autem ex Α, Β factus est Ε; ipsi Ε, Γ igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique Ε, Δ primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Γ, Δ ad Ε primus est; et ipse ex Γ, Δ igitur factus ad Ε primus erit.

PROPOSITION XXVIII.

Si deux nombres sont premiers avec deux autres, l'un et l'autre avec l'un et l'autre, les produits seront premiers entr'eux.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers avec les deux nombres Γ, Δ, l'un et l'autre avec l'un et l'autre; que Α multipliant Β produise Ε, et que Γ multipliant Δ produise Ζ; je dis que les nombres Ε, Ζ sont premiers entr'eux.

Puisque chacun des nombres Α, Β est premier avec Γ, le produit de Α par Β sera premier avec Γ (26. 7). Mais le produit de Α par Β est Ε; donc les nombres Ε, Γ sont premiers entr'eux. Par la même raison Ε, Δ sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres Γ, Δ est premier avec Ε; donc le produit de Γ par Δ



## 432 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ, Δ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται.  
Ο δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γινόμενος ἐστὶν ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα  
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipse autem ex Γ, Δ factus est Ζ; ipsi Ε, Ζ  
igitur primi inter se sunt. Quod oportebat os-  
tendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι,  
καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τι-  
νας<sup>1</sup>, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλή-  
λους ἔσονται· καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους  
πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινάς, κακίῳινοι πρῶ-  
τοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ αὐτὸ περὶ τοὺς  
ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Εστωσαν ἀριθμοὶ δύο<sup>2</sup> πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους  
οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν

$$\begin{array}{r} \text{Α} \\ \hline \text{Β} \\ \hline \text{Γ} \\ \hline \text{Δ} \\ \hline \text{Ε} \\ \hline \text{Ζ} \end{array}$$

Γ ποιέτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε  
ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν<sup>3</sup> πολλαπλασιάσας  
τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ  
ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι  
πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

### PROPOSITIO XXIX.

Si duo numeri primi inter se sint, et  
multiplicans uterque se ipsum faciat aliquos,  
facti ex ipsis primi inter se erunt; et si ipsi a  
principio factos multiplicantes faciant aliquos,  
et illi primi inter se erunt; et semper circa  
extremos hoc continget.

Sint duo numeri Α, Β primi inter se, et Α  
se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat, ipsum

autem Γ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem  
Β quidem se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat,  
ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; dico  
et ipsos Γ, Ε et ipsos Δ, Ζ primos inter se esse.

sera premier avec Ε (26. 7). Mais le produit de Γ par Δ est Ζ; donc les nombres Ε, Ζ  
sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXIX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et si ces nombres étant multipliés  
par eux-mêmes font des nombres, les produits de ces nombres seront premiers  
entr'eux; et si les nombres proposés multipliant les produits font d'autres nom-  
bres, ces derniers seront aussi premiers entr'eux, et il en sera toujours ainsi  
pour les derniers nombres qui auront été produits.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux, que Α étant multiplié par  
lui-même fasse Γ, que Α multipliant Γ fasse Ε, que Β étant multiplié par lui-même  
fasse Δ, que Β multipliant Δ fasse Ζ; je dis que Γ, Ε et Δ, Ζ sont premiers entr'eux.

Επεὶ γὰρ οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιοῖ-  
κεν· οἱ  $\Gamma, B$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Επεὶ οὖν οἱ  $\Gamma, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιοῖ-  
κεν, οἱ  $\Gamma, \Delta$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιοῖκεν· οἱ  $A, \Delta$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ  $A, \Gamma$  πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς  $B, \Delta$  ἀμφοτέροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν  $A, \Gamma$  ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν  $B, \Delta$  πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν  $A, \Gamma$  ὁ  $E$ , ὁ δὲ ἐκ τῶν  $B, \Delta$  ὁ  $Z$ · οἱ  $E, Z$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim  $A, B$  primi inter se sunt, et  $A$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; ipsi  $\Gamma, B$  igitur primi inter se sunt. Et quoniam  $\Gamma, B$  primi inter se sunt, et  $B$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit, ipsi  $\Gamma, \Delta$  igitur primi inter se sunt. Rursus, quoniam  $A, B$  primi inter se sunt, et  $B$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit; ipsi  $A, \Delta$  igitur primi inter se sunt; et quoniam duo numeri  $A, \Gamma$  ad duos numeros  $B, \Delta$  uterque ad utrumque primi sunt; et ipse ex ipsis  $A, \Gamma$  igitur factus ad ipsum ex ipsis  $B, \Delta$  primus est. Et est ipse quidem ex  $A, \Gamma$  ipse  $E$ , ipse vero ex  $B, \Delta$  ipse  $Z$ ; ipsi  $E, Z$  igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

PROPOSITIO XXX.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσι, καὶ συναμφοτέροι πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ εἰς ἀναμφοτέροι πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Si duo numeri primi inter se sunt, et uterque simul ad utrumque eorum primus erit; et si uterque simul ad unum aliquem eorum primus est, et ipsi a principio numeri primi inter se erunt.

Puisque les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux, et que  $A$  étant multiplié par lui-même fait  $\Gamma$ , les nombres  $\Gamma, B$  sont premiers entr'eux (27. 7); et puisque  $\Gamma, B$  sont premiers entr'eux, et que  $B$  multiplié par lui-même fait  $\Delta$ , les nombres  $\Gamma, \Delta$  sont premiers entr'eux. De plus, puisque  $A, B$  sont premiers entr'eux, et que  $B$  multiplié par lui-même a fait  $\Delta$ , les nombres  $A, \Delta$  sont premiers entr'eux. Mais les deux nombres  $A, \Gamma$  sont premiers avec les deux nombres  $B, \Delta$ , l'un et l'autre avec l'un et l'autre; donc le produit de  $A$  par  $\Gamma$  est premier avec le produit de  $B$  par  $\Delta$  (28. 7.) Mais le produit de  $A$  par  $\Gamma$  est  $E$ , et le produit de  $B$  par  $\Delta$  est  $Z$ . Donc les nombres  $E, Z$  sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

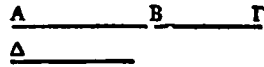
PROPOSITION XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme sera un nombre premier avec chacun d'eux; et si leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux, les deux nombres proposés seront premiers entr'eux.

# 434 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Συγκείμεθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ  $AB$ ,  $BΓ$ . λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρως ὁ  $ΑΓ$  πρὸς ἑκάτερον τῶν<sup>1</sup>  $AB$ ,  $BΓ$  πρῶτός ἐστιν.

Componantur duo numeri primi inter se  $AB$ ,  $BΓ$ ; dico et utrumque simul  $ΑΓ$  ad utrumque eorum  $AB$ ,  $BΓ$  primum esse.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ  $ΓΑ$ ,  $AB$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς  $ΓΑ$ ,  $AB$ <sup>2</sup> ἀριθμὸς. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ  $Δ$ . Ἐπεὶ οὖν ὁ  $Δ$  τοὺς  $ΓΑ$ ,  $AB$  μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν  $BΓ$  μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $BA$ . ὁ  $Δ$  ἄρα τοὺς  $AB$ ,  $BΓ$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς  $ΓΑ$ ,  $AB$  ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ  $ΓΑ$ ,  $AB$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ οἱ  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν<sup>3</sup>. ὁ  $ΓΑ$  ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  πρῶτός ἐστιν.

Ἐστῶσαν δὲ πάλιν οἱ  $ΓΑ$ ,  $AB$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους<sup>4</sup>. λέγω ὅτι καὶ οἱ  $AB$ ,  $BΓ$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρῶτοι οἱ  $AB$ ,  $BΓ$  πρὸς ἀλλήλους<sup>5</sup>, μετρήσει τις τοὺς  $AB$ ,  $BΓ$ <sup>6</sup> ἀριθμὸς. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ  $Δ$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $Δ$  ἑκάτερον

Si enim non sint  $ΓΑ$ ,  $AB$  primi inter se, metietur aliquis ipsos  $ΓΑ$ ,  $AB$  numerus. Metiatur, et sit  $Δ$ . Et quoniam  $Δ$  ipsos  $ΓΑ$ ,  $AB$  metietur; et reliquum igitur  $BΓ$  metietur. Metitur autem et ipsum  $BA$ ; ipse  $Δ$  igitur ipsos  $AB$ ,  $BΓ$  metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur  $ΓΑ$ ,  $AB$  numeros numerus aliquis metietur; ipsi  $ΓΑ$ ,  $AB$  igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique et  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  primi inter se sunt; ipse  $ΓΑ$  igitur ad utrumque ipsorum  $AB$ ,  $BΓ$  primus est.

Sint et  $ΓΑ$ ,  $AB$  primi inter se; dico et  $AB$ ,  $BΓ$  primos inter se esse.

Si enim non sint primi  $AB$ ,  $BΓ$  inter se, metietur aliquis ipsos  $AB$ ,  $BΓ$  numerus. Metiatur, et sit  $Δ$ . Et quoniam  $Δ$  utrumque eorum  $AB$ ,

Ajoutons les deux nombres premiers entr'eux  $AB$ ,  $BΓ$ ; je dis que leur somme  $ΑΓ$  est un nombre premier avec chacun des nombres  $AB$ ,  $BΓ$ .

Car si les nombres  $ΓΑ$ ,  $AB$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera  $ΓΑ$ ,  $AB$ . Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $Δ$ . Puisque  $Δ$  mesure  $ΓΑ$ ,  $AB$ , il mesurera le reste  $BΓ$ ; mais il mesure  $BA$ ; donc  $Δ$  mesure  $AB$ ,  $BΓ$  qui sont deux nombres premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres  $ΓΑ$ ,  $AB$ ; donc  $ΓΑ$ ,  $AB$  sont premiers entr'eux. Par la même raison  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  sont premiers entr'eux; donc le nombre  $ΓΑ$  est premier avec chacun des nombres  $AB$ ,  $BΓ$ .

De plus, que  $ΓΑ$ ,  $AB$  soient premiers entr'eux; je dis que  $AB$ ,  $BΓ$  sont premiers entr'eux.

Car si  $AB$ ,  $BΓ$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $Δ$ . Puisque  $Δ$  mesure chacun

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 435

τῶν  $AB$ ,  $B\Gamma$  μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν  $\Gamma A$  μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν  $AB$ · ὁ  $\Delta$  ἄρα τοὺς  $\Gamma A$ ,  $AB$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς  $AB$ ,  $B\Gamma$  ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ  $AB$ ,  $B\Gamma$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

$B\Gamma$  metitur; et totum igitur  $\Gamma A$  metietur. Metitur autem et ipsum  $AB$ ; ipse  $\Delta$  igitur ipsos  $\Gamma A$ ,  $AB$  metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos  $AB$ ,  $B\Gamma$  numeros numerus aliquis metietur; ipsi  $AB$ ,  $B\Gamma$  igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Ἀπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ  $A$ , καὶ τὸν  $B$  μὴ μετρίτω· λέγω ὅτι οἱ  $B$ ,  $A$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

### PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus  $A$ , et ipsum  $B$  non metiatur; dico  $B$ ,  $A$  primos inter se esse.

|          |
|----------|
| $A$      |
| —        |
| $B$      |
| —        |
| $\Gamma$ |
| —        |

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ  $B$ ,  $A$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $B$  μετρεῖ, ὁ δὲ  $A$  τὸν  $B$  οὐ μετρεῖ· ὁ  $\Gamma$  ἄρα τῷ  $A$  οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Gamma$  τοὺς  $B$ ,  $A$  μετρεῖ· καὶ τὸν  $A$  ἄρα

Si enim non sint  $B$ ,  $A$  primi inter se, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit  $\Gamma$ . Et quoniam  $\Gamma$  ipsum  $B$  metitur, ipse autem  $A$  ipsum  $B$  non metitur; ipse  $\Gamma$  igitur cum ipso  $A$  non est idem. Et quoniam  $\Gamma$  ipsos  $B$ ,  $A$  metitur;

des nombres  $AB$ ,  $B\Gamma$ , il mesurera leur somme  $\Gamma A$ . Mais il mesure  $AB$ ; donc  $\Delta$  mesure  $\Gamma A$ ;  $AB$ , qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres  $AB$ ,  $B\Gamma$ ; donc  $AB$ ,  $B\Gamma$  sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXXI.

Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas.

Soit le nombre premier  $A$ , et que  $A$  ne mesure pas  $B$ ; je dis que  $B$ ,  $A$  sont premiers entr'eux.

Car si  $B$ ,  $A$  ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit  $\Gamma$ . Puisque  $\Gamma$  mesure  $B$ , et que  $A$  ne mesure pas  $B$ , le nombre  $\Gamma$  n'est pas le même nombre que  $A$ . Et puisque  $\Gamma$

# 436 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὡν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὥστε  
ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς B, A μετρήσει τις  
ἀριθμός· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους  
εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et ipsum A igitur metitur primum existentem,  
non existens cum ipso idem, quod est impossi-  
bile; non igitur ipsos B, A metietur aliquis nu-  
merus; ipsi A, B igitur primi inter se sunt.  
Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϞ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους  
ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γεόμενον ἐξ αὐτῶν μετρή-  
σει πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς με-  
τρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πολλαπλασιάσαντες  
ἀλλήλους τὸν Γ ποιεῖταισαν, τὸν δὲ Γ μετρεῖται  
τις πρῶτος ἀριθμός ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἓνα τῶν  
A, B μετρεῖ.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_

Τὸν γὰρ A μὴ μετρεῖται, καὶ ἔστι πρῶτος ὁ Δ·  
οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· καὶ  
ὅσας ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔσ-

Ipsum enim A non metiatur, et est primus Δ;  
ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt. Et quoties Δ  
ipsum Γ metitur, tot unitates sint in E. Et

mesure B, A, il mesure A qui est un nombre premier, quoique Γ ne soit pas  
le même que A, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera  
pas B, A; donc A, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque  
nombre premier mesure leur produit, il mesurera un des nombres proposés.

Car que les deux nombres A, B se multipliant l'un l'autre fassent Γ, et que  
quelque nombre premier Δ mesure Γ; je dis que Δ mesure un des nombres A, B.

Qu'il ne mesure pas A; puisque Δ est un nombre premier, les nombres A, Δ  
seront premiers entr'eux (31. 7). Qu'il y ait autant d'unités dans E que Δ mesure

τῶσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, ταυτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ<sup>2</sup> τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἓνα τῶν Α, Β μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

quoniam Δ ipsum Γ metitur per ipsas quæ in Ε unitates, ipse Δ igitur ipsum Ε multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; æqualis igitur est ipse ex Δ, Ε, ipsi ex Α, Β; est igitur ut Δ ad Α ita Β ad Ε. Ipsi autem Δ, Α primi, ipsi vero primi et minimi, ipsi autem minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Δ igitur ipsum Β metitur. Similiter utique ostendemus et si Δ ipsum Β non metitur, ipsum Α mensurum esse; ipse Δ igitur unum eorum Α, Β metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἀπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur.

Sit compositus numerus Α; dico ipsum Α a primo aliquo numero mensurari.

de fois γ. Puisque Δ mesure γ par les unités qui sont en Ε, le nombre Δ multipliant Ε fera γ. Mais Α multipliant Β fait γ; donc le produit de Δ par Ε est égal au produit de Α par Β; donc Δ est à Α comme Β est à Ε (19. 7). Mais Δ, Α sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont avec eux la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Δ mesure Β. Nous démontrerons de la même manière que si Δ ne mesure pas Β, il mesurera Α; donc Δ mesure un des nombres Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que Α soit un nombre composé; je dis que Α est mesuré par quelque nombre premier.

# 438 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γιγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ,

Quoniam enim compositus est A, metietur aliquis ipsum numerus. Metiatur, et sit B. Et si quidem primus est B, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum B metitur, ipse autem B ipsum A metitur; et Γ igitur ipsum A metitur. Et si quidem primus

A  
B  
Γ

γιγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Τοιαύτης δὲ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ<sup>3</sup> ἑτέρος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς· ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός<sup>4</sup>, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς<sup>5</sup>.

est Γ, factum erit propositum; si vero compositus, metietur aliquis ipsum numerus. Tali utique factâ consideratione, relinquetur aliquis primus numerus, qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipsum A numerum infiniti numeri quorum alter altero minor est, quod est impossibile in numeris. Relinquetur aliquis igitur primus qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum A metietur. Omnis igitur, etc.

Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπας ἀριθμὸς ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω ἀριθμὸς ὁ Α' λέγω ὅτι ὁ Α' ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α', γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθεῖν. Εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὅσωνοῦν, εὐρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ὅσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὲ εὐρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus vel primus est, vel a primo aliquo numero mensuratur.

Sit numerus A; dico A vel primum esse, vel a primo aliquo mensurari.

Si quidem igitur primus est A, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum primus numerus. Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XXXV.

Numeris datis quocumque, invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum eis.

Sint dati quocumque numeri A, B, Γ; oportet igitur invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ.

Ipsi A, B, Γ enim vel primi inter se sunt, vel non. Si quidem igitur A, B, Γ primi inter

PROPOSITION XXXIV.

Tout nombre est premier, ou il est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre A; je dis que A est un nombre premier, ou qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

Si A est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; s'il est composé, quelque nombre premier le mesurera (33. 7). Donc, etc.

PROPOSITION XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étant donnés, trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

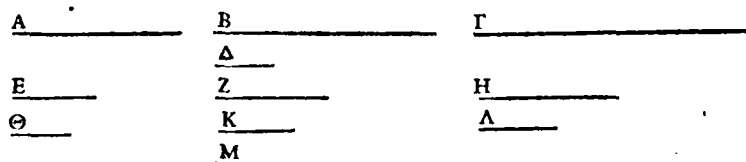
Soient A, B, Γ tant de nombres donnés qu'on voudra; il faut trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B, Γ.

Les nombres A, B, Γ sont ou premiers entr'eux, ou ne le sont pas. S'il sont



ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

se sunt, minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis.



Εἰ δὲ οὐ· εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὅσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῦς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων<sup>2</sup> τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονται τινες<sup>3</sup> τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. Ἐστώσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. Ὅσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ

Si autem non; sumatur ipsorum Α, Β, Γ maxima communis mensura Δ, et quoties Δ unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque eorum Ε, Ζ, Η; et unusquisque igitur Ε, Ζ, Η unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur per unitates quæ in Δ; ipsi Ε, Ζ, Η igitur ipsos Α, Β, Γ æqualiter metiuntur; ipsi Ε, Ζ, Η igitur cum ipsis Α, Β, Γ in eadem ratione sunt. Dico utique et minimos. Si enim non sunt Ε, Ζ, Η minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ, erunt aliqui ipsis Ε, Ζ, Η minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ. Sint Θ, Κ, Λ; æqualiter igitur Θ ipsum Α metitur ac uterque eorum Κ, Λ utrumque eorum Β, Γ. Quoties autem Θ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Μ; et uterque igitur eorum Κ, Λ

premiers entr'eux, ils seront les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7).

S'ils ne le sont pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, Β, Γ (3. 7), et qu'il y ait dans chacun des nombres Ε, Ζ, Η autant d'unités que Δ mesure de fois chacun des nombres Α, Β, Γ. Chacun des nombres Ε, Ζ, Η mesurera chacun des nombres Α, Β, Γ par les unités qui sont dans Δ; donc les nombres Ε, Ζ, Η mesurent également les nombres Α, Β, Γ; donc les nombres Ε, Ζ, Η sont en même raison que les nombres Α, Β, Γ (18. 7). Je dis de plus qu'ils sont les plus petits. Car si Ε, Ζ, Η ne sont pas les plus petits de ceux qui ont avec Α, Β, Γ la même raison, il y aura quelques nombres plus petits que Ε, Ζ, Η qui auront la même raison avec Α, Β, Γ; que ce soient Θ, Κ, Λ; le nombre Θ mesurera Α autant de fois que chacun des nombres Κ, Λ mesure chacun des nombres Β, Γ (21. 7). Qu'il y ait dans

μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἐκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἐκάτέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιπνίηκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιπνίηκει· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. Μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μείζον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

utrumque eorum Β, Γ metitur per unitates quæ in Μ. Et quoniam Θ ipsum Α metitur per unitates quæ in Μ; et Μ igitur ipsum Α metitur per unitates quæ in Θ. Propter eadem utique et Μ utrumque eorum Β, Γ metitur per unitates quæ in ipsis Κ, Λ; ipse Μ igitur ipsos Α, Β, Γ metitur; et quoniam Θ ipsum Α metitur per unitates quæ in Μ; ipse Θ igitur ipsum Μ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Ε ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Δ ipsi ex Θ, Μ; est igitur ut Ε ad Θ ita Μ ad Δ. Major autem Ε ipso Θ; major igitur et Μ ipso Δ, et metitur ipsos Α, Β, Γ, quod est impossibile; ponitur enim Δ eorum Α, Β, Γ maxima communis mensura; non igitur erunt aliqui ipsis Ε, Ζ, Η minores numeri in eadem ratione in quâ Α, Β, Γ; ipsi Ε, Ζ, Η igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ. Quod oportebat ostendere.

Μ autant d'unités que Θ mesure de fois Α; chacun des nombres Κ, Λ mesurera chacun des nombres Β, Γ par les unités qui sont en Μ. Et puisque Θ mesure Α par les unités qui sont en Μ, le nombre Μ mesurera Α par les unités qui sont en Θ. Par la même raison, Μ mesurera chacun des nombres Β, Γ par les unités qui sont dans chacun des nombres Κ, Λ; donc Μ mesure Α, Β, Γ. Mais Θ mesure Α par les unités qui sont en Μ; donc Θ multipliant Μ fait Α. Par la même raison, Ε multipliant Δ fait Α; donc le produit de Ε par Δ est égal au produit de Θ par Μ; donc Ε est à Θ comme Μ est à Δ (19.7). Mais Ε est plus grand que Θ; donc Μ est plus grand que Δ, et Μ mesure Α, Β, Γ, ce qui est impossible; car on a supposé que Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ; donc il n'y a pas de nombres plus petits que Ε, Ζ, Η qui ayent la même raison que Α, Β, Γ; donc Ε, Ζ, Η sont les plus petits nombres qui ayent la même raison avec Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'

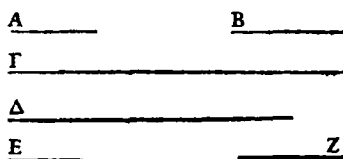
## PROPOSITIO XXXVI.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· δι᾽ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Duobus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri Α, Β; oportet igitur invenire quem minimum metiantur numerum.



Οἱ Α, Β γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Εστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α' τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμόν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρέιτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὅσakis ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· ὅσakis δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν

Ipsi Α, Β enim vel primi inter se sunt, vel non. Sint primum Α, Β primi inter se, et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; et Β igitur ipsum Α multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi Α, Β igitur ipsum Γ metiuntur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β minorem existentem ipso Γ. Metiantur Δ. Et quoties Α ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ε; quoties autem Β ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ζ; ipse quidem Α igitur ipsum Ε multiplicans ipsum Δ fecit, ipse

## PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient Α, Β les deux nombres donnés; il faut trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Car les nombres Α, Β sont premiers entr'eux, ou ne le sont pas. Que les nombres Α, Β soient d'abord premiers entr'eux, et que Α multipliant Β produise Γ; le nombre Β multipliant Α produira Γ (16. 7); donc les nombres Α, Β mesureront Γ; je dis que Γ est le plus petit. Car si cela n'est pas, les nombres Α, Β mesureront quelque nombre plus petit que Γ. Qu'ils mesurent Δ. Qu'il y ait dans Ε autant d'unités que Α mesure de fois Δ; et qu'il y ait dans Ζ autant d'unités que Β mesure de fois Δ; donc Α multipliant Ε produira Δ, et Β multipliant Ζ pro-

Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσακίς, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἐπόμενος ἐπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὃ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσιν<sup>2</sup> τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν<sup>3</sup>. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφτωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. Καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·

vero B ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex Α, Ε ipsi ex Β, Ζ; est igitur ut Α ad Β ita Ζ ad Ε. Ipsi autem Α, Β primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse Β igitur ipsum Ε metitur, ut consequens consequentem. Et quoniam Α ipsos Β, Ε multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Β ad Ε ita Γ ad Δ; metitur autem Β ipsum Ε; metitur igitur et Γ ipsum Δ, major minorem, quod est impossibile; non igitur Α, Β metiuntur aliquem numerum minorem existentem ipso Γ, quoniam Α, Β primi inter se sunt; ipse Γ igitur minimus existens ab ipsis Α, Β mensuratur.

Non sint autem Α, Β primi inter se, et sumantur minimi numeri Ζ, Ε eorum eamdem rationem habentium quam ipsi Α, Β; æqualis igitur est ex Α, Ε ipsi ex Β, Ζ. Et Α ipsum Ε multiplicans ipsum Γ faciat; et Β igitur ipsum Ζ multiplicans ipsum Γ fecit. Ipsi Α, Β igitur ipsum Γ metiun-

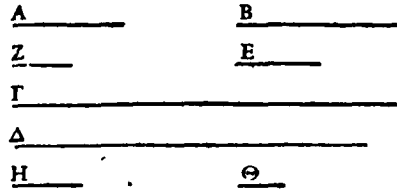
duira Δ; donc le produit de Α par Ε est égal au produit de Β par Ζ; donc Α est à Β comme Ζ est à Ε (19. 7). Mais les nombres Α, Β sont premiers entr'eux; les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont une même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc le nombre Β mesure Ε, c'est-à-dire le conséquent le conséquent. Mais Α multipliant Β, Ε a fait Γ, Δ; donc Β est à Ε comme Γ est à Δ (18. 7); mais Β mesure Ε; donc Γ mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Α, Β ne mesureront pas quelque nombre plus petit que Γ, puisque Α, Β sont premiers entr'eux; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par Α, Β.

Que les nombres Α, Β ne soient pas premiers entr'eux. Prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Β (35. 7), et que ces nombres soient Ζ, Ε; le produit de Α par Ε sera égal au produit de Β par Ζ (19. 7). Que Α multipliant Ε fasse Γ; donc Β multipliant Ζ fera Γ; donc Α, Β mesurent Γ; je dis que Γ est le

# 444 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετρεῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρίτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὅσῳ μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὅσῳ δὲ ὁ Β τὸν Δ

tur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, minorem existentem ipso Γ. Metiantur ipsum Δ. Et quoties Α quidem ipsum Δ metitur, tot unitates sicut in Η, quoties vero Β ipsum Δ metitur, tot



μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποῖνκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποῖνκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῷ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσῶς, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πιποῖνκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

unitates sint in Θ; ipse quidem Α igitur ipsum Η multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β ipsum Θ multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis est ipse ex Α, Η ipsi ex Β, Θ; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Ut autem Α ad Β ita Ζ ad Ε; sed ut Α ad Β ita Θ ad Η; et ut igitur Ζ ad Ε ita Θ ad Η. Ipsi autem Ζ, Ε minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse Ε igitur ipsum Η metitur. Et quoniam Α ipsos Ε, Η multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Ε ad Η ita Γ ad Δ. Ipse autem Ε ipsum Η metitur; et Γ

plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β mesureront quelque nombre plus petit que Γ. Qu'ils mesurent Δ, et qu'il y ait dans Η autant d'unités, que Α mesure de fois Δ, et dans Θ autant d'unités que Β mesure de fois Δ. Le nombre Α multipliant Η fera Δ, et Β multipliant Θ fera Δ; donc le produit de Α par Η est égal au produit de Β par Θ; donc Α est à Β comme Θ est à Η (19. 7). Mais Α est à Β comme Ζ est à Ε; et Α est à Β comme Θ est à Η; donc Ζ est à Ε comme Θ est à Η. Mais Ζ, Ε sont les plus petits nombres, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc Ε mesure Η. Mais Α multipliant Ε, Η fait Γ, Δ; donc Ε est à Η comme Γ est à Δ (17. 7). Mais Ε mesure Η;

## LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 445

Ο δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μίζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρέσουσι τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

igitur ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur Α, Β metientur aliquem numerum minorem ipso Γ; ipse Γ igitur minimus existens ab Α, Β mensuratur. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

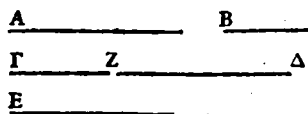
Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσῃ.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινα τὸν ΓΔ μετρίτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.

### PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri numerum aliquem metiantur, et minimus ab illis mensuratus eundem mensurabit.

Duo enim numeri Α, Β numerum aliquem ΓΔ metiantur, minimum autem ipsum Ε; dico et Ε ipsum ΓΔ metiri.



Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετρῶν λείπεται αὐτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. Καὶ ἵπαι οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετροῦσι. Μετροῦσι δὲ

Si enim non metitur Ε ipsum ΓΔ, Ε metiens ΖΔ relinquat se ipso minorem ΓΖ. Et quoniam Α, Β ipsum Ε metiuntur, ipse autem Ε ipsum ΔΖ metitur; et Α, Β igitur ipsum ΔΖ metiun-

donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7), le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Α, Β ne mesurent pas quelque nombre plus petit que Γ; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, le plus petit qu'ils mesurent mesurera ce même nombre.

Que les deux nombres Α, Β mesurent quelque nombre ΓΔ, et que Ε soit le plus petit nombre qu'ils mesurent; je dis que Ε mesure ΓΔ.

Car si Ε ne mesure pas ΓΔ, que Ε mesurant ΖΔ laisse ΓΖ plus petit que lui-même. Puisque les nombres Α, Β mesurent Ε, que Ε mesure ΔΖ, les nombres

## 446 LE SEPTIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρή-  
σουσιν, ἐλάττωσα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα-  
τον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, μετρεῖ ἄρα.  
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tur. Metiuntur autem et totum ΓΔ; et reliquum  
igitur ΓΖ metientur, minorem existentem ipso Ε,  
quod est impossibile; non igitur non metitur Ε ip-  
sum ΓΔ, metitur igitur. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

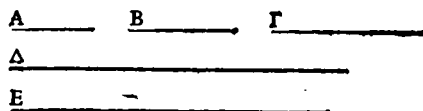
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον  
μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ  
δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετρήσουσιν ἀριθμόν.

### PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis, invenire quem mini-  
mum metiantur numerum.

Sint dati numeri Α, Β, Γ; oportet igitur inve-  
nire quem minimum metientur numerum.



Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος  
μετρούμενος ὁ Δ. Ὁ δὲ Γ τὸν Δ ἥτοι μετρεῖ, ἢ  
οὐ μετρεῖ. Μετρίτω πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ  
οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρή-  
σουσι<sup>3</sup>. Λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, με-  
τρήσουσιν τινα ἀριθμόν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάττωσα  
ὄντα τοῦ Δ. Μετρίτωσαν τὸν Ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ Α,  
Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε

Sumatur enim a duobus Α, Β minimus men-  
suratus ipse Δ. Ipse utique Γ ipsum Δ vel meti-  
tur, vel non metitur. Metiatur primum. Metia-  
tur autem et Α, Β ipsum Δ; ipsi Α, Β, Γ igitur  
ipsum Δ metientur. Dico et minimum. Si enim  
non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, Γ,  
minorem existentem ipso Δ. Metiantur ipsum Ε.  
Et quoniam Α, Β, Γ ipsum Ε metiuntur, et Α, Β

Α, Β mesureront ΔΖ; mais ils mesurent ΓΔ tout entier; donc ils mesureront le  
reste ΓΖ plus petit que Ε, ce qui est impossible; donc Ε ne peut pas ne point  
mesurer ΓΔ; donc il le mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXXVIII.

Trois nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient Α, Β, Γ les nombres donnés; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils  
mesurent.

Prenons le plus petit nombre Δ mesuré par les deux nombres Α, Β (36. 7). Le  
nombre Γ mesurera Δ, ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure. Puisque  
les nombres Α, Β mesurent Δ, les nombres Α, Β, Γ mesureront Δ. Je dis aussi  
que Δ est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β, Γ mesureront quelque  
nombre plus petit que Δ. Qu'ils mesurent Ε. Puisque les nombres Α, Β, Γ me-

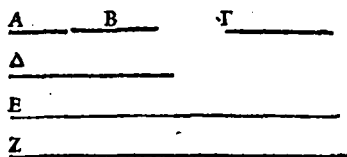
# LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 447

μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν  $A, B$  μετρούμενος τὸν  $E^5$  μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν  $A, B$  μετρούμενός ἐστιν ὁ  $\Delta$ · ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $E$  μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ  $A, B, \Gamma$  μετρήσουσι<sup>6</sup> τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ  $\Delta$ · οἱ  $A, B, \Gamma$  ἄρα ἐλάχιστον τὸν  $\Delta$  μετρήσουσι<sup>7</sup>.

Μὴ μετρεῖται δὲ πάλιν ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$ , καὶ εἰλήθω ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$  ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ  $E$ . Ἐπεὶ οὖν οἱ  $A, B$  τὸν  $\Delta$  μετροῦσιν, ὁ δὲ  $\Delta$  τὸν  $E$  μετρεῖ· καὶ οἱ  $A, B$  ἄρα τὸν  $E$  μετρή-

igitur ipsum  $E$  metiuntur; et minimus igitur ab  $A, B$  mensuratus ipsum  $E$  metietur. Minimus autem ab  $A, B$  mensuratus est  $\Delta$ ; ipse  $\Delta$  igitur ipsum  $E$  metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur  $A, B, \Gamma$  metientur aliquem numerum minorem existentem ipso  $\Delta$ ; ipsi  $A, B, \Gamma$  igitur minimum  $\Delta$  metiuntur.

Non metiatur autem rursus  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$ , et sumatur a  $\Gamma, \Delta$  minimus mensuratus numerus  $E$ . Et quoniam  $A, B$  ipsum  $\Delta$  metiuntur, ipse autem  $\Delta$  ipsum  $E$  metitur; et  $A, B$  igitur ipsum  $E$  me-



σουσι<sup>8</sup>. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ  $\Gamma^9$  καὶ οἱ  $A, B, \Gamma$  ἄρα τὸν  $E$  μετρήσουσι<sup>10</sup>. Λέγω δὲ<sup>11</sup> ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα οἱ  $A, B, \Gamma$ , ἐλάσσονα ὄντα τοῦ  $E$ . Μετρεῖτωσαν τὸν  $Z$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $A, B, \Gamma$  τὸν  $Z$  μετροῦσι· καὶ οἱ  $A, B$  ἄρα τὸν  $Z$  μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν  $A, B$  με-

tientur. Metitur autem et ipse  $\Gamma$ ; et  $A, B, \Gamma$  igitur ipsum  $E$  metientur. Dico et minimum. Si enim non, metientur aliquem ipsi  $A, B, \Gamma$ , minorem existentem ipso  $E$ . Metiantur  $Z$ . Et quoniam  $A, B, \Gamma$  ipsum  $Z$  metiuntur; et  $A, B$  igitur ipsum  $Z$  metiuntur; et minimus igitur ab  $A, B$  mensu-

surent  $E$ , les nombres  $A, B$  mesureront  $E$ , et le plus petit nombre mesuré par  $A, B$  mesurera  $E$  (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par  $A, B$  est  $\Delta$ ; donc  $\Delta$  mesure  $E$ , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres  $A, B, \Gamma$  ne mesurent pas un nombre plus petit que  $\Delta$ ; donc  $\Delta$  est le plus petit nombre mesuré par les nombres  $A, B, \Gamma$ .

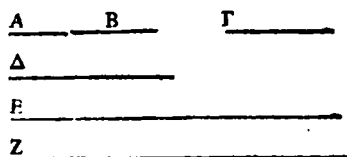
Que  $\Gamma$  ne mesure pas  $\Delta$ . Prenons le plus petit nombre  $E$  mesuré par  $\Gamma, \Delta$  (36. 7). Puisque  $A, B$  mesurent  $\Delta$ , et que  $\Delta$  mesure  $E$ , les nombres  $A, B$  mesureront  $E$ . Mais  $\Gamma$  mesure  $E$ ; donc les nombres  $A, B, \Gamma$  mesureront  $E$ . Je dis que  $E$  est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres  $A, B, \Gamma$  mesureront quelque nombre plus petit que  $E$ . Qu'ils mesurent  $Z$ . Puisque les nombres  $A, B, \Gamma$  mesurent  $Z$ , les nombres  $A, B$  mesureront  $Z$ , et le plus petit nombre mesuré par  $AB$  me-



## 448 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρούμενος τὸν Z μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Z μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Z· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Z μετροῦσιν· καὶ ὁ ελάχιστος ἄρα<sup>12</sup> ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Z μετρήσει<sup>13</sup>. Ο δὲ ελά-

ratus ipsum Z metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ; ipse Δ igitur ipsum Z metitur. Metitur autem et Γ ipsum Z; ipsi Δ, Γ igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur a Δ, Γ mensuratus ipsum Z metietur. Ipse autem mini-



χιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Z μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ελάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσι<sup>14</sup> τινὰ ἀριθμὸν ελάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα ελάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B, Γ μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mus a Δ, Γ mensuratus est E; E igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso E; ipse E igitur minimus existens ab A, B, Γ mensuratur. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Εὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμος μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι.

### PROPOSITIO XXXIX.

Si numerus ab aliquo numero mensuratur, mensuratus denominatam partem habebit a metiente.

surera z. Mais le plus petit mesuré par A, B est Δ; donc Δ mesure z. Mais Γ mesure z; donc Δ, Γ mesurent z. Donc le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ mesurera z (57. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ est E; donc E mesure z, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc les nombres A, B, Γ ne mesureront pas quelque nombre plus petit que E; donc E est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXXIX.

Si un nombre est mesuré par quelque nombre, le nombre mesuré aura une partie dénommée par le nombre qui le mesure.

# LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 449

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Numerus enim A ab aliquo numero B mensuretur; dico A denominatam partem habere ab ipso B.

A  
B  
Γ  
Δ

Οσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β· ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β. Οπὲρ ἔδει δεῖξαι.

Quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates sint in Γ; et quoniam B ipsum A metitur per unitates quæ in Γ, metitur autem et Δ unitas ipsum Γ numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius B numeri, eadem pars est et Γ ipsius A. Ipsa autem Δ unitas ipsius B numeri pars est denominata ab eo; et Γ igitur ipsius A pars est denominata ab ipso B; quare A partem habet Γ denominatam ab ipso B. Quod oportebat ostendere.

Que le nombre A soit mesuré par le nombre B; je dis que A a une partie dénommée par B.

Qu'il y ait dans Γ autant d'unités que B mesure de fois A. Puisque B mesure A par les unités qui sont en Γ, et que l'unité Δ mesure Γ par les unités qui sont en lui, l'unité Δ mesurera Γ autant de fois que B mesure A; donc, par permutation, l'unité Δ mesurera B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ est la même partie de A que l'unité Δ l'est de B. Mais l'unité Δ est une partie de B dénommée par lui; donc Γ est une partie de A dénommée par B; donc A a une partie Γ dénommée par B. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ΄.

Εάν ἀριθμὸς μέρος ἔχη ὅτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἔχῃ τῶν ὅτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμωνύμος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

$$\begin{array}{l} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{\Gamma} \\ \underline{\Delta} \end{array}$$

Ἐπὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμωνύμων τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμωνύμων αὐτῷ· ὁ μέρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si numerus partem habeat quamcumque, mensurabitur a denominato a parte numero.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et a B parte denominatus sit Γ; dico Γ ipsum A metiri.

Quoniam enim B ipsius A pars est et denominata ab ipso Γ, est autem Δ unitas ipsius Γ pars denominata ab eo; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius Γ numeri eadem pars est et B ipsius A; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; ipse Γ igitur ipsum A metitur. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XL.

Si un nombre a une partie quelconque, ce nombre sera mesuré par le nombre dénommé par cette partie.

Que le nombre A ait une partie quelconque B, et que le nombre Γ soit dénommé par B; je dis que Γ mesure A.

Puisque B est une partie de A dénommée par Γ, et que l'unité Δ est une partie de Γ dénommée par lui, l'unité Δ est la même partie du nombre Γ que B l'est de A; donc l'unité Δ mesure le nombre Γ autant de fois que B mesure A; donc par permutation l'unité Δ mesure le nombre B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ mesure A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

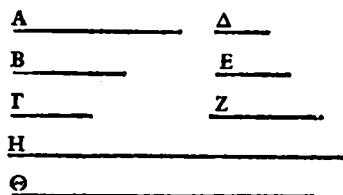
PROPOSITIO XLI.

Ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὦν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· διὸ δὴ ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὦν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ'.

Numerum invenire, qui minimus existens, habeat datas partes.

Sint datæ partes Α, Β, Γ; oportet igitur numerum invenire, qui minimus existens habeat datas partes Α, Β, Γ.



Ἐστωσαν τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ<sup>2</sup>, οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ<sup>3</sup> ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η· ὁ Η ἄρα<sup>4</sup> ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. Τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὦν. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ<sup>5</sup>. Ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων

Sint ab ipsis Α, Β, Γ partibus denominati numeri, Δ, Ε, Ζ, et sumatur ab ipsis Δ, Ε, Ζ minimus mensuratus numerus Η; ipse Η igitur denominatas partes habet ab ipsis Δ, Ε, Ζ. Ab ipsis autem Δ, Ε, Ζ denominatæ partes sunt Α, Β, Γ. Ipse Η igitur habet Α, Β, Γ partes. Dico et minimum esse. Si enim non, sit aliquis Θ ipso Η minor numerus qui habeat Α, Β, Γ partes. Quoniam Θ habet Α, Β, Γ partes; ipse Θ igitur a

PROPOSITION XLI.

Trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait des parties données.

Soient Α, Β, Γ les parties données; il faut trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait les parties données Α, Β, Γ.

Que les nombres Δ, Ε, Ζ soient dénommés par les parties Α, Β, Γ; prenons le plus petit nombre Η qui est mesuré par Δ, Ε, Ζ (38. 7); le nombre Η aura des parties dénommées par Δ, Ε, Ζ (39. 7). Mais les parties dénommées par Δ, Ε, Ζ sont Α, Β, Γ; donc Η a les parties Α, Β, Γ. Je dis que Η est le plus petit. Car si cela n'est pas, soit un nombre Θ plus petit que Η qui ait les parties Α, Β, Γ. Puisque Θ a les parties Α, Β, Γ, le nombre Θ sera mesuré par les nombres dénommés par les parties Α, Β, Γ (40. 7). Mais les nombres dénommés

## 452 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς  $A, B, \Gamma$  μέρεισι. Τοῖς  
 δὲ  $A, B, \Gamma$  μέρεισιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ  $\Delta,$   
 $E, Z$ · ὁ  $\Theta$  ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Delta, E, Z$  μετρεῖται, καὶ  
 ἔστιν ἰλάσσων τοῦ  $H$ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ  
 ἄρα ἔσται τις τοῦ  $H$  ἰλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἴξαι  
 τὰ  $A, B, \Gamma$  μέρη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

denominatis numeris ab  $A, B, \Gamma$  partibus men-  
 surabitur. Ab ipsis autem  $A, B, \Gamma$  partibus de-  
 nominati numeri sunt  $\Delta, E, Z$ ; ipse  $\Theta$  igitur ab  
 ipsis  $\Delta, E, Z$  mensuratur, et est minor ipso  $H$ ,  
 quod est impossibile; non igitur erit aliquis ipso  
 $H$  minor numerus, qui habeat  $A, B, \Gamma$  partes.  
 Quod oportebat ostendere.

par les parties  $A, B, \Gamma$  sont  $\Delta, E, Z$ ; donc  $\Theta$  plus petit que  $H$  sera mesuré par  
 $\Delta, E, Z$ , ce qui est impossible; il n'y a donc pas quelque nombre plus petit  
 que  $H$  qui ait les parties  $A, B, \Gamma$ . Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME LIVRE.

VILLE DE LYON  
 Biblioth. du Palais des Arts

# COLLATIO

## CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

### IMPERIALIS,

#### CUM EDITIÖNE OXONIÆ,

#### CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI  
SUNT MOMENTI.

Litterà *a* antecedente designatur codex 190; litterà *b*, editio Oxoniæ; litterà *c*, codex 1038; litterà *d*, codex 2466; litterà *e*, codex 2344; litterà *f*, codex 2345; litterà *g*, codex 2342; litterà *h*, codex 2346; litterà *k*, codex 2481; litterà *l*, codex 2531; litterà *m*, codex 2547; litterà *n*, codex 2343 (\*).

## EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

### DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                     | CODEX 190.                         | EDITIO OXONIÆ.                                             |
|-----------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| θ' (1) εἰρημνένην . . . . .             | <i>Idem. a</i> . . . . .           | deest. <i>b, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>                   |
| ι' (2) ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν<br>ἔστι· | <i>Id. a, d, m.</i> . . . .        | ἴστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν·<br><i>b, e, f, h, k, n.</i> |
| ιέ (3) πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν  | <i>Id. a, d, e, h, k, l, m.</i>    | desunt. <i>b, f, n.</i>                                    |
| ιή (4) τῆς . . . . .                    | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                           |
| (5) αὐτῆς . . . . .                     | <i>Id. a, d, e, h, m.</i> . .      | αὐτῆς τῆς <i>b, h.</i>                                     |
| ιβ' (6) σχῆμα . . . . .                 | <i>Id. a, d, e, f, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                           |
| (7) ἡ μείζωνος ἢ ἰσάσσοнос ἡμικυκλίου.  | <i>Id. a, d, e, h, k, l, m, n.</i> | desunt. <i>b, f.</i>                                       |
| κ' (8) Σχήματα εὐθύγραμμά . .           | <i>Id. a, d, m.</i> . . . .        | Εὐθύγραμμα σχήματά <i>b, e, f, h, k, l, m, n.</i>          |

(\*) Initium codicis 1038 deest usque ad propositionem octavam secundi libri elementorum, et initium codicis 2342 usque ad propositionem trigesimam secundam primi libri.

## EDITIO PARISIENSIS.

## CODEX 190.

## EDITIO OXONIÆ.

|                             |                                       |                             |
|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| κδ' (9) τὰς . . . . .       | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>            |
| κε' (10) ἀνίστους . . . . . | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m.</i>    | ἀνίστας <i>b, n.</i>        |
| κζ' (11) τε . . . . .       | δι. <i>a.</i> . . . . .               | τὴ <i>b, d, e, f, k, l.</i> |
| κθ' (12) τὰς . . . . .      | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>            |
| λέ (13) εἰς . . . . .       | <i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i> | ἐπ' <i>b.</i>               |

## POSTULATA.

|                                                                                                                                                                                                                                     |                                                 |                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| ζ' (1) ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς                                                                                                                                                                                                  | <i>Id. a, d.</i> . . . . .                      | κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας <i>b, c, f, h, k.</i> |
| δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.                                                                                                                                                                                 | <i>Id. a, d, e, f, h, k,</i><br><i>l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                  |
| ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἀπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. | <i>Id. a, d, e, f, h, k,</i><br><i>l, m, n.</i> | deest. <i>b.</i>                                  |
| ς'. Καὶ δύο εὐθείας μὴ περιέχιν.                                                                                                                                                                                                    | <i>Id. a, e, h, k.</i> . . . . .                | deest. <i>b, d, f, h, l, m, n.</i>                |

Hoc postulatam in codice *e* exaratur eadem manu in postulatis, et alienā in not. com.; in codice *f* alienā in postulatis, et eadem in not. com.; in codicibus *h, k* in post. et in com. not. eadem manu exaratur.

## NOTIONES COMMUNES.

|                                 |                                                    |                                                                                                                             |
|---------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| θ'. (1) ἴστι. . . . .           | εἶναι. . . . .                                     | ἴστι.                                                                                                                       |
| ι'. deest. . . . .              | <i>Id. a, d, f, h, k, l, m, n.</i>                 | ι'. καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. <i>b.</i>                                                                 |
| ια'. deest. <i>a.</i> . . . . . | <i>Id. b, d, e, f, g, h,</i><br><i>k, l, m, n.</i> | ια'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι |

αἱ δύο αὐται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον  
συμπισϋνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ  
μῆρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν  
ἰλάσσονες γωνίαι. *b*.

ιβ'. deest. . . . . deest. *a*. . . . . ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ πε-  
ρίχουσιν. *b, d, f, h, k, l, m, n*.

PROPOSITIO I.

|                                  |                              |                                     |
|----------------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Εκθέσις. . . . .              | <i>Id. a, d, e</i> . . . . . | deest. <i>b, f, h, k, l, m, n</i> . |
| 2. Εὐθεία . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                              |
| 3. Προσδιορισμὸς. . . . .        | <i>Id. a, d, e</i> . . . . . | deest. <i>b, f, h, k, m, n</i> .    |
| 4. πεπιρασμένης . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                              |
| 5. Κατασκευή. . . . .            | <i>Id. a, d, e</i> . . . . . | deest. <i>b, f, h, k, m, n</i> .    |
| 6. Αποδείξις. Καὶ ἐπεὶ . . . . . | <i>Id. a, d, e</i> . . . . . | Επεὶ οὖν <i>b, f, h, k, m, n</i> .  |
| 7. ἴση ἐστίν. . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .         | ἴστίη ἴση.                          |
| 8. Σύμπρασμα. . . . .            | <i>Id. a, d, e</i> . . . . . | deest. <i>b, f, h, k, m, n</i> .    |
| 9. συνίσταται . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .         | συνίσταται                          |

PROPOSITIO II.

|                                      |                      |                         |
|--------------------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1. τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ΒΓ εὐθείᾳ            |
| 2. ὁ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                  |
| 3. τῷ Δ, καὶ διαστήματι . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ |
| 4. Πάλιν, . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | Καὶ πάλιν,              |

PROPOSITIO III.

|                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. γὰρ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO IV.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ταῖς . . . . .    | deest. . . . .       | ταῖς   |
| 2. σημείων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 3. ἴστίη . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |



## PROPOSITIO VI.

| EDITIO PARISIENSIS.          | CODEX 190.         | EDITIO OXONIÆ.        |
|------------------------------|--------------------|-----------------------|
| 1. AB πλευρᾷ τῇ ΑΓ . . . .   | <i>Id.</i> . . . . | ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ       |
| 2. ΑΒ τῇ ΑΓ, μία . . . .     | <i>Id.</i> . . . . | ΑΓ τῇ ΑΒ ἑτέρα        |
| 3. ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ . . . | <i>Id.</i> . . . . | ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ   |
| 4. τὸ ἑλασσον τῷ μείζονι . . | <i>Id.</i> . . . . | τῷ ἑλάσσονι τὸ μείζον |

## PROPOSITIO VII.

|                                                          |                                                           |                                |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1. αἱ . . . . .                                          | deest. . . . .                                            | αἱ                             |
| 2. τὰ Α, Β . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                      | τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις |
| 3. Καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκβλήσθωσαν<br>ἐπ' εὐθείας ἐπ' τὰ Ε, Ζ. | Desunt in omnibus codicibus et in omnibus<br>editionibus. |                                |

## PROPOSITIO VIII.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. τὰς . . . . . | deest. . . . . | τὰς |
| 2. αἱ . . . . .  | deest. . . . . | αἱ  |

## PROPOSITIO IX.

|                       |                      |           |
|-----------------------|----------------------|-----------|
| 1. γὰρ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |
| 2. ἴση ἴστίν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἴση. |

## PROPOSITIO X.

|                              |                      |           |
|------------------------------|----------------------|-----------|
| 1. εὐθεῖαν πεπεραμένην . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |
| 2. ἴση ἴστίν. . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἴση. |
| 3. ἴση ἴστίν . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἴση  |

## PROPOSITIO XI.

|                                                        |                                          |
|--------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἴστίν. <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν.            |
| 2. εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . γραμμὴ ἥκται εὐθεῖα |

## PROPOSITIO XII.

|                                   |                      |                                |
|-----------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| 1. εὐθεῖα . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |
| 2. εὐθεῖαι . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |
| 3. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἴστιν. | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. |

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                       |                      |               |
|-----------------------|----------------------|---------------|
| 1. Εὰν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | Ὡς ἂν         |
| 2. ἥτοι . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ             |
| 3. εὐθεία . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.        |
| 4. ἴσαι εἰσί. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶν ἴσαι.   |
| 5. ἄρα . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα γωνίαι αἱ |
| 6. Εὰν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | Ὡς δὲ         |

PROPOSITIO XV.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.

deest. *a, h, i, k, n.*  
In codicibus *d, e, f*  
hoccollarium exa-  
ratum est in margine  
vel inter lineas.

Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ  
ἔσαι δὴ ποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν  
ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ  
γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας  
ποιήσουσι. *b, m.*

PROPOSITIO XVI.

|                            |                      |              |
|----------------------------|----------------------|--------------|
| 1. προσκβληθείσης, . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐκβληθείσης, |
| 2. γωνιῶν . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 3. ἐπ' εὐθείας . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |

PROPOSITIO XVIII.

|                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. γὰρ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO XX.

|                      |                      |                                                  |
|----------------------|----------------------|--------------------------------------------------|
| 1. desunt. . . . .   | desunt. . . . .      | ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ<br>ΑΓΔ μείζων ἐστὶ. |
| 2. ΔΑ τῇ ΑΓ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ.                                  |

PROPOSITIO XXI.

|                           |                      |             |
|---------------------------|----------------------|-------------|
| 1. πλευραὶ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.      |
| 2. πλευραὶ . . . . .      | deest. . . . .       | πλευραὶ     |
| 3. ταῦτα τοῖνυν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὰ αὐτὰ ἄρα |

## PROPOSITIO XXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                                                                                             |                                           |                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. εὐθείαις, . . . . .                                                                                      | deest. . . . .                            | εὐθείαις,                                    |
| 2. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου<br>τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς<br>μείζονας εἶναι, πάντῃ μετα-<br>λαμβανομένας. | <i>Id.</i> . . . . .                      | desunt.                                      |
| 3. καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η,<br>διαστήματι δὲ                                                             | πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η,<br>καὶ διαστήματι | Καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η,<br>διαστήματι δὲ |
| 4. συνέσταται . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                      | συνίστηται                                   |
| 5. οὖν . . . . .                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                      | γάρ                                          |

## PROPOSITIO XXIII.

- |                  |                      |        |
|------------------|----------------------|--------|
| 1. δύο . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | αἱ δύο |
|------------------|----------------------|--------|

## PROPOSITIO XXIV.

- |                                             |                                              |                                      |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας<br>τῆς ὑπὸ ΕΔΖ | ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς<br>πρὸς τῷ Δ γωνίας | γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ<br>ΕΔΖ |
| 2. ἴσιν . . . . .                           | deest. . . . .                               | ἴσιν                                 |
| 3. αὐτῇ . . . . .                           | αὐτῇ . . . . .                               | αὐτῇ                                 |
| 4. ἴσιν . . . . .                           | deest. . . . .                               | ἴσιν                                 |
| 5. ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .                         | γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία                |
| 6. καὶ . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .                         | deest.                               |

## PROPOSITIO XXV.

- |                                                    |                      |                        |
|----------------------------------------------------|----------------------|------------------------|
| 1. ταῖς . . . . .                                  | deest. . . . .       | ταῖς                   |
| 2. δὲ βάσιν . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . . | βάσιν δὲ               |
| 3. ἥχη . . . . .                                   | deest. . . . .       | ἥχη                    |
| 4. ΒΑΓ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | ΒΑΓ γωνία              |
| 5. ἂν ἦν . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἦ                      |
| 6. γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία        |
| 7. οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἴσιν ἡ ὑπὸ<br>ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ, | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλ' οὐδὲ μὲν ἐλάσσων, |

8. ἀν ἦν . . . . . *Id.* . . . . . ἦ  
9. ΒΑΓ . . . . . *Id.* . . . . . ΒΑΓ γωνία

PROPOSITIO XXVI.

1. ταῖς . . . . . *deest.* . . . . . ταῖς  
2. ἦτοι . . . . . *Id.* . . . . . ἦτον  
3. Εστω . . . . . *Id.* . . . . . Εστῶσαν  
4. ἴστί. . . . . *Id.* . . . . . ἴσται.  
5. ἴστί, . . . . . *Id.* . . . . . ἴσται,  
6. ἴσονται, . . . . . *Id.* . . . . . ἴσονται, ἑκάτερα ἑκάτερα,  
7. τῇ . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
8. τῇ λοιπῇ γωνίᾳ . . . . . *Id.* . . . . . λοιπῇ  
9. ἡ . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
10. Εστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἢ *Id.* . . . . . Εστω εἰ δυνατόν μείζων ἢ ΒΓ,  
ΒΓ τῆς ΕΖ,  
11. ἴσονται, . . . . . *Id.* . . . . . ἴσονται, ἑκάτερα ἑκάτερα  
12. ΒΓΑ . . . . . *Id.* . . . . . ΒΓΑ γωνία  
13. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ *hæc verba in margine concordat cum edit. Paris.*  
ΒΓΑ ἴστί. ἴση· *alienâ manu exarata*  
*sunt.*  
14. ἴσον, καὶ λοιπὴ . . . . . *Id.* . . . . . ἴσον ἴστί, καὶ ἡ λοιπὴ  
15. ἴση. . . . . *Id.* . . . . . ἴση ἴστί.

PROPOSITIO XXVII.

1. ΓΔ. . . . . *Id.* . . . . . ΓΔ εὐθεία.  
2. ἴση ἴστί τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναν- *Id.* . . . . . μείζων ἴστί τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναν-  
τίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ, *τίον γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ*  
*καὶ ἴση,*

PROPOSITIO XXVIII.

1. ποιῇ· . . . . . *deest.* . . . . . ποιῇ·  
2. ἀπεναντίον . . . . . *Id.* . . . . . ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη

## PROPOSITIO XXIX.

| EDITIO PARISIENSIS.           | CODEX 190.      | EDITIO OXONIÆ.                                             |
|-------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------------|
| 1. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . | desunt. . . . . | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη                                       |
| 2. τε . . . . .               | deest. . . . .  | τε                                                         |
| 3. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . | desunt. . . . . | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη                                       |
| 4. ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. .   | Id. . . . .     | ἡ ὑπὸ ΑΗΘ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν<br>ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. |
| 5. ἀλλὰ . . . . .             | Id. . . . .     | ἀλλὰ καὶ                                                   |
| 6. αἱ . . . . .               | Id. . . . .     | καὶ αἱ                                                     |

## PROPOSITIO XXX.

|                              |                       |                  |
|------------------------------|-----------------------|------------------|
| 1. τὰς . . . . .             | deest. . . . .        | τὰς              |
| 2. εὐθείας . . . . .         | δύο εὐθείας . . . . . | εὐθείας          |
| 3. αἱ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς . . . | conclusio deest . .   | conclusio adest. |

## PROPOSITIO XXXI.

|                         |                                            |           |
|-------------------------|--------------------------------------------|-----------|
| 1. σημείου, . . . . .   | σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ σημείου,<br>αὐτῆς, |           |
| 2. ἑμπύπτουσα . . . . . | Id. . . . .                                | ἑμπισούσα |

## PROPOSITIO XXXII.

|                    |                |       |
|--------------------|----------------|-------|
| 1. ταῖς . . . . .  | deest. . . . . | ταῖς  |
| 2. ἐκτὸς . . . . . | deest. . . . . | ἐκτὸς |

## PROPOSITIO XXXIII.

|                             |                |                  |
|-----------------------------|----------------|------------------|
| 1. τε . . . . .             | Id. . . . .    | deest.           |
| 1. γὰρ . . . . .            | deest. . . . . | γὰρ              |
| 3. ἐστίν. . . . .           | deest. . . . . | ἐστίν.           |
| 4. τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ . . . . | deest. . . . . | τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ |

## PROPOSITIO XXXIV.

|                       |             |             |
|-----------------------|-------------|-------------|
| 1. χωρίον . . . . .   | Id. . . . . | deest.      |
| 2. πλείωρὰν . . . . . | Id. . . . . | πλείωρὰν τῇ |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS. 461

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                         |                                  |                                                      |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------|
| 3. καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶν . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .             | desunt.                                              |
| 4. ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴσιν ἴση. .                           | <i>Id.</i> . . . . .             | ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν.                            |
| 5. δὲ . . . . .                                         | deest. . . . .                   | δὲ                                                   |
| 6. ἴση ἐστὶ καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ<br>βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ. | ἴση καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῇ<br>ΒΔ ἴση. | ἴση ἐστὶ καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ<br>βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ. |

## PROPOSITIO XXXV.

|                                |                        |                       |
|--------------------------------|------------------------|-----------------------|
| 1. ὄντα . . . . .              | deest. . . . .         | ὄντα                  |
| 2. ΕΒΓΖ. . . . .               | ΕΒΓΖ παραλληλογράμμου. | ΕΒΓΖ.                 |
| 3. ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. . . . | <i>Id.</i> . . . . .   | τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ. |
| 4. ἐστὶν ἴση. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴση ἐστίν.            |
| 5. ἐστὶν ἴση. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴση ἐστὶ.             |
| 6. ἐστὶν ἴση, . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴση ἐστίν,            |
| 7. ἴσται. . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴσται.                |
| 8. ἐστὶν ἴσον. . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴσον ἐστὶ.            |

## PROPOSITIO XXXVI.

|                        |                      |            |
|------------------------|----------------------|------------|
| 1. τῶν . . . . .       | deest. . . . .       | τῶν        |
| 2. ὄντα . . . . .      | deest. . . . .       | ὄντα       |
| 3. ἀλλὰ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλὰ καὶ   |
| 4. τε . . . . .        | deest. . . . .       | τε         |
| 5. ἐστὶν ἴσον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἐστὶ. |

## PROPOSITIO XXXVII.

|                       |                      |                       |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. ὄντα . . . . .     | deest. . . . .       | ὄντα                  |
| 2. Ε, Ζ, . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | Ε, Ζ σημεία,          |
| 3. εἰσιν ἴσα. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ, |
| 4. εἰσι . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσται                 |

## PROPOSITIO XXXVIII.

|                   |                      |        |
|-------------------|----------------------|--------|
| 1. ἐστίν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσίν. |
| 2. τὰ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

|                        |                      |           |
|------------------------|----------------------|-----------|
| 3. διτα . . . . .      | deest. . . . .       | δντα      |
| 4. ἐπὶ . . . . .       | κατὰ . . . . .       | ἐπὶ       |
| 5. αὐτὸ δίχα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δίχα αὐτὸ |
| 6. αὐτὸ δίχα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δίχα αὐτὸ |

## PROPOSITIO XXXIX.

|                          |                       |              |
|--------------------------|-----------------------|--------------|
| 1. καὶ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.       |
| 2. ἴσα τρίγωνα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .  | τρίγωνα ἴσα  |
| 3. μέρη . . . . .        | μέρη τῆς ΒΓ . . . . . | μέρη         |
| 4. καὶ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.       |
| 5. ἄρα . . . . .         | δὴ . . . . .          | ἄρα          |
| 6. ταῖς ΒΓ, ΑΕ. . . . .  | deest. . . . .        | ταῖς ΒΓ, ΑΕ. |
| 7. τρίγωνον . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.       |
| 8. ἐστὶν . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.       |

## PROPOSITIO XL.

|                                   |                      |                       |
|-----------------------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. τῶν . . . . .                  | deest. . . . .       | τῶν                   |
| 2. καὶ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, |
| 3. ἴσα τρίγωνα . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | τρίγωνα ἴσα           |
| 4. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . . . . | deest. . . . .       | καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη  |
| 5. ἄρα . . . . .                  | δὴ . . . . .         | ἄρα                   |
| 6. τριγώνω . . . . .              | deest. . . . .       | τριγώνω               |
| 7. τρίγωνον . . . . .             | deest. . . . .       | τρίγωνον              |
| 8. ἐστὶν . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                |
| 9. ἐστὶν . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν                 |
| 10. ἐστὶ παράλληλος . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | παράλληλός ἐστι.      |

## PROPOSITIO XLI.

|                               |                      |                  |
|-------------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ἐστὶ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | ἔσται            |
| 2. τε . . . . .               | deest. . . . .       | τε               |
| 3. παραλλήλοις ἔστω . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστω παραλλήλοις |
| 3. τρίγωνον . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |

PROPOSITIO XLII.

| EDITIO PARISIENSIS.                 | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.       |
|-------------------------------------|----------------------|----------------------|
| 1. γωνία εὐθυγράμμου . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθυγράμμου γωνία.   |
| 2. γωνία εὐθυγράμμος ἢ Δ° . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθύγραμμος γωνία Δ° |
| 3. ἴση . . . . .                    | deest. . . . .       | ἴση                  |
| 4. τρίγωνον . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |
| 5. συνίσταται . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | συνιστάθη            |
| 6. ἢ τις . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ                    |

PROPOSITIO XLIII.

|                                                                                |                      |                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ |
| 2. τριγώνῳ . . . . .                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                            |
| 3. λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπλήρωματι ἐστὶν ἴσον.          | <i>Id.</i> . . . . . | λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπλήρωματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.        |

PROPOSITIO XLIV.

|                               |                      |                  |
|-------------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ὥστε . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | ὥσπερ            |
| 2. ἐνέπιπεν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἐμπεπτωκεν       |
| 3. ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ |
| 4. εἰσὶν ἴσαι . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσαι εἰσὶν       |
| 5. τὴν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 6. τὰ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 7. ἀλλὰ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλὰ καὶ         |
| 8. ἄρα . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |

PROPOSITIO XLV.

|                                |                      |                    |
|--------------------------------|----------------------|--------------------|
| 1. γωνία εὐθυγράμμου . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθυγράμμου γωνία. |
| 2. μὲν . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.             |
| 3. τῇ δοθείσῃ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση                |
| 4. ἴση ἐστὶ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἴση          |
| 5. ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ        |



|                        |                      |            |
|------------------------|----------------------|------------|
| 6. ἴσθιν ἴση. . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσθιν. |
| 7. εὐθεία . . . . .    | εὐθείας . . . . .    | εὐθεία     |
| 8. ἴσθιν . . . . .     | ἴσθι καὶ . . . . .   | ἴσθιν      |
| 9. ἴσθιν ἴσον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἴστί. |
| 10. τῇ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.     |

## PROPOSITIO XLVI.

|                   |                      |          |
|-------------------|----------------------|----------|
| 1. Ἀλλὰ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | Ἀλλὰ καὶ |
|-------------------|----------------------|----------|

## PROPOSITIO XLVII.

|                                                                |                      |                  |
|----------------------------------------------------------------|----------------------|------------------|
| 1. γωνίαν* . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 2. εὐθεία . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 3. καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσθιν ἢ μὲν ΔΒ τῇ<br>ΒΓ, ἢ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὲ | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπεὶ δύο.    |
| 4. ἴση* . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσθιν*       |
| 5. ἴση, . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἴση,       |
| 6. ἴσθι . . . . .                                              | deest. . . . .       | ἴσθι             |
| 7. εἰσι παραλλήλοις . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | παραλλήλοις εἰσὶ |
| 8. τετράγωνον . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | τετράγωνον ΒΕ    |

## PROPOSITIO XLVIII.

|                                |                      |                   |
|--------------------------------|----------------------|-------------------|
| 1. εὐθεία πρὸς ὀρθὰς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ὀρθὰς εὐθεία |
| 2. ἴση* . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἴση*        |
| 3. ἴση. . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἴση.        |

---

# LIBER SECUNDUS.

## DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODĒX 190.

EDITIO OXONIÆ.

β' (1) παραλληλογράμμον ἐν . *Id.* . . . . . ἐν παραλληλογράμμων

## PROPOSITIO I.

|                     |                      |        |
|---------------------|----------------------|--------|
| 1. τε ὑπὸ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπό τε |
| 2. τε ὑπὸ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπό τε |
| 3. ἔτι . . . . .    | deest. . . . .       | ἔτι    |
| 4. μὲν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 5. τῶν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 6. τὸ . . . . .     | τῷ . . . . .         | τὸ     |
| 7. τὸ . . . . .     | τῷ . . . . .         | τὸ     |
| 8. τὸ . . . . .     | τῷ . . . . .         | τὸ     |

## PROPOSITIO II.

|                                |                              |                           |
|--------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| 1. τὰ . . . . .                | τὸ . . . . .                 | τὰ                        |
| 2. περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα . | περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον | περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα |
| 3. τῆς . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .         | τῶν                       |
| 4. τῶν . . . . .               | deest. . . . .               | τῶν                       |
| 5. ἴστί . . . . .              | deest. . . . .               | ἴστί                      |

## PROPOSITIO III.

|                            |                      |                 |
|----------------------------|----------------------|-----------------|
| 1. τμηθῇ ὡς ἔτυχι, . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὡς ἔτυχι τμηθῇ, |
| 2. Γ' . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | Γ σημείον.      |
| 3. τῆς . . . . .           | τοῦ . . . . .        | τῆς             |
| 4. διήχθω . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἤχθω            |
| 5. τὸ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.          |

## PROPOSITIO IV.

| EDITIO PARISIENSIS.             | CODEX 190.                                  | EDITIO OXONIÆ.               |
|---------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                | deest. . . . .                              | τῶν                          |
| 3. ἀλλὰ ἢ μὲν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .                        | ἀλλὰ καὶ ἢ                   |
| 3. καὶ εἰς αὐτάς ἐπίπαιεν ἢ ΓΒ· | verba in margine re-<br>centi manu exarata. | καὶ εἰς αὐτάς ἐπίπαιεν ἢ ΓΒ· |
| 4. εἰσὶν ἴσαι. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .                        | ἴσαι εἰσὶν.                  |
| 5. ἀπὸ . . . . .                | deest. . . . .                              | ἀπὸ                          |
| 6. τῶν . . . . .                | deest. . . . .                              | τῶν                          |
| 7. τεσσάρα . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .                        | deest.                       |
| 8. τὸ . . . . .                 | deest. . . . .                              | τὸ                           |

## A L I T E R.

Hæc altera demonstratio exarata est in chartâ paginæ contiguâ.

|                         |                      |               |
|-------------------------|----------------------|---------------|
| 1. καὶ ἄλλως. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἑτέρα δεῖξις. |
| 2. ἐντὸς καὶ . . . . .  | desunt. . . . .      | ἐντὸς καὶ     |
| 3. τῷ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ            |
| 4. καὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.        |
| 5. ἰστί. . . . .        | deest. . . . .       | ἰστί.         |
| 6. ἰστὶν ἴσον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἰστί     |
| 7. ἴση ἰστί . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση           |
| 8. ἄρα . . . . .        | deest. . . . .       | ἄρα           |

## C O R O L L A R I U M.

|                    |                |       |
|--------------------|----------------|-------|
| 9. ἰστὶν . . . . . | deest. . . . . | ἰστὶν |
|--------------------|----------------|-------|

## PROPOSITIO V.

|                                                                                  |                      |                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ<br>Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ πα-<br>ράλληλος ἤχθω ἢ ΑΚ. | <i>Id.</i> . . . . . | ἤχθω πάλιν ἢ ΚΑΜ, καὶ πάλιν<br>διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ,<br>ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἢ ΑΚ. |
| 2. ἰστὶν ἴση· . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἰστί                                                                             |
| 3. ΝΞΟ γνώμονι . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΖ καὶ ΔΑ                                                                            |
| 4. μὲν . . . . .                                                                 | deest. . . . .       | μὲν                                                                                  |

|                    |                      |                                        |
|--------------------|----------------------|----------------------------------------|
| 5. γὰρ ἡ . . . . . | ἡ γὰρ . . . . .      | γὰρ ἡ                                  |
| 6. ΔΒ. . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΒ· τὸ δὲ ΖΔ, ΔΑ ἴσιν ὁ ΝΞΟ<br>γνώμων· |
| 7. τῆς . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                 |

PROPOSITIO VI.

|                              |                                                           |                         |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------|
| 1. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι . | Hæc verba manu re-<br>centi inter lineas<br>exarata sunt. | ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι |
| 2. ἴσιν . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .                                      | deest.                  |
| 3. ἀλλὰ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .                                      | ἀλλὰ καὶ                |
| 4. ὀρθογωνίῳ. . . . .        | deest. . . . .                                            | ὀρθογωνίῳ.              |

PROPOSITIO VII.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. Ἐπεὶ οὖν . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἐπεὶ   |
| 2. ἴσον ἴσιν· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴσον· |
| 3. τῷ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ τε      |

PROPOSITIO VIII.

|                               |                      |                   |
|-------------------------------|----------------------|-------------------|
| 1. ἀπὸ τοῦ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 2. ἴση τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ, . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ΓΒ ἴση ἢ ΒΔ,   |
| 3. ἄρα . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 4. μὲν . . . . .              | deest. . . . .       | μὲν               |
| 5. καὶ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.            |
| 6. μὲν . . . . .              | deest. . . . .       | μὲν               |
| 7. ἴσιν ἴσον, . . . . .       | ἴσον ἴσιν, . . . . . | ἴσιν ἴσον,        |
| 8. ἴσον ἴσιν· . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴσον·        |
| 9. ἴσιν . . . . .             | deest. . . . .       | ἴσιν              |
| 10. ἴσιν ἴση· . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν·         |
| 11. ἴση ἴσιν· . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση.         |
| 12. μὲν . . . . .             | deest. . . . .       | μὲν               |
| 13. τετραπλάσιά ἴσιν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν τετραπλάσια. |

# 468 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                 |                      |              |
|---------------------------------|----------------------|--------------|
| 14. ἐστὶ τοῦ ΑΚ. . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ ΑΚ ἐστὶ. |
| 15. γὰρ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | γὰρ καὶ .    |
| 16. τῆς . . . . .               | deest. . . . .       | τῆς          |
| 17. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.      |

ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον

ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. in codice a legitur ἀπὸ

Ἰση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ.

ΑΓ, ἀπὸ ΑΔ.

## PROPOSITIO IX.

- |                                                    |                      |                                        |
|----------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------|
| 1. παράλληλος ἦχθω . . . . .                       | desunt. . . . .      | adsunt.                                |
| 2. καὶ εἰσὶν ἴσαι . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                                |
| 3. ἐστὶν . . . . .                                 | deest. . . . .       | ἐστὶν                                  |
| 4. πλευρᾷ . . . . .                                | deest. . . . .       | πλευρᾷ                                 |
| 5. ὅτι πάλιν . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | πάλιν ἐστὶ                             |
| 6. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 7. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 8. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 9. τῆς . . . . .                                   | deest. . . . .       | τῆς                                    |
| 10. ἴσον ἐστὶ . . . . .                            | ἐστὶν ἴσον . . . . . | ἴσον ἐστὶ                              |
| 11. ΕΖ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ<br>τῆς ΕΖ.           | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετρά-<br>γώνον. |
| 12. ΑΛΛὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον<br>ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. | <i>Id.</i> . . . . . | Ἰση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ.                     |
| 13. ἐστὶν . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                 |

## PROPOSITIO X.

- |                               |                        |                                           |
|-------------------------------|------------------------|-------------------------------------------|
| 1. ἀναγραφέντος τετραγώνου. . | ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. | concordat cum edit. Paris.                |
| 2. πάλιν . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                                    |
| 3. ἐστὶν . . . . .            | deest. . . . .         | ἐστὶν                                     |
| 4. ὁρθῆς ἐστὶν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .   | ὁρθῆς ἐστὶν                               |
| 5. ΔΗΒ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .   | ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστὶν ὁρθῆς· ἡ ἄρα<br>ὑπὸ ΔΗΒ |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS. 469

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΕΓ . concordat cum edit. Paris.  
ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ

|                  |                      |                |
|------------------|----------------------|----------------|
| 7. ΗΖ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΖ τετράγωνον  |
| 8. ΖΕ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ΖΕ τετραγώνω.  |
| 9. ΕΗ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΗ τετράγωνον. |
| 10. ΑΗ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΗ τετράγωνα.  |
| 11. ΓΔ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΓΔ τετραγώνων. |

## PROPOSITIO XI.

|                                                                        |                      |                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ποιεῖν . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | εἶναι                                                                                   |
| 2. τῆς ΕΒ τετραγώνω . . . . .                                          | ΕΒ . . . . .         | concordat cum edit. Paris.                                                              |
| 3. τῆς . . . . .                                                       | deest. . . . .       | τῆς                                                                                     |
| 4. ὀρθογώνιον . . . . .                                                | deest. . . . .       | ὀρθογώνιον                                                                              |
| 5. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς<br>ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ,<br>ΒΘ· | <i>Id.</i> . . . . . | Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ἀπὸ τῶν<br>ΑΒ, ΒΘ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ·<br>τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ. |
| 6. τῆς . . . . .                                                       | deest. . . . .       | τῆς                                                                                     |
| linea decima.                                                          |                      |                                                                                         |
| 7. ποιεῖν . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | εἶναι                                                                                   |

## PROPOSITIO XII.

|                                   |                      |                        |
|-----------------------------------|----------------------|------------------------|
| 1. ἐκκληθεῖσαν . . . . .          | deest. . . . .       | ἐκκληθεῖσαν            |
| 2. γωνίαν, . . . . .              | deest. . . . .       | γωνίαν,                |
| 3. περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. . . . . | desunt. . . . .      | περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. |
| 4. τῷ. . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ.                    |
| 5. ἴσον . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἐστὶ              |
| 6. τετραγώνον . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |

## PROPOSITIO XIII.

|                  |                      |     |
|------------------|----------------------|-----|
| 1. τοῦ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς |
| 2. τῆς . . . . . | deest. . . . .       | τῆς |

# 470 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

|         |           |        |           |        |
|---------|-----------|--------|-----------|--------|
| 3. ἴστί | . . . . . | deest. | . . . . . | ἴστί   |
| 4. ἴστί | . . . . . | deest. | . . . . . | ἴστί   |
| 5. τῶν  | . . . . . | deest. | . . . . . | τῶν    |
| 6. τὸ   | . . . . . | Id.    | . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO XIV.

|                            |           |         |           |             |
|----------------------------|-----------|---------|-----------|-------------|
| 1. γάρ                     | . . . . . | Id.     | . . . . . | deest.      |
| 2. μὲν                     | . . . . . | deest.  | . . . . . | μὲν         |
| 3. τῆς HE ἴσον             | . . . . . | HE ἴσον | . . . . . | τῆς HE ἴσα  |
| 4. τὸ ὑπὸ τῶν BE, EA ἴστί, | . . . . . | Id.     | . . . . . | τὸ BA ἴστί, |
| 5. καὶ                     | . . . . . | Id.     | . . . . . | deest.      |

# LIBER TERTIUS.

## DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.           | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.         |
|-------------------------------|----------------------|------------------------|
| α. (1) ἴσαι εἰσὶν. . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶν ἴσαι.            |
| β. (2) ἐπὶ μηδέτερα μερή. . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |
| δ. (3) ἀπὸ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                 |
| η. (4) τις . . . . .          | deest. . . . .       | τις.                   |
| ι. (5) τοῦ κύκλου συσταθῇ . . | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ |

## PROPOSITIO I.

|                               |                      |                    |
|-------------------------------|----------------------|--------------------|
| 1. Ηχθω . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | Διήχθω.            |
| 2. κύκλου. . . . .            | deest. . . . .       | κύκλου.            |
| 3. linea 12 paginæ 119 δύο δὲ | <i>Id.</i> . . . . . | δύο δὲ             |
| 4. ἴσιν ἴση, . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν,          |
| 5. τοῦ Η. . . . .             | deest. . . . .       | τοῦ Η.             |
| 6. ἴση ἴσιν. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση.          |
| 7. ἴσων . . . . .             | deest. . . . .       | ἴσων               |
| 8. ἐλάττων τῇ μείζονι, . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | μείζων τῇ ἐλάττωνι |
| 9. κύκλου. . . . .            | deest. . . . .       | κύκλου.            |
| 10. ὅπῃ ἴδει ποιῆσαι. . . .   | desunt. . . . .      | Ὅπῃ ἴδει ποιῆσαι.  |

## COROLLARIUM.

|                          |                           |            |
|--------------------------|---------------------------|------------|
| 11. εὐθεῖα τις . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .      | τις εὐθεῖα |
| 12. κύκλου. . . . .      | κύκλου. Ὅπῃ ἴδει ποιῆσαι. | κύκλου.    |

## PROPOSITIO II.

|                                        |                      |              |
|----------------------------------------|----------------------|--------------|
| 1. αὐτὰ . . . . .                      | deest. . . . .       | αὐτὰ         |
| 2. δύο τυχόντα . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | τυχόντα δύο  |
| 3. ΔΖΕ. . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . . | ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε. |
| 4. linea 10 paginæ 122 πῶς<br>σῴζεται. | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |



## PROPOSITIO III.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                   | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| linea 1 paginæ 123 τέμνει .                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί·                                                                       |
| linea 2 paginæ 123 τέμνει .                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί·                                                                       |
| 1. δὴ . . . . .                                                                       | deest. . . . .       | δὴ                                                                           |
| 2. εἰς, . . . . .                                                                     | deest. . . . .       | εἰς.                                                                         |
| 3. γωνία ἄρα . . . . .                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ γωνία                                                                    |
| 4. ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν<br>ἔστιν· ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἑκατέρα<br>τῶν ὑπὸ AZE, BZE. | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθή ἐστιν. |
| 5. οὖσα . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                       |
| 6. αὐτὴν . . . . .                                                                    | deest. . . . .       | αὐτὴν                                                                        |
| 7. καὶ . . . . .                                                                      | deest. . . . .       | καὶ                                                                          |
| 8. ἡ EA . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ ἐκ τοῦ κέντρου EA                                                          |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                      | deest. . . . .       | ἄρα                                                                          |

## PROPOSITIO IV.

|                        |                      |                  |
|------------------------|----------------------|------------------|
| 1. σημείον, . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 2. κέντρου . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | κέντρου ἡμέτερον |
| 3. τέμνει· . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί·           |
| 4. ἄρα ἔστιν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν ἄρα        |
| 5. τέμνει· . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | τεμνί·           |
| 6. ἡ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 7. ἔστιν. . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |

## PROPOSITIO V.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. ἡ ΕΓ καὶ, . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἡ ΕΓ,  |
| 2. ἔστιν ἴση, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἔστιν, |
| 3. ἔστιν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.     |

## PROPOSITIO VI.

|                           |                      |              |
|---------------------------|----------------------|--------------|
| 1. ἐντός, . . . . .       | deest. . . . .       | ἐντός,       |
| 2. ἐφαπτίσθωσαν . . . . . | ἀπτίσθωσαν . . . . . | ἐφαπτίσθωσαν |

|                        |                         |               |
|------------------------|-------------------------|---------------|
| 3. ἴσται . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴσται         |
| 4. καὶ . . . . .       | <i>deest.</i> . . . . . | καὶ           |
| 5. ἴσται ἴση . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴση ἴσται     |
| 6. ἴσται . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .    | <i>deest.</i> |

PROPOSITIO VII.

|                                                   |                         |                                                |
|---------------------------------------------------|-------------------------|------------------------------------------------|
| 1. πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν<br>εὐθεῖαι τινες· | <i>Id.</i> . . . . .    | προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες πρὸς<br>τὸν κύκλον· |
| 2. μόνον . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .    | μόνον εὐθεῖαι                                  |
| 3. EB, EZ ἄρα . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . .    | ἄρα EB, EZ                                     |
| 4. δὲ . . . . .                                   | <i>deest.</i> . . . . . | δὲ                                             |
| 5. ἴσται . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .    | <i>deest.</i>                                  |
| 6. ἴσαι . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴσαι εὐθεῖαι                                   |
| 7. ἴσται ἴση, . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴση ἴσται,                                     |
| 8. μὲν καὶ ἡ ZΘ τῇ ZH· . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .    | ἡ ZΘ τῇ ZH ἴση ἴσται·                          |
| 9. ἴσται ἴση, . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . .    | ἴση ἴσται,                                     |
| 10. τῇ . . . . .                                  | τῆς . . . . .           | τῇ                                             |
| 11. HEZ . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | HEZ γωνία                                      |
| 12. ἴσται . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .    | <i>deest.</i>                                  |

PROPOSITIO VIII.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον<br>ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς<br>τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι<br>τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν-<br>τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχι·<br>τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι-<br>φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν<br>μεγίστη μὲν ἴσται ἡ διὰ τοῦ<br>κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ<br>ἑγγιον τῆς διὰ κέντρου τῆς<br>ἀπώτερον μείζων ἴσται· τῶν δὲ<br>πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν | Εὰν κύκλου ληθῇ τι ση-<br>μεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ<br>σημείου πρὸς τὸν κύ-<br>κλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι<br>τινες, ὧν μία μὲν διὰ<br>τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοι-<br>παὶ ὡς ἔτυχι· τῶν μὲν<br>πρὸς τὴν κοίλην περι-<br>φέρειαν προσπιπτουσῶν<br>εὐθειῶν μεγίστη μὲν<br>ἴσται ἡ διὰ τοῦ κέντρου,<br>ἡλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ | Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκ-<br>τός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς<br>τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι<br>τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν-<br>τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχι·<br>τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι-<br>φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν<br>μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου·<br>τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἑγγιον τῆς<br>διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον<br>μείζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν<br>κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπ- |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## EDITIO PARISIENSIS.

προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἢ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὶ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπιοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

## CODEX 190.

τοῦ τε σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου προσπίπτουσα· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὶ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶ· ἢ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὶ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπιοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

## EDITIO OXONIÆ.

τουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἢ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὶ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπιοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὶ δὲ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐσται, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἐλαχίστη δὲ ἢ μὲν ἢ ΔΗ, ἢ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὶ δὲ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐσται, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὸν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐ-

EDITIO PARISIENSIS.

μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰὲ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

CODEX 190.

διαμέτρου ἡ ΑΗ· μέζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΑΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· αἰὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

EDITIO OXONIÆ.

θειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰὲ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

|                             |                      |                          |
|-----------------------------|----------------------|--------------------------|
| 2. Αἰ δὲ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἀλλ' αἰ                  |
| 3. προσκείσθω . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                       |
| 4. αἰ ΜΚ, ΚΔ ἄρα . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | αἰ ΜΚ, ΚΔ, αἰ ἄρα ΜΚ, ΚΔ |
| 5. ἴση δὲ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ὣν ἐστὶν ἴση             |
| 6. ἴσαι . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσαι εὐθεῖαι             |
| 7. προσπισσοῦνται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | συμπισσοῦνται            |
| 8. ἴση· . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ·                |
| 9. δὴ . . . . .             | deest. . . . .       | δὴ                       |
| 10. ἐστὶν ἴση, . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶν,               |
| 11. Ἐπεὶ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | Καὶ ἐπεὶ                 |
| 12. ἐστὶν ἴση· . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶν·               |
| 13. ἄρα . . . . .           | deest. . . . .       | ἄρα                      |
| 14. ἐστὶν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 15. ἴσαι . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖαι                  |

PROPOSITIO IX.

|                                         |                      |                                        |
|-----------------------------------------|----------------------|----------------------------------------|
| 1. ἴσαι εὐθεῖαι, . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | εὐθεῖαι ἴσαι,                          |
| 2. ἴσαι εὐθεῖαι, . . . . .              | <i>d.</i> . . . . .  | εὐθεῖαι ἴσαι,                          |
| 3. ἐστὶν ἴση . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶν                              |
| 4. ἴση· . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ                               |
| 5. τέμνει δίχρα καὶ πρὸς ὀρθὰς. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δίχρα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. |
| 6. ΑΒΓ . . . . .                        | deest. . . . .       | ΑΒΓ                                    |
| 7. κύκλου. . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                 |

## A L I T E R.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                        |                          |                                     |
|----------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 8. ἡ ΖΗ ἄρα . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .     | ἡ δὲ ΖΗ                             |
| 9. τὸ Δ, ὃ μὴ ἴστι κέντρον τοῦ κύκλου, | <i>Id.</i> . . . . .     | ὃ μὴ ἴστι κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ, |
| 10. κύκλου. . . . .                    | κύκλου. Οπερ ἴδι διῖξαι. | κύκλου.                             |

## PROPOSITIO X.

- |                                                                                |                      |                            |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . . | Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον    |
| 2. διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ τὰ ΑΕ διήχθωσαν        |
| 3. καὶ πρὸς ὁρθὰς τέμνει, . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | τέμνει καὶ πρὸς ὁρθὰς,     |
| 4. ἀλλήλαις . . . . .                                                          | deest. . . . .       | ἀλλήλαις                   |
| 5. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἴστι κέντρον τὸ Ο, | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## A L I T E R.

- |                            |                      |               |
|----------------------------|----------------------|---------------|
| 6. εὐθεῖαι ἴσαι, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσαι εὐθεῖαι, |
| 7. κέντρον ἴστί . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί κέντρον  |
| 8. ἀλλήλους . . . . .      | ἀλλήλων . . . . .    | ἀλλήλους      |

## PROPOSITIO XI.

- |                                            |                      |                                                 |
|--------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------|
| 1. Καὶ . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                          |
| 2. ἐφαπτίθωσαν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπτεῖθωσαν                                      |
| 3. κύκλου . . . . .                        | κύκλου τὸ . . . . .  | κύκλου                                          |
| 4. τὸ Α . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ Α σημεῖον                                    |
| 5. τῆς ΖΘ, . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς ΖΘ, ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω |
| 6. ἴστί . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                          |
| 7. κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πισεῖται. | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπ' αὐτὴν ἄρα.                                  |

## A L I T E R.

- |                         |                          |               |
|-------------------------|--------------------------|---------------|
| 8. ἐκβεβλήσθω . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .     | προεκβεβλήσθω |
| 9. ἄτοπον. . . . .      | ἄτοπον. Οπερ ἴδι διῖξαι. | ἄτοπον.       |

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                         |                      |          |
|-------------------------|----------------------|----------|
| 1. ἐφαπτόνται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄπτανται |
| 2. εὐθεία . . . . .     | deest. . . . .       | εὐθεία   |
| 3. κύκλου . . . . .     | deest. . . . .       | κύκλου   |

PROPOSITIO XIII.

|                                     |                      |                          |
|-------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. ἐφαπτόνται ἴαν τε ἑκτός. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴαν τε ἑκτός ἐφαπτόνται. |
| 2. ἐφαπτίσθω . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτίσθω                  |
| 3. εὐθεία . . . . .                 | deest. . . . .       | εὐθεία                   |
| 4. ὅπερ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | ὅπερ ἐστὶν               |
| 3. τοῦ . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ                        |
| 6. ἄρα . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 7. αὐτὰ . . . . .                   | deest. . . . .       | αὐτὰ                     |

PROPOSITIO XIV.

|                                                |                                          |                            |
|------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------|
| 1. αἱ AB, ΓΔ . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .                     | deest.                     |
| 2. ἡ . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                     | deest.                     |
| 3. λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον<br>ἴσθιν, ἴση ἄρα | τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον<br>ἴσθιν, ἴση ἄρα καὶ | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶ . . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .                     | ἐστὶ καὶ                   |
| 5. ἴσθιν ἴσον, . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .                     | ἴσον ἴσθιν,                |
| 6. λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον<br>ἴσθιν.         | ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ.                 | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XV.

|                            |                                                 |                                                            |
|----------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. ἴσθιν . . . . .         | deest. . . . .                                  | ἴσθιν <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i>                 |
| 2. τοῦ Ε κέντρου . . . . . | τῆς ΑΔ διαμέτρου <i>a, c, d.</i>                | τοῦ Ε κέντρου                                              |
| 3. Ε . . . . .             | <i>Id. e, f, g, h, k, l, m.</i>                 | deest.                                                     |
| 4. ἄρα . . . . .           | deest. <i>a, f, g, h, k, l, m.</i>              | ἄρα <i>b, c, d, e, h.</i>                                  |
| 5. μείζων . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .                            | μείζων ἐστὶ <i>b, c, d, e, f, g, h,</i><br><i>k, l, m.</i> |
| 6. μὲν . . . . .           | <i>Id. a, c, d, e, g, h,</i><br><i>k, l, m.</i> | deest. <i>b, f.</i>                                        |

PROPOSITIO XVI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                   | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.                                    |
|-------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------|
| 1. περιμπεσιῖται . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | περιμπεσιῖται                                     |
| 2. γωνίας ὀξείας . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | ὀξείας γωνίας                                     |
| 3. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. |
| 4. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο<br>γωνίαι αἱ            | <i>Id.</i> . . . . . | αἱ ἄρα                                            |
| 5. δὴ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                            |
| 6. γωνίας ὀξείας . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | ὀξείας γωνίας                                     |
| 7. ἡ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ                                                 |
| 8. εὐθεῖα περιμπεσιῖται, . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | παρ᾽ ἐμπεσιῖται εὐθεῖα,                           |
| 9. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. . . . .                         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                        |

COROLLARIUM.

|                      |                             |          |
|----------------------|-----------------------------|----------|
| 10. τούτου . . . . . | τούτου . . . . .            | τούτων   |
| 11. εἰδίχθη. . . . . | εἰδίχθη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | εἰδίχθη. |

PROPOSITIO XVII.

|                              |                      |                      |
|------------------------------|----------------------|----------------------|
| 1. τὸ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |
| 2. τὴν . . . . .             | deest. . . . .       | τὴν                  |
| 3. ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ |
| 4. ΒΓΑ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |

PROPOSITIO XVIII.

|                          |                      |           |
|--------------------------|----------------------|-----------|
| 1. ἱφαπτομένην . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτομένην |
| 2. ἱφαπτίσθω . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπτίσθω   |
| 3. καὶ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.    |

PROPOSITIO XIX.

|                               |                      |                  |
|-------------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ὀρθὰς . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθὰς γωνίας     |
| 2. τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΕ |
| 3. οὖν . . . . .              | deest. . . . .       | οὖν              |

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                           |            |                                              |
|-------------------------------------------|------------|----------------------------------------------|
| 1. ἴση καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῇ<br>ὑπὸ EBA. | <i>Id.</i> | καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA<br>ἴση ἐστίν. |
| 2. ἑτέρα γωνία                            | <i>Id.</i> | γωνία ἑτέρα                                  |

PROPOSITIO XXI.

- |         |            |        |
|---------|------------|--------|
| 1. αὐτῷ | <i>Id.</i> | deest. |
|---------|------------|--------|

PROPOSITIO XXII.

- |                 |            |         |
|-----------------|------------|---------|
| 1. Ἐπὶ οὖν      | <i>Id.</i> | καὶ ἐπὶ |
| 2. ἄρα τριγώνου | <i>Id.</i> | deest.  |
| 3. ἄρα          | <i>Id.</i> | deest.  |

PROPOSITIO XXIII.

- |                 |            |               |
|-----------------|------------|---------------|
| 1. συσταθήσεται | <i>Id.</i> | συσταθήσονται |
|-----------------|------------|---------------|

PROPOSITIO XXIV.

- |                                                                                                         |                                 |                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἐστίν.                                                                                               | <i>Id. a, c, d, e, f, g, h,</i> | εἰσὶν <i>b.</i><br><i>k, l, m, n.</i>                                                                                                                                               |
| 2. τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἑφαρ-<br>μοσάσης,                                                               | <i>Id. a.</i>                   | ἑφαρμοσάσης δὲ τῆς AB εὐθείας<br>ἐπὶ τὴν ΓΔ <i>b, c, d, e, f,</i><br><i>g, h, k, l, m, n.</i>                                                                                       |
| 3. ἥτοι ἐντὶς αὐτοῦ πεσιῖται, ἢ<br>ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ<br>ΓΘΗΔ καὶ κύκλος κύκλον τέμ-<br>νει κατὰ | <i>Id. a.</i>                   | ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ.<br>Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει<br>κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.<br>ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν<br>ΓΖΔ κατὰ <i>b, c, d, e, f, g,</i><br><i>h, k, l, m, n.</i> |

PROPOSITIO XXV.

- |                  |                     |               |
|------------------|---------------------|---------------|
| 1. δὴ            | δὴ τοῦ ABΓ τμήματος | δὴ            |
| 2. γωνία ἄρα     | <i>Id.</i>          | ἄρα γωνία     |
| 3. ἢ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε | <i>Id.</i>          | ἐπὶ τὸ Ε ἢ AB |
| 4. εὐθεία        | <i>Id.</i>          | deest.        |



|                                   |                      |                            |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 5. ἴσιν ἴση, . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν,                  |
| 6. βάσις . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ βάσις                  |
| 7. ἴσιν ἴση. . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴσιν.                  |
| 8. τῷ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 9. κύκλος. . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. ἐκτὸς αὐτοῦ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοῦ ἐκτὸς                |
| 11. καὶ ἐάν ἡ ὑπὸ AΒΔ γωνία ἴση ᾗ | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἡ ὑπὸ AΒΔ γωνία ἴση    |
| 12. πρὸς αὐτῇ σημείῳ τὸ Α, .      | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ Α σημείῳ                |
| 13. ὡς τὸ Ε, . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 14. οὐπὲρ ἔστι τὸ τμήμα. . .      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXVI.

|                                |                      |                                |
|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| 1. γάρ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |
| 2. πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι | <i>Id.</i> . . . . . | ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἴστωσαν, |
| γωνίαι ἴστωσαν,                |                      | πρὸς μὲν τοῖς κέντροις         |
| 3. εἰσί. . . . .               | deest. . . . .       | εἰσί.                          |
| 4. ἴστί. . . . .               | deest. . . . .       | ἴστί.                          |
| 5. ἴσιν ἴση. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴστί.                      |
| 6. ἴστί. . . . .               | deest. . . . .       | εἰσίν.                         |
| 7. τμήματι. . . . .            | deest. . . . .       | τμήματι                        |
| 8. λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμήμα λοιπῷ  | deest. . . . .       | λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμήμα λοιπῷ ΕΔΖ |
| ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρειά |                      | ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια τῇ  |
| ἴσιν ἴση τῇ ΕΔΖ περιφέρειᾳ.    |                      | ΕΔΖ περιφέρειᾳ ἴσιν ἴση        |

## PROPOSITIO XXVII.

|                              |                                     |                                             |
|------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. ἐπὶ . . . . .             | <i>Id.</i> <i>a, c, d, e, f, g,</i> | καὶ ἐπὶ <i>b, k,</i>                        |
|                              | <i>h, l, m.</i>                     |                                             |
| 2. γωνία . . . . .           | <i>Id.</i> <i>a.</i> . . . . .      | deest. <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i> |
| 3. ἴσιν ἴση. . . . .         | <i>Id.</i> <i>a, k.</i> . . . . .   | deest. <i>b, c, d, e, f, g, h, l, m.</i>    |
| 4. Εἰ γὰρ ἄριστος ἴσιν ἡ ὑπὸ | <i>Id.</i> <i>a.</i> . . . . .      | Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἴστί               |
| ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν    |                                     | τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανερόν ὅτι καὶ                 |
| μείζων ἔσται.                |                                     | ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση                    |
|                              |                                     | ἴστί. Εἰ δὲ οὐ μία, αὐτῶν                   |
|                              |                                     | μείζων ἔστιν. <i>b, c, d, e, f,</i>         |
|                              |                                     | <i>g, h, k, l, m.</i>                       |

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                      |                        |                                   |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1. αὐτοῖς . . . . .                  | τοῖς κύκλοις. . . . .  | αὐτοῖς.                           |
| 2. τῇ ΔΘΕ ἱλάττονι. . . . .          | τῇ ΔΘΕ. . . . .        | ἴση τῇ ΔΘΕ ἱλάττοι.               |
| 3. ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ περιφέρειᾳ. | ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ. | περιφέρεια ΑΗΒ τῇ ΔΘΕ περιφέρειᾳ. |
| 4. καὶ . . . . .                     | Id. . . . .            | deest.                            |

PROPOSITIO XXIX.

- |                          |                                                         |             |
|--------------------------|---------------------------------------------------------|-------------|
| 1. ὑπὸ . . . . .         | deest. . . . .                                          | ὑπὸ         |
| 2. εὐθεῖα . . . . .      | hoc verbum manu<br>alienā inter lineas<br>exaratum est. | εὐθεῖα      |
| 3. καὶ ἴστω. . . . .     | Id. . . . .                                             | deest.      |
| 4. γωνίας ἴσας . . . . . | Id. . . . .                                             | ἴσας γωνίας |

PROPOSITIO XXX.

- |                                |             |            |
|--------------------------------|-------------|------------|
| 1. τεμνῖν. . . . .             | Id. . . . . | τέμνειν.   |
| 2. τεμνῖν. . . . .             | Id. . . . . | τέμνειν.   |
| 3. βάσεις ἄρα . . . . .        | Id. . . . . | καὶ βάσεις |
| 4. κατὰ τὸ Δ σημείον . . . . . | Id. . . . . | deest.     |

PROPOSITIO XXXI.

- |                                                 |                |                                     |
|-------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------|
| 1. τμήματι . . . . .                            | Id. . . . .    | deest.                              |
| 2. ὀρθῆς. . . . .                               | Id. . . . .    | ἴσθιν ὀρθῆς.                        |
| 3. ἡ ὑπὸ ΒΑΓ . . . . .                          | Id. . . . .    | deest.                              |
| 4. ἡ ὑπὸ ΑΔΓ . . . . .                          | Id. . . . .    | deest.                              |
| 5. καὶ . . . . .                                | deest. . . . . | καὶ                                 |
| 6. ΒΑΓ. . . . .                                 | Id. . . . .    | ΒΑΓ γωνία.                          |
| 7. γωνία μείζων ὀρθῆς ἴστι, καὶ ἴστιν ἐν τῷ ΑΔΓ | Id. . . . .    | μείζων ἴστιν ὀρθῆς, καὶ ἴστιν ἐν τῷ |
| 8. λέγω . . . . .                               | Id. . . . .    | λέγω δὲ                             |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                          |                      |        |
|--------------------------|----------------------|--------|
| 9. τε . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 10. τε . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 11. γωνία . . . . .      | deest. . . . .       | γωνία  |
| 12. περιχομένη . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## A L I T E R.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 13. Η . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | dcest. |
|-----------------|----------------------|--------|

## C O R O L L A R I U M.

|                                                                                                                                                                                             |                                                                             |                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 14. Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἂν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾗ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἑκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Όταν δὲ ἰφιεξῆς ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν. | <i>Id.</i> . . . . .<br>hoc collorarium eadem manu in margine exaratum est. | Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἂν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾗ, ὀρθή ἐστι· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἰφιεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Όταν δὲ αἱ ἰφιεξῆς γωνίαι ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## PROPOSITIO XXXII.

|                                                                                                                               |                      |                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. εἰς . . . . .                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ                                                                                          |
| 2. εἰς . . . . .                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ                                                                                          |
| 3. γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένη γωνία. | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι. |
| 4. ἀπὸ δὲ τῆς . . . . .                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . . | σημῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β                                                                |
| 5. ἄρα . . . . .                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                       |
| 6. Η ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                       |
| 7. Εἴσι δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ . . . . .                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                       |
| δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι·                                                                                                            |                      |                                                                                              |

## PROPOSITIO XXXIII.

|                                 |                      |               |
|---------------------------------|----------------------|---------------|
| 1. τῷ Γ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ Γ γωνία.   |
| 2. δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | γὰρ πρὸς τῷ Γ |

| EDITIO PARISIENSIS.                                        | CODEX 190.             | EDITIO OKONIE.                                   |
|------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------|
| 3. ὡς . . . . .                                            | καὶ ὡς . . . . .       | ὡς                                               |
| 4. καὶ . . . . .                                           | deest. . . . .         | καὶ                                              |
| 5. καὶ . . . . .                                           | deest. . . . .         | καὶ                                              |
| 6. γωνία . . . . .                                         | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 7. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ABE . .                             | Id. . . . .            | καὶ ἐπεὶ τοῦ ABE κύκλου                          |
| 8. εἰς . . . . .                                           | Id. . . . .            | ἐπὶ                                              |
| 9. τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου . .                               | ἐναλλάξ τοῦ κύκλου . . | τῷ ἐναλλάξ                                       |
| 10. ἔστω πάλιν . . . . .                                   | Id. . . . .            | πάλιν ἔστω                                       |
| 11. γωνία . . . . .                                        | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 12. ἴση ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ BAA<br>γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμηματί, | Id. . . . .            | ἴστιν ἡ μὲν ὑπὸ BAA τῇ ἐν τῷ<br>AEB τμήματι ἴση, |
| 13. καὶ ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ<br>ἴση ἔστί.                | Id. . . . .            | ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ ἴστιν<br>ἴση.             |
| 14. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμήματι<br>ἄρα ἴση ἔστί τῇ πρὸς τῷ Γ   | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 15. ἡ . . . . .                                            | Id. . . . .            | deest.                                           |
| 16. ἰσχύσθω ὁ AEB. . . .                                   | Id. . . . .            | οἰχίσθω ὡς AEB.                                  |
| 20. ἥκται . . . . .                                        | ἴστιν . . . . .        | ἥκται                                            |
| 21. ἄρα δοθείσης . . . . .                                 | Id. . . . .            | δοθείσης ἄρα                                     |

PROPOSITIO XXXIV.

|                                              |                |                              |
|----------------------------------------------|----------------|------------------------------|
| 1. δοθείση γωνία εὐθυγράμμῳ τῇ<br>πρὸς τῷ Δ. | Id. . . . .    | πρὸς τὸ Δ γωνία.             |
| 2. κύκλου . . . . .                          | deest. . . . . | κύκλου                       |
| 3. ἴση ἔστί τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία.              | Id. . . . .    | γωνία ἴση ἔστί τῇ πρὸς τῷ Δ. |

PROPOSITIO XXXV.

|                               |                |                            |
|-------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. τῶν . . . . .              | deest. . . . . | τῶν                        |
| 2. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ .  | Id. . . . .    | ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ    |
| 3. κύκλου, . . . . .          | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. τίμναι . . . . .           | Id. . . . .    | τιμνῇ                      |
| 5. προσκείσθαι κοινὸν . . . . | Id. . . . .    | κοινὸν προσκείσθαι         |
| 7. εἰδείχθη δὲ ὅτι . . . . .  | ὥστε . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXXVI.

| EDITIO PARISIENSIS.              | CODEX 190.     | EDITIO OXONIE.               |
|----------------------------------|----------------|------------------------------|
| 1. περιεχόμενον ἑρθεζώνιον . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 2. ἡ ἄρα ΔΓΑ . . . . .           | Id. . . . .    | ἡ ΔΓΑ                        |
| 3. ΑΔ, ΔΓ . . . . .              | ΑΔΓ . . . . .  | ΑΔ, ΔΓ                       |
| 4. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ζ ἴσα ἐστὶ τὰ   | Id. . . . .    | ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς   |
| 5. ἑρθῇ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ . . .      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 6. σημείον, . . . . .            | Id. . . . .    | deest.                       |
| 7. ἴσον . . . . .                | Id. . . . .    | ἴσα                          |
| 8. Αλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ      | Id. . . . .    | Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον  |
| ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ἑρθῇ γὰρ     |                | τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ἑρθῇ γὰρ ἡ    |
| ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ     |                | ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, |
| τῶν ΕΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ      |                | ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ·  |
| τῆς ΕΔ·                          |                |                              |

## PROPOSITIO XXXVII.

|                               |               |                              |
|-------------------------------|---------------|------------------------------|
| 1. τῆς . . . . .              | Id. . . . .   | deest.                       |
| 2. ΑΔ, ΔΓ . . . . .           | ΑΔΓ . . . . . | ΑΔ, ΔΓ                       |
| 3. τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, | Id. . . . .   | τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, |
| καὶ ἴστω τὸ Ζ,                |               |                              |
| 4. Ἦν δὲ καὶ . . . . .        | Id. . . . .   | ὑποκείται δὲ                 |
| 5. ἐστὶ . . . . .             | Id. . . . .   | deest.                       |
| linea 10 paginæ 194.          |               |                              |
| 6. καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα   | Id. . . . .   | deest.                       |
| ἐφάπτεται                     |               |                              |

# LIBER QUARTUS.

## DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                           |                |                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------|
| β'. (1) δὲ . . . . .                                                      | deest. . . . . | δὲ                                                         |
| δ'. (2) τοῦ περιγραφομένου ἐφάπ-<br>τται τῆς τοῦ κύκλου περιφε-<br>ρείας. | Id. . . . .    | τῆς τοῦ κύκλου περιφρείας τοῦ<br>περιγραφομένου ἐφάπτεται. |
| ε. (3) εἰς σχῆμα ἰμοίως . . .                                             | Id. . . . .    | ἰμοίως εἰς σχῆμα                                           |

## PROPOSITIO I.

|                        |                |                                                    |
|------------------------|----------------|----------------------------------------------------|
| 1. δὲ . . . . .        | Id. . . . .    | δὲ οὐ                                              |
| 2. κείσθω . . . . .    | Id. . . . .    | καὶ κείσθω                                         |
| 3. μὲν . . . . .       | deest. . . . . | μὲν                                                |
| 4. τῇ Δ ἢ ΓΕ . . . . . | Id. . . . .    | ἢ Δ τῇ ΓΕ                                          |
| 5. εὐθεία, . . . . .   | Id. . . . .    | εὐθεία, μὴ μίξονι οὐσῇ τῆς τοῦ<br>κύκλου διαμέτρου |

## PROPOSITIO II.

|                                                                                               |                |                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------------------------------------|
| 1. πρὸς . . . . .                                                                             | Id. . . . .    | πρὸς μὲν                                    |
| 2. πάλιν, πρὸς . . . . .                                                                      | Id. . . . .    | πρὸς δὲ                                     |
| 3. ΖΔΕ . . . . .                                                                              | Id. . . . .    | ΖΔΕ γωνία                                   |
| 4. ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α<br>ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται<br>εὐθεῖα ἡ ΑΓ.               | Id. . . . .    | ἡ ΘΑΗ, ὅπῃ δὲ τῆς ἀφῆς διῆκται<br>τις ἡ ΑΓ. |
| 5. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ<br>τρίγωνον τῇ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ<br>ἐγγράπεται εἰς τὸν ΑΒ κύκλον. | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                  |

## PROPOSITIO III.

|                                  |             |                                               |
|----------------------------------|-------------|-----------------------------------------------|
| 1. ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη κατὰ | Id. . . . . | ἐφ' ἑκατέρα τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ                  |
| 2. σημεία, καὶ . . . . .         | Id. . . . . | ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β,<br>Γ σημεία |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. καὶ εἶσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, *Id.* . . . . . τετράπλευρον ὧν αἱ ὑπὸ KAM,  
KBM γωνίαι· KBM γωνίαι δύο ὀρθαὶ εἰσιν·
4. λοιπῇ . . . . . deest. . . . . λοιπῇ

## PROPOSITIO IV.

1. ΔΒΓ, . . . . . *Id.* . . . . . ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέμνεται ἡ ὑπὸ  
ΑΒΓ,  
2. ταῖς . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
3. τὴν . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
4. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθείαι αἱ ΔΕ, *Id.* . . . . . deest.  
ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν·  
5. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . μὲν  
6. ἰδίχθη· . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
7. ὁ . . . . . deest. . . . . ο  
8. εἰς . . . . . *Id.* . . . . . ἐπὶ  
9. Εγγεγράφω ὡς ZEH, . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
10. ὁ . . . . . deest. . . . . ο

## PROPOSITIO V.

1. εὐθεῖα . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
2. οὖν ἰσὸς πρότερον . . . . . *Id.* . . . . . πρότερον ἔστις  
3. ἰστὶν ἴση. . . . . *Id.* . . . . . ἴση ἰστὶν.  
4. ἰστὶν . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
5. Περιγραφίσθω . . . . . *Id.* . . . . . καὶ περιγραφίσθω  
6. ἰστὶν . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
7. πάλιν . . . . . deest. . . . . πάλιν  
8. Καὶ γεγράφω ὡς ὁ ΑΒΓ. . . . . deest. . . . . concordat cum. edit. Paris.

## COROLLARIUM.

9. εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ *Id.* . . . . . ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ  
ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ  
εἶσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς ΒΓ  
τυγχάνουσα ὀρθὴ ἰστὶν· ἢ τε δὲ  
κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τρι-  
γώνου πίπτει, *c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                           |                            |             |
|---------------------------|----------------------------|-------------|
| 10. τοῦ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.      |
| 11. συμπίσσωται . . . . . | πίσσωται . . . . .         | συμπίσσωται |
| 12. τῆς ΒΓ . . . . .      | τῆς ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. | τῆς ΒΓ.     |

PROPOSITIO VI.

|                                |                      |                            |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸν . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. δύο . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. διὰ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | κατὰ                       |
| 4. γωνία . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον . . . . | ΑΒΓΔ κύκλον . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἄρα δοθέντα . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | δοθέντα ἄρα                |

PROPOSITIO VII.

|                                                                   |                      |                            |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. δοθεὶς κύκλος ὁ . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ δοθεὶς κύκλος            |
| 2. δὴ . . . . .                                                   | <i>Id.</i> . . . . . | δε                         |
| 3. καὶ . . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ἰστὶ παράλληλος. . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | παράλληλός ἰστιν.          |
| 5. Ὡστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἰστὶ<br>παράλληλος.                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. καὶ . . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. ΖΚ. . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ΖΚ ἰστὶν ἴση.              |
| 8. καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΗΘ,<br>ΖΚ ἑκατέρω τῶν ΗΖ, ΘΚ ἰστὶν<br>ἴση. | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 9. δὴ . . . . .                                                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. τετράπλευρον . . . . .                                        | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO VIII.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. ἰσὶ. . . . .         | deest. . . . .       | ἰσὶ.       |
| 2. ἴσαι ἰσὶν, . . . . . | deest. . . . .       | ἴσαι ἰσὶν, |
| 3. ἰσὶν. . . . .        | deest. . . . .       | ἰσὶν.      |
| 4. ἰδείχθη . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.     |



EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

|                           |                      |              |
|---------------------------|----------------------|--------------|
| 5. μὲν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 6. ἄρα τὸ δοθὲν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ δοθὲν ἄρα |

## PROPOSITIO IX.

|                                                       |                      |                                                      |
|-------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------|
| 1. ἴση . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί· ἴση·                                           |
| 2. γωνία ἄρα ἴση ἴστί· ἢ ὑπὸ ΔΑΓ<br>γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ· | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ ἄρα γωνία ἢ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴστί· ἴση· |

## PROPOSITIO X.

|                                                |                      |                                          |
|------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 1. καὶ κέντρον τῷ Α, καὶ δια-<br>στήματι τῷ ΑΒ | <i>Id.</i> . . . . . | κέντρον μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ<br>τῷ ΑΒ |
| 2. τῶν . . . . .                               | deest. . . . .       | τῶν                                      |
| 3. Καὶ ἵπτι· ἰφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ,               | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐπεὶ οὖν ἰφάπτεται ἡ ΒΔ,                 |
| 4. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση                    |
| 5. γωνία . . . . .                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                   |
| 6. εἰς διπλασίους . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | διπλασίους εἰσίν.                        |
| 7. καὶ . . . . .                               | deest. . . . .       | καὶ                                      |
| 8. τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἴστί διπλῆ, . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | διπλῆ ἴστί τῆς ὑπὸ ΔΑΓ,                  |

## PROPOSITIO XI.

|                                                                                                                       |                      |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ·<br>δεῖ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον<br>πεντάγωνον ἰσόπλευρον τε καὶ<br>ἰσογώνιον ἐγγράψαι | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνίων . . . . .                                                                                 | λοιπῶν . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἑκατέρας . . . . .                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ΔΕ, ΕΑ . . . . .                                                                                                   | ΓΕ, ΔΕ, ΕΑ . . . . . | ΔΕ, ΕΑ                     |
| 5. ἴστί· ἴση, . . . . .                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴστί,                  |
| 6. ἴστί· ἴση. . . . .                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴστί.                  |
| 7. ἄρα γωνία . . . . .                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | γωνία ἄρα                  |
| 8. ἴστί· ἴση. . . . .                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴση ἴστί.                  |

## PROPOSITIO XII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                          | CODEX 190.                                                                          | EDITIO OXONIENSIS.                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἴσθιν . . . . .                                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                                                                | deest.                                                                               |
| 2. ἴσον ἰστί τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ .                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                                                                | τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον.                                                                  |
| 3. Ὡστε τὰ . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                                                | τὰ ἄρα                                                                               |
| 4. λοιπῶ . . . . .                                                                                           | deest. . . . .                                                                      | λοιπῶ                                                                                |
| 5. ΓΚ τῇ ΒΚ . . . . .                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .                                                                | ΒΚ τῇ ΓΚ.                                                                            |
| 6. ἴσθιν ἴση γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ<br>ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσθιν<br>ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ<br>ἴσθιν ἴση. | ἴση γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ<br>ΒΖΚ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσθιν,<br>ἴση ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ<br>ὑπὸ ΖΚΓ. | concordat cum edit. Paris.                                                           |
| 7. διπλῇ . . . . .                                                                                           | deest. . . . .                                                                      | διπλῇ                                                                                |
| 8. ἴσθι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία<br>τῇ ὑπὸ ΖΓΔ ἴση.                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                                | deest.                                                                               |
| 9. ἰστί . . . . .                                                                                            | deest. . . . .                                                                      | ἰστί                                                                                 |
| 10. ἱκατίραν ἱκατίρα, . . . .                                                                                | desunt. . . . .                                                                     | concordat cum edit. Paris.                                                           |
| 11. Καὶ ἴσθιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση.                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                                                                | Καὶ ἐπὶ εἰδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ Γ,<br>καὶ ἴσθι διπλῇ ἡ μὲν ΛΔ τῇ<br>ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῇς ΒΚ. |

## PROPOSITIO XIII.

|                                          |                      |                                       |
|------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------|
| 1. ἰσόπλευρόν . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ὅ ἴσθιν ἰσόπλευρόν                    |
| 2. ὑπὸ . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | ὑφ'                                   |
| 3. ἰστί . . . . .                        | deest. . . . .       | ἰστί.                                 |
| 4. ἴσθιν ἴσον, . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἰστί,                            |
| 5. ἴσονται, . . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσιν                                 |
| 6. διπλῇ ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς<br>ὑπὸ ΓΔΖ, | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ<br>διπλῇ, |
| 7. ὀρθῇ . . . . .                        | deest. . . . .       | ὀρθῇ                                  |
| 8. ταῖς . . . . .                        | deest. . . . .       | ταῖς                                  |
| 9. κύκλος . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                |

## PROPOSITIO XIV.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 1. ὅ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ὅπερ   |
| 2. αἱ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                              |                      |                                                                                   |
|------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 3. καὶ διαστήματι . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | διαστήματι δὲ                                                                     |
| 4. περιγεγραμμένος . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ<br>πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρος<br>καὶ ἰσογώνιον. |
| 5. ἄρα τὸ δοθὲν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ δοθὲν ἄρα                                                                      |

PROPOSITIO XV.

|                          |                      |                  |
|--------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ἴση ἐστίν· . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἴση·       |
| 2. αἱ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 3. ΖΑΒΓΔ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ΖΑΒΓΔ περιφέρειᾳ |
| 4. ΕΔΓΒΑ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΔΓΒΑ περιφέρειᾳ |
| 5. περιφέρειας . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |
| 6. δὴ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ               |
| 7. ἐστὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.           |

COROLLARIUM.

|                                                                                                                                 |                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 8. Καὶ ἴαν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ο ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ<br>Ε, Ζ σημείων<br>πενταγώνου ἴαν διὰ<br>τῶν κατὰ κύκλου δια-<br>ρισίων | concordat cum edit. Paris.                      |
| 9. τε καὶ περιγράφωμεν. . . . .                                                                                                 | Ὅπρ ἴδι ποιῆσαι. . . concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

|                                              |                      |                            |
|----------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Εγγεγράφω . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | Γεγράφω                    |
| 2. ἴσται . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ                       |
| 3. εὐθείας, . . . . .                        | deest. . . . .       | εὐθείας,                   |
| 4. εἰρημένους, . . . . .                     | δείξτων . . . . .    | εἰρημένοις                 |
| 5. ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσο-<br>γώνιον, | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. deest.                                    | Ὅπρ ἴδι ποιῆσαι. . . | deest.                     |

## LIBER QUINTUS.

## DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                                                                                         | CODEX 190.                    | EDITIO OXONIÆ.                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| γ'. (1) πρὸς ἄλληλα . . . . .                                                                                                                                                               | deest. . . . .                | concordat cum edit. Paris.                                                                                        |
| δ'. (2) Ἀναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων<br>ταυτότης.                                                                                                                                               | <i>Id. a. c.</i> . . . . .    | hæc definitio, quæ est octava<br>in edit. Oxoniæ, ita se<br>habet: Ἀναλογία δὲ ἐστὶν ἡ<br>τῶν ὁμοιότης. <i>b.</i> |
| ε'. (3) ὑπερίχνη, ἡ ἅμα ἴσα ἦ, ἡ<br>ἅμα ἐλλείπη                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .          | ἐλλείπη, ἡ ἅμα ἴσα ἦ, ἡ ἅμα<br>ὑπερίχνη                                                                           |
| ζ'. (4) λόγον μεγέθη, . . . . .                                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .          | μεγέθη λόγον,                                                                                                     |
| θ'. (5) ἐλαχίστη . . . . .                                                                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .          | ἐλαχίστοις                                                                                                        |
| ια'. (6) τὸ . . . . .                                                                                                                                                                       | deest. . . . .                | τὸ                                                                                                                |
| (7) ὁμοίως ὡς . . . . .                                                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .          | ἐνὶ πλείον, ὡς                                                                                                    |
| ιβ'. (8) λίγεται, . . . . .                                                                                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .          | λίγεται ἑῷται,                                                                                                    |
| ιγ'. (9) δὲ . . . . .                                                                                                                                                                       | deest. . . . .                | δὲ                                                                                                                |
| ιδ'. (10) αὐτοῖς ἴσων . . . . .                                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .          | ἴσων αὐτοῖς                                                                                                       |
| ιθ'. (11) Τεταγμένη ἀναλογία ἴσ-<br>τίν, ὅταν ἦ ὡς ἡλούμενον πρὸς<br>ἐπόμενον οὕτως ἡλούμενον πρὸς<br>τὸ ἐπόμενον, ἦ δὲ καὶ ὡς ἐπόμε-<br>νον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπόμε-<br>νον πρὸς ἄλλο τι. | deest. <i>a. c.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. <i>b.</i>                                                                              |
| κ'. (12) αὐτοῖς ἴσον . . . . .                                                                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .          | ἴσων αὐτοῖς                                                                                                       |
| (13) μετίθισιν . . . . .                                                                                                                                                                    | deest. . . . .                | concordat cum edit. Paris.                                                                                        |

## PROPOSITIO I.

|                                    |                      |                          |
|------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. μεγέθων . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 2. ἐστὶν ἐν τῇ AB μεγέθη . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | μεγέθη ἐστὶν ἐν τῇ AB    |
| 3. AH, HB τῇ πλείθει τῶν ΓΘ, ΘΔ.   | <i>Id.</i> . . . . . | ΓΘ, ΘΔ τῇ πλείθει AH, HB |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΑΗ', ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ·
- ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ·
- concordat cum edit. Paris. his tantum exceptis : in edit. Paris. legitur ἴσον ἐστὶ, in edit. vero Oxoniæ legitur ἐστὶν ἴσον.

## PROPOSITIO II.

1. μεγέθη . . . . . deest. . . . . μεγέθη  
2. ἄρα . . . . . Id. . . . . ἄρα τὰ

## PROPOSITIO III.

1. ἴσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον. . . . . ὁσαπλάσιον . . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. τοσαῦτα . . . . . Id. . . . . τοσαῦτα δὴ  
3. μὴν . . . . . Id. . . . . deest.  
4. δὴ . . . . . Id. . . . . δὴ

## PROPOSITIO IV.

1. ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, . . . Id. . . . . ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η ἐστὶν,  
2. ἀλλὰ ἔτυχεν . . . . . Id. . . . . deest.  
3. ἥλαττον. Καὶ ἐστὶ . . . . . ἥλαττον. Καὶ ἐπὶ ὑπερί-  
χει τὸ Κ τοῦ Μ, καὶ τὸ  
Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον,  
ἴσον, καὶ εἰ ἥλαττον,  
ἥλαττον. Καὶ ἐστὶ

## COROLLARIUM.

4. ὅτι . . . . . deest. . . . . ὅτι

## PROPOSITIO V.

1. καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἴσάκεις ἄρα Id. . . . . deest.  
ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ  
ΓΖ,  
2. ἴσται . . . . . Id. . . . . ὅτι

## PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

|                         |                     |                            |
|-------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. τῷ Z ἴσον . . . . .  | ἴσον τῷ Z . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .        | deest. . . . .      | καὶ                        |
| 3. τῷ Z τὸ ΚΓ . . . . . | Id. . . . .         | τὸ ΚΓ τῷ Z                 |
| 4. ἰστίν ἴσον. . . . .  | Id. . . . .         | ἴσον ἰστίγ.                |
| 5. εἰ . . . . .         | Id. . . . .         | ὅτε                        |

## PROPOSITIO VII.

|                                 |                                                                                                                             |                                        |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. τι . . . . .                 | Id. . . . .                                                                                                                 | deest.                                 |
| 2. μίν . . . . .                | Id. . . . .                                                                                                                 | deest.                                 |
| 3. τοῦ Γ πολλαπλάσιον . . . . . | deest. . . . .                                                                                                              | concordat cum edit. Paris.             |
| 4. ἰστίγ . . . . .              | Id. . . . .                                                                                                                 | deest.                                 |
| 5. δὴ . . . . .                 | deest. . . . .                                                                                                              | δὴ                                     |
| 6. δὴ . . . . .                 | Id. . . . .                                                                                                                 | deest.                                 |
| 7. τὸ Z . . . . .               | Id. . . . .                                                                                                                 | deest.                                 |
| 8. deest. . . . .               | Πέρισμα. Εξ δὴ τούτου<br>φανερὸν ὅτι εἰ μὴ γένη<br>τινὰ ἀνάλογον ἤ, καὶ<br>ἀναπάλιν ἀνάλογον ἴσ-<br>ται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | deest in omnibus aliis codi-<br>cibus. |

## PROPOSITIO VIII.

|                                                                                                                                                                                                                                |             |                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------------------|
| 1. AB, . . . . .                                                                                                                                                                                                               | Id. . . . . | AB τοῦ Γ                                              |
| 2. καὶ ἴστω . . . . .                                                                                                                                                                                                          | Id. . . . . | ἵως τοῦ τὸ γινόμενον μείζον ἴσται<br>τοῦ Δ. Καὶ ἴσται |
| 3. οὗ . . . . .                                                                                                                                                                                                                | Id. . . . . | ἀν                                                    |
| 4. τὸ . . . . .                                                                                                                                                                                                                | Id. . . . . | deest.                                                |
| 5. ἐπειδὴ περὶ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλά-<br>σιόν ἐστι, συναμφοτέρα δὲ τὰ<br>Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια,<br>ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετρα-<br>πλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ<br>Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ<br>ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζων ἐστίν· | Id. . . . . | desunt.                                               |
| 6. τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ . . . . .                                                                                                                                                                                                    | Id. . . . . | τοῦ δὲ ΖΘ                                             |

## PROPOSITIO IX.

| EDITIO PARISIENSIS.           | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.      |
|-------------------------------|----------------------|---------------------|
| 7. τοῦ EB μῆζον ἴστω· . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | μῆζον ἴστω τοῦ EB·  |
| 8. μὴ ἴλασσον εἶναι, . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | οὐκ ἴστίιν ἴλασσον, |
| 9. ὡσαύτως . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ὡσαύτως             |
| 10. ἐκείνα ἴσα ἀλλήλοις . . . | ἐκείνα ἴσα. . . . .  | ἐκείνα ἴσα ἀλλήλοις |

## PROPOSITIO X.

|                                |                         |                         |
|--------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. τὸν . . . . .               | deest. . . . .          | τὸν                     |
| 2. τὸν ἰλάσσονα εἶχε λόγον . . | ἰλάσσονα εἶχε λόγον . . | τὸν ἰλαττεῖα λόγον εἶχε |
| 3. ὅτι . . . . .               | deest. . . . .          | ὅτι                     |

## PROPOSITIO XI.

|                                                    |                          |                                       |
|----------------------------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| 1. λόγοι . . . . .                                 | λόγῳ . . . . .           | λόγοι                                 |
| 1. μὴν . . . . .                                   | deest. . . . .           | μὴν                                   |
| 2. μὴν . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                |
| 3. ἀλλὰ ἂ ἐτύχην ἰσάκεις πολλα-<br>πλάσια τὰ Α, Μ· |                          | ἴσας πολλαπλάσια ἂ ἐτύχει τὰ<br>Α, Μ· |
| 4. ἴσον, ἴσον· . . . .                             | ἴσον ἴστίιν, ἴσον· . . . | concordat cum edit. Paris.            |
| 5. ἱλαττον, ἱλαττον. . . . .                       | ἱλαίπει, ἱλαίπει. . . .  | concordat cum edit. Paris.            |
| 6. μὴν . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .     | deest.                                |

## PROPOSITIO XII.

|                                   |                                     |                            |
|-----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Α, Μ, Ν·       | τὸ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν·             | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἴσα· καὶ εἰ ἴλασσον, ἴλασσονα, | ἴσον· καὶ εἰ ἴλασσον, ἴλασ-<br>σον. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἀν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .                | ἐὰν]                       |
| 4. πολλαπλάσια, . . . . .         | πολλαπλάσιον, . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὰ . . . . .                   | τὰ . . . . .                        | τὸ                         |

## PROPOSITIO XIII.

|                                  |                        |                            |
|----------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. ἥπερ . . . . .                | ἥ . . . . .            | ἥπερ                       |
| 2. ἥπερ . . . . .                | ἥ . . . . .            | ἥπερ                       |
| 3. μὴν . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |
| 4. ἥπερ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .   | ἥπερ                       |
| 5. πίμπτον τὸ Ε πρὸς ἑκτον τὸ Ζ, | τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ . . . . | concordat cum edit. Paris. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον *deest.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
ἔχει ὑπὲρ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ·
7. τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερ- *Id.* . . . . . ὑπερέχει τοῦ Δ πολλαπλασίου,  
ἔχει,
8. μὴ . . . . . *Id.* . . . . . οὐχ

PROPOSITIO XIV.

1. μείζον ἴστι τὸ Α τοῦ Γ, . . . *Id.* . . . . . τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἴστιν,  
2. μίγεθος . . . . . *deest.* . . . . . μίγεθος  
3. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*

PROPOSITIO XV.

1. μίγεθος . . . . . *deest.* . . . . . μίγεθος

PROPOSITIO XVI.

1. ἀνάλογον ἴστιν, . . . ἴστιν . . . . . ἀνάλογον ἴσται,  
2. ληθόντα κατάλληλα . . . *deest.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
3, καὶ εἰ . . . . . *Id.* . . . . . καὶ  
4. καὶ εἰ . . . . . *Id.* . . . . . καὶ

PROPOSITIO XVII.

1. ἴστι . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*  
2. τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ *concordat cum edit. Paris.*  
τοῦ ΓΖ. ΗΚ τοῦ ΑΒ.  
3. ἀλλὰ ἂ ἔτυχιν . . . . . *deest.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
4. τὰ . . . . . *Id.* . . . . . διὰ τὰ

PROPOSITIO XVIII.

1. τὸ . . . . . *Id.* . . . . . *deest.*

PROPOSITIO XIX.

1. τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ . . . . . *Id.* . . . . . ἔλον τὸ ΑΒ πρὸς ἔλον τὸ ΓΔ  
2. ἄρα . . . . . *deest.* . . . . . ἄρα  
3. ἰναλλάξ . . . . . *Id.* . . . . . ἰναλλάξ ἄρα ἴστιν



## COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ  
οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ  
ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE  
οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγ-  
κείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν  
ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB  
πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς  
τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

concordat cum edit.  
Oxonix.

Καὶ ἐπεὶ ἰδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς  
τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ  
ΖΔ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB  
πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς  
τὸ ΔΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη  
ἀνάλογόν ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ ὡς  
τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ  
πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἔστιν ἀνα-  
στρέφαντι.

## PROPOSITIO XX.

- |                                        |                                 |                                  |
|----------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . .            | deest.                           |
| 2. καὶ ἰάν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .            | καὶ                              |
| 3. καὶ ἰάν . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .            | καὶ                              |
| 4. τι . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . .            | ὁ ἔτυχεν                         |
| 5. οὕτως . . . . .                     | deest. . . . .                  | οὕτως                            |
| 6. δὲ τὸ Γ πρὸς τὴν Β . . . . .        | δὲ Γ πρὸς Β . . . . .           | concordat cum edit. Paris.       |
| 7. τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον . . . . . | τὸ μείζονα λόγον ἔχον . . . . . | τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκείνο |

## PROPOSITIO XXI.

- |                                              |                           |                                                                   |
|----------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. μεγέθη . . . . .                          | μεγέθη ἀνάλογον . . . . . | μεγέθη                                                            |
| 2. ἴστί . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .      | deest.                                                            |
| 3. ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ<br>Δ τῷ Ζ· | <i>Id.</i> . . . . .      | ἴσον· δηλονότι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ<br>Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ. |

## PROPOSITIO XXII.

- |                                                      |                                                                     |                            |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                                | deest.                     |
| 2. ἴσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ<br>οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. | ἴσται . . . . .                                                     | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ Ζ.                                             | Καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἴσται ὡς<br>τὸ Α πρὸς τὸ Δ οὕτως<br>τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ. | deest.                     |

PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

Ι. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.

*Id. a, c, d. . . .*

καὶ εἴληπται τῶν Β, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα ἀτυχῶν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὸ Α, Μ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Α οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. *b.*

PROPOSITIO XXIV.

|                  |            |           |
|------------------|------------|-----------|
| 1. ἔχει.         | ἔχει.      | ἔχει      |
| 2. μὲν.          | <i>Id.</i> | deest.    |
| 3. πρώτον.       | <i>Id.</i> | τὸ πρῶτον |
| 4. ἐστὶν ἄρα ὡς. | <i>Id.</i> | ὡς ἄρα    |

PROPOSITIO XXV.

|                                   |            |                                |
|-----------------------------------|------------|--------------------------------|
| 1. δύο.                           | τὰ δύο.    | δύο                            |
| 2. μὲν.                           | <i>Id.</i> | deest.                         |
| 3. οὖν                            | deest      | οὖν                            |
| 4. τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ· | <i>Id.</i> | τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ· |
| 5. ἀνισα ἐστίν·                   | <i>Id.</i> | ἐστὶν ἀνισα·                   |
| 6. μὲν                            | <i>Id.</i> | deest.                         |

## LIBER SEXTUS.

## DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                        |                                                                                                                     |                                                                                                                        |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| β'. (1) λόγων. . . . . | <i>Id</i> . . . . .                                                                                                 | δροι                                                                                                                   |
| γ'. (2) ἡ. . . . .     | deest . . . . .                                                                                                     | ἡ                                                                                                                      |
| δ'. (3) deest. . . . . | hæc definitio, quæ in Λόγος ἐκ λόγων συγκείμεναι λέγεται, Euclide nullum habet usum, in margine tantum exarata est. |                                                                                                                        |
|                        |                                                                                                                     | ὅταν αἱ τῶν λόγων πλησιότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, τριῶσι τιναίς. <i>a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i> |

## PROPOSITIO I.

|                                                                               |                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην· τὸ ΑΓ. . . . .             | concordat cum edit. Paris.                 |
| 2. ὁσαιοηποτοῦν. . . . .                                                      | deest . . . . . concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλλαττον, ἔλαττον· . . . . . | concordat cum edit. Paris.                 |
| 4. ἡ μὲν . . . . .                                                            | μὲν ἡ . . . . . ἡ μὲν                      |
| 5. τρίγωνον, . . . . .                                                        | <i>Id.</i> . . . . . deest.                |
| 6. τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . . πρὸς τὸ ΑΓΔ           |
| 7. παραλληλόγραμμον. . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . . deest.                |

## PROPOSITIO II.

|                        |                                          |
|------------------------|------------------------------------------|
| 1. εὐθεῖα, . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . εὐθεῖα παράλληλος   |
| 2. πλευράν. . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . πλευράν παράλληλος. |
| 3. δὴ. . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . ἄρα                 |
| 4. τρίγωνον. . . . .   | deest. . . . . τρίγωνον                  |
| 5. δὴ. . . . .         | δὴ καὶ . . . . . δὴ                      |
| 6. τρίγωνον, . . . . . | τρίγωνον . . . . . deest.                |
| 7. τρίγωνον· . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . deest.              |
| 8. τρίγωνον. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . deest.              |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                        |                      |        |
|------------------------|----------------------|--------|
| 9. τρίγωνον . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 10. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 11. καὶ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO III.

|                                                               |                      |                                                        |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 2. ἡ . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 3. ἐνέπαισιν . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | ἐμπέπτωκεν                                             |
| 4. ἄρα γωνία . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 5. ὡς ἄρα . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν ἄρα                                              |
| 6. ὡς . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 7. ἔστιν . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |
| 8. ἥκται . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἥται παράλληλος                                        |
| 9. ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ<br>ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἔστιν ἴση | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστιν ἴση, ἴση δὲ καὶ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ<br>ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ |
| 10. γωνία . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                 |

## PROPOSITIO IV.

|                                                                                                      |                            |                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. πλευραί . . . . .                                                                                 | deest . . . . .            | πλευραί                                                                                    |
| 2. Εστω . . . . .                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .       | Εστῶσαν                                                                                    |
| 3. μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ<br>ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ<br>ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ<br>ὑπὸ ΔΓΕ | <i>Id.</i> . . . . .       | ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν<br>δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ<br>ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ |
| 4. πλευραί . . . . .                                                                                 | deest . . . . .            | πλευραί.                                                                                   |
| 5. ὑπὸ . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .       | περὶ                                                                                       |
| 6. ὑπὸ . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .       | περὶ                                                                                       |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                                     | deest . . . . .            | ἄρα                                                                                        |
| 8. τῶν πλευρῶν . . . . .                                                                             | desunt . . . . .           | concordat cum edit. Paris.                                                                 |
| 9. ἐναλλάξ ἄρα . . . . .                                                                             | καὶ ἐναλλάξ . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                                                                 |
| 10. Καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ . .                                                                   | Καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ὡς ἡ μὲν | Επεὶ οὖν εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ                                                                 |
| 11. καὶ . . . . .                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.                                                                                     |

## PROPOSITIO V.

| EDITIO PARISIENSIS.                               | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.           |
|---------------------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. linea 4 paginae 302, πρὸς τῇ Δ λοιπῇ πρὸς τῇ Η | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ |
| 2. ΕΗΖ' . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΑΖ τριγώνου             |
| 3. οὕτως . . . . .                                | deest . . . . .      | οὕτως                    |
| 4. καὶ . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 5. ἴσιν . . . . .                                 | deest . . . . .      | ἴσιν                     |
| 6. ἴσιν ἴση' . . . . .                            | deest . . . . .      | ἴσιν ἴση,                |
| 7. μὲν . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 8. Δ' . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | Δ ἴσιν ἴση'              |

## PROPOSITIO VI.

|                                |                      |                          |
|--------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. ὅση . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | γωνία ἴση                |
| 2. γωνία . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 3. ἴση' . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴση'                |
| 4. ἴσονται, . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσονται ἑκατέρω ἑκατέρω, |
| 5. ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς τῇ Η τῇ πρὸς τῇ Ε.  |

## PROPOSITIO VII.

|                                                        |                      |                                         |
|--------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------|
| 1. τὰς . . . . .                                       | deest. . . . .       | τὰς                                     |
| 2. τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον,             | <i>Id.</i> . . . . . | τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, |
| 3. γωνία . . . . .                                     | deest. . . . .       | γωνία                                   |
| 4. ὑπόκειται οὕτως . . . . .                           | <i>Id.</i> . . . . . | οὕτως ὑπόκειται                         |
| 5. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, | deest . . . . .      | concordat cum edit. Paris.              |
| 6. ἴσιν . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                  |
| 7. πρὸς τῇ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ                          | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπὸ τῇ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΗ             |
| 8. τῇ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                                      |
| 9. ὀρθῆς . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθῆς καὶ                               |
| 10. ἰσωνύμιον ἴστι. . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστι ἰσωνύμιον                          |
| 11. δὲ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                                      |

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                       |                                     |                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1. γωνία . . . . .                                                                    | deest. . . . .                      | γωνία                                      |
| 2. τῇ πρὸς τῇ Γ, . . . . .                                                            | deest. . . . .                      | concordat cum edit. Paris.                 |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                                     | deest. . . . .                      | ἐστὶ                                       |
| 4. τῇ ΑΔΓ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον·                                        | <i>Id</i> . . . . .                 | τὸ ΑΔΓ τριγώνον ὁμοίον ἐστὶ τῇ ΑΒΓ τριγώνῳ |
| 5. ὁμοίον ἐστὶν ὅλῃ τῇ ΑΒΓ τρίγῳν.                                                    | <i>Id</i> . . . . .                 | ὅλῃ τῇ ΑΒΓ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶν.           |
| 6. γωνίαν, . . . . .                                                                  | <i>Id</i> . . . . .                 | γωνίαν,                                    |
| 7. ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσιν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· | πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσιν τὰς ὀρθὰς· | concordat cum edit. Paris.                 |

COROLLARIUM.

|                     |                        |        |
|---------------------|------------------------|--------|
| 8. ἐστὶν· . . . . . | Ὅπρι ἴδιαι διῆξαι. . . | ἐστὶν· |
|---------------------|------------------------|--------|

PROPOSITIO IX.

|                            |                     |                  |
|----------------------------|---------------------|------------------|
| 1. καὶ . . . . .           | deest. . . . .      | καὶ              |
| 2. αὐτῇ ἔχθω ἢ ΔΖ. . . . . | <i>Id</i> . . . . . | ἔχθω τῇ ΒΓ ἢ ΔΖ. |

PROPOSITIO X.

|                     |                            |                                                                               |
|---------------------|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1. δοθείσῃ. . . . . | <i>Id</i> . . . . .        | δοθείσῃ εὐθείᾳ                                                                |
| 2. ΑΓ, . . . . .    | <i>Id</i> a, c, d. . . . . | δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἀτμητοῦ τῇ ΑΓ τιτμημένη ὁμοίως τεμῶν.<br>Ἐστω τιτμημένη ἢ ΑΓ δ. |

PROPOSITIO XI.

|                        |                     |                |
|------------------------|---------------------|----------------|
| 1. αἰ . . . . .        | <i>Id</i> . . . . . | δύο εὐθεῖαι αἰ |
| 2. προστυρεῖν. . . . . | εὐρεῖν. . . . .     | προστυρεῖν.    |
| 3. αὐτῇ. . . . .       | <i>Id</i> . . . . . | αὐτῇ           |

PROPOSITIO XII.

|                         |                     |                            |
|-------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. Γ. . . . .           | <i>Id</i> . . . . . | Γ εὐθειῶν                  |
| 2. τυχοῦσαν. . . . .    | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῶν πλευρῶν. . . . . | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XIV.

| EDITIO PARISIENSIS.                                           | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                                   |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------|
| 1. ἰσογωνίων. . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν                      |
| 2. ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσῃ<br>ἔχόντων γωνίαν, |
| 3. τε καὶ ἰσογώνια. . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . . | deest . . . . .                                  |
| 4. ΔΒ, ΒΓ ἄρα. . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | ἴρα AB, BG                                       |
| 5. ἀντιπεπινθέντων αἱ πλευραὶ<br>αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                       |
| 6. παραλληλόγραμμον. . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                           |

## PROPOSITIO XV.

|                          |                      |              |
|--------------------------|----------------------|--------------|
| 1. τριγώνων, . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 2. αἱ. . . . .           | deest. . . . .       | αἱ           |
| 3. τριγώνον. . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 4. ΕΑΔ. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ΕΑΔ τριγώνον |
| 5. ἄρα τριγώνων. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τριγώνων ἄρα |

## PROPOSITIO XVI.

|                                                     |                            |                                               |
|-----------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. καὶ. . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .       | καὶ εἰ                                        |
| 2. αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ<br>AB, ΓΔ, Ε, Ζ. | <i>Id.</i> . . . . .       | τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ, Ε, Ζ<br>ἀνάλογον, |
| 3. γὰρ. . . . .                                     | deest. . . . .             | γὰρ                                           |
| 4. ἄρα παραλληλογράμμων . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .       | παραλληλογράμμων ἄρα                          |
| 5. αἱ. . . . .                                      | deest. . . . .             | αἱ                                            |
| 6. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε. . . . .                       | ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ. . . . . | περιχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ<br>ἡ ΓΘ τῇ Ε. |
| 7. τῶν . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .       | deest.                                        |
| 8. ἴστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ. . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .       | τῇ Ζ ἡ ΑΗ.                                    |
| 9. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα BH<br>ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. | deest. . . . .             | concordat cum edit. Paris.                    |
| 10. καὶ ἴστιν. . . . .                              | <i>Id.</i> . . . . .       | εἴσιν                                         |

## PROPOSITIO XVII.

|                  |                      |               |
|------------------|----------------------|---------------|
| 1. καὶ. . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ εἰ        |
| 2. ἀπὸ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀπὸ τῆς μέσης |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                    |                |                         |
|------------------------------------|----------------|-------------------------|
| 3. οὕτως . . . . .                 | deest. . . . . | οὕτως                   |
| 4. τὸ ἀπὸ τῆς B ἴστί, . . . . .    | Id. . . . .    | τῷ ἀπὸ τῆς B ἴστί ἴσον, |
| 5. τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἴστί, . . . . . | Id. . . . .    | τῷ ἀπὸ τῶν B, Δ.        |

PROPOSITIO XVIII.

- |                             |                |                |
|-----------------------------|----------------|----------------|
| 1. ἴση ἢ ὑπὸ HAB, . . . . . | Id. . . . .    | ἢ ὑπὸ HAB ἴση, |
| 2. ἴση. . . . .             | Id. . . . .    | deest.         |
| 3. λοιπῇ . . . . .          | deest. . . . . | λοιπῇ          |
| 4. τε. . . . .              | Id. . . . .    | deest.         |
| 5. αὐτῷ. . . . .            | αὐτῶν. . . . . | αὐτῷ           |

PROPOSITIO XIX.

- |                             |                   |                            |
|-----------------------------|-------------------|----------------------------|
| 1. τῷ. . . . .              | Id. . . . .       | τὸ                         |
| 2. ἄρα τριγώνων. . . . .    | Id. . . . .       | τριγώνων ἄρα               |
| 3. τριγώνων . . . . .       | Id. . . . .       | deest.                     |
| 4. ἔχουσιν λίγεται. . . . . | ἔχουσιν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τριγώνων . . . . .       | Id. . . . .       | deest.                     |

COROLLARIUM.

- |                      |                        |                            |
|----------------------|------------------------|----------------------------|
| 7. ἴαν . . . . .     | Id. . . . .            | κἄν                        |
| 8. τριγώνων. . . . . | ἴστος. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ΔΕΖ . . . . .     | ΔΕΖ. Οπερ ἴδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XX.

- |                                                    |                |                            |
|----------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. τὸ. . . . .                                     | Id. . . . .    | deest.                     |
| 2. λοιπῇ . . . . .                                 | deest. . . . . | λοιπῇ                      |
| 3. εἴσιν . . . . .                                 | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. ἔτι τὸ ΕΒΓ τριγώνων τῷ ΑΗΘ<br>τριγώνων. . . . . | Id. . . . .    | deest.                     |
| 5. γωνία . . . . .                                 | Id. . . . .    | deest.                     |
| 6. ἐδείχθη . . . . .                               | ἴστος. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἴση ἴστί . . . . .                              | Id. . . . .    | ἴστί ἴση                   |
| 8. μὲν . . . . .                                   | Id. . . . .    | deest.                     |



|                        |                      |        |
|------------------------|----------------------|--------|
| 9. ἄρα . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 10. τὸ . . . . .       | deest . . . . .      | τὸ     |
| 11. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 12. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 13. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 14. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## COROLLARIUM I.

|                       |                               |                            |
|-----------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 15. δὴ . . . . .      | δὲ . . . . .                  | δὴ                         |
| 16. καὶ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                     |
| 17. πλευρῶν . . . . . | πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει δι᾽ ἑξαι. | concordat cum edit. Paris. |

## COROLLARIUM II.

|                        |                      |        |
|------------------------|----------------------|--------|
| 18. καὶ . . . . .      | ἢ . . . . .          | καὶ    |
| 19. πλευρῶν, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## ALITER.

|                       |                      |                                                                                                                                                     |
|-----------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 20. τρίγωνον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                              |
| 21. deest. . . . .    | deest . . . . .      | καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς<br>ἐν τῶν ἱπομένων οὕτως ἅπαντα<br>τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ<br>ἱπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν<br>τῇ προτέρᾳ διίξει. |

*Nota.* In demonstratione propositionis XX, codicibus *a, c*, articulus τὴν non ponitur ante litteras figuram designantes, ante quas poni solet.

## PROPOSITIO XXI.

|                          |                      |                                                                                                |
|--------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὁμοίον ἔστι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ὁμοίον                                                                                   |
| 2. deest. . . . .        | deest . . . . .      | ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιον τε<br>ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας<br>πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. |

## PROPOSITIO XXII.

|                   |                      |        |
|-------------------|----------------------|--------|
| 1. μὲν ἢ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ μὲν  |
| 2. τὸ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ τὸ |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 4. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 5. Εἰ γὰρ μὴ ἴσθιν ὡς ἡ AB πρὸς *Id.* . . . . . Γεγονίτω γὰρ  
 τὸν ΓΔ οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ,  
 ἴστω  
 6. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ *Id.* . . . . . deest.  
 οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ  
 7. ΣΡ . . . . . *Id.* . . . . . καὶ ΣΡ  
 8 ἡ . . . . . *Id.* . . . . . ἴσθιν ἡ

Λ Η Μ Μ Α.

9. ἡ καὶ ὁμοία, . . . . . *Id.* . . . . . καὶ ὁμοία ἡ

PROPOSITIO XXIII.

1. τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.  
 2. τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε concordat cum edit. Paris.  
 τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Α· λόγου καὶ τοῦ τῆς Κ πρὸς Α· λόγου  
 τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Μ· καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς Μ·  
 3. παραλληλόγραμμον. . . . . *Id.* . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 4. παραλληλόγραμμον. . . . . *Id.* . . . . . deest.

PROPOSITIO XXIV.

1. αὐτοῦ . . . . . deest. . . . . αὐτῷ  
 2. τῶν πλειῶν . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 3. ἄρα . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 4. ἡ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 5. συντιθέντι . . . . . *Id.* . . . . . συντιθέντι ἄρα  
 6. τὴν ΑΗ, καὶ . . . . . ΑΗ . . . . . concordat cum edit. Paris.  
 7. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ . . . . . *Id.* . . . . . τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα  
 8. ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. concordat cum edit. Paris.  
 ὑπὸ ΗΖΔ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ,  
 9. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμ- ἄρα deest. et reliquum ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον  
 μον τῷ ΕΗ παραλληλόγραμμῳ concordat cum edit. ἰσογώνιον ἰστί τῷ ΕΗ παραλλη-  
 ἰσογώνιον ἰσθιν· Paris. λογράμμῳ

|                            |                      |                            |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 10. ἡ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 11. καὶ . . . . .          | deest. . . . .       | καὶ                        |
| 12. παραλληλογράμμου . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXV.

|                       |                      |        |
|-----------------------|----------------------|--------|
| 1. δι᾽ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. τε . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 3. ἔστιν . . . . .    | deest. . . . .       | ἔστιν  |
| 4. τριγώνων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 5. τῷ Δ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO XXVI.

|                                                                        |                         |                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. παραλληλογράμμου γὰρ . .                                            | <i>Id.</i> . . . . .    | γὰρ παραλληλογράμμου                                                     |
| 2. ἀφαιρέσθω . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | ἀφαιρέσθω                                                                |
| 3. αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ<br>ἐκκληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ<br>τὸ Θ, | <i>Id. a.</i> . . . . . | αὐτῶν ἡ διάμετρος ΑΘΓ, <i>b, c, d,</i><br><i>e, f, g, h, k, l, m, n.</i> |
| 4. αὐτὴν . . . . .                                                     | deest. . . . .          | deest. <i>b,</i>                                                         |
| 5. ὁμοίων ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ,                                          | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                               |
| 6. καὶ . . . . .                                                       | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                                                                   |
| 7. ἄρα . . . . .                                                       | deest. . . . .          | ἄρα                                                                      |
| 8. οὐκ . . . . .                                                       | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                                                                   |

## PROPOSITIO XXVII.

|                              |                        |                            |
|------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. αὐτὴν . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |
| 2. ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, . . . | τῆς ΑΒ ἀναγραφέντι . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. παραλληλογράμμοις . . . . | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 4. προσκείσθω τὸ ΚΘ . . . .  | δε τὸ ΖΒ . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἴση ἐστίν . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴστιν ἴση                  |
| 6. ἐστὶν ἴσον . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴσον ἐστὶ,                 |
| 7. ὥστε . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .   | ὥστε καὶ                   |
| 8. τῆς . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .   | τὴν                        |
| 9. προσκείσθω . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴστω                       |

## PROPOSITIO XXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                             | CODEX 190.                                | EDITIO OXONIÆ.                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὁμοίῳ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                      | ὁμοίο ἔντι                                                                                    |
| 2. τῶν ἠλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ<br>τῆς ἡμισίας καὶ τοῦ ἥ δι' ὁμοιον<br>ἠλλείπειν. | <i>Id.</i> . . . . .                      | τοῦ τε ἠλλείμματος τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ἡμισίας καὶ τοῦ ἥ δι' ὁμοίων<br>ἠλλείπειν παραλληλογράμμου. |
| 3. ἡμισίας παραβαλλομένου, ὁ-<br>μοίων ὄντων τῶν ἠλλειμμάτων,                   | AB ἀναγραφομένου ἡμοίου<br>τῷ ἠλλειμμάτι, | concordat cum edit. Paris.                                                                    |
| 4. τὸ δὲ AH ἥτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ,<br>ἢ μίζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ἕρισμον.             | desunt. . . . .                           | concordat cum edit. Paris.                                                                    |
| 4. ἐστὶν . . . . .                                                              | deest. . . . .                            | ἐστὶν                                                                                         |
| 5. οὖν . . . . .                                                                | deest. . . . .                            | οὖν                                                                                           |
| 6. μὲν τῇ Λ . . . . .                                                           | τῇ ΔΚ μὲν . . . . .                       | μὲν τῇ Λ                                                                                      |
| 7. τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ. . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                      | τὸ ΕΟ τῷ ΚΜ.                                                                                  |
| 9. ἐστὶν ἴσον. . . . .                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                      | ἴσον ἐστὶν.                                                                                   |

## PROPOSITIO XXIX.

|                                 |                      |                            |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΑ. | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 3. οὖν . . . . .                | deest. . . . .       | οὖν                        |
| 4. ἐστὶν ἴσος. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσος ἐστὶ.                 |
| 5. τῷ ΕΑ ἐστὶν ὁμοιον τὸ ΟΠ     | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΕΑ ἐστὶν ὁμοιον τῷ ΟΠ.  |

## PROPOSITIO XXX.

|                                  |                      |                            |
|----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .                 | deest. . . . .       | γὰρ                        |
| 2. ΑΓ, τουτίστι τε ΑΒ, . . . . . | ΑΒ, . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## A L I T E R.

|                 |                      |            |
|-----------------|----------------------|------------|
| 4. ΑΒ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΒ εὐθείαν |
|-----------------|----------------------|------------|

## PROPOSITIO XXXI.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 1. τε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. τε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

|                  |                |        |
|------------------|----------------|--------|
| 3. ἄρα . . . . . | deest. . . . . | ἄρα    |
| 4. ἡ . . . . .   | Id. . . . .    | deest. |

## A L I T E R.

|                               |                |           |
|-------------------------------|----------------|-----------|
| 5. ἴσῳ . . . . .              | Id. . . . .    | εἰς       |
| 6. ἄρα εἶδος . . . . .        | Id. . . . .    | εἶδος ἄρα |
| 7. εἶδος . . . . .            | Id. . . . .    | deest.    |
| 8. τοῖς . . . . .             | deest. . . . . | τοῖς      |
| 9. Ὅπερ εἶδεν διῆξαι. . . . . | deest. . . . . | deest.    |

Hæc altera demonstratio in infimâ paginâ codicis 190 exarata est, vocabulis contractis.

## PROPOSITIO XXXII.

|                                                       |                |                            |
|-------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. αἱ . . . . .                                       | Id. . . . .    | deest.                     |
| 2. τὰ . . . . .                                       | Id. . . . .    | deest.                     |
| 3. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΓ, ΑΓΒ<br>διὺν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXXIII.

|                                                                 |                                                                                                                                                                                                                               |                            |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομῆς, ἅτε πρὸς<br>τοῖς κέντροις συριστάμενοι, | hæc verba interlineas<br>exarata sunt manu<br>alienâ, et secunda<br>pars demonstratio-<br>nis, quæ ad secto-<br>res attinet, nec-<br>non corollarium, in<br>margine manu alie-<br>nâ exarata sunt, vo-<br>cabulis contractis. | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομὴς πρὸς τὸν<br>ΘΕΖ τομῆα.                   | desunt. . . . .                                                                                                                                                                                                               | concordat cum edit. Paris. |
| 3. κατὰ τὸ ἰξῆς ὁσαιοηποτοῦν .                                  | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | ὁσαιοηποτοῦν κατὰ τὸ ἰξῆς  |
| 4. ἴσαι ὁσαιοηποτοῦν . . . . .                                  | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | ὁσαιοηποτοῦν ἴσαι          |
| 5. Εἰ ἄρα . . . . .                                             | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | καὶ εἰ                     |

| EDITIO PARISIENSIS.                                                              | CODEx 190.         | EDITIO OXONIÆ.                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 6. γωνίας . . . . .                                                              | deest. . . . .     | γωνίας                                                                            |
| 7. διπλασιων . . . . .                                                           | διπλασια . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 8. ὑπὸ . . . . .                                                                 | deest. . . . .     | ὑπὸ                                                                               |
| 9. ἴστί . . . . .                                                                | Id. . . . .        | deest.                                                                            |
| 10. κύκλον περιφέρεια ἴση ἴστί τῇ<br>λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον<br>περιφέρειᾳ. | Id. . . . .        | ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἴστί τῇ<br>λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον<br>περιφέρειᾳ. |
| 11. ΒΞΓ . . . . .                                                                |                    | ΓΞΓ γωνία                                                                         |
| 12. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ,<br>ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλή-<br>λοις εἰσίν.        | desunt. . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                        |
| 13. Εἰ ἄρα ἴση ἴστί ἡ ΑΛ περι-<br>φέρεια τῇ ΕΝ περιφέρειᾳ,                       | Id. . . . .        | καὶ εἰ ἴση ἴστί ἡ ΒΑ περιφέρεια<br>τῇ ΕΝ,                                         |
| 14. ὑπερίχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομὴς<br>τοῦ ΘΕΝ τομῆως καὶ εἰ ἐλλεί-<br>πει, ἐλλείπει.   | desunt. . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                        |

## LIBER SEPTIMUS.

## DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                  | CODEX 190.                                             | EDITIO OXONIÆ.      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------|
| α. (1) ἦν . . . . .                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                   | ἦν ο                |
| ζ. (2) ὁ . . . . .                                                                                   | <i>deest.</i> . . . . .                                | ὁ                   |
| θ. (3) ἀριθμός . . . . .                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                   | <i>deest.</i>       |
| ι. (4) Περὶ σσάκεις δὲ ἄρτιός ἐστιν,<br>ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρού-<br>μενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· | <i>Id.</i> <i>a, c, e, f, g,</i><br><i>h, l, m, n,</i> | <i>deesi. b, d.</i> |
| ια. (3) ἀριθμός ἐστιν, . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                   | ἐστὶν ἀριθμός,      |
| ιγ. (6) δὲ . . . . .                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                                   | <i>deest.</i>       |
| ιδ. (7) ὅσαι . . . . .                                                                               | ὅσαι . . . . .                                         | ὅσαι ἴσαι           |
| (8) τοσαυτάκεις . . . . .                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                   | τοσαύκεις           |
| ιθ. (9) καλεῖται· . . . . .                                                                          | ἰστί· . . . . .                                        | καλεῖται·           |
| ιβ. (10) ὁ . . . . .                                                                                 | <i>deest.</i> . . . . .                                | ὁ                   |
| κ. (11) ἀριθμῶν ἴσων . . . . .                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                                   | ἴσων ἀριθμῶν        |

## PROPOSITIO I.

|                                                                                                     |                         |                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἱκκειμένων,<br>ἀνθυφαιρουμένου δὲ αἰ τοῦ ἰλάσ-<br>σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἴαν | <i>Id.</i> . . . . .    | Εἰάν δύο ἀριθμῶν ἀνίσως ἱκκειμένων<br>ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἰπάσ-<br>σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, |
| 2. ἀνίσων . . . . .                                                                                 | <i>deest.</i> . . . . . | ἀνίσων                                                                                        |
| 3. μετριῖ. . . . .                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρή.                                                                                        |
| 4. μετρήσει. . . . .                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρήσει ὁ Ε.                                                                                 |
| 5. μετρήσει. . . . .                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρήσει ὁ Ε.                                                                                 |
| 6. μετρήσει. . . . .                                                                                | μετριῖ. . . . .         | μετρήσει.                                                                                     |

## PROPOSITIO II.

|                                                    |                          |                            |
|----------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. καὶ ἴστω ἰλάσων ο ΓΔ· . .                       | <i>desunt.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ΑΒ, ΓΔ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .     | ΓΔ, ΑΒ                     |
| 3. linea secunda et tertia pa-<br>giuæ 389 μετριῖ. | ΑΔΓ . . . . .            | μετρήσει.                  |

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. μετρήται . . . . . μετρήσει. Ὅπερ ἰδίᾳ δείξαι μετρήται.

PROPOSITIO III.

|                                |                      |                                |
|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| 1. μέγιστον κοινὸν μέτρον, . . | <i>Id.</i> . . . . . | κοινὸν μέγιστον μέτρον,        |
| 2. μετρήσει, . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσας                       |
| 3. μετρήσει μείζων τοῦ Δ'. . . | <i>Id.</i> . . . . . | τις μετρήσει μείζων ὥς τοῦ Δ'. |
| 4. δὴ . . . . .                | deest. . . . .       | δὴ                             |
| 5. ἄρα . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                         |
| 6. μετρήσει. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσῃ                        |
| 7. ποιῆσαι. . . . .            | δείξαι. . . . .      | concordat cum edit. Paris.     |

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium deest in codice *a*.

PROPOSITIO IV.

|                                |                      |                           |
|--------------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1. Οἱ Α, ΒΓ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | οἱ Α, ΒΓ πρότερον         |
| 2. πρότερον οἱ Α, ΒΓ . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                   |
| 3. οἱ Α, ΒΓ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                   |
| 4. δὴ ἑκάστη τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. . | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ ὁ Δ ἑκάστη τῶν ΒΕ, ΒΖ. |

PROPOSITIO V.

|                                                                                                                                    |                      |                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἀριθμοῦ . . . . .                                                                                                               | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                  |
| 2. εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ . . .                                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ                                                                                                                      |
| 3. καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα Α, Δ. Διὰ<br>τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος<br>ἐστίν, ὁ δὲ ΘΖ τῷ Δ' καὶ οἱ ΗΓ,<br>ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶν. | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ ΒΗ ἄρα καὶ ΕΘ τοῖς Α, Δ ἴσοι<br>εἰσὶ. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ ΗΓ τῷ Α<br>ἴσος ἐστίν, καὶ ὁ ΘΖ τῷ Δ' καὶ<br>οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι<br>εἰσὶν. |
| 4. τοῦ . . . . .                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ                                                                                                                                          |



## PROPOSITIO VI.

| EDITIO PARISIENSIS.                                | COD. 190.            | EDITIO OXONIE.           |
|----------------------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $\eta$ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 2. ἴστί . . . . .                                  | deest. . . . .       | ἴστί                     |
| 3. τὸ αὐτὸ . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτὸ τὸ                  |
| 4. καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος<br>ἴστί τὸ ΗΒ τοῦ Γ | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί |

## PROPOSITIO VII.

|                                                                             |                                                |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                                                              | deest. . . . .                                 | ὁ                          |
| 2. ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ,<br>ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί·                      | hæc verba alienâ manu in margine exarata sunt. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστί· ἴσος. . . . .                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                           | ἴσος ἴστί.                 |
| 4. ἴστί . . . . .                                                           | deest. . . . .                                 | ἴστί                       |
| 5. τῷ . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                           | τοῦ                        |
| 6. ὁ ἄρα μέρος ἴστί· ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ,<br>τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί καὶ ὁ ΑΒ<br>τοῦ ΓΔ· | desunt. . . . .                                | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO VIII.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. τῷ ΑΒ ἴσος . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσος τῷ ΑΒ |
| 2. ἴστί . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.     |

## PROPOSITIO IX.

|                              |                      |                            |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $\tilde{\eta}$ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. λίσσων δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ· | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .             | deest. . . . .       | καὶ                        |
| 4. δὲ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                         |

## PROPOSITIO X.

|                                |                      |                            |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ αὐτὸ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                    |
| 2. ἴστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἰλάσων· | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

|                                                                                                          |                      |         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------|
| 3. τὸ αὐτὸ . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.  |
| 4. τοῦ . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ      |
| 5. τοῦ . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ      |
| 6. καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ<br>τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος<br>ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ<br>αὐτὰ μέρη. | <i>Id.</i> . . . . . | desunt. |
| 7. ἰδείχθη . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ    |
| 8. ἄρα . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.  |

PROPOSITIO XIII.

|                      |                      |         |
|----------------------|----------------------|---------|
| 1. τὰ αὐτὰ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | desunt. |
|----------------------|----------------------|---------|

PROPOSITIO XIV.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. γὰρ . . . . . | deest. . . . . | γὰρ |
| 2. καὶ . . . . . | deest. . . . . | καὶ |

PROPOSITIO XV.

|                                |                      |                            |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. δι . . . . .                | δὴ . . . . .         | δι                         |
| 3. ἴσται . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν                      |
| 4. ἀριθμὸν . . . . .           | deest. . . . .       | ἀριθμὸν                    |
| 5. ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν . . | ὁ Α τοῦ Δ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ἀριθμὸν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|----------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO XVII.

|                                                         |                      |                            |
|---------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔχουσι λόγον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | λόγον ἔχουσι               |
| 2. ἀριθμὸν . . . . .                                    | deest. . . . .       | ἀριθμον                    |
| 3. καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕ-<br>τως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

| EDITIO PARISIENSIS.        | COD. 190.            | EDITIO OXONIÆ.             |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 10. ἡ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 11. καὶ . . . . .          | deest. . . . .       | καὶ                        |
| 12. παραλληλογράμμου . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXV.

|                       |                      |        |
|-----------------------|----------------------|--------|
| 1. δι᾽ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. τε . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 3. ἔστιν . . . . .    | deest. . . . .       | ἔστιν  |
| 4. τρίγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 5. τῷ Δ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO XXVI.

|                                                                                  |                         |                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. παραλληλογράμμου γάρ . .                                                      | <i>Id.</i> . . . . .    | γάρ παραλληλογράμμου                                                     |
| 2. ἀφαιρέσθω . . . . .                                                           | <i>Id.</i> . . . . .    | ἀφαιρέσθω                                                                |
| 3. αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ<br>ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ<br>τὸ Θ, . . . . . | <i>Id. a.</i> . . . . . | αὐτῶν ἡ διάμετρος ΑΘΓ, <i>b, c, d,</i><br><i>e, f, g, h, k, l, m, n.</i> |
| 4. αὐτὴν . . . . .                                                               | deest. . . . .          | deest. <i>h,</i>                                                         |
| 5. ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, . . .                                              | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                               |
| 6. καὶ . . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                                                                   |
| 7. ἄρα . . . . .                                                                 | deest. . . . .          | ἄρα                                                                      |
| 8. οὐκ . . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                                                                   |

## PROPOSITIO XXVII.

|                              |                        |                            |
|------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. αὐτὴν . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |
| 2. ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, . . . | τῆς ΑΒ ἀναγραφέντι . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. παραλληλογράμμοις . . .   | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 4. προσκείσθω τὸ ΚΘ . . .    | Διὰ τὸ ΖΒ . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἴση ἐστίν . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴσιν ἴση                   |
| 6. ἐστὶν ἴσον . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴσον ἐστὶ.                 |
| 7. ὥστε . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . .   | ὥστε καὶ                   |
| 8. τῆς . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .   | τὴν                        |
| 9. προσκείσθω . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .   | ἴστα                       |

## PROPOSITIO XXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                             | CODEX 190.                               | EDITIO OXONIÆ.                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὁμοίῳ . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                     | ὁμοίο ἔντι                                                                                    |
| 2. τῶν ἠλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ<br>τῆς ἡμισίας καὶ τοῦ ἥ δι' ὁμοίων<br>ἠλλείπειτ. | <i>Id.</i> . . . . .                     | τοῦ τε ἠλλείμματος τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ἡμισίας καὶ τοῦ ἥ δι' ὁμοίων<br>ἠλλείπειν παραλληλογράμμου. |
| 3. ἡμισίας παραβαλλομένου, ὁ-<br>μοίων ὄντων τῶν ἠλλειμμάτων,                   | AB ἀαγραφομένου ἰμοίου<br>τῷ ἠλλειμμάτι, | concordat cum edit. Paris.                                                                    |
| 4. τὸ δὲ ΑΗ ἥτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ,<br>ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ἕρισμον.            | desunt. . . . .                          | concordat cum edit. Paris.                                                                    |
| 4. ἐστὶν . . . . .                                                              | deest. . . . .                           | ἐστὶν                                                                                         |
| 5. οὗν . . . . .                                                                | deest. . . . .                           | οὗν                                                                                           |
| 6. μὲν τῇ Λ . . . . .                                                           | τῇ ΔΚ μὲν . . . . .                      | μὲν τῇ Λ                                                                                      |
| 7. τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ. . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                     | τὸ ΕΟ τῷ ΚΜ.                                                                                  |
| 9. ἐστὶν ἴσον. . . . .                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                     | ἴσον ἐστίν.                                                                                   |

## PROPOSITIO XXIX.

|                                 |                      |                            |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΑ. | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 3. οὗν . . . . .                | deest. . . . .       | οὗν                        |
| 4. ἐστὶν ἴσος. . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσος ἐστὶ.                 |
| 5. τῷ ΕΑ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ     | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΕΑ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ.  |

## PROPOSITIO XXX.

|                              |                      |                            |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .             | deest. . . . .       | γὰρ                        |
| 2. ΑΓ, τουτίστι τε ΑΒ, . . . | ΑΒ, . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## A L I T E R.

|                 |                      |            |
|-----------------|----------------------|------------|
| 4. ΑΒ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΑΒ εὐθεῖαν |
|-----------------|----------------------|------------|

## PROPOSITIO XXXI.

|                 |                      |        |
|-----------------|----------------------|--------|
| 1. τε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. τε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

- |                  |                |        |
|------------------|----------------|--------|
| 3. ἄρα . . . . . | deest. . . . . | ἄρα    |
| 4. ἡ . . . . .   | Id. . . . .    | deest. |

## A L I T E R.

- |                             |                |           |
|-----------------------------|----------------|-----------|
| 5. ἰστὶ . . . . .           | Id. . . . .    | εἰσὶ      |
| 6. ἄρα εἶδος . . . . .      | Id. . . . .    | εἶδος ἄρα |
| 7. εἶδος . . . . .          | Id. . . . .    | deest.    |
| 8. τοῖς . . . . .           | deest. . . . . | τοῖς      |
| 9. Οὐκ ἴδεν διῆξαι. . . . . | deest. . . . . | deest.    |

Hæc altera demonstratio in infimâ paginâ codicis 190 exarata est, vocabulís contractis.

## PROPOSITIO XXXII.

- |                                                        |                |                            |
|--------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. αἱ . . . . .                                        | Id. . . . .    | deest.                     |
| 2. τὰ . . . . .                                        | Id. . . . .    | deest.                     |
| 3. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΓ, ΑΓΒ<br>δυσὲν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXXIII.

- |                                                                 |                                                                                                                                                                                                                               |                            |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομῆς, ἅτε πρὸς<br>τοῖς κέντροις συριστάμενοι, | hæc verba inter lineas<br>exarata sunt manu<br>alienâ, et secunda<br>pars demonstratio-<br>nis, quæ ad secto-<br>res attinet, nec<br>non corollarium, in<br>margine manu alie-<br>nâ exarata sunt, vo-<br>cabulis contractis. | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομὴς πρὸς τὸν<br>ΘΕΖ τομὴς.                   | desunt. . . . .                                                                                                                                                                                                               | concordat cum edit. Paris. |
| 3. κατὰ τὸ ἰξῆς ὁσαιοηποτοῦν .                                  | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | ὁσαιοηποτοῦν κατὰ τὸ ἰξῆς  |
| 4. ἴσαι ὁσαιοηποτοῦν . . . . .                                  | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | ὁσαιοηποτοῦν ἴσαι          |
| 5. Εἰ ἄρα . . . . .                                             | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | καὶ εἰ                     |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                 |                    |                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 6. γωνίας . . . . .                                                             | deest. . . . .     | γωνίας                                                                           |
| 7. διπλασιων . . . . .                                                          | διπλασια . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                       |
| 8. ὑπὸ . . . . .                                                                | deest. . . . .     | ὑπὸ                                                                              |
| 9. ἰστὶ . . . . .                                                               | Id. . . . .        | deest.                                                                           |
| 10. κύκλον περιφέρεια ἴση ἰστὶ τῇ<br>λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον<br>περιφέρειᾳ | Id. . . . .        | ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἰστὶ τῇ<br>λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον<br>περιφέρειᾳ |
| 11. ΒΞΓ . . . . .                                                               |                    | ΓΞΓ γωνία                                                                        |
| 12. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ,<br>ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλή-<br>λοις εἰσίν        | desunt. . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                       |
| 13. Εἰ ἄρα ἴση ἰστὶν ἡ ΑΛ περι-<br>φέρεια τῇ ΕΝ περιφέρειᾳ,                     | Id. . . . .        | καὶ εἰ ἴση ἰστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια<br>τῇ ΕΝ,                                       |
| 14. ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομὸς<br>τοῦ ΘΕΝ τομῶς καὶ εἰ ἐλλεί-<br>πει, ἐλλείπει.   | desunt. . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                       |

## LIBER SEPTIMUS.

## DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                | CODEX 190.                                             | EDITIO OXONIÆ.      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------|
| α. (1) ἡν . . . . .                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                                   | ἡν ο                |
| ζ. (2) ὁ . . . . .                                                                                 | <i>deest.</i> . . . . .                                | ὁ                   |
| θ. (3) ἀριθμός . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                                   | <i>deest.</i>       |
| ι. (4) Περισσάκις δὲ ἄρτιός ἐστιν,<br>ὁ ὑπο περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρού-<br>μενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· | <i>Id.</i> <i>a, c, e, f, g,</i><br><i>h, l, m, n,</i> | <i>deesi. b, d.</i> |
| ια. (3) ἀριθμός ἐστιν, . . . . .                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                   | ἐστὶν ἀριθμός,      |
| ιγ. (6) δὲ . . . . .                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                   | <i>deest.</i>       |
| ις. (7) ὅσαι . . . . .                                                                             | <i>ὅσαι</i> . . . . .                                  | ὅσαι ἴσαι           |
| (8) τοσαυτάκις . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                                   | τοσαύκις            |
| ιθ. (9) καλεῖται· . . . . .                                                                        | <i>ἰστί·</i> . . . . .                                 | καλεῖται·           |
| ιβ. (10) ὁ . . . . .                                                                               | <i>deest.</i> . . . . .                                | ὁ                   |
| κ. (11) ἀριθμῶν ἴσων . . . . .                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                   | ἴσων ἀριθμῶν        |

## PROPOSITIO I.

|                                                                                                      |                         |                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἱκκειμένων,<br>ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀπὸ τοῦ ἰλάσ-<br>σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἴαν | <i>Id.</i> . . . . .    | Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσως ἱκκειμένων<br>ἀνθυφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἰπάσ-<br>σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, |
| 2. ἀνίσων . . . . .                                                                                  | <i>deest.</i> . . . . . | ἀνίσων                                                                                        |
| 3. μετρεῖ. . . . .                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρῇ.                                                                                        |
| 4. μετρήσει. . . . .                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρήσει ὁ Ε.                                                                                 |
| 5. μετρήσει. . . . .                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .    | μετρήσει ὁ Ε.                                                                                 |
| 6. μετρήσει. . . . .                                                                                 | μετρεῖ. . . . .         | μετρήσει.                                                                                     |

## PROPOSITIO II.

|                                                    |                          |                                   |
|----------------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1. καὶ ἴστω ἰλάσων ο ΓΔ· . .                       | <i>desunt.</i> . . . . . | <i>concordat cum edit. Paris.</i> |
| 2. AB, ΓΔ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .     | ΓΔ, AB                            |
| 3. linea secunda et tertia pa-<br>giuæ 389 μετρεῖ. | ΑΔΓ . . . . .            | μετρήσει.                         |

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

COD. 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. μετρήσει . . . . . μετρήσει. Οπερ ἰδίῃ δείξαι μετρήσει.

PROPOSITIO III.

- |                                |                      |                               |
|--------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1. μέγιστον κοινὸν μέτρον, . . | <i>Id.</i> . . . . . | κοινὸν μέγιστον μέτρον,       |
| 2. μετρήσει, . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσας                      |
| 3. μετρήσει μείζων τοῦ Δ'. . . | <i>Id.</i> . . . . . | τις μετρήσει μείζων ὥς τοῦ Δ' |
| 4. δὴ . . . . .                | deest. . . . .       | δὴ                            |
| 5. ἄρα . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                        |
| 6. μετρήσει. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσῃ                       |
| 7. ποιῆσαι. . . . .            | δείξαι. . . . .      | concordat cum edit. Paris.    |

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium deest in codice *a*.

PROPOSITIO IV.

- |                                |                      |                            |
|--------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Οἱ A, BΓ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | οἱ A, BΓ πρότερον          |
| 2. πρότερον οἱ A, BΓ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                    |
| 3. οἱ A, BΓ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                    |
| 4. δὴ ἐκάστῃ τῶν BE, EZ, ZΓ. . | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ ὁ Δ ἐκατέρᾳ τῶν BE, BZ. |

PROPOSITIO V.

- |                                                                                                                                    |                      |                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἀριθμοῦ . . . . .                                                                                                               | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                 |
| 2. εἰσὶν ἐν τῷ BΓ ἀριθμοὶ . . .                                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν τῷ BΓ                                                                                                                     |
| 3. καὶ οἱ BH, EΘ ἄρα A, Δ. Διὰ<br>τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ HΓ τῷ A ἴσος<br>ἐστίν, ὁ δὲ ΘZ τῷ Δ' καὶ οἱ HΓ,<br>ΘZ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι εἰσίν. | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ BH ἄρα καὶ EΘ τοῖς A, Δ ἴσοι<br>εἰσὶ. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ HΓ τῷ A<br>ἴσος ἐστὶ, καὶ ὁ ΘZ τῷ Δ' καὶ<br>οἱ HΓ, ΘZ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι<br>εἰσίν. |
| 4. τοῦ . . . . .                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ                                                                                                                                         |



## PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                    |                      |                          |
|----------------------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. $\eta$ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                   |
| 2. ἴστί . . . . .                                  | deest. . . . .       | ἴστί                     |
| 3. τὸ αὐτὸ . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτὸ τὸ                  |
| 4. καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος<br>ἴστί τὸ ΗΒ τοῦ Γ | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί |

## PROPOSITIO VII.

|                                                                             |                                                          |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                                                              | deest. . . . .                                           | ὁ                          |
| 2. ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ,<br>ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί·                      | hæc verba alienâ ma-<br>nu in margine exa-<br>rata sunt. | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστί· ἴσος. . . . .                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                                     | ἴσος ἴστί.                 |
| 4. ἴστί . . . . .                                                           | deest. . . . .                                           | ἴστί                       |
| 5. τῷ . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                     | τοῦ                        |
| 6. ὁ ἄρα μέρος ἴστί· ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ,<br>τὸ αὐτὸ μέρος ἴστί καὶ ὁ ΑΒ<br>τοῦ ΓΔ· | desunt. . . . .                                          | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO VIII.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. τῷ ΑΕ ἴσος . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσος τῷ ΑΕ |
| 2. ἴστί . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.     |

## PROPOSITIO IX.

|                              |                      |                            |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. $\eta$ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. λίσσων δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ· | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .             | deest. . . . .       | καὶ                        |
| 4. δὲ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                         |

## PROPOSITIO X.

|                                 |                      |                            |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸ αὐτὸ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                    |
| 2. ἴστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἑλάσσων· | desunt. . . . .      | cancordat cum edit. Paris. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                                           |                      |         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------|
| 3. τὸ αὐτὸ . . . . .                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.  |
| 4. τοῦ . . . . .                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ      |
| 5. τοῦ . . . . .                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ      |
| 6. καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ<br>τοῦ ΔΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος<br>ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ<br>αὐτὰ μέρη. | <i>Id.</i> . . . . . | desunt. |
| 7. εἰδείχθη . . . . .                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ    |
| 8. ἄρα . . . . .                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.  |

PROPOSITIO XIII.

|                      |                      |         |
|----------------------|----------------------|---------|
| 1. τὰ αὐτὰ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | desunt. |
|----------------------|----------------------|---------|

PROPOSITIO XIV.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. γὰρ . . . . . | deest. . . . . | γὰρ |
| 2. καὶ . . . . . | deest. . . . . | καὶ |

PROPOSITIO XV.

|                                      |                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. δι . . . . .                      | δὴ . . . . .         | δι                         |
| 3. ἴσται . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν                      |
| 4. ἀριθμὸν . . . . .                 | deest. . . . .       | ἀριθμὸν                    |
| 5. ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν . . . . . | ὁ Α τοῦ Δ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVI.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ἀριθμὸν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|----------------------|----------------------|--------|

PROPOSITIO XVII.

|                                                         |                      |                            |
|---------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔξουσι λόγον . . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . . | λόγον ἔχουσι               |
| 2. ἀριθμὸν . . . . .                                    | deest. . . . .       | ἀριθμον                    |
| 3. καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕ-<br>τως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. | desunt. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. τὸν αὐτὸν ἔχουσι . . . . . *Id.* . . . . . καὶ αὐτὸν ἔξουσι

## PROPOSITIO XIX.

1. τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου . . . . . πρώτου καὶ τετάρτου . . . . . τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου  
 2. ἀλλ' ὥς . . . . . *Id.* . . . . . ὥς δὲ  
 3. ἄρα . . . . . ὥσπερ . . . . . ἄρα  
 4. τῶν . . . . . *Id.* . . . . . τὸν

## PROPOSITIO XX.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 eâdem manu exarata est, vocabulis contractis.

2. ἰὰν δὲ . . . . . καὶ ἰὰν . . . . . ἰὰν δὲ  
 3. ὑπὸ . . . . . *Id.* . . . . . ἀπὸ  
 4. ἴσονται. . . . . εἰσίν. . . . . ἴσονται  
 5. ὑπὸ . . . . . *Id.* . . . . . ἀπὸ

## PROPOSITIO XXI.

1. ἔχοντας . . . . . *Id.* . . . . . ἔχοντας αὐτοῖς  
 2. ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ εἰσὶν ἀλλήλοις, *Id.* . . . . . οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοις ἴσιν,  
 3. ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, . . . *Id.* . . . . . ἀλλήλοις ἴσοι,  
 4. τὸ αὐτὸ . . . . . *Id.* . . . . . αὐτὸ τὸ

## PROPOSITIO XXII.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 alienâ manu exarata est, vocabulis contractis.

2. πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, *Id.* . . . . . πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ

## PROPOSITIO XXIII.

1. μὴ . . . . . *Id.* . . . . . ὥσιν οἱ Β, Β ἰσάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς,  
 2. ἰσάσσονες . . . . . *Id.* . . . . . ἰσάχιστοι

## PROPOSITIO XXVI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

|                              |                      |                 |
|------------------------------|----------------------|-----------------|
| 1. πρώτοι ἴστωσαν, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστωσαν πρώτοι, |
| 2. τοὺς Γ, Δ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοὺς          |
| 3. δὴ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ              |
| 4. τε . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.          |

## PROPOSITIO XXVII.

|                  |                |     |
|------------------|----------------|-----|
| 1. Καὶ . . . . . | deest. . . . . | Καὶ |
|------------------|----------------|-----|

## PROPOSITIO XXVIII.

|                                      |                      |                         |
|--------------------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1. πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ. |
| 2. οἱ . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ                       |

## PROPOSITIO XXIX.

|                          |                      |             |
|--------------------------|----------------------|-------------|
| 1. τινας, . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τινα,       |
| 2. ἀριθμοὶ δύο . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δύο ἀριθμοὶ |
| 3. μὴν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.      |
| 4. οὖν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα         |

## PROPOSITIO XXX.

|                                        |                      |                          |
|----------------------------------------|----------------------|--------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                       | τὸν . . . . .        | τῶν                      |
| 2. τοὺς ΓΑ, ΑΒ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοὺς                   |
| 3. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | desunt.                  |
| ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν·         |                      |                          |
| 4. πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι     |
| 5. οἱ ΑΒ, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους, . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ, |
| 6. τοὺς ΑΒ, ΒΓ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτοὺς                   |

## PROPOSITIO XXXI.

|                          |                      |                                          |
|--------------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 1. καὶ ἔστω ὁ Γ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα οὐκ ἔστο<br>μονάς. |
|--------------------------|----------------------|------------------------------------------|

## PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἀλλήλους . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 2. ὁ Δ . . . . . deest. . . . . ὁ Δ

## PROPOSITIO XXXIII.

1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆν· *Id.* . . . . . δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον  
 2. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆν· *Id.* . . . . . δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.  
 3. ὁ . . . . . deest. . . . . ο  
 4. πρῶτος ἀριθμὸς, . . . . . *Id.* . . . . . desunt.

## A L I T E R.

deest.

deest. *a, c, d, e, f,*  
*g, h, n.*

Εστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λίγω  
 ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ  
 μετριῖται.

Επεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, με-  
 τρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ. Καὶ  
 ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων  
 αὐτὸν ἢ Β· λίγω ὅτι ὁ Β πρῶτός  
 ἐστιν.

A  
 B  
 Γ

Εἰ γὰρ μὴ, σύνθετός ἐστί· μετρη-  
 θήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος.  
 Μετρείσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ με-  
 τρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσ-  
 σων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Β  
 μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α με-  
 τρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ,  
 ἐλάσσων ἢ τοῦ Β, ἐλαχίστου  
 ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπρι  
 ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετος  
 ἀριθμὸς ἐστι· πρῶτος ἄρα. Οπρι  
 εἶδει δεῖξαι. *b, h, l.*

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

1. γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι. *Id.* . . . . . δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.

PROPOSITIO XXXV.

1. ἐν . . . . . deest. . . . . ἐν  
2. ἔχόντων . . . . . *Id.* . . . . . ἔχόντων αὐτοῖς  
3. τινες . . . . . deest. . . . . τινες

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁ Α . . . . . *Id.* . . . . . ὁ  
2. μετρήσουσί . . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσί  
3. ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλ- hæc verba inter li- concordat cum edit. Paris.  
λήλους ᾤσιν· neas alienâ manu  
exarata sunt.  
4. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως *Id.* . . . . . desunt.  
ὁ Θ πρὸς τὸν Η·

PROPOSITIO XXXVII.

1. μετροῦσι, . . . . . *Id.* . . . . . μετρήσουσι.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. μετρήσουσιν . . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσιν  
2. δὴ . . . . . *Id.* . . . . . δὴ  
3. οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρή- deest. . . . . οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι·  
σουσι.  
4. οὖν . . . . . deest. . . . . οὖν  
5. τὸν Ε . . . . . deest. . . . . τὸν Ε  
6. μετρήσουσί . . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι  
7. μετρήσουσι. . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι.  
8. μετρήσουσι. . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι.  
9. ὁ Γ· . . . . *Id.* . . . . . ὁ Γ τὸν Ε·  
10. μετρήσουσι. . . . . *Id.* . . . . . μετροῦσι.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                               |                      |                      |
|-------------------------------|----------------------|----------------------|
| 11. δὴ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.               |
| 12. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος |
| 13. τὸν Z μετρήσει. . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσει τὸν.        |
| 14. μετρήσουσί . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | μετροῦσι             |

## PROPOSITIO XL.

|                        |                      |              |
|------------------------|----------------------|--------------|
| 1. ἔστω . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἔστω ἀριθμὸς |
| 2. μέρος ἄρα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα μέρος    |

## PROPOSITIO XLI.

|                                                                         |                       |                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.                                          | τὰ A, B, Γ μέρη . . . | τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.                                                                                      |
| 2. ἀριθμοὶ . . . . .                                                    | deest. . . . .        | ἀριθμοὶ                                                                                                          |
| 3. ὁ . . . . .                                                          | deest. . . . .        | ο                                                                                                                |
| 4. ὁ H ἄρα . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . .  | ἐπεὶ οὖν ὁ H ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ με-<br>τρεῖται, ὁ H                                                                 |
| 5. ἔστω τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ-<br>μὸς ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη,<br>ὁ Θ. | <i>Id.</i> . . . . .  | ὁ H ἐλάχιστος ὃν ἔχει τὰ A, B, Γ<br>μέρη, ἔσται τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ-<br>μὸς ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη.<br>Ἐστω ὁ Θ. |

## FINIS TOMI PRIMI.

VILLE DE LYON

Biblioth. du Palais des Arts