

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES OEUVRES D'EUCLIDE.

10 F7 28

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR, place Cambrai, n° 6;
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17;
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24;
Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

LES OEUVRES

D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

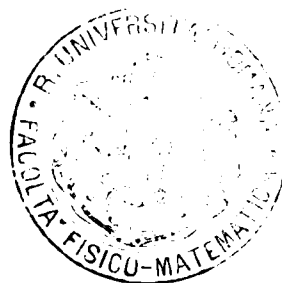
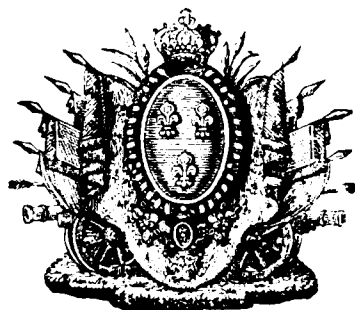
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME PREMIER.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1814.

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

100-100000-100000

A U R O I.

SIRE,

IL y a long-temps que mon Euclide en trois langues aurait dû paraître. Je me plaignais des circonstances qui en retardaient la publication. Combien, au contraire, je me serais félicité de ce retard, s'il m'avait été donné de prévoir que le monde entier, bouleversé jusque dans ses fondements, devait bientôt rentrer dans l'ordre accoutumé; que les tempêtes allaient se dissiper, la sérénité renaître dans le ciel, et le bonheur sur la terre! si surtout j'avais pu penser que VOTRE MAJESTÉ, reparaissant parmi nous comme un astre bienfaisant, daignerait permettre que mon ouvrage parût sous ses auspices augustes!

SIRE, cette faveur inattendue, qui met le comble au plus cher de mes vœux, sera gravée dans mon cœur jusqu'à mon dernier soupir.

Je suis avec respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ,

Le très-humble, très-obéissant
et très-fidèle sujet,

F. PEYRARD.

P R Æ F A T I O.

EUCLIDES vixit temporibus Ptolemæi-Lagi, circiter annum 272 ante æram vulgarem; Archimedes suis in libris sæpe de illo meminit. Euclides a Ptolemæo interrogatus an non esset methodus descendæ Geometriæ methodo suâ facilior : Non est regia, inquit Euclides, ad Geometriam via. Hæc tantum de Euclide novimus : quâ sit patriâ oriundus ignoratur.

Ante Euclidem permulti floruerunt geometræ. Primus omnium Græcorum, Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quæ fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit.

Plurima opera Euclides conscripserat; ex quibus tredecim libri Elementorum et Data tantum supersunt.

Librorum omnium qui de scientiarum elementis agunt liber perfectissimus semper habita sunt Euclidis Elementa, quæ in omnes omnino linguas fuerunt conversa.

De Elementis Euclidis sic Cardanus : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Ait Pemberton se non semel Newtonem audivisse mœrentem quod sese Cartesii aliorumque algebristarum operibus totum dedisset, antequam studuisset Euclidis Elementis, et illa fuisset meditatus.

D. *Lagrange* quem extinctum luget et diu lugebit Europa, mihi dictabat Geometriam esse linguam mortuam; et qui in Euclidis Elementis

P R É F A C E.

EUCLIDE vivait du temps de Ptolémée-Lagus, vers l'an 272 avant l'ère vulgaire; Archimède l'a cité dans plusieurs de ses livres. Ptolémée ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de manière plus facile que la sienne pour apprendre la Géométrie, Euclide répondit qu'il n'y avait point de chemin royal pour arriver à cette science. C'est tout ce que nous savons d'Euclide : on ignore même quelle fut sa patrie.

Beaucoup de géomètres avaient paru avant Euclide. Le premier des Grecs, Euclide rassembla leurs ouvrages, les mit dans un ordre convenable, et donna des démonstrations inattaquables de ce qui n'avait pas été démontré d'une manière rigoureuse.

Euclide avait composé un grand nombre d'ouvrages. Les treize livres des *Éléments* et les *Données* sont les seuls qui soient parvenus jusqu'à nous.

Les *Éléments* d'Euclide ont toujours été regardés comme le plus parfait de tous les livres élémentaires; ils ont été traduits et commentés dans toutes les langues.

Cardan, en parlant des *Éléments* d'Euclide, s'exprime ainsi : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Pemberton nous apprend qu'il avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes, et des autres algébristes, avant d'avoir étudié et médité les *Éléments* d'Euclide.

M. Lagrange, dont l'Europe déplore et déplorera long-temps la perte, me répétait souvent que la Géométrie était une langue morte; que celui qui

Geometriæ non studebat, eum perinde facere ac si quis græcam latinamve linguam in recentioribus operibus græce et latine scriptis discere velit.

Theoremata subsequētia, quæ in quolibet Geometriæ tractatu adesse solent, in Elementis Euclidis desiderantur :

Circulorum circumferentiæ inter se sunt ut eorum diametri.

Quilibet circulus æqualis est triangulo rectangulo cujus unum ex lateribus angulum rectum continentibus æquale est semi-diametro, alterum autem æquale circumferentiæ.

Cujuslibet cylindri recti superficies convexa æqualis est rectangulo cujus altitudo æqualis est cylindri lateri, cujus autem basis æqualis circumferentiæ basis cylindri, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter latus cylindri et diametrum basis cylindri.

Cujuslibet coni recti, exceptâ basi, superficies convexa æqualis est triangulo rectangulo cujus unum laterum angulum rectum continentium æquale est coni lateri, alterum vero æquale circumferentiæ basis coni, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter coni latus et semi-diametrum circuli qui coni est basis.

Superficies convexæ cylindrorum rectorum et similium, et etiam conorum rectorum et similium, sunt inter se ut diametri basium eorundem cylindrorum et conorum.

Cujuslibet sphæræ superficies æqualis est quatuor maximis ejusdem sphæræ circulis, vel superficiei convexæ cylindri circumscripti.

Sphærarum superficies inter se sunt ut quadrata earum diametrorum.

Quælibet sphæra æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

Nonnulli credidere hæc theoremata ex Euclidis Elementis evanuisse temporum inclementiâ ; sed falso. Hæc enim theoremata quæ demonstrari non possunt nisi ope quatuor primorum postulorum in initio primi libri *de Sphæra et Cylindro* positorum, demonstrari non potuerunt ab Euclide, qui hæc Archimedis postulata non admiserat.

n'étudiait pas la Géométrie dans Euclide, faisait la même chose que celui qui voudrait apprendre le grec et le latin, en lisant les ouvrages modernes écrits dans ces deux langues.

Les théorèmes suivants, qui se trouvent ordinairement dans tout traité élémentaire de Géométrie, ne se trouvent pas dans les *Éléments* d'Euclide :

Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres.

Un cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.

La surface convexe d'un cylindre droit est égale à un rectangle dont la hauteur est égale au côté du cylindre, et dont la base est égale à la circonférence de la base du cylindre, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

La surface d'un cône droit, la base exceptée, est égale à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au côté du cône, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cône, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, des cônes droits et semblables, sont entre elles comme les diamètres des bases de ces cylindres et de ces cônes.

La surface d'une sphère est égale à quatre grands cercles, ou à la surface convexe du cylindre circonscrit.

Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres.

Une sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Des personnes ont pensé que ces théorèmes avaient disparu des *Éléments* d'Euclide par l'injure des temps ; c'est une erreur. Ces théorèmes, qui ne peuvent se démontrer qu'à l'aide des quatre premières demandes placées au commencement du premier livre de *la Sphère et du Cylindre*, n'ont pu l'être par Euclide, qui n'avait point admis ces demandes d'Archimède.

Forsan dici potest solam dissimilitudinem quæ intercedit Euclidis inter et Archimedis methodum, consistere in rejectione vel in admissione postulatorum de quibus hic incidit sermo.

In præfatione meæ versionis librorum 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 Elementorum Euclidis, quæ anno 1804 edita fuit, suscepi manus edendi versiones operum completorum Euclidis, Archimedisque et Apollonii. Mea versio operum Archimedis vulgata est anno 1808; quo quidem tempore, vertendis Euclidis operibus ultimam manum admoveram. Sed antequam prelo subjiceretur, consulere volui codices manuscriptos bibliothecæ imperialis de plurimis locis qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione Oxoniæ, quâ usus fueram in convertendo Euclide. Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi fuerunt, et statim animadverti editionem Oxoniæ nullius horum manuscriptorum esse exemplar; hos omnes manuscriptos explere lacunas, et restituere locos corruptos in editione basiliensi et in editione Oxoniæ quæ nihil aliud est quam ejus exemplar. Quin etiam animadverti hos omnes manuscriptos, manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme consentaneos; manuscriptum autem 190 explere lacunas, restituere locos corruptos qui ope aliorum manuscriptorum nec explebantur nec restituebantur.

Manuscriptus 190 ad bibliothecam vaticanam pertinebat: is Romæ Lute-tiam a comite *de Peluse* fuit missus.

In manuscripto græco 2348, sub finem sæculi decimi sexti exarato, quique continet Euclidis Data cum quinque antiquissimis vaticanis manuscriptis græcis collata a Josepho Auriâ, celebri geometrâ, nec unam quidem repertas e pretiosissimis lectionibus manuscripti 190 variantibus; quod probare videtur hunc manuscriptum tunc temporis in bibliothecâ vaticanâ fuisse desideratum.

Manuscriptus 190 manuscriptorum exeunte nono sæculo exaratorum omnia præ se fert indicia; alii vero manuscripti pertinent ad sæcula multo recentiora.

Hoc manuscripto mihi commissio, statim in animum incidit edere græce, latine et gallice Elementa et Data, sola procul dubio quæ supersint Euclidis

On pourrait peut-être dire que la seule différence entre la méthode d'Euclide et celle d'Archimède, consiste dans le rejet ou l'admission des quatre demandes dont je viens de parler.

Dans la préface de ma traduction des livres 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 des *Éléments* d'Euclide, qui parut en 1804, je pris l'engagement de publier les traductions des œuvres complètes d'Euclide, d'Archimède et d'Apolonius. Ma traduction des œuvres d'Archimède parut en 1808. A cette époque j'avais mis la dernière main à la traduction des œuvres d'Euclide. Mais avant de la livrer à l'impression, je voulus consulter les manuscrits de la bibliothèque impériale sur les passages qui me paraissaient tronqués ou altérés dans l'édition d'Oxford, d'après laquelle j'avais fait ma traduction. Ces manuscrits, qui sont au nombre de 23, me furent confiés, et je ne tardai pas à m'apercevoir que l'édition d'Oxford n'est la copie d'aucun de ces manuscrits ; que tous ces manuscrits remplissent des lacunes, et rétablissent des passages altérés qui se trouvent dans l'édition de Bâle, et dans celle d'Oxford qui n'en est que la copie. Je remarquai aussi que tous ces manuscrits, le n° 190 seul excepté, sont à peu de choses près conformes les uns aux autres ; que le n° 190 remplit des lacunes, et rétablit des passages altérés, qui ne peuvent pas l'être à l'aide des autres manuscrits.

Le manuscrit 190 appartenait à la bibliothèque du Vatican : il fut envoyé de Rome à Paris par le comte de Peluse.

Dans le manuscrit grec n° 2348, qui est de la fin du seizième siècle, et qui contient les *Données* d'Euclide collationnées par Joseph Auria, géomètre célèbre, avec les cinq plus anciens manuscrits grecs de la bibliothèque du Vatican, on ne trouve aucune des précieuses variantes du manuscrit 190 ; ce qui semble prouver que ce manuscrit n'était pas alors à la bibliothèque du Vatican.

Le manuscrit 190 porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle, tandis que les autres appartiennent à des siècles beaucoup plus rapprochés de nous.

Étant dépositaire de ce précieux manuscrit, je me déterminai, sans balancer, à donner une édition grecque, latine et française des *Éléments* et

opera. Quapropter, contuli manuscriptum 190 cum editione Oxoniæ, exaravique lectiones variantes in margine operi impressi.

His perfectis, ad variantes lectiones margini appositas sedulus attendi, et aliis manuscriptis accersitis, hanc aut illam lectionem variantem in editionem parisiensem admisi, vel ab eâ rejeci. Manuscriptum 190 potiore habui, quotiescumque nulla mihi fuit ratio cur hanc aut illam lectionem præferrem.

Textum græcum sic constitutum in latinum converti, et quæcunque ex variantibus quas admiseram lectionibus, mutari fuit opportunum, hæc in versione gallicâ mutata sunt.

Mea latina versio ad verbum textui græco congruit, nisi quid peculiare me coegerit ut secus facerem. Nonnulli in meâ versione occurrent forte hellenismi, aut saltem quædam locutiones a quibus lingua latina abhorere videtur. Illas quidem vitare potuissem; sed mea versio cum textu græco minus fuisset consentanea.

De meâ convertendi ratione, viros in græcâ latinâque linguâ versatissimos consului. D. *Delambre*, secretarius perpetuus classis scientiarum physicarum et mathematicarum Instituti imperialis Franciæ, necnon Universitatis imperialis quæstor, meam versionem dignatus est perpendere, et utilia mihi dare consilia. Hanc eâ de re ad me scripsit epistolam :

Parisiis, 20 februarii 1812.

Cum voluptate legimus sex prima folia tui Euclidis trilinguis. Tui commissarii desiderium enuntiaverant videndi editum Euclidis textum græcum expurgatum omnibus mendis quas castigavisti manuscriptorum ope, et locupletatum omnibus incrementis quæ tibi suppeditaverunt manuscripti : mox eorum omniumque doctorum explebis desiderium.

Multum probo quod constitutum habuisti reddere versionem latinam tam consentaneam quam utraque lingua ferre potest. Græcis erant duæ viæ indicandorum casuum obliquorum, terminatio scilicet et articulus ; quando una earum duarum rationum eos deficiebat, quod sæpe in geometriâ contingit, articulus satis erat ad omnem tollendam dubitationem.

des **Données d'Euclide**, qui sont certainement les seuls ouvrages qui nous restent de ce géomètre à jamais célèbre. Pour cela, je comparai le manuscrit 190 avec l'édition d'Oxford, et j'écrivis les variantes en marge de l'ouvrage imprimé.

Ce travail terminé, j'examinai attentivement les variantes marginales, et à l'aide des autres manuscrits, j'adoptai ou je rejetai, pour l'édition de Paris, telle ou telle variante. Le manuscrit 190 a toujours eu la préférence, toutes les fois que je n'avais pas de motif pour préférer une leçon à une autre.

Le texte grec étant ainsi arrêté, je le traduisis en latin, et je fis à la traduction française les changements exigés par les variantes que j'avais adoptées.

Ma traduction latine correspond mot pour mot au texte grec, à moins que quelque règle particulière ne m'ait forcé de faire autrement. On trouvera quelquefois des hellénismes dans ma traduction, ou du moins certaines expressions qui semblent s'écarter un peu du génie de la langue latine. J'aurais pu les éviter; mais ma traduction aurait été moins fidèle.

J'avais soumis mon système de traduction à des personnes versées dans la langue grecque et dans la langue latine. **M. Delambre**, secrétaire perpétuel de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut impérial de France et trésorier de l'université impériale, eut la complaisance de l'examiner avec soin, et de m'aider de ses sages conseils. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire à ce sujet :

Paris, ce 20 février 1812.

MONSIEUR, j'ai lu avec plaisir les six premières feuilles de votre **Euclide** en trois langues. Vos commissaires avaient exprimé le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits vous ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils vous ont fournies : vous allez remplir leur vœu, et celui de tous les savants.

J'approuve beaucoup le parti que vous avez pris de rendre la version latine aussi littérale que le permet le génie des deux langues. Les grecs avaient deux moyens pour indiquer les cas obliques, la terminaison et l'article; quand l'une de ces deux ressources leur manquait, comme il arrive souvent en géométrie, l'article suffisait pour ôter toute incertitude.

Tibi autem in linguâ latinâ hæc via non erat; tua versio nimis consentanea, sæpe obscura fuisset. Eorum qui te præcesserunt exemplo, usus es pronomine *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Non ignoras mihi eâ de re aliquid fuisse hæsitationis; locutionibus illis *ipsi* ΑΓ, *ipsi* ΑΒΓ, anteposuissem has locutiones *lineæ* ΑΓ, *angulo* ΑΒΓ, quod longiusculum est.

Sed quoniam omnes geometrarum græcorum interpretes jamdudum iisdem interpolationibus usi sunt, capessivisti recte viam brevissimam amovendorum impedimentorum quæ singulis momentis occurrunt, etc.

Ad significandum duos angulos eundem verticem et latus commune habentes super eâdem rectâ collocatos esse, græce dicitur : *αι ἐφεξῆς γωνίας*. Commandini, Torelli, etc. exemplo, has tres græcas voces converti in has duas voces latinas : *deinceps anguli*. Sunt qui me dehortati sunt ab utendo voce hac *deinceps*, quia, inquebant, *deinceps* in linguâ latinâ rerum ordinem numquam significavit. Non illis morem gessi. Nam, cum in Thesaurο linguæ latinæ Roberti Stephani, edito Lipsiæ anno 1739, legissem : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque alius deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent, canerent*. CIC., etc. pro certo habui Titum-Livium, Cæsarem et Cicero- nem, etc. vocem *deinceps* eodem sensu accepisse, quo ego acceperam.

Quod ad versionem gallicam attinet, ea cum textu græco tam consentanea est quam per eam linguam licet.

Sub finem cujusque tomi collocavi recensionem accuratissimam omnium variantium meæ editionis cum manuscripto 190, et cum editione Oxoniæ; ita ut harum lectionum variantium ope, possit, si quis velit, habere manuscripti 190 exemplar huic plane congruum.

Ad calcem tomi ultimi, qui hoc anno 1814 corrente edetur, adjiciuntur animadversiones in variantes lectiones insignissimas, et in quosdam locos Euclidis.

Summâ diligentia usus sum ut mea editio quam maxime emendata esset; specimina a me prælecta, lecta fuerunt deinde a D. *Jannet*, necnon a D. *Patris*, mei operis editore, rursusque a me relecta. In nullo specimine

Vous n'aviez pas cette ressource en latin ; votre version trop littérale eût été souvent obscure. A l'exemple de ceux qui vous ont précédé , vous vous êtes permis l'emploi du pronom *ipse* , *ipsius* , *ipsi*. Vous savez que j'avais à cet égard quelque scrupule ; au lieu de *ipsi* $\Delta\Gamma$, *ipsi* $\Delta B\Gamma$, j'aurais mieux aimé *lineæ* $\Delta\Gamma$, *angulo* $\Delta B\Gamma$, ce qui est un peu plus long.

Mais tous les traducteurs des géomètres grecs vous ont déjà donné l'exemple de pareilles intercalations , et vous avez bien fait de choisir le moyen le plus court pour vous tirer d'un embarras qui renaît à chaque instant , etc.

Pour exprimer que deux angles , qui ont le même sommet et un côté commun , sont placés sur une même droite , le grec dit : *αι ἐφεξῆς γωνίαι*. A l'exemple de Commandin , de Torelli , etc. j'ai traduit ces trois mots grecs par *deinceps anguli*. Plusieurs personnes m'avaient invité à ne pas me servir du mot *deinceps* , parce que , disaient-elles , le mot *deinceps* n'a jamais en latin exprimé l'ordre des choses. Je ne me rendis pas à leur avis. Car , ayant lu dans le Trésor de la langue latine de Robert Étienne , édition de 1739 : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque alias deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent canerent*. CIC. , etc. il me parut démontré que Tite-Live , César , Cicéron , etc. donnaient au mot *deinceps* la même signification que moi.

Quant à la traduction française , elle est aussi littérale que le permet le génie de cette langue.

J'ai placé à la fin de chaque volume la liste exacte de toutes les variantes de mon édition avec le manuscrit 190 et l'édition d'Oxford. Par le moyen de ces variantes , on pourrait , si on le désirait , avoir une copie du manuscrit 190 qui lui serait parfaitement conforme.

Le dernier volume , qui paraîtra dans le courant de 1814 , sera terminé par des observations sur les variantes les plus remarquables , et sur quelques passages d'Euclide.

J'ai fait tous mes efforts pour que mon édition fût de la plus grande correction ; les épreuves , après avoir été lues par moi , ont été lues par M. Jannet , par M. Patris , éditeur de mon ouvrage , et relues encore par

prius subscripsi, *prelo subjiciatur*, quam illud mendis omnibus fuisset expurgatum. Ope erratorum ad finem ultimi tomi collocatorum, corrigi poterunt mendæ, si quas detexero in legendo perattente opère impresso.

D. *Nicolopoulo*, smyrnæus, vir eximiâ doctrinâ commendabilis et diligentissimus emendator, sponte suâ legit plurima specimina. D. *Patris*, qui linguam græcam, latinam et gallicam diu excoluit, summâ curâ et diligentia usus est ut mea editio prelis gallicis honori esset; in speciminibus legendis, versionem latinam et gallicam cum textu græco perattente comparabat, et margini notationes apponebat.

Ex lectionibus variantibus tomi primi, quædam præsertim sunt notandæ.

In omnibus editionibus græcis et latinis postulata 4, 5, 6 inter communes notiones collocata sunt.

Demonstratio propositionis septimæ libri primi duos habet casus, et tamen unus solum casus demonstratur in omnibus manuscriptis, nullo excepto, et in editionibus Basilæ et Oxoniæ. Secundus casus est cùm punctum Δ incidit in triangulum ABR , vel punctum r in triangulum $AB\Delta$. Ut secundus casus demonstraretur, antea demonstrandum fuerat, lateribus æqualibus trianguli isocelis productis, angulos sub basi inter se æquales esse; quod quidem Euclides demonstravit in propositione quintâ, et hoc tantum propositionis septimæ causâ, quandoquidem, propositione septimâ exceptâ, hæc demonstratio nullum usum habet in reliquis Euclidis Elementis; ex hoc manifeste sequitur, inquit omnes Euclidis commentatores, textum græcum propositionis septimæ esse mutilatum. Omnes commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus manuscriptis et in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram; produxi rectas Br , $B\Delta$, et demonstratio completa fuit, in textu græco nullâ voce mutatâ.

Demonstratio propositionis 24 tertii libri tres casus habet. Posito enim A super r , et puncto B super Δ , oportet demonstrare segmentum AEB non

moi. Je n'ai jamais donné de bon à tirer que je ne me fusse assuré auparavant que toutes les corrections avaient été faites. Par le moyen d'un *errata*, que je placerai à la fin du dernier volume, on pourra corriger les fautes qu'une lecture très-attentive que je ferai de l'ouvrage imprimé m'aura fait découvrir.

M. Nicolopoulo, de Smyrne, homme recommandable par ses rares talents et très-habile correcteur, a bien voulu lire un grand nombre de mes épreuves. M. Patris, qui a cultivé long-temps les langues grecque, latine et française, s'est donné des peines infinies pour que mon édition fit honneur aux presses françaises; en lisant les épreuves, il avait soin de comparer soigneusement la version latine et la version française au texte grec, et de me faire des observations marginales.

Parmi les variantes de ce premier volume, il en est quelques-unes qui méritent surtout d'être remarquées.

Dans toutes les éditions grecques et latines, les demandes 4, 5, 6 sont placées au nombre des notions communes.

La démonstration de la proposition 7 du livre I^{er} a deux cas, et cependant un seul cas est démontré dans tous les manuscrits sans exception, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Le second cas est celui où le point Δ tombe dans le triangle $AB\Gamma$, ou bien le point Γ dans le triangle $AB\Delta$. La démonstration du second cas exige qu'il soit démontré auparavant que les côtés égaux d'un triangle isocèle étant prolongés, les angles au dessous de la base sont égaux entre eux; et c'est ce qu'a fait Euclide dans la proposition 5, et ce qu'il n'a fait que pour la proposition 7, puisque, hors de là, cette démonstration n'est plus nécessaire dans le reste des *Éléments* d'Euclide; d'où il suit évidemment, disent tous les commentateurs, que le texte grec de la démonstration de la proposition 7 est tronqué. Tous les commentateurs avaient tort. La figure était incomplète dans tous les manuscrits et dans toutes les éditions. J'ai tracé une seconde figure; j'ai prolongé les droites $B\Gamma$, $B\Delta$, et la démonstration s'est trouvée complète, sans que j'eusse changé un seul mot au texte grec.

La démonstration de la proposition 24 du livre trois a trois cas. En effet, le point A étant sur le point Γ , et le point B sur le point Δ , il faut démontrer

posse incidere vel intra segmentum $AZ\Delta$, vel extra, vel partim intra et partim extra; hi tres casus in manuscripto 190 et in editione parisiensi **demonstrantur**.

Sed in omnibus aliis manuscriptis, et in omnibus aliis editionibus græcis, tantum demonstratur segmentum AEB non incidere posse partim intra segmentum $rZ\Delta$, et partim extra. *Commandinus* dat aliorum casuum demonstrationem. At *Robert Simson* ex propositione 24 eximit partem quam propositioni 23 adjungit.

In propositione 26 libri sexti locus quidam minime intelligi poterat, lectio varians tertiam omnem ex eâ obscuritatem dispulit.

Gregorius, de corollario propositionis 19 libri quinti sermonem habens, sic loquitur : *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret*. Clavius in locum hujus corollarii alterum subdidit. *Robert Simson* dicit : « Hoc corollarium manifeste ostendere librum quintum a geometriæ » ignaris corruptum fuisse, et hoc corollarium nullo modo pendere ex » propositione 19. » In hoc errat *Robert Simson*, et illum sæpissime errare in meis animadversionibus ostendam.

Gregorii versio intellectu est perdifficilis.

Suppressi tertiam vocem corollarii $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta$. Loco proportionis : $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$, scripsi hanc proportionem : $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AE}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\text{Z}$; loco tandem proportionis : $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AE}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\text{Z}$, scripsi hanc proportionem : $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$. Ope harum levium correctionum corollarium evasit inconcussum.

In meâ editione, phrasis $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta$ δὲ $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$, sed ostensum est ut AB ad EB ita $\Delta\Gamma$ ad $\text{Z}\Delta$ (19. 5), manifeste locum habet harum duarum phrasium : $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta$ δὲ $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$, ἐν ἄλλᾳ δὲ $\acute{\omega}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{AB}\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{EB}\ \acute{\omicron}\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma\ \tau\omicron\ \text{Z}\Delta$, ostensum autem est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EB ad $\text{Z}\Delta$ (19. 5); alterne igitur ut AB ad EB ita $\Gamma\Delta$ ad $\text{Z}\Delta$ (16. 5.).

que le segment AEB ne peut tomber ni en dedans du segment $AZ\Delta$, ni en dehors, ni partie en dedans et partie en dehors. Ces trois cas sont démontrés dans le manuscrit 190 et dans l'édition de Paris.

Mais dans tous les autres manuscrits et dans toutes les autres éditions grecques, on démontre seulement que le segment AEB ne peut point tomber partie en dedans du segment $rZ\Delta$ et partie en dehors. Commandin donne la démonstration des deux autres cas. Robert Simson retranche une partie de la proposition 24, qu'il ajoute à la proposition 23.

Dans la proposition 26 du livre six, il y avait un passage tout à fait intelligible ; la variante 3 en a fait disparaître l'obscurité.

Grégori, en parlant du corollaire de la proposition 19 du livre cinq, s'exprime ainsi : *Corruptissimus est hic locus ; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus , ut sensus constaret.* Clavius a remplacé ce corollaire par un autre de sa façon. Robert Simson nous dit que ce corollaire prouve manifestement que le cinquième livre a été corrompu par des ignares en géométrie, et que ce corollaire ne dépend en aucune manière de la proposition 19. Robert Simson a tort ici comme dans une foule d'autres occasions, ainsi que je le ferai voir dans mes remarques.

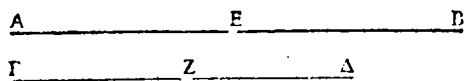
La version de Grégori est inintelligible.

J'ai fait disparaître le troisième mot du corollaire $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta$. A la place de $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, j'ai mis $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AE\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma Z$; et à la place de $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ AE\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma Z$, j'ai écrit $\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$. Par le moyen de ces légères corrections, le corollaire se trouve rétabli dans toute sa pureté.

Dans mon édition, la phrase $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta\ \delta\epsilon\ \omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, *mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ZΔ (19. 5)*, tient évidemment lieu de $\epsilon\delta\epsilon\iota\chi\theta\eta\ \delta\epsilon\ \omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, $\epsilon\ \nu\alpha\lambda\lambda\alpha\ \xi\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \omega\varsigma\ \tau\omicron\ AB\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, *mais on a démontré que AB est à ΓΔ comme EB est à ZΔ (19. 5) ; donc par permutation AB est à EB comme ΓΔ est à ZΔ (16. 5).*

Euclides hoc corollarium mutare potuisset in theorema, hoc modo :

Si magnitudines compositæ (*) sint proportionales, proportionales erunt per conversionem.



Sint magnitudines compositæ AB, AE, ΓΔ, ΓΖ, et sit AB ad AE ita ΓΔ ad ΓΖ; dico per conversionem ut AB ad EB ita esse ΓΔ ad ΖΔ.

Quoniam enim ut AB ad AE ita ΓΔ est ad ΓΖ, alterne igitur ut AB ad ΓΔ ita est AE ad ΓΖ (16. 5); ostensum autem est ut AB ad ΓΔ ita esse EB ad ΖΔ (19. 5); alterne igitur ut AB ad EB ita est ΓΔ ad ΖΔ, hoc est ut AB ad AB—AE ita est ΓΔ ad ΓΔ—ΓΖ (16. 5); quod est per conversionem. Quod erat demonstrandum.

In textu græco manuscripti 190, nequaquam agitur de circulorum sectoribus in ultimâ sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quæ ad sectores attinent, et quæ adsunt in textu græco omnium aliorum manuscriptorum et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ. Hoc addimentum, quod in meam editionem admittere non debuissim, textui a Theone factum est. Sic loquitur Theon in suis in Almagestum commentariis, p. 50, l. 7, edit. Basilicæ, anno 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐν ἴσων κύκλων τομῆς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι διδραται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου. » *Quod autem in æqualibus circulis sectores inter se sunt ut anguli in illis positi, ostensum fuit a nobis in editione Elementorum ad finem libri sexti.*

Hoc Theonis addimentum, quod in subsequentibus nullum habet usum, Euclidis festinationi moram affert. In libris præsertim 10, 14, 15, necnon in Datis bene multas superfluitates reperias quarum nullam in textu manuscripto 190. Ob id præcipue Euclidem mirati sunt quod ille ad propositum directe tendit, numquam de viâ declinans suâ demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam sunt necessaria. Sed hoc soli manuscripto 190 convenire potest; itaque non absurde conjecerim emendatum Euclidis

(*) Quatuor magnitudines dicuntur compositæ, quando secunda est quædam fractio primæ, et quarta quædam fractio tertiæ.

Euclide aurait pu donner à ce corollaire la forme d'un théorème, en disant :

Si des grandeurs composées (*) sont proportionnelles, elles sont proportionnelles par conversion.

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{E}{Z} = \frac{B}{\Delta}$$

Soient les grandeurs composées AB, AE, $\Gamma\Delta$, ΓZ , et que AB soit à AE comme $\Gamma\Delta$ est à ΓZ ; je dis que par conversion AB est à EB comme $\Gamma\Delta$ est à ΔZ .

Car, puisque AB est à AE comme $\Gamma\Delta$ est à ΓZ , par permutation AB est à $\Gamma\Delta$ comme AE est à ΓZ (16. 5); mais on a démontré que AB est à $\Gamma\Delta$ comme EB est à ΔZ (19. 5); donc, par permutation, AB est à EB comme $\Gamma\Delta$ est à ΔZ , c'est-à-dire que AB est à AB — AE comme $\Gamma\Delta$ est à $\Gamma\Delta$ — ΓZ (16. 5); ce qui est par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

Dans le texte du manuscrit 190, il n'est nullement question de secteurs circulaires dans la dernière proposition du livre 6. Une main étrangère a interliné et écrit en marge de ce manuscrit ce qui se trouve de relatif aux secteurs circulaires dans le texte de tous les autres manuscrits, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Cette addition au texte, que je n'aurais pas dû conserver, est de Théon. Voici ce qu'il dit lui-même dans ses commentaires sur l'Almageste, pag. 50, l. 7, édit. de Bâle, 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐπ' ἔσαν κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασιν δίδαιται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδοῦ τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἑκτοῦ βιβλίου. » *J'ai démontré dans mon édition des Éléments, et à la fin du sixième livre, que dans les cercles égaux les secteurs sont entre eux comme les angles placés dans ces cercles.*

Cette addition de Théon, qui n'est d'aucun usage dans la suite, ne sert qu'à retarder la marche d'Euclide. On trouve dans les livres 10, 14, 15 surtout, ainsi que dans les Données, une foule de pareilles superfluités dont aucune n'est admise dans le texte du manuscrit 190. On a toujours admiré Euclide en ce qu'il marchait directement vers son but, sans jamais s'écarter de son chemin, pour démontrer ce qui ne lui était pas nécessaire pour aller en avant. Mais cela n'est vrai que pour le seul manuscrit 190; c'est pour-

(*) Quatre grandeurs sont dites composées, lorsque la seconde est une fraction de la première, et que la quatrième est une fraction de la troisième.

textum in hoc manuscripto contineri, aliosque manuscriptos nihil aliud esse quam editionis vulgatæ a Theone exemplaria. Non diffiteor tamen editione in meâ quasdam adesse superfluitates, quarum indicem ad calcem animadversionum subjiciam, hoc est, indicem instituam omnium quæ licet sublata subsequentibus nullo modo obesse possunt.

Corollarium propositionis 15 primi libri suppressi, quamvis eâdem manu in margine manuscripti 190 exaratum sit, quia hoc corollarium non præ se fert signum quod in hoc manuscripto monet in margine exarata ad textum pertinere, ac insuper hoc corollarium tantum adest in textu unius ex manuscriptis, quia tandem hoc corollarium in subsequentibus nullum habet usum.

Definitio 5 sexti libri eâdem manu in imâ paginâ exarata est cum signo quod monet eam ad textum pertinere; sed manifestum est erravisse transcriptorem. Eam suppressi, quia nullum in Euclidis Elementis usum habet. *Robert Simson* sex paginas in-4° scripsit probandi causâ illam a Geometriæ ignaro in textum fuisse admissam.

Non plura dicam de lectionibus meæ editionis variantibus; lectori se certiore facere licebit permulta evanuisse menda typographica, necnon et plurimos locos obscuros vel corruptos, vel detruncatos, præsertim in libris 10, 14, 15, et in Datis; Euclidisque textum permultis superfluitatibus me curante fuisse expurgatum.

Dixi Euclidis in omnes linguas conversa fuisse opera et commentariis illustrata; editiones et versiones notabilissimæ Euclidis hæ sunt:

Campanus primum in latinum ex arabico convertit Euclidem. Hæc versio Venetiis anno 1482 edita, comprehendit quindecim libros Elementorum.

Zambertus, venetus, ex græco convertit in latinum quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Hæc versio edita fuit Parisiis anno 1516, deinde Basilæ anno 1537 et anno 1546. Euclidis Data adsunt tantum in duabus posterioribus editionibus.

quoil il me sera permis de penser que ce manuscrit contient le texte pur d'Euclide, et que les autres ne sont que des copies de l'édition de Théon. J'avoue cependant qu'il existe quelques superfluités dans le manuscrit 190, et par conséquent dans mon édition; j'en donnerai la liste à la suite de mes remarques, c'est-à-dire, que je donnerai la liste de tout ce qui peut se supprimer sans nuire à ce qui suit.

J'ai supprimé le corollaire de la proposition 15 du premier livre, quoiqu'il soit écrit de la même main dans la marge du manuscrit 190, parce que ce corollaire n'est pas précédé du signe qui, dans ce manuscrit, sert toujours à indiquer que ce qui est écrit en marge doit faire partie du texte, parce que ce corollaire ne se trouve que dans le texte d'un seul manuscrit, et enfin, parce qu'il n'est d'aucun usage dans la suite.

La définition 5 du sixième livre est écrite de la même main au bas de la page, et avec le signe qui indique qu'elle doit faire partie du texte; mais il est hors de doute que c'est une faute du copiste. Je l'ai supprimée, parce qu'elle n'est d'aucun usage dans les *Éléments* d'Euclide. Robert Simson a écrit six pages in-4° pour prouver qu'elle a été introduite dans le texte par un ignare en Géométrie.

Je n'en dirai pas davantage sur les variantes de mon édition; le lecteur pourra s'assurer lui-même qu'elle a fait disparaître un très-grand nombre de fautes typographiques, beaucoup de passages obscurs ou altérés, ou tronqués, surtout dans les livres 10, 14, 15, et dans les *Données*, et que j'ai purgé le texte d'Euclide d'un très-grand nombre de superfluités.

J'ai dit que les œuvres d'Euclide ont été traduites et commentées dans toutes les langues; voici quelles sont les éditions et les traductions les plus remarquables.

La première traduction latine que nous ayons d'Euclide est celle de Campanus, qui parut à Venise en 1482. Cette traduction, qui a été faite d'après l'arabe, contient les quinze livres des *Éléments*.

Zamberti, vénitien, traduisit en latin, d'après le grec, les quinze livres des *Éléments* et les *Données* d'Euclide. Cette traduction, qui parut à Paris en 1516, reparut à Bâle en 1537, et ensuite en 1546. Les *Données* d'Euclide ne se trouvent que dans ces deux dernières éditions.

Textus græcus quindecim librorum Elementorum Euclidis cum commentario Theonis et Procli, primum editus fuit Basilæ anno 1533, apud Herwagem, celeberrimum typographum. Simon Grynæus textus græci fuit editor. Quindecim libri Elementorum editi fuerunt ex duobus manuscriptis qui Simoni Grynæo suppeditati fuerunt, alter Venetiis a Lazaro Bayfio, alter Parisiis a Joanne Ruellio. Commentarium Procli editum fuit ex manuscripto inemendato qui Oxoniâ Simoni Grynæo missus fuit a Joanne Claymando.

Candalla edidit, anno 1566, versionem latinam quindecim librorum Elementorum.

Commandinus unus optimorum geometrarum suæ ætatis, et apprime versatus in linguâ græcâ et latinâ, convertit in latinum quindecim libros Elementorum ex textu græco editionis basiliensis. Hæc versio, omnium Euclidis versionum, textui græco erat maxime consentanea; illa edita fuit Pisauri anno 1572, et deinde anno 1619.

Versio latina quindecim librorum Elementorum quam Clavius edidit Romæ, anno 1574, est quam minime consentanea; Clavius sibi concessit facultatem commutandi in permultis locis textum Euclidis; sed nonnullo in pretio est commentarium quod suæ versionis adjunxit, quamvis nimio plus sit diffusum.

Textus græcus Datorum Euclidis, cum versione latinâ Hardiæi, editus primum fuit anno 1625.

Henrion edidit, anno 1615, versionem gallicam quindecim librorum Elementorum et Datorum Euclidis. Hæc versio a textu Euclidis differt singulis momentis.

Le Mardelé edidit, non multo post, alteram versionem gallicam quindecim librorum Elementorum. Hæc versio in permultis locis differt a textu Euclidis.

Gregorius edidit Oxoniæ, anno 1703, græce et latine, quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Gregorius usus fuit, in quindecim libris Elementorum, versione latinâ Commandini, et in Datis, versione latinâ Hardiæi: quas duas versiones Gregorius ipse recognoverat.

Le texte grec des quinze livres des Éléments d'Euclide avec le commentaire de Théon et de Proclus, parut pour la première fois à Bâle en 1533, chez Herwage, célèbre imprimeur. Simon Grynæus en fut l'éditeur. Les quinze livres des Éléments furent imprimés d'après deux manuscrits grecs envoyés à Simon Grynæus; l'un de Venise, par Lazare Baysius, et l'autre de Paris, par Jean Ruellius. Le commentaire de Proclus fut imprimé, d'après un manuscrit très-défectueux envoyé d'Oxford à Simon Grynæus, par Jean Claymandus.

Candalle publia, en 1566, une traduction latine des quinze livres des Éléments.

Commandin, un des plus grands géomètres de son temps, et homme très-versé dans les langues, traduisit en latin les quinze livres des Éléments d'après le texte grec de l'édition de Bâle. C'était, de toutes les traductions, la plus conforme au texte grec d'Euclide; elle parut à Pesaro en 1572, et ensuite en 1619.

La traduction latine des quinze livres des Éléments que Clavius publia à Rome, en 1574, n'est rien moins que fidèle; Clavius s'est permis de faire de nombreux changements au texte d'Euclide; mais on estime le commentaire qui accompagne sa traduction, malgré sa très-grande prolixité.

Le texte grec des Données d'Euclide, accompagné d'une traduction latine de Hardi, parut pour la première fois en 1625.

Henrion publia, en 1615, une traduction française des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide. Cette traduction diffère à chaque instant du texte d'Euclide.

Le Mardelé publia, quelque temps après, une nouvelle traduction des quinze livres des Éléments. Cette traduction diffère dans une foule d'endroits du texte d'Euclide.

Grégori publia à Oxford, en 1703, en grec et en latin, les quinze livres des Éléments et les Données d'Euclide. Grégori fit usage, pour les quinze livres des Éléments, de la traduction latine de Commandin, et pour les Données, de celle de Hardi. Ces deux traductions avaient été revues par Grégori lui-même.

In hac editione, præter quindecim libros Elementorum, et Data, adsunt plura opera quæ procul dubio Euclidis non sunt; quod quidem Gregorius ipse non dissitetur in suâ præfatione.

Robert Simson edidit, anno 1756, versionem latinam librorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 Elementorum.

Robert Simson, in pluribus locis, commutavit textum Euclidis.

Dixi in bibliothecâ imperiali adesse manuscriptos græcos tres et viginti. Eorum manuscriptorum secundum vetustatis ordinem hic est index :

Nº 190. Is manuscriptus præ se fert omnia indicia manuscriptorum sub finem noni sæculi exaratorum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14 et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo contigit alio manuscripto. In meâ editione eundem ordinem sum secutus, ipsomet D. *Lagrange* suadente.

Nº 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium Elementorum usque ad propositionem octavam secundi libri, ineunte undecimo sæculo exaratus videtur. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur reliqua Elementa et Data, Româ Parisios fuit missus a comite *de Peluse*.

Nº 2466. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur tredecim libri Elementorum, duodecimo sæculo exaratus videtur.

Nº 2344. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo duodecimo exaratus videtur.

Nº 2345. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo tertio exaratus videtur.

Omnes ii manuscripti sunt membranacei; subsequentes sunt cartacei.

Nº 2373. Is manuscriptus, in quo deprehenditur Euclidis Geometria cum scholiis, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium usque ad propositionem 23 primi libri, et in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, et Data, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2762. Is codex, in quo tantum deprehenduntur octo priores libri Elementorum, sub finem sæculi decimi quinti exaratus videtur.

Nº 2346. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Dans cette édition , outre les quinze livres des Éléments, et les Données, on trouve plusieurs autres traités qui bien évidemment ne sont pas d'Euclide ; Grégori lui-même en convient dans sa préface.

Robert Simson publia , en 1756 , la traduction latine des livres 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 11 , 12 des Éléments d'Euclide. C'est la traduction de Commandin , revue par Robert Simson.

Robert Simson a fait de nombreux changements au texte d'Euclide.

J'ai dit que la bibliothèque impériale renferme vingt-trois manuscrits grecs. En voici la liste par ordre d'ancienneté :

N° 190. Ce manuscrit porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle. Les Données sont placées immédiatement après le treizième livre des Éléments. Le 14^e et le 15^e livre viennent ensuite ; ce qui n'existe dans aucun autre manuscrit de la bibliothèque impériale. J'ai suivi le même ordre dans mon édition , d'après le conseil de M. Lagrange.

N° 1038. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 8 du second livre, paraît être du commencement du onzième siècle. Il contient le reste des Éléments, et les Données ; il appartenait à la bibliothèque du Vatican ; et il fut envoyé de Rome à Paris, avec le manuscrit 190, par le comte de Peluse.

N° 2466. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du douzième siècle.

N° 2344. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des Éléments, paraît être du douzième siècle.

N° 2345. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des Éléments, paraît être du treizième siècle.

Tous ces manuscrits sont en parchemin ; les suivants sont en papier.

N° 2373. Ce manuscrit, qui contient la Géométrie d'Euclide avec des scholies, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2342. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 23 du premier livre, et qui contient le reste des Éléments, et les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2762. Ce manuscrit, qui ne contient que les huit premiers livres des Éléments, paraît être de la fin du quinzième siècle.

N° 2346. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

Nº 2481. Is codex, in quo tantum deprehenduntur decem priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2531. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2343. Is codex, in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2547. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, et Data, ineunte sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2448. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2352. Is codex, in quo Data deprehenduntur, a J. Rossi fuit exaratus anno 1488.

Nº 2363. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2349. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2350. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 1981. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2467. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2472. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur; sub finem nonnulla desiderantur.

Nº 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2348. Is codex comprehendit Euclidis Data, collata cum quinque antiquissimis manuscriptis bibliothecæ vaticanæ, a Josepho Auria, neapolitano, celebri geometræ sæculi decimi sexti decedentis.

Anno 1814 currente editurus sum versionem gallicam Diophanti operum. Lectiones variantes manuscriptorum bibliothecæ imperialis cum editione 1670, meam versionem subsequuntur. Imprimis usus sum manuscripto 2380 græco et latino, cujus initio legere est: *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auria interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auria:*

Mea versio conicorum Apollonii edetur anno 1815 currente.

N° 2481. Ce manuscrit, qui contient les dix premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2531. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2343. Ce manuscrit, qui contient les quinze livres des Éléments, paraît être du seizième siècle.

N° 2547. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, et les Données, paraît être du commencement du seizième siècle.

N° 2448. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2352. Ce manuscrit, qui contient les Données, fut écrit par J. Rossi en 1488.

N° 2363. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quinzième siècle.

N° 2349. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2350. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 1981. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2467. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2472. Ce manuscrit, qui contient les Données d'Euclide, paraît être du quatorzième siècle ; il manque quelque chose à la fin.

N° 3366. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2348. Ce manuscrit contient les Données d'Euclide comparées avec les cinq plus anciens manuscrits de la bibliothèque du Vatican, par Joseph Auria de Naples, célèbre géomètre de la fin du seizième siècle.

Je publierai dans le courant de l'année 1814 une traduction française des œuvres de Diophante. Les variantes des manuscrits de la bibliothèque impériale, avec l'édition de 1670, seront placées à la suite de ma traduction. J'ai fait principalement usage du manuscrit 2380 grec et latin. On lit en tête de ce manuscrit : *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auria interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auria.*

Ma traduction des coniques d'Apollonius paraîtra dans le courant de l'année 1815.

INSTITUT DE FRANCE.

Rapport de MM. DELAMBRE et PRONY, sur une édition grecque, latine et française des quinze livres des Éléments et du livre des Données d'Euclide, par M. Peyrard.

LA classe avait déjà, sur le rapport de MM. Lagrange, Legendre et Delambre, donné son approbation à une traduction complète des OEuvres qui nous restent d'Euclide ; M. Peyrard, auteur de ce travail, avait comparé tous les manuscrits grecs qui sont à la bibliothèque impériale, au nombre de vingt-trois. Il était résulté de cette comparaison qu'aucun de ces manuscrits n'est entièrement conforme à l'édition d'Oxford ; que cette édition, qui passe pour la meilleure, et qui est sans contredit la plus belle, n'est pourtant, quant au texte grec, qu'une copie de l'édition de Bâle, dont elle a reproduit jusqu'aux fautes les plus palpables ; que la plupart de ces manuscrits offrent des variantes qui remplissent quelques lacunes, ou éclaircissent quelques passages de ces deux éditions principales ; qu'en général cependant tous ces manuscrits diffèrent peu les uns des autres, et diffèrent beaucoup d'un manuscrit portant le n° 190, qui provient de la bibliothèque du Vatican, d'où il fut envoyé en France par M. Monge.

Ce manuscrit porte tous les caractères qui peuvent en attester l'ancienneté, tous les autres paraissent plus modernes ; M. Peyrard le croit de la fin du neuvième siècle. Mais cette date n'est pas son principal mérite ; le texte y paraît plus pur, plus clair, moins prolix, et par-là même plus intelligible. C'est à ce manuscrit que M. Peyrard s'est principalement attaché, il en avait porté toutes les variantes aux marges d'un exemplaire de l'édition d'Oxford ; cet exemplaire et le manuscrit qui avait servi à le corriger, furent remis aux commissaires nommés par la classe ; ils vérifièrent les notes marginales de M. Peyrard ; ils y remarquèrent des additions nécessaires, d'autres simplement utiles, des suppressions qui n'étaient pas moins avantageuses, d'autres changements sur lesquels les avis pouvaient être partagés, quelques-uns même qui ne semblaient pas devoir être adoptés, et leur conclusion fut que la classe pouvait donner son approbation au travail de M. Peyrard ; que s'il n'était pas permis d'espérer une édition du texte grec purgé de toutes les fautes que les manuscrits pouvaient corriger, et enrichi de toutes les additions qu'ils pouvaient fournir, édition qui ne pouvait manquer d'être dispendieuse et qui demanderait beaucoup de temps, il était au moins à souhaiter que M. Peyrard ajoutât à sa traduction la liste des variantes qu'il aurait adoptées ou simplement recueillies, afin que les géomètres pussent corriger les éditions anciennes en attendant l'édition plus correcte qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Ces conclusions adoptées par la classe inspirèrent un nouveau courage à M. Peyrard ; il entreprit l'édition grecque, latine et française, dont nous avons à rendre compte ; elle aura deux volumes in-4° ; le premier est achevé. Sur la demande de l'auteur, S. E. le Ministre de l'intérieur, par sa lettre du 20 novembre 1813, invite la classe à examiner *si l'ouvrage est aussi exact que l'auteur a désiré le faire, si les leçons choisies sont en effet celles qui méritaient*

d'être adoptées de préférence, enfin si le livre remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées.

La classe d'histoire et de littérature ancienne a été en même temps invitée à considérer la traduction sous le rapport du style et de l'exécution ; S. E. *prie les deux classes de vouloir bien, soit en particulier, soit en se réunissant, examiner le volume sous ces divers rapports.*

Deux commissions ont été nommées ; les deux rapporteurs choisis par elles ont eu plusieurs conférences ; ils se sont trouvés du même avis, et chacun d'eux s'attachera plus particulièrement aux objets qui sont de sa compétence, en observant la ligne de démarcation tracée par S. E. le Ministre de l'intérieur.

L'ouvrage est précédé d'une préface, où l'éditeur rend compte des recherches qu'il a faites, des secours qu'il s'est procurés, du système qu'il a suivi ; cette préface est en deux langues, nous n'en examinerons ici que les idées.

Ce qu'on sait sur la personne d'Euclide se réduit à bien peu de chose, mais son ouvrage jouit de la plus grande réputation. On convient assez généralement qu'Euclide n'a fait que rassembler et mettre en ordre les théorèmes trouvés par les géomètres qui étaient venus avant lui ; peut-être a-t-il augmenté le nombre de ces théorèmes, il se peut qu'il en ait perfectionné les démonstrations ; cependant quelques auteurs attribuent ces démonstrations à Théon, l'un des plus anciens et plus célèbres commentateurs des Éléments. Proclus, qui nous a laissé quatre livres de commentaires sur le premier livre d'Euclide, dans une longue liste de tous les grecs qui se sont distingués dans les mathématiques, en cite quatre qui avaient composé des éléments avant Euclide. Le premier est Hippocrate de Chios, célèbre encore aujourd'hui par ses Lunules ; le second est Léon, dont l'ouvrage était plus plein, plus utile que celui de son prédécesseur ; le troisième est Theudius de Magnésie, que Proclus loue pour l'ordre qu'il a mis dans la rédaction ; après Léon vient Hermotime de Colophon, qui, perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Thætète, mit aussi beaucoup du sien dans les éléments ; peu de temps après vint Euclide, qui, suivant le témoignage de Proclus, *rassembla les éléments, mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe, perfectionna ce qui avait été commencé par Thætète, et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. Euclide vivait sous le premier des Ptolémées, car Archimède le cite dans son premier livre ; il avait fait beaucoup d'autres ouvrages remarquables par leur admirable exactitude et pleins de théories savantes.* Proclus cite particulièrement son optique, sa catoptrique, ses éléments de musique, et enfin, son livre des dièseses, *διαιρέσεων* ; mais ce qu'il admire surtout c'est le livre des éléments, tant pour l'ordre que pour le choix des théorèmes et des problèmes, qui méritent véritablement le nom d'*élémentaires* ; il est à remarquer que Proclus ne dit rien des *données*, et qu'il n'a pas nommé Théon.

Ce passage que nous traduisons fidèlement, et dont Grégori dans sa préface avait seulement extrait quelques lignes, semble décisif ; aussi l'idée de ceux qui voulaient dépouiller presque entièrement Euclide en faveur de Théon, a-t-elle été vivement combattue par Butéon et Savilius ; Robert Simson en se rangeant à leur avis, le modifie d'une manière qui le rend encore plus favorable à Euclide. Par une espèce de superstition, excusable dans un traducteur, il a l'air de poser comme un axiôme qu'il est impossible qu'Euclide se soit jamais trompé, ou qu'il ait eu la moindre distraction. Ainsi quand il est obligé de reconnaître qu'une définition n'est pas assez

juste, qu'une démonstration est incomplète ou peu rigoureuse, il en rejète assez durement la faute sur Théon ou quelque autre commentateur, qu'il accuse nettement d'ineptie ou au moins d'ignorance en mathématiques. Le nouveau traducteur, sans s'éloigner beaucoup de cette manière de voir de Simson, est au moins plus modéré dans les termes; et pour rejeter plusieurs choses qui véritablement paraissent peu dignes d'Euclide, il a, ce qui manquait à Simson, l'autorité d'un bon manuscrit, dans lequel les passages dignes de censure se trouvent omis ou corrigés.

Cette prévention en faveur de son auteur, et la supériorité du manuscrit du Vatican sur tous les autres, ont fait penser à M. Peyrard, que ce manuscrit pourrait bien être le véritable texte d'Euclide, tandis que tous les autres, et en particulier ceux qui ont servi à l'édition de Bâle ou d'Oxford, seraient les éditions données par Théon, ou par les commentateurs venus après lui.....

En avouant que nous n'avons aucun argument bien péremptoire pour rejeter la conjecture de M. Peyrard, nous dirons pourtant qu'elle ne nous paraît pas suffisamment établie.....

Nous n'attribuerons donc pas à Théon toutes les différences qui se trouvent entre les manuscrits plus modernes et le manuscrit du Vatican; nous ne dirons pas que ce manuscrit soit le texte véritable d'Euclide, car alors il faudrait attribuer à Euclide les mauvaises leçons que M. Peyrard a justement rejetées de son édition pour suivre ou les autres manuscrits ou les éditions de Bâle et d'Oxford. Nous ne dirons pas même que Théon soit décidément l'auteur de la définition condamnée par Simson; il est vrai que Théon la développe et l'explique dans son commentaire sur l'Almageste; mais il la rapporte sans pour cela s'en déclarer l'auteur, au lieu que dans un autre endroit il donne formellement comme de lui le théorème concernant les secteurs, qu'il dit avoir démontré dans son explication d'Euclide, car c'est ainsi que pour éviter l'équivoque nous traduisons le mot *ισόεις*, qu'on traduit communément par le mot *édition*.

Nous n'accuserons point Théon d'avoir supprimé des démonstrations rigoureuses, pour en substituer d'autres qui ne prouvent rien ou qui sont inintelligibles. Nous admettrons aisément que Théon a pu commettre quelques fautes par inattention, mais non qu'il ait été assez ignorant pour ne sentir ni le mérite d'une bonne démonstration, ni les défauts de celles qu'il mettait à la place. Au reste, ce reproche que nous avons l'air d'adresser à M. Peyrard, va bien plus justement à Simson, dont la préface toute entière roule sur cette idée; et d'ailleurs nous sommes loin de donner trop d'importance à l'opinion d'un commentateur sur la source des erreurs avouées qu'il s'agit de rectifier. Que ces erreurs viennent d'Euclide lui-même ou de l'un de ses commentateurs, ou, ce qui souvent est plus probable, qu'elles viennent des copistes, rien n'est plus indifférent; pourvu que le nouvel éditeur les corrige bien, il aura rempli sa tâche; et s'il peut prouver que ses corrections sont appuyées du témoignage d'un ancien manuscrit, on n'a rien de plus à lui demander.

Ce qui distingue les *Éléments* d'Euclide, ce sont moins les théorèmes eux-mêmes, ou l'ordre dans lequel il les a fait dériver les uns des autres, que la manière dont il les a démontrés.....

Le mérite principal est dans la marche rigoureuse qu'il a suivie dans toutes ses démonstrations; on pourrait dire cependant que cette méthode même a trouvé plus de prôneurs que d'imitateurs.....

Mais sans nous déclarer exclusivement les admirateurs d'une manière passée de mode, nous dirons que cette manière a des avantages précieux, en même temps qu'elle a des inconvénients graves; qu'elle forme un langage aujourd'hui peu connu et qui mérite de l'être d'avantage; qu'en

la voyant appliquée par Euclide à des théorèmes assez simples, on pourra devenir en état de suivre plus facilement les démonstrations plus longues et plus obscures d'Apollonius et d'Archimède; que cette étude sera du moins un exercice utile pour s'habituer à la rigueur des démonstrations dont on n'est que trop disposé à se relâcher. On ne serait écouté de personne aujourd'hui si l'on proposait de commencer l'étude des mathématiques dans Euclide; mais on dira une chose vraie en assurant que tout géomètre sera très-bien de lire une fois en sa vie Euclide en entier, pour avoir une idée nette de ce genre de démonstrations, et se mettre en état de l'employer dans l'occasion.

Ces réflexions prouvent l'utilité de l'entreprise formée par M. Peyrard. Aujourd'hui que l'étude du grec commence à reflorir dans l'Université royale, il est à croire que peu de géomètres désormais se refuseront la satisfaction de lire Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante dans leur langue. Il ne faut pas avoir fait une longue étude du grec pour entendre ces auteurs, qui ne sont pas plus difficiles que les fables d'Ésope, et bien moins, certainement, que les dialogues de Lucien, ou les vies de Plutarque, qu'on met entre les mains des enfants. Euclide surtout est d'une grande simplicité, ses phrases sont courtes, elles offrent peu d'inversions, on n'y voit pas une réflexion, pas un raisonnement grammaticalement compliqué; les mêmes expressions reparaissent à chaque instant; le vocabulaire n'est que trop borné, et les termes techniques que l'on y rencontre ne paraissent jamais sans avoir été préalablement définis.

L'intelligence du texte grec sera rendue plus facile encore par le système que M. Peyrard a suivi dans sa traduction latine. Partout il lui a donné la même fidélité qu'aux traductions interlinéaires des ouvrages qui servent à la première instruction. Les termes correspondants se suivent dans le même ordre dans les deux langues. Il n'est pas jusqu'aux articles qui manquent au latin, que le traducteur n'ait tenté de reproduire, par l'emploi continuuel du pronom *ipse*, *ipsius*, etc., pour marquer les cas obliques des lignes, des angles, des figures, désignés en grec par des lettres indéclinables. Ces mots subsidiaires dont la répétition continuelle a quelque chose de fatigant, auraient pu être évités, sans doute, en les remplaçant parfois par les mots *rectæ*, *anguli*, *arcus*, ou tels autres qui n'auraient guères été plus longs; mais M. Peyrard est suffisamment excusé par l'exemple des traducteurs qui l'ont précédé, et même par celui des géomètres modernes qui ont écrit en latin. D'ailleurs, la traduction latine est moins destinée à être lue de suite, qu'à faciliter l'intelligence du texte grec; et ceux qui y trouveraient trop de difficulté pourront se borner à la traduction française qui est au bas de chaque page; outre le secours qu'il trouvait dans nos articles indéfinis, l'auteur n'a pas fait scrupule d'y introduire ces mots *ligne*, *angle*, etc., que nous regrettons tout-à-l'heure de ne pas trouver dans le latin. Cette licence est la seule qu'il ait prise; à cela près, le français est presque aussi littéral que le latin; on serait tenté quelquefois d'en faire un reproche au traducteur; mais la phrase d'Euclide est si simple, qu'il n'y a guères deux manières de la traduire, à moins de prendre des libertés qui, sans avantages bien réels, changeraient tout-à-fait le style de la démonstration.

Il nous reste à parler des variantes qui assurent à la nouvelle édition du texte une supériorité marquée sur les éditions précédentes, lesquelles d'ailleurs commencent à devenir un peu rares.

La première de ces variantes est celle qui place parmi les *demandes* trois propositions, que les éditions précédentes avaient rangées parmi les *notions communes*. Tous les auteurs qui ont depuis reproduit ces propositions se sont crus obligés de les démontrer; Euclide qui s'en est

dispensé , n'a pu cependant les regarder comme des vérités évidentes , mais seulement comme des principes qu'on pouvait lui accorder et qui lui étaient indispensables pour établir sa doctrine. Il faut convenir pourtant que ces trois demandes sont d'un genre tout différent des trois précédentes. En effet, il faudrait être d'un esprit bien difficile pour nier à Euclide la possibilité de mener une droite d'un point donné à un point donné , de prolonger une droite donnée , ou de décrire un cercle d'un centre et d'un rayon donnés. Mais on pourrait lui demander la preuve que tous les angles droits sont égaux , que deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace , et surtout que deux droites se couperont nécessairement si on les prolonge suffisamment du côté où elles forment sur une autre droite deux angles dont la somme est moindre que celle de deux angles droits.

L'édition de Paris est conforme à tous les manuscrits de la Bibliothèque royale , si ce n'est que le n° 2345 place parmi les notions communes la troisième des propositions dont nous venons de parler , et que les n° 2346 et 2481 la placent tout à la fois , et parmi les demandes et parmi les notions communes. L'édition de Paris est encore conforme à l'édition arabe , à la traduction latine de Campan , faite d'après l'arabe , et à la traduction latine de Zamberti , faite d'après le texte grec , avant l'édition de Bâle ; Proclus , qui a démontré d'une manière très-simple que tous les angles droits sont égaux , place parmi les demandes, les deux premières propositions , et la troisième parmi les notions communes ; Boèce , qui a supprimé la troisième , place aussi les deux autres parmi les demandes. Tout porte donc à croire que Simon Gryncæus , qui est l'auteur de l'édition de Bâle , jugeant ces trois propositions déplacées , changea les accusatifs en nominatifs , les infinitifs en indicatifs , pour reposer ces propositions à une place qu'il jugeait plus convenable. Quoi qu'il en soit , nous croyons M. Peyrard plus qu'autorisé à la leçon qu'il a adoptée de préférence.

La proposition 7 du premier livre a plusieurs cas ; un seul cependant est énoncé et démontré dans tous les manuscrits. Clavius a senti la nécessité de nouveaux développements , il y consacre cinq figures et donne cinq démonstrations , qu'il pouvait réduire à trois ; Simson donne double démonstration et double figure , et la seconde est prise dans Clavius. M. Peyrard qui ne voyait dans les manuscrits qu'une seule figure et qu'une seule démonstration , pouvait dire tout simplement qu'Euclide avait eu un moment de distraction ; il pouvait compléter la démonstration dans une note. Il a voulu sauver Euclide de tout reproche ; en empruntant comme Simson , une figure à Clavius , et prolongeant deux lignes dans la figure d'Euclide , il a fait que la démonstration d'Euclide s'applique à la fois aux deux figures et aux deux cas qui renferment tous les autres. Ainsi *la démonstration s'est trouvée complète sans y changer un seul mot* , dit M. Peyrard , et cela est vrai ; mais dans la préparation il a été obligé d'ajouter une ligne qu'il a enfermée entre deux crochets , parce qu'elle ne se trouve dans aucun manuscrit ; il serait assez difficile d'imaginer comment les copistes auraient non-seulement omis une figure toute entière , mais encore les deux prolongements de la première figure , et enfin la ligne du texte qui explique ces prolongements ; ce n'est donc pas ici une variante que M. Peyrard porte dans le texte , c'est une véritable correction faite à un passage incomplet , mais du moins il l'a faite dans les moindres termes , et c'est par dévouement à son auteur qu'il se borne au mérite d'avoir retrouvé la véritable leçon.

La proposition 24 du livre III , a trois cas ; les éditions grecques n'en démontrent qu'un seul , Commandin dans sa traduction démontre les deux autres : Clavius développe la proposition , il y

emploie cinq figures ; Simson retranche une partie de la proposition qu'il reporte à la précédente ; à l'aide de son manuscrit M. Peyrard remplit la lacune.

Dans la proposition 26, la variante (3) éclaircit la démonstration, elle est donc utile ; M. Peyrard a bien fait de l'introduire dans le texte. Tous les traducteurs en avaient senti la nécessité, le manuscrit a légitimé leurs conjectures.

Le corollaire de la proposition 19 du livre V a paru si corrompu, que Gregori s'est cru obligé de le changer pour y donner un sens raisonnable. Clavius lui en avait donné l'exemple. Robert Simson, avec son aménité ordinaire, dit que tout ce livre V a été corrompu par des ignares en géométrie.....

Le manuscrit est absolument semblable à l'édition d'Oxford, c'est par des changements assez légers que M. Peyrard a rendu ce corollaire intelligible ; mais ces changements nécessaires ne sont autorisés par aucun manuscrit ; il lui donne ensuite la forme d'un théorème, et le démontre directement d'une manière assez courte dans sa préface.

Dans la dernière proposition du livre VI, ce qui regarde les secteurs circulaires paraît une addition de Théon, qui en réclame formellement la démonstration à la page 50 de son commentaire sur Ptolémée. Cet article ne se trouve pas dans le manuscrit du Vatican, et M. Peyrard se reproche de ne l'avoir pas retranché de son édition, par la raison qu'il n'est d'aucun usage dans tout ce qui suit ; mais puisque ce théorème est vrai, nous croyons le scrupule exagéré. Pour qu'un théorème soit admis dans un livre d'éléments, il n'est pas bien nécessaire qu'il serve à démontrer un théorème subséquent..... Cet article des secteurs a cependant trouvé grâce aux yeux de Simson, qui en ignorait probablement le véritable auteur, ou qui n'a pas vu dans le passage de Théon une preuve bien sûre qu'Euclide n'eût pas donné lui-même ce théorème.

Le traducteur continue de donner les raisons pour lesquelles il a rejeté du texte plusieurs variantes qu'il discute. Ces raisons sont assez plausibles, mais quand on ne les admettrait pas, comme les leçons rejetées se retrouvent à la fin du volume, personne n'aurait à se plaindre ; on sait qu'en pareille matière les éditeurs les plus estimables sont rarement du même avis.

Après avoir examiné la préface, nous aurions à passer en revue les variantes que l'auteur, soit en les admettant, soit en les rejetant, n'a pas jugées assez importantes pour leur consacrer un article particulier ; mais cet examen serait beaucoup trop long, nous nous bornerons à celles qui pourront nous fournir quelque remarque ; nous laisserons toutes celles qui nous ont paru ou indifférentes ou bien placées, soit qu'elles se trouvent dans le texte ou qu'elles soient à la fin du volume.

Dans la définition 15 du livre I^{er}, l'éditeur, d'après plusieurs manuscrits, a reçu dans le texte les mots *πρὸς τῇ τῷ κύκλου περιφέρειᾳ*, qui nous paraissent un double emploi, une glose fort inutile des mots *πρὸς ᾧ* qui se trouvent deux lignes plus haut.

L'éditeur a marqué par des titres les différentes parties dont se compose la première proposition. Ces dénominations qui nous ont été conservées par Proclus, et qui sont *exposition*, *détermination*, *construction*, *démonstration* et *conclusion*, paraissent une pédanterie de commentateur, et le nouvel éditeur a bien fait de ne les employer qu'une seule fois pour exemple.

Il a rejeté parmi les variantes le corollaire de la proposition XV, qui dit que la somme des angles autour d'un même point est toujours égale à quatre angles droits. Sa raison est qu'il manque dans la plupart des manuscrits, et que dans les autres il est écrit d'une main étrangère. Il nous

semble qu'on aurait pu le conserver, à l'exemple de Simson. S'il n'est pas d'Euclide, s'il est implicitement renfermé dans ce qui précède, il a le mérite d'être court, et de contenir une remarque qui aurait pu échapper à quelques lecteurs. Il aurait pu, sans inconvénient, conserver quatre mots qu'il a retranchés de la proposition XX ; à la vérité, ils n'étaient pas bien nécessaires, mais ils paraissent dans la manière d'Euclide. Dans la proposition XXII, au contraire, il a rétabli dans le manuscrit deux lignes qui ne gâtent rien, mais dont on pouvait se passer.

Dans la proposition XXVI, l'addition faite (13) était nécessaire, quoique dans le manuscrit elle fût écrite en marge et d'une autre main ; elle se trouvait déjà dans l'édition d'Oxford.

Dans la proposition XXVII, la leçon du manuscrit est plus concise et suffisante ; celle d'Oxford est plus développée et plus dans la manière d'Euclide. On peut en dire autant de la proposition XXVIII. La leçon nouvelle de la proposition XXIX a le mérite de la brièveté.

A la proposition XXXI, l'éditeur s'est écarté de son manuscrit pour se conformer à l'édition d'Oxford ; il a cru parfaitement inutiles les mots qu'il supprimait : il y a dans tous ces choix un peu d'arbitraire, et nul inconvénient. Ainsi à la proposition XXXIV, le mot *χαρίων* ajouté à *παράλληλόγραμμοι* n'était nullement nécessaire ; mais en le rétablissant, on a rendu l'énoncé plus conforme à celui de la proposition. A la proposition XXXVII, le retranchement autorisé par le manuscrit n'a aucun inconvénient : on fait toujours bien quand on retranche des mots inutiles ; la démonstration y gagne toujours, car celles des Grecs sont toujours un peu longues.

A la fameuse proposition XLVII (le carré de l'hypoténuse), on trouve une faute qui ne peut échapper au lecteur, et dont nous n'aurions pas fait mention, si elle ne se trouvait dans les trois langues : c'est un ΔA au lieu de BA .

Dans le livre II, proposition VIII, on serait tenté de regarder comme inutiles les quatre lignes introduites d'après le manuscrit ; mais dans la proposition IX, on a très-bien fait d'introduire ces mots *et elles sont égales*, qu'on était obligé de sous-entendre. La variante (12) de la même proposition est préférable à la leçon d'Oxford, qui pourtant revient à peu près au même ; car si les carrés sont égaux, les racines ou les côtés le sont nécessairement.

Le manuscrit avait, dans la proposition X, une faute évidente, qui n'était ni dans l'édition d'Oxford, ni dans celle de Bâle.

Dans le livre III, définition 2, l'éditeur a bien fait d'ajouter, d'après le manuscrit, les mots *ἐπὶ μηδένισι μέρη* ; mais il a oublié de les traduire en français.

Dans la proposition VIII, l'éditeur a bien fait de suivre l'édition d'Oxford plutôt que le manuscrit ; la longue variante n'offre rien de bien intéressant.

Dans la proposition XIII on a ajouté, d'après le manuscrit, deux mots qui étaient si nécessaires, que Gregori les avait traduits ; quoiqu'ils ne fussent pas dans le texte.

Dans la proposition XXIV, le manuscrit et l'édition nouvelle présentent un sens moins incomplet : il y manque pourtant encore quelque chose, mais le sens ne peut être douteux.

La variante (6) de la proposition XXXVII, est certainement une amélioration.

Livre IV, au corollaire de la proposition V, la correction tirée du manuscrit est bonne ; la leçon d'Oxford était defectueuse ; cependant le sens était visible.

Livre V, proposition IV, l'éditeur a rétabli d'après le manuscrit deux mots qui manquaient, et que Simson avait jugés indispensables. Il y a ensuite, dans le manuscrit, trois lignes que l'éditeur a bien fait de ne point admettre dans son texte.

Proposition V, la variante (1) était nécessaire.

Proposition VII, l'éditeur n'a point inséré dans le texte un corollaire qui contient une proposition vraie, utile, et qui manque à ce livre, mais qui ne peut se conclure de la proposition précédente : il ne se trouve dans aucun manuscrit, si ce n'est celui du Vatican. Simson a donné à part cette proposition, qu'il a marquée de la lettre B. Dans la manière moderne de traiter les proportions, ce théorème est évident ; il suffira d'en trouver l'énoncé parmi les variantes ; mais il pouvait figurer dans le texte, avec une note.

A la proposition VIII, les sept lignes ajoutées d'après le manuscrit améliorent la démonstration sans la rendre encore bien claire. Simson avait raison de la trouver incomplète ; mais il avait probablement tort d'en rejeter la faute sur Théon. Au reste, la proposition en elle-même est si simple, qu'on serait tenté d'en faire un axiôme ; et de là vient peut-être la difficulté de la démontrer à la manière des anciens. Il y avait dans l'édition d'Oxford une faute de grammaire, un indicatif pour un infinitif ; cette faute a été corrigée d'après le manuscrit.

A la proposition XXI, variante (3), la leçon d'Oxford était tronquée ; on y ajoutait une explication qui paraît avoir été une note marginale, qui depuis aurait passé dans le texte. La leçon rend la glose inutile ; ainsi le passage devient à la fois et plus court et plus clair.

A la proposition XXIII, on trouve une longue variante fournie par quatre manuscrits. Elle est préférable à la leçon d'Oxford. Simson a refondu la démonstration, et dans ses notes il critique vivement les interprètes qui l'ont précédé. Sa démonstration n'est pas non plus d'une grande clarté. Le théorème est un de ceux qu'on n'explique nulle part, et qu'on applique sans le connaître. Il suffit de l'écrire algébriquement pour en sentir la justesse. Cette espèce de traduction est en général le moyen le plus sûr pour juger les démonstrations des divers éditeurs ; mais alors, si on les rend plus claires, on aperçoit en même temps qu'elles sont longues et peu naturelles.

Au livre VI, l'éditeur a supprimé la 5^e définition, parce qu'elle n'est pas dans son manuscrit. Elle pourrait être de Théon ; c'est celle que Simson a si vivement critiquée. La meilleure raison, c'est qu'elle est à peu près inutile, et qu'elle n'est point assez correcte. C'est la définition de la raison composée.

Dans la proposition II, l'éditeur a supprimé deux fois le mot *παράλληλος* qui n'est pas dans le manuscrit, et qui est de trop dans les imprimés. *Αγιν παρά* signifie chez les Grecs ce que nous exprimons par *mener parallèlement*. On voit donc que le mot *parallèle* devient inutile. Deux lignes sont parallèles quand elles sont à côté l'une de l'autre sans jamais se couper ; c'est ce que signifie *παρά* chez les géomètres grecs.

Dans la proposition III, l'éditeur a rétabli quelques articles qui manquaient, et adopté quelques variantes qui, sans être bien importantes par le sens, rendent la phrase plus correcte.

A la proposition X, il y avait dans l'édition d'Oxford une répétition inutile, occasionnée par l'insertion d'une phrase également superflue. L'éditeur, d'après quatre manuscrits, a donné une leçon plus courte et plus exacte.

A la fin de la deuxième démonstration de la proposition XIV, on a supprimé, d'après le manuscrit, quatre lignes qui formaient une glose peu nécessaire.

La proposition XXI avait un double emploi plus sensible, que le manuscrit a fait supprimer.

A la proposition XXII, le manuscrit a fourni deux développements utiles, qu'on pouvait cependant sous-entendre.

A la proposition XXVI, les éditeurs de Bâle et d'Oxford offraient un texte altéré, une figure mal faite. Clavius avait changé la démonstration et substitué deux figures à la figure unique du texte. Le manuscrit a fourni un texte correct et une figure exacte. Simson, en conservant la figure, avait changé le texte pour l'y faire cadrer. Sa correction était bonne, mais rien ne l'appuyait. Il est à croire que la nouvelle édition offre la véritable rédaction d'Euclide.

A la proposition XXVII, *τὴν* était une faute d'impression dans l'édition d'Oxford.

Livre VII. C'est le premier de ceux qui sont omis dans les éditions communes d'Euclide ; il traite des nombres. La définition de l'unité ne signifie pas grand chose en grec, et ce défaut est bien plus sensible en latin et en français, où les mots *un* et *unité* ont une ressemblance que n'ont pas les mots *monade* et *un* ; *μονάς* et *ἓν*.

L'éditeur a rétabli, d'après le manuscrit, la définition du nombre impairement pair qui manquait évidemment, quoiqu'on pût la supposer comprise dans celle du nombre pairement impair qui précède.

A la proposition X, on trouve une addition utile.

A la proposition XIX, *διτρίπευ* pour *τετράπευ*, était dans l'édition d'Oxford une faute prise dans celle de Bâle, et d'autant plus étonnante dans celle-là, qu'elle était corrigée dans la traduction.

A la proposition XXIII, la première variante a le mérite de plus de brièveté, la seconde celui de plus de justesse.

Nous sentons plus que personne combien ces détails sont arides et minutieux. Nous avons dû les rapporter pour donner à la Classe la preuve du scrupule avec lequel nous avons fait l'examen dont elle nous avait chargés. Notre conclusion sera que, nonobstant quelques fautes d'impression dont nous ajouterons ici la liste (1), qui étaient presque inévitables dans une entreprise de ce genre, et qui d'ailleurs sont bien moins nombreuses que celles de la belle édition d'Archimède, imprimée à Oxford, l'ouvrage est *exact*, non pas sans doute *autant que l'auteur aurait désiré le faire*, mais autant qu'il était possible de l'espérer ; *que les leçons choisies sont en général celles qui méritaient la préférence*. Si quelquefois à cet égard nous nous sommes trouvés différer de sentiment avec l'éditeur, nous n'oserions assurer que nous avons toujours raison ; et ceux qui se trouveraient de notre avis auraient toujours la ressource de consulter la table des variantes ; ainsi l'inconvénient, s'il en existe, est extrêmement léger. Nous dirons *que l'ouvrage remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées*, et que l'édition est évidemment supérieure à toutes celles que nous connaissons.

Fait à Paris, le 21 février 1814.

Signé PRONY et DELAMBRE, rapporteur.

Certifié conforme à l'original.

Le Secrétaire perpétuel,

Signé DELAMBRE.

(1) Cette liste est imprimée à la fin du volume.

INSTITUT DE FRANCE.

CLASSE D'HISTOIRE ET DE LITTÉRATURE ANCIENNE.

Paris, le 26 Février 1814.

Le Secrétaire perpétuel de la Classe, à Son Excellence le Ministre de l'intérieur.

MONSIEUR LE COMTE,

Les *Éléments* d'Euclide ne renfermant que des définitions et des propositions de géométrie, sont essentiellement du ressort de la Classe des Sciences physiques et mathématiques, et sont entièrement étrangers, pour le fonds, au genre des travaux de celle d'histoire et de littérature ancienne. Cette Classe cependant, pour répondre, autant qu'il est en elle, au témoignage de confiance que Votre Excellence a jugé à propos de lui donner en la consultant sur le mérite du travail de M. Peyrard, s'est empressée de l'examiner sous le petit nombre de rapports qui la concernent et sur lesquels elle peut avoir une opinion motivée. Le compte que M. Delambre rendit il y a quelques années à la première Classe de la traduction française d'Euclide, et celui qu'il vient de lui rendre de l'édition du texte et des traductions latine et française dont il est accompagné, ainsi que de l'ensemble du travail de M. Peyrard, présentent les détails les plus intéressants qui supposent un examen très-approfondi de ce travail sous le rapport littéraire et sous celui de la science, et font connaître suffisamment ce qu'on doit en penser.

La classe d'histoire a donc cru devoir se borner à soumettre à Votre Excellence quelques observations générales sur la partie littéraire de l'ouvrage, et sur la manière dont il est exécuté.

Le texte d'Euclide lui a paru plus correct dans la nouvelle édition que dans les éditions antérieures; cependant elle pense que celle qui fut publiée à Bâle en 1535, par Simon Gryncus, malgré quelques fautes d'impression, moins nombreuses qu'on ne le croit communément, et faciles à corriger, sera toujours précieuse aux amateurs de la langue grecque.

La partie typographique est en général soignée dans l'édition de M. Peyrard: il s'y est néanmoins glissé quelques fautes d'impression, surtout vers la fin du volume.

En comparant le texte grec de cette édition avec celui des éditions précédentes, on y remarque quelques différences. Les plus essentielles ont été relevées et appréciées dans le rapport fait à la première Classe, qui constate encore que l'éditeur a rempli heureusement plusieurs lacunes avec le secours des manuscrits.

Les deux traductions jointes au texte sont très-littérales; peut-être même la traduction française l'est-elle trop. Cette manière de traduire mot à mot peut être bonne pour une version latine, dans laquelle on cherche plutôt l'exactitude et la fidélité que l'élégance, et dont quelques personnes peuvent avoir besoin pour entendre le texte; mais il semble que la traduction française aurait dû être faite avec un peu plus de liberté (1).

J'ai l'honneur de faire repasser à Votre Excellence l'ouvrage de M. Peyrard qu'elle m'avait envoyé, et de lui renouveler l'hommage de mes sentiments les plus respectueux.

Signé DACIER.

Certifié conforme à l'original,

Signé BARBIER DE NEUVILLE, chef de
la 3^{me} division du Ministère de l'intérieur.

(1) Voyez le rapport de M. Delambre, page 36, alinéa trois.

INSTITUT DE FRANCE.

Paris, 14 août 1809.

Rapport de MM. LAGRANGE, LEGENDRE et DELAMBRE, sur une traduction complète des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide, par M. PEYRARD.

LA Classe a déjà donné son approbation à une traduction d'Euclide, par M. Peyrard. A l'exemple de presque tous les éditeurs qui l'ont précédé, il avait omis les livres qui traitent des Quantités numériques, les trois derniers livres, et le livre des Données; mais il avait annoncé dès-lors une traduction complète. Le désir de lui donner toute la perfection possible lui a fait consulter tous les manuscrits de la bibliothèque royale.

Dépositaire de ces précieux manuscrits, M. Peyrard les a comparés soigneusement avec l'édition grecque d'Oxford; il a noté en marge de l'imprimé toutes les variantes, les a traduites en latin; et c'est sur ce texte rectifié qu'il a composé sa version, qui est aussi littérale que l'a permis le génie des deux langues.

Il a fait principalement usage du n° 190, qu'il nous a remis pour que nous puissions examiner son travail, et vérifier toutes les variantes dont il a enrichi les marges de son exemplaire de l'édition d'Oxford. Nous avons fait cette vérification, et nous avons reconnu partout la plus grande conformité avec le manuscrit.

Ces variantes, comme on peut s'y attendre, ne sont pas toutes de la même importance, et ne méritent pas toujours la préférence sur les leçons imprimées. Parmi ces variantes, il en est qui consistent en quelques mots omis dans les imprimés, dont les traducteurs avaient senti la nécessité, et que Grégori a fait entrer dans son texte, en les enfermant entre deux crochets; quelquefois c'est un présent au lieu d'un futur; *erat* au lieu de *erit*, ou réciproquement; le mot *totus* au lieu de *universus*, *égal*, pour *le même*; des expressions plus ou moins conformes au style ordinaire des géomètres, ou d'Euclide en particulier. Toutes ces variantes n'auraient de valeur qu'aux yeux des philologues et des érudits; mais il en est de vraiment dignes de l'attention des géomètres, en ce qu'elles changent en mieux le sens, ou qu'elles donnent un sens raisonnable à ce qui n'en présentait aucun. Ce sont des superfluités élaguées, des lignes entières omises dans les imprimés, et qui sont ou absolument nécessaires à la démonstration, ou y portent au moins des développements utiles. D'autres fois on y rencontre des leçons plus concises, et qui présentent un sens tout aussi clair; des transpositions qui rendent parfaitement intelligible ce qui paraissait obscur ou peu exact. La définition 5^e du VI^e livre, qui se trouve dans toutes les

éditions grecques, est une simple note placée au bas du manuscrit, d'où elle avait été mal à propos portée dans le texte : Robert Simson a écrit six pages contre cette mauvaise et inutile définition, et elle n'est pas d'Euclide.

Le même traducteur relève une bévue remarquable de tous les textes grecs imprimés; un changement de lettre dans la figure avait causé tout l'embarras. En rétablissant la lettre véritable ϕ au lieu de ϕ , on ne donne plus à Euclide le ridicule de paraître ignorer une vérité de la géométrie la plus élémentaire. Voyez *Prop. 17, liv. XII.*

La proposition 86 des *Données* avait fort inquiété Grégori qui, dans sa préface, en propose deux rédactions identiques, et à laquelle il voulait en ajouter une troisième, qui compléterait le système de la résolution des équations bi-quadratiques à la manière des anciens. Cette dernière conjecture n'est pas confirmée par le manuscrit, qui n'offre que l'une des deux premières rédactions. Grégori croyait le théorème singulièrement altéré; son erreur venait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve dans le manuscrit à la fin des *Données*, et qui doit précéder la proposition 86.

M. Peyrard donne ce lemme qui, au reste, est une proposition bien simple et bien connue. Il s'agit de trouver la surface d'un parallélogramme obtus-angle; mais cette proposition renferme une construction nécessaire à la démonstration des propositions 86 et 87; qui disent que si deux lignes formant un angle donné comprennent un espace donné, et que le carré de l'une, augmenté ou diminué d'un espace donné, soit au carré de la seconde, en raison donnée, ces deux lignes seront connues.

D'après toutes ces considérations, nous pensons que la classe peut donner son approbation au travail de M. Peyrard, pour l'encourager encore à terminer l'entreprise qu'il poursuit avec une persévérance digne d'éloges, et qui nous fera mieux connaître tous les mathématiciens grecs. Nous exprimerions le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils ont fournies; mais cette édition serait dispendieuse et demanderait beaucoup de temps : nous nous bornerons donc à souhaiter que M. Peyrard ajoute à sa traduction la liste de toutes les variantes qu'il a recueillies, et qui lui paraîtront mériter quelque attention. Ainsi les géomètres pourront corriger les éditions anciennes, en attendant celle qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Signé à la minute, LAGRANGE, LEGENDRE, DELAMBRE, rapporteur.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R P R I M U S.

ΟΡΟΙ.

- α. ΣΗΜΕΙΟΝ ἔστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
β. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.
γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεία.
δ. Εὐθεῖα γραμμὴ ἔστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς
ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κίτται.
ε. Επιφάνεια δὲ ἔστιν, ἣ μῆκος καὶ πλάτος
μόνον ἔχει.
ς. Επιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

DEFINITIONES.

1. PUNCTUM est, cujus pars nulla.
2. Linea autem, longitudo non lata.
3. Lineæ vero extrema, sunt puncta.
4. Recta linea est, quæ ex æquo ipsis in
eâ punctis ponitur.
5. Superficies autem est, quod longitudinem
et latitudinem solum habet.
6. Superficiesi vero extrema, sunt lineæ.

LE PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce qui n'a pas de parties.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée aux points qui sont en elle.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

2 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ζ. Επίπεδος ἐπιφανεία ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κείται.

Η. Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείαις κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Θ. Όταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾗσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

Ι. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὁρῶν ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν· καὶ ἡ ἐφ' ἑστακυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἡ ἐρέσταν.

ΙΑ. Αμβλεία γωνία ἐστίν, ἡ μείζον ὀρθῆς.

ΙΒ. Οξεία δὲ, ἡ ἐλάττω ὀρθῆς.

ΙΓ. Ορος ἐστίν, ὃ τίς ἐστὶ πέρας.

ΙΔ. Σχήμα ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τινὲς ἢ τινων ἔρων περιεχόμενον.

ΙΕ. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσιν εὐθεῖαι ποιεῖ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν³ ἴσας ἀλλήλαις εἰσι.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo ipsi in eâ rectis ponitur.

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando vero continentes dictum angulum lineæ rectæ sunt, rectilineus appellatur angulus.

10. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est; et insistens recta perpendicularis vocatur in quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major recto.

12. Acutus autem, qui minor recto.

15. Terminus est, quod alicujus est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab unâ lineâ contenta, quæ vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum intra figuram positurum, omnes cadentes rectæ ad circuli circumferentiam æquales inter se sunt.

7. La surface plane est celle qui est également placée aux droites qui sont en elle.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

15. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 3

15'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

16'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

17'. Ημικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιχόμενον σχῆμα, ὑπὸ τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

18'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῆς εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας, ἢ μείζονος ἢ ἰσάσποντος ἡμικυκλίου.

19'. Σχήματα εὐθύγραμμα ἐστὶ, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιχόμενα.

20'. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

21'. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

22'. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλείονων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιχόμενα.

23'. Τῶν δὲ τριπλείων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον ἐστὶ, τὸ τὰς τρεῖς ἰσας ἔχον πλευράς.

16. Centrum autem circuli, hoc punctum vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentiâ; quæ et bifariam secat circulum.

18. Semicirculus vero est contenta figura ab et diametro, et circumferentiâ circuli apprehensâ ab diametro.

19. Segmentum circuli est, contenta figura ab et rectâ, et circuli circumferentiâ, vel majore vel minore semicirculo existente.

20. Figuræ rectilineæ sunt, quæ ab rectis continentur.

21. Trilateræ quidem, quæ ab tribus.

22. Quadrilateræ autem, quæ ab quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ ab pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum quidem triangulum est quod tria æqualia habet latera.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

4 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κί. Ισοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κς'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους¹⁰ ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἐτι τε¹¹, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθήν γωνίαν.

κη'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλυῖαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς¹² τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον.

λα'. Ετερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ.

לב'. Ρόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δὲ.

λγ'. Ρομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίων πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπίζια καλεῖσθαι.

25. Isosceles vero, quod duo solum æqualia habet latera.

26. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

27. Insuper, trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectum angulum.

28. Obtusangulum autem, quod habet obtusum angulum.

29. Acutangulum vero, quod tres acutos habet angulos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod et æquilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero æquilaterum.

32. Rhombus vero, quod æquilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboides autem, quod et opposita latera et angulos æqualia inter se habet, quod neque æquilaterum est, nec rectangulum.

34. Præter hæc autem quadrilatera trapezia vocentur.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 5

λί. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ τινες ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

35. Parallelæ sunt rectæ, quæ in eodem plano existentes, et productæ in infinitum ad utramque partem, in neutram sibi coincidunt.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α. Ητήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πιπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἴαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπέτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἰλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἰλάσσονες γωνίαι.

ς. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν.

POSTULATA.

1. POSTULETUR, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.

3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

4. Et omnes angulos rectos æquales inter se esse.

5. Et si in duas rectas recta quædam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.

6. Et duas rectas spatium non continere.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

6 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

KOINAI ENNOIAI.

- α. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσα.
 β. Καὶ ἰὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσιν ἴσα.
 γ. Καὶ ἰὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἴσιν ἴσα.
 δ. Καὶ ἰὰν ἀνίστοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσιν ἀνίστα.
 ε. Καὶ ἰὰν ἀπὸ ἀνίστων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἴσιν ἀνίστα.
 ς. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.
 ζ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.
 η. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.
 θ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἴσιν.

NOTIONES COMMUNES.

1. Quæ eidem æqualia, et inter se sunt æqualia.
 2. Et si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.
 3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
 4. Et si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.
 5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
 6. Et quæ ejusdem duplicia, æqualia inter se sunt.
 7. Et quæ ejusdem dimidia, æqualia inter se sunt.
 8. Et quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt.
 9. Et totum parte majus est.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
 2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
 3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
 4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.
 5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
 6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
 7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
 8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
 9. Le tout est plus grand que la partie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

PROPOSITIO I.

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπιρασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

SUPER datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum constituere.

ΕΚΘΕΣΙΣ ᾽. Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ᾽ πεπιρασμένη ἡ ΑΒ.

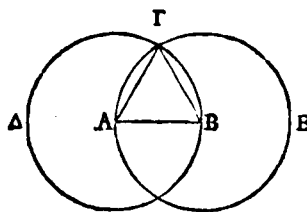
EXPOSITIO. Sit data recta terminata AB.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ᾽. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας πεπιρασμένης ᾽ τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

DETERMINATIO. Oportet igitur super AB rectam terminatam triangulum æquilaterum constituere.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ᾽. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γιγράφθω ὁ ΒΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ, κύκλος γιγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τίμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεία ἐπιζυχθῶσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

CONSTRUCTIO. Centro quidem A, intervallo autem AB, circulus describatur BΓΔ; et rursus, centro quidem B, intervallo autem BA, circulus describatur ΑΓΕ; et ab Γ puncto, in quo sese secant circuli, ad A, B puncta adjungantur rectæ ΓΑ, ΓΒ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ᾽. Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

DEMONSTRATIO. Et quoniam A punctum centrum est BΓΔ circuli, æqualis est ΑΓ ipsi ΑΒ; rursus, quoniam B punctum centrum est ΑΓΕ circuli, æqualis est ΒΓ ipsi ΒΑ. Ostensa

PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

EXPOSITION. Soit AB une droite donnée et finie.

DÉTERMINATION. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

CONSTRUCTION. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle ΒΑ, décrivons la circonférence ΑΓΕ; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points Α, Β les droites ΓΑ, ΓΒ (dem. 1).

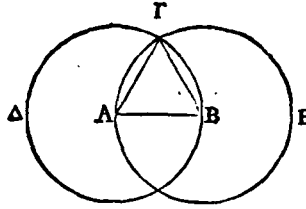
DÉMONSTRATION. Car, puisque le point Α est le centre du cercle BΓΔ, la droite ΑΓ est égale à la droite ΑΒ (déf. 15); de plus, puisque le point Β est le

*construire il s'agit de
de la finie AB un triangle
équilatéral
du centre A et de l'intervalle AB
de la finie BA, décrivons la circonférence
ΑΓΕ; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons
aux points Α, Β les droites ΓΑ, ΓΒ (dem. 1).*

8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἰκατέρω ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἴσιν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν· ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἴσιν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν.

est autem et ΓΑ ipsi ΑΒ æqualis; utraque igitur ipsarum ΓΑ, ΓΒ ipsi ΑΒ æqualis est. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΓΑ igitur ipsi ΓΒ est æqualis; tres igitur ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ æquales inter se sunt.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ². Ἰσόπλευρον ἄρα ἴσ' ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

CONCLUSIO. Æquilaterum igitur est ΑΒΓ triangulum, et constitutum est super datam rectam terminatam ΑΒ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Sit quidem datum punctum Α, data autem recta ΒΓ; oportet igitur ad Α punctum, datæ rectæ ΒΓ æqualem rectam ponere.

Ἐπιζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνιστάτω ἐπ' αὐτῆς

Adjungatur enim ab Α puncto ad Β punctum recta ΑΒ, et constituatur super eam triangulum

centre du cercle ΑΓΕ, la droite ΒΓ est égale à la droite ΒΑ; mais on a démontré que la droite ΓΑ était égale à la droite ΑΒ; donc chacune des droites ΓΑ, ΓΒ est égale à la droite ΑΒ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΒ; donc les trois droites ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sont égales entre elles.

CONCLUSION. Donc le triangle ΑΒΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION II.

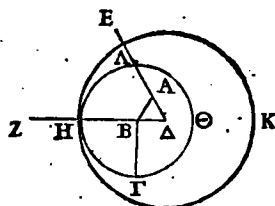
A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point Α placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.

Menons du point Α au point Β la droite ΑΒ (dem. 1); sur cette droite construisons

τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκτελέσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθείαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ Δ, καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

æquilaterum ΔΑΒ, et producantur in directum ipsis ΔΑ, ΔΒ rectæ ΑΕ, ΒΖ, et centro quidem Β, intervallo vero ΒΓ, circulus describatur ΓΗΘ; et rursus centro Δ, et intervallo ΔΗ circulus describatur ΗΚΛ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΗ, ὥν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΑ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΑ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΑ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κείνται ἡ ΑΑ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur Β punctum centrum est ΓΗΘ circuli, æqualis est ΒΓ ipsi ΒΗ. Rursus, quoniam Δ punctum centrum est ΗΚΛ circuli, æqualis est ΔΑ ipsi ΔΗ, quarum ΔΑ ipsi ΔΒ æqualis est; reliqua igitur ΑΑ reliquæ ΒΗ est æqualis. Ostensa est autem et ΒΓ ipsi ΒΗ æqualis; utraque igitur ipsarum ΑΑ, ΒΓ ipsi ΒΗ est æqualis. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΑΑ igitur ipsi ΒΓ est æqualis.

Ad datum igitur punctum Α, datæ rectæ ΒΓ æqualis recta ponitur ΑΑ. Quod oportebat facere.

le triangle équilatéral ΔΑΒ (prop. 1); menons les droites ΑΕ, ΒΖ dans la direction de ΔΑ, ΔΒ; du centre Β et de l'intervalle ΒΓ, décrivons le cercle ΓΗΘ (dém. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔΗ, décrivons le cercle ΗΚΛ.

Puisque le point Β est le centre du cercle ΓΗΘ, ΒΓ est égal à ΒΗ (déf. 15); de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΗΚΛ, la droite ΔΑ est égale à la droite ΔΗ; mais ΔΑ est égal à ΔΒ; donc le reste ΑΑ est égal au reste ΒΗ (not. 3). Mais on a démontré que ΒΓ est égal à ΒΗ; donc chacune des droites ΑΑ, ΒΓ est égale à ΒΗ. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc ΑΑ est égal à ΒΓ.

Donc, au point donné Α, on a placé une droite ΑΑ égale à la droite donnée ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

10 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Δύο δοθεισών εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφαιεῖν.

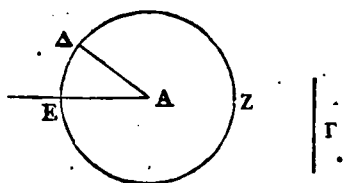
Εστωσαν αἱ δοθεισῶν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ AB, Γ, ὧν μείζων ἴστω ἡ AB· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφαιεῖν.

Κείσθω γάρ' πρὸς τῷ A σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ AD· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AD, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔEZ.

Duobus datis rectis inæqualibus, a majore minori æqualem rectam auferre.

Sint datæ duæ rectæ inæquales AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur a majore AB minori Γ æqualem rectam auferre.

Ponatur enim ad A punctum ipsi Γ rectæ æqualis AD; et centro quidem A, intervallo vero AD circulus describatur ΔEZ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔEZ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ AD· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ AD ἴσθιν ἴση. Ἐκατέρα ἄρα τῶν AE, Γ τῇ AD ἴσθιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ AE τῇ Γ ἴσθιν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισών εὐθειῶν ἀνίσων τῶν AB, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην ἀφαιρηται ἡ AE. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

Et quoniam A punctum centrum est ΔEZ circuli, æqualis est AE ipsi AD; sed et Γ ipsi AD est æqualis; utraque igitur ipsarum AE, Γ ipsi AD est æqualis; quare et AE ipsi Γ est æqualis.

Duabus igitur datis rectis inæqualibus AB, Γ, a majore AB minori Γ æqualis ablata est AE. Quod oportebat facere.

PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données, que AB soit la plus grande; il faut de la plus grande AB retrancher une droite égale à la plus petite Γ.

Au point A plaçons une droite AD égale à Γ (prop. 2), et du centre A et de l'intervalle AD, décrivons le cercle ΔEZ (dem. 3).

Puisque le point A est le centre du cercle ΔEZ, AE est égal à AD; mais Γ est égal à AD; donc chacune des droites AE, Γ, est égale à la droite AD; donc la droite AE est égale à la droite Γ.

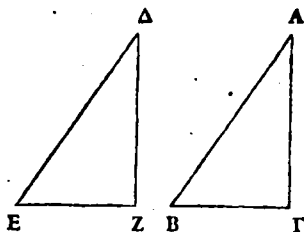
Donc les deux droites inégales AB, Γ, étant données, on a retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite Γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δὺς πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Si duo triacula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant, ab æqualibus rectis contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ , τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$, ταῖς δὺς πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ ΔE , τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ BAG γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ ἴση ἔστιν, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται,

Sint duo triacula $AB\Gamma$, ΔEZ , duo latera AB , $A\Gamma$ duobus lateribus ΔE , ΔZ æqualia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi ΔE , $A\Gamma$ vero ipsi ΔZ , et angulum BAG angulo $E\Delta Z$ æqualem; dico et basim $B\Gamma$ basi EZ æqualem esse, et $AB\Gamma$ triangulum ΔEZ triangulo æquale fore, et reliquos angulos reliquis angulis æquales fore utrumque utrique, quos æqualia

PROPOSITION IV.

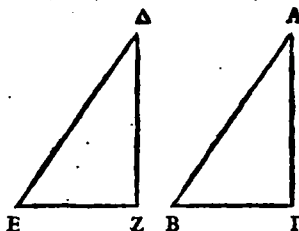
Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles $AB\Gamma$, ΔEZ ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB , $A\Gamma$ égaux aux deux côtés ΔE , ΔZ , chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔE , et le côté $A\Gamma$ au côté ΔZ , et qu'ils aient aussi l'angle BAG égal à l'angle $E\Delta Z$; je dis que la base $B\Gamma$ est égale à la base EZ , que le triangle $AB\Gamma$ sera égal au triangle ΔEZ , et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux,

12 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑκατέρα ἑκατέρῃς, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-
τείνουσιν, ἢ μὲν ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἢ δὲ ὑπὸ
ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

latera subtendunt, ABΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ
vero ipsi ΔΖΕ.



Εφαρμοζομένου γάρ τοῦ ABΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ
ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου
ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ,
ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ
ἴσιν εἶναι τὴν AB τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς
ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ
τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν
τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ
σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσιν πάλιν εἶναι τὴν
ΑΓ τῇ ΔΖ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρ-
μόκει, ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρ-
μόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος,
τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ
οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν,
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Εφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις

Congruente enim ABΓ triangulo ΔΕΖ trian-
gulo, et posito quidem Α puncto super Δ
punctum, AB vero rectā super ΔΕ; congruet
et Β punctum ipsi Ε, quia est æqualis AB
ipsi ΔΕ; congruente autem AB ipsi ΔΕ, con-
gruet et ΑΓ recta ipsi ΔΖ, quia æqualis est
ΒΑΓ angulus ipsi ΕΔΖ; quare et Γ punctum
Ζ puncto congruet, quia æqualis rursus est ΑΓ
ipsi ΔΖ. Sed quidem et Β ipsi Ε congruebat;
quare basis ΒΓ basi ΕΖ congruet; si enim
quidem Β ipsi Ε congruente, Γ vero ipsi Ζ,
ΒΓ basis ipsi ΕΖ non congruat, duæ rectæ
spatium continebunt, quod est impossibile. Con-
gruet igitur ΒΓ basis ipsi ΕΖ, et æqualis ei
erit; quare et totum ABΓ triangulum toti ΔΕΖ

seront égaux chacun à chacun; l'angle ABΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ égal à
l'angle ΔΖΕ.

Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔΕΖ, le point Α étant posé
sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔΕ, le point Β s'appliquera sur le
point Ε, parce que AB est égal à ΔΕ; mais AB étant appliqué sur ΔΕ, la droite ΑΓ
s'appliquera sur ΔΖ, parce que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΖ; donc le point Γ
s'appliquera sur le point Ζ, parce que ΑΓ est égal à ΔΖ; mais le point Β s'applique
sur le point Ε; donc la base ΒΓ s'appliquera sur la base ΕΖ; car si le point Β
s'appliquant sur le point Ε, et le point Γ sur le point Ζ, la base ΒΓ ne s'ap-
pliquait pas sur la base ΕΖ, deux droites comprendraient un espace, ce qui
est impossible (dem. 6); donc la base ΒΓ s'appliquera sur la base ΕΖ, et lui sera

ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἑφαρμόσῃ, καὶ ἴσον αὐτῷ ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἑφαρμόσῃσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἴσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ, προσκεκληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἴσονται.

triangulo congruet, et æquale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent; et æquales eis erunt, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ vero ipsi ΔΖΕ.

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant ab æqualibus lateribus contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt; et productis æqualibus rectis, sub basim anguli æquales inter se erunt.

égale; donc le triangle entier ΑΒΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔΕΖ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ΑΒΓ à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ à l'angle ΔΖΕ.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

Dans les triangles isoscèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux.

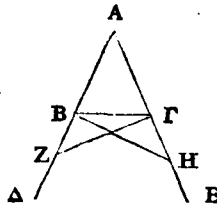
14 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ABΓ$, ἴσῃν ἔχον τὴν AB πλευρὰν τῇ $ΑΓ$ πλευρᾷ, καὶ προστε-
λέσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς AB , $ΑΓ$ εὐθεῖαι αἱ
 $ΒΔ$, $ΓΕ$. λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ
 $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΒΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΕ$.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $ΒΔ$ τυχὸν σημεῖον τὸ $Ζ$,
καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς $ΑΕ$ τῇ ἐλάσ-
σοσι τῇ $ΑΖ$ ἴση ἡ $ΑΗ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΖΓ$, $ΗΒ$
εὐθεῖαι.

Sit triangulum isosceles $ABΓ$, æquale habens
 AB latus $ΑΓ$ lateri, et producantur in direc-
tum ipsi AB , $ΑΓ$ rectæ $ΒΔ$, $ΓΕ$; dico qui-
dem $ABΓ$ angulum ipsi $ΑΓΒ$ æqualem esse, $ΓΒΔ$
vero ipsi $ΒΓΕ$.

Sumatur enim in $ΒΔ$ quodlibet punctum $Ζ$,
et auferatur à majore $ΑΕ$ minori $ΑΖ$ æqualis
ipsa $ΑΗ$, et jungantur $ΖΓ$, $ΗΒ$ rectæ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $ΑΖ$ τῇ $ΑΗ$, ἡ δὲ AB
τῇ $ΑΓ$, δύο δὲ αἱ $ΖΑ$, $ΑΓ$ δυσὶ ταῖς $ΗΑ$,
 AB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν
κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ $ΖΑΗ$. βάσις ἄρα ἡ
 $ΖΓ$ βάσει τῇ $ΗΒ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΑΖΓ$ τρίγωνον
τῷ $ΑΗΒ$ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται,
ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

Quoniam igitur est quidem $ΑΖ$ ipsi $ΑΗ$,
 AB vero ipsi $ΑΓ$, duæ igitur $ΖΑ$, $ΑΓ$ duabus
 $ΗΑ$, AB æquales sunt, utraque utrique,
et angulum communem continent $ΖΑΗ$; basis
igitur $ΖΓ$ -basi $ΗΒ$ æqualis est, et $ΑΖΓ$ triangulum
 $ΑΗΒ$ triangulo æquale erit, et reliqui anguli
reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique,
quos æqualia latera subtendunt, $ΑΓΖ$ quidem

Soit le triangle isoscèle $ABΓ$, ayant le côté AB égal au côté $ΑΓ$; menons les droites $ΒΔ$, $ΓΕ$, dans la direction de AB , $ΑΓ$ (dem. 2); je dis que l'angle $ABΓ$ est égal à l'angle $ΑΓΒ$, et que l'angle $ΓΒΔ$ est aussi égal à l'angle $ΒΓΕ$.

Car prenons dans $ΒΔ$ un point quelconque $Ζ$, et de la droite $ΑΕ$, plus grande que $ΑΖ$, retranchons une droite $ΑΗ$ égale à la plus petite $ΑΖ$, et joignons les droites $ΖΓ$, $ΗΒ$.

Puisque $ΑΖ$ est égal à $ΑΗ$, et AB à $ΑΓ$, les deux droites $ΖΑ$, $ΑΓ$ sont égales aux deux droites $ΗΑ$, AB , chacune à chacune; mais elles comprennent un angle commun $ΖΑΗ$; donc (4) la base $ΖΓ$ est égale à la base $ΗΒ$, le triangle $ΑΖΓ$ sera égal au triangle $ΑΗΒ$, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront

τείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλη τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὲ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ εδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τῷ ΑΒΓ τριγώνου· εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ipsi ABH, AZG vero ipsi AHB. Et quoniam tota AZ toti AH est æqualis, quarum AB ipsi AG est æqualis, reliqua igitur BZ reliquæ GH est æqualis. Ostensa est autem et ZG ipsi HB æqualis; duæ igitur BZ, ZG duabus GH, HB æquales sunt, utraque utrique, et angulus BZG angulo GHB æqualis, et basis eorum communis BG; et BZG igitur triangulum GHB triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est quidem ZBG ipsi HGB, BGZ vero ipsi GBH. Quoniam igitur totus ABH angulus toti AGZ angulo ostensus est æqualis, quorum GBH ipsi BGZ æqualis; reliquus igitur ABG reliquo AGB est æqualis, et est ad basim ABG trianguli; ostensus est autem et ZBG ipsi HGB æqualis, et sunt sub basim; isoscelium igitur triangulorum, etc.

égaux chacun à chacun; l'angle AGZ à l'angle ABH, et l'angle AZG à l'angle AHB. Et puisque la droite entière AZ est égale à la droite entière AH, et que AB est égal à AG, la restante BZ sera égale à la restante GH (not. 3). Mais on a démontré que ZG est égal à HB; donc les deux droites BZ, ZG sont égales aux droites GH, HB, chacune à chacune; mais l'angle BZG est égal à l'angle GHB, et la droite BG est leur base commune; donc le triangle BZG sera égal au triangle GHB, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; donc l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et l'angle BGZ égal à l'angle GBH. Mais on a démontré que l'angle entier ABH est égal à l'angle entier AGZ, et l'angle GBH est égal à l'angle BGZ; donc l'angle restant ABG est égal à l'angle restant AGB (not. 3), et ces angles sont sur la base; mais on a démontré aussi que l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et ces angles sont sous la base; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εάν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Εστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, ἴσων ἔχον τὴν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ γωνίᾳ· λίσγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ AB πλευρᾷ τῇ $A\Gamma$ ἴστιν ἴση.

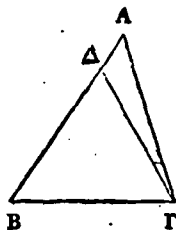
Εἰ γὰρ ἄριστός ἐστιν ἡ AB τῇ $A\Gamma$, μία ἂν αὐτῶν μείζων ἴστιν. Εστω μείζων ἡ AB , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ $A\Gamma$ ἴση ἡ ΔB , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $\Delta\Gamma$.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales inter se sunt, et æquales angulos subtendentia latera æqualia inter se erunt.

Sit triangulum $AB\Gamma$ æqualem habens $AB\Gamma$ angulum $A\Gamma B$ angulo; dico et latus AB lateri $A\Gamma$ esse æquale.

Si enim inæquale est AB ipsi $A\Gamma$, unum eorum majus est. Sit majus AB , et auferatur a majore AB minori $A\Gamma$ æqualis ΔB , et jungatur $\Delta\Gamma$.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔB τῇ $A\Gamma$, κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὲ αἱ ΔB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς $A\Gamma$, ΓB ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἴστιν ἴση· βάσεις ἄρα ἡ $\Delta\Gamma$ βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Gamma B$.

Quoniam igitur æqualis est ΔB ipsi $A\Gamma$, communis autem $B\Gamma$, duæ igitur ΔB , $B\Gamma$ duabus $A\Gamma$, ΓB æquales sunt, utraque utrique, et angulus $\Delta B\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ est æqualis; basis igitur $\Delta\Gamma$ basi AB æqualis est, et $\Delta B\Gamma$ trian-

PROPOSITION VI.

Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.

Soit le triangle $AB\Gamma$, ayant l'angle $AB\Gamma$ égal à l'angle $A\Gamma B$; je dis que le côté AB est égal au côté $A\Gamma$.

Car si le côté AB n'est pas égal au côté $A\Gamma$, l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand; retranchons du plus grand côté AB la droite ΔB égale au plus petit $A\Gamma$ (3), et joignons $\Delta\Gamma$.

Puisque ΔB est égal à $A\Gamma$, et que $B\Gamma$ est commun, les deux côtés ΔB , $B\Gamma$ sont égaux aux deux côtés $A\Gamma$, ΓB , chacun à chacun; mais l'angle $\Delta B\Gamma$ est égal à l'angle $A\Gamma B$; donc la base $\Delta\Gamma$ est égale à la base AB , et le triangle $\Delta B\Gamma$ sera égal

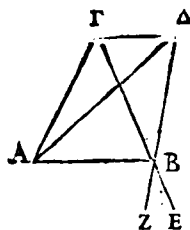
LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 17

τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἑλαστον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ AG· ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulum $\triangle AFB$ triangulo æquale erit, minus minori, quod est absurdum; non igitur inæqualis est AB ipsi AG ; ergo æqualis. Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

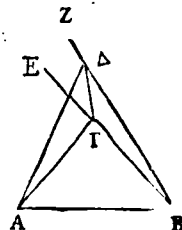
Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς AG, BF ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ AD, BE ἴσαι ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ συστατώσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ A, B· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν GA τῇ ΔA, τὸ αὐτὸ πέρα

PROPOSITIO VII.

Super eadem recta, duabus eisdem rectis aliaæ duæ rectæ æquales utraque utrique non constituentur, ad aliud et aliud punctum ad easdem partes, eosdem terminos habentes quos primæ rectæ.



Si enim possibile, super eadem recta AB duabus eisdem rectis AG, BF, aliaæ duæ rectæ AD, BE æquales utraque utrique constituentur ad aliud et aliud punctum Γ et Δ, ad easdem partes, Γ, Δ, et eosdem terminos habentes A, B; ita ut æqualis sit quidem GA ipsi ΔA, eundem terminum habens quem illa, punctum A,

au triangle AFB , le plus petit au plus grand, ce qui est absurde; donc les droites AB , AG ne sont pas inégales; donc AB est égal à AG . Donc, etc.

PROPOSITION VII.

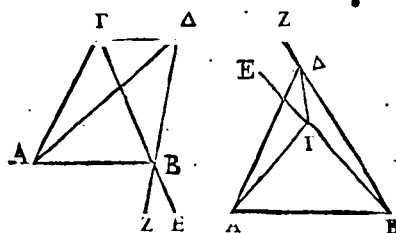
Sur une même droite, et à deux points différents placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

Car, si cela est possible, sur une même droite A, B , et à deux points différents Γ et Δ , placés du même côté, construisons les deux droites AD , BE égales à deux autres droites AG , BF , chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités A, B ; de manière que la droite GA soit égale à la droite ΔA , et ait la même extrémité A que

18 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσιν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ· (καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκτελέσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ Ε, Ζ.)

ΓΒ vero ipsi ΔΒ, eundem terminum habens quem illa, punctum Β; et jungatur ΓΔ; (et ipsæ ΒΓ, ΒΔ producantur in directam ad Ε, Ζ.)



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΕ· πολλὰ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΖ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΕ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Εδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλὰ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ; major igitur ΑΔΓ ipso ΔΓΕ; multo igitur ΓΔΖ major est ipso ΔΓΕ. Rursus quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΔΒ, æqualis est et angulus ΓΔΖ angulo ΔΓΕ. Ostensus est autem ipso et multo major, quod est impossibile. Non igitur super, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴση· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχόμενον.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basim basi æqualem; et angulum angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis contentum.

celle-ci, et que la droite ΓΒ soit égale à la droite ΔΒ, et ait la même extrémité Β que celle-ci; joignons ΓΔ, (et prolongeons ΒΓ, ΒΔ vers les points Ε, Ζ.)

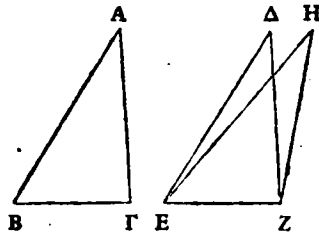
Puisque ΑΓ est égal à ΑΔ, l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΑΔΓ (5); donc l'angle ΑΔΓ est plus grand que l'angle ΔΓΕ; donc l'angle ΓΔΖ est beaucoup plus grand que l'angle ΔΓΕ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΔΒ, l'angle ΓΔΖ est égal à l'angle ΔΓΕ; mais on a démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς $ΔΕ$, $ΔΖ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$ · ἔχεται δὲ καὶ βάσιν τὴν $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἰστὶν ἴση.

Sint duo triangula $ABΓ$, $ΔEZ$, duo latera AB , $ΑΓ$ duobus lateribus $ΔΕ$, $ΔΖ$ æqualia habentia utrumque utrique, AB quidem ipsi $ΔΕ$, $ΑΓ$ vero ipsi $ΔΖ$; habeat autem et basim $ΒΓ$ basi $ΕΖ$ æqualem; dico et angulum $ΒΑΓ$ angulo $ΕΔΖ$ esse æqualem.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ἐπὶ τὸ $ΔEZ$ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν B σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον, τῆς δὲ $ΒΓ$ εὐθείας ἐπὶ τὴν $ΕΖ$, ἐφαρμόσει καὶ τὸ $Γ$ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΕΖ$ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς $ΒΓ$ ἐπὶ τὴν $ΕΖ$, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA , $ΓΑ$ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ $ΒΓ$ ἐπὶ βάσιν τὴν $ΕΖ$ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ BA , $ΑΓ$ πλευραὶ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παρά- λάζουσιν, ὥς αἱ $ΕΗ$, $ΗΖ$, συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρα, πρὸς

Congruente enim $ABΓ$ triangulo ipsi $ΔEZ$ trian- gulo, et posito quidem B puncto super E punctum, $ΒΓ$ vero rectā super $ΕΖ$, congruet et $Γ$ punctum ipsi Z , quia æqualis est $ΒΓ$ ipsi $ΕΖ$; congruente igitur $ΒΓ$ ipsi $ΕΖ$, congruent et BA , $ΓΑ$ ipsis $ΕΔ$, $ΔΖ$. Si enim basis quidem $ΒΓ$ basi $ΕΖ$ con- gruat, BA , $ΑΓ$ vero latera ipsis $ΕΔ$, $ΔΖ$ non congruant, sed situm mutant ut $ΕΗ$, $ΗΖ$, constituentur super eādē rectā duabus rectis aliæ duæ rectæ æquales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non constituuntur

Soient les deux triangles $ABΓ$, $ΔEZ$, ayant les deux côtés AB , $ΑΓ$ égaux aux deux côtés $ΔΕ$, $ΔΖ$, chacun à chacun, le côté AB égal au côté $ΔΕ$, et le côté $ΑΓ$ égal au côté $ΔΖ$; qu'ils aient de plus la base $ΒΓ$ égale à la base $ΕΖ$; je dis que l'angle $ΒΑΓ$ est égal à l'angle $ΕΔΖ$.

Car le triangle $ABΓ$ étant appliqué sur le triangle $ΔEZ$, le point B étant placé sur le point E , et la droite $ΒΓ$ sur la droite $ΕΖ$, le point $Γ$ s'appliquera sur le point Z , parce que $ΒΓ$ est égal à $ΕΖ$; la droite $ΒΓ$ s'appliquant sur la droite $ΕΖ$, les droites BA , $ΓΑ$ s'appliqueront sur les droites $ΕΔ$, $ΔΖ$; car si la base $ΒΓ$ s'appliquant sur la base $ΕΖ$, les côtés BA , $ΑΓ$ ne s'appliquaient pas sur les côtés $ΔΕ$, $ΔΖ$, et prenaient une autre position, comme $ΕΗ$, $ΗΖ$, on pourrait construire sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, deux droites

20 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄλλη καὶ ἄλλη σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δὲ οὐκ ἄρα, ἱφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἱφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εφαρμόσουσιν ἄρα ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἱφαρμόσουσι, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἰξῆς.

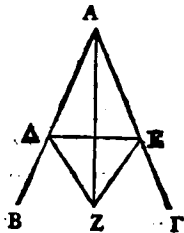
quidem. Non igitur, congruente ΒΓ basi ΕΖ basi, non congruent et ΒΑ, ΑΓ latera ipsis ΕΔ, ΔΖ. Congruent igitur; quare et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ congruet, et æqualis ei erit. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμῖν.
Εστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὲ αὐτὴν δίχα τεμῖν.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.
Sit datus angulus rectilineus ΒΑΓ; oportet igitur ipsum bifariam secare.



Εἰλήφθω γάρ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημείον τὸ Δ, καὶ ἀφηρύσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω

Sumatur enim in ΑΒ quodlibet punctum Δ, et auferatur ab ΑΓ ipsi ΑΔ æqualis ΑΕ, et jungatur ΔΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatERO ΔΕΖ, et jungatur ΑΖ;

égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres; mais elles ne peuvent pas être construites (7); donc la base ΒΓ s'appliquant sur la base ΕΖ, les côtés ΒΑ, ΑΓ ne peuvent pas ne point s'appliquer sur les côtés ΕΔ, ΔΖ; donc ils s'appliqueront les uns sur les autres; donc l'angle ΒΑΓ s'applique sur l'angle ΕΔΖ; donc il lui est égal. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit ΒΑΓ un angle rectiligne donné; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite ΑΒ un point quelconque Δ, retranchons de la droite ΑΓ une droite ΑΕ égale à la droite ΑΔ, joignons ΔΕ, sur la droite ΔΕ, construisons

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 21

ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμεται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν·.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμεται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

dico ΒΑΓ angulum bifariam secari ab ΑΖ rectâ.

Quoniam enim æqualis est ΑΔ ipsi ΑΕ, communis autem ΑΖ, duæ ΔΑ, ΑΖ duabus ΕΑ, ΑΖ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΑΖ basi ΕΖ æqualis est; angulus igitur ΔΑΖ angulo ΕΑΖ æqualis est.

Datus igitur angulus rectilineus ΒΑΓ bifariam secatur ab ΑΖ rectâ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

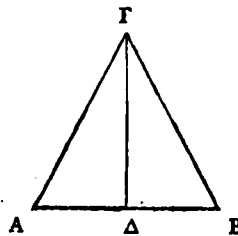
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τιμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὲ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τιμεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata ΑΒ; oportet igitur ΑΒ rectam terminatam bifariam secare.



Συνιστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα

Constituatur super ipsâ triangulum æquilaterum ΑΒΓ, et secetur ΑΓΒ angulus bifariam

le triangle équilatéral ΔΕΖ (1), et joignons ΑΖ; je dis que l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ.

Puisque ΑΔ est égal à ΑΕ, et que la droite ΑΖ est commune, les deux droites ΑΑ, ΑΖ seront égales aux deux droites ΕΑ, ΑΖ, chacune à chacune; mais la base ΑΖ est égale à la base ΕΖ; donc l'angle ΔΑΖ est égal à l'angle ΕΑΖ (8).

Donc l'angle rectiligne donné ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

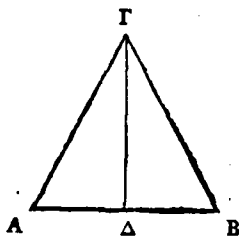
Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit donnée une droite finie ΑΒ; il faut partager la droite finie ΑΒ en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ΑΒΓ (1), et partageons

22 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΓΔ εὐθείᾳ λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα διχᾶ ab ΓΔ rectā; dico AB rectam bifariam secari
τίτμνται κατὰ τὸ Δ σημεῖον. in Δ puncto.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν·.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ διχᾶ τίτμνται κατὰ τὸ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΓΔ angulo ΒΓΔ æqualis est; basis igitur ΑΔ basi ΒΔ æqualis est.

Ergo data recta terminata ΑΒ bifariam secatur in puncto Δ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

PROPOSITIO XI.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Datæ rectæ, a puncto in eâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta ΑΒ, datum vero punctum in eâ Γ; oportet igitur a Γ puncto ipsi ΑΒ rectæ ad rectos angulos rectam lineam ducere.

l'angle AΓB en deux parties égales par la droite ΓΔ (9); je dis que la droite ΑΒ est partagée en deux parties égales au point Δ.

Car puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites ΑΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΒΔ (4).

Donc la droite donnée et finie ΑΒ est partagée en deux parties égales au point Δ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XI.

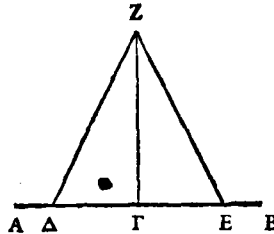
A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Soit ΑΒ une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite; il faut du point Γ mener à la droite ΑΒ une ligne droite à angles droits.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 23

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημείου τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπέζευχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Sumatur in ΑΓ quodlibet punctum Δ, et ponatur ipsi ΓΔ æqualis ΓΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatelo ΖΔΕ, et jungatur ΖΓ; dico datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos rectam lineam ductam esse ΖΓ.



Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσις τῇ ΖΕ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσιν ἑφεξῆς. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est ΓΔ ipsi ΓΕ, communis vero ΓΖ, duæ sane ΔΓ, ΓΖ duabus ΕΓ, ΓΖ æquales sunt utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΖΕ æqualis est; angulus igitur ΔΓΖ angulo ΕΓΖ æqualis est, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Ergo datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos recta linea ducta est ΓΖ. Quod oportebat facere.

Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (3), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ; je dis que la droite ΓΖ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10); donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit.

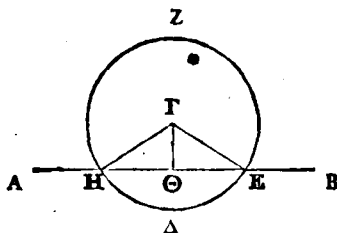
Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Επὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ . δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta infinita AB , datum vero punctum Γ , quod non est in ea; oportet igitur super datam rectam infinitam AB , a dato puncto Γ , quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ , διαστήματι δὲ τῷ $\Gamma\Delta$, κύκλος γεγράφθω ὁ EZH , καὶ τετμήσθω ἡ EH εὐθεῖα δίσχῃ κατὰ τὸ Θ , καὶ ἐπιζεύχωσθαι αἱ $ΓΗ$, $Γ\Theta$, $ΓΕ$ εὐθεῖαι. λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ $Γ\Theta$.

Sumatur enim ad alteram partem AB rectæ quodlibet punctum Δ , et centro quidem Γ , intervallo autem $\Gamma\Delta$, circulus describatur EZH , et secetur EH recta bifariam in Θ , et jungantur $ΓΗ$, $Γ\Theta$, $ΓΕ$ rectæ; dico super datam rectam infinitam AB , a dato puncto Γ , quod non est in ea, perpendicularem ductam esse $Γ\Theta$.

PROPOSITION XII.

A une droite indéfinie et donnée, et d'un point donné qui n'est pas dans cette droite, mener une ligne droite perpendiculaire.

Soit AB une droite indéfinie et donnée, et Γ un point donné qui n'est pas dans cette droite; il faut à cette droite indéfinie et donnée AB , mener du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, une ligne droite perpendiculaire.

Prenons de l'autre côté de la droite AB un point quelconque Δ , et du centre Γ et d'un intervalle $\Gamma\Delta$, décrivons le cercle EZH (dem. 3), partageons la droite EH en deux parties égales au point Θ (10), et joignons $ΓΗ$, $Γ\Theta$, $ΓΕ$; je dis qu'à la droite indéfinie et donnée AB , et du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, on a mené une perpendiculaire $Γ\Theta$.

Επει γάρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὲ αἱ ΘΗ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΟΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΟΓ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὰ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν· καὶ ἡ ἐφεσθηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Επι τὴν δευτέραν ἄρα εὐθεῖαν ἀπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἤκται ἡ ΓΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εάν· εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιεῖτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἥτοι· δύο ὀρθαὶ εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Car puisque la droite ΗΘ est égale à la droite ΘΕ, et que la droite ΘΓ est commune, les deux droites ΘΗ, ΘΓ sont égales aux deux droites ΕΘ, ΘΓ, chacune à chacune; mais la base ΓΗ est égale à la base ΓΕ (déf. 15); donc l'angle ΗΟΗ est égal à l'angle ΕΟΓ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

On a donc mené ΓΘ perpendiculaire à la droite indéfinie ΑΒ, du point donné Γ placé hors de cette droite. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Qu'une droite ΑΒ placée sur une droite ΓΔ fasse les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ; je dis que les angles ΓΒΑ, ΑΒΔ sont ou deux droits, ou égaux à deux droits.

Quoniam enim æqualis est ΗΘ ipsi ΘΕ, communis autem ΘΓ, duæ utique ΘΗ, ΘΓ duabus ΕΘ, ΘΓ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΓΗ basi ΓΕ est æqualis; angulus igitur ΓΟΗ angulo ΕΟΓ est æqualis, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistens recta perpendicularis appellatur in quam insistit.

Super datam igitur rectam infinitam ΑΒ a dato puncto Γ quod non est in ea, perpendicularis ducta est ΓΘ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII.

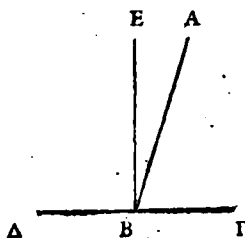
Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet.

Recta enim quædam ΑΒ in rectam ΓΔ insistens angulos faciat ΓΒΑ, ΑΒΔ; dico ΓΒΑ, ΑΒΔ angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales.

26 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ ευθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσὶ⁴. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ,

Si igitur quidem æqualis est ΓΒΑ ipsi ΑΒΔ, duo recti sunt. Si vero non, ducatur a B puncto ΓΔ rectæ ad rectos ipsa ΒΕ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt. Et quoniam ΓΒΕ duobus ΓΒΑ, ΑΒΕ æqualis est, communis addatur ΕΒΔ; ergo ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ æquales sunt. Rursus, quoniam ΔΒΑ duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ æqualis est, communis addatur ΑΒΓ; ergo



κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσαι· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΒΑ, ΑΒΓ tribus ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΒΕ, ΕΒΔ tribus eisdem æquales; quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; ergo et ΓΒΕ, ΕΒΔ ipsis ΔΒΑ, ΑΒΓ æquales sunt; sed ΓΒΕ, ΕΒΔ duo recti sunt; ergo et ΔΒΑ, ΑΒΓ duobus rectis æquales sunt. Si igitur, etc.

Car si l'angle ΓΒΑ est égal à l'angle ΑΒΔ, ces deux angles sont droits (déf. 10). Si non, du point Β conduisons ΒΕ à angles droits à ΓΔ (11); les deux angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront droits; et puisque l'angle ΓΒΕ est égal aux deux angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, si l'on ajoute l'angle commun ΕΒΔ, les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ seront égaux aux trois angles ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. De plus, puisque l'angle ΔΒΑ est égal aux deux angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, si l'on ajoute l'angle commun ΑΒΓ, les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ seront égaux aux trois angles ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. Mais on a démontré que les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ leur sont égaux; et les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles; donc les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont égaux aux angles ΔΒΑ, ΑΒΓ; mais les angles ΓΒΕ, ΕΒΔ sont deux angles droits; donc les angles ΔΒΑ, ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

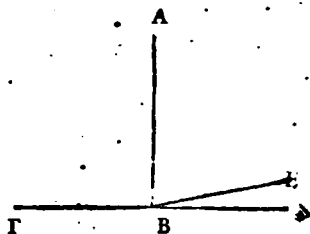
Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B , δύο εὐθεῖαι αἱ BF , BD , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ABF , ABD δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔσθ' ἡ FB ἢ BD .

Εἰ γὰρ μὴ ἔσθ' ἡ BF ἐπ' εὐθείας ἢ BD , ἔστω τῇ FB ἐπ' εὐθείας ἢ BE .

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in eā, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciant, in directum erunt sibi ipsis rectæ.

Ad aliquam enim rectam AB , et ad punctum in eā B ; duæ rectæ BF , BD , non ad easdem partes positæ, deinceps angulos ABF , ABD duobus rectis æquales faciant; dico in directum esse ipsi FB ipsam BD .

Si enim non est ipsi BF in directum BD , sit ipsi FB in directum BE .



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ AB ἐπ' εὐθείαν τὴν FBE ἐφίστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ABF , ABE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ABF , ABD

Quoniam igitur recta AB super rectam FBE insistit, ABF , ABE anguli duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ABF , ABD duobus

PROPOSITION XIV.

Si à une droite, et à un point de cette droite, deux droites, non placées du même côté font les angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites seront dans la même direction.

Qu'à une droite AB , et à un point B de cette droite, les deux droites BF , BD , non placées du même côté, fassent les angles de suite ABF , ABD égaux à deux droits; je dis que BD est dans la direction de FB .

Car si BD n'est point dans la direction de BF , que BE soit dans la direction de FB (dem. 2.).

Puisque la droite AB est placée sur la droite FBE , les angles ABF , ABE sont égaux à deux droits (13); mais les angles ABF , ABD sont égaux à deux droits;

28 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

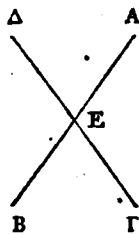
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΙ.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατα κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

rectis æquales; ergo $\Gamma B A$, $\Lambda B E$ ipsis $\Gamma B A$, $\Lambda B \Delta$ æquales sunt. Communis auferatur $\Gamma B A$; reliquus igitur $\Lambda B E$ reliquo $\Lambda B \Delta$ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur in directum est $B E$ ipsi $B \Gamma$. Similiter autem ostendemus neque esse aliam quamdam præter $B \Delta$; in directum igitur est ΓB ipsi $B \Delta$. Si igitur, etc.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese secant, ad verticem angulos æquales inter se facient.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Duæ enim rectæ AB , $\Gamma \Delta$ sese secant in E puncto; dico æqualem esse quidem $\Lambda E \Gamma$ angulum ipsi $\Delta E B$, $\Gamma E B$ vero ipsi $\Lambda E \Delta$.

donc les angles $\Gamma B A$, $\Lambda B E$ sont égaux aux angles $\Gamma B A$, $\Lambda B \Delta$. Retranchons l'angle commun $\Gamma B A$, l'angle restant $\Lambda B E$ sera égal à l'angle restant $\Lambda B \Delta$, le plus petit au plus grand; ce qui est impossible. $B E$ n'est donc pas dans la direction de $B \Gamma$. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre excepté $B \Delta$; donc ΓB est dans la direction de $B \Delta$. Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.

Que les droites AB , $\Gamma \Delta$ se coupent mutuellement au point E ; je dis que l'angle $\Lambda E \Gamma$ est égal à l'angle $\Delta E B$, et l'angle $\Gamma E B$ égal à l'angle $\Lambda E \Delta$.

Επει γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφίστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφίστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. Ομοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσὶν. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς¹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσκεκληθείσης¹, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν² μείζων ἐστίν.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσκεκλησθῶ αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

Quoniam enim recta AE in rectam ΓΔ insistit angulos faciens ΓΕΑ, ΑΕΔ; ipsi ΓΕΑ, ΑΕΔ anguli duobus rectis æquales sunt. Rursus, quoniam recta ΔΕ in rectam ΑΒ insistit, angulos faciens ΑΕΔ, ΔΕΒ; ipsi ΑΕΔ, ΔΕΒ anguli duobus rectis æquales sunt. Ostensi sunt autem et ΓΕΑ, ΑΕΔ duobus rectis æquales; ergo ΓΕΑ, ΑΕΔ ipsis ΑΕΔ, ΔΕΒ æquales sunt. Communis auferatur ΑΕΔ, reliquus igitur ΓΕΑ reliquo ΒΕΔ æqualis est. Similiter autem ostendemus et ΓΕΒ, ΔΕΑ esse æquales. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum major est.

Sit triangulum ΑΒΓ, et producaturs ipsius unum latus ΒΓ ad Δ; dico exteriorem angulum

Car puisque la droite ΑΕ est placée sur la droite ΓΔ, faisant les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ, les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits. De plus, puisque la droite ΔΕ est placée sur la droite ΑΒ, faisant les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ, les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ sont égaux à deux droits. Mais on a démontré que les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits; donc les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux aux angles ΑΕΔ, ΔΕΒ. Repranchons l'angle commun ΑΕΔ; l'angle restant ΓΕΑ sera égal à l'angle restant ΒΕΔ. On démontrera semblablement que les angles ΓΕΒ, ΔΕΑ sont égaux. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ΑΒΓ, prolongeons le côté ΒΓ vers Δ; je dis que l'angle

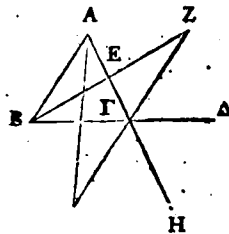
30 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίων, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ διχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

ΑΓΔ majorem esse utroque interiorum et oppositorum ΓΒΑ, ΒΑΓ angulorum.

Secetur ΑΓ bifariam in Ε, et juncta ΒΕ producat in directum ad Ζ, et ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, et jungatur ΖΓ, et producat ΑΓ ad Η.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυοὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσις τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ.

Quoniam igitur æqualis est quædam ΑΕ ipsi ΕΓ, ΒΕ vero ipsi ΕΖ, duæ ΑΕ, ΕΒ duabus ΓΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΕΒ angulo ΖΕΓ æqualis est, ad verticem enim est; basis igitur ΑΒ basi ΖΓ æqualis est, et ΑΒΕ triangulum ΖΕΓ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΑΕ ipsi ΕΓΖ. Major autem est ΕΓΔ ipso ΕΓΖ; major est

extérieur ΑΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Partageons la droite ΑΓ en deux parties égales en Ε (10); et ayant joint la droite ΒΕ, prolongeons-la vers Ζ, faisons ΕΖ égal à ΒΕ (3), joignons la droite ΖΓ, et prolongeons ΑΓ vers Η.

Puisque ΑΕ est égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΖ, les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΓΕ, ΕΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΖΕΓ (15); puisqu'ils sont au sommet; donc la base ΑΒ est égale à la base ΖΓ (4); le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΖΕΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΓΖ (not. 9); mais l'angle ΕΓΔ est plus grand que l'angle ΕΓΖ; donc l'angle ΑΓΔ est plus grand

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ομοίως δὲ, τῆς ΒΓ. τετμημένης δίχα, διχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτίστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ΑΓΔ ipso ΒΑΕ. Similiter autem, ΒΓ sectā bifariam, ostendetur et ΒΓΗ, hoc est ΑΓΔ, major ē ipso ΑΒΓ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

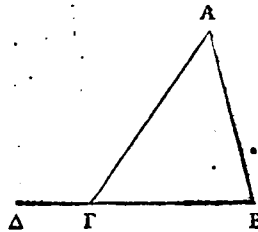
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Sit triangulus ΑΒΓ· dico ΑΒΓ trianguli duos angulos duobus rectis minores esse, omnifariam sumptos.



Εκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονες

Producatur enim ΒΓ ad Δ.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ exterior est angulus ΑΓΔ, major est interiore et opposito ΑΒΓ. Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ ipsis ΑΒΓ, ΒΓΑ majores sunt. Sed ΑΓΔ, ΑΓΒ duobus

que l'angle ΒΑΕ. Si on partage le côté ΒΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle ΒΓΗ, c'est-à-dire ΑΓΔ, est plus grand que l'angle ΑΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; je dis que deux angles du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons ΒΓ vers Δ (dem. 2).

Puisque l'angle ΑΓΔ du triangle ΑΒΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ (16). Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ, les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront

32 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι
είσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες
είσιν. Ομοίως δὴ δειξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,
ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ
ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

rectis æquales sunt; ergo ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus
rectis minores sunt. Similiter autem osten-
demus et ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis minores
esse, et adhuc ipsos ΓΑΒ, ΑΒΓ. Omnis
igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

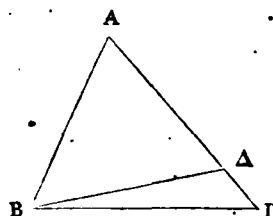
Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μεί-
ζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Εστω γάρ τριγώνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν
ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

PROPOSITION XVIII.

Omnis trianguli majus latus majorem an-
gulum subtendit.

Sit enim triangulum ΑΒΓ, majus habens ΑΓ
latus ipso ΑΒ; dico et angulum ΑΒΓ majorem
esse ipso ΒΓΑ.



Επεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω
τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία
ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπὸ-
ναντίας, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ

Quoniam enim major est ΑΓ ipsâ ΑΒ, po-
natur ipsi ΑΒ æqualis ΑΔ, et jungatur ΒΔ.

Et quoniam trianguli ΒΓΔ exterior est an-
gulus ΑΔΒ, major est interiore et opposito ΑΓΒ.
Æqualis autem ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ, quia et latus ΑΒ

plus grands que les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux
droits (13); donc les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ sont moindres que deux droits. Nous démon-
trerons semblablement que les angles ΒΑΓ, ΑΓΒ, et les angles ΓΑΒ, ΑΒΓ sont moindres
que deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant le côté ΑΓ plus grand que le côté ΑΒ; je dis que
l'angle ΑΒΓ est plus grand que l'angle ΒΓΑ.

Puisque ΑΓ est plus grand que ΑΒ, faisons ΑΔ égal à ΑΒ (3), et joignons ΒΔ.

Puisque ΑΔΒ est un angle extérieur du triangle ΒΓΔ, cet angle est plus grand que
l'angle intérieur et opposé ΔΓΒ (16); mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5), parce

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 33

ὕπὸ $AB\Delta$, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AB τῇ AD ἴστί·
 ἴση· μίζων ἄρα καὶ ἡ ὕπὸ $AB\Delta$ τῆς ὕπὸ AGB ·
 πολλῶν ἄρα ἡ ὕπὸ $AB\Gamma$ μίζων ἐστὶ τῆς ὕπὸ AGB .
 Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi AD est æquale; major igitur et $AB\Delta$ ipso
 AGB ; multo igitur $AB\Gamma$ major est ipso AGB .
 Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

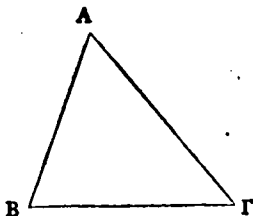
Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μίζονα γωνίαν ἡ
 μίζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Εστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, μίζονα ἔχον τὴν ὑπὸ
 $AB\Gamma$ γωνίαν τῆς ὑπὸ BGA . λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ
 ἡ AG πλευρᾶς τῆς AB μίζων ἐστίν.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli majorem angulum majus
 latus subtendit.

Sit triangulum $AB\Gamma$, majorem habens $AB\Gamma$
 angulum ipso BGA ; dico et latus AG latere
 AB majus esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ AB , ἢ
 ἐλάσσων· ἴση μινούν οὐκ ἐστὶν ἡ AG τῇ AB · ἴση
 γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ AGB ·
 οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ AB .
 Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ AG τῇ AB · ἐλάσσων
 γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῆς ὑπὸ AGB .

Si enim non; vel æqualis est AG ipsi AB , vel
 minor; æqualis quidem non est AG ipsi AB ,
 æqualis enim esset et angulus $AB\Gamma$ ipsi AGB .
 Non est autem; non igitur æqualis est AG ipsi
 AB . Neque tamen minor est AG ipsa AB ; minor
 enim esset et angulus $AB\Gamma$ ipso AGB ; non est

que le côté AB est égal au côté AD ; donc l'angle $AB\Delta$ est plus grand que l'angle AGB ;
 donc l'angle $AB\Gamma$ est beaucoup plus grand que l'angle AGB . Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle.

Soit le triangle $AB\Gamma$, ayant l'angle $AB\Gamma$ plus grand que l'angle BGA ; je dis que
 le côté AG est plus grand que le côté AB .

Car si cela n'est point, AG est égal à AB , ou plus petit. Mais AG n'est pas
 égal à AB , car alors l'angle $AB\Gamma$ serait égal à l'angle AGB (5); mais il ne l'est pas;
 donc AG n'est pas égal à AB . Le côté AG n'est pas plus petit que le côté AB , car
 alors l'angle $AB\Gamma$ serait plus petit que l'angle AGB (18); mais il ne l'est pas; donc le

34 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οὐκ ἔστι δὲ οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.
Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶ· μείζων ἄρα ἐστὶν
ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

autem ; non igitur minor est ΑΓ ipsā ΑΒ. Os-
tensum est autem neque æqualem esse ; major
igitur est ΑΓ ipsā ΑΒ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

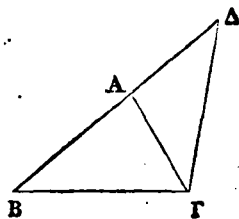
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς
μείζονες εἰσὶ, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ
τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες
εἰσὶ, πάντῃ μεταλαμβάνονται, αἱ μὲν ΒΑ,
ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ,
ΓΑ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XX.

Omnis triangulr duo latera reliquo majora
sunt, omnifariam sumta.

Sit enim tringulum ΑΒΓ ; dico ΑΒΓ trian-
guli duo latera reliquo majora esse , omni-
fariam sumpta ; ipsa quidem ΒΑ , ΑΓ ipso ΒΓ ,
ipsa vero ΑΒ , ΒΓ ipso ΑΓ , et ipsa ΒΓ , ΓΑ
ipso ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ
κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἡ μείζων ἄρα ἡ

Producatur enim ΒΑ ad Δ punctum, et po-
natur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΔΑ ipsi ΑΓ,
æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ, major

côté ΑΓ n'est pas plus petit que le côté ΑΒ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas
égal ; donc ΑΓ est plus grand que ΑΒ. Donc , etc.

PROPOSITION XX.

Deux côtés d'un triangle quelconque , de quelque manière qu'ils soient pris ,
sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ΑΒΓ ; je dis que deux côtés du triangle ΑΒΓ , de quelque
manière qu'ils soient pris , sont plus grands que le côté restant ; les côtés ΒΑ , ΑΓ
plus grands que ΒΓ ; les côtés ΑΒ , ΒΓ plus grands que ΑΓ , et les côtés ΒΓ , ΓΑ plus
grands que ΑΒ.

Prolongeons ΒΑ vers Δ , faisons ΑΔ égal à ΓΑ , et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΑΓ , l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5) ; donc l'angle ΒΓΔ

ὕπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἰση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονες εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εάν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνιστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

utique est $\angle BGD$ ipso $\angle ADG$; et quoniam triangulum est $\triangle GVB$, majorem habens $\angle BGD$ angulum ipso $\angle BGD$, majorem autem angulum majus latus subtendit; AB igitur ipsa BG est major; æqualis autem DA ipsi AG ; majores igitur BA , AG ipsa BG . Similiter autem ostendemus et ipsas quidem AB , BG ipsa GA majores esse; ipsas vero BG , GA ipsa AB . Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XXI.

Si trianguli super uno laterum a terminis duæ rectæ intus constituentur, constructæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABG super uno laterum BG , a terminis B , G , duæ rectæ intus constituentur BD , DG ; dico BD , DG latera reliquis trianguli duobus lateribus BA , AG minora quidem esse, majorem vero angulum continere, ipsum $\angle BGD$ ipso $\angle BAG$.

est plus grand que l'angle $\angle ADG$ (not. 9); donc, puisque dans le triangle $\triangle GVB$, l'angle $\angle BGD$ est plus grand que l'angle $\angle BGD$, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté AB est plus grand que le côté BG ; mais DA est égal à AG ; donc les côtés BA , AG sont plus grands que BG . Nous démontrerons semblablement que les côtés AB , BG sont plus grands que GA , et les côtés BG , GA plus grands que AB . Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si des extrémités d'un des côtés d'un triangle, on construit intérieurement deux droites, ces deux droites seront plus petites que les deux côtés restans du triangle, mais elles comprendront un plus grand angle.

Des extrémités B , G du côté BG du triangle ABG , construisons intérieurement les deux droites BD , DG ; je dis que les droites BD , DG sont plus petites que les deux côtés restans BA , AG , et qu'elles comprennent un angle $\angle BGD$ plus grand que l'angle $\angle BAG$.

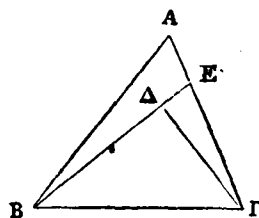
36 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῶν ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.

Producatur enim ΒΔ ad Ε.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ΑΒΕ trianguli duo latera ΑΒ, ΑΕ ipso ΒΕ majora sunt. Communis addatur ΕΓ; ergo ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΕ, ΕΓ majores sunt. Rursus, quoniam ΓΕΔ trianguli duo latera ΓΕ, ΕΔ ipso ΓΔ majora sunt; communis addatur ΔΒ; ergo ΓΕ, ΕΒ ipsis ΓΔ, ΔΒ majores sunt. Sed ipsis ΒΕ, ΕΓ majores ostensæ sunt ΒΑ, ΑΓ; multo igitur ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ majores sunt.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων εἰδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Rursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito major est, ΓΔΕ trianguli exterior angulus ΒΔΓ major est ipso ΓΕΔ. Propter eadem utique et ΑΒΕ trianguli exterior angulus ΓΕΒ major est ipso ΒΑΓ. Sed ipso ΓΕΒ major ostensus est ΒΔΓ; multo igitur ΒΔΓ major est ipso ΒΑΓ. Si igitur, etc.

Prolongeons ΒΔ vers Ε.

Puisque deux côtés d'un triangle quelconque sont plus grands que le côté restant (20), les deux côtés ΑΒ, ΑΕ du triangle ΑΒΕ sont plus grands que le côté ΒΕ; donc si nous ajoutons la droite commune ΒΓ, les droites ΒΑ, ΑΓ seront plus grandes que ΒΕ, ΕΓ. De plus, puisque les deux côtés ΓΕ, ΕΔ du triangle ΓΕΔ sont plus grands que ΓΔ, si nous ajoutons la droite commune ΔΒ, les droites ΓΕ, ΕΒ seront plus grandes que ΓΔ, ΔΒ; mais on a démontré que les droites ΒΑ, ΑΓ sont plus grandes que ΒΕ, ΕΓ; donc les droites ΒΑ, ΑΓ sont beaucoup plus grandes que ΒΔ, ΔΓ.

De plus, puisqu'un angle extérieur d'un triangle quelconque est plus grand qu'un des angles intérieurs et opposés (16), l'angle ΒΔΓ, qui est un angle extérieur du triangle ΔΕΓ, est plus grand que l'angle ΓΕΔ. Par la même raison l'angle ΓΕΒ, qui est un angle extérieur du triangle ΑΒΕ, est plus grand que l'angle ΒΑΓ; mais il a été démontré que l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΓΕΒ; donc l'angle ΒΔΓ est beaucoup plus grand que l'angle ΒΑΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

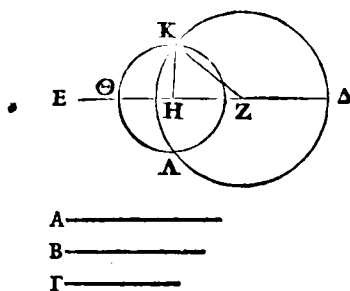
PROPOSITIO XXII.

Εκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντα μεταλαμβάνοντας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου, τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντα μεταλαμβάνοντας.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντα μεταλαμβάνόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliquâ majores esse, omnifariam sumptas, quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumpta.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ, quarum duæ reliquâ majores sint, omnifariam sumptæ, ipsæ quidem Α, Β ipsâ Γ, ipsæ vero Α, Γ ipsâ Β, et denique ipsæ Β, Γ ipsâ Α; oportet igitur ex rectis æqualibus ipsis Α, Β, Γ triangulum constituere.



Εκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερατμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἀπείρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση

Exponatur aliqua recta ΔΕ, terminata quidem ad Δ, infinita vero ad Ε; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΖ, ipsi vero Β æqualis ΖΗ, et ipsi Γ

PROPOSITION XXII.

Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle: il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grande que la troisième; parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

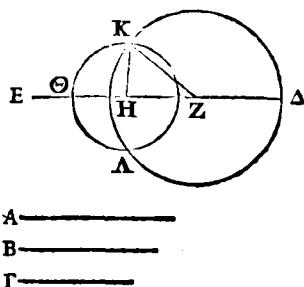
Soient données les trois droites Α, Β, Γ, dont deux, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième; les droites Α, Β plus grandes que Γ; les droites Α, Γ plus grandes que Β, et enfin les droites Β, Γ plus grandes que Α; il faut, avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ, construire un triangle.

Soit la droite ΔΕ, terminée en Δ, et indéfinie en Ε; faisons la droite ΔΖ égale à la droite Α (prop. 3), la droite ΖΗ égale à la droite Β, et la droite ΗΘ égale à

38 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ $HΘ$ · καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ τῷ $ZΔ$, κύκλος γεγράφθω ὁ $ΔΚΛ$ · καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ τῷ $HΘ$, κύκλος γεγράφθω ὁ $ΚΛΘ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KZ , KH · λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς A , B , $Γ$, τρίγωνον συνίσταται τὸ KZH .

α qualis $HΘ$; et centro quidem Z , intervallo vero $ZΔ$, circulus describatur $ΔΚΛ$; et rursus, centro quidem H , intervallo vero $HΘ$, circulus describatur $ΚΛΘ$, et jungantur KZ , KH ; dico ex tribus rectis, α qualibus ipsis A , B , $Γ$, triangulum constitutum esse KZH .



Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΔΚΛ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ZΔ$ τῇ $ZΚ$ · ἀλλὰ ἡ $ZΔ$ τῇ A ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ A ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΚΛΘ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $HΘ$ τῇ HK · ἀλλὰ ἡ $HΘ$ τῇ $Γ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KH ἄρα τῇ $Γ$ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ZH τῇ B ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ KZ , ZH , HK , τρισὶ ταῖς A , B , $Γ$ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν KZ , ZH , HK , αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς A , B , $Γ$, τρίγωνον συνίσταται τὸ KZH . Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur Z punctum centrum est $ΔΚΛ$ circuli, α qualis est $ZΔ$ ipsi $ZΚ$; sed $ZΔ$ ipsi A est α qualis; et KZ igitur ipsi A est α qualis. Rursus, quoniam H punctum centrum est $ΚΛΘ$ circuli, α qualis est $HΘ$ ipsi HK ; sed $HΘ$ ipsi $Γ$ est α qualis; et KH igitur ipsi $Γ$ est α qualis. Est autem et ZH ipsi B α qualis; tres igitur rectæ KZ , ZH , HK tribus A , B , $Γ$ α quales sunt.

Ex tribus igitur rectis KZ , ZH , HK , quæ sunt α quales datis rectis A , B , $Γ$, triangulum constitutum est KZH . Quod oportebat facere.

la droite $Γ$; du centre Z et de l'intervalle $ZΔ$ décrivons le cercle $ΔΚΛ$ (dem. 3); et de plus du centre H et de l'intervalle $HΘ$ décrivons le cercle $ΚΛΘ$, et joignons KZ , KH ; je dis que le triangle KZH est construit avec trois droites égales aux droites A , B , $Γ$.

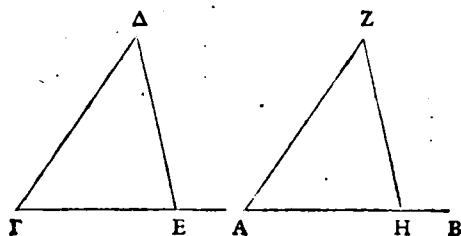
Car puisque le point Z est le centre du cercle $ΔΚΛ$, $ZΔ$ est égal à $ZΚ$ (déf. 15); mais $ZΔ$ est égal à A ; donc KZ égal à A . De plus, puisque le point H est le centre du cercle $ΚΛΘ$, $HΘ$ est égal à HK ; mais $HΘ$ est égal à $Γ$; donc KH est égal à $Γ$. Mais ZH est égal à B ; donc les trois droites KZ , ZH , HK sont égales aux trois droites A , B , $Γ$.

Donc le triangle KZH a été construit avec trois droites KZ , ZH , HK , qui sont égales aux trois droites données A , B , $Γ$. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσῃ γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ · δεῖ δὲ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ ἴσῃ γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν $ΓΔ$, $ΓΕ$ τυχόντα σημεία τὰ Δ , E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔE · καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς $ΓΔ$, ΔE , $ΓΕ$, τρίγωνον συνιστάτω τὸ AZH , ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν $ΓΔ$ τῇ AZ , τὴν δὲ $ΓΕ$ τῇ AH , καὶ ἔτι τὴν ΔE τῇ ZH .

Ad datam rectam, et ad punctum in eâ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit quidem data recta AB , in eâ vero punctum A , et datus angulus rectilincus $\Delta ΓΕ$; oportet igitur ad datam rectam AB , et ad punctum in eâ A , dato angulo rectilineo $\Delta ΓΕ$ æqualem angulum rectilineum constituere.

Sumantur in utrâque ipsarum $ΓΔ$, $ΓΕ$ quælibet puncta Δ , E , et jungatur ΔE ; et ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus $ΓΔ$, ΔE , $ΓΕ$, triangulum constituatur AZH , ita ut æqualis sit $ΓΔ$ quidem ipsi AZ , ipsa vero $ΓΕ$ ipsi AH , et denique ΔE ipsi ZH .

PROPOSITION XXIII.

A une droite donnée, et à un point de cette droite, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soient donnés la droite AB , et un point A dans cette droite; que $\Delta ΓΕ$ soit l'angle rectiligne donné; il faut à la droite donnée AB et au point A de cette droite, construire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné $\Delta ΓΕ$.

Soient pris, dans l'une et l'autre des droites $ΓΔ$, $ΓΕ$, deux points quelconques Δ , E , joignons ΔE , et avec trois droites égales aux droites $ΓΔ$, ΔE , $ΓΕ$, construisons le triangle AZH (22), de manière que $ΓΔ$ soit égal à AZ , $ΓΕ$ égal à AH , et ΔE égal à ZH .

40 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ οὖν ἑξήκοντα αἱ ΔΓ, ΓΕ δυοὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΔΕ ἴση τῇ ΖΗ ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἴσθιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῶν γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξῃ.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζον ἴστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζον ἴσθιν.

Puisque les deux droites ΔΓ, ΓΕ sont égales aux deux droites ΖΑ, ΑΗ, chacune à chacune, et que la base ΔΕ est égale à la base ΖΗ, l'angle ΔΓΕ sera égal à l'angle ΖΑΗ (8).

Donc à la droite ΑΒ, et au point Α de cette droite, on a construit l'angle rectiligne ΖΑΗ égal à l'angle rectiligne ΔΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXIV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; que l'angle ΒΑΓ soit plus grand que l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est plus grande que la base ΕΖ.

Quoniam igitur duæ ΔΓ, ΓΕ duabus ΖΑ, ΑΗ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΕ basi ΖΗ æqualis, angulus utique ΔΓΕ angulo ΖΑΗ est æqualis.

Ad datam igitur rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ, æqualis angulus rectilineus constitutus est ΖΑΗ. Quod oportebat facere.

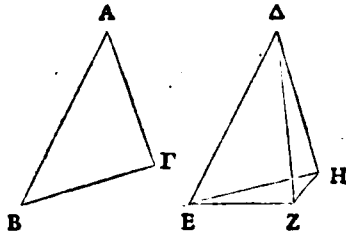
PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo majorem habeant, qui ab æqualibus lateribus continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ major sit; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ majorem esse.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Quoniam enim major est ΒΑΓ angulus ΕΔΖ angulo, constituatur ad ΔE rectam, et ad punctum in eâ Δ, ipsi ΒΑΓ angulo æqualis ΕΔΗ; et ponatur alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΖ æqualis ΔΗ, et jungantur ΕΗ, ΖΗ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἴσθιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἴσθι· βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἴσθιν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἴσθιν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἴσθι καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῶ ἄρα μείζων ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ ipsa vero ipsi ΔΗ, duæ utique ΒΑ, ΑΓ duabus ΕΔ, ΔΗ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΗ æqualis est; basis igitur ΒΓ basi ΕΗ est æqualis. Rursus, quoniam æqualis est ΔΖ ipsi ΔΗ, æqualis est et ΔΖΗ angulus ipsi ΔΗΖ; major igitur ΔΖΗ ipso ΕΗΖ; multo igitur major est ΕΖΗ ipso ΕΗΖ. Et quoniam triangulum est ΕΖΗ, majorem habens ΕΖΗ angulum ipso ΕΗΖ; majorem autem angulum majus latus subtendit; majus igitur et latus ΕΗ ipso ΕΖ. Æquale autem ΕΗ ipsi ΒΓ; majus igitur, et ΒΓ ipso ΕΖ. Si igitur duo, etc.

Car puisque l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ, construisons sur la droite ΔΕ, et au point Δ de cette droite, un angle ΕΔΗ égal à l'angle ΒΑΓ (23); faisons la droite ΔΗ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΖ (3), et joignons ΕΗ, ΖΗ.

Puisque ΑΒ est égal à ΔΕ, et ΑΓ à ΔΗ, les deux droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΕΔ, ΔΗ, chacune à chacune; mais l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΗ; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΗ (4). De plus, puisque ΔΖ est égal à ΔΗ, l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΗΖ (5); donc l'angle ΔΖΗ est plus grand que l'angle ΕΗΖ; donc l'angle ΕΖΗ est beaucoup plus grand que l'angle ΕΗΖ; et puisque ΕΖΗ est un triangle, ayant l'angle ΕΖΗ plus grand que l'angle ΕΗΖ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΕΗ est plus grand que le côté ΕΖ; mais ΕΗ est égal à ΒΓ; donc le côté ΒΓ est plus grand que le côté ΕΖ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

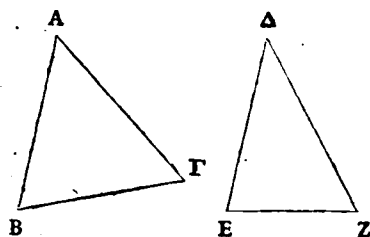
PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς ὁσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἢ χη³· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει, τὴν ὑπὸ ταῖς ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς ὁσὶ πλευραῖς ταῖς $ΔΕ$, $ΔΖ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$. Βάσις δὲ ἡ $ΒΓ$ βάσεως τῆς $ΕΖ$ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$ μείζων ἔστί.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, basim autem basi majorem habeant; et angulum angulo majorem habebunt, qui ab æqualibus rectis continetur.

Sint duo triangula $ABΓ$, $ΔΕΖ$, duo latera AB , $ΑΓ$ duobus lateribus $ΔΕ$, $ΔΖ$ æqualia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi $ΔΕ$, $ΑΓ$ vero ipsi $ΔΖ$, basis autem $ΒΓ$ basi $ΕΖ$ major sit; dico et angulum $ΒΑΓ$ angulo $ΕΔΖ$ majorem esse.



Εἰ γὰρ μὴ, ἢτοι ἴση ἔστί· αὐτῇ, ἢ ἐλάττω· ἴση μιν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$, ἴση γάρ· ἂν ἦν¹ καὶ ἡ βάσις ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ · οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἴση ἔστι γωνία² ἡ ὑπὸ

Si enim non, vel æqualis est ei, vel minor; æqualis autem non est $ΒΑΓ$ ipsi $ΕΔΖ$, æqualis enim esset et basis $ΒΓ$ basi $ΕΖ$; non est autem; non igitur æqualis est angulus $ΒΑΓ$ ipsi $ΕΔΖ$.

PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient deux triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$, ayant les deux côtés AB , $ΑΓ$ égaux aux deux côtés $ΔΕ$, $ΔΖ$, chacun à chacun, le côté AB égal au côté $ΔΕ$, et le côté $ΑΓ$ égal au côté $ΔΖ$; que la base $ΒΓ$ soit plus grande que la base $ΕΖ$; je dis que l'angle $ΒΑΓ$ est plus grand que l'angle $ΕΔΖ$.

Car si cela n'est point, il lui est égal, ou il est plus petit; mais l'angle $ΒΑΓ$ n'est pas égal à l'angle $ΕΔΖ$, car alors la base $ΒΓ$ seroit égale à la base $ΕΖ$ (4); mais elle ne l'est point; donc l'angle $ΒΑΓ$ n'est pas égal à l'angle $ΕΔΖ$. Mais l'angle $ΒΑΓ$

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 43

ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Οὐδὲ μὲν ἐλάττω ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ ⁷, ἐλάττω γὰρ ἂν ἦν ⁸ καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσιως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἐλάττω ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ⁹ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εὐὲν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὐὲν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς ¹ δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἐκατέραν ἐκάτερα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἥτοι ² τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἐκατέραν ἐκάτερα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Εστω ³ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκάτερα; τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἔχεται δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

Neque tamen minor est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ, minor enim esset et basis ΒΓ basi ΕΖ; non est autem; non igitur minor est ΒΑΓ angulus ipso ΕΔΖ. Ostensum est autem neque æqualem esse; major igitur est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, vel quod est ad æquales angulos, vel quod subtendit unum æqualium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus ΔΕΖ, ΕΖΔ æquales habentia, utrumque utrique, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΒΓΑ vero ipsi ΕΖΔ, habeant autem et unum latus uni lateri æquale; primum, quod est ad æquales angulos, ipsum ΒΓ ipsi ΕΖ; dico et reliqua latera

n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ, car alors la base ΒΓ serait plus petite que la base ΕΖ (24); mais elle ne l'est point; donc l'angle ΒΑΓ n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVI.

Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΔΕΖ, ΕΖΔ, chacun à chacun, l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΕΖΔ; que ces deux triangles aient aussi un côté égal à un côté, et d'abord celui qui est adjacent aux angles égaux, le côté ΒΓ égal au

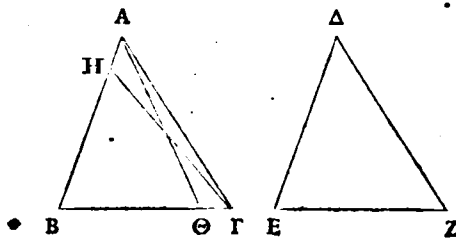
44 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνίαις τὴν $BΓ$ τῇ $EΖ$. λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ $BAΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΔΕ$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν*. Εστω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω τῇ $ΔΕ$ ἴση ἡ BH , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $HΓ$.

reliquis lateribus æqualia habitura esse, utrumque utrique, AB quidem ipsi $ΔΕ$, $ΑΓ$ vero ipsi $ΔΖ$, et reliquum angulum reliquo angulo, $BAΓ$ ipsi $ΕΔΖ$.

Si enim inæqualis est AB ipsi $ΔΕ$, una earum major est. Sit major AB , et ponatur ipsi $ΔΕ$ æqualis BH , et jungatur $HΓ$.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BH τῇ $ΔΕ$, ἡ δὲ $BΓ$ τῇ $EΖ$, δύο δὲ αἱ BH , $BΓ$ δυοὶ ταῖς $ΔΕ$, $EΖ$ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $HΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἴση ἐστὶ· βάσεις ἄρα ἡ $HΓ$ βάσει τῇ $ΔΖ$ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $HΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ*, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται*, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $HΓΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $ΔΖΕ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΑ$ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΓΗ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΒΓΑ$

Quoniam igitur æqualis est BH quidem ipsi $ΔΕ$, $BΓ$ vero ipsi $EΖ$, duæ utique BH , $BΓ$ duabus $ΔΕ$, $EΖ$ æquales sunt, utraque utrique, et angulus $HΒΓ$ angulo $ΔΕΖ$ æqualis est; basis igitur $HΓ$ basi $ΔΖ$ æqualis est, et $HΒΓ$ triangulum $ΔΕΖ$ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur $HΓΒ$ angulus ipsi $ΔΖΕ$. Sed $ΔΖΕ$ ipsi $ΒΓΑ$ ponitur æqualis; igitur et $ΒΓΗ$ ipsi $ΒΓΑ$ æqualis est,

côté $EΖ$; je dis qu'ils auront les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun, le côté AB égal au côté $ΔΕ$, le côté $ΑΓ$ égal au côté $ΔΖ$, et l'angle restant égal à l'angle restant, l'angle $BAΓ$ égal à l'angle $ΕΔΖ$.

Car si le côté AB n'est pas égal au côté $ΔΕ$, l'un d'eux est plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand; faisons BH égal à $ΔΕ$ (3), et joignons $HΓ$.

Puisque BH est égal à $ΔΕ$, et $BΓ$ égal à $EΖ$, les deux côtés BH , $BΓ$ sont égaux aux deux côtés $ΔΕ$, $EΖ$, chacun à chacun; mais l'angle $HΒΓ$ est égal à l'angle $ΔΕΖ$; donc la base $HΓ$ est égale à la base $ΔΖ$ (4); le triangle $HΒΓ$ est égal au triangle $ΔΕΖ$, et les angles restants, soutendus par les côtés égaux, seront égaux aux angles restants; donc l'angle $HΓΒ$ est égal à l'angle $ΔΖΕ$; mais l'angle $ΔΖΕ$ est supposé

ἴση ἔστιν, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE · ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ BF τῇ EZ ἴση, δύο δὲ αἱ AB , BF δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABF γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἔστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ AF βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAF τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὲ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὥς ἡ AB τῇ ΔE · λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν AF τῇ ΔZ , ἡ δὲ BF τῇ EZ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAF τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ BF τῇ EZ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστὼ μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ BF τῇς EZ , καὶ κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ BO , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔO .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BO τῇ EZ , ἡ δὲ AB τῇ ΔE ; δύο δὲ αἱ AB , BO δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ AO βάσει τῇ ΔZ ἴση

minor majori, quod impossibile. Non igitur inæqualis est AB ipsi ΔE ; æqualis igitur est. Est autem et BF ipsi EZ æqualis, duæ utique AB , BF duabus ΔE , EZ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ABF angulo ΔEZ est æqualis; basis igitur AF basi ΔZ æqualis est, et reliquus angulus BAF reliquo angulo $E\Delta Z$ æqualis est.

Sed et rursus, sint ipsa æquales angulos latera subtendentia æqualia, ut AB ipsi ΔE ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia futura esse, AF quidem ipsi ΔZ , BF vero ipsi EZ , et adhuc reliquum angulum BAF reliquo angulo $E\Delta Z$ æqualem esse.

Si enim inæqualis est BF ipsi EZ , una earum major est. Sit major, si possibile est, BF ipsa EZ , et ponatur ipsi EZ æqualis BO , et jungatur ΔO .

Et quoniam æqualis est BO quidem ipsi EZ , AB vero ipsi ΔE , duæ utique AB , BO duabus ΔE , EZ æquales sunt, utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur AO basi ΔZ

égal à l'angle BFA ; donc l'angle BFO est égal à l'angle BFA , le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les côtés AB , ΔE ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais BF est égal à EZ ; donc les deux côtés AB , BF sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais l'angle ABF est égal à l'angle ΔEZ ; donc la base AF est égale à la base ΔZ (4), et l'angle restant BAF est égal à l'angle restant $E\Delta Z$.

Mais de plus, que les côtés opposés aux angles égaux soient égaux, le côté AB égal au côté ΔE ; je dis que les côtés restants seront égaux aux côtés restants, le côté AF égal au côté ΔZ , et le côté BF égal au côté EZ , et que l'angle restant BAF est égal à l'angle restant $E\Delta Z$.

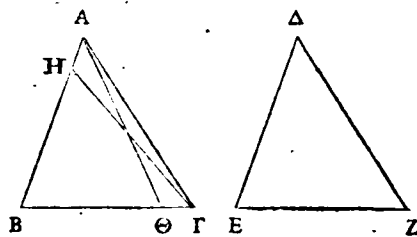
Car si le côté BF n'est pas égal au côté EZ , l'un d'eux est plus grand que l'autre; que BF soit plus grand que EZ , s'il est possible; faisons BO égal à EZ (3), et joignons ΔO .

Puisque BO est égal à EZ , et AB égal à ΔE , les deux côtés AB , BO sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base AO est égale à la base ΔZ (4); le triangle ABO est égal au

46 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί; καὶ τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἴστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται¹¹, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $E\Delta Z$ τῇ ὑπὸ $B\Gamma A$ ¹² ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ ἄρα τῇ ὑπὸ $B\Gamma A$ ἐστὶν ἴση¹³. τριγώνου δὴ τοῦ $A\Theta\Gamma$ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $B\Gamma A$, ὅπερ

α qualis est, et triangulum $AB\Theta$ triangulo ΔEZ α quale est, et reliqui anguli reliquis angulis α quales erunt, quos α qualia latera subtendunt; α qualis igitur est $B\Theta A$ angulus ipsi $E\Delta Z$. Sed $E\Delta Z$ ipsi $B\Gamma A$ est α qualis; et $B\Theta A$ igitur ipsi $B\Gamma A$ est α qualis; trianguli igitur $A\Theta\Gamma$ exterior angulus $B\Theta A$ α qualis est interiori et opposito $B\Gamma A$, quod est impossibile. Non igitur in α qualis est



ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο δὴ αἱ AB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ $A\Gamma$ ἴσται τῇ ΔZ ἴση ἴστί, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ¹⁴ γωνία ἡ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση¹⁵. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

$B\Gamma$ ipsi EZ ; α qualis igitur. Est autem et AB ipsi ΔE α qualis; duæ igitur AB , $B\Gamma$ duabus ΔE EZ α quales sunt, utraque utrique, et angulos α quales continent; basis igitur $A\Gamma$ basi ΔZ α qualis est, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ α quale, et reliquus angulus $B\Gamma A$ reliquo angulo $E\Delta Z$ α qualis. Si igitur duo, etc.

triangle ΔEZ , et les angles restants, opposés aux côtés égaux, seront égaux aux angles restants, chacun à chacun; donc l'angle $B\Theta A$ est égal à l'angle $E\Delta Z$; mais l'angle $E\Delta Z$ est égal à l'angle $B\Gamma A$; donc l'angle $B\Theta A$ est égal à l'angle $B\Gamma A$; donc l'angle extérieur $B\Theta A$ du triangle $A\Theta\Gamma$ est égal à l'angle intérieur et opposé $B\Gamma A$; ce qui est impossible (16); donc les côtés $B\Gamma$, EZ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais le côté AB est égal au côté ΔE ; donc les deux côtés AB , $B\Gamma$ sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base $A\Gamma$ est égale à la base ΔZ (4); le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle ΔEZ , et l'angle restant $B\Gamma A$ égal à l'angle restant $E\Delta Z$. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

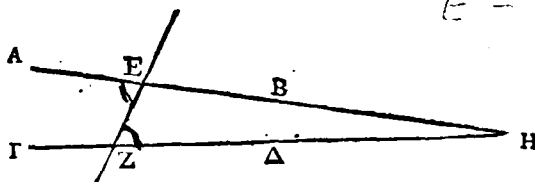
PROPOSITIO XXVII.

Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , ΓA εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ , τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ AEZ , EZA ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓA .

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos æquales inter se faciat, parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas AB , ΓA recta incidens EZ , alternos angulos AEZ , EZA æquales inter se faciat; dico parallelam esse AB ipsi ΓA .



$$\hat{E} = \hat{Z}$$

*in demonstratione cum
d' dicitur parallelæ
est
propositio 16*

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB , ΓA συμπίπτουσι, ἥτοι ἐπὶ τὰ $B\Delta$ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ $A\Gamma$. Ἐκβεβλήσωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ $B\Delta$ μέρη κατὰ τὸ H .

Τριγώνου δὲ τοῦ EHZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB , ΓA ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσι ἐπὶ τὰ $B\Delta$

Si enim non, productæ AB , ΓA , convenient vel ad $B\Delta$ partes, vel ad $A\Gamma$; producantur, et convenient ad $B\Delta$ partes in H .

Trianguli igitur EHZ exterior angulus AEZ æqualis est interiori et opposito EZH , quod est impossibile; non igitur AB , ΓA productæ convenient ad $B\Delta$ partes. Similiter autem ostend-

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB , ΓA fasse les angles alternes AEZ , EZA égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓA .

Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB , ΓA étant prolongées se rencontreront, ou du côté $B\Delta$, ou du côté $A\Gamma$. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté $B\Delta$, au point H .

L'angle extérieur AEZ du triangle EHZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH , ce qui est impossible (16); donc les droites AB , ΓA prolongées du côté $B\Delta$ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se ren-

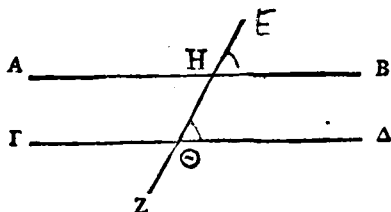
48 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μέρη. Ομοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εάν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἰζῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΔ



ἴσην ποιεῖτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

detur neque ad ΑΓ; quæ autem in neutras partes conveniunt, parallelæ sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales faciat; parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidens ΕΖ exteriorem angulum ΕΗΒ interiori et opposito, angulo ΗΘΔ æqualem faciat, vel inte-

rioris et ad easdem partes ipsos ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.

contreront pas non plus du côté ΑΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite ΕΖ tombant sur les droites ΑΒ, ΓΔ fasse l'angle extérieur ΕΗΒ égal à l'angle intérieur ΗΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 49

Επει γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπιπτουσα τὰς τι ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτεύω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τὰς τι·

Quoniam enim æqualis est ΕΗΒ ipsi ΗΘΔ, sed ΕΗΒ ipsi ΑΗΘ est æqualis, et ΑΗΘ igitur ipsi ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Rursus, quoniam anguli ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales sunt, sunt autem anguli ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Communis auferatur ΒΗΘ; reliquus igitur ΑΗΘ reliquo ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc..

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos æquales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad eandem partes æqualem, et interiores et ad eandem partes duobus rectis æquales.

In parallelas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidat ΕΖ; dico eam alternos angulos ΑΗΘ, ΗΘΔ æquales

Car puisque l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ, et que l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΑΗΘ (15), l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΗΘ, ΗΘΔ. Retranchons l'angle commun ΒΗΘ; l'angle restant ΑΗΘ sera égal à l'angle restant ΗΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

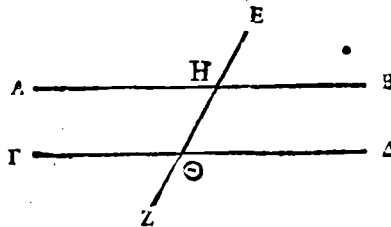
Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite ΕΖ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes ΑΗΘ, ΗΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur ΕΗΒ, égal à

50 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἰναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

facere, et exteriorem angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes HΘΔ æqualem, et interiores ad easdem partes ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἦ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἔστί. Εστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἡ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκείσθαι· οὐκ ἄρα ἀνίσος ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα.

Si enim inæqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΔ, unus eorum major est; sit major ΑΗΘ ipso ΗΘΔ. Communis addatur ΒΗΘ; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ majores sunt. Sed ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales sunt; et igitur ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ in infinitum concurrunt. Ipsæ igitur ΑΒ, ΓΔ productæ in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallele ponuntur; non igitur inæqualis est ΑΗΘ ipsi ΗΘΔ; æqualis igitur.

L'angle ΗΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.

Car si l'angle ΑΗΘ n'est pas égal à l'angle ΗΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle ΑΗΘ soit plus grand que ΗΘΔ. Ajoutons l'angle commun ΒΗΘ, les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront plus grands que les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ; mais les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont égaux à deux droits (13); donc les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites ΑΒ, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles ΑΗΘ,

part. V

Si une droite, tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les droites se rencontrent à l'infini. Si les angles sont plus petits que deux droits -

Αλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἴστί· ἴση·
καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴστί· ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ
ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν.
Αλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ·
καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι
εἰσίν. Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed $\angle AHB$ ipsi $\angle EHB$ est æqualis; et $\angle EHB$ igitur
ipsi $\angle H\theta\Delta$ est æqualis.

Communis addatur $\angle BHO$; ergo $\angle EHB$, $\angle BHO$
ipsis $\angle BHO$, $\angle H\theta\Delta$ æquales sunt. Sed $\angle EHB$, $\angle BHO$
duobus rectis æquales sunt; et $\angle BHO$, $\angle H\theta\Delta$
igitur duobus rectis æquales sunt. Ergo in
parallelas, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις
εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἑκατέρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῇ EZ παράλ-
ληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ ἐστὶ παράλ-
ληλος.

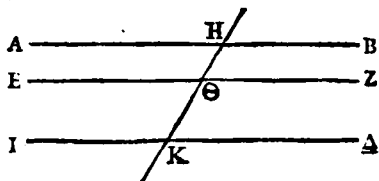
Ἐμπίπτειτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ HK .

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ parallelæ sunt, et inter se
sunt parallelæ.

Sit utraque ipsarum AB , $\Gamma\Delta$ ipsi EZ paral-
lela; dico et AB ipsi $\Gamma\Delta$ esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta HK .



Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς AB ,
 EZ εὐθεῖα ἐμπίπτει ἡ HK , ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ
 AHO τῇ ὑπὸ $H\theta Z$. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς

Et quoniam in parallelas rectas AB , EZ recta
incidit HK , æqualis est $\angle AHO$ ipsi $\angle H\theta Z$. Rursus
quoniam in parallelas rectas EZ , $\Gamma\Delta$ recta in-

$H\theta\Delta$ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle AHO est égal à
l'angle EHB (15); donc l'angle EHB est égal à l'angle $H\theta\Delta$.

Ajoutons l'angle commun BHO , les angles EHB , BHO seront égaux aux angles
 BHO , $H\theta\Delta$; mais les angles EHB , BHO sont égaux à deux droits (15); donc les
angles BHO , $H\theta\Delta$ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites AB , $\Gamma\Delta$ soit parallèle à EZ ; je dis que AB est parallèle à $\Gamma\Delta$.

Que la droite HK tombe sur les droites AB , $\Gamma\Delta$.

52 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

αλλήλους² εὐθείας τὰς EZ, ΓΔ εὐθεῖα ἰμ-
πέπτωκεν ἡ HK, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΘZ τῇ ὑπὸ
HKΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AHK τῇ ὑπὸ HΘZ
ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ AHK ἄρα τῇ ὑπὸ HKΔ ἐστὶν ἴση· καὶ
εἴσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ³, καὶ τὰ ἰζῆς.

cidit HK, æqualis est HΘZ ipsi HKΔ. Ostensus
est autem et AHK ipsi HΘZ æqualis; AHK igitur
ipsi HKΔ est æqualis; et sunt alterni. Paral-
lela igitur est AB ipsi ΓΔ. Quæ igitur eidem
rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

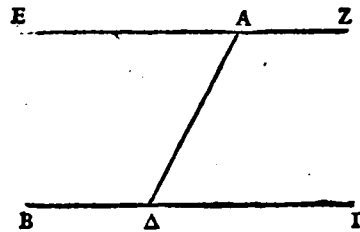
PROPOSITIO XXXI.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου¹, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ
παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ
δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ BΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ A σημείου,
τῇ BΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν
ἀγαγεῖν.

Per datum punctum, datæ rectæ parallelam
rectam lineam ducere.

Sit quidem datum punctum A, data vero
recta BΓ; oportet igitur, per A punctum, ipsi
BΓ rectæ parallelam rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς BΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ,
καὶ ἰπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνστάτω πρὸς τῇ ΑΔ

Sumatur in BΓ quodlibet punctum Δ, et jun-
gatur ΑΔ; et constituatur ad ΑΔ rectam, et ad

Puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles AB, EZ, l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘZ (27). De plus, puisque la droite HK tombe sur les droites parallèles EZ, ΓΔ, l'angle HΘZ est égal à l'angle HKΔ (28). Mais on a démontré que l'angle AHK est égal à l'angle HΘZ; donc l'angle AHK est égal à l'angle HKΔ; mais ces angles sont alternes; donc AB est parallèle à ΓΔ (29). Donc, etc.

PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.
Soit A le point donné, et BΓ la droite donnée; il faut par le point A conduire une ligne droite parallèle à la droite BΓ.

Prenons sur la droite BΓ un point quelconque Δ, et joignons ΑΔ; construisons

εὐθεία, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκτελέσθω ἐκ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ᾗεται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

punctum in eâ A, angulo ΑΔΓ æqualis angulus ΔΑΕ, et producat in directum ipsi ΕΑ recta ΑΖ.

Et quoniam in duas rectas ΒΓ, ΕΖ recta incidens ΑΔ alternos angulos ΕΑΔ, ΑΔΓ æquales inter se facit, parallela est ΕΖ ipsi ΒΓ.

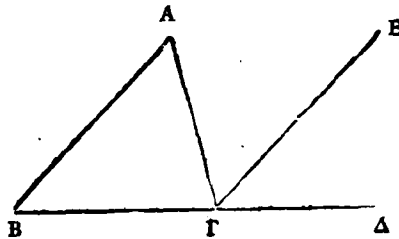
Per datum igitur punctum Α, datæ rectæ ΒΓ parallela recta linea ducta est ΕΑΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΞΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκτελεσίσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis æqualis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt.



Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκτελέσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

Sit triangulus ΑΒΓ, et producat ipsius unum latus ΒΓ in Δ; dico exteriorem angulum

sur la droite ΔΑ, et au point Α de cette droite, l'angle ΔΑΕ égal à l'angle ΑΔΓ (23), et prolongeons la droite ΑΖ dans la direction de ΕΑ.

Puisque la droite ΑΔ, tombant sur les deux droites ΒΓ, ΕΖ, fait les angles alternes ΕΑΔ, ΑΔΓ égaux entr'eux, la droite ΕΖ est parallèle à droite ΒΓ (27).

Donc la ligne droite ΕΑΖ a été menée, par le point donné Α, parallèle à la droite donnée ΒΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle exté-

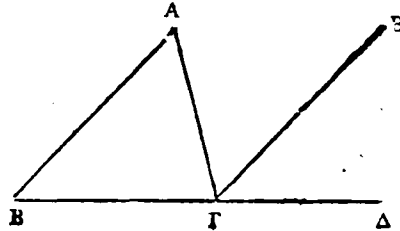
54 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς δυοῖ
ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ·
καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ
ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ
παράλληλος ἡ ΓΕ.

ΑΓΔ æqualem esse duobus interioribus et op-
positis ΓΑΒ, ΑΒΓ, et interiores trianguli tres
angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duabus rectis æquales
esse.

Duca'tur enim, per Γ punctum, ipsi ΑΒ rectæ
parallela ΓΕ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ
εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι
αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν,
ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς
αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία
ἢ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ
ὑπὸ ΑΒΓ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ
ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ
δυοῖ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ,
ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ
ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in
ipsas incidit ΑΓ, alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ
æquales inter se sunt. Rursus, quoniam paral-
lela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit recta ΒΔ,
exterior angulus ΕΓΔ æqualis est interiori et
opposito ΑΒΓ. Ostensus autem est et ΑΓΕ ipsi
ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΔ exterior angulus
æqualis est duobus interioribus et oppositis ΒΑΓ,
ΑΒΓ.

Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ
tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ æquales sunt. Sed ΑΓΔ,

rieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois
angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.

Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (51).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles
alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est
parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle exté-
rieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que
l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux
angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἰζῆς.

ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ igitur duobus rectis æquales sunt. Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

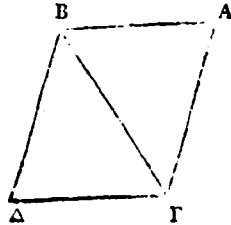
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπὶ τὸν ἴσον τε καὶ παραλλήλον αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Quæ et æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.

Sint et æquales et parallelæ ΑΒ, ΓΔ, et conjungant ipsas ad easdem partes rectæ ΑΓ, ΒΔ; dico et ΑΓ, ΒΔ et æquales et parallelas esse.



Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωσιν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ

Jungatur enim ΒΓ.

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΑΒ

angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (15); donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

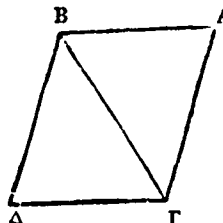
Joignons ΒΓ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que

56 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὲ αἱ AB , $B\Gamma$, δυοὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση ἐστίν. Βάσις ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσις τῇ $ΒΔ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $B\Gamma\Delta$ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκάτερα ἑκάτερα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

ipsi $\Gamma\Delta$, communis autem $B\Gamma$; duæ igitur AB , $B\Gamma$ duabus $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ æquales sunt, et angulus $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma\Delta$ æqualis. Basis igitur $ΑΓ$ basi $ΒΔ$ est æqualis, et $AB\Gamma$ triangulum $B\Gamma\Delta$ triangulo æquale est; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis est igitur $ΑΓΒ$ an-



τείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς $ΑΓ$, $ΒΔ$ εὐθεῖα ἑμπίπτουσα ἡ $B\Gamma$ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$. Εδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulus ipsi $ΓΒΔ$. Et quoniam in duas rectas $ΑΓ$, $ΒΔ$ recta incidens $B\Gamma$, alternos angulos $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ æquales inter se facit, parallela est $ΑΓ$ ipsi $ΒΔ$. Ostensa est autem ipsi et æqualis; quæ igitur æquales, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli æqualia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

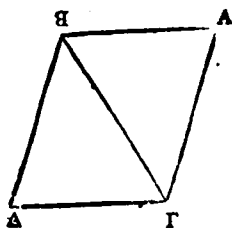
la droite $B\Gamma$ est commune, les deux droites AB , $B\Gamma$ sont égales aux deux droites $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$; mais l'angle $AB\Gamma$ est égal à l'angle $B\Gamma\Delta$; donc la base $ΑΓ$ est égale à la base $ΒΔ$, le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $B\Gamma\Delta$, et les angles restans, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle $ΑΓΒ$ est égal à l'angle $ΓΒΔ$. Mais la droite $B\Gamma$ tombant sur les deux droites $ΑΓ$, $ΒΔ$ fait les angles alternes $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ égaux entr'eux; donc la droite $ΑΓ$ est parallèle à la droite $ΒΔ$ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Εστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει.

Sit parallelogrammum spatium ΑΓΔΒ, diameter autem ipsius ΒΓ; dico ΑΓΔΒ parallelogrammi opposita et latera et angulos æqualia inter se esse, et ΒΓ diametrum illud bifariam secare.



Επεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μὲν πλεωρᾶ ἴσων, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit recta ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ, æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΓ ipsi ΒΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se sunt. Duo igitur triangula sunt ΑΒΓ, ΒΓΔ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, commune utrique ΒΓ; et reliqua igitur reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo; æquale igitur est ΑΒ quidem latus ipsi ΓΔ,

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle

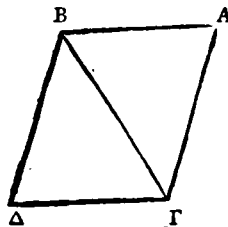
58 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἄρα ἡ μὲν AB πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν³ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση⁴. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΑΓ vero ipsi ΒΔ, et adhuc æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΒΔΓ. Et quoniam æqualis est quidem ΑΒΓ angulus ipsi ΒΓΔ, et ΓΒΔ ipsi ΑΓΒ; totus igitur ΑΒΔ toti ΑΓΔ est æqualis; ostensus est autem et ΒΑΓ ipsi ΓΔΒ æqualis;

Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli æqualia inter se sunt.



Λέγω δὲ⁵ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὲ αἱ AB, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶ· καὶ βάσεις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ⁶, καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim æqualis est AB ipsi ΓΔ, communis autem ΒΓ, duæ igitur AB, ΒΓ duabus ΔΓ, ΓΒ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΒΓ angulo ΒΓΔ æqualis est; et basis igitur ΑΓ ipsi ΒΔ æqualis est; et igitur triangulum ΑΒΓ triangulo ΒΔΓ æquale est;

Ergo ΒΓ diameter bifariam secat ΑΓΔΒ parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

BAG égal à l'angle BΔΓ. Puisque l'angle ABΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΒΔ égal à l'angle ΑΓΒ, l'angle total ΑΒΔ est égal à l'angle total ΑΓΔ. Mais on a démontré que l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΒ;

Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque AB est égal à ΓΔ, et que la droite ΒΓ est commune, les deux droites AB, ΒΓ sont égales aux droites ΔΓ, ΓΒ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΓ est égale à la base ΒΔ (4), et le triangle ΑΒΓ égal au triangle ΒΔΓ.

Donc la diagonale ΒΓ partage le parallélogramme ΑΓΔΒ en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

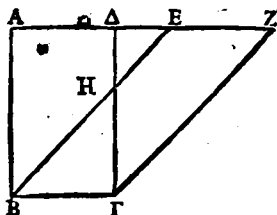
PROPOSITIO XXXV.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ὁλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα¹ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω ὅτι. ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ².

Parallelogramma, super eâdem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ super eâdem basi ΒΓ constituta et in eisdem parallelis ΑΖ, ΒΓ; dico æquale esse ΑΒΓΔ ipsi ΕΒΓΖ.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ³. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση⁴· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση⁵. καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλη τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὲ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὲ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνία τῇ

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, æqualis est ΑΔ ipsi ΒΓ. Propter eadem, et ΕΖ ipsi ΒΓ est æqualis. Quare et ΑΔ ipsi ΕΖ est æqualis; et communis ΔΕ; tota igitur ΑΕ toti ΔΖ est æqualis. Est autem et ΑΒ ipsi ΔΓ æqualis; duæ igitur ΕΑ, ΑΒ duabus ΖΔ, ΔΓ æquales sunt utraque utrique, et angulus ΖΔΓ angulo ΕΑΒ

PROPOSITION XXXV.

Les parallélogrammes, contruits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ soient construits sur la même base ΒΓ, et entre les mêmes parallèles ΑΖ, ΒΓ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΒΓΖ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, ΑΔ est égal à ΒΓ (34); par la même raison, ΕΖ est égale à ΒΓ; donc ΑΔ est égal à ΕΖ; mais la droite ΔΕ est commune; donc la droite totale ΑΕ est égale à la droite totale ΔΖ (not. 2); mais ΑΒ est égal à ΔΓ (34); donc les deux droites ΕΑ, ΑΒ sont égales aux deux droites ΖΔ, ΔΓ, chacun à chacune; mais l'angle extérieur ΖΔΓ est égal à l'angle intérieur

60 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὕπὸ ΕΑΒ ἔστιν ἴση, ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὶς· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τρίγωνῳ ἴσον ἔσται 7. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ· τραπέζιῳ ἔστιν ἴσον 8. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ἔλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἕλω τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ἔντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστί τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπιζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

est æqualis, exterior interiori; basis igitur **EB** basi **ZΓ** æqualis est, et **EAB** triangulum ipsi **ΔΓΖ** triangulo æquale erit. Commune auferatur **ΔΗΕ**; reliquum igitur **ΑΒΗΔ** trapezium reliquo **ΕΗΓΖ** trapezio est æquale. Commune addatur **ΗΒΓ** triangulum; totum igitur **ΑΒΓΔ** parallelogrammum toti **ΕΒΓΖ** parallelogrammo æquale est. Ergo parallelogramma, etc.

PROPOSITION XXXVI.

Parallelogramma, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** super æqualibus basibus constituta **ΒΓ**, **ΖΗ**, et in eisdem parallelis **ΑΘ**, **ΒΗ**; dico æquale esse **ΑΒΓΔ** parallelogrammum ipsi **ΕΖΗΘ**.

Jungantur enim **ΒΕ**, **ΓΘ**.

EAB (29); donc la base **EB** est égale à la base **ZΓ** (4); donc le triangle **EAB** sera égal au triangle **ΔΓΖ**. Retranchons la partie commune **ΔΗΕ**; le trapèze restant **ΑΒΗΔ** sera égal au trapèze restant **ΕΗΓΖ** (not. 3); ajoutons le triangle commun **ΗΒΓ**, le parallélogramme total **ΑΒΓΔ** sera égal au parallélogramme total **ΕΒΓΖ**. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

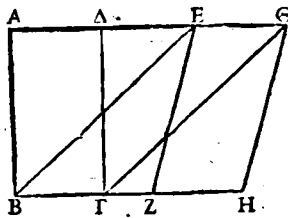
Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** soient construits sur des bases égales **ΒΓ**, **ΖΗ**, et entre les mêmes parallèles **ΑΘ**, **ΒΗ**; je dis que le parallélogramme **ΑΒΓΔ** est égal au parallélogramme **ΕΖΗΘ**.

Joignons **ΒΕ**, **ΓΘ**.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἴσιν· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἴσιν. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτάς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε εἴσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα

Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΖΗ, et ΖΗ ipsi ΕΘ est æqualis; et ΒΓ igitur ipsi ΕΘ est æqualis. Sunt autem et parallelæ, et jungunt ipsas ipsæ ΒΕ, ΓΘ, quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales et parallelæ sunt; et ΕΒ, ΓΘ igitur et æquales sunt et parallelæ. Parallelogrammum



ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἴσιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἴσιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσιν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἴζης.

igitur est ΕΒΓΘ, et est æquale ipsi ΑΒΓΔ; basim enim eandem habet ΒΓ quam ipsum, et in eisdem parallelis est ΒΓ, ΑΘ. Propter eadem, et ΕΖΗΘ eidem ΕΒΓΘ est æquale; quare et ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ est æquale. Ergo parallelogramma, etc.

Puisque ΒΓ est égal à ΖΗ, et ΖΗ égal à ΕΘ, la droite ΒΓ est égale à ΕΘ; mais les droites ΒΕ, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (35); donc les droites ΕΒ, ΓΘ sont égales et parallèles; donc ΕΒΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ΑΒΓΔ (35); car il a la même base ΒΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme ΕΖΗΘ est égal au parallélogramme ΕΒΓΘ; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ. Donc, etc.

62 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

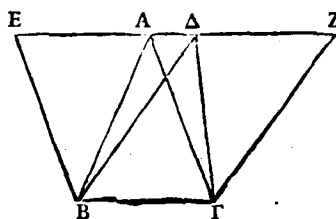
PROPOSITIO XXXVII.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AD , $B\Gamma$. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ.

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ super eadem basi constituta $B\Gamma$ et in eisdem parallelis AD , $B\Gamma$; dico æquale esse $AB\Gamma$ triangulum $\Delta B\Gamma$ triangulo.



Ἐκτελέσθω ἡ AD ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ E , Z , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ $ΓA$ παράλληλος ᾗχθω ἡ BE , διὰ δὲ τοῦ $Γ$ τῇ BA παράλληλος ᾗχθω ἡ $ΓZ$.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$ καὶ εἰσιν ἴσα ³· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσὶ ⁴ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, EZ καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $EB\Gamma A$ παρ-

Producatur AD ex utraque parte in E , Z , et per B quidem ipsi $ΓA$ parallela ducatur BE , per $Γ$ vero ipsi BA parallela ducatur $ΓZ$.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$; et æqualia sunt, nam super eadem basi sunt $B\Gamma$ et in eisdem parallelis $B\Gamma$, EZ ; et est ipsius $EB\Gamma A$ quidem parallelogrammi

PROPOSITION XXXVII.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ soient sur la même base $B\Gamma$ et entre les mêmes parallèles AD , $B\Gamma$; je dis que le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $\Delta B\Gamma$.

Prolongeons de part et d'autre la droite AD aux points E , Z , et par le point B conduisons BE parallèle à $ΓA$ (31), et par le point $Γ$ conduisons $ΓZ$ parallèle à BA .

Les figures $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$ sont des parallélogrammes, et ces parallélogrammes sont égaux (35); car ils sont sur la même base $B\Gamma$, et entre les mêmes parallèles; mais le triangle $AB\Gamma$ est la moitié du parallélogramme $EB\Gamma A$; car

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 63

αλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ $\triangle B\Gamma Z$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $\triangle B\Gamma$ τρίγωνον, ἡ γὰρ $\Delta\Gamma$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\triangle B\Gamma$ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἰζῆς.

dimidium $\triangle B\Gamma$ triangulum, nam AB diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius $\triangle B\Gamma Z$ parallelogrammi dimidium $\triangle B\Gamma$ triangulum, nam $\Delta\Gamma$ diameter ipsum bifariam secat; æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est $\triangle AB\Gamma$ triangulum ipsi $\triangle B\Gamma$ triangulo. Ergo triacula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

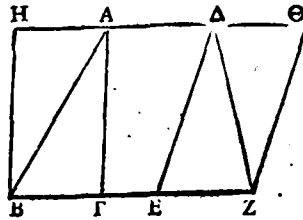
Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν¹.

Εστώ τρίγωνα τὰ² $\triangle AB\Gamma$, $\triangle EZ$ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα³ τῶν $B\Gamma$, EZ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ , AD . λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\triangle EZ$ τριγώνῳ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Triacula, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triacula $\triangle AB\Gamma$, $\triangle EZ$ super æqualibus basibus constituta $B\Gamma$, EZ et in eisdem parallelis BZ , AD ; dico æquale esse $\triangle AB\Gamma$ triangulum ipsi $\triangle EZ$ triangulo.



Εκτελέσθω γὰρ ἡ AD ἑξ ἑκάτερα τὰ μέρη . Producatnr enim AD ex utrâque parte in ἐπὶ τὰ H , Θ , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ ΓA H , Θ , et per B quidem ipsi ΓA parallela

la diagonale AB le partage en deux parties égales; le triangle $\triangle B\Gamma$ est la moitié du parallélogramme $\triangle B\Gamma Z$, car la diagonale $\Delta\Gamma$ la partage en deux parties égales (34); mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle $\triangle AB\Gamma$ est égal au triangle $\triangle B\Gamma$. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVIII.

Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

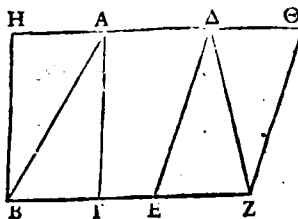
Que les triangles $\triangle AB\Gamma$, $\triangle EZ$ soient construits sur des bases égales $B\Gamma$, EZ et entre les mêmes parallèles BZ , AD ; je dis que le triangle $\triangle AB\Gamma$ est égal au triangle $\triangle EZ$.

Prolongeons de part et d'autre la droite AD aux points H , Θ ; par le

64 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράλληλος ἤχθω ἡ BH, διὰ δὲ τοῦ Z τῇ ΔΕ
παράλληλος ἤχθω ἡ ZO.

ducatur BH, per Z vero ipsi ΔΕ parallela ducatur ZO.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν HBGA, ΔEZΘ· καὶ ἴσον τὸ HBGA τῷ ΔEZΘ, ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BG, EZ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ, HΘ· καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν HBGA παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα⁵ τέμνει· τοῦ δὲ ΔEZΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ZED τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔZ διάμετρος αὐτὸ δίχα⁶ τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ πὰ ἐξῆς.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum HBGA, ΔEZΘ; et æquale HBGA ipsi ΔEZΘ, in æqualibus enim et basibus sunt BG, EZ, et in eisdem parallelis BZ, HΘ; et est autem ipsius HBGA parallelogrammi dimidium ABΓ triangulum, AB enim diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius ΔEZΘ parallelogrammi dimidium ZED triangulum, nam ΔZ diameter ipsum bifariam secat. Æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo. Ergo triacula, etc.

point B conduisons la droite BH parallèle à la droite RA (32), et par le point Z conduisons la droite ZO parallèle à la droite ΔΕ.

Les figures HBGA, ΔEZΘ sont des parallélogrammes; mais le parallélogramme HBGA est égal au parallélogramme ΔEZΘ (36), car ils sont construits sur des bases égales BG, EZ et entre les mêmes parallèles BZ, HΘ; mais le triangle ABΓ est la moitié du parallélogramme HBGA, car la diagonale AB le partage en deux parties égales (34); le triangle ZED est la moitié du parallélogramme ΔEZΘ, car la diagonale ΔZ le partage en deux parties égales, et les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ABΓ est égal au triangle ΔEZ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

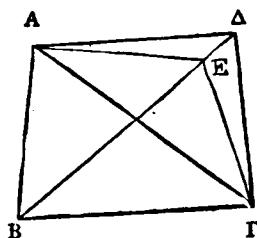
PROPOSITIO XXXIX.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα² τὰ $ABΓ$, $ΔBΓ$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς $BΓ$, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη³. λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ AD . λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AD τῇ $BΓ$.

Æqualia triangula, super eadem basi constituta et ad eadem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula $ABΓ$, $ΔBΓ$, super eadem basi $BΓ$ et ad eadem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Jungatur enim AD ; dico parallelam esse AD ipsi $BΓ$.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ A σημείου τῇ $BΓ$ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ AE , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ EF .

Ἴσον ἄρα⁵ ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $EBΓ$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστίν αὐτῷ τῆς $BΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $BΓ$, AE ⁶. Ἀλλὰ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔBΓ$ ἐστίν

Si enim non, ducatur per A punctum ipsi $BΓ$ rectæ parallela AE , et jungatur EF .

Æquale igitur est $ABΓ$ triangulum ipsi $EBΓ$ triangulo; super eadem enim basi est $BΓ$ super quâ ipsum BEG , et in eisdem parallelis $BΓ$, AE ; sed $ABΓ$ triangulum ipsi $ΔBΓ$ est æquale; ergo

PROPOSITION XXXIX.

Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

Que les deux triangles égaux $ABΓ$, $ΔBΓ$ soient construits sur la même base $BΓ$, et placés du même côté; je dis que ces deux triangles sont compris entre les mêmes parallèles. Joignons AD ; je dis que AD est parallèle à $BΓ$.

Car si cela n'est pas, par le point A conduisons AE parallèle à $BΓ$ (31), et joignons EF .

Le triangle $ABΓ$ est égal au triangle $EBΓ$ (57), puisque ces deux triangles sont construits sur la base $BΓ$, et placés entre les mêmes parallèles $BΓ$, AE . Mais le triangle $ABΓ$ est égal au triangle $ΔBΓ$; donc le triangle $ΔBΓ$ est égal au

66 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον· καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ ἄρα τρίγωνον τῷ $E B\Gamma$ ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν⁸ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ AE τῇ $B\Gamma$. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς AD · ἡ AD ἄρα τῇ $B\Gamma$ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἐξῆς.

et $\Delta B\Gamma$ triangulum ipsi $E B\Gamma$ æquale est, majus minori, quod est impossibile. Non igitur parallela est AE ipsi $B\Gamma$. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse præter AB ; AD igitur ipsi $B\Gamma$ est parallela. Ergo æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν¹ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ² ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα³ τὰ $AB\Gamma$, $\Delta ΓE$, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν $B\Gamma$, $ΓE$ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη⁴. λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γὰρ ἡ AD · λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AD τῇ BE .

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ A τῇ BE παράλληλος ἡ AZ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ EZ .

PROPOSITIO XL.

Æqualia triangula, super æqualibus basibus constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula $AB\Gamma$, $\Delta ΓE$, super æqualibus basibus constituta $B\Gamma$, $ΓE$ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse; jungatur enim AD ; dico parallelam esse AD ipsi BE .

Si enim non, ducatur per A ipsi BE parallela AZ , et jungatur EZ .

triangle $E B\Gamma$, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible; donc AE n'est point parallèle à $B\Gamma$. Nous démontrerons semblablement qu'aucune autre droite, excepté AD , n'est parallèle à $B\Gamma$; donc AD est parallèle à $B\Gamma$. Donc, etc.

PROPOSITION XL.

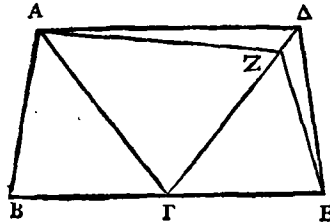
Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

Que les triangles égaux $AB\Gamma$, $\Delta ΓE$ soient construits sur les bases égales $B\Gamma$, $ΓE$ et placés du même côté; je dis qu'ils sont entre les mêmes parallèles. Joignons AD ; je dis que AD est parallèle à BE .

Car si cela n'est pas, par le point A , conduisons AZ parallèle à BE , et joignons EZ .

Ἰσον ἄρα⁵ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τρι-
γώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ.
Αλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τρί-
γώνῳ⁶· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον⁷ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΓΕ
triangulo; in æqualibus enim basibus sunt ΒΓ,
ΓΕ et in eisdem parallelis ΒΕ, ΑΖ. Sed ΑΒΓ
triangulum æquale est ipsi ΔΓΕ triangulo; et
ΔΓΕ triangulum igitur æquale est ipsi ΖΓΕ trian-



ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ
ἐστὶν⁸ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν Θ
ἢ ΑΖ τῇ ΒΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη
τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἢ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστὶ παράλ-
ληλος¹⁰. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulo, majus minori, quod est impossibile; non
igitur parallela est ΑΖ ipsi ΒΕ. Similiter autem
ostendemus neque aliam quampiam esse præter
ΑΔ; ΑΔ igitur ipsi ΒΕ est parallela. Ergo
æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

PROPOSITIO XLI.

Εάν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη
τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ·
διπλάσιον ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ
τριγώνου.

Si parallelogrammum quam triangulum basim
habeat eandem, et in eisdem parallelis sit,
duplum est parallelogrammum trianguli.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΖΓΕ (38); puisque ces deux triangles
sont construits sur des bases égales ΒΓ, ΓΕ, et qu'ils sont entre les mêmes
parallèles ΒΕ, ΑΖ. Mais le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΓΕ; donc le triangle
ΔΓΕ est égal au triangle ΖΓΕ, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible;
donc ΑΖ n'est point parallèle à ΒΕ. Nous démontrerons semblablement qu'aucune
autre droite, excepté ΑΔ, n'est parallèle à ΒΕ; donc ΑΔ est parallèle à ΒΕ.
Donc, etc.

PROPOSITION XLI.

Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les
mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

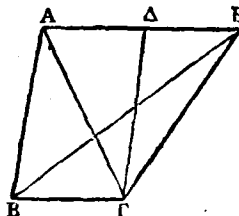
68 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Παραλληλόγραμμον γάρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε² ἔχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω³ ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου.

Επιζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Parallelogrammum enim ΑΒΓΔ quam triangulum ΕΒΓ basim habeat eandem ΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ sit; dico duplum esse ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓ trianguli.

Jungatur enim ΑΓ.



Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον³ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἐξῆς:

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ triangulo; nam super eadem basi est ΒΓ super quā ipsum ΕΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ. Sed ΑΒΓΔ parallelogrammum duplum est ipsius ΑΒΓ trianguli, nam ΑΓ diameter ipsum bisariam secat; quare ΑΒΓΔ parallelogrammum et ipsius ΕΒΓ trianguli est duplum. Si igitur parallelogrammum, etc.

Que le parallélogramme ΑΒΓΔ ait la même base ΒΓ que le triangle ΕΒΓ, et qu'il soit entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ.

Joignons ΑΓ.

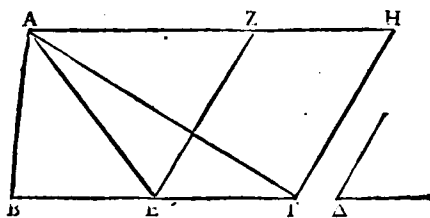
Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΕΒΓ (37), puisqu'il est sur la même base ΒΓ que lui et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ. Mais le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΑΒΓ, car la diagonale ΑΓ partage ce parallélogramme en deux parties égales (34); donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΒ΄.

PROPOSITIO XLII.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον
συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείᾳ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ
δοθεὶσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ Δ· δεῖ δὲ τῷ ΑΒΓ
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι
ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Τετμήσω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπ-
εξέχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνία ἴση
ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλ-
ληλος ἢ χθῶ ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλ-
ληλος ἢ χθῶ ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ
τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ
τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ

Dato triangulo æquale parallelogrammum
constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum ΑΒΓ, datus vero
angulus rectilineus Δ; oportet igitur ipsi ΑΒΓ
triangulo æquale parallelogrammum constituere
in æquali ipsi Δ angulo rectilineo.

Secetur ΒΓ bifariam in Ε, et jungatur ΑΕ,
et constituatur ad ΕΓ rectam et ad punctum
in εἰ Ε ipsi Δ angulo æqualis ΓΕΖ, et per Α
quidem ipsi ΕΓ parallela ducatur ΑΗ, per Γ vero
ipsi ΕΖ parallela ducatur ΓΗ; parallelogrammum
igitur est ΖΕΓΗ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΓ, æquale est
et ΑΒΕ triangulum ipsi ΑΕΓ triangulo; nam super

PROPOSITION XLII.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

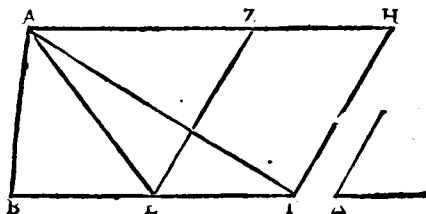
Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.

Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (23), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car

ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BE, EF καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς
 παραλλήλοις ταῖς BF, *AH· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ABF τρίγωνον τῷ AEF τριγῶνῳ. Ἐστὶ δὲ
 καὶ τὸ ZEFH παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ
 AEF τριγῶνῳ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν

æqualibus basibus BE , EF sunt, et in eisdem
parallelis BF , AH ; duplum igitur est $\triangle AEF$
triangulum ipsius $\triangle AEF$ trianguli. Est autem et
 $ZGFH$ parallelogrammum duplum ipsius $\triangle AEF$
trianguli; basim enim quam AEF eandem habet,



ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστιν αὐτῷ παραλλήλοις·
 ἔστιν ἄρα ἔστι τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ
 ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην
 τῇ δοθείᾳ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλ-
ληλόγραμμον συνίσταται⁵ τὸ ΖΕΓΗ, ἐν ᾧ ἡ γωνία
τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις⁶ ἐστὶν ἴση τῇ Δ. Ὅπρι εἶδει
ποιῆσαι.

et in eisdem est parallelis in quibus ipsum $\triangle EFG$;
æquale igitur est $ZEFG$ parallelogrammum ipsi
 $\triangle AEF$ triangulo, et habet $\angle EZF$ angulum æqualem
dato Δ .

Dato igitur triangulo $AB\Gamma$ æquale parallelogrammum constitutum est $ZETH$ in angulo ΓEZ qui est æqualis ipsi Δ . Quod oportebat facere.

ils sont sur des bases égales BE, ER, et entre les mêmes parallèles BF, AH ; donc le triangle ABR est double du triangle AER. Mais le parallélogramme ZERH est double du triangle AER (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles ; donc le parallélogramme ZERH est égal au triangle ABR (not. 6), et il a l'angle REZ égal à l'angle donné Δ .

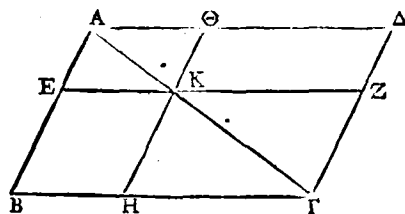
Donc le parallélogramme ZEFH a été construit égal au triangle ABF dans un angle qui est FEZ égal à l'angle donné Δ ; ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

PROPOSITIO XLIII.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι. •



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον

Omnis parallelogrammi eorum circa diametrum parallelogrammorum complementa æqualia inter se sunt.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, et circa ΑΓ parallelogramma quidem sint ΕΘ, ΖΗ, ipsa vero dicta complementa ΒΚ, ΚΔ; dico æquale esse ΒΚ complementum ipsi ΚΔ complemento.

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, æquale est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΓΔ triangulo. Rursus quoniam parallelogrammum est ΕΚΘΑ, diameter autem ipsius est ΑΚ, æquale est ΑΕΚ triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo. Propter eadem et ΚΖΓ triangulum ipsi ΚΗΓ

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les complémens des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΕΚ, ΚΔ qu'on appelle complémens; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (54). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le

72 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ ἴσιν ἴσιν. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τριγώνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἴσιν ἴσιν, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τριγώνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσιν ἴσιν τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνῳ· ἔστι δὲ καὶ ἕλεν τὸ ΑΒΓ τριγώνον ἕλεν τῷ ΑΔΓ ἴσιν· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπληρίματι ἴσιν ἴσιν³. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

est æquale. Quoniam igitur ΑΕΚ quidem triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo est æquale; ΚΖΓ vero ipsi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ cum ipso ΚΗΓ est æquale ipsi ΑΘΚ triangulo cum ΚΖΓ triangulo; est autem et totum ΑΒΓ triangulum toti ΑΔΓ æquale. Reliquum igitur ΒΚ complementum reliquo ΗΔ complemento est æquale. Omnis igitur parallelogrammi, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσιν παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμον.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν τριγώνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσιν παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνοστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσιν παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἢ ἔστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit quidem data recta ΑΒ, datum vero triangulum Γ, et datus angulus rectilineus Δ; oportet igitur ad datam rectam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare in æquali ipsi Δ angulo.

Constituatur ipsi Γ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ qui est æqualis, ipsi Δ; et ponatur in directum ΒΕ ipsi ΒΑ, et

triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΒΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

PROPOSITION XLIV.

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle ΕΒΗ égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme ΒΕΖΗ égal au triangle Γ (42), plaçons la droite ΒΕ dans la direction de la droite ΒΑ, prolon-

74 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ AB τῷ BZ. Ἀλλὰ τὸ BZ τῷ Γ τριγώνῳ ἴστί· καὶ τὸ AB ἄρα τῷ Γ ἴστί· ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ Δ ἴστί· ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABM ἄρα τῇ Δ γωνία ἴστί· ἴση.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν AB, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραεῖλεται τὸ AB, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM, ἡ ἴστί· ἴση τῇ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Sed BZ ipsi Γ triangulo est æquale; et AB igitur ipsi Γ est æquale. Et quoniam æqualis est HBE angulus ipsi ABM, sed HBE ipsi Δ est æquale; et ABM igitur ipsi Δ angulo est æqualis.

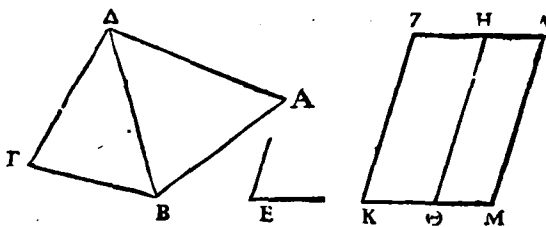
Ad datam igitur rectam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicatum est AB, in angulo ABM qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μί.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ'.

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.



Εστω τὸ μὲν² δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ABΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὲ τῷ ABΓΔ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ³ γωνίᾳ τῇ Ε.

Sit quidem datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus E; oportet igitur ipsi ABΓΔ rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo E.

Γ; donc AB est égal à Γ. Et puisque l'angle HBE est égal à l'angle ABM (15), et que l'angle HBE est égal à l'angle Δ, l'angle ABM est égal à l'angle Δ.

Donc à la droite donnée AB, et dans l'angle ABM égal à Δ, on applique le parallélogramme AB égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ABΓΔ la figure rectiligne donnée, et E l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné E, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ABΓΔ.

Επιζεύχθω γάρ ἡ ΔΒ, καὶ συνιστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἶσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶ τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθείαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἶσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΟΜ γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶν τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΟΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα⁵ τῇ ὑπὸ ΗΟΜ ἐστὶν ἴση⁶. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΟΜ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΟΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα⁷ ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν

Jungatur enim ΔΒ, et constituatur ipsi ΑΒΔ triangulo æquale parallelogrammum ΖΘ, in ΘΚΖ angulo, qui æqualis est ipsi Ε; et applicetur ad ΘΗ rectam ipsi ΔΒΓ triangulo æquale parallelogrammum ΗΜ, in ΗΟΜ angulo, qui est æqualis ipsi Ε.

Et quoniam Ε angulus utrique ipsorum ΘΚΖ, ΗΟΜ est æqualis; et ΘΚΖ igitur ipsi ΗΟΜ est æqualis. Communis addatur ΚΘΗ; ergo ΖΚΘ, ΚΘΗ, ipsis ΚΘΗ, ΗΟΜ æquales sunt. Sed ΖΚΘ, ΚΘΗ duobus rectis æquales sunt; et ΚΘΗ, ΗΟΜ igitur duobus rectis æquales sunt. Ad aliquam igitur rectam ΗΘ, et ad punctum in eâ Θ, duæ rectæ ΘΚ, ΘΜ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est ΚΘ ipsi ΘΜ. Et quoniam in parallelas ΚΜ, ΖΗ recta incidit ΘΗ, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ æquales inter se sunt. Communis addatur ΘΗΛ; ergo ΜΘΗ, ΘΗΛ ipsis ΘΗΖ, ΘΗΛ æquales sunt. Sed ΜΘΗ, ΘΗΛ duobus rectis æquales sunt; et ΘΗΖ, ΘΗΛ igitur duobus rectis æquales sunt; in directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. Et quoniam ΚΖ

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle εκΖ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons dans l'angle ΗΟΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au triangle ΔΒΓ.

Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles εκΖ, ΗΟΜ, l'angle εκΖ est égal à l'angle ΗΟΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΟΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΟΜ sont égaux à deux droits. Donc les deux droites εκ, ΘΜ, non placées du même côté, font avec la droite ΗΘ, et au point Θ de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite ΘΜ (14). Et puisque la droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΛ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΛ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΛ sont aussi égaux à deux

76 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑρβαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ $\Theta\text{H}\text{Z}$, $\Theta\text{H}\Lambda$ ἄρα
 δυὸν ἑρβαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστίν⁸
 ἡ ZH τῇ $\text{H}\Lambda$. Καὶ ἐπεὶ ἡ KZ τῇ ΘH ἴση τε καὶ
 παράλληλος ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘH τῇ $\text{M}\Lambda$ ·
 καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ $\text{M}\Lambda$ ἴση τε καὶ παράλληλος
 ἐστίν· καὶ ἐπιζευγύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ KM ,
 $\text{Z}\Lambda$, καὶ αἱ KM , $\text{Z}\Lambda$ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν·
 παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ KZAM . Καὶ ἐπεὶ
 ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $\text{AB}\Delta$ τρίγωνον τῷ $\text{Z}\Theta$ παραλλη-
 λογράμμῳ, τὸ δὲ $\Delta\text{B}\Gamma$ τῷ HM · ὅλον ἄρα τὸ $\text{AB}\Gamma\Delta$
 εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ KZAM παραλληλογράμμῳ
 ἐστὶν ἴσον 9.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ $\text{AB}\Gamma\Delta$ ἴσον
 παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ KZAM , ἐν
 γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZKM , ἣ ἐστίν ἴση τῇ¹⁰ δοθείσῃ
 τῇ E . Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀνα-
 γράφαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB · δι' δὴ ἀπὸ τῆς
 AB εὐθείας τετράγωνον ἀναγράφαι.

ipsi ΘH æqualis et parallela est, sed ΘH ipsi $\text{M}\Lambda$;
 et KZ igitur ipsi $\text{M}\Lambda$ æqualis et parallela est; et
 jungunt ipsas rectæ KM , $\text{Z}\Lambda$, et KM , $\text{Z}\Lambda$ æquales
 et parallele sunt; parallelogrammum igitur est
 KZAM . Et quoniam æquale est quidem $\text{AB}\Delta$
 triangulum ipsi $\text{Z}\Theta$ parallelogrammo; $\Delta\text{B}\Gamma$ vero
 ipsi HM ; totum igitur $\text{AB}\Gamma\Delta$ rectilineum toti
 KZAM parallelogrammo est æquale.

Ergo dato rectilineo $\text{AB}\Gamma\Delta$ æquale parallelo-
 grammum constitutum est KZAM in angulo ZKM ,
 qui est æqualis dato E . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLVI.

Ex datâ rectâ quadratum describere.

Sit data recta AB ; oportet igitur ex AB rectâ
 quadratum describere.

droits; donc la droite ZH est dans la direction de la droite $\text{H}\Lambda$; mais KZ est
 égal et parallèle à ΘH , et ΘH égale et parallèle à $\text{M}\Lambda$; donc la droite KZ est égale
 et parallèle à $\text{M}\Lambda$ (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les
 droites KM , $\text{Z}\Lambda$, et les droites KM , $\text{Z}\Lambda$ sont égales et parallèles (33); donc
 KZAM est un parallélogramme. Mais le triangle $\text{AB}\Delta$ est égal au parallélogramme
 $\text{Z}\Theta$, et le triangle $\Delta\text{B}\Gamma$ est égal au parallélogramme HM ; donc la figure recti-
 ligne entière $\text{AB}\Gamma\Delta$ est égale au parallélogramme entier KZAM .

Donc le parallélogramme KZAM a été construit égal à la figure rectiligne
 donnée $\text{AB}\Gamma\Delta$, dans l'angle ZKM égal à l'angle donné E ; ce qu'il fallait faire.

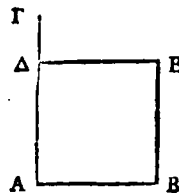
PROPOSITION XLVI.

Décrire un quarré avec une droite donnée.

Soit AB la droite donnée; il faut décrire un quarré avec la droite AB .

Ἐχθω τῇ AB εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A , πρὸς ὀρθὰς ἡ AG · καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ AD · καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ DE · διὰ δὲ τοῦ B σημείου τῇ AD παράλληλος ἤχθω ἡ BE .

Ducatur ipsi AB rectæ, a puncto in eâ A , ad rectos ipsa AG ; et ponatur ipsi AB æqualis AD ; et per Δ quidem punctum ipsi AB parallela ducatur DE ; per B vero punctum ipsi AD parallela ducatur BE .



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$ · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ DE , ἡ δὲ AD τῇ BE . Ἀλλὰ ἡ AB τῇ AD ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ BA , AD , DE , EB ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$ παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς AB , DE εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ AD · αἱ ἄρα ὑπὸ BAD , ADE γωνίαι δυσὶν ἐρβαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BAD · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ADE . Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ABE , BEA γωνιῶν· ὀρθογώνιον

Parallelogrammum igitur est $ADEB$; æqualis igitur est quidem AB ipsi DE , AD vero ipsi BE . Sed AB ipsi AD est æqualis; quatuor igitur BA , AD , DE , EB æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est $ADEB$ parallelogrammum. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim in parallelas AB , DE recta incidit AD ; ergo BAD , ADE anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem est BAD ; rectus igitur et ADE . Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli æqualia inter se sunt; rectus igitur et uterque oppositorum ABE , BEA angulorum; rectangulum igitur est $ADEB$. Ostensum autem est et æquilaterum;

Du point A , donné dans cette droite, conduisons AG perpendiculaire à AB (11); faisons AD égal à AB (5); par le point Δ conduisons DE parallèle à AB (31); et par le point B conduisons BE parallèle à AD .

La figure $ADEB$ est un parallélogramme; donc AB est égal à DE , et AD égal à BE . Mais AB est égal à AD ; donc les quatre droites BA , AD , DE , EB sont égales entr'elles; donc le parallélogramme $ADEB$ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite AD tombe sur les parallèles AB , DE , les angles BAD , ADE sont égaux à deux droits (29); mais l'angle BAD est droit; donc l'angle ADE est droit aussi. Mais les côtés et angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux (34); donc chacun des angles opposés ABE , BEA est droit; donc le parallélogramme $ADEB$ est rectangle; mais nous avons démontré qu'il est

78 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·
τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ
εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

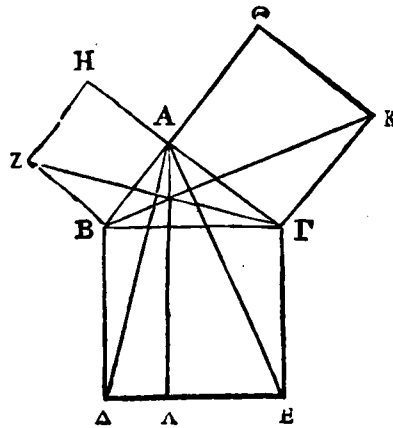
quadratum igitur est, et est ex AB recta descrip-
tum. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς
τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετρά-
γωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν
περιχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere
rectum angulum subtendente æquale est quadra-
tis ex lateribus rectum angulum continentibus.



Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον
τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ
τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τε-
τραγώνοις.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum
habens ΒΑΓ angulum; dico quadratum ex ΒΓ
æquale esse quadratis ex ipsis ΒΑ, ΑΓ.

équilateral; donc le parallélogramme ΑΔΕΒ est un quarré, et il est décrit avec la
droite ΑΒ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est
égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré
du côté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ᾗχθω ἡ ΑΔ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ² τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ἔρθῃ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ἔλῃ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὲ³ αἱ ΔΒ, ΔΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ⁵ ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐστὶ⁶ τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς

Describatur enim ex ΒΓ quidem quadratum ΒΔΕΓ; ex ipsis vero ΒΑ, ΑΓ ipsa ΗΒ, ΘΓ; et per Α alterutri ipsarum ΒΔ, ΓΕ parallela ducatur ΑΔ; et jungantur ΑΔ, ΖΓ.

Et quoniam rectus est uterque ipsorum ΒΑΓ, ΒΑΗ angulorum, ad aliquam igitur rectam ΒΑ, et ad punctum in eà Α, duæ rectæ ΑΓ, ΑΗ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in rectum igitur est ΓΑ ipsi ΑΗ. Propter eadem et ΒΑ ipsi ΑΘ est in rectum. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΖΒΑ, rectus enim uterque, communis addatur ΑΒΓ; totus igitur ΔΒΑ toti ΖΒΓ est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem ΔΒ ipsi ΒΓ, ipsa vero ΖΒ ipsi ΒΑ; duæ utique ΔΒ, ΔΑ duabus ΓΒ, ΒΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΔΒΑ angulo ΖΒΓ æqualis; basis igitur ΑΔ basi ΖΓ æqualis, et ΑΒΔ triangulum ipsi ΖΒΓ triangulo est æquale. Et est quidem ipsius ΑΒΔ trianguli duplum ΒΑ παραλληλόγραμμον, basim enim eandem habent ΒΑ et in eisdem sunt parallelis ΒΔ, ΑΔ; ipsius vero ΖΒΓ trianguli duplum ΒΗ quadratum, et enim rursus basim eandem habent et in eisdem

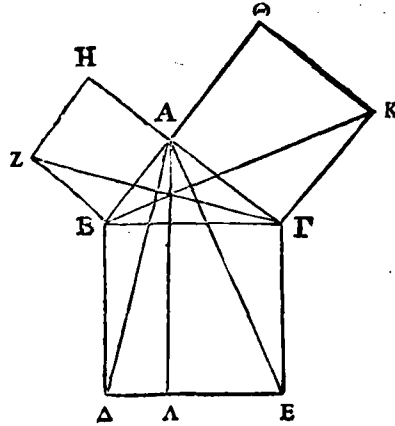
Décrivons avec ΒΓ le carré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les carrés ΗΒ, ΑΓ; et par le point Α conduisons ΑΔ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.

Puisque chacun des angles ΒΑΓ, ΒΑΗ est droit, les deux droites ΑΓ, ΑΗ, non placées du même côté, font avec la droite ΒΑ au point Α de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓΑ est dans la direction de ΑΗ; la droite ΒΑ est dans la direction ΑΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΖΒΑ, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ΑΒΓ, l'angle entier ΔΒΑ sera égal à l'angle entier ΖΒΓ (not. 4). Et puisque ΔΒ est égal à ΒΓ, et ΖΒ à ΒΑ, les deux droites ΔΒ, ΔΑ sont égales aux deux droites ΓΒ, ΒΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΖΓ, et le triangle ΑΒΔ égal au triangle ΖΒΓ (4). Mais le parallélogramme ΒΑ est double du triangle ΑΒΔ (41), car ils ont la même base ΒΔ et ils sont entre

80 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τε-
τράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι
τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις⁷
ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα
ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παρ-
αλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ομοίως

sunt parallelis ΖΒ, ΗΓ; æqualium autem dupla
æqualia inter se sunt; æquale igitur est et ΒΛ pa-
rallelogrammum ipsi ΗΒ quadrato. Similiter au-
tem junctis ΑΕ, ΒΚ ostendetur et ΓΑ parallelo-
grammum æquale ipsi ΘΓ quadrato. Totum igitur
ΒΔΕΓ quadratum duobus ΗΒ, ΘΓ quadratis æ-



δὲ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, διχθῆσεται
καὶ τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τε-
τράγωνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυοῖ
τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἐστὶ
τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγρα-
φὴν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα
ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον⁸ ἴσον ἐστὶ τοῖς
ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα
τοῖς ὀρθογώνιοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

quale est, et est quidem ΒΔΕΓ quadratum ex ΒΓ
descriptum, ipsa vero ΗΒ, ΘΓ ex ΒΑ, ΑΓ; ergo
quadratum ex ΒΓ latere æquale est quadratis ex
ΒΑ, ΑΓ lateribus; ergo in rectangulis, etc.

les mêmes parallèles ΒΔ, ΑΛ; le quarré ΒΗ est double du triangle ΖΒΓ, car
ils ont la même base ΒΖ et ils sont entre les mêmes parallèles ΖΒ, ΗΓ; et les
grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le
parallélograme ΒΛ est égal au quarré ΗΒ. Ayant joint ΑΕ, ΒΚ, nous démon-
trerons semblablement que le parallélograme ΓΑ est égal au quarré ΘΓ; donc
le quarré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux quarrés ΗΒ, ΘΓ. Mais le quarré ΒΔΕΓ
est décrit avec ΒΓ, et les quarrés ΗΒ, ΘΓ sont décrits avec ΒΑ, ΑΓ; donc le
quarré du coté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Donc dans les trian-
gles, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

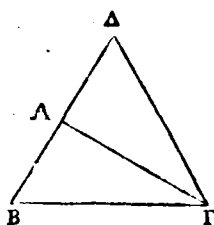
PROPOSITIO XLVIII.

Εάν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστίν.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Si trianguli ex uno laterum quadratum æquale est quadratis ex reliquis trianguli duobus lateribus; contentus angulus a reliquis trianguli duobus lateribus rectus est.

Trianguli enim ΑΒΓ ex uno ΒΓ latere quadratum æquale sit quadratis ex ΒΑ, ΑΓ lateribus; dico rectum esse ΒΑΓ angulum.



Ἦχθω γάρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ ὑψοίᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ

Ducatur enim ab Α puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΑΔ, et ponatur ipsi ΒΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, æquale est et ex ΔΑ quadratum ipsi ex ΑΒ quadrato. Commune addatur ex ΑΓ quadratum; ipsa igitur ex

PROPOSITION XLVIII.

Si le carré d'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

Que le carré du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ soit égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ; je dis que l'angle ΒΑΓ est droit.

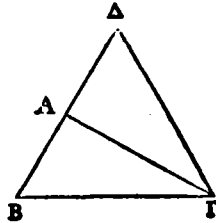
Du point Α, conduisons la droite ΑΔ perpendiculaire à ΑΓ (11), faisons ΑΔ égal à ΒΑ, et joignons ΔΓ.

Car puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, le carré de ΔΑ est égal au carré de ΑΒ. Ajoutons le carré commun de ΑΓ; les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ seront égaux

82 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἔσσι τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε

ΔΑ, ΑΓ quadrata æqualia sunt ipsis ex ΒΑ, ΑΓ quadratis. Sed ipsis quidem ex ΔΑ, ΑΓ æquale est ipsum ex ΔΓ, rectus enim est ΔΑΓ angulus; ipsis vero ex ΒΑ, ΑΓ æquale est ipsum ex ΒΓ, ponitur enim; ipsum igitur ex ΔΓ quadratum æquale est ipsi ex ΒΓ quadrato; quare et latus ΔΓ ipsi ΒΓ est æquale; et quoniam æqualis est



καὶ πλιυρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΑΔ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ est æqualis; angulus igitur ΔΑΓ angulo ΒΑΓ est æqualis. Rectus autem ΔΑΓ; rectus igitur et ΒΑΓ. Si igitur trianguli, etc.

aux carrés des droites ΒΑ, ΑΓ. Mais le carré de ΔΓ est égal aux carrés des droites ΔΑ, ΑΓ (47), car l'angle ΔΑΓ est droit, et le carré de ΒΓ est supposé égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΓ; donc le carré de ΔΓ est égal au carré de ΒΓ; donc le côté ΔΓ est égal au côté ΒΓ; mais ΑΔ est égal à ΑΒ, et ΑΓ est commun; donc les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ, ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8). Mais l'angle ΔΑΓ est droit; donc l'angle ΒΑΓ est droit aussi. Donc, etc.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E C U N D U S.

ΟΡΟΙ.

α. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεται λίγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιχουσῶν εὐθειῶν.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμων ἐν ᾧ ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυοῖ παραπληρώμασι γνῶμων καλεῖσθαι.

DEFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectum angulum continentibus rectis.

2. Omnis autem parallelogrammi spatii eorum circa diametrum ipsius parallelogrammorum unumquodque cum duobus complementis gnomon vocetur.

LE DEUXIEME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Tout parallélogramme rectangle est dit contenu sous deux droites qui comprennent un angle droit.

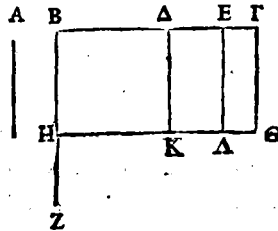
2. Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

PROPOSITIO I.

Εάν ᾧσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐ-
τῶν εἰς ὅσα δημοτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμε-
νον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς
τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημά-
των περιεχομένοις ὀρθογώνιοις.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $A, B\Gamma$, καὶ τετμήσθω
ἡ $B\Gamma$ ὡς ἔτυχι κατὰ τὰ Δ, E σημεία· λέγω
ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν $A, B\Delta$ περιεχομένῳ
ὀρθογώνιῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A, \Delta E$, καὶ ἔτι
τῷ ὑπὸ τῶν $A, E\Gamma$.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ $B\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἡ
 BZ , καὶ κείσθω τῇ A ἴση ἡ BH , καὶ διὰ μὲν
τοῦ H τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$, διὰ δὲ
τῶν Δ, E, Γ τῇ BH παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ
 $\Delta K, E\Lambda, \Gamma\Theta$.

Ducatur enim a B ipsi $B\Gamma$ ad rectos BZ , et
ponatur ipsi A æqualis BH , et per H quidem
ipsi $B\Gamma$ parallela ducatur $H\Theta$; per Δ, E, Γ
vero ipsi BH parallelae ducantur $\Delta K, E\Lambda, \Gamma\Theta$.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre.

Soient deux droites $A, B\Gamma$, et que $B\Gamma$ soit coupé à volonté aux points Δ, E ; je dis que le rectangle contenu sous $A, B\Gamma$ est égal au rectangle contenu sous $A, B\Delta$, au rectangle sous $A, \Delta E$, et au rectangle sous $A, E\Gamma$.

Par le point B , conduisons la droite BZ perpendiculaire à $B\Gamma$ (II. 1); faisons BH égal à A , et par le point H conduisons $H\Theta$ parallèle à $B\Gamma$ (31. 1); et par les points Δ, E, Γ , conduisons les droites $\Delta K, E\Lambda, \Gamma\Theta$ parallèles à la droite BH .

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 85

Ἰσον δὴ ἴσται τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Καὶ ἴσται τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν⁵ ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ⁶ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ⁷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἴσται ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ⁸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἴσται τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ. Εὰν ἄρα ᾖσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est ΒΘ ipsis ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ; et est quidem ΒΘ ipsum sub Α, ΒΓ, continetur enim sub ΗΒ, ΒΓ, æqualis autem ΒΗ ipsi Α; ΒΚ vero ipsum sub Α, ΒΔ, continetur enim sub ΗΒ, ΒΔ, æqualis autem ΒΗ ipsi Α; ΔΛ vero ipsum sub Α, ΔΕ, æqualis enim ΔΚ, hoc est ΒΗ, ipsi Α; et etiam similiter ΕΘ ipsum sub Α, ΕΓ; ergo ipsum sub Α, ΒΓ æquale est ipsi sub Α, ΒΔ, et ipsi sub ipsis Α, ΔΕ, et etiam ipsi sub Α, ΕΓ. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχι, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιέχόμενα ὀρθογώνια ἴσα² ἴσται τῷ ἀπὸ τῆς³ ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχι κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἴσται τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Le rectangle ΒΘ est égal aux rectangles ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. Mais ΒΘ est le rectangle sous Α, ΒΓ, puisqu'il est contenu sous ΗΒ, ΒΓ, et que ΒΗ est égal à Α; ΒΚ est le rectangle sous Α, ΒΔ, puisqu'il est contenu sous ΗΒ, ΒΔ, et que ΒΗ est égal à Α; ΔΛ est le rectangle sous Α, ΔΕ, puisque ΔΚ, c'est-à-dire ΒΗ, est égal à Α; et semblablement, ΕΘ est le rectangle sous Α, ΕΓ; donc le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et encore au rectangle sous Α, ΕΓ. Donc, etc.

PROPOSITIO II.

Si recta linea secetur utcunque, ipsa sub totâ et utroque segmentorum contenta rectangula æqualia sunt ipsi ex totâ quadrato.

Recta enim ΑΒ secetur utcunque in Γ puncto; dico ipsum sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum, cum ipso sub ΒΑ, ΑΓ contento rectangulo, æquale esse ipsi ex ΑΒ quadrato.

PROPOSITION II.

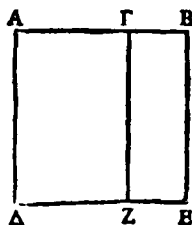
Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au quarré de la droite entière.

Que la droite ΑΒ soit coupée à volonté en un point Γ; je dis que le rectangle contenu sous ΑΒ, ΒΓ, avec le rectangle contenu sous ΑΒ, ΑΓ, est égal au quarré de ΑΒ.

86 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

Describatur enim ex AB quadratum ΑΔΕΒ, et ducatur per Γ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΕ parallela ΓΖ.



Ἰσον δὴ ἔστι⁵ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον· τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est ΑΕ ipsis ΑΖ, ΓΕ; et est quidem ΑΕ ipsum ex ΑΒ quadratum, ΑΖ vero ipsum sub ΒΑ, ΑΓ contentum rectangulum, continetur etenim sub ΔΑ, ΑΓ, æqualis autem ΑΔ ipsi ΑΒ; ΓΕ vero ipsum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΕ ipsi ΑΒ; ipsum igitur sub ΒΑ, ΑΓ, cum ipso sub ΑΒ, ΒΓ, æquale est ipsi ex ΑΒ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχι¹, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO III.

Si recta linea secetur utcunque, ipsum sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum æquale est et ipsi sub segmentis contento rectangulo, et ipsi ex prædicto segmento quadrato.

Avec AB décrivons le quarré ΑΔΕΒ (46. 1), et par le point Γ conduisons ΓΖ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΕ (31. 1).

Le quarré ΑΕ est égal aux rectangles ΑΖ, ΓΕ; mais ΑΒ est le quarré de ΑΒ, ΑΖ est le rectangle contenu sous ΒΑ, ΑΓ, puisqu'il est contenu sous ΔΑ, ΑΓ, et que ΑΔ est égal à ΑΒ; et ΓΕ est le rectangle contenu sous ΑΒ, ΒΓ; puisque ΒΕ est égal à ΑΒ; donc le rectangle sous ΒΑ, ΑΓ, avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, est égal au quarré de ΑΒ. Donc, etc.

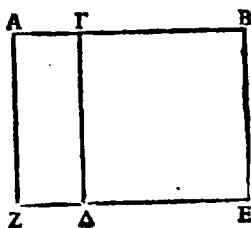
PROPOSITION III.

Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la droite entière et l'un des segments, est égal au rectangle contenu sous les segments et au quarré du segment premièrement dit.

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 87

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχι κατὰ τὸ Γ .² λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB περιχομένῳ ὀρθογώνιῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς³ $B\Gamma$ τετραγώνου.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον τὸ $\Gamma\Delta E B$, καὶ διήχθω ἡ $E\Delta$ ἐπὶ τὸ Z , καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν $\Gamma\Delta$, BE παράλληλος ᾗχθω ἡ AZ .



Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ AE τοῖς $A\Delta$, ΓE . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AE τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν AB , BE , ἴση δὲ ἡ BE τῇ $B\Gamma$. τὸ δὲ $A\Delta$ τὸ⁵ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , ἴση γὰρ ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΓB . τὸ δ' ΔB τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB περιχομένῳ ὀρθογώνιῳ, κατὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου. Εἰάν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Recta enim AB secetur utcumque in Γ ; dico ipsum sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub $A\Gamma$, ΓB contento rectangulo, cum ipso ex $B\Gamma$ quadrato.

Describatur enim ex ΓB quadratum $\Gamma\Delta E B$, et producatur $E\Delta$ in Z , et per A alterutri ipsarum $\Gamma\Delta$, BE parallela ducatur AZ .

Æquale utique est AE ipsis $A\Delta$, ΓE ; et est quidem AE ipsum sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum, continetur etenim sub AB , BE , æqualis autem BE ipsi $B\Gamma$; $A\Delta$ vero ipsum sub $A\Gamma$, ΓB , æqualis enim $\Delta\Gamma$ ipsi ΓB ; ΔB autem ex ΓB est quadratum; ipsum igitur sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum æquale est ipsi sub $A\Gamma$, ΓB contento rectangulo, cum ipso ex ΓB quadrato. Si igitur recta, etc.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ ; je dis que le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$ est égal au rectangle contenu sous $A\Gamma$, ΓB , avec le carré de $B\Gamma$.

Avec ΓB décrivons le carré $\Gamma\Delta E B$ (46. 1), prolongeons $E\Delta$ en Z , et par le point A conduisons AZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites $\Gamma\Delta$, BE (31. 1).

Le rectangle AE est égal aux rectangles $A\Delta$, ΓE ; mais AE est le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$, puisqu'il est contenu sous AB , BE , et que BE est égal à $B\Gamma$; $A\Delta$ est le rectangle sous $A\Gamma$, ΓB , puisque $\Delta\Gamma$ est égal à ΓB ; et ΔB est le carré de ΓB ; donc le rectangle contenu sous AB , ΓB est égal au rectangle contenu sous $A\Gamma$, ΓB , avec le carré de ΓB . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

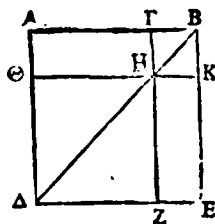
PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG , GB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB περιχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum ex totâ quadratum æquale est et ipsis ex segmentis quadratis, et ipsi bis sub segmentis contento rectangulo.

Recta enim linea AB secetur utcumque in Γ ; dico ipsum ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex AG , GB quadratis, et ipsi bis sub AG , GB contento rectangulo.



Αναγινγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ADEB$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ BA , καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν AD , EB παράλληλος ἦχθω ἡ GHZ , διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρᾳ τῶν AB , AE παράλληλος ἦχθω ἡ $ΘK$.

Describatur enim ex AB quadratum $ADEB$, et jungatur BA , et per Γ quidem alterutri ipsarum AD , EB parallela ducatur GHZ , per H vero alterutri ipsarum AB , AE parallela ducatur ΘK .

PROPOSITION IV.

Si la droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ ; je dis que le carré de AB est égal aux carrés des segments AG , GB , et à deux fois le rectangle contenu sous AG , GB .

Avec AB décrivons le carré $ADEB$ (46. 1); joignons BA ; par le point Γ conduisons GHZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AD , EB (31. 1), et par le point H conduisons ΘK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB , AE .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση². Αλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Αἶρω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπυσεν ἡ ΓΒ³. αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ἐρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ. Ὡστε καὶ αἱ ἐπεναντίαι, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαὶ εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΕΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἐστὶν ἀπὸ⁵ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΕΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση

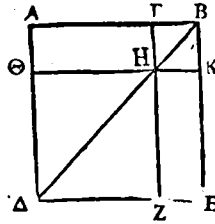
Et quoniam parallela est ΓΖ ipsi ΑΔ, et in ipsas incidit ΒΔ, interior angulus ΓΗΒ æqualis est interiori et opposito ΑΔΒ. Sed ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΒΑ ipsi ΑΔ est æquale; et ΓΗΒ igitur angulus ipsi ΗΒΓ est æqualis; quare et latus ΒΓ lateri ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΒ est æqualis; æquilaterum igitur est ΓΗΚΒ. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parallela est ΓΗ ipsi ΒΚ, et in ipsas incidit ΓΒ; ipsi igitur ΚΒΓ, ΒΓΗ anguli duobus rectis sunt æquales. Rectus autem est ΚΒΓ; rectus igitur et ΒΓΗ. Quare et oppositi ΓΗΚ, ΗΚΒ recti sunt; rectangulum igitur est ΓΗΚΒ. Ostensum autem est et æquilaterum; quadratum igitur est, et est ex ΓΒ. Propter eadem utique et ΕΖ quadratum est, et est ex ΘΗ, hoc est ex ΑΓ; ipsa igitur ΕΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ sunt. Et quoniam æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub ΑΓ, ΓΒ, æqualis enim ΗΓ ipsi ΓΒ; et ΗΕ igitur æquale ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ipsa igitur ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ipsi bis

Puisque ΓΖ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΔ tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ΓΗΒ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΔΒ (29. 1). Mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5. 1), puisque le côté ΒΑ est égal au côté ΑΔ; donc l'angle ΓΗΒ est égal à l'angle ΗΒΓ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (6. 1); mais ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΓΗ égal à ΒΚ; donc ΗΚ est égal à ΚΒ; donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est équilateral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓΗ est parallèle à ΒΚ, et que ΓΒ tombe sur ces deux droites, les angles ΚΒΓ, ΒΓΗ sont égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle ΚΒΓ est droit (déf. 50. 1); donc l'angle ΒΓΗ est droit. Donc les angles opposés ΓΗΚ, ΗΚΒ sont droits aussi (34. 1); donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilateral; donc ce quadrilatère est un carré, et ce carré est décrit avec ΓΒ. Par la même raison ΕΖ est aussi un carré, et ce carré est décrit avec ΘΗ, c'est-à-dire avec ΑΓ; donc ΕΖ, ΓΚ sont des carrés décrits avec ΑΓ, ΓΒ. Et puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (45. 1), et que le rectangle ΑΗ est com-

90 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ
δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ
τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ
ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν
ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ

sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et ΘΖ, ΓΚ quadrata
ex ΑΓ, ΓΒ; ergo quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ
æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et
ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Sed
quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ totum sunt ΑΔΕΒ,
quod est ex ΑΒ quadratum; ergo ex ΑΒ qua-



περιχομένη ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ΘΖ,
ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὃ ἐστὶ τὸ⁸ ἀπὸ
τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετρά-
γωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετρα-
γώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιχομένῳ
ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

dratum æquale est et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis
et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Si
igitur recta, ect.

pris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, car ΗΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΗΕ est égal
au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le
rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les carrés ΘΖ, ΓΚ sont décrits avec les droites ΑΓ, ΓΒ;
donc les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ
et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quatre figures ΘΖ, ΓΚ,
ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΔΕΒ, qui est le carré de ΑΒ; donc le carré
de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle com-
pris sous ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ'.

ET ALITER.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχμένῳ ὀρθογώνιῳ.

Επὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυτὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυτὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ· καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ορθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ³ Α· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. Ἐχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἐστὶν

Dico ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo.

Quoniam enim, in eadem figurâ, æqualis est ΒΑ ipsi ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΒΔ ipsi ΑΔΒ; et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo ΑΒΔ trianguli tres anguli ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ duobus rectis æquales sunt. Rectus autem ΒΑΔ; reliqui igitur ΑΒΔ, ΑΔΒ uni recto æquales sunt; et sunt æquales; uterque igitur ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΒ dimidius est recti. Rectus est autem ΒΓΗ, æqualis enim est interiori et opposito qui ad Α; reliquus igitur ΓΗΒ dimidius est recti; æqualis igitur est ΓΗΒ angulus ipsi ΓΒΗ; quare et latus ΒΓ ipsi ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; æquilaterum igitur est ΓΚ. Habet autem et rectum ΓΒΚ angulum; quadratum igitur est ΓΚ, et est ex ΓΒ. Propter

ET AUTREMENT.

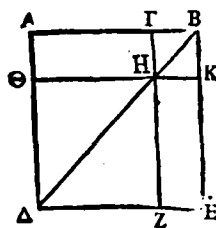
Je dis que le carré de AB est égal au carré des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ.

Car puisque, dans la même figure, ΒΑ est égal à ΑΔ, l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΑΔΒ (5. 1); et puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΒΑΔ est droit; donc les deux angles restants ΑΒΔ, ΑΔΒ sont égaux à un droit; et ils sont égaux; donc chacun des angles ΑΒΔ, ΑΔΒ est la moitié d'un droit. Mais l'angle ΒΓΗ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé en Α; donc l'angle restant ΓΗΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΓΗΒ est égal à ΓΒΗ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (34. 1). Mais ΓΒ est égal à ΗΚ, et ΓΗ égal à l'angle ΒΚ (34. 1); donc ΓΚ est équilatéral. Mais il a l'angle droit ΓΒΚ; donc ΓΚ est

92 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τε-
τράγωνόν ἐστι⁵, καὶ ἐστὶν ἴσον⁶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ·
τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσα
τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ
τῷ ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,
ἴση ἐστὶ γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα⁸ ἴσον
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ
τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ

eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est æ-
quale ipsi ex ΑΓ; ergo ΓΚ, ΘΖ quadrata sunt,
et sunt æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam
æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub
ΑΓ, ΓΒ, æqualis est enim ΓΗ ipsi ΓΒ; et ΕΗ
igitur æquale est ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ergo ΑΗ, ΗΕ
æqualia sunt ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et
ipsa ΓΚ, ΘΖ æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ; ergo ΓΚ,



ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ,
ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δις
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ,
ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΒ τε-
τράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ
τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ et
ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed ΓΚ, ΘΖ et ΑΗ, ΗΕ
totum sunt ΑΕ, quod est ex ΑΒ quadratum;
ergo ex ΑΒ quadratum æquale est et ipsis ex
ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ con-
tento rectangulo. Quod eportebat ostendere.

un quarré, et il est le quarré de ΓΒ. Par la même raison, ΘΖ est un quarré, et il est égal à celui de ΑΓ; donc ΓΚ, ΘΖ sont des quarrés, et ils sont égaux à ceux des droites ΑΓ, ΓΒ. Et puisque ΑΗ est égal à ΗΕ (31. 1), et que ΑΗ est sous ΑΓ, ΓΒ, car ΓΗ est égal à ΓΒ; le rectangle ΕΗ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quarrés ΓΚ, ΘΖ sont égaux aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ; donc les figures ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les figures ΓΚ, ΘΖ, et ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΕ, qui est le quarré de ΑΒ; donc le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἐστίν.

Ex his utique evidens est, in quadratis spatiis, circa diametrum parallelogramma quadrata esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

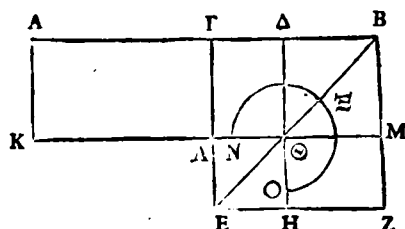
PROPOSITIO V.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίστα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίστων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ipsum sub inæqualibus totius segmentis contentum rectangulum cum ipso ex ipsâ inter sectiones quadrato æquale est ipsi ex dimidiâ quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἀνίστα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ

Recta enim aliqua AB secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico



ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΙΒ τετραγώνῳ.

ipsum sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΒ quadrato.

COROLLAIRE.

De là il est évident que, dans les quarrés, les parallélogrammes autour de la diagonale sont des quarrés.

PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ, et en deux parties inégales au point Δ, je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓΒ.

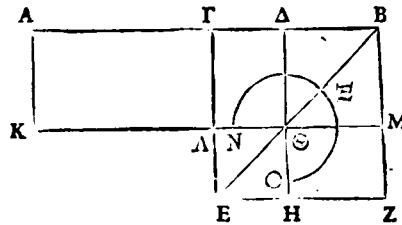
94 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἦχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ'.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΟΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ

Describatur enim ex ΓΒ quadratum ΓΕΖΒ, et jungatur ΒΕ; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓΕ, ΒΖ parallela ducatur ΔΗ, per Θ vero alterutri ipsarum ΑΒ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ, et rursus per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΒΜ parallela ducatur ΑΚ.

Et quoniam æquale est ΓΘ complementum ipsi ΟΖ complemento, commune addatur ΔΜ; totum igitur ΓΜ toti ΔΖ æquale est. Sed ΓΜ



τὸ ΓΜ τῷ ΑΑ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΑΑ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΕΟ γνώμωνι³ ἴσον ἐστὶ. Ἀλλὰ τὸ μὲν⁴ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ⁵ ΔΘ τῇ ΔΒ⁶· καὶ ὁ ΝΕΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΗ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΕΟ γνώμων καὶ τὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ

ipsi ΑΑ æquale est quia et ΑΓ ipsi ΓΒ est æqualis; et ΑΑ igitur ipsi ΔΖ æquale est. Commune addatur ΓΘ; totum igitur ΑΘ ipsi ΝΕΟ gnomoni æquale est. Sed ΑΘ quidem ipsum sub ΑΔ, ΔΒ est, æqualis enim ΔΘ ipsi ΔΒ; et ΝΕΟ igitur gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΔ; ergo ΝΕΟ gnomon et ΑΗ æqualia sunt ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo et ipsi ex ΓΔ quadrato.

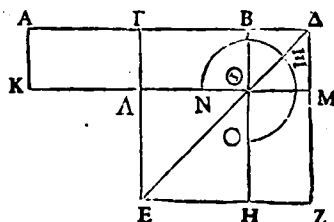
Avec la droite ΓΒ décrivons le quarré ΓΕΖΒ (46. 1), et joignons ΒΕ; par le point Δ conduisons ΔΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΒΖ (31. 1); par le point Θ conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΕΖ; et par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΒΜ.

Puisque le complément ΓΘ est égal au complément ΟΖ (43. 1), ajoutons le quarré commun ΔΜ, le rectangle entier ΓΜ sera égal au rectangle entier ΔΖ. Mais ΓΜ est égal à ΑΑ (36. 3), puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ; donc le rectangle ΑΑ est égal au rectangle ΔΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΘ, le rectangle entier ΑΘ sera égal au gnomon ΝΕΟ; mais ΑΘ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, puisque ΔΘ est égal à ΔΒ; donc le gnomon ΝΕΟ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le quarré commun ΑΗ, qui est égal au quarré de ΓΔ (corol. 4. 2), le gnomon ΝΕΟ et le quarré ΑΗ seront égaux au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, et au quarré

96 LE DEUXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΔΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ.

Describatur enim ex ΓΔ quadratum ΓΕΖΔ, et jungatur ΔΕ, et per Β quidem punctum alterutri ipsarum ΓΕ, ΔΖ parallela ducatur ΒΗ; per Θ vero punctum alterutri ipsarum ΑΔ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ; et adhuc per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΔΜ parallela ducatur ΑΚ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν² ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. Αλλὰ³ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστὶ· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστὶν ἴσον⁴. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΕΟ γνώμωνι ἐστὶν ἴσον. Αλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστ. ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΕΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ⁵. Κοινὸν προσκείσθω ΑΗ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, æquale est et ΑΛ ipsi ΓΘ. Sed ΓΘ ipsi ΘΖ æquale est; et ΑΛ igitur ipsi ΘΖ est æquale. Commune addatur ΓΜ; cum igitur ΑΜ ipsi ΝΕΘ guomoni est æquale. Sed ΑΜ est ipsum sub ΑΔ, ΔΒ, æqualis enim est ΑΜ ipsi ΔΒ; et igitur ΝΕΘ gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ΓΒ quadrato; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ΝΕΘ guomoni et ipsi ΑΗ. Sed ΝΕΘ gno-

Avec la droite ΓΔ décrivons le carré ΓΕΖΔ (46. 1); joignons ΔΕ; par le point Β conduisons ΒΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (31. 1); par le point Θ, conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΕΖ, et enfin par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΔΜ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘΖ (45. 1); donc le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΘΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΜ, le rectangle entier ΑΜ sera égal au gnomon ΝΕΟ. Mais ΑΜ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, car ΔΜ est égal à ΔΒ (4. 2); donc le gnomon ΝΕΟ est égal au rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le carré ΑΗ qui est égal au carré de ΓΒ, le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le carré de ΓΒ sera égal au gnomon ΝΕΟ et au carré ΑΗ.

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 97.

ΞΟ γνώμονι καὶ τῇ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώ-
μων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον,
ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ
περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ
τετράγωνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνῳ.
Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἕξῃς.

mon et ΛΗ totum sunt ΓΕΖΔ quadratum, quod
est ex ΓΔ; ergo sub ΑΔ, ΔΒ contentum rec-
tangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi
ex ΓΔ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

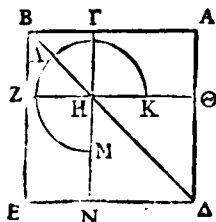
Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ, τὸ ἀπὸ
τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ
συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περι-
εχμένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ
τμήματος τετράγωνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχῃ
κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λήξω ὅτι τὰ

PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur utcumque, ipsa ex totâ
et ex uno segmentorum, simul sumpta quadrata
æqualia sunt et ipsi bis sub totâ et dicto
segmento contento rectangulo, et ipsi ex reli-
quo segmento quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit utcumque in
Γ puncto; dico ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia



ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ,
ΒΓ περιεχμένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ
τετράγωνῳ.

esse et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectan-
gulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.

Mais le gnomon ΝΞΟ, et le quarré ΛΗ sont le quarré entier ΓΕΖΔ, qui est le
quarré de ΓΔ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le quarré de ΓΒ est
égal au quarré de ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si une ligne droite est coupée d'une manière quelconque, le quarré de la
droite entière et le quarré de l'un des segments, pris ensemble, sont égaux à
deux fois le rectangle compris sous la droite entière et ledit segment, et au quarré
du segment restant.

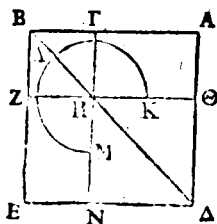
Qu'une droite ΑΒ soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis
que les quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris
sous ΑΒ, ΒΓ, et au quarré de ΓΑ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείμενόν τὸ ΓΖ· ὅλῳ ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν². τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσια ἐστὶ τοῦ ΑΖ. ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΑΜ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΑΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσια ἐστὶ τοῦ ΑΖ. Ἐστὶ δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ

Describatur enim ex AB quadratum $A\Delta EB$;
et construatur figura.

Quoniam igitur æquale est AH ipsi HE , commune addatur FZ ; totum igitur AZ toti FE æquale est; ergo AZ , FE dupla sunt ipsius AZ . Sed AZ , FE ipse KAM sunt gnomon et FZ quadratum; KAM igitur gnomon et FZ dupla sunt ipsius AZ . Est autem ipsius AZ duplum et ipsum bis sub AB , BF , æqualis enim BZ



ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ τε-
 τράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.
 Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΝ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΓ
 τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΑΜ γνῶμων καὶ τὰ ΓΖ,
 ΘΝ τετράγωνα ἴτα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ,
 ΒΓ περιχομένῳ ἑρροζωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ
 τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΚΑΜ γνῶμων καὶ τὰ ΓΖ,
 ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ,
 ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ

ipsi BF ; ergo KAM gnomon et FZ quadratum æqualia sunt ipsi bis sub AB , BF . Commune addatur ON , quod est ex AF quadratum; ergo KAM gnomon et FZ , ON quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub AB , BF contento rectangulo et ipsi ex AF quadrato. Sed KAM gnomon et FZ , ON quadrata totum sunt ADEB et FZ , quæ sunt ex AB , BF quadrata; ergo ex AB , BF quadrata æqualia sunt ipsi bis sub AB , BF con-

Avec AB décrivons le carré $ADBE$ (46. 1); et construisons la figure.

Puisque le rectangle AH est égal au rectangle HE (43. 1), ajoutons le carré commun IZ; le rectangle entier AZ sera égal au rectangle entier IE; donc les rectangles AZ, IE sont doubles du rectangle AZ. Mais les rectangles AZ, IE sont le gnomon KAM et le carré IZ; donc le gnomon KAM et le carré IZ sont doubles du rectangle AZ. Mais deux fois le rectangle sous AB, BF est double du rectangle AZ, car BZ est égal à BF (cor. 4. 2); donc le gnomon KAM et le carré IZ sont égaux à deux fois le rectangle sous AB, BF. Ajoutons le carré commun EN, qui est le carré de AF; le gnomon KAM et les carrés IZ, EN seront égaux à deux fois le rectangle sous AB, BF, et au carré de AF. Mais le gnomon KAM et les carrés IZ, EN sont les carrés entiers ADEB, IZ, qui sont les

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 99

τῶν AB, BΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου. Εἰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

tento rectangulo cum ex AΓ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

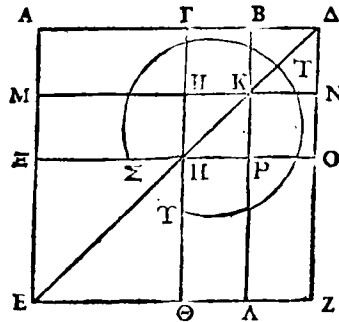
Εἰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχι, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ εἰς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχι κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB,

PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur utcunque, quater sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum cum ipso ex reliquo segmento quadrato æquale est ipsi ex totâ et dicto segmento tanquam ex unâ descripto quadrato.

Recta enim aliqua AB secta sit utcunque in Γ puncto; dico et quater sub AB, BΓ conten-



BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB, BΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

tum rectangulum cum ipso ex AΓ quadrato æquale esse ipsi ex ipsâ AB, BΓ tanquam ex unâ descripto quadrato.

quarrés des droites AB, BΓ; donc les quarrés des droites AB, BΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous AB, BΓ, et au quarré de AΓ. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, avec le quarré du segment restant, est égal au quarré décrit avec la droite entière et ledit segment, comme avec une seule droite.

Qu'une droite AB soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis que quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BΓ, avec le quarré de AΓ, est égal au quarré décrit avec les droites AB, BΓ, comme avec une seule droite.

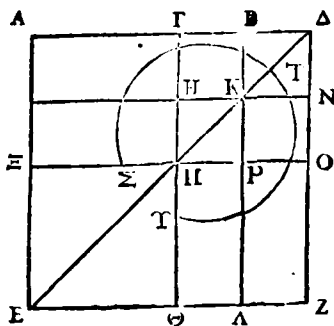
100 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτελέσθω γὰρ ἐπὶ εὐθείας τῇ AB εὐθείᾳ ἡ BA, καὶ κείσθω ἴση τῇ GB ἡ BA², καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AA τετράγωνον τὸ AEZΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλαῖον τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ BG τῇ BA, ἀλλὰ ἡ μὲν GB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BA τῇ KN, καὶ ἡ HK ἄρα³ τῇ KN ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν GB τῇ BA, ἡ δὲ HK τῇ KN, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ⁵ τὸ μὲν⁶ ΓΚ

Producatur enim in directum ipsi AB recta BA, et ponatur æqualis ipsi GB ipsa BA, et describatur ex AA quadratum AEZA, et construatur dupla figura.

Quoniam igitur æqualis est BG ipsi BA, sed GB quidem ipsi HK est æqualis, et BA ipsi KN; et HK igitur ipsi KN est æqualis. Propter eadem utique et PR ipsi PO est æqualis. Et quoniam æqualis est GB quidem ipsi BA, et HK ipsi KN;



τῷ BN, τὸ δὲ HP τῷ KO. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ PN ἐστὶν ἴσον⁷, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ BN ἄρα τῷ HP ἴσον ἐστὶ⁸. τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, HP, PN ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ GB τῇ BA, ἀλλὰ ἡ μὲν BA τῇ BK, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΓΗ ἐστὶν⁹ ἴση, ἡ δὲ GB τῇ HK, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΗΠ ἐστὶν

æquale igitur est GK quidem ipsi BN, et HP ipsi KO. Sed GK ipsi PN est æquale, complementa enim sunt ipsius GO parallelogrammi; et BN igitur ipsi HP æquale est; quatuor igitur GK, ΚΔ, HP, PN æqualia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius GK. Rursus, quoniam æqualis est GB ipsi BA, sed BA quidem ipsi BK, hoc est, ipsi GH est æqualis, GB vero ipsi HK, hoc est,

Conduisons la droite BA dans la direction de AB; faisons BA égal à BG; décrivons avec AA le carré AEZA (46. 2), et construisons une double figure.

Puisque BG est égal à BA, que GB est égal à HK (34. 1), et BA égal à KN, la droite HK est égale à la droite KN. La droite PP est égale à la droite PO, par la même raison. Et puisque BG est égal à BA, et HK égal à KN, le rectangle GK est égal au rectangle BN, et le rectangle HP égal au rectangle KO (36. 1). Mais le rectangle GK est égal au rectangle PN (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme GO; donc le rectangle EN est égal au rectangle HP; donc les quatre rectangles GK, ΚΔ, HP, PN sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont le quadruple du rectangle GK. De plus, puisque GB est égal à BA, et BA égal à BK, c'est-à-dire à GH (34. 1), et que GB est égal à HK, c'est-à-dire à HP, la

ἴση¹⁰. καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἔστί¹¹. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἔστί καὶ τὸ μὲν¹² ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΑ τῷ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΑ ἔστιν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΑ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἔστί¹³. τὰ τεσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΑ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἔστιν· τὰ τεσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσια ἔστιν¹⁴. Εδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ ἂ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνῶμονα τετραπλάσια ἔστι τοῦ ΑΚ¹⁵. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἔστιν, ἴση γὰρ¹⁶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἔστι τοῦ ΑΚ. Εδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνῶμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἔστί τῷ ΣΤΥ γνῶμονι. Κοινὸν προσκίσθω τὸ ΕΘ, ὃ ἔστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ¹⁷ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἔστί τῷ ΣΤΥ γνῶμονι καὶ τῷ ΕΘ. Ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνῶμων καὶ τὸ ΕΘ ὅλον ἔστι τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὃ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ,

ipsi ΗΠ est æqualis; et ΓΗ igitur ipsi ΗΠ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΓΗ quidem ipsi ΗΠ, et ΗΡ ipsi ΡΟ; æquale est et ΑΗ quidem ipsi ΜΠ, et ΠΑ ipsi ΡΖ. Sed ΜΠ ipsi ΠΑ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΜΑ parallelogrammi; et ΑΗ igitur ipsi ΡΖ æquale est; quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΑ, ΡΖ æqualia inter se sunt; quatuor igitur ipsius ΑΗ quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ ipsius ΓΚ quadrupla; ergo octo quæ continet ΣΤΥ gnomonon quadrupla sunt ipsius ΑΚ. Et quoniam ΑΚ ipsum sub ΑΒ, ΒΔ est, æqualis enim est ΚΒ ipsi ΒΔ; ergo ipsum quater sub ΑΒ, ΒΔ quadruplum est ipsius ΑΚ. Ostensus est autem ipsius ΑΚ quadruplus et ΣΤΥ gnomon. Ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni. Commune addatur ΕΘ, quod æquale est ipsi ex ΑΓ quadrato; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ contentum rectangulum cum ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni et ipsi ΕΘ. Sed ΣΤΥ gnomon et ΕΘ totum sunt ΑΕΖΔ

droite ΓΗ est égale à la droite ΗΠ. Et puisque ΓΗ est égal à ΗΠ, et que ΠΡ est égal à ΡΟ, le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΜΠ, et le rectangle ΠΑ égal au rectangle ΡΖ (36. 1). Mais le rectangle ΜΠ est égal au rectangle ΠΑ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΜΑ; donc le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΡΖ; donc les quatre rectangles ΑΗ, ΜΠ, ΠΑ, ΡΖ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont quadruples du rectangle ΑΗ. Mais on a démontré que les quatre carrés ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΡΝ sont quadruples du carré ΓΚ; donc les huit figures qui composent le gnomon ΣΤΥ sont quadruples du rectangle ΑΚ. Mais le rectangle ΑΚ est sous ΑΒ, ΒΔ; car ΚΒ est égal à ΒΔ (cor. 4. 2); donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est quadruple du rectangle ΑΚ. Mais on a démontré que le gnomon ΣΤΥ est quadruple du rectangle ΑΚ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est égal au gnomon ΣΤΥ. Ajoutons le carré commun ΕΘ, qui est égal au carré de ΑΓ (cor. 4. 2); quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΔ, avec le carré de ΑΓ sera égal au gnomon ΣΤΥ et au carré ΕΘ. Mais le gnomon ΣΤΥ et le carré ΕΘ sont le carré entier ΑΕΖΔ, qui est décrit

ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς¹⁷ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς¹⁸ ΑΔ τετραγώνῳ. Ἰσθὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ¹⁹. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς²⁰ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Εὐν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἐξῆς.

quadratum, quod est ex ΑΔ; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ cum ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato. Æqualis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ; ergo quater sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato, hoc est, ex ipsâ ΑΒ et ΒΓ tanquam ex unâ descripto quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετραγῶνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τεμνῶν τετραγώνου.

Εὐθεία γάρ τις ἡ ΑΒ τετμηθῶ εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγῶνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐχθῶ γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπ-

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ex inæqualibus totius segmentis quadrata dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex ipsâ inter sectiones quadrati.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla esse ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum.

Ducatur enim a Γ ipsi ΑΒ ad rectas ΓΕ, et ponatur æqualis utrique ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et jun-

avec ΑΔ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ avec le quarré de ΒΓ est égal au quarré de ΑΔ. Mais ΒΔ est égal à ΒΓ; donc quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ avec le quarré de ΑΓ est égal au quarré de ΑΔ, c'est-à-dire au quarré décrit avec ΑΒ et ΒΓ comme avec une seule droite. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, les quarrés des segments inégaux de la droite entière sont doubles du quarré de la moitié de cette droite et du quarré de la droite placée entre les sections.

Que la droite ΑΒ soit coupée en parties égales en Γ, et en parties inégales en Δ; je dis que les quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ.

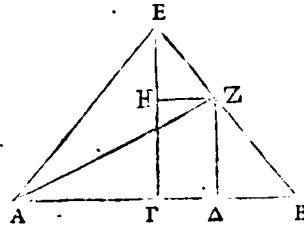
Du point Γ conduisons ΓΕ perpendiculaire à ΑΒ (II. 1); f. isons la droite ΕΓ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΓΒ, et joignons ΕΑ, ΕΒ; par le point

εξέχθωσαν αἱ AE, EB , καὶ διὰ τὸν τοῦ Δ τῇ ET παράλληλος ἤχθω ἡ ΔZ , διὰ δὲ τοῦ Z τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ZH , καὶ ἐπέξεύχθω ἡ AZ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ TE , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ EAG γωνία τῇ ὑπὸ AET . Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῇ Γ , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ EAG, AET μιᾶ ὀρθῇ ἵται εἶσιν, καὶ εἶσιν ἵται²· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἔστιν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ TEA, TAE . Διὰ τὰ αὐτὰ

gantur AE, EB , et per Δ quidem ipsi ET parallela ducatur ΔZ , per Z vero ipsi AB parallela ducatur ZH , et jungatur AZ .

Et quoniam æqualis est AG ipsi TE , æqualis est et EAG angulus ipsi AET . Et quoniam rectus est ad Γ ; reliqui igitur EAG, AET uni recto æquales sunt, et sunt æquales; dimidius igitur recti est uterque ipsorum TEA, TAE . Propter eadem utique et



δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ TEB, EBT ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ AEB ὀρθὴ ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ HEZ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EHZ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ETB · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EZH ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν³ ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ EZH · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EH πλευρᾷ τῇ HZ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῇ B γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ZAB , ἴση

uterque ipsorum TEB, EBT dimidius est recti; totus igitur AEB rectus est. Et quoniam HEZ dimidius est recti, rectus autem EHZ , æqualis enim est interiori et opposito ETB ; reliquis igitur EZH dimidius est recti; æqualis igitur est HEZ angulus ipsi EZH ; quare et latus EH lateri HZ est æquale. Rursus quoniam ad B angulus dimidius est recti, rectus autem ZAB , æqualis enim est rursus interiori et opposito

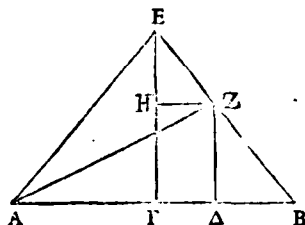
Δ conduisons ΔZ parallèle à ET (31. 1), et par le point Z conduisons ZH parallèle à AB , et joignons AZ .

Puisque AG est égal à TE , l'angle EAG est égal à l'angle AET (5. 1). Et puisque l'angle en Γ est droit, les angles restants EAG, AET sont égaux à un droit (32. 1); mais ils sont égaux; donc chacun des angles TEA, TAE est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles TEB, EBT est la moitié d'un droit; donc l'angle entier AEB est droit. Et puisque l'angle HEZ est la moitié d'un droit, et que l'angle EHZ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé ETB (29. 1), l'angle EZH est la moitié d'un droit; donc l'angle HEZ est égal à l'angle EZH ; donc le côté EH est égal au côté HZ (6. 1). De plus, puisque l'angle en B est la moitié d'un droit, et que l'angle ZAB est droit, car il est égal à l'angle intérieur

104 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

γάρ ἐστὶ πάλιν⁵ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῇ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς⁶ ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς⁷ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς⁸ ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὁρῶν γὰρ ἡ

ΕΓΒ; reliquus igitur ΔΖΒ dimidius est recti; æqualis igitur ad Β angulus ipsi ΔΖΒ; quare et latus ΖΔ lateri ΔΒ est æquale. Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æquale est et ipsum ex ΑΓ ipsi ex ΓΕ; ergo ex ΑΓ, ΓΕ quadrata dupla sunt ipsius ex ΑΓ. Ipsi autem ex ΑΓ, ΓΕ æquale est ex ΑΕ quadratum, rectus enim est ΑΓΕ angulus; ipsum igitur ex ΑΕ duplum est ipsius ex ΑΓ. Rursus quoniam æqualis est ΕΗ



ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς⁹ ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ¹⁰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον¹¹. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ¹². τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς

ipsi ΗΖ, æquale est et ipsum ex ΕΗ ipsi ex ΗΖ; ergo ex ΕΗ, ΗΖ quadrata dupla sunt ipsius ex ΗΖ quadrati. Ipsi autem ex ΕΗ, ΗΖ quadratis æquale est ipsum ex ΕΖ; ergo ex ΕΖ quadratum duplum est ipsius ex ΗΖ. Sed æquale ipsum est ΗΖ ipsi ex ΓΔ; ipsum igitur ex ΕΖ duplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem ipsum ex ΕΑ duplum ipsius ex ΑΓ; ergo ex ΑΕ, ΕΖ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum; ipsis vero ex ΑΕ, ΕΖ æquale est ex ΕΖ quadratum,

et opposé ΕΓΒ (29. 1), l'angle restant ΔΖΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle en Β est égal à l'angle ΔΖΒ; donc le côté ΖΔ est égal au côté ΔΒ (6. 1). Et puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, le carré de ΑΓ est égal au carré de ΓΕ; donc les carrés des droites ΑΓ, ΓΕ sont doubles du carré de ΑΓ. Mais le carré de ΕΑ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΕ (47. 1), car l'angle ΑΓΕ est droit; donc le carré de ΑΕ est double du carré de ΑΓ. De plus, puisque ΕΗ est égal à ΗΖ, le carré de ΕΗ est égal au carré de ΗΖ; donc les carrés des droites ΕΗ, ΗΖ sont doubles du carré de ΗΖ. Mais le carré de ΕΖ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1); donc le carré de ΕΖ est double du carré de ΗΖ. Mais ΗΖ est égal à ΓΔ (34. 1); donc le carré de ΕΖ est double du carré de ΗΖ. Mais le carré de ΕΑ est

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 105

ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἐστὶν¹³ ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἰση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Εὐὲν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὐὲν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἐκ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου¹.

double du carré de ΑΓ; donc les carrés des droites ΑΕ, ΕΖ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le carré de ΑΖ est égal aux carrés des droites ΑΕ, ΕΖ (47. 1), car l'angle ΑΕΖ est droit; donc le carré ΑΖ est double des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les carrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont égaux au carré de ΑΖ (47. 1), car l'angle en Δ est droit; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais ΔΖ est égal à ΔΒ; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION X.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le carré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le carré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du carré de la moitié de la droite entière, et du carré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

rectus enim est ΑΕΖ angulus; ergo ΑΖ quadratum duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi vero ex ΑΖ æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΖ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsa igitur ex ΑΔ, ΔΖ dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Æqualis autem ΔΖ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsa ex tota cum adjecta et ex adjecta, simul sumpta quadrata, dupla sunt et ipsius ex dimidia et ipsius ex composita ex dimidia et adjecta tanquam ex una descripti quadrati.

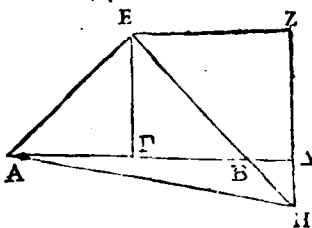
106 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εὐθεία γάρ τις ἡ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , προσκεισθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας ἡ BA . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AA , AB τετράγωνα διπλασιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB τετράγωνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΓΕ$, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν AG , GB , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ EA , EB . καὶ διὰ μὲν τοῦ E τῇ AA παράλληλος ἤχθω ἡ EZ . διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ

Recta enim aliqua AB secta sit bifariam in Γ , adjiciatur autem aliqua ei recta in directum BA ; dico ex AA , AB quadrata dupla esse ex AG , GB quadratorum.

Ducatur enim a Γ puncto ipsi AB ad rectos $ΓΕ$, et ponatur æqualis utrique ipsorum AG , GB , et jungantur EA , EB ; et per E quidem ipsi AA parallela ducatur EZ ; per Δ vero ipsi $ΓΕ$



$ΓΕ$ πάλιν² παράλληλος ἤχθω ἡ $ZΔ$. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς $ΕΓ$, $ZΔ$ εὐθεία τις ἐπέπυσεν ἡ EZ , αἱ ὑπὸ $ΓΕΖ$, $EZΔ$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ZEB , $EZΔ$ δύο ὀρθῶν ἐλασσόνες εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα EB , $ZΔ$ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ BA μέρη συμπίπτουσιν. Εκβλήσθωσαν, καὶ συμπεπτίτωσαν κατὰ τὸ H , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AH .

rursus parallela ducatur $ZΔ$. Et quoniam in parallelas rectas $ΕΓ$, $ZΔ$ recta aliqua incidit EZ , anguli $ΓΕΖ$, $EZΔ$ duobus rectis æquales sunt; ergo ZEB , $EZΔ$ duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ conveniunt; ergo EB , $ZΔ$ productæ ad partes BA convenient. Producantur, et conveniant in H , et jungatur AH .

Qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales en Γ , et qu'on lui ajoute directement une droite BA ; je dis que les quarrés des droites AA , AB sont doubles des quarrés des droites AG , GB .

Du point Γ conduisons $ΓΕ$ perpendiculaire à AB (11. 1); faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites AG , GB ; joignons EA , EB ; par le point E conduisons EZ parallèle à AA ; et par le point Δ conduisons $ZΔ$ parallèle à $ΓΕ$ (31. 1). Puisque la droite EZ tombe sur les parallèles $ΕΓ$, $ZΔ$, les angles $ΓΕΖ$, $EZΔ$ sont égaux à deux droits (29. 1); donc les angles ZEB , $EZΔ$ sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits (dém. 5); donc les droites EB , $ZΔ$ prolongées se rencontreront du côté BA . Prolongeons ces droites; qu'elles se rencontrent au point H ; et joignons AH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς
τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν³ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ
ΕΑΓ, ΑΕΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν
ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα
ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν
ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ.
Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ
ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλάξ γάρ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ⁵
τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ
πλευρᾷ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ
ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ,
ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ
ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ
ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ
ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ
ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς⁶ ΕΓ τετραγώ-
νον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν
ΕΓ, ΓΑ τετραγῶνα διπλασιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς
ΓΑ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον
ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετρά-
γωνον διπλασίον ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώ-
νου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ

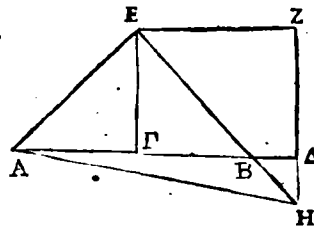
Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æqualis
est et angulus ΑΕΓ ipsi ΕΑΓ; atque rectus est
ad Γ; dimidius igitur recti est uterque ipso-
rum ΕΑΓ, ΑΕΓ. Propter eadem utique et uterque
ipsorum ΓΕΒ, ΕΒΓ dimidius est recti; rectus
igitur est ΑΕΒ. Et quoniam dimidius recti est ΕΒΓ;
dimidius igitur recti est et ΔΒΗ. Est autem et ΒΔΗ
rectus; æqualis enim est ipsi ΔΓΕ alterno. Reli-
quus igitur ΔΗΕ ipsi ΔΒΗ est æqualis; quare et
latus ΒΔ lateri ΔΗ est æquale. Rursus, quoniam
ΕΗΖ dimidius est recti, rectus autem est qui
ad Ζ, æqualis enim est opposito qui ad Γ; reli-
quus igitur ΖΕΗ dimidius est recti; æqualis igitur
ΕΗΖ angulus ipsi ΖΕΗ; quare et latus ΗΖ lateri
ΖΕ est æquale. Et quoniam æqualis est ΕΓ ipsi ΓΑ,
æquale est et ex ΕΓ quadratum ipsi ex ΓΑ qua-
drato. Ergo ex ΕΓ, ΓΑ quadrata dupla sunt ex ΓΑ
quadrati. Ipsi autem ex ΕΓ, ΓΑ æquale est ipsum
ex ΑΕ; ergo ex ΕΑ quadratum duplum est ipsius
ex ΑΓ quadrato. Rursus, quoniam æqualis est ΖΗ
ipsi ΖΕ, æquale est et ipsum ex ΗΖ ipsi ex ΖΕ. Ipsa
igitur ex ΗΖ, ΖΕ dupla sunt ipsius ex ΕΖ. Ipsa
autem ex ΗΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΗ. Ipsum

Puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΕΑΓ (5. 1.); mais l'angle
en Γ est droit; donc chacun des angles ΕΑΓ, ΑΕΓ est la moitié d'un droit (32. 1).
Par la même raison, chacun des angles ΓΕΒ, ΕΒΓ est la moitié d'un droit; donc
l'angle ΑΕΒ est droit. Et puisque l'angle ΕΒΓ est la moitié d'un angle droit, l'angle
ΔΒΗ est la moitié d'un droit (15. 1). Mais l'angle ΒΔΗ est droit (29. 1), car il est
égal à l'angle alterne ΔΓΕ; donc l'angle restant ΔΗΒ est égal à l'angle ΔΒΗ; donc le
côté ΒΔ est égal au côté ΔΗ (6. 1). De plus, puisque l'angle ΕΗΖ est la moitié d'un
droit, et que l'angle en Ζ est droit, car il est égal à l'angle opposé en Γ (34. 1),
l'angle restant ΖΕΗ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΕΗΖ est égal à l'angle
ΖΕΗ; donc le côté ΗΖ est égal au côté ΖΕ (6. 1). Et puisque ΕΓ est égal à ΓΑ, le
quarré de ΕΓ est égal au quarré de ΓΑ; donc les quarrés des droites ΕΓ, ΓΑ
sont doubles du quarré de ΓΑ. Mais le quarré de ΑΕ est égal aux quarrés des
droites ΕΓ, ΓΑ (47. 1); donc le quarré de ΕΑ est double du quarré de ΑΓ. De

108 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τῷ ἀπὸ τῆς ZE . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν HZ , ZE διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν HZ , ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . Ἰση δὲ EZ τῇ $\Gamma\Delta$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. Εδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE , EH τετράγωνα διπλάσιά ἐστι πῶν

igitur ex EH duplum est ipsius ex EZ . Aequalis autem EZ ipsi $\Gamma\Delta$; ergo ex EH quadratum duplum est ipsius ex $\Gamma\Delta$. Demonstratum est autem et ipsum ex EA duplum ipsius $\Gamma\Delta$; ergo ex AE , EH quadrata dupla sunt ex $\Gamma\Delta$, quadratorum. Ipsi autem ex AE , EH quadratis æquale est ex AH quadratum; ipsum igitur ex AH duplum est ipsorum $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Ipsi autem ex AH æqualia sunt ipsa ex $\Delta\Delta$, ΔH ; ipsa



ἀπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ τετράγωνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE , EH τετράγωνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔH . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔH διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Ἰση δὲ ἡ ΔH τῇ ΔB . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ τετράγωνων. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur ex $\Delta\Delta$, ΔH dupla sunt ipsorum ex $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Aequalis autem est ΔH ipsi ΔB ; ergo ex $\Delta\Delta$, ΔB quadrata dupla sunt ex $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$ quadratorum. Si igitur recta, etc.

plus, puisque ZH est égal à ZE , le carré de HZ est égal au carré de ZE ; donc les carrés des droites HZ , ZE sont doubles du carré de EZ . Mais le carré de EH est égal aux carrés des droites HZ , ZE (47. 1); donc le carré de EH est double du carré de EZ . Mais EZ est égal à $\Gamma\Delta$; donc le carré de EH est double du carré de $\Gamma\Delta$. Mais on a démontré que le carré de EA est double du carré de $\Gamma\Delta$; donc les carrés des droites AE , EH sont doubles des carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Mais le carré de AH est égal aux carrés des droites AE , EH (47. 1); donc le carré AH est double des carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Mais les carrés des droites $\Delta\Delta$, ΔH sont égaux au carré de AH (47. 1); donc les carrés des droites $\Delta\Delta$, ΔH sont doubles des carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$; mais la droite ΔH est égale à la droite ΔB ; donc les carrés des droites $\Delta\Delta$, ΔB sont doubles des carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta$. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

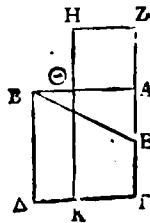
PROPOSITIO XI.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB . διὲ δὲ τὴν AB τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Datam rectam secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Sit data recta AB ; oportet igitur ipsam AB secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $AB\Delta\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ AG δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ὑπεζεύχθω ἡ BE , καὶ διήχθω ἡ GA ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον τὸ $Z\Theta$, καὶ

Describatur enim ex AB quadratum $AB\Delta\Gamma$; et secetur AG bifariam in E puncto, et jungatur BE , et producat GA in Z , et ponatur ipsi BE æqualis EZ , et describatur ex AZ quadratum $Z\Theta$, et producat $H\Theta$ ad K ; dico AB sectam

PROPOSITION XI. :

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

Avec la droite AB décrivons le carré $AB\Delta\Gamma$ (46. 1); coupons AG en deux parties égales au point E (10. 1); joignons BE , prolongeons GA vers Z ; faisons EZ égal à BE (3. 1); décrivons avec AZ le carré $Z\Theta$; et prolongeons $H\Theta$ vers K ; je dis que la

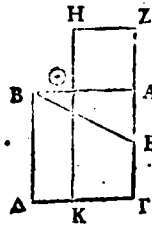
110 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τέμνεται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ

esse in Θ, ita ut sub ΑΒ, ΒΘ contentum rectangulum æquale faciat ipsi ex ΑΘ quadrato.

Quoniam enim recta ΑΓ secatur bifariam in Ε, adjicitur autem ei ipsa ΑΖ; ergo sub ΓΖ, ΖΑ contentum rectangulum cum ex ΑΕ quadrato æquale est ipsi ex ΕΖ quadrato. Æqua-



τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ². Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς³ ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ὁρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῇ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον⁴ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ

lis autem ΕΖ ἴpsi ΕΒ; ergo sub ΓΖ, ΖΑ contentum rectangulum cum ex ΑΕ quadrato æquale est ipsi ex ΕΒ quadrato. Sed ipsi ex ΕΒ æqualia sunt ipsa ex ΒΑ, ΑΕ, rectus enim est ad Α angulus; ipsum igitur sub ΓΖ, ΖΑ cum ipso ex ΑΕ æquale est ipsis ex ΒΑ, ΑΕ. Commune auferatur ipsum ex ΑΕ; reliquum igitur sub ΓΖ, ΖΑ contentum rectangulum æquale est ipsi ex ΑΒ quadrato. Et est ipsum quidem sub ΓΖ, ΖΑ ipsum ΖΚ, æqualis enim est ΑΖ ipsi ΖΗ; ipsum

droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, ΒΘ est égal au carré de ΑΘ.

Puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales en Ε, que ΑΖ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ΖΑ avec le carré de ΑΕ est égal au carré de ΕΖ (6. 2). Mais ΕΖ est égal à ΕΒ; donc le rectangle compris sous ΓΖ, ΖΑ avec le carré de ΑΕ, est égal au carré de ΕΒ. Mais les carrés des droites ΒΑ, ΑΕ sont égaux au carré de ΕΒ (47. 1), car l'angle en Α est droit; donc le rectangle sous ΓΖ, ΖΑ avec le carré de ΑΕ est égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΕ. Retranchons le carré commun de ΑΕ; le rectangle restant compris sous ΓΖ, ΖΑ sera égal au carré de ΑΒ. Mais le rectangle sous les droites ΓΖ, ΖΑ est le rectangle

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 111

τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἢ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφ-
 ἡρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον
 ἐστὶ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ
 ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δευτέρα εὐθεία ἢ ΑΒ τέτμηται κατὰ
 τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον
 ὀρθογώνιον ἴσον ποιῇν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.
 Ὅπερ εἶδει ποιῆται.

vero ex AB ipsum AD; ipsum igitur ZK æquale
 est ipsi AD. Commune auferatur AK; reliquum
 igitur ZO ipsi OD æquale est. Et est quidem ZO
 ipsum ex AO; ipsum vero OD ipsum sub AB,
 BO; ipsi igitur sub AB, BO contentum rec-
 tangelum æquale est ipsi ex OA quadrato.

Ergo data recta AB secta est in Θ, ita ut ipsum
 sub AB, BO contentum rectangelum æquale fa-
 ciat ipsi ex OA quadrato. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εν τῇς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς
 τὴν ἀμβλείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τε-
 τράγωνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλείαν
 γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ
 περιεχόμενῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμ-
 βλείαν γωνίαν ἰσῶν ἢ ἐκτελειθεῖσαν· ἢ καθέτος
 πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβάνουσας ἐκτὸς ὑπὸ τῆς
 καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

PROPOSITIO XII.

In obtusangulis triangulis quadratum ex la-
 tere obtusum angulum subtendente majus est
 quàm quadrata ex lateribus obtusum angulum
 continentibus, contento bis sub uno ipsorum
 circa obtusum angulum in quod productum
 perpendicularis cadit, et assumptâ extra a per-
 pendiculari ad obtusum angulum.

ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le quarré de AB est le quarré AD; donc
 le rectangle ZK est égal au quarré AD. Retranchons le rectangle commun AK;
 le quarré restant ZO sera égal au rectangle OD. Mais ZO est le quarré de AO, et OD
 est le rectangle sous AB, BO; donc le rectangle compris sous AB, BO est égal au
 quarré de OA.

Donc la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous
 AB, BO est égal au quarré de OA; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Dans les triangles obtusangles, le quarré du côté qui soutend l'angle obtus
 est plus grand que les quarrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux
 fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement
 duquel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la
 perpendiculaire à l'angle obtus.

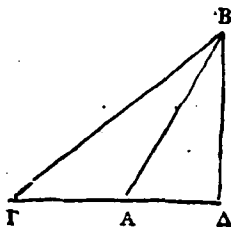
112 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἄμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἄμβλειαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν², καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκτεταθείσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λίγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνον μείζον ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων¹, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέμνεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲ ὑπὸ

Sit obtusangulum triangulum ΑΒΓ obtusum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur a Β puncto ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ; dico ex ΒΓ quadratum majus esse quam ex ΒΑ, ΑΓ quadrata, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo.

Quoniam enim recta ΓΔ secatur utcumque in Α puncto; ipsum igitur ex ΓΑ æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΔ quadratis, et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento



τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΔΒ ἴσα ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ³. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΔΒ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον⁵ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον⁶ ἴσον ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ

rectangulo. Commune addatur ipsum ex ΔΒ; ipsa igitur ex ΓΑ, ΔΒ æqualia sunt ipsis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. Sed ipsis quidem ex ΓΑ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΓΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΑΒ; ergo ex ΓΒ quadratum æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo; quare ex ΓΒ quadratum quam ipsa ex ΓΑ, ΑΒ

Soit le triangle obtusangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΒΑΓ obtus; du point Β conduisons ΒΔ perpendiculaire sur ΓΑ prolongé; je dis que le carré de ΒΓ est plus grand que les carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ.

Car puisque la droite ΓΑ est coupée d'une manière quelconque au point Α, le carré de ΓΑ est égal aux carrés des droites ΓΑ, ΑΔ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ (4. 2). Ajoutons le carré commun de ΔΒ; les carrés de ΓΑ, ΔΒ seront égaux aux carrés des droites ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ. Mais le carré de ΓΒ est égal aux carrés des droites ΓΑ, ΔΒ (47.), car l'angle en Δ est droit, et le carré de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΔ, ΔΒ;

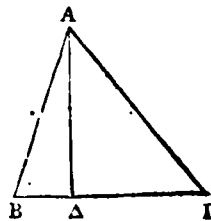
LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 113

δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μείζον ἐστὶ, τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις, καὶ τὰ ἰζήσ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὲς ὑπὸ τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκ τῆς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξείαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ση-



μίῳ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

quadrata majus est, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. In obtusangulis igitur, etc.

PROPOSITIO XIII.

In acutangulis triangulis ex latere acutum angulum subtendente quadratum minus est quam quadrata ex lateribus acutum angulum continentibus contento bis sub uno ipsorum circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, et assumptâ intus a perpendiculari ad acutum angulum.

Sit acutangulum triangulum ΑΒΓ acutum habens ad Β angulum, et ducatur ab Α puncto

ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico ex ΑΓ quadratum minus esse quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo.

donc le carré de ΓΒ est égal aux carrés des droites ΓΑ, ΑΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ; donc le carré de ΓΒ est plus grand que les carrés des droites ΓΑ, ΑΒ de deux fois le rectangle sous ΓΑ, ΑΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

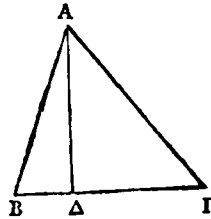
Dans les triangles acutangles, le carré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les carrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

Soit le triangle acutangle ΑΒΓ ayant l'angle aigu en Β; du point Α conduisons sur la droite ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le carré de ΑΓ est plus petit que les carrés des droites ΓΒ, ΒΑ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ.

114 LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ εὐθεία ἡ ΓΒ τέτμεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ

Quoniam enim recta ΓΒ secta est utcumque in Δ; ergo ex ΓΒ, ΒΔ quadrata æqualia sunt et ipsi bis ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsi ex ΔΓ quadrato. Commune addatur ex ΔΑ quadratum; ergo ex ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsis ex ΔΑ, ΔΓ quadratis. Sed



τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ³ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ¹ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν⁵ ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ⁶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἑλαττόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις, καὶ τὰ ἰζῆς.

ipsis quidem ex ΒΔ, ΔΑ æquale est ex ΑΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsum ex ΑΓ; ipsa igitur ex ΓΒ, ΒΑ æqualia sunt et ipsi ex ΑΓ, et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ; quare solum ex ΑΓ minus est quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo. Ergo in acutangulis, etc.

Car puisque la droite ΓΒ est coupée d'une manière quelconque au point Δ, les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ et au quarré de ΔΓ (7. 2). Ajoutons le quarré commun de ΔΑ; les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ seront égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ, et aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ. Mais le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΒΔ, ΔΑ (47. 1), car l'angle en Δ est droit, et le quarré de ΑΓ est égal aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ; donc les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ sont égaux au quarré de ΑΓ et à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ; donc le seul quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

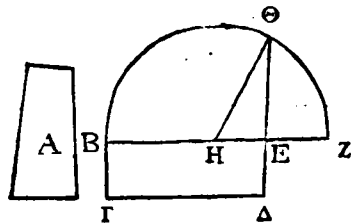
Εστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὲ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνιστάτω γάρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ἑμβόλιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ᾖ ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γιγισθεὶς ἀνείη τὸ ἐπιταχθέν. Συνίσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A; oportet igitur ipsi A rectilineo æquale quadratum constituere.

Constituatur enim ipsi A rectilineo æquale parallelogrammum rectangulum ΒΔ. Si igitur æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, factum erit propositum; constitutum est enim ipsi A rectilineo



τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὐ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τέτμησθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρον μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γιγράψθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκτελέσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,

æquale quadratum ΒΔ; si autem non, una ipsarum ΒΕ, ΕΔ major est. Sit major ΒΕ, et producaturs ad Ζ, et ponatur ipsi ΕΔ æqualis ΕΖ, et secetur ΒΖ bifariam in Η, et centro quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΒ, ΗΖ semicirculus describatur ΒΘΖ, et producaturs ΔΕ in Θ, et jungatur ΗΘ.

Quoniam igitur ΒΖ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε; ergo sub

PROPOSITION XIV.

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

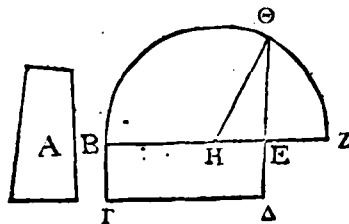
Soit A la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.

Construisons un parallélogramme rectangle ΒΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45. 1). Si ΒΕ était égal à ΕΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré ΒΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est point, l'un des côtés ΒΕ, ΕΔ est plus grand que l'autre. Que ΒΕ soit le plus grand, prolongeons-le vers Ζ, et faisons ΕΖ égal à ΕΔ (3. 1); coupons ΒΖ en deux parties égales au point Η; du centre Η et d'un intervalle égal à l'une des droites ΗΒ, ΗΖ, décrivons la demi-circonférence ΒΘΖ (dem. 5); prolongeons ΔΕ vers Θ, et joignons ΗΘ.

Puisque ΒΖ est partagé en deux parties égales au point Η, et en deux parties

ΕΖ περιεχόμενον ἑρβηζώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ
 τετραζώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραζώνῳ.
 Ἰση δὲ ἢ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ
 μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ.
 Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ
 τετράζωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ
 ἀπὸ τῆς³ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ.
 Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράζωνον· λοι-

BE, EZ contentum rectangulum cum ex HE quadrato æquale est ipsi ex HZ quadrato. Æqualis autem HZ ipsi HO; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsi ex HO. Ipsi autem ex HO æqualia sunt ex OE, EH quadrata; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsis ex OE, EH. Commune auferatur ex HE quadratum; reliquum igitur sub



πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ τὸ ὑπὸ τῶν BE, ΕΔ ἐστὶν ἴ, ἴση γὰρ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἰσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· καὶ⁵ τὸ Α ἄρα εὐθυγράμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Αἴσων τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

BE, EZ contentum rectangulum æquale est ipsi ex EΘ quadrato. Sed ipsum sub BE, EZ ipsum sub BE, EΔ est, æqualis enim est EZ ipsi EΔ; ergo BA parallelogrammum æquale est ipsi ex ΘE quadrato. Æquale autem est BA ipsi A rectilineo; et A igitur rectilineum æquale est ipsi ex EΘ descripto quadrato.

Ergo dato rectilineo A æquale quadratum
constituitur ex ΘE descriptum. Quod oportebat
facere.

inégales au point E ; le rectangle compris sous BE , EZ avec le quarré de HE , est égal au quarré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ ; donc le rectangle compris sous BE , EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47. 1) ; donc le rectangle compris sous BE , EZ avec le quarré de HE , est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE ; le rectangle restant compris sous BE , EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE , EZ est le rectangle compris sous BE , EΔ , puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A ; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec $E\Theta$ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A ; ce qu'il fallait faire.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R T E R T I U S.

ΟΡΟΙ.

α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσὶν¹. ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον ἐπὶ μηδέτερα μερὶ².

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἳ τινες ἀπτίμντοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ³ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ᾖσι.

DEFINITIONES.

1. *Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt; vel quorum quæ ex centris æquales sunt.*

2. *Recta circum tangere dicitur, quæ tangens circum et producta non secat circum in neutrà parte.*

3. *Circuli tangere sese dicuntur, qui sese tangentes non sese secant.*

4. *In circulo æqualiter distare a centro rectæ dicuntur, quando ex centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt.*

LIVRE TROISIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux, ou ceux dont les droites menées des centres aux circonférences sont égales.

2. Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle.

3. Les cercles qui ne se touchent et qui ne se coupent point, sont dits tangents entr'eux.

4. Dans un cercle, on dit que des droites sont également éloignées du centre, lorsque les perpendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales.

118 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ε. Μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ς'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχόμενη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστίν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος λαβῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιτεταχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχόμενη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιτεταχθεῶν εὐθειῶν.

θ. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινὰ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβημένη ἡ γωνία.

ι. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιχοῦσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐπ' αὐτῶν περιφερείας.

ια. Ὁμοία τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam major perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est contenta figura et ab recta et circuli circumferentiâ.

7. Segmenti autem angulus est, qui continetur ab recta et circuli circumferentiâ.

8. In segmento autem angulus est, quando in circumferentiâ segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectæ quæ est basis segmenti conjunguntur rectæ, contentus angulus ab junctis rectis.

9. Quando autem continentes angulum rectæ assumunt aliquam circumferentiam, illi dicitur insistere angulus.

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli positus est angulus, contenta figura et ab angulum continentibus rectis et assumptâ ab ipsis circumferentiâ.

11. Similia segmenta circuli sunt, quæ capiunt æquales angulos; vel in quibus anguli æquales inter se sunt.

5. La droite sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire est dite la plus éloignée du centre.

6. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par une circonférence de cercle.

7. L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et par une circonférence de cercle.

8. L'angle dans le segment est l'angle compris par les droites menées d'un point pris dans la circonférence du segment aux extrémités de la droite qui est la base du segment.

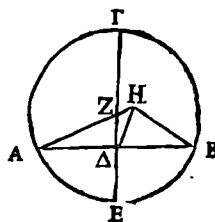
9. Mais lorsque les droites qui comprennent l'angle embrassent une portion de la circonférence, cet angle est dit appuyé à la circonférence.

10. Un secteur de cercle est une figure comprise entre deux rayons qui font un angle au centre et la portion de la circonférence qu'embrassent ces deux rayons.

11. Les segments des cercles sont semblables, lorsqu'ils reçoivent des angles égaux ou lorsque les angles qu'ils contiennent sont égaux entr'eux.

τῇ ὑπὸ HAB ἴση ἰστίν⁶. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐπιζήσας γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰστίν· ὀρθὴ ἄρα ἰστίν ἡ ὑπὸ HAB . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZAB ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ HAB , ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι⁸, ὅπερ ἰστίν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ H κέντρον ἰστί τοῦ ABF κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Z .

angulo HAB æqualis est. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium est; rectus igitur est HAB . Est autem et ZAB rectus; æqualis igitur est ZAB ipsi HAB , minor majori, quod est impossibile. Non igitur H centrum est ABF circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam præter Z .



Τὸ Z ἄρα σημεῖον κέντρον ἰστί τοῦ ABF κύκλου⁹. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι¹⁰.

Ergo Z punctum est centrum ABF circuli. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰάν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις¹¹ εὐθείαν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἰστί τὸ κέντρον τοῦ κύκλου¹².

Ex hoc utique evidens est, si in circulo recta quædam rectam quamdam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

une droite fait avec elle les angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10. 1); donc l'angle HAB est droit. Mais l'angle ZAB est droit; donc l'angle ZAB est égal à l'angle HAB ; le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point H n'est point le centre du cercle ABF . On démontrera semblablement que tout autre point, excepté Z , ne l'est pas.

Donc le point Z est le centre du cercle. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si dans un cercle une droite en coupe une autre en deux parties égales, et à angles droits, le centre du cercle est dans la secante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

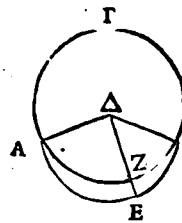
PROPOSITIO II.

Εάν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληθῇ δύο τυ-
χόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευ-
γνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας
αὐτοῦ εἰληφθῶ δύο τυχόντα² σημεῖα τὰ Α, Β. λέγω
ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα
ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Si circuli in circumferentiâ sumantur duo
qualibet puncta, hæc puncta conjungens recta
intra cadet circumulum.

Sit circulus ΑΒΓ, et in circumferentiâ ipsius
sumantur duo qualibet puncta Α, Β; dico ab
ipso Α ad Β conjunctam rectam intra cadere
circulum.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πίπτειω ἐκτὸς ὡς ἡ
ΑΕΒ, καὶ εἰληφθῶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,
καὶ ἴστω τὸ Δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ,
καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ³.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγ-
ω-
νου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέλλεται ἡ ΑΕΒ,

Non enim, sed si possibile, cadat extra
ut ΑΕΒ, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli, et
sit Δ, et jungantur ΔΑ, ΔΒ, et ducatur ΔΖΕ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΒ, æqua-
lis igitur et angulus ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; et quoniam
trianguli ΔΑΕ unum latus ΑΕΒ producitur,

PROPOSITION II.

Si dans une circonférence de cercle, on prend deux points quelconques, la
droite qui joindra ces deux points tombera dans le cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ; qu'on prène deux points quelconques Α, Β, dans sa cir-
conférence; je dis que la droite menée du point Α au point Β, tombera dans
le cercle.

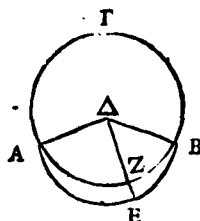
Car que cela ne soit point, et qu'elle tombe en dehors, si c'est possible, comme
ΑΕΖ; prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Δ, joignons ΔΑ, ΔΒ, et
menons ΔΖΕ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΒ, l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ (5. 1); et puis-
que l'on a prolongé un côté ΑΕΒ du triangle ΔΑΕ, l'angle ΔΕΒ est plus grand

122 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἰση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ

major igitur est ΔΕΒ angulus ipso ΔΑΕ. Æqualis autem ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; major igitur est ΔΕΒ ipso ΔΒΕ. Majorem autem angulum majus latus subtendit; major igitur est ΔΒ ipsa ΔΕ. Æqualis autem ΔΒ ipsi ΔΖ; major igitur est ΔΖ



τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πιστεύεται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα πιστεύεται. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ ταῖς ἑξῆς.

ipsa ΔΕ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur ab Α ad Β conjuncta recta extra cadet circumulum. Similiter utique ostendemus, neque in ipsam circumferentiam; intus igitur cadet. Si igitur circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ

Si in circulo recta aliqua per centrum rectam aliquam non per centrum bifariam secet,

que l'angle ΔΑΕ (16. 1). Mais l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ; donc l'angle ΔΕΒ est plus grand que l'angle ΔΒΕ. Mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (18. 1); donc ΔΒ est plus grand que ΔΕ. Mais ΔΒ est égal à ΔΖ; donc ΔΖ est plus grand que ΔΕ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Α au point Β ne tombe pas hors du cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe pas dans la circonférence; donc elle tombe en dedans du cercle. Donc, etc.

PROPOSITION III.

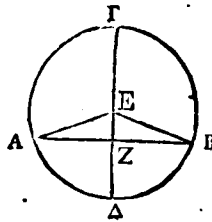
Si dans un cercle une droite menée par le centre coupe en deux parties égales une droite non menée par le centre, elle la coupera à angles

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 123

πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμένετω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γάρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ¹ δυοῖν ἴσαι εἰσὶ², καὶ βάσεις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα³ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ⁴. Ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα⁵ τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν⁶ τέμνει.

et ad rectos ipsam secat; et si eam ad rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ipso recta aliqua ΓΔ per centrum, rectam aliquam ΑΒ non per centrum bifariam secet in Ζ puncto; dico et ad rectos ipsam secare.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Ε, et jungantur ΕΑ, ΕΒ.

Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, communis autem ΖΕ, duæ utique duabus æquales sunt, et basis ΕΑ basi ΕΒ æqualis; angulus igitur ΑΖΕ angulo ΕΖΒ æqualis est. Quando autem recta super rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΑΖΕ, ΒΖΕ. Ergo ΓΔ per centrum ducta ipsam ΑΒ non per centrum ductam bifariam secans, et ad rectos ipsam secat.

droits; et si elle la coupe à angles droits, elle la coupera en deux parties égales.

Soit le cercle ΑΒΓ; que dans ce cercle, la droite ΓΔ menée par le centre coupe en deux parties égales au point Ζ la droite ΑΒ non menée par le centre; je dis qu'elle la coupe à angles droits.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 5); qu'il soit Ε, et joignons ΕΑ, ΕΒ.

Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite ΖΕ est commune, deux droites sont égales à deux droites; mais la base ΕΑ est égale à la base ΕΒ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΕΖΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur une autre droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit; donc chacun des angles ΑΖΕ, ΒΖΕ est droit. Donc la droite ΓΔ, menée par le centre, et qui coupe en deux parties égales la droite ΑΒ non menée par le centre, coupe aussi cette droite à angles droits.

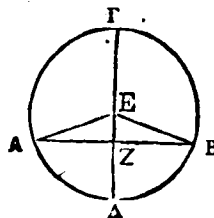
124 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμ-
νέτω· λίγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ'
ἐστίν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπὶ ἴση
ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ
ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ

Sed et ΓΔ ipsam ΑΒ ad rectos secet; dico et
bifariam ipsam secare, hoc est, æqualem esse
ΑΖ ipsi ΖΒ.

Eisdem enim constructis, quoniam æqualis
est ΕΑ ipsi ΕΒ, æqualis est et angulus ΕΑΖ ipsi
ΕΒΖ. Est autem et rectus ΑΖΕ recto ΒΖΕ æqua-



ΑΖΕ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνα ἐστί
τὰ ΕΑΖ, ΕΒΖ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις
ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ
ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτείνουσιν ὑπὸ
μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση
ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis; duo igitur triangula sunt ΕΑΖ, ΕΒΖ duos
angulos duobus angulis æquales habentia, et
unum latus uni lateri æquale; commune ipsis
ΕΖ, subtendens unum æqualium angulorum;
et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia
habebunt; æqualis igitur est ΑΖ ipsi ΖΒ. Si igi-
tur in circulo, etc.

Mais que la droite ΓΔ coupe la droite ΑΒ à angles droits; je dis qu'elle la coupe
en deux parties égales, c'est-à-dire que ΑΖ est égal à ΖΒ.

Faisons la même construction; puisque ΕΑ est égal à ΕΒ, l'angle ΕΑΖ est égal
à l'angle ΕΒΖ (5. 1). Mais l'angle droit ΑΖΕ est égal à l'angle droit ΒΖΕ; donc
ΕΑΖ, ΕΒΖ sont deux triangles qui ont deux angles égaux à deux angles, et un
côté égal à un côté, c'est-à-dire leur côté commun ΕΖ, qui soutend un des angles
égaux; donc ces deux triangles auront les côtés restants égaux aux côtés restants
(26. 1); donc ΑΖ est égal à ΖΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

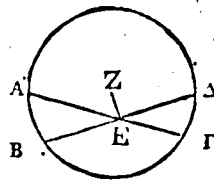
PROPOSITIO IV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὗται· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε δη-
μείον, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὗται· λέγω ὅτι οὐ
τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, non per
centrum ductæ, non sese secabunt bifariam.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso duæ rectæ ΑΓ,
ΒΔ sese secant in Ε puncto, non per centrum
ductæ; dico non eas sese secare bifariam.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τέμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα,
ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ
ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου,
καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Επεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐ-
θεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα
τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα

Si enim possibile, sese secant bifariam, ita ut
æqualis sit ΑΕ quidem ipsi ΕΓ, et ΒΕ ipsi
ΕΔ; et sumatur centrum ΑΒΓΔ circuli, et sit
Ζ, et jungatur ΖΕ.

Quoniam igitur recta aliqua ΖΕ per cen-
trum rectam aliquam ΑΓ non per centrum
bifariam secat, et ad rectos ipsam secat;

PROPOSITION IV.

Si dans un cercle deux droites non menées par le centre se coupent, elles
ne se coupent point en deux parties égales.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que dans ce cercle les deux droites ΑΓ, ΒΔ, non
menées par le centre, se coupent au point Ε; je dis qu'elles ne se coupent
point en deux parties égales.

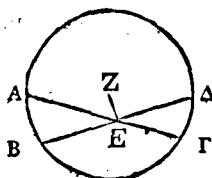
Car si cela est possible, qu'elles se coupent en deux parties égales, de ma-
nière que ΑΕ soit égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΔ; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ
(1. 3), qu'il soit le point Ζ; et joignons ΖΕ.

Puisque la droite ΖΕ, menée par le centre, coupe en deux parties égales
la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits (3. 3);

126 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσθιν⁴ ἡ ὑπὸ ZEA. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα τις ἡ ZE
εὐθεῖαν τινὰ τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα
τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα⁵

rectus igitur est ZEA. Rursus, quoniam recta
aliqua ZE rectam aliquam ΒΔ non per centrum,
bifariam secat, et ad rectos ipsam secat; rectus



ἡ ὑπὸ ZEB. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEA ὀρθή· ἴση ἄρα
ἡ ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEB, ἡ⁶ ἐλάττων τῇ μείζονι,
ὅπερ ἐστὶν ἄδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν
ἀλλήλας δίχα. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur est ZEB. Ostensus est autem et ZEA rec-
tus; æqualis igitur ZEA ipsi ZEB, minor ma-
jori, quod est impossibile. Non igitur ΑΓ, ΒΔ
sese secant bifariam. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Εὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἴσται
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τέμνεταισιν ἀλ-
λήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεία· λέγω ὅτι οὐκ ἴσται
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω
ἡ ΕΓ, καὶ δίηχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχῃ.

PROPOSITIO V.

Si duo circuli sese secant, non erit ipsorum
idem centrum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΗ sese secant in Β,
Γ punctis; dico non esse ipsorum idem cen-
trum.

Si enim possibile, sit Ε, et jungatur ΕΓ, et
ducatur ΕΖΗ utcumque.

donc l'angle ZEA est droit. De plus, puisque la droite ZE coupe en deux par-
ties égales la droite ΒΔ non menée par le centre, elle la coupera à angles
droits; donc l'angle ZEB est droit. Mais on a démontré que l'angle ZEA est
droit; donc l'angle ZEA est égal à l'angle ZEB, le plus petit au plus grand, ce
qui est impossible. Donc les droites ΑΓ, ΒΔ ne se coupent point en deux parties
égales. Donc, etc.

PROPOSITION V.

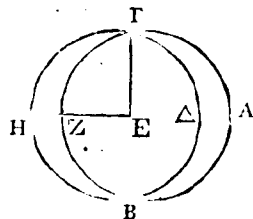
Si deux cercles se coupent, leur centre ne sera pas le même.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ se coupent aux deux points Β, Γ; je dis que
leur centre ne sera pas le même.

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Ε; joignons ΕΓ, et me-
nons ΕΖΗ d'une manière quelconque.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Εδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ.

Et quoniam E punctum centrum est ABΓ circuli, æqualis est EG ipsi EZ. Rursus, quoniam E punctum centrum est ΓΔΗ circuli, æqualis est GE ipsi EH. Ostensa est autem et EG



ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ὅρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση², ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν³ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Εάν ἄρα δύο, καὶ ταῖς ἐξής.

ipsi EZ æqualis; et ZE igitur ipsi EH est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur E punctum centrum est ABΓ, ΓΔΗ circulorum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

PROPOSITIO VI.

· Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός¹, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτόσθωσαν² αἱ ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται³ αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si duo circuli sese intra tangant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli ABΓ, ΓΔΕ sese tangant in Γ puncto; dico non esse ipsorum idem centrum.

Puisque le point E est le centre du cercle ABΓ, la droite EG est égale à EZ (déf. 5. 1.). De plus, puisque le point E est le centre du cercle ΓΔΗ, la droite GE est égale à EH. Mais on a démontré que EG est égal à EZ; donc ZE est égal à EH, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible. Donc le point E n'est pas le centre des cercles ABΓ, ΓΔΗ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, leur centre n'est pas le même.

Que les deux cercles ABΓ, ΓΔΕ se touchent au point Γ; je dis que leur centre n'est pas le même.

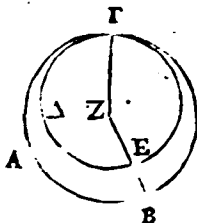
128 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Z, καὶ ἐπιζεύχτω
ἡ ZΓ, καὶ διήχθω ὡς ἐτυχεν ἡ ZEB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZΓ τῇ BZ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ
Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση

Si enim possibile, sit Z, et jungatur ZΓ, et
ducatur utcumque ZEB.

Quoniam igitur Z punctum centrum est ABΓ
circuli, æqualis est ZΓ ipsi BZ. Rursus, quo-
niam Z punctum centrum est ΓΔΕ circuli, æqua-



ἐστὶν ZΓ τῇ ZE. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ ZB ἴση·
καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ
μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἄδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z
σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ABΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐάν
ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis est ZΓ ipsi ZE. Ostensa est autem et ZΓ ipsi
ZB æqualis; et ZE igitur ipsi ZB est æqualis,
minor majori, quod est impossibile. Non igitur
Z punctum centrum est ABΓ, ΓΔΕ circularum.
Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐάν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληθῇ τι ση-
μεῖον ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ
σημεῖου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι

PROPOSITIO VII.

Si circuli in diametro sumatur aliquod punc-
tum quod non sit centrum circuli, ab ipso
autem puncto in circulum cadant rectæ qua-

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Z; joignons ZΓ, et menons
ZEB d'une manière quelconque.

Puisque le point Z est le centre du cercle ABΓ, la droite ZΓ est égale à BZ. De
plus, puisque le point Z est le centre du cercle ΓΔΕ, la droite ZΓ est égale à ZE.
Mais on a démontré que ZΓ est égal à ZB; donc ZE est égal à ZB, la plus petite à la
plus grande, ce qui est impossible; donc le point Z n'est point le centre des
cercles ABΓ, ΓΔΕ. Donc, etc.

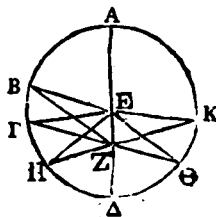
PROPOSITION VII.

Si dans le diamètre d'un cercle on prend un point qui ne soit pas le
centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circon-

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 129

τινὲς¹· μείσθη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἑζ-
γιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων
ἐστὶ· δύο δὲ μόνον² ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου
προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς
ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον
τὸ Ζ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον
δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς
τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτεύωσαν εὐθεῖαι τινες



αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μείσθη μὲν ἐστὶν ἡ
ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν
ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπιζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς
λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ΕΒ, ΕΖ ἄρα³ τῆς ΒΖ μεί-

dam, maxima quidem erit in qua centrum,
minima vero reliqua; aliarum autem, sem-
per propinquior ei quæ per centrum remo-
tiore major est; duæque solum æquales ab
eodem puncto cadent in circulum, ex utrâque
parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit
ΑΔ, et in ipsâ ΑΔ sumatur aliquod punctum
Ζ, quod non sit centrum circuli, centrum au-
tem circuli sit Ε, et a Ζ in ΑΒΓΔ circulum
cadant rectæ quædam ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; dico ex-

ximam quidem esse ΖΑ, minimam vero ΖΔ;
aliarum autem, ΖΒ quidem majorem ipsâ ΖΓ;
et ΖΓ ipsâ ΖΗ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reli-
quo majora sunt, ipsæ ΕΒ, ΕΖ igitur ipsâ ΒΖ

férence; la plus grande sera celle dans laquelle est le centre, et la plus petite
la droite restante; quant aux autres droites, la droite qui est plus près de
celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui en est
plus éloignée; et du même point on ne peut mener à la circonférence que deux
droites égales de l'un et l'autre côté de la plus petite.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, que ΑΔ soit son diamètre, prenons dans ΑΔ un point
quelconque Ζ qui ne soit pas le centre de ce cercle, que le centre du cercle soit le
point Ε, du point Ζ menons à la circonférence ΑΒΓΔ les droites ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ;
je dis que ΖΑ est la plus grande, et ΖΔ la plus petite; et que parmi les
autres, la droite ΖΒ est plus grande que ΖΓ, et la droite ΖΓ plus grande
que ΖΗ.

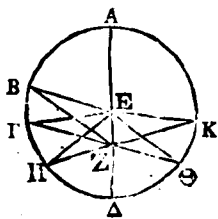
Joignons ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Puisque deux côtés d'un triangle sont plus grands que le côté restant

130 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ζενός εισιν. ἴση δὲ ἡ AE τῇ BE , αἱ ἄρα BE , EZ ἴσαι εἰσὶ τῇ AZ . μείζων ἄρα ἡ AZ τῆς BZ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ $ΓΕ$, κοινὴ δὲ ἡ ZE , δύο δὲ αἱ BE , EZ δυσὶ ταῖς $ΓΕ$, EZ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BEZ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΓΕΖ$ μείζων· βάσις ἄρα ἡ BZ βάσεως τῆς $ΓΖ$ μείζων ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΓΖ$ τῆς $ΗΖ$ μείζων ἐστὶ.

maiores sunt. Aequalis autem AE ipsi BE ; ergo BE , EZ æquales sunt ipsi AZ ; major igitur est AZ ipsâ BZ . Rursus, quoniam æqualis est BE ipsi $ΓΕ$, communis autem ZE , duæ utique BE , EZ duabus $ΓΕ$, EZ æquales sunt. Sed et angulus BEZ angulo $ΓΕΖ$ major; basis igitur BZ basi $ΓΖ$ major est. Propter eadem utique et $ΓΖ$ ipsâ $ΗΖ$ major est.



Πάλιν, ἐπεὶ αἱ HZ , ZE τῆς EH μείζονες εισιν, ἴση δὲ ἡ EH τῇ $ΕΔ$, αἱ ἄρα HZ , ZE τῆς $ΕΔ$ μείζονες εισιν. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ EZ . λοιπὴ ἄρα ἡ HZ λοιπῆς τῆς $ΖΔ$ μείζων ἐστὶ. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ $ΖΑ$, ἐλαχίστη δὲ ἡ $ΖΔ$. μείζων δὲ ἡ μὲν ZB τῆς $ZΓ$, ἡ δὲ $ZΓ$ τῆς ZH .

Rursus, quoniam HZ , ZE ipsâ EH majores sunt, æqualis autem EH ipsi $ΕΔ$; ergo HZ , ZE ipsâ $ΕΔ$ majores sunt. Communis auferatur EZ ; reliqua igitur HZ reliquâ $ΖΔ$ major est. Maxima quidem igitur $ΖΑ$, minima vero $ΖΔ$; major autem ZB quidem ipsâ $ZΓ$, et $ZΓ$ ipsâ ZH .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου δύο μόνον ἴσαι⁶ προσπιεσθῶνται πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον,

Dico et a Z puncto duas solum æquales cadere in $ΑΒΓΔ$ circulum, ex utrâque parte ip-

(21. 1), les droites EB , EZ sont plus grandes que la droite BZ . Mais la droite AE est égale à la droite BE ; donc les droites BE , EZ sont égales à la droite AZ ; donc la droite AZ est plus grande que la droite BZ . De plus, puisque BE est égal à $ΓΕ$, et que la droite ZE est commune, les deux droites BE , EZ sont égales aux deux droites $ΓΕ$, EZ . Mais l'angle BEZ est plus grand que l'angle $ΓΕΖ$; donc la base BZ est plus grande que la base $ΓΖ$ (24. 1). Par la même raison la droite $ΓΖ$ est plus grande que la droite $ΗΖ$.

De plus, puisque les droites HZ , ZE sont plus grandes que la droite EH , et que EH est égal à $ΕΔ$, les droites HZ , ZE sont plus grandes que $ΕΔ$. Retrançons la droite commune EZ ; la droite restante HZ sera plus grande que la droite restante $ΖΔ$. Donc la droite $ΖΑ$ est la plus grande, et la droite $ΖΔ$ la plus petite; donc la droite ZB est plus grande que la droite $ZΓ$, et la droite $ZΓ$ plus grande que la droite ZH .

Je dis que du point Z , on ne peut mener à la circonférence $ΑΒΓΔ$ que deux

ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Συνστάτω γάρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπείσεται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ⁸, καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση⁹, ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ¹⁰ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ καὶ οὕτως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσεις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστὶν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν¹¹ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπείσεται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

sus ΖΔ minimæ. Constituatur enim ad ΕΖ rectam, et ad punctum in eâ Ε, ipsi ΗΕΖ angulo æqualis ΖΕΘ, et jungatur ΖΘ. Quoniam igitur æqualis est ΗΕ ipsi ΕΘ, communis autem ΕΖ, duæ utique ΗΕ, ΕΖ duabus ΘΕ, ΕΖ æquales sunt; et angulus ΗΕΖ angulo ΘΕΖ æqualis; basis igitur ΖΗ basi ΖΘ æqualis est. Dico autem ipsi ΖΗ aliam æqualem non cadere in circulum a Ζ puncto. Si enim possibile, cadat ΖΚ. Et quoniam ΖΚ ipsi ΖΗ est æqualis, sed quidem et ΖΘ ipsi ΖΗ; et ΖΚ igitur ipsi ΘΖ est æqualis, propinquior ei quæ per centrum remotiori æqualis, quod impossibile.

Vel et hoc modo. Jungatur ΕΚ. Et quoniam æqualis est ΗΕ ipsi ΕΚ, communis autem ΕΖ, et basis ΖΗ basi ΖΚ æqualis; angulus igitur ΗΕΖ angulo ΚΕΖ æqualis est. Sed ΗΕΖ ipsi ΖΕΘ est æqualis; et ΖΕΘ igitur ipsi ΚΕΖ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur a Ζ puncto alia aliqua cadet in circulum æqualis ipsi ΗΖ; una igitur sola. Si igitur circuli, etc.

droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΖΔ. Car sur la droite ΕΖ et au point Ε de cette droite, faisons l'angle ΖΕΘ égal à l'angle ΗΕΖ (23. 1), et joignons ΖΘ. Puisque la droite ΗΕ est égale à la droite ΕΘ, et que la droite ΕΖ est commune, les deux droites ΗΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΘΕ, ΕΖ; mais l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΘΕΖ; donc la base ΖΗ est égale à la base ΖΘ (4. 1). Je dis que du point Ζ on ne peut mener à la circonférence une autre droite égale à ΖΗ. Car si cela est possible, menons ΖΚ. Puisque ΖΚ est égal à ΖΗ, et ΖΘ égal à ΖΗ, la droite ΖΚ est égale à la droite ΘΖ, une droite plus près de celle qui passe par le centre, égale à une droite qui en est plus éloignée, ce qui est impossible.

Ou d'une autre manière. Joignons ΕΚ. Et puisque ΗΕ est égal à ΕΚ, que la droite ΕΖ est commune, et que la base ΖΗ est égale à la base ΖΚ, l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΚΕΖ (8. 1). Mais l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΖΕΘ; donc l'angle ΖΕΘ est égal à l'angle ΚΕΖ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc du point Ζ, on ne peut pas mener à la circonférence une autre droite qui soit égale à ΗΖ; donc on n'en peut mener qu'une seule. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εάν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχῃ· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλῃν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μέγιστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μίζων ἐσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἡ ἐγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάττω. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερᾳ τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἐστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectæ quædam, quarum una per centrum, reliquæ autem utcunque; ipsarum quidem ad concavam circumferentiam cadentium rectarum maxima quidem est quæ per centrum; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major erit; ipsarum vero in convexam circumferentiam cadentium rectarum, minima quidem est quæ inter et punctum et diametrum; aliarum autem, semper propinquior minimæ remotiore est minor. Duæ autem solum æquales a puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓ, et extra ipsum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ab eo ducantur rectæ quædam ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, sit autem ΔΑ per centrum; dico earum quidem in ΑΕΖΓ conca-

PROPOSITION VIII.

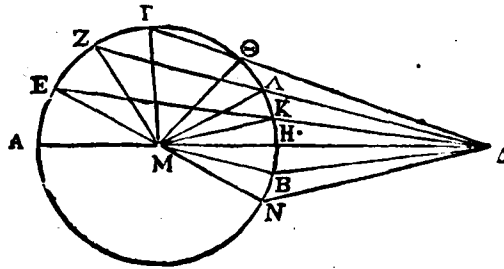
Si hors d'un cercle on prend un point quelconque, si de ce point on mène à ce cercle des droites, si une d'elles est menée par le centre, et les autres comme on voudra; parmi les droites menées à la circonférence concave, la plus grande est celle qui passe par le centre, et parmi les autres celle qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est entre le point pris hors du cercle et le diamètre, et parmi les autres celle qui est plus près de la plus petite est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; et du point pris hors du cercle, on ne peut mener à la circonférence de l'un et l'autre côté de la plus petite, que deux droites égales.

Soit le cercle ΑΒΓ, et hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ; de ce point menons à ce cercle les droites ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, et que ΔΑ passe

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 133

ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν
 μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὲ
 δὲ ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον
 μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς
 ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν
 προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ
 μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ·
 αἰὲ δὲ ἡ ἑγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττω ἐστὶ
 τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ
 τῆς ΔΘ'.

vam circumferentiam cadentium rectarum ma-
 ximam quidem esse ΔΑ quæ per centrum;
 semper autem propinquior ei quæ per centrum
 remotiore major erit, ΔΕ quidem ipsâ ΔΖ, et
 ΔΖ ipsâ ΔΓ; ipsarum autem in ΘΑΚΗ con-
 vexam circumferentiam cadentium rectarum,
 minima quidem ΔΗ, quæ inter et punctum Δ
 et diametrum ΑΗ; semper autem propinquior
 ipsi ΔΗ minimæ minor est remotiore, ΔΚ qui-
 dem ipsâ ΔΛ, et ΔΛ ipsâ ΔΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ
 ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ,
 ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit
 Μ; et jungantur ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσ-
 κείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ.
 Αἱ δὲ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονες εἰσὶ καὶ ἡ ΑΔ

Et quoniam æqualis est ΑΜ ipsi ΕΜ, com-
 munis addatur ΜΔ; ergo ΑΔ æqualis est ipsis
 ΕΜ, ΜΔ. Sed ΕΜ, ΜΔ ipsâ ΕΔ majores sunt;

par le centre; je dis que de toutes les droites menées à la circonférence con-
 cave ΑΕΖΓ, la plus grande est la droite ΔΑ, menée par le centre, et que
 la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre sera toujours plus
 grande que celle qui s'en éloigne davantage, la droite ΔΕ plus grande que
 ΔΖ, et la droite ΔΖ plus grande que ΔΓ; mais parmi les droites menées à la
 circonférence convexe ΘΑΚΗ, la droite ΔΗ placée entre le point Δ et le dia-
 mètre ΑΗ est la plus petite, et la droite placée plus près de la plus petite ΔΗ
 est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; la droite ΔΚ plus
 petite que ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

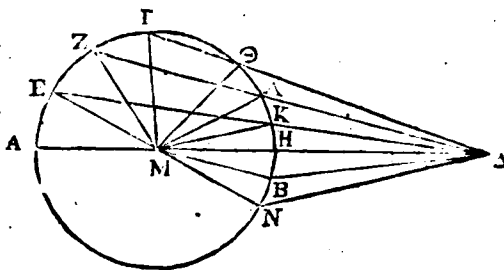
Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit le point Μ; et joignons
 ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Puisque la droite ΑΜ est égale à la droite ΕΜ, ajoutons la droite com-
 mune ΜΔ; la droite ΑΔ sera égale aux droites ΕΜ, ΜΔ. Mais les droites ΕΜ,

134 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστὶ. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσιως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶ· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

et $\Delta\Delta$ igitur ipsa $ΕΔ$ major est. Rursus, quoniam æqualis est $ΕΜ$ ipsi $ΖΜ$, communis addatur $ΜΔ$; ergo $ΕΜ$, $ΜΔ$ ipsis $ΖΜ$, $ΜΔ$ æquales sunt, et angulus $ΕΜΔ$ angulo $ΖΜΔ$ major est. Basis igitur $ΕΔ$ basi $ΖΔ$ major est. Similiter autem ostendemus, et $ΖΔ$ ipsa $ΓΔ$ majorem esse; maxima quidem igitur est $ΔΑ$, major vero $ΔΕ$ ipsa $ΔΖ$, et $ΔΖ$ ipsa $ΔΓ$.



Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάττω ἐστίν, ἐλάχιστη ἄρα ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΔΔ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνιστάθησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα τῶν ΜΑ, ΑΔ ἐλάττωες εἰσιν· ἴση δὲ ἡ ΜΚ τῇ ΜΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΑ ἐλάττω

Et quoniam $ΜΚ$, $ΚΔ$ ipsa $ΜΔ$ majores sunt, æqualis autem $ΜΗ$ ipsi $ΜΚ$, reliqua igitur $ΚΔ$ reliqua $ΗΔ$ major est; quare et $ΔΗ$ ipsa $ΔΚ$ minor est; minima igitur est. Et quoniam trianguli $ΜΔΔ$ super uno laterum $ΜΔ$, duæ rectæ intus constituuntur; $ΜΚ$, $ΚΔ$ igitur ipsis $ΜΑ$, $ΑΔ$ minores sunt; æqualis autem $ΜΚ$ ipsi $ΜΑ$; reliqua igitur $ΔΚ$ reliqua $ΔΑ$ minor est. Similiter

$ΜΔ$ sont plus grandes que la droite $ΕΔ$ (20. 1); donc la droite $ΑΔ$ est plus grande que la droite $ΕΔ$. De plus, puisque la droite $ΕΜ$ est égale à la droite $ΖΜ$, ajoutons la droite commune $ΜΔ$, les droites $ΕΜ$, $ΜΔ$ seront égales aux droites $ΖΜ$, $ΜΔ$; mais l'angle $ΕΜΔ$ est plus grand que l'angle $ΖΜΔ$; donc la base $ΕΔ$ est plus grande que la base $ΖΔ$ (24. 1). Nous démontrerons semblablement que la droite $ΖΔ$ est plus grande que la droite $ΓΔ$; donc la droite $ΔΑ$ est la plus grande, la droite $ΔΕ$ plus grande que $ΔΖ$, et la droite $ΔΖ$ plus grande que $ΔΓ$.

De plus, puisque les droites $ΜΚ$, $ΚΔ$ sont plus grandes que la droite $ΜΔ$ (20. 1), et que la droite $ΜΗ$ est égale à la droite $ΜΚ$, la droite restante $ΚΔ$ est plus grande que la droite restante $ΗΔ$; donc la droite $ΔΗ$ est plus petite que la droite $ΔΚ$; donc elle est la plus petite. Et puisque sur un des côtés $ΜΔ$ du triangle $ΜΔΔ$ on a construit intérieurement deux droites, les droites $ΜΚ$, $ΚΔ$ sont plus petites que les droites $ΜΑ$, $ΑΔ$ (21. 1); mais $ΜΚ$ est égal à $ΜΑ$; donc la droite

ιστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἰλαττων ἰστίν· ἰλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἰλαττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι⁶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπιπτοῦνται⁷ πρὸς τὸν κύκλον, ἰφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἰλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἢ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἑπεζύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἵπεί ἴση ἰστίν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὲ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκάτερα, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΚΜΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση⁸· βάσεις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση⁹ ἐστί. Λέγω δὲ⁹ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπίπτει πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυατὸν, προσπιπτέτω, κατέστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἰστίν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἰστίν ἴση¹⁰ καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἰστίν ἴση¹⁰, ἡ ἑγγιον τῆς ΔΗ ἰλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἰστίν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη.

Ἡ καὶ ἄλλως. Ἐπεζύχθω ἡ ΜΝ. Ἐπεὶ¹¹ ἴση ἰστίν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσεις ἡ

autem ostendemus et ΔΛ ipsā ΔΘ minorem esse; minima quidem igitur est ΔΗ, minor vero ΔΚ ipsā ΔΛ, et ΔΛ ipsā ΔΘ.

Dico et duas solum æquales a Δ puncto cadere in circulum, ex utràque parte ipsius ΔΗ minimæ. Constituatur ad ΜΔ rectam, et ad punctum in eà Μ, ipsi ΚΜΔ angulo æqualis angulus ΔΜΒ, et jungatur ΔΒ. Et quoniam æqualis est ΜΚ ipsi ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ utique ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΚΜΔ angulo ΒΜΔ æqualis; basis igitur ΔΚ basi ΔΒ æqualis est. Dico autem ipsi ΔΚ rectæ aliam æqualem non cadere in circulum a Δ puncto. Si enim possibile, cadat, et sit ΔΝ. Quoniam igitur ΔΚ ipsi ΔΝ est æqualis, sed ΔΚ ipsi ΔΒ est æqualis; et ΔΒ igitur ipsi ΔΝ est æqualis; propinquior minimæ ipsius ΔΗ remotiori est æqualis, quod impossibile ostensum est.

Vel et aliter. Jungatur ΜΝ. Quoniam æqualis est ΚΜ ipsi ΜΝ, communis autem ΜΔ, et basis

restante ΔΚ est plus petite que la droite restante ΔΛ. Nous démontrerons semblablement que la droite ΔΛ est plus petite que la droite ΔΘ; donc la droite ΔΗ est la plus petite, et la droite ΔΚ est plus petite que la droite ΔΛ, et la droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Je dis aussi que du point Δ, on ne peut mener au cercle que deux droites égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ. Construisons sur la droite ΜΔ, et au point Μ de cette droite, un angle ΔΜΒ égal à l'angle ΚΜΔ (23. 1), et joignons ΔΒ. Puisque la droite ΜΚ est égale à ΜΒ, et que la droite ΜΔ est commune, les deux droites ΚΜ, ΜΔ sont égales aux deux droites ΒΜ, ΜΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc la base ΔΚ est égale à la base ΔΒ (4. 1). Je dis qu'on ne saurait mener du point Δ au cercle ΔΒΓ une autre droite égale à ΔΚ. Qu'elle soit menée, s'il est possible, et qu'elle soit ΔΝ. Puisque ΔΚ est égal à ΔΝ, et ΔΚ égal à ΔΒ, la droite ΔΒ est égale à ΔΝ; donc une droite plus près de la plus petite ΔΗ est égale à une droite qui s'en éloigne davantage, ce qui a été démontré impossible.

Ou autrement. Joignons ΜΝ. Puisque la droite ΚΜ est égale à ΜΝ, que la

136 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΚ βάσι τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστὶν ἴση¹². καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα¹³ τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστὶν ἴση¹⁴, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι¹⁵ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπιοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΚ basi ΔΝ æqualis; angulus igitur ΚΜΔ angulo ΝΜΔ æqualis est. Sed ΚΜΔ ipsi ΒΜΔ est æqualis; et ΒΜΔ igitur ipsi ΝΜΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur plures quam duæ æquales in ΑΒΓ circum a Δ puncto ex utrâque parte ipsius ΔΗ minimæ cadent. Si igitur extra circum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

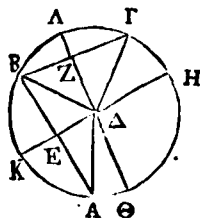
Ἐὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι¹, τὸ ληθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἐστὼ κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπίπτει

PROPOSITIO IX.

Si intra circum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circum cadant plures quam duæ æquales rectæ, sumptum punctum centrum est circuli.

Sit circum ΑΒΓ, intra autem ipsum punctum Δ, et a Δ in ΑΒΓ circum cadant plures



τωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι², αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico Δ punctum centrum esse ΑΒΓ circuli.

droite ΔΑ est commune et que la base ΔΚ est égale à la base ΔΝ, l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ (8. i). Mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc l'angle ΒΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc il est impossible de mener du point Δ au cercle ΑΒΓ, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ, plus de deux droites égales. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Si dans un cercle, l'on prend un point quelconque, et si plus de deux droites menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles, le point qu'on aura pris sera le centre du cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ, et le point intérieur Δ, et que plus de deux droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ menées du point Δ à la circonférence soient égales entre elles, je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 137

Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ AB, BG , καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ E, Z σημεία, καὶ ἐπιζευχθείσαι αἱ EA, ZA διήχθωσαν ἐπὶ τὰ K, H, A, Θ σημεία.

Επεὶ οὖν ἐστὶν ἴση³ ἡ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ ἡ EA · δύο δὲ αἱ AE, EA δυσὶ ταῖς BE, EA ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσεις ἡ ΔA βάσει τῇ ΔB ἴση⁴. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AEA γωνία τῇ ὑπὸ BEA ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AEA, BEA γωνιῶν· ἡ HK ἄρα τὴν AB τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς⁵. Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθείαν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθάς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνοῦσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ABG ⁶ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΘA ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ABG κύκλου⁷. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ $HK, \Theta A$ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABG κύκλου. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Jungantur enim AB, BG , et secantur bifariam in E, Z punctis, et junctæ EA, ZA producantur ad K, H, A, Θ puncta.

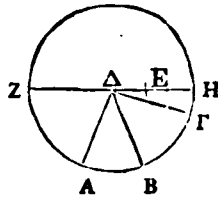
Quoniam igitur æqualis est AE ipsi EB , communis autem EA , duæ utique AE, EA duabus BE, EA æquales sunt; et basis ΔA ipsi ΔB æqualis; angulus igitur AEA angulo BEA æqualis est; rectus igitur uterque AEA, BEA angulorum. HK igitur ipsam AB secat bifariam et ad rectos. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos secet, in secante est centrum circuli; in HK igitur est centrum ipsius ABG circuli. Propter eadem utique et in ΘA est centrum ipsius ABG circuli. Et nullum aliud commune habent $HK, \Theta A$ rectæ quam Δ punctum; Δ igitur punctum centrum est ABG circuli. Si igitur circuli, etc.

Joignons les droites AB, BG , coupons-les en deux parties égales aux points E, Z (10. 1), et ayant joint les droites EA, ZA , prolongeons-les vers les points K, H, A, Θ .

Puisque AE est égal à EB , et que la droite EA est commune, les deux droites AE, EA sont égales aux deux droites BE, EA ; mais la base ΔA est égale à la base ΔB ; donc l'angle AEA est égal à l'angle BEA (8. 1); donc chacun des angles AEA, BEA est droit; donc la droite HK coupe la droite AB en deux parties égales et à angles droits. Mais lorsque, dans un cercle, une droite coupe une autre droite en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante (cor. 1. 5); donc le centre du cercle ABG est dans HK . Par la même raison, le centre du cercle ABG est dans ΘA . Mais les droites $HK, \Theta A$ n'ont d'autre point commun que le point Δ ; donc le point Δ est le centre du cercle ABG . Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γάρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τοῦ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιευχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ΖΗ ἄρα⁸ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου εἰληπταί τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου⁹, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ ΔΗ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

ALITER.

Intra enim circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, a Δ autem in ΑΒΓ circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico sumptum punctum Δ centrum esse ipsius ΑΒΓ circuli.

Non enim, sed si possibile, sit Ε, et juncta ΔΕ producat in Ζ, Η puncta; ergo ΖΗ diameter est ipsius ΑΒΓ circuli. Quoniam igitur circuli ΑΒΓ in ΖΗ diametro sumptum est aliquod punctum Δ, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit ΔΗ, major vero ΔΓ ipsâ ΔΒ, et ΔΒ ipsâ ΔΑ. Sed et æqualis, quod est impossibile; non igitur Ε centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud

AUTREMENT.

Dans le cercle ΑΒΓ soit pris un point quelconque Δ, et que plus de deux droites égales tombent du point Δ dans le cercle ΑΒΓ, les droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Qu'il ne le soit point, mais s'il est possible, que ce soit le point Ε; ayant joint ΔΕ, prolongeons cette droite vers les points Ζ, Η; la droite ΖΗ sera le diamètre du cercle ΑΒΓ. Puisque l'on a pris dans le diamètre ΖΗ du cercle ΑΒΓ un point Δ, qui n'est pas le centre de ce cercle, la droite ΔΗ sera la plus grande, la droite ΔΓ plus grande que la droite ΔΒ, et la droite ΔΒ plus grande que la droite ΔΑ (7, 3). Mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc le

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 139

οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέν-
τρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου¹⁰.

præter Δ; ergo Δ punctum centrum est ipsius
ΑΒΓ circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

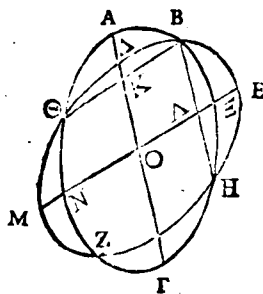
PROPOSITIO X.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα ση-
μεῖα ἢ δύο¹.

Circulus circulum non secat in pluribus punc-
tis quam duobus.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ
τεμνίτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,

Si enim possibile, circulus ΑΒΓ circulum
ΔΕΖ secet in pluribus punctis quam duobus, in



Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνέ-
σθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεία· καὶ ἀπὸ τῶν Κ,
Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΑΜ
διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεία².

ipsis Β, Η, Ζ, Θ, et junctæ ΒΘ, ΒΗ bifariam
secentur in Κ, Λ punctis; et ab ipsis Κ, Λ ipsis
ΒΘ, ΒΗ ad rectos ductæ ΚΓ, ΑΜ producantur
in Α, Ε puncta.

point E n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement
qu'aucun autre point, excepté Δ, ne peut l'être; donc le point Δ est le centre
du cercle ΑΒΓ.

PROPOSITION X.

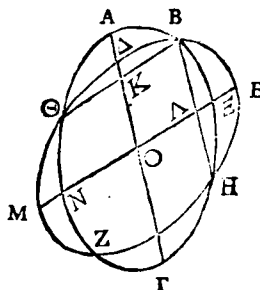
Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΓ coupe le cercle ΔΕΖ en plus de deux
points, aux points Β, Η, Ζ, Θ; joignons les droites ΒΘ, ΒΗ; coupons-les en
deux parties égales aux points Κ, Λ, et par les points Κ, Λ, ayant conduit
les droites ΚΓ, ΑΜ perpendiculaires à ΒΘ, ΒΗ, prolongeons - les vers les
points Α, Ε.

140. LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖα τις ἡ ΑΓ εὐθεῖαν τινὰ τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει³, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖα τις ἡ ΝΞ εὐθεῖαν τινὰ τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς

Quoniam igitur in circulo ΑΒΓ recta aliqua ΑΓ rectam aliquam ΒΘ bifariam et ad rectos secat, in ΑΓ igitur est centrum ipsius ΑΒΓ circuli. Rursus, quoniam in circulo eodem ΑΒΓ recta aliqua ΝΞ rectam aliquam ΒΗ bifariam et ad rectos secat, in ΝΞ igitur centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Ostensum autem ipsum esse et in ΑΓ, et



ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημειῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ Ο⁵, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

in nullo puncto conveniant ΑΓ, ΝΞ rectæ inter se præterquam in Ο; ergo Ο punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, et ipsius ΔΕΖ circuli centrum esse Ο; duorum igitur circularum sese secantium ΑΒΓ, ΔΕΖ, idem erit centrum Ο, quod est impossibile. Non igitur circulus, etc.

Puisque dans le cercle ΑΒΓ, la droite ΑΓ coupe la droite ΒΘ en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle ΑΒΓ est dans la droite ΑΓ (cor. 1. 3). De plus, puisque dans le même cercle ΑΒΓ la droite ΝΞ coupe la droite ΒΗ en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle ΑΒΓ est dans la droite ΝΞ. Mais on a démontré qu'il est dans la droite ΑΓ, et les deux droites ΑΓ, ΝΞ ne se rencontrent qu'au point Ο; donc le point Ο est le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement que le point Ο est le centre du cercle ΔΕΖ; donc le même point Ο est le centre des deux cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ, qui se coupent mutuellement, ce qui est impossible (5. 3). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

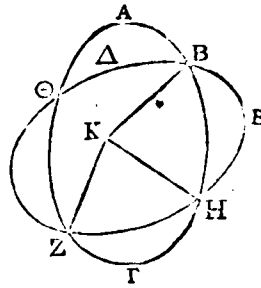
Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ
τιμνίτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η,
Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ
Κ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Επεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἴληπται τι ση-
μεῖον ἐντός, τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν

ALITER.

Circulus enim rursus ΑΒΓ circum ΔΕΖ se-
cet in pluribus punctis quam duobus, in ipsis Β,
Η, Ζ, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓ circuli, ip-
sum Κ, et jungantur ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Quoniam igitur intra circum ΔΕΖ sumptum
est aliquod punctum Κ, et a Κ in ΔΕΖ circu-



ΔΕΖ κύκλον προσπεπτόκασι πλείους ἢ δύο εὐ-
θεῖαι ἴσαι⁶, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημεῖον
κέντρον⁷ ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ
ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τε-
μνόντων ἀλλήλους τὸ⁸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ,
ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

lum incidunt plures quam duæ rectæ æquales,
ipsæ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ; ergo Κ punctum centrum est
ipsius ΔΕΖ circuli. Est autem et ipsius ΑΒΓ circuli
centrum ipsius Κ; duorum igitur circulorum
sece secantium idem centrum est Κ, quod im-
possibile. Non igitur circulus, etc.

AUTREMENT.

Car que le cercle ΑΒΓ coupe encore le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux
points Β, Η, Ζ; prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ, et joignons ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Puisque dans le cercle ΔΕΖ, on a pris un point Κ, et que plus de deux droites
égales ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ tombent du point Κ dans le cercle ΔΕΖ, le point Κ est
le centre du cercle ΔΕΖ (9. 3). Mais le point Κ est le centre du cercle ΑΒΓ;
donc le même point Κ est le centre de deux cercles qui se coupent; ce qui
est impossible (5. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

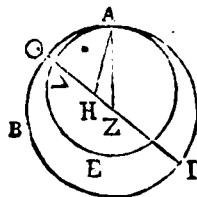
PROPOSITIO XI.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν περὶ τὰς τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφάπτεσθαι² ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου³ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α ἰσισταί.

Si duo circuli sese contingant intus, et sumantur eorum centra, centra eorum conjungens recta producta in contactum cadet circum-
lorum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant intus in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius autem ΑΔΕ ipsum Η; dico ab Η ad Ζ conjungentem rectam productam in Α cadere.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πίπτειω ὡς ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ τοῦτ' ἴσται τῆς ΖΘ⁵, μείζονες εἰσι, κοινὴ ἀφαιρεθῶ ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. Ἰσὴ δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν;

Non enim, sed si possibile, cadat ut ΖΗΘ, et jungantur ΑΖ, ΑΗ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ ipsā ΖΑ, hoc est ipsā ΖΘ majores sunt, communis auferatur ΖΗ; reliqua igitur ΑΗ reliquā ΗΘ major est. Æqualis autem ΑΗ ipsi ΔΗ; et ΗΔ igitur ipsā ΗΘ

PROPOSITION XI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, et si on prend leurs centres, la droite qui joint leurs centres étant prolongée tombera au contact de ces cercles.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent intérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Η au point Ζ, étant prolongée, tombera en Α.

Que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΗΘ; et joignons ΑΖ, ΑΗ.

Puisque les droites ΑΗ, ΗΖ sont plus grandes que ΖΑ (20. 1), c'est-à-dire que ΖΘ, retranchons la droite commune ΖΗ; la droite restante ΑΗ sera plus grande que la droite restante ΗΘ. Mais ΑΗ est égal à ΔΗ; donc ΗΔ est plus grand que ΗΘ,

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 143

ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν⁶ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ A συναφῆς πίσιται· κατὰ τὸ A ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πίσιται⁷. Εὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

major est, minor majore, quod est impossibile. Non igitur a Z ad H conjuncta recta extra contactum ad A cadet. Ergo in contactum ad A cadet. Si igitur duo circuli, etc.

Α Δ Λ Ω Σ.

Αλλὰ δὴ πιπτεῖτω ὡς ἡ HZΓ, καὶ ἐκτελέσθω⁸ ἐπ' εὐθείας ἡ HZΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AH, AZ.

Επεὶ εὖν αἱ AH, HZ μείζους εἰσὶ τῆς AZ, ἀλλὰ ἡ ZA ἴση ἐστὶ τῇ ZΓ, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ZΘ, κοινὴ ἀφρηθήσθω ἡ ZH· λοιπὴ ἄρα ἡ AH·λοιπῆς τῆς HΘ μείζων ἐστίν, τοῦτ' ἐστὶν ἡ HA τῆς HΘ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ομοίως, καὶ ἐκτὸς ἡ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δεῖξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον⁹.

ALITER.

Sed etiam cadat ut HZΓ, et producat in directum ipsa HZΓ ad Θ punctum, et jungantur AH, AZ.

Quoniam igitur AH, HZ majores sunt ipsa AZ, sed ZA æqualis est ipsi ZΓ, hoc est ipsi ZΘ, communis auferatur ZH; reliqua igitur AH reliqua HΘ major est, hoc est HA ipsa HΘ, minor majore, quod est impossibile. Similiter, et si extra parvum sit centrum majoris circuli, ostendemus hoc idem absurdum.

- le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point z au point H ne tombera pas hors du contact en A ; donc elle tombera dans le contact en A. Donc, etc.

AUTREMENT.

Mais qu'elle tombe comme HZΓ, prolongeons HZΓ directement vers le point Θ, et joignons AH, HZ.

Puisque les droites AH, HZ sont plus grandes que AZ, et que ZA est égal à ZΓ, c'est-à-dire à ZΘ, retranchons la droite commune ZH ; la droite restante AH sera plus grande que la droite restante HΘ, c'est-à-dire, HA plus grand que HΘ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Si le centre du grand cercle était hors du petit cercle, nous démontrerons semblablement qu'il s'en suivrait une absurdité.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

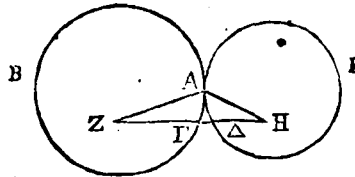
PROPOSITIO XII.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται¹ ἀλλήλων ἐκτός, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγμένη εὐθεΐα² διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτίσθωσαν ἀλλήλων ἐκτός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου³ κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγυμένη εὐθεΐα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Si duo circuli sese contingant extra, centra ipsorum conjungens recta per contactum transibit.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant extra in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius vero ΑΔΕ ipsum Η; dico a Ζ ad Η conjungentem rectam per contactum ad Α transire.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

Επεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ

Non enim, sed si possibile, eat ut ΖΓΔΗ, et jungantur ΖΑ, ΑΗ.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli, æqualis est ΖΑ ipsi ΖΓ. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ipsius ΑΔΕ circuli, æqualis est ΑΗ ipsi ΗΔ. Ostensa est

PROPOSITION XII.

Si deux cercles se touchent extérieurement, la droite qui joint leurs centres passera par le contact.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent extérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Ζ au point Η passera par le contact en Α.

Car que cela ne soit point, mais, s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΓΔΗ, et joignons ΖΑ, ΑΗ.

Puisque le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΖΑ est égale à ΖΓ. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΑΔΕ, la droite ΑΗ est égale à ΗΔ. Mais on a démontré que ΖΑ est égal à la droite ΖΓ; donc les droites ΖΑ

ἴτη· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττω, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζυγυγμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

est autem ΖΑ ipsi ΖΓ æqualis ; ipsæ igitur ΖΑ, ΑΗ ipsis ΖΓ, ΔΗ æquales sunt ; quare tota ΖΗ ipsis ΖΑ, ΑΗ major est. Sed et minor, quod impossibile. Non igitur a Ζ ad Η ducta recta per contactum ad Α non transibit ; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

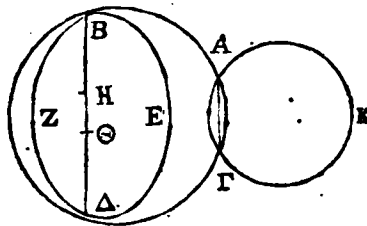
PROPOSITIO XIII.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς ἐφάπτεται εἴαν τε ἐκτὸς'.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΔΓ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτεσθῶν² πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ Β, Δ.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

Si enim possibile, circulus ΑΒΔΓ circulum ΕΒΖΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in Β, Δ.



Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Et sumatur ipsius quidem ΑΒΔΓ circuli centrum Η ; ipsius autem ΕΒΖΔ, ipsum Θ.

ΑΗ sont égales aux droites ΖΓ, ΔΗ ; donc la droite entière ΖΗ est plus grande que les droites ΖΑ, ΑΗ. Mais au contraire, elle est plus petite (20. 1), ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Ζ au point Η ne peut pas ne pas passer par le contact en Α ; donc elle y passe. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Un cercle ne touche point un cercle en plus d'un point, soit qu'il le touche intérieurement, ou extérieurement.

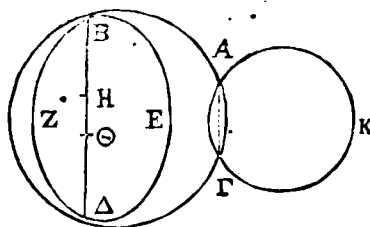
Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΔΓ touche d'abord intérieurement le cercle ΕΒΖΔ en plus d'un point, aux points Β, Δ.

Prenons le centre Η du cercle ΑΒΔΓ, et le centre Θ du cercle ΕΒΖΔ.

146 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐ-
θεΐα³ ἐπὶ τὰ B, Δ πεσεῖται. Πιστεύτω ὡς ἡ $BH\Theta\Delta$.
Καὶ ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Delta\Gamma$
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BH τῇ $H\Delta$ · μείζων ἄρα ἡ
 BH τῆς $\Theta\Delta$ · πολλῶν ἄρα μείζων ἡ $B\Theta$ τῆς $\Theta\Delta$.
Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ
 $EBZ\Delta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$. Εδείχθη
δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μείζων, ὅπερ ἄδύνατον·
οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται εἰτὸς κατὰ
πλείονα σημεία ἢ ἓν.

Ipsa igitur ab H ducta recta ad Θ in puncta
 B, Δ cadet. Cadat ut $BH\Theta\Delta$. Et quoniam H punc-
tum centrum est ipsius $AB\Delta\Gamma$ circuli, æqualis est
 BH ipsi $H\Delta$; major igitur BH ipsâ $\Theta\Delta$; ergo
multo major $B\Theta$ ipsâ $\Theta\Delta$. Rursus, quoniam Θ
punctum centrum est ipsius $EBZ\Delta$ circuli, æqua-
lis est $B\Theta$ ipsi $\Theta\Delta$. Ostensa est autem ipsâ et
multo major, quod impossibile; non igitur
circulus circulum contingit intus in pluribus
punctis quam in uno.



Λέγω δὴ ὅτι οὐδε ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύ-
κλος ὁ $A\Gamma K$ κύκλου τοῦ $AB\Delta\Gamma$ ἐφαπτεσθαι ἐκτός
κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ A, Γ , καὶ ἐπι-
ζεύχθω ἡ $A\Gamma$.

Επεὶ οὖν κύκλων τῶν $AB\Delta\Gamma, A\Gamma K$ εἴληπται ἐπὶ
τῆς περιφέρειας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεία τὰ
 A, Γ , ἡ ἄρα^δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεία ἐπιζευγνυμένη

Dico etiam neque extra. Si enim possibile,
circulus $A\Gamma K$ circulum $AB\Delta\Gamma$ contingat extra
in pluribus punctis quam in uno, in A, Γ , et
jungatur $A\Gamma$.

Quoniam igitur circulorum $AB\Delta\Gamma, A\Gamma K$ sumpta
sunt in circumferentiis utriusque duo quælibet
puncta A, Γ , hæc utique puncta conjungens recta

La droite menée du point H au point Θ passera par les points B, Δ (11.3).
Qu'elle tombe comme $BH\Theta\Delta$. Puisque le point H est le centre du cercle $AB\Delta\Gamma$,
la droite BH est égale à $H\Delta$; donc BH est plus grand que $\Theta\Delta$; donc $B\Theta$ est beaucoup
plus grand que $\Theta\Delta$. De plus, puisque le point Θ est le centre du cer-
cle $EBZ\Delta$, la droite $B\Theta$ est égale à $\Theta\Delta$. Mais on a démontré qu'elle est beaucoup
plus grande, ce qui est impossible; donc un cercle ne touche pas intérieurement
un cercle en plus d'un point.

Je dis aussi qu'il ne le touche pas extérieurement en plus d'un point. Car,
s'il est possible, que le cercle $A\Gamma K$ touche extérieurement le cercle $AB\Delta\Gamma$ en
plus d'un point, aux points A, Γ ; joignons $A\Gamma$.

Puisque dans la circonférence des cercles $AB\Delta\Gamma, A\Gamma K$, on a pris deux points
quelconques A, Γ ; la droite qui joindra ces deux points tombera dans

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 147

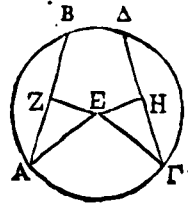
εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν $ΑΒΔΓ$ ἐντὸς ἔπει, τοῦ δὲ $ΑΓΚ$ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. Εδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντὸς. Κύκλος ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

intra utrumque cadet. Sed quidem intra ipsum $ΑΒΔΓ$ cadit, extra vero ipsum $ΑΓΚ$, quod absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΔΓ$, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἴστωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$. λέγω ὅτι αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΔΓ$ κύκλου, καὶ ἴστω τὸ $Ε$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ε$ ἐπὶ τὰς $ΑΒ$, $ΓΔ$ κάθετοι ἔχθωσαν αἱ $ΕΖ$, $ΕΗ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΓΕ$.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ æqualiter distant a centro, et quæ æqualiter distant a centro æquales inter se sunt.

Sit circulus $ΑΒΔΓ$, et in eo æquales rectæ sint $ΑΒ$, $ΓΔ$; dico ipsas $ΑΒ$, $ΓΔ$ æqualiter distare a centro.

Sumatur enim centrum ipsius $ΑΒΔΓ$ circuli, et sit $Ε$, et ab $Ε$ ad $ΑΒ$, $ΓΔ$ perpendiculares ducantur $ΕΖ$, $ΕΗ$, et jungantur $ΑΕ$, $ΓΕ$.

l'un et l'autre cercle (2. 3). Mais elle tombe dans le cercle $ΑΒΔΓ$, et hors du cercle $ΑΓΚ$ (déf. 3. 3), ce qui est absurde; donc un cercle ne touche pas extérieurement un cercle en plus d'un point. Mais on a démontré qu'il ne le touche pas intérieurement en plus d'un point. Donc etc.

PROPOSITION. XIV.

Dans un cercle les droites égales sont également éloignées du centre; et les droites également éloignées du centre sont égales entr'elles.

Soit le cercle $ΑΒΔΓ$, et que dans ce cercle les droites $ΑΒ$, $ΓΔ$ soient égales; je dis que les droites $ΑΒ$, $ΓΔ$ sont également éloignées du centre.

Prenons le centre du cercle $ΑΒΔΓ$, qu'il soit le point $Ε$, du point $Ε$ menons les droites $ΕΖ$, $ΕΗ$ perpendiculaires aux droites $ΑΒ$, $ΓΔ$, et joignons $ΑΕ$, $ΓΕ$.

148 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επειδ οὖν εὐθείᾳ τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ
εὐθείαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς
ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἰση ἄρα
ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ· διπλῇ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῇ, καὶ ἴσιν
ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. Καὶ
ἵπαι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς
ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum
rectam aliquam AB non per centrum ad rectos
secat, et bifariam ipsam secat. Æqualis igitur AZ
ipsi BZ; dupla igitur AB ipsius AZ. Propter
eadem utique et ΓΔ ipsius ΓΗ est dupla, et est
æqualis AB ipsi ΓΔ; æqualis igitur et AZ ipsi
ΓΗ. Et quoniam æqualis est AE ipsi EG, æquale
et ipsum ex AE ipsi ex EG. Sed ipsi quidem



ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ
Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν
ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα
ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ,
ὡν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση
γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς
ΖΕ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἡ
ΖΕ τῇ ΕΗ. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ
κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέν-

ex AE æqualia ipsa ex AZ, ZE, rectus enim
ad Z angulus; ipsi vero ex EG æqualia ipsa
ex EH, HG, rectus enim ad H angulus; ipsa
igitur ex AZ, ZE æqualia sunt ipsis ex GH, HE,
quorum ipsum ex AZ æquale est ipsi ex GH,
æqualis enim est AZ ipsi GH; reliquum igitur
ipsum ex ZE reliquo ex EH, æquale est, æqualis
igitur ZE ipsi EH. In circulo autem æqualiter
distare à centro rectæ dicuntur, quando a cen-

Puisque la droite EZ menée par le centre, coupe à angles droits la droite AB, non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 5). Donc AZ est égal à BZ; donc AB est double de AZ. Par la même raison ΓΔ est double de ΓΗ; mais AB est égal à ΓΔ; donc AZ est égal à ΓΗ. Et puisque AE est égal à EG, le carré de AE est égal au carré de EG. Mais les carrés des droites AZ, ZE sont égaux au carré de AE (47. 1), car l'angle en Z est droit; et les carrés des droites EH, ΗΓ sont égaux au carré de EG, car l'angle en H est droit; donc les carrés des droites AZ, ZE sont égaux aux carrés des droites ΓΗ, ΗΕ; mais le carré de AZ est égal au carré de ΓΗ; car AZ est égal à ΓΗ; donc le carré restant de ZE est égal au carré restant de EH; donc ZE est égal à EH. Mais dans un cercle les droites sont dites également éloignées du centre, lorsque les per-

τρον ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα AB, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὲ αἱ AB, ΓΔ ἰσὺς αἶναι ἴσον ἀπέχονται ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἐστίν, ἴση ἔστω ἡ EZ τῇ EH· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι διπλὴ ἐστίν ἡ μὲν AB τῆς AZ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EZ, ZA, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ, ZA ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν EH, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἐστὶν ἴσον⁵, ἴση γὰρ ἡ EZ τῇ EH· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ λοιπὸν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν⁶. ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ ΓΗ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AZ διπλὴ ἡ AB, τῆς δὲ ΓΗ διπλὴ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ AB τῇ ΓΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

tro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt; ergo AB, ΓΔ æqualiter distant a centro.

Sed demum æqualit⁵ AB, ΓΔ distent a centro, hoc est, æqualis sit EZ ipsi EH; dico æqualem esse et AB ipsi ΓΔ.

Etenim iisdem constructis, similiter utique ostendemus duplam esse quidem AB ipsius AZ, et ΓΔ ipsius ΓΗ; et quoniam æqualis est AE ipsi ΓΕ, æquale est ipsum ex AE ipsi ex ΓΕ; sed ipsi quidem ex AE æqualia sunt ipsa ex EZ, ZA, ipsi vero ex ΓΕ ipsa ex EH, ΗΓ; ipsa igitur ex EZ, ZA æqualia sunt ipsis ex EH, ΗΓ, quorum ipsum ex EZ ipsi ex EH est æquale, æqualis enim EZ ipsi EH; reliquum igitur ex AZ reliquo ex ΓΗ est æquale; æqualis igitur AZ ipsi ΓΗ, et est ipsius quidem AZ dupla AB, ipsius vero ΓΗ dupla ΓΔ. Æqualis igitur AB ipsi ΓΔ. In circulo igitur, etc.

pendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales (déf. 4. 3); donc les droites AB, ΓΔ sont également éloignées du centre.

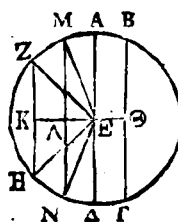
Mais que les droites AB, ΓΔ soient également éloignées du centre, c'est-à-dire, que ZE soit égal à EH; je dis que AB est égal à ΓΔ.

Les mêmes constructions étant faites, nous démontrerons semblablement que AB est double de AZ, et ΓΔ double de ΓΗ. Et puisque AE est égal à ΓΕ, le carré de AE est égal au carré de ΓΕ. Mais les carrés des droites EZ, ZA sont égaux au carré de AE (47. 1), et les carrés des droites EH, ΗΓ égaux au carré de ΓΕ; donc les carrés des droites EZ, ZA sont égaux aux carrés des droites EH, ΗΓ; mais le carré de EZ est égal au carré de EH, car EZ est égal à EH; donc le carré restant de AZ est égal au carré restant de ΓΗ; donc AZ est égal à ΓΗ; mais AB est double de la droite AZ, et ΓΔ double de ΓΗ; donc AB est égal à ΓΔ. Donc etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Εν κύκλῳ μάλιστα μὲν ἔστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μάλιστα μὲν ἔστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.



Ἠχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἔστιν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΑΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore major est.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, centrum vero Ε, et propinquior quidem ipsi Ε centro sit ΒΓ, remotior vero ΖΗ; dico maximam esse ΑΔ, majorem vero ΒΓ ipsâ ΖΗ.

Ducantur enim ab Ε centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. Et quoniam propinquior quidem centro est ΒΓ, remotior vero ΖΗ, major igitur ΕΚ ipsâ ΕΘ. Ponatur ipsi ΕΘ æqualis ΕΛ, et per Λ ipsi ΕΚ ad rectos ducta ΑΜ producat ad Ν, et jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

PROPOSITION XV.

Dans un cercle le diamètre est la plus grande de toutes les droites, et parmi les autres, celle qui est plus près du centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Soit le cercle ΑΒΓΔ; que ΑΔ en soit le diamètre, et Ε le centre, et que ΒΓ soit plus près du centre que ΖΗ; je dis que la droite ΑΔ est la plus grande, et que ΒΓ est plus grand que ΖΗ.

Menons du centre Ε les droites ΕΘ, ΕΚ perpendiculaires aux droites ΒΓ, ΖΗ. Et puisque ΒΓ est plus près du centre que ΖΗ, la droite ΕΚ est plus grande que ΕΘ (déf. 5. 3). Faisons la droite ΕΛ égale à ΕΘ, par le point Λ menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΕΚ, prolongeons-la vers Ν, et joignons ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΕΑ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. Αλλ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονες εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων⁵. Βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Αλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν⁶ ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφέρειας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται¹· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάσης γωνίας ἐξείας² εὐ-
θυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Puisque EO est égal à EA , la droite BF est égale à MN (14. 3). De plus, puisque AE est égal à EM , et ED égal à EN , la droite AD est égale aux droites ME , EN . Mais les droites ME , EN sont plus grandes que MN ; donc AD est plus grand que MN . Mais MN est égal à BF ; donc AD est plus grand que BF . Et puisque les deux droites ME , EN sont égales aux deux droites ZE , EH , et que l'angle MEN est plus grand que l'angle ZEH , la base MN est plus grande que la base ZH (24. 1). Mais on a démontré que MN est égal à BF ; donc BF est plus grand que ZH . Donc le diamètre AD est la plus grande de toutes les droites, et BF est plus grand que ZH . Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée de l'une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite; et l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu.

Et quoniam æqualis est EO ipsi EA , æqualis est et BF ipsi MN . Rursus, quoniam æqualis est quidem AE ipsi EM , et ED ipsi EN , ergo EA ipsis ME , EN æqualis est. Sed ME , EN ipsâ MN majores sunt, et AD ipsâ MN major est. Æqualis autem MN ipsi BF , ergo AD ipsâ BF major est. Et quoniam duæ ME , EN duabus ZE , EH æquales sunt, et angulus MEN angulo ZEH major; basis igitur MN basi ZH major est. Sed MN ipsi BF ostensa est æqualis, et BF ipsâ ZH major est. Maxima quidem igitur AD diameter, major vero BF ipsâ ZH . In circulo igitur, etc.

PROPOSITIO XVI.

Recta diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta extra cadet circumulum; et in locum inter et rectam et circumferentiam altera recta non cadet; et quidem semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus vero minor.

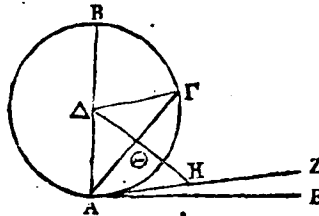
152 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πίπτει ἐντὸς, ὥς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπέξωχθω ἡ ΔΓ.

Sit circulus ΑΒΓ circa centrum Δ et diametrum ΑΒ; dico ipsam ab Α ad ΑΒ ad rectos ab extremitate ductam extra cadere circulum.

Non enim, sed si possibile, cadat intus, ut ΑΓ, et jungatur ΔΓ.



Επεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν³. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὲ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσῖται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἐκτὸς ἄρα πίπτει, ὥς ἡ ΑΕ.

Λέγω δὲ⁵ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ περιμπεσῖται.

Quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΓ, et angulus ΔΑΓ angulo ΑΓΔ æqualis est. Rectus autem ΔΑΓ, rectus igitur et ΑΓΔ; trianguli utique ΑΓΔ duo anguli ΔΑΓ, ΑΓΔ duobus rectis æquales sunt, quod est impossibile. Non igitur ab Α puncto, ipsi ΒΑ ad rectos ducta intra cadet circulum. Similiter utique ostendemus, neque in circumferentiam; extra igitur cadet, ut ΑΕ.

Dico etiam in locum inter ΑΕ rectam et ΓΘΑ circumferentiam alteram rectam non cadere.

Soit le cercle ΑΒΓ ayant pour centre le point Δ; et pour diamètre la droite ΑΒ; je dis que la perpendiculaire menée du point Α à la droite ΑΒ, tombe hors du cercle.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe en-dedans comme ΓΑ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΓ, l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1); mais l'angle ΔΑΓ est droit; donc l'angle ΑΓΔ est droit aussi; donc les angles ΔΑΓ, ΑΓΔ du triangle ΑΓΔ sont égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (17. 1); donc la perpendiculaire menée du point Α au diamètre ΑΒ, ne tombe point dans le cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe point dans la circonférence; donc elle tombe en-dehors comme ΑΕ.

Je dis encore qu'aucune droite ne peut tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence ΓΘΑ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, περιπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἔχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφέρειας, ἑτέρα εὐθεῖα περιμπεσιῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστὶ τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα⁸ περιμπεσιῖται, ἥ τις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε

Si enim possibile, cadat ut ΖΑ, et ducatur a puncto Δ ad ΖΑ perpendicularis ΔΗ.

Et quoniam rectus est ΑΗΔ, minor autem recto ipse ΔΑΗ; major igitur ΑΔ ipsā ΔΗ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΔΘ; major igitur ΔΘ ipsā ΔΗ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur in locum inter rectam et circumferentiam altera recta cadet.

Dico et quidem semicirculi angulum, comprehensum et a ΒΑ rectā et ΓΘΑ circumferentiā, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero comprehensum et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ rectā, quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, major quidem comprehenso et a ΒΑ rectā et ΓΘΑ circumferentiā, minor vero comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ rectā, in locum inter et ΓΘΑ circumferentiam et ΑΕ rectam recta cadet, quæ faciet angulum a rectis comprehensum, majorem quidem comprehenso et a ΒΑ rectā

Car si cela est possible, qu'elle tombe comme ΖΑ, et du point Δ menons ΔΗ perpendiculaire à ΖΑ.

Puisque l'angle ΑΗΔ est droit, et que l'angle ΔΑΗ est plus petit qu'un droit, la droite ΑΔ est plus grande que ΔΗ. Mais ΑΔ est égal à ΔΘ; donc ΔΘ est plus grand que ΔΗ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc une droite ne peut pas tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence.

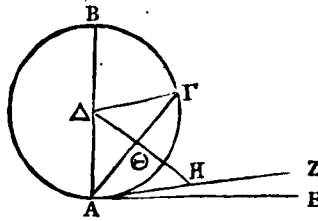
Je dis enfin, que l'angle du demi-cercle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ est plus grand que tout angle rectiligne aigu, et que l'angle restant compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ est plus petit que tout angle rectiligne aigu.

Car s'il y a un angle rectiligne plus grand que l'angle compris par la droite ΒΑ et par la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, dans l'espace compris entre la circonfé-

154 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐ-
θειῶν περιεχομένην, ἑλάττωνα δὲ τῆς περιεχομέ-
νης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐ-
θείας. Οὐ παριμπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιεχο-
μένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ
περιφερείας ἴσται μείζων ὁξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περι-
εχομένη, οὐδὲ μὲν ἑλάττων τῆς περιεχομένης
ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας.
Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

et ΓΘΑ circumferentiā, minorem vero com-
prehenso et a ΓΘΑ circumferentiā et AE rectā.
Non cadit autem; non igitur comprehenso an-
gulo et a BA rectā et ΓΘΑ circumferentiā erit
major acutus a rectis comprehensus, neque
quidem minor comprehenso et a ΓΘΑ circum-
ferentiā et AE rectā. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου¹⁰ φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ
κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἰσάπτεται
τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἑνὲ μόνον
ἰσάπτεται σημεῖον. Ἐπεὶ δὴ περ καὶ ἡ κατὰ
δύο αὐτῶ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα
ἰδίχθη¹¹.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est rectam diame-
tro circuli ad rectos ab extremitate ductam con-
tingere circulum; et rectam circulum in unico
contingere puncto. Quoniam et recta in duobus
ipsi occurrens intra ipsum cadere ostensa est.

rence ΓΘΑ et la droite AE, il y aura une droite qui fera un angle plus grand
que l'angle compris par la droite BA et la circonférence ΓΘΑ, et un angle
plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite AE. Mais
il n'y en a point; donc il n'y a point d'angle aigu, compris par des droites, plus
grand que l'angle compris par la droite BA et la circonférence ΓΘΑ, ni d'angle
plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite AE. Ce
qu'il fallait démontrer.

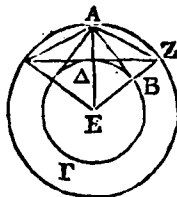
COROLLAIRE.

De là il est évident que la droite perpendiculaire au diamètre, et menée
d'une de ses extrémités, touche la circonférence, et que cette droite ne la
touche qu'en un seul point. Puisqu'il a été démontré que la droite qui rencontre
un cercle en deux points entre dans ce cercle (2. 3).

156 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν² πρὸς τῷ Ε· βάσεις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τρίγωνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ³. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. Καὶ

et ΕΔ ipsi ΕΒ; duæ utique ΑΕ, ΕΒ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, et angulum communem comprehendunt ad Ε; basis igitur ΔΖ basi ΑΒ æqualis est; et ΕΔΖ triangulum ΕΒΑ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis; æqualis igitur ΕΔΖ ipsi ΕΒΑ. Rectus autem ΕΔΖ, rectus igitur et ΕΒΑ; et est ΕΒ ex cen-



ἐστὶν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΑ⁴ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος⁵ σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

tro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum; ΑΒ igitur contingit ΒΓΑ circulum.

A dato igitur puncto Α datum circulum ΒΓΔ contingens recta linea ducta est ΑΒ. Quod oportebat facere.

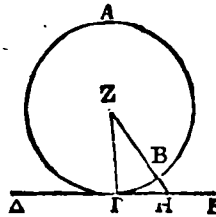
égale à ΕΖ, et ΕΔ égal à ΕΒ; donc les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΔ; mais ces droites comprennent un angle commun en Ε; donc la base ΔΖ est égale à la base ΑΒ, le triangle ΕΔΖ égal au triangle ΕΒΑ, et les angles restants égaux aux angles restants (4. 1); donc l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΕΒΑ. Mais l'angle ΕΔΖ est droit; donc l'angle ΕΒΑ est droit aussi. Mais la droite ΕΒ est menée par le centre, et la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une des extrémités du diamètre touche le cercle (16. 3); donc la droite ΑΒ touche le cercle ΒΓΑ.

Donc la ligne droite ΑΒ, menée par le point donné Α, touche le cercle ΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Εάν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφ' ἣν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτισθῶς τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἔχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθὴ ἐστίν, ὁξεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτίней, μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ΖΒ τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ

PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, conjungens perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli Ζ, et a Ζ ad Γ conjungatur ΖΓ; dico ΖΓ perpendicularem esse ad ΔΕ.

Si enim non, ducatur a Ζ ad ΔΕ perpendicularis ΖΗ.

Quoniam igitur ΖΗΓ angulus est rectus, acutus igitur est ΖΓΗ; majorem autem angulum majus latus subtendit, major igitur ΖΓ ipsa ΖΗ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; major igitur et ΖΒ ipsa ΖΗ, minor majore, quod est impossibile.

PROPOSITION XVIII.

Si une droite touche un cercle, et si du centre on mène une droite au point de contact, cette droite sera perpendiculaire à la tangente.

Que la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et du point Ζ au point Γ menons ΖΓ; je dis que la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ.

Car si elle ne l'est pas, du point Ζ menons ΖΗ perpendiculaire à ΔΕ (12. 1).

Puisque l'angle ΖΗΓ est droit, l'angle ΖΓΗ est aigu (17. 1); mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (19. 1); donc ΖΓ est plus grand que ΖΗ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc la droite ΖΒ est plus grande que la droite ΖΗ,

158 LE TROISIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Non igitur ZH perpendicularis est ad ΔΕ. Similiter utique ostendemus neque aliam quampiam præter ipsam ΖΓ; ergo ΖΓ perpendicularis est ad ΔΕ. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

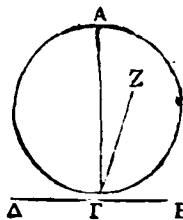
Ἐὰν κύκλου ἐφαπτήται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθάς· εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῇ ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γάρ τοῦ ΑΒΓ ὁπτεύθω τις εὐθεΐα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς· ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἔστι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad rectos recta linea ducatur, in ductâ erit centrum circuli.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et a Γ ipsi ΔΕ ad rectos ducatur ΓΑ; dico in ΑΓ esse centrum circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' ἐξ ἀδυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΖ.

Non enim, sed si possibile, sit Ζ, et jungatur ΓΖ.

la plus petite que la plus grande, ce qui est impossible; donc ΖΗ n'est pas une perpendiculaire à ΔΕ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre, excepté ΖΓ; donc ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une ligne droite perpendiculaire à la tangente, le centre du cercle sera dans la droite qui aura été menée.

Car qu'une droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ, et du point Γ menons ΓΑ perpendiculaire à ΔΕ; je dis que le centre du cercle est dans ΑΓ.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, que le centre soit Ζ, et joignons ΓΖ.

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 159

Επειδ οὖν³ κύκλου τοῦ $ABΓ$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ $ΔΕ$, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ $ΖΓ$, ἡ $ΖΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΔΕ$. ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΖΓΕ$. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ ὁρθή· ἵση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΖΓΕ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΕ$, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ $Ζ$ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλό τι πλὴν ἐπὶ τῆς $ΑΓ$. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερίᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ $ΒΕΓ$, πρὸς δὲ τῇ περιφερίᾳ, ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$, ἐχίτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν $ΒΓ$ · λέγω ὅτι διπλασίον ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΕΓ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΒΑΓ$.

Quoniam igitur circulum $ABΓ$ contingit aliqua recta $ΔΕ$, a centro autem ad contactum ducta est $ΖΓ$, $ΖΓ$ ergo perpendicularis est ad $ΔΕ$; rectus igitur est $ΖΓΕ$. Est autem et $ΑΓΕ$ rectus; æqualis igitur est $ΖΓΕ$ ipsi $ΑΓΕ$, minor majori, quod est impossibile. Non igitur $Ζ$ centrum est $ABΓ$ circuli. Similiter utique ostendemus, neque aliud aliquod esse præterquam in ipsâ $ΑΓ$. Si igitur circulum, etc.

PROPOSITIO XX.

In circulo, ad centrum angulus duplus est ipsius ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

Sit circulus $ABΓ$, et ad centrum quidem eius angulus sit $ΒΕΓ$, ad circumferentiam vero ipsi $ΒΑΓ$, habeant autem eandem circumferentiam pro basi $ΒΓ$; dico duplum esse $ΒΕΓ$ angulum ipsius $ΒΑΓ$.

Puisque la droite $ΔΕ$ touche le cercle $ABΓ$, et que $ΖΓ$ a été mené du centre au point de contact, la droite $ΖΓ$ est perpendiculaire à $ΔΕ$ (18. 3); donc l'angle $ΖΓΕ$ est droit. Mais l'angle $ΑΓΕ$ est droit aussi; donc l'angle $ΖΓΕ$ est égal à l'angle $ΑΓΕ$, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point $Ζ$ n'est pas le centre du cercle $ABΓ$. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point ne peut l'être, à moins qu'il ne soit dans $ΑΓ$. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

Soit le cercle $ABΓ$, que l'angle $ΒΕΓ$ soit au centre de ce cercle, que l'angle $ΒΑΓ$ soit à la circonférence, et que ces angles aient pour base le même arc $ΒΓ$; je dis que l'angle $ΒΕΓ$ est double de l'angle $ΒΑΓ$.

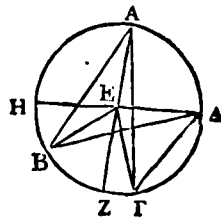
160 LE TROISIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Επιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση¹ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῇ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῇ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῇ.

Juncta enim AE producat^r ad Z.

Quoniam igitur æqualis est EA ipsi EB, æqualis et angulus EAB ipsi EBA; anguli igitur EAB, EBA ipsius EAB dupli sunt. Æqualis autem BEZ ipsis EAB, EBA; et BEZ igitur ipsius EAB est duplus. Propter eadem utique et ZEG ipsius EAG est duplus; totus igitur BEG totius BAG est duplus.



Κεκλᾶσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία² ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκτελῆσθω ἐπὶ τὸ Η. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὥν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Inclinetur autem rursus, et sit alter angulus BΔΓ, et juncta ΔΕ producat^r ad H. Similiter utique ostendemus duplum esse HEG angulum ipsius ΗΔΓ, quorum HEB duplus est ipsius ΗΔΒ; reliquus igitur BEG duplus est BΔΓ. In circulo igitur, etc.

Joignons la droite AE, et prolongeons-la vers Z.

Puisque EA est égal à EB, l'angle EAB est égal à l'angle EBA (5. 1); donc les angles EAB, EBA sont doubles de l'angle EAB. Mais l'angle BEZ est égal aux angles EAB, EBA (32. 1); donc l'angle BEZ est double de l'angle EAB. L'angle ZEG est double de l'angle ZAG par la même raison; donc l'angle entier BEG est double de l'angle entier BAG.

Que l'angle BAG change de position, et qu'il soit un autre angle BΔΓ; ayant joint la droite ΔΕ, prolongeons-la vers H. Nous démontrerons semblablement que l'angle HEG est double de l'angle ΗΔΓ; mais l'angle HEB est double de l'angle ΗΔΒ; donc l'angle restant BEG est double de l'angle restant BΔΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

PROPOSITIO XXI.

Εν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

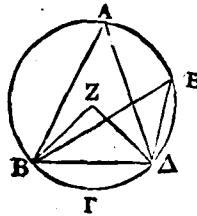
Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἵστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λίγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἵστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

In circulo in eodem segmento anguli æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in eodem segmento ΒΑΕΔ anguli sint ΒΑΔ, ΒΕΔ; dico ΒΑΔ, ΒΕΔ angulos æquales inter se esse.

Sumatur enim ΑΒΓΔ circuli centrum, et sit Ζ, et jungantur ΒΖ, ΖΔ.



Καὶ ἵπαι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίῳ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Et quoniam quidem ΒΖΔ angulus ad centrum est, ipse vero ΒΑΔ ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam ΒΓΔ pro basi; ergo ΒΖΔ angulus duplus est ipsius ΒΑΔ. Propter eadem utique ΒΖΔ et ipsius ΒΕΔ est duplus; æqualis igitur ΒΑΔ ipsi ΒΕΔ. In circulo igitur, etc.

PROPOSITION XXI.

Dans un cercle, les angles placés dans le même segment sont égaux entr'eux.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ soient dans le même segment ΒΑΕΔ; je dis que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ sont égaux entr'eux.

Car prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit Ζ, et joignons ΒΖ, ΖΔ.

Puisque l'angle ΒΖΔ est au centre, que l'angle ΒΑΔ est à la circonférence, et que ces deux angles ont pour base le même arc ΒΓΔ, l'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΑΔ (20. 3). L'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΕΔ, par la même raison; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΒΕΔ (not. 7). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αβ'.

PROPOSITIO XXII.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

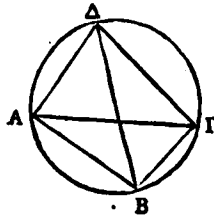
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετραπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπιζυγῶσθαι αἱ ΑΓ, ΒΔ.

In circulis quadrilaterorum oppositi anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso quadrilaterum sit ΑΒΓΔ; dico oppositos ipsius angulos duobus rectis æquales esse.

Jungantur ΑΓ, ΒΔ.



Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ,

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ipsius ΑΒΓ trianguli tres anguli ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus rectis æquales sunt. Æqualis autem quidem ΓΔΒ ipsi ΒΑΓ, etenim in eodem sunt segmento ΒΑΔΓ, et ΑΓΒ ipsi ΑΔΒ, etenim in eodem sunt segmento ΑΔΓΒ. Totus igitur ΑΔΓ ipsis ΒΑΓ, ΑΓΒ æqualis est. Communis addatur ΑΒΓ; ergo ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ

PROPOSITION XXII.

Les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que le quadrilatère ΑΒΓΔ lui soit inscrit; je dis que les angles opposés de ce quadrilatère sont égaux à deux droits.

Joignons ΑΓ, ΒΔ.

Puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ du triangle ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΒΑΓ (21. 3), car ils sont dans le même segment ΒΑΔΓ; et l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, car ils sont dans le même segment ΑΔΓΒ; donc l'angle entier ΑΔΓ est égal aux angles ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ajoutons l'angle

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 163

ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα³ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis ΑΒΓ, ΑΔΓ æquales sunt. Sed ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΒΓ, ΑΔΓ igitur duobus rectis æquales sunt. Similiter utique ostendemus, et ΒΑΔ, ΔΓΒ angulos duobus rectis esse. In circulis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

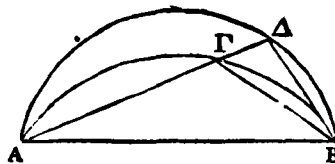
Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται¹ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνιστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem rectâ duo segmenta circulorum similia et inæqualia non constituentur ex eadem parte.

Si enim possibile, ad eamdem rectam ΑΒ duo segmenta circulorum similia et inæqualia constituentur ex eadem parte ΑΓΒ, ΑΔΒ, et ducatur ΑΓΔ, et jungantur ΓΒ, ΔΒ.



Ἐπεὶ οὖν ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΓΒ τμήμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἔστι τὰ δι-

Quoniam igitur simile est ΑΓΒ segmentum ipsi ΑΔΒ segmento, similia autem segmenta

commun ΑΒΓ; les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ seront égaux aux angles ΑΒΓ, ΑΔΓ. Mais les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits; donc les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux angles droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΔ, ΔΓΒ sont aussi égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Sur une même droite, on ne peut pas décrire du même côté deux segments de cercles semblables et inégaux.

Car si cela est possible, décrivons du même côté, sur la même droite ΑΒ les deux segments de cercles ΑΓΒ, ΑΔΒ semblables et inégaux; menons ΑΓΔ, et joignons ΓΒ, ΔΒ.

Puisque le segment ΑΓΒ est semblable au segment ΑΔΒ, et que les segments

164 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

χόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἐξῆς.

circulorum sunt quæ capiunt angulos æquales; æqualis igitur est ΑΓΒ angulus ipsi ΑΔΒ, exteriori interiori, quod est impossibile. Non igitur super eadem rectâ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

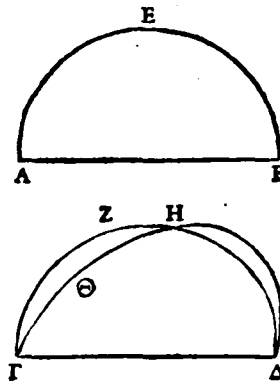
PROPOSITIO XXIV.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εἰπωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω

Super æqualibus rectis similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt.

Sint enim super æqualibus rectis ΑΒ, ΓΔ similia segmenta circulorum ipsa ΑΕΒ, ΓΖΔ;



ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα τῇ ΓΖΔ τμήματι.

dico æquale esse ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ segmento.

de cercles semblables sont ceux qui reçoivent des angles égaux (déf. 11. 3), l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, l'angle intérieur à l'angle extérieur; ce qui est impossible (16. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Sur des droites égales, les segments de cercles semblables sont égaux entr'eux.

Que sur les droites égales ΑΒ, ΓΔ soient décrits les segments de cercles semblables ΑΕΒ, ΓΖΔ; je dis que le segment ΑΕΒ est égal au segment ΓΖΔ.

Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΕ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημείον, διὰ τὸ ἴσῃ εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης², ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἥτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεισῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ³, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῇ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Congruente enim ΑΒΕ segmento ipsi ΓΖΔ, et posito quidem Α puncto super Γ, rectā vero ΑΒ super ΓΔ, congruet et Β punctum ipsi Δ puncto, propterea quod æqualis est ΑΒ ipsi ΓΔ; ipsā autem ΑΒ ipsi ΓΔ congruente, congruet et ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ. Si enim ΑΒ recta ipsi ΓΔ congruat, segmentum autem ΑΕΒ ipsi ΓΖΔ non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel situm mutabit ut ΓΘΗΔ, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis Γ, Η, Δ, quod est impossibile. Non igitur congruente ΑΒ rectā ipsi ΓΔ non congruet et ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ. Congruet igitur, et æquale ipsi erit. Ergo super æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἐστὶ τμήμα.

Circuli segmento dato, describere circulum cujus est segmentum.

Car le segment ΑΒΕ étant appliqué sur le segment ΓΖΔ, le point Α étant posé sur le point Γ, et la droite ΑΒ sur la droite ΓΔ, le point Β tombera sur le point Δ, parce que la droite ΑΒ est égale à la droite ΓΔ; mais la droite ΑΒ coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment ΑΕΒ coïncidera avec le segment ΓΖΔ. Car si la droite ΑΒ coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment ΑΕΒ ne coïncidait pas avec le segment ΓΖΔ, ou il tomberait en dedans, ou en dehors, ou bien prenant une position comme ΓΘΗΔ, un cercle couperait un cercle en plus de deux points, aux points Γ, Η, Δ, ce qui est impossible (10. 3). Donc la droite ΑΒ coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment ΑΒΔ ne peut pas ne pas coïncider avec le segment ΓΖΔ; donc il coïncide avec lui, et lui est par conséquent égal. Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

Un segment de cercle étant donné, décrire le cercle dont il est le segment.

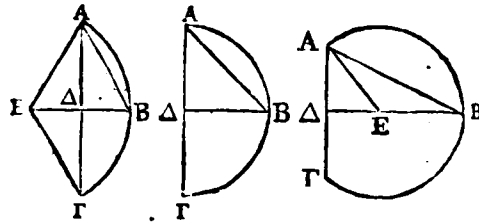
166 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τὸ δοθὲν τμήμα κύκλου, τὸ $AB\Gamma$ · διδῶν δὲ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπὲρ ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AG δίχα κατὰ τὸ Δ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ AG πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔB , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AB · ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία ἢ α τῆς ὑπὸ BAD ἢ τοι μείζων ἔστιν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττω.

Sit datum circuli segmentum $AB\Gamma$; oportet igitur describere circulum, cujus est $AB\Gamma$ segmentum.

Secetur enim AG bifariam in Δ , et ducatur a Δ puncto ipsi AG ad rectos ΔB , et jungatur AB . Ergo $AB\Delta$ angulus ipso BAD vel major est, vel æqualis, vel minor.



Εστω πρότερον μείζων, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAE , καὶ διήχθω ἡ ΔB ἐπὶ τὸ E^3 , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ EG . Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ BAE , ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ BE εὐθεῖα εὐθείᾳ τῇ EA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ AD τῇ $\Delta\Gamma$, κοινὴ δὲ ἡ ΔE , δύο δὲ αἱ AD , ΔE δυσὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, ΔE ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $A\Delta E$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ ἔστιν ἴση⁵, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρᾳ βάσις⁶ ἄρα

Sit primum major, et constituatur ad BA rectam, et ad punctum in eà A , ipsi $AB\Delta$ angulo æqualis ipse BAE , et producatür ΔB ad E , et jungatur EG . Et quoniam igitur æqualis est ABE angulus ipsi BAE , æqualis utique est et BE rectæ EA . Et quoniam æqualis est AD ipsi $\Delta\Gamma$, communis autem ΔE , duæ utique AD , ΔE duabus $\Gamma\Delta$, ΔE æquales sunt, utraque utrique, et angulus $A\Delta E$ angulo $\Gamma\Delta E$ est æqualis; rectus enim uterque; basis igitur AE basi GE est æqua-

Soit $AB\Gamma$ le segment de cercle donné; il faut décrire le cercle dont $AB\Gamma$ est le segment.

Coupons la droite AG en deux parties égales au point Δ (10. 1), du point Δ menons ΔB perpendiculaire à AG , et joignons AB (11. 1); l'angle $AB\Delta$ sera ou plus grand que l'angle BAD , ou il lui sera égal, ou il sera plus petit.

Qu'il soit d'abord plus grand; sur la droite donnée BA , et au point A de cette droite faisons l'angle BAE égal à l'angle $AB\Delta$ (23. 1); prolongeons ΔB vers E , et joignons EG . Puisque l'angle ABE est égal à l'angle BAE , la droite BE est égale à la droite EA (6. 1). Et puisque AD est égal à $\Delta\Gamma$, et que la droite ΔE est commune, les deux droites AD , ΔE sont égales aux deux droites $\Gamma\Delta$, ΔE , chacune à chacune; mais l'angle $A\Delta E$ est égal à l'angle $\Gamma\Delta E$, car ils sont droits l'un et l'autre

ἡ ΑΕ βάσι τῇ ΓΕ ἴσιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἰδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἴσιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ⁸ Ε, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἕξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγγραμμένος κύκλος⁹. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγίγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμήμα ἑλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ¹⁰ τυγχάνειν.

Ομοίως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ¹¹ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γινομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Εὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττω ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α¹², τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πισιῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ ὡς τὸ Ε¹³, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

lis. Sed AE ipsi EB ostensa est æqualis; et BE igitur ipsi GE est æqualis; tres igitur AE, EB, EG æquales inter se sunt; ergo centro E, intervallo autem unâ ipsarum AE, EB, EG circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est ABΓ segmentum minus esse semicirculo, propterea quod E centrum extra ipsum cadit.

Similiter et si angulus ABA æqualis sit ipsi BAA, ipsâ AD æquali factâ alterutri ipsarum BA, AG, tres igitur DA, DB, DG æquales inter se erunt, et erit autem Δ centrum completi circuli, et erit utique ABΓ semicirculus.

Si autem ABA minor sit ipso BAA, et si constituamus ad BA rectam, et ad punctum in eâ A, ipsi ABA angulum æqualem, intra ABΓ segmentum cadet centrum in DB, ut E, et erit utique ABΓ segmentum majus semicirculo.

donc la base AE est égale à la base GE (4. 1). Mais AE a été démontré égal à EB; donc BE est égal à GE; donc les trois droites AE, EB, EG sont égales entre elles; donc le cercle décrit du centre E et d'un intervalle égal à une des droites AE, EB, EG, passera par les autres points, et le cercle sera décrit. Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment (9. 3). Il est évident que le segment ABΓ est plus petit qu'un demi-cercle; car le centre E tombe hors du segment.

Semblablement, si l'angle ABA est égal à l'angle BAA, la droite AD étant égale à chacune des droites BA, AG, les trois droites DA, DB, DG seront égales entre elles; donc le point Δ sera le centre du cercle entier (9. 3), et le segment ABΓ sera évidemment un demi-cercle.

Mais si l'angle ABA est plus petit que l'angle BAA, et si sur la droite BA, et au point A de cette droite, nous faisons l'angle BAE égal à l'angle ABA, le centre tombera en dedans du segment ABΓ dans la droite ΔB, comme en E, et le segment sera évidemment plus grand qu'un demi-cercle.

168 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγ-
γραπται ὁ κύκλος, οὗπὲρ ἔστι τὸ τμήμα¹⁴. Ὅπῃ
ἔδει ποιῆσαι.

Circuli igitur segmento dato, descriptus est
circulus cujus est segmentum. Quod oportebat
facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

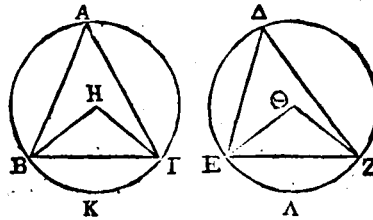
PROPOSITIO XXVI.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων
περιφερειῶν βεβῆκασιν, ἑάντε πρὸς τοῖς κέντροις
ἑάντε πρὸς ταῖς περιφερίαις ὥσι βεβῆκυται.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqua-
libus circumferentiis insistent, sive ad centra,
sive ad circumferentias sint insistentes.

Εστώσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ
ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι²

Sint enim æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et
in ipsis quidem ad centra æquales anguli



ἴστωσαν, αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς
περιφερίαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση
ἴστιν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΑΖ περιφερίᾳ.

sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, et ad circumferentias ipsi
ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico æqualem esse ΒΚΓ circum-
ferentiam ipsi ΕΑΖ circumferentiæ.

Επέζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.

Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il
est le segment; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Dans des cercles égaux, les angles égaux s'appuient sur des arcs égaux,
soit qu'ils soient placés aux centres, ou bien aux circonférences.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, que les angles égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ soient aux
centres, et que les angles égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ soient aux circonférences; je dis que
l'arc ΒΚΓ est égal à l'arc ΕΑΖ.

Joignons ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $ABΓ$, $ΔEZ$ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ BH , $HΓ$ δυσὶν ταῖς $ΕΘ$, $ΟΖ$ ἴσαι εἰσὶν³. καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ H γωνία τῇ πρὸς τῷ $Θ$ ἴση ἐστὶν⁴. βάσεις ἄρα ἡ $BΓ$ βάσις τῇ EZ ἐστὶν ἴση⁵. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ A γωνία τῇ πρὸς τῷ $Δ$, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BAΓ$ τμήμα τῷ $ΕΔΖ$ τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν $BΓ$, EZ τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὁμοία τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν⁶. ἴσον ἄρα τὸ $BAΓ$ τμήμα τῷ $ΕΔΖ$ τμήματι⁷. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ $ABΓ$ κύκλος ὅλῳ τῷ $ΔEZ$ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα $BKΓ$ τμήμα λοιπῷ $ΕΔΖ$ ἴσον· ἡ ἄρα $BKΓ$ περιφέρειά ἐστὶν ἴση τῇ $ΕΑΖ$ περιφέρειᾳ⁸. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Et quoniam æquales sunt $ABΓ$, $ΔEZ$ circuli, æquales sunt ipsæ ex centris; duæ igitur BH , $HΓ$ duabus $ΕΘ$, $ΟΖ$ æquales sunt; et angulus ad H angulo ad $Θ$ æqualis est; basis igitur $BΓ$ basi EZ est æqualis. Et quoniam æqualis est ad A angulus ipsi ad $Δ$, simile igitur est $BAΓ$ segmentum ipsi $ΕΔΖ$ segmento, et sunt super æquales rectas $BΓ$, EZ ; ipsa autem super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt; æquale igitur $BAΓ$ segmentum ipsi $ΕΔΖ$ segmento. Est autem et totus $ABΓ$ circulus toti $ΔEZ$ circulo æqualis; reliquum igitur $BKΓ$ segmentum reliquo $ΕΔΖ$ æquale; ergo $BKΓ$ circumferentia æqualis est $ΕΑΖ$ circumferentiæ. Si igitur in æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὅσαι βεβηκυῖαι.

PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis ipsi æqualibus circumferentiis insistentes anguli æquales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes.

Puisque les cercles $ABΓ$, $ΔEZ$ sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites BH , $HΓ$ sont égales aux deux droites $ΕΘ$, $ΟΖ$; mais l'angle en H est égal à l'angle en $Θ$; donc la base $BΓ$ est égale à la base EZ (4. 1). Mais l'angle en A est égal à l'angle en $Δ$; donc le segment $BAΓ$ est semblable au segment $ΕΔΖ$ (déf. 11. 3); mais ils sont placés sur les droites égales $BΓ$, EZ , et les segments de cercles semblables, qui sont placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3); donc le segment $BAΓ$ est égal au segment $ΕΔΖ$. Mais le cercle entier $ABΓ$ est égal au cercle entier $ΔEZ$; donc le segment restant $BKΓ$ est égal au segment restant $ΕΑΖ$; donc l'arc $BKΓ$ est égal à l'arc $ΕΑΖ$. Donc, etc.

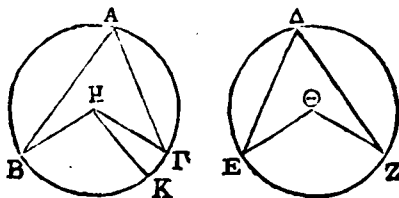
PROPOSITION XXVII.

Dans les cercles égaux, les angles qui comprennent des arcs égaux sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient aux centres, ou aux circonférences.

170 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς $ABΓ$, $ΔEZ$, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν $BΓ$, EZ , πρὸς μὲν τοῖς H , $Θ$ κέντροις γωνίαι βεβηκέντων αἱ ὑπὸ $BHΓ$, $EΘZ$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ $BΑΓ$, $ΕΔZ$. λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $BHΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $EΘZ$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $BΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔZ$ ἐστὶν ἴση³.

In æqualibus enim circulis $ABΓ$, $ΔEZ$, æqualibus circumferentiis $BΓ$, EZ , ad H , $Θ$ quidem centra anguli insistant $BHΓ$, $EΘZ$, ad circumferentias vero ipsi $BΑΓ$, $ΕΔZ$; dico $BHΓ$ quidem angulum ipsi $EΘZ$ esse æqualem, ipsum vero $BΑΓ$ ipsi $ΕΔZ$.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BHΓ$ τῇ ὑπὸ $EΘZ$, μία αὐτῶν μείζων ἔσται⁴. Εἴπω μείζων ἡ ὑπὸ $BHΓ$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ BH εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ H , τῇ ὑπὸ $EΘZ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BHK . αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾖσιν. ἴση ἄρα ἡ BK περιφέρεια τῇ EZ περιφέρειᾳ. Ἀλλ' ἡ EZ τῇ $BΓ$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ BK ἄρα τῇ $BΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ ὑπὸ $BHΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $EΘZ$. ἴση ἄρα. Καὶ ἐστὶ τῆς

Si enim inæqualis sit $BHΓ$ ipsi $EΘZ$, unus ipsorum major erit. Sit major $BHΓ$, et constituatur ad BH rectam, et ad punctum in eâ H , ipsi $EΘZ$ angulo æqualis ipse BHK ; æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistant, quando ad centra sunt; æqualis igitur BK circumferentia ipsi EZ circumferentiæ. Sed EZ ipsi $BΓ$ æqualis est, et BK igitur ipsi $BΓ$ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur inæqualis est $BHΓ$ angulus ipsi $EΘZ$; æqualis igitur. Et est ipsius quidem $BHΓ$

Que dans les cercles égaux $ABΓ$, $ΔEZ$, les angles $BHΓ$, $EΘZ$ placés aux centres H , $Θ$, et les angles $BΑΓ$, $ΕΔZ$ placés aux arcs $BΑΓ$, $ΕΔZ$ comprennent les arcs égaux $BΓ$, EZ ; je dis que l'angle $BHΓ$ est égal à l'angle $EΘZ$, et l'angle $BΑΓ$ égal à l'angle $ΕΔZ$.

Carsi les angles $BHΓ$, $EΘZ$ sont inégaux, l'un d'eux sera le plus grand. Que l'angle $BHΓ$ soit le plus grand; sur la droite BH , et au point H de cette droite, faisons l'angle BHK égal à l'angle $EΘZ$ (23. 1). Puisque les angles égaux comprennent des arcs égaux, lorsqu'ils sont aux centres (26. 3), l'arc BK est égal à l'arc EZ . Mais l'arc EZ est égal à l'arc $BΓ$; donc l'arc BK est égal à l'arc $BΓ$, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les angles $BHΓ$, $EΘZ$ ne sont pas inégaux; donc ils sont

LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 171

μὲν ὑπὸ BHΓ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἰξῆς.

dimidius ipse ad A, ipsius vero EΘZ dimidius ipse ad Δ; æqualis igitur et ad A angulus ipsi ad Δ. In æqualibus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

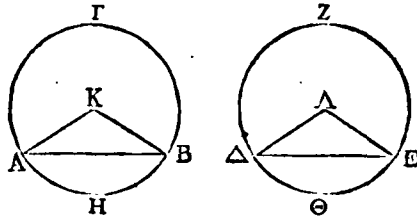
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττω.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἴστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιρεῦ-

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis æquales rectæ sint ΑΒ, ΔΕ, ipsas quidem ΑΓΒ, ΔΖΕ circumferentias majores auferentes, ipsas



σαι, τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττωνας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ ἐλάττω.

vero ΑΗΒ, ΔΘΕ minores; dico ipsam quidem ΑΓΒ majorem circumferentiam æqualem esse ipsi ΔΖΕ majori circumferentiæ, ipsam vero ΑΗΒ minorem ipsi ΔΘΕ minori.

égaux. Mais l'angle en A est la moitié de l'angle BHΓ, et l'angle en Δ la moitié de l'angle ΕΘΖ (20. 3); donc l'angle en A est égal à l'angle en Δ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Dans des cercles égaux, les droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit.

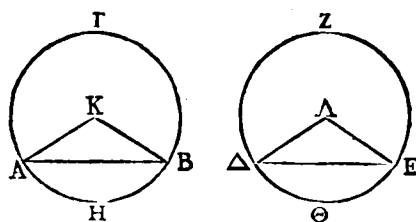
Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, et que dans ces cercles, les droites égales ΑΒ, ΔΕ soutendent les plus grands arcs ΑΓΒ, ΔΖΕ, et les plus petits arcs ΑΗΒ, ΔΘΕ; je dis que le plus grand arc ΑΓΒ est égal au plus grand arc ΔΖΕ, et que le plus petit arc ΑΗΒ est égal au plus petit arc ΔΘΕ.

172 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ K, Λ , καὶ ἐπέξωσαν αἱ $BK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$.
Sumantur enim centra circulorum, K, Λ , et jungantur $BK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὲ αἱ AK, KB δυσὶ ταῖς $\Delta\Lambda, \Lambda E$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ AB βάσει τῇ ΔE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKB γωνία τῇ ὑπὸ

Et quoniam æquales circuli sunt, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur AK, KB duabus $\Delta\Lambda, \Lambda E$ æquales sunt, et basis AB basi ΔE æqualis; angulus igitur AKB ipsi $\Delta\Lambda E$ æqua-



$\Delta\Lambda E$ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾤσιν· ἴση ἄρα ἡ AHB περιφέρεια τῇ $\Delta\Theta E$ περιφέρειᾳ³. Ἐστί δὲ καὶ ὅλος ὁ $AB\Gamma$ κύκλος ὅλῳ τῷ $\Delta E Z$ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $A\Gamma B$ περιφέρεια λοιπῇ τῇ $\Delta Z E$ περιφέρειᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis est. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt; æqualis igitur AHB circumferentia ipsi $\Delta\Theta E$ circumferentiæ. Est autem et totus $AB\Gamma$ circulus toti $\Delta E Z$ circulo æqualis; reliqua igitur et $A\Gamma B$ circumferentia reliquæ $\Delta Z E$ circumferentiæ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

Prenons les centres K, Λ de ces cercles (1. 3), et joignons $AK, KB, \Delta\Lambda, \Lambda E$.

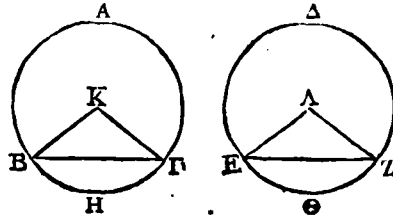
Puisque ces cercles sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites AK, KB sont égales aux deux droites $\Delta\Lambda, \Lambda E$; mais la base AB est égale à la base ΔE ; donc l'angle AKB est égal à l'angle $\Delta\Lambda E$ (8. 1). Mais des angles égaux comprennent des arcs égaux, quand ils sont aux centres (26. 5); donc l'arc AHB est égal à l'arc $\Delta\Theta E$. Mais la circonférence entière $AB\Gamma$ est égale à la circonférence entière $\Delta E Z$; donc l'arc restant $A\Gamma B$ est égal à l'arc restant $\Delta Z E$. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφε-
ρείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτίθενται.

Εστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν
αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπιέλφωσαν αἱ ΒΗΓ,
ΕΘΖ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω
ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ
ἕστω τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ,
ΕΛ, ΑΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ
περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ
ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύ-
κλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δι-
αί ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γω-
νίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ
ΕΖ ἴση ἐστὶν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἰζήσ.

In æqualibus circulis æquales circumferentias
æquales rectæ subtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis
æquales circumferentiæ sumantur ΒΗΓ, ΕΘΖ,
et jungantur ΒΓ, ΕΖ rectæ; dico æqualem esse
ΒΓ rectam ipsi ΕΖ.

Sumantur enim centra circulorum, et sint
Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΑΖ.

Et quoniam æqualis est ΒΗΓ circumferentia
ipsi ΕΘΖ circumferentiæ, æqualis est et angu-
lus ΒΚΓ ipsi ΕΛΖ. Et quoniam æquales sunt
ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, æquales sunt et ipsæ ex cen-
tris; duæ igitur ΒΚ, ΚΓ duabus ΕΛ, ΑΖ æquales
sunt, et angulos æquales continent; basis igitur
ΒΓ basi ΕΖ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

PROPOSITION XXIX.

Dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des droites égales.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ; dans ces cercles prenons les arcs égaux
ΒΗΓ, ΕΘΖ, et joignons les droites ΒΓ, ΕΖ; je dis que la droite ΒΓ est égale à
la droite ΕΖ.

Prenons les centres de ces cercles, qu'ils soient Κ, Λ, et joignons ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΑΖ.

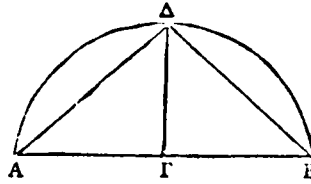
Puisque l'arc ΒΗΓ est égal à l'arc ΕΘΖ, l'angle ΒΚΓ est égal à l'angle ΕΛΖ (27.
3). Mais les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égaux; donc leurs rayons seront égaux;
donc les deux droites ΒΚ, ΚΓ sont égales aux deux droites ΕΛ, ΑΖ; mais ces
droites comprennent des angles égaux; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ
(4. 1). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν¹.

Εστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ $\Lambda\Delta\text{B}$. δεῖ δὴ τὴν $\Lambda\Delta\text{B}$ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν².

Επιζεύχθω ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\text{A}\Delta$, ΔB .



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\text{A}\Gamma$ τῇ ΓB , κοινὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$. δύο δὴ αἱ $\text{A}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δυσὶ ταῖς $\text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶ. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\text{A}\Gamma\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\text{B}\Gamma\Delta$ ἴση, ὀρθὴ γάρ 'κατέρ'α' βάσεις ἄρα³ ἡ $\text{A}\Delta$ βάσει τῇ ΔB ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττωι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν $\text{A}\Delta$, ΔB περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ $\text{A}\Delta$ περιφέρεια τῇ ΔB περιφέρειᾳ.

PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia $\Lambda\Delta\text{B}$; oportet igitur $\Lambda\Delta\text{B}$ circumferentiam bifariam secare.

Jungatur AB , et secetur bifariam in Γ , et a Γ puncto ipsi AB rectæ ad rectos ducatur ΓB , et jungantur $\text{A}\Delta$, ΔB .

Et quoniam æqualis est $\text{A}\Gamma$ ipsi ΓB , communis autem $\Gamma\Delta$; duæ igitur $\text{A}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ duabus $\text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ æquales sunt. Et angulus $\text{A}\Gamma\Delta$ angulo $\text{B}\Gamma\Delta$ æqualis, rectus enim uterque; basis igitur $\text{A}\Delta$ basi ΔB æqualis est. Æquales autem rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; et est utraque ipsarum $\text{A}\Delta$, ΔB circumferentiarum minor semicirculo; æqualis igitur $\text{A}\Delta$ circumferentia ipsi ΔB circumferentiæ.

PROPOSITION XXX.

Couper un arc donné en deux parties égales.

Soit $\Lambda\Delta\text{B}$ l'arc donné; il faut couper l'arc $\Lambda\Delta\text{B}$ en deux parties égales.

Joignons la droite AB , et coupons-la en deux parties égales en Γ (10. 1); du point Γ menons $\Gamma\Delta$ perpendiculaire à la droite AB (11. 1), et joignons $\text{A}\Delta$, ΔB .

Puisque $\text{A}\Gamma$ est égal à ΓB , et que la droite $\Gamma\Delta$ est commune, les deux droites $\text{A}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ sont égales aux deux droites $\text{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$. Mais l'angle $\text{A}\Gamma\Delta$ est égal à l'angle $\text{B}\Gamma\Delta$; car ils sont droits l'un et l'autre; donc la base $\text{A}\Delta$ est égale à la base ΔB (4. 1). Mais des droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit (28. 3), et l'un et l'autre des arcs $\text{A}\Delta$, ΔB est plus petit que la demi-circonférence; donc l'arc $\text{A}\Delta$ est égal à l'arc ΔB .

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 175

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια διχα τέτμηται
κατὰ τὸ Δ σημείον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ergo data circumferentia bifariam secta est
in Δ puncto. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λΔ.

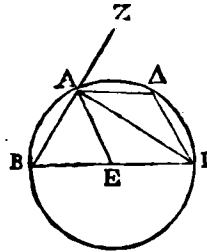
PROPOSITIO XXXI.

Εν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή
ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς·
ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ
ἐστὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων
ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία
ἐλάττων ὀρθῆς².

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχωσαν

In circulo, ipse quidem in semicirculo angu-
lus rectus est; ipse vero in majore segmento
minor recto; ipse autem in minore segmento
major recto. Et insuper ipse quidem majoris
segmenti angulus major est recto; ipse vero mi-
noris segmenti angulus minor recto.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit
ΒΓ, centrum vero Ε, et jungantur ΒΑ, ΑΓ,



αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ
ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ³ ὀρθή ἐστίν· ἡ δὲ

ΑΔ, ΔΓ; dico ipsum quidem in ΒΑΓ semicir-
culo angulum ΒΑΓ rectum esse; ipsum autem in

Donc l'arc donné a été coupé en deux parties égales au point Δ. Ce qu'il
fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans un cercle, l'angle placé dans le demi-cercle est droit ; l'angle placé
dans un segment plus grand est plus petit qu'un droit ; l'angle placé dans
un segment plus petit est plus grand qu'un droit ; l'angle du plus grand seg-
ment est plus grand qu'un droit, et l'angle du plus petit segment est plus
petit qu'un droit.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, dont le diamètre est ΒΓ et le centre le point Ε ; joignons
ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ ; je dis que l'angle ΒΑΓ placé dans le demi-cercle ΒΑΓ est droit ;

176 LE TROISIÈME LIVRE D'ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐν τῷ $ABΓ$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἢ ὑπὸ $ABΓ$, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ $ΑΔΓ$ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ $ΑΔΓ$ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

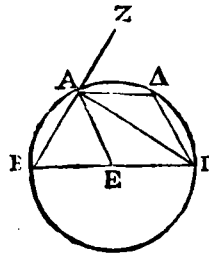
Ἐπεζεύχθω ἡ AE , καὶ διήχθω ἡ BA ἐπὶ τὸ Z .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ BAE . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΕ$ τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ τῇ ὑπὸ

$ABΓ$ majore semicirculo segmento angulum $ABΓ$ minorem recto; ipsum vero in $ΑΔΓ$ minorem semicirculo segmento angulum $ΑΔΓ$ majorem esse recto.

Jungatur AE , et producaturs BA ad Z .

Et quoniam æqualis est BE ipsi EA , æqualis est et angulus ABE , ipsi BAE . Rursus, quoniam æqualis est $ΓΕ$ ipsi EA , æqualis est et $ΑΓΕ$ ipsi



$ΓAE$. Ἐλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BAΓ$ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ZΑΓ$ ἐκτὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZΑΓ$, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ὁ ἄρα ἐν τῷ $BAΓ$ ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ $BAΓ$ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $BAΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ

$ΓAE$; totus igitur $BAΓ$ duobus $ABΓ$, $ΑΓΒ$ æqualis est. Est autem et ipse $ZΑΓ$, extra $ABΓ$ triangulum, duobus $ABΓ$, $ΑΓΒ$ angulis æqualis; æqualis igitur et $BAΓ$ angulus ipsi $ZΑΓ$; recus igitur uterque; ipse igitur in $BAΓ$ semicirculo angulus $BAΓ$ rectus est.

Et quoniam $ABΓ$ trianguli duo anguli $ABΓ$, $BAΓ$ duobus rectis minores sunt, rectus autem

que l'angle $ABΓ$ placé dans le segment $ABΓ$ plus grand que le demi-cercle $ABΓ$ est plus petit qu'un droit, et que l'angle $ΑΔΓ$ placé dans le segment $ΑΔΓ$ plus petit que le demi-cercle, est plus grand qu'un droit.

Joignons AE , et prolongeons BA vers Z .

Puisque BE est égal à EA , l'angle ABE est égal à l'angle BAE (5. 1). De plus, puisque $ΓΕ$ est égal à EA , l'angle $ΑΓΕ$ est égal à l'angle $ΓAE$; donc l'angle entier $BAΓ$ est égal aux deux angles $ABΓ$, $ΑΓΒ$. Mais l'angle $ZΑΓ$ placé hors du triangle $ABΓ$ est égal aux deux angles $ABΓ$, $ΑΓΒ$ (52. 1); donc l'angle $BAΓ$ est égal à l'angle $ZΑΓ$; donc chacun de ces angles est droit (déf. 10. 1); donc l'angle $BAΓ$, placé dans le demi-cercle $BAΓ$, est droit.

Puisque les deux angles $ABΓ$, $BAΓ$ du triangle $ABΓ$ sont plus petits que deux

δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ⁶ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ὧν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ἑρβαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ἑρβαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι⁷.

Λέγω⁸ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε⁹ τῆς ΑΒΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε¹⁰ τῆς ΑΔΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερὸν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία¹¹ ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφέρειας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΔ περιφέρειας περιεχομένη¹² ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΒΑΓ; minor igitur recto est ΑΒΓ angulus, et in ΑΒΓ segmento semicirculo majore.

Et quoniam in circulo quadrilatum est ΑΒΓΔ, in circulis autem quadrilatorum oppositi duobus rectis æquales sunt; ipsi igitur ΑΒΓ, ΑΔΓ duobus rectis æquales sunt. Et est ΑΒΓ minor recto; reliquus igitur ΑΔΓ angulus major recto est, et est in ΑΔΓ segmento semicirculo minore.

Dico autem et majoris quidem segmenti angulum comprehensum et ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, majorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum et ab ΑΔΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quoniam enim ipse a ΒΑ, ΑΓ rectis comprehensus rectus angulus est, ergo ab ΑΒΓ circumferentiâ et ΑΓ rectâ comprehensus major est recto. Rursus, quoniam ipse ab ΑΓ, ΑΖ rectis comprehensus rectus est, ergo a ΓΑ rectâ, et ΑΓΔ circumferentiâ comprehensus minor est recto. In circulo igitur, etc.

droits (17. 1), et que l'angle ΒΑΓ est droit, l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΒΓ plus grand que le demi-cercle.

Puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est dans un cercle, et que les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits (22. 3), les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΑΒΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle restant ΑΔΓ est plus grand qu'un droit, et cet angle est dans le segment ΑΔΓ plus petit que le demi-cercle.

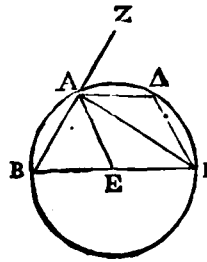
Je dis aussi que l'angle du plus grand segment, compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ, est plus grand qu'un droit, et que l'angle du plus petit segment, compris par l'arc ΑΔΓ et la droite ΑΓ, est plus petit qu'un droit, ce qui est évident; car puisque l'angle compris par les droites ΒΑ, ΑΓ est droit, l'angle compris par l'arc ΑΒΓ et la droite ΑΓ est plus grand qu'un droit. De plus, puisque l'angle compris par les droites ΑΓ, ΑΖ est droit, l'angle compris par la droite ΓΑ et l'arc ΑΓΔ est plus petit qu'un droit. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Η¹³ ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐπεὶ διπλὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλὴ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονες εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Demonstratur rectum esse ΒΑΓ. Quoniam duplus est ΑΕΓ ipsius ΒΑΕ, æqualis enim duobus interioribus et oppositis; est autem et ΑΕΒ duplus ipsius ΕΑΓ; ipsi igitur ΑΕΒ, ΑΕΓ dupli sunt ipsius ΒΑΓ. Sed ipsi ΑΕΒ, ΑΕΓ duobus rectis æquales sunt; ergo ΒΑΓ rectus est. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἂν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία.

Ex hoc utique manifestum, si unus angulus trianguli duobus æqualis sit, rectum esse angulum.

AUTREMENT.

On démontre autrement que l'angle ΒΑΓ est droit. En effet, puisque l'angle ΑΕΓ est double de l'angle ΒΑΕ, car il est égal aux deux angles intérieurs et opposés (32. 1), et que l'angle ΑΕΒ est double de l'angle ΕΑΓ, les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont doubles de l'angle ΒΑΓ. Mais les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle ΒΑΓ est droit. C'est qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit, parce que son angle extérieur est égal à ces

LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 179

διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἑκτος ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ ἐφίξηται ἴσαι ὦσιν, ὀρθαὶ εἰσιν¹⁴.

lum, propterea quod et ejus angulus exterior iisdem est æqualis. Quando autem ipsi deinceps sunt æquales, recti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

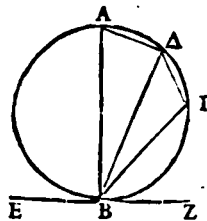
PROPOSITIO XXXII.

Εὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφ᾽ ἧς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτίσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem in circulum ducatur aliqua recta ducta secans circulum, quos facit angulos ad contingentem ipsi æquales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Circulum enim ΑΒΓΔ contingat aliqua recta ΕΖ in Β puncto, et a Β puncto ducatur aliqua



διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιῇ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις.

recta ΒΔ in ΑΒΓΔ circulum secans ipsum; dico quos facit angulos ΒΔ cum ΕΖ contingente eos æquales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est ΖΒΔ quidem angulum æ-

mêmes angles, et que quand deux angles de suite sont égaux, ils sont droits (déf. 10. 1).

PROPOSITION XXXII.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle.

Qu'une droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et du point Β menons une droite ΒΔ qui coupe le cercle ΑΒΓΔ; je dis que les angles que fait ΒΔ avec la tangente ΕΖ sont égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle;

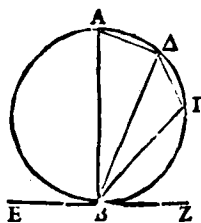
180 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

νίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ZBA γωνία ἴση ἔστι τῇ ἐν τῷ BAA τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΔBE γωνία ἴση ἔστι τῇ ἐν τῷ ΔΓB τμήματι συνισταμένη γωνία³.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ EZ πρὸς ὀρθὰς ἡ BA, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς BA περιφέρειας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AΔ, ΔΓ, ΓB.

qualem esse angulo in BAA segmento constituto, ΔBE vero angulum æqualem esse in ΔΓB segmento constituto.

Ducatur enim a B ipsi EZ ad rectos BA, et sumatur in BA circumferentiâ quodlibet punctum Γ, et jungantur AΔ, ΔΓ, ΓB.



Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ABΓA ἐφάπτεται τις εὐθεῖα EZ κατὰ τὸ B, ἀπὸ δὲ τῆς⁴ ἀφ᾽ ἧς ἦκται τῇ ἐφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς ἡ BA, ἐπὶ τῆς BA ἄρα⁵ τὸ κέντρον ἔστι τοῦ ABΓA κύκλου. Ἡ BA ἄρα διάμετρος ἔστι τοῦ ABΓA κύκλου⁶. ἡ ἄρα ὑπὸ AΔB γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ BAA, ABA μὲν ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABZ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ ἴση ἔστι ταῖς ὑπὸ BAA, ABA. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ABA· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBZ γωνία ἴση ἔστι

Et quoniam circum ABΓA contingit aliqua recta EZ in B, a contactu autem ducta est tangenti ad rectas BA, in BA igitur centrum est ABΓA circuli. BA igitur diameter est ABΓA circuli; ergo AΔB angulus in semicirculo constitutus rectus est; reliqui igitur BAA, ABA uni recto æquales sunt. Est autem et ABZ rectus; ergo ABZ æqualis est ipsis BAA, ABA. Communis auferatur ABA; reliquus igitur ΔBZ angulus æqualis est angulo BAA in alterno

c'est-à-dire, que l'angle ZBA est égal à l'angle placé dans le segment BAA, et que l'angle ABE est égal à l'angle placé dans le segment ΔΓB.

D'un point B menons la droite BA perpendiculaire à EZ (11. 1), et dans l'arc BA, prenons un point quelconque Γ, et joignons AΔ, ΔΓ, ΓB.

Puisque la droite EZ touche le cercle ABΓA au point B, et que la droite BA, menée du point de contact B, est perpendiculaire à la tangente EZ, le centre du cercle ABΓA est dans la droite BA (19. 3). Donc BA est le diamètre du cercle ABΓA; donc l'angle AΔB, placé dans le demi-cercle, est droit (31. 3). Donc les angles restants BAA, ABA sont égaux à un droit. Mais l'angle ABZ est droit; donc l'angle ABZ est égal aux angles BAA, ABA (not. 10). Retraçons l'angle commun ABA; l'angle restant ΔBZ sera égal à l'angle BAA

τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνία, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἰδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὲ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ'. Ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία² ἥτοι ὀξεῖα ἐστίν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεία.

placé dans le segment alterne du cercle. Et puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est inscrit dans le cercle, ses angles opposés sont égaux à deux droits (22. 3). Mais les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux à deux droits; donc les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux aux angles ΒΑΔ, ΒΓΔ (13. 1); mais on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΔΒΖ; donc l'angle restant ΔΒΕ est égal à l'angle ΑΓΒ placé dans le segment alterne du cercle ΑΓΒ; donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Sur une droite donnée, décrire un segment de cercle, qui recoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒ la droite donnée et Γ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite donnée ΑΒ décrire un segment de cercle qui recoive un angle égal à l'angle donné Γ. L'angle Γ est aigu, ou droit, ou obtus.

segmento circuli. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΑΒΓΔ, oppositi ejus anguli duobus rectis æquales sunt. Sunt autem et ipsi ΔΒΖ, ΔΒΕ duobus rectis æquales; ipsi igitur ΔΒΖ, ΔΒΕ ipsis ΒΑΔ, ΒΓΔ æquales sunt, quorum ΒΑΔ ipsi ΔΒΖ ostensus est æqualis; reliquus igitur ΔΒΕ angulo ΑΓΒ in alterno circuli segmento ΑΓΒ æqualis est. Si igitur circulum, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

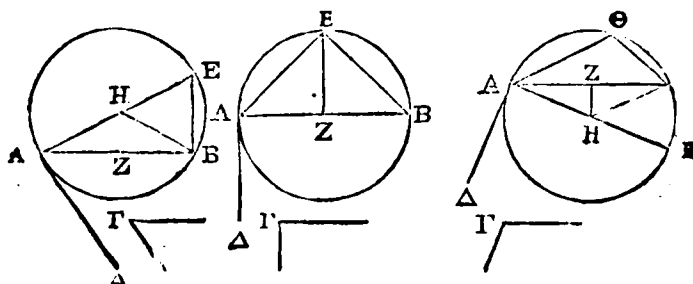
Super datâ rectâ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit data recta ΑΒ, datus autem angulus rectilineus ad Γ; oportet igitur super datâ rectâ ΑΒ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Ipse autem ad Γ angulus vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

182 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς³ ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ BAA· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAA. Καὶ⁵ ἤχθω τῇ AD ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τεμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB,

Sit primum acutus, ut in primâ figurâ, et constitutatur ad AB rectam et ad punctum in A, ipsi ad Γ angulo æqualis ipse BAA; acutus igitur est et BAA. Ducatur ipsi AD ab A puncto ad rectos ipsa AE, et secetur AB bifariam in Z, et ducatur a Z puncto ipsi AB ad rectos ipsa ZH, et jungatur HB. Et quoniam æqualis est AZ ipsi ZB, communis autem ZH, duæ utique



κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὲ αἱ AZ, ZH δυὸι ταῖς ZB, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία⁶ τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσεις ἄρα ἡ AH βαίνει τῇ HB ἴση ἐστίν. Ο ἄρα κέντρω μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ HA, κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τοῦ B. Γεγράφω, καὶ ἔστω ὁ ABE, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ BE. Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A, τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ AD, ἡ AD ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ

AZ, ZH duabus ZB, ZH æquales sunt, et angulus AZH ipsi angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi HB æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Describatur, et sit ABE, et jungatur BE. Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos est AD, ipsa utique AD contingit circulum. Quoniam igitur circulum ABE tangit aliqua recta AD, et a

Premièrement qu'il soit aigu, comme dans la première figure; sur la droite AB et au point A construisons un angle BAA égal à l'angle Γ (23. 1); l'angle BAA sera aigu. Du point A menons AE perpendiculaire à AD (11. 1); coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1), et du point Z menons ZH perpendiculaire à AB, et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites ZB, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base HB (4. 1). Donc le cercle décrit du centre H, et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il soit décrit, et qu'il soit ABE, et joignons EB. Puisque la droite AD menée de l'extrémité A du diamètre AE est perpendiculaire à AE, la droite AD touchera le cercle (16. 3). Puisque la droite AD touche le cercle ABE,

οὗν κύκλου τοῦ ABE ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΑΔΓ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἀφῆς εἰς⁸ τὸ ABE κύκλον διῆκται τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ AEB. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Αλλὰ δὴ ἐρεῖ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δεῖν ἔστω πάλιν¹⁰ ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ἐρεῖ γωνία¹¹. Συνεπτάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ἐρεῖ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ BAA, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ἑποτέρῳ τῶν ZA, ZB, κύκλος γεγράφθω ὁ AEB. Εφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὸν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAA γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι¹², ὁρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὔσα. Αλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ¹³. Καὶ ἡ ἐν

contactu ad A in ABE circulum ducta est aliqua AB, angulus utique ΔAB æqualis est angulo AEB in alterno circuli segmento. Sed ΔAB ipsi ad Γ est æqualis; et ad Γ igitur angulus æqualis est ipsi AEB. Super datâ igitur rectâ AB segmentum circuli descriptum est AEB, capiens angulum AEB æqualem dato ad Γ.

Sed et rectus sit ipse ad Γ; et oporteat rursus super AB describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ recto angulo. Constituatur enim rursus ipsi ad Γ recto angulus æqualis BAA, ut se habet in secundâ figurâ, et secetur AB bifariam in Z, et centro quidem Z, intervallo vero alterutrâ ipsarum AZ, ZB, circulus describatur AEB; contingit igitur ΑΔ recta ABE circulum, propterea quod rectus est ad Α angulus. Et æqualis est quidem BAA angulus ipsi in AEB segmento, rectus enim et ipse est in semicirculo consistens. Sed BAA ipsi ad Γ æqualis est; et ipse

et que du point de contact en A on a méné une droite AB dans le cercle ABE, l'angle ΔAB est égal à l'angle AEB placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle ΔAB est égal à l'angle Γ; donc l'angle Γ est égal à l'angle AEB. Donc sur la droite donnée AB, on a décrit un segment de cercle AEB qui reçoit un angle AEB égal à l'angle donné Γ.

Mais que l'angle Γ soit droit, et qu'il faille encore décrire sur la droite AB un segment de cercle qui reçoive un angle égal à l'angle droit Γ. Construisons un angle BAA égal à l'angle droit Γ (25. 1), comme dans la seconde figure; coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1); du centre Z, et d'un intervalle égal à l'une ou à l'autre des droites ZA, ZB, décrivons le cercle AEB. La droite ΑΔ sera tangente au cercle ABE (16. 3), parce que l'angle est droit en A. Mais l'angle BAA est égal à l'angle qui est placé dans le segment AEB, car cet angle est droit, puisqu'il est placé dans un demi-cercle (31. 3). Mais l'angle BAA est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment est égal à l'angle Γ,

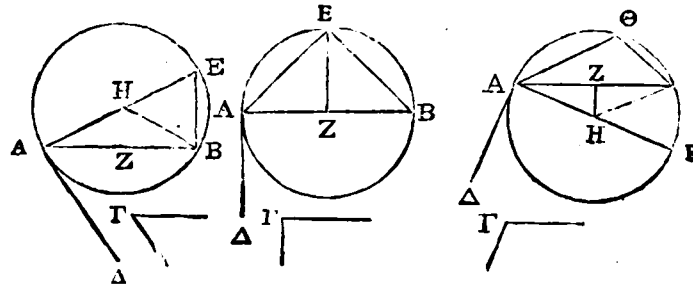
184 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ¹⁴.
 γιγρᾶπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς AB τμήμα κύ-
 κλου τὸ AEB, διχομένον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς
 τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεία ἔστω, καὶ
 συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ
 Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης
 καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ

in AEB segmento igitur æqualis est ipsi ad Γ.
 Descriptum est igitur rursus super AB segmen-
 tum circuli AEB, capiens angulum æqualem ipsi
 ad Γ.

Sed etiam ad Γ obtusus sit, et consti-
 tuatur ipsi æqualis ad AB rectam et ad Α punc-
 tum ipse ΒΑΔ, ut se habet in tertiâ figurâ, et
 ipsi ΑΔ ad rectos ducatur ΑΕ, et secetur rur-



ΑΕ, καὶ τετμῆσθω πάλιν ἡ AB δίχα κατὰ τὸ
 Ζ, καὶ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπι-
 ζεύχθω ἡ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ
 τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ
 δυοὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ¹⁵ ὑπὸ
 ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ΑΗ
 βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ο ἄρα κέντρω μὲν τῷ
 Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος
 ἤξει καὶ διὰ τοῦ Β. Ερχέσθω ὡς ὁ AEB¹⁶. Καὶ

sus AB bifariam in Z, et ipsi AB ad rectos du-
 catur ZH, et jungatur HB. Et quoniam rursus
 æqualis est AZ ipsi ZB, et communis ZH, duæ
 utique AZ, ZH duabus BZ; ZH æquales sunt,
 et angulus AZH angulo BZH æqualis; basis igitur
 AH basi BH æqualis est. Ergo centro qui-
 dem H, intervallo vero HA, circulus descrip-
 tus transibit et per B. Transeat ut AEB. Et Quo-
 niam ipsi AB diametro ab extremitate ad reo-

donc on a décrit sur la droite AB un segment de cercle AEB qui reçoit un angle
 égal à l'angle droit Γ.

Mais enfin que l'angle Γ soit obtus. Sur la droite AB et au point A cons-
 truisons un angle ΒΑΔ égal à l'angle Γ (23. 1), et menons ΑΕ perpendiculaire à ΑΔ
 (11. 1); coupons la droite AB en deux parties égales en Ζ (10. 1); menons ΖΗ
 perpendiculaire à ΑΒ (11. 1), et joignons ΗΒ. Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite
 ΖΗ est commune, les deux droites ΑΖ, ΖΗ sont égales aux deux droites ΒΖ,
 ΖΗ; mais l'angle ΑΖΗ est égal à l'angle ΒΖΗ; donc la base ΑΗ est égale à la
 base ΒΗ (4. 1). Donc le cercle décrit du point Η et de l'intervalle ΗΑ passera
 par le point Β. Qu'il y passe comme ΑΕΒ. Puisqu'on a mené de l'extrémité du

ἵπαι τῇ AE διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἔκται²⁰ ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ AEB κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς διῆκται ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι. τῷ ΑΘΒ συνισταμένη γωνία. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας²¹ τῆς AB γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπῃ ἔδει ποιῆσαι.

tos ducta est AD, ipsa AD igitur contingit AEB circumulum. Et a contactu ad A ducta est AB; ergo BAD angulus æqualis est angulo constituto in alterno circuli segmento AOB. Sed BAL angulus ipsi ad Γ æqualis est. Et ipse in AOB igitur segmento angulus æqualis est ipsi ad Γ. Ergo super datam rectam AB descriptum est segmentum circuli AOB, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ',

PROPOSITIO XXXIV.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

A dato circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Ἐστὼ ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ABΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ ABΓ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ'.

Sit datus circulus ABΓ, datus vero angulus rectiligneus ad Δ; oportet igitur ab ABΓ circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo ad Δ.

diamètre AE, la droite AD perpendiculaire à ce diamètre, la droite AD touchera le cercle AEB (16. 3). Et puisque la droite AB a été menée du point de contact A, l'angle BAD est égal à l'angle placé dans le segment alterne AOB du cercle. Mais l'angle BAD est égal à l'angle r; donc l'angle placé dans le segment AOB est égal à l'angle r. Donc on a décrit sur la droite donnée AB un segment de cercle AOB, qui reçoit un angle égal à l'angle r. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXIV.

D'un cercle donné, retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ABΓ le cercle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut du cercle ABΓ retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ.

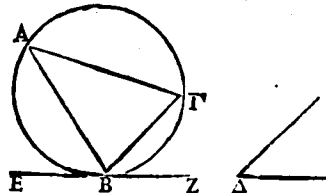
186 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου² ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΕΖ ὑθεῖα καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις ὑθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ

Ducatur ipsum ΑΒΓ circumulum contingens ΕΖ ad Β punctum, et constituatur ad ΕΖ rectam et ad punctum in eā Β ipsi ad Δ angulo æqualis ΖΒΓ.

Quoniam igitur circumulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΕΖ, et a contactu ad Β ducta est ΒΓ; ipse ΖΒΓ igitur æqualis est angulo constituto



ΒΑΓ· ἐναλλάξ τμήματι συνισταμένη γωνία. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ³.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμήμα ἀφίρηται τὸ ΒΑΓ, δέχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ ὑπογράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

in ΒΑΓ alterno segmento. Sed ΖΒΓ ipsi ad Δ æqualis est; et ipse in ΒΑΓ igitur segmento æqualis est ipsi ad Δ angulo.

A dato igitur circulo ΑΒΓ segmentum ablatum est ΒΑΓ, capiens angulum æqualem ipsi dato angulo rectilineo ad Δ. Quod oportebat facere.

Menons une droite ΕΖ qui touche le cercle ΑΒΓ au point Β (17. 3), et sur la droite ΕΖ, et au point Β de cette droite, faisons l'angle ΖΒΓ égal à l'angle Δ (23. 1).

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΒΓ a été menée du point de contact Β, l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΒΑΓ du cercle (32. 3). Mais l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle Δ; donc l'angle placé dans le segment ΒΑΓ est égal à l'angle Δ.

Donc du cercle donné ΑΒΓ on a retranché un segment ΒΑΓ, qui reçoit un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΙ.

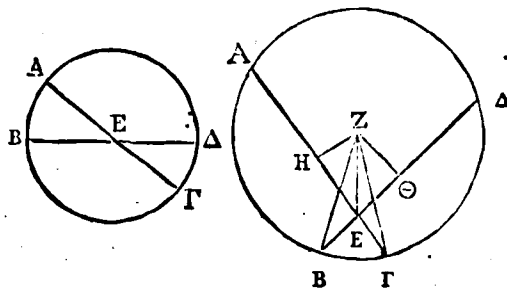
PROPOSITIO XXXV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Εν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνεταισαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημείον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, ipsum sub unius segmentis contentum rectangulum æquale est ipsi sub alterius segmentis contento rectangulo.

In circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secant in Ε puncto; dico ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσιν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερόν ὅτι, ἴσων οὖσων τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Si igitur ipsæ quidem ΑΓ, ΒΔ per centrum sunt, ita ut Ε centrum sit ipsius ΑΒΓΔ circuli; manifestum est æqualibus existentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, et ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.

PROPOSITION XXXV.

Si dans un cercle, deux droites se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

Que dans le cercle ΑΒΓΔ les deux droites ΑΓ, ΒΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

Si les droites ΑΓ, ΒΔ passent par le centre, de manière que le point Ε soit le centre du cercle ΑΒΓΔ, il est évident que les droites ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ étant égales, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

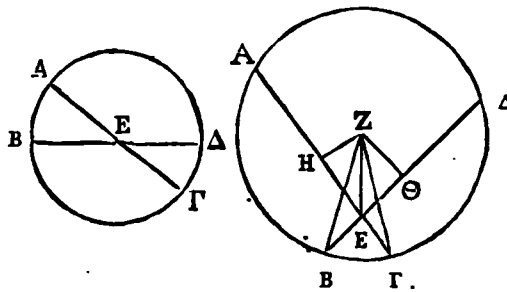
188 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μὴ ἴστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου³, καὶ ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ· εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει⁴· ἴση

Non sint autem ΑΓ, ΔΒ per centrum, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et a Ζ ad ΑΓ, ΔΒ rectas perpendiculares ducentur ΖΗ, ΖΘ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Et quoniam recta aliqua ΖΗ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat; æqualis igitur



ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἀνίστα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Προσκεισθὼ κοινὸν⁵ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ⁵ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴσον⁶ ἴστί τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἴστί τὸ ἀπὸ

ΑΗ ipsi ΗΓ. Quoniam igitur ΑΓ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε, ipsum utique sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΗΕ quadrato æquale est ipsi ex ΗΓ. Commune addatur ipsum ex ΗΖ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ eum ipsis ex ΖΗ, ΗΕ æquale est ipsis ex ΓΗ, ΗΖ. Sed ipsis quidem ex ΕΗ, ΗΖ est æquale ipsum ex ΖΕ, ipsis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale est ipsi ex ΖΓ; ipsum igitur

Mais que les droites ΑΓ, ΔΒ ne passent pas par le centre; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ; du point Ζ menons les droites ΖΗ, ΖΘ perpendiculaires à ΑΓ, ΔΒ (12. 1), et joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Puisque la droite ΖΗ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 3); donc ΑΗ est égal à ΗΓ. Puisque ΑΓ est coupé en deux parties égales en Η, et en deux parties inégales en Ε, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΗΕ, est égal au carré de ΗΓ (5. 2). Ajoutons le carré commun de ΗΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec les carrés des droites ΖΗ, ΗΕ sera égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ. Mais le carré de ΖΕ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1), et le carré de ΖΓ égal aux carrés des droites ΓΗ,

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 189

τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἰση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Εδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ· Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχόμενῳ ὀρθογώνιῳ. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ, æquale est ipsi ΖΓ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ, ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΕΖ æquale est ipsi ex ΖΒ. Propter eadem utique et ipsum sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi ex ΖΒ. Ostensum est autem et ipsum sub ΑΕ ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale esse ipsi ex ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ. Commune auferatur ipsum ex ΖΕ; reliquum igitur sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ'.

Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται· ἴσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μετὰ

PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit ipsum sub totâ secante et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et convexam

HZ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΖΕ, est égal au carré de ΖΓ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΕΖ, est égal au carré de ΖΒ. Par la même raison, le rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le carré de ΖΕ, est égal au carré de ΖΒ. Mais on a démontré que le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΖΕ, est égal au carré de ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΖΕ est égal au rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le carré de ΖΕ. Retranchons le carré commun de ΖΕ; le rectangle restant compris sous ΑΕ, ΕΓ sera égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise exté-

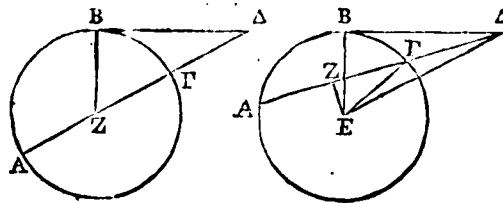
190 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτῆσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ΔΓΑ ἢτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὐ.

circumferentiam contentum rectangulum æquale ipsi ex contingente quadrato.

Extra circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et a Δ ad ΑΒΓ circulum cadant duæ rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet ΑΒΓ circulum, ipsa vero ΔΒ contingat; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex ΔΒ quadrato. Ipsa igitur ΔΓΑ vel per centrum est, vel non.



Εστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ³ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἴση δὲ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ

Sit primum per centrum, et sit Ζ centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et jungatur ΖΒ; rectus igitur est ΖΒΔ. Et quoniam recta ΑΓ bifariam secta est in Ζ, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΓ æquale est ipsi ex ΖΔ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΒ æquale est ipsi

rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la tangente.

Hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ, et de ce point menons les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ; que la droite ΔΓΑ coupe le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΔΒ lui soit tangente; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΓ est égal au carré de ΔΒ; soit que la droite ΔΓΑ passe par le centre, ou non.

Qu'elle passe premièrement par le centre du cercle, et que Ζ soit le centre du cercle ΑΒΓ, joignons ΖΒ; l'angle ΖΒΔ sera droit (18. 3). Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΖΓ, est égal au carré de ΖΔ (6. 2). Mais la droite ΖΓ est égale à la droite ΖΒ; donc le rectangle

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 191

τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ⁵. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ: λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.

Αλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθείαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεία ἡ ΑΓ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον⁶, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον⁷ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Αλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ

ex ZΔ. Ipsi vero ex ZΔ æqualia sunt ipsa ex ZB, ΒΔ, rectus enim ipse ZBΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ZB æquale est ipsis ex ZB, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ZB; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ contingente.

Sed et ΔΓΑ non sit per centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et sumatur centrum Ε, et ex Ε ad ΑΓ perpendicularis ducatur ΕΖ, et jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; rectus igitur est ΕΖΔ. Et quoniam recta aliqua ΕΖ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secabit; ΑΖ igitur ipsi ΖΓ est æqualis. Et quoniam recta ΑΓ secatur bifariam in Ζ puncto, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ΖΓ æquale est ipsi ex ZΔ. Commune addatur ex ΖΕ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsis ex ΔΖ, ΖΕ. Sed ipsis ex ΓΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΓ, rectus enim ΕΖΓ angulus; ip-

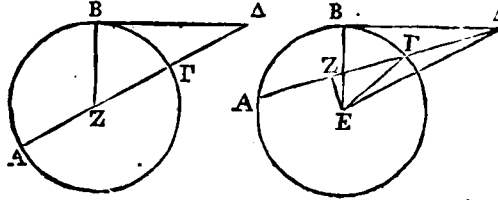
sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal au quarré de ΖΔ. Mais les quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΖΔ (47. 1), car l'angle ΖΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal aux quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΖΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de la tangente ΔΒ.

Mais que la droite ΔΓΑ ne passe pas par le centre du cercle ΑΒΓ; prenons le centre Ε, et du point Ε menons ΕΖ perpendiculaire à ΑΓ (12. 1), et joignons ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; l'angle ΕΖΔ sera droit. Et puisque la droite ΕΖ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, la droite ΕΖ coupe la droite ΑΓ en deux parties égales (3. 3); donc la droite ΑΖ est égale à la droite ΖΓ. Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous les droites ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΓ, est égal au quarré de ΖΔ (6. 2). Ajoutons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec les quarrés des droites ΓΖ, ΖΕ, sera égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ. Mais le quarré de ΕΓ est égal aux quarrés de ΓΖ, ΖΕ (47. 1), car l'angle ΕΖΓ

192 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ⁸. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἰση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ

sis autem ex ΔΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΔ. Ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΓ æquale est ipsi ex ΕΔ. Æqualis autem ΕΓ ipsi ΕΒ; ipsum igitur ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsi ex ΕΔ. Ipsi autem ex ΕΔ æqua-



ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, κοινὸν ἀφαιρήσῃ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

lia sunt ipsa ex ΕΒ, ΒΔ, rectus enim ΕΒΔ angulus; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsis ex ΕΒ, ΒΔ. Commune auferatur ipsum ex ΕΒ; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ. Si igitur extra circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ

PROPOSITIO XXXVII.

Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτὴ τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum altera, vero

est droit, et le carré de ΕΔ est égal aux carrés des droites ΔΖ, ΖΕ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΕΓ, est égal au carré de ΕΔ. Mais ΕΓ est égal à ΕΒ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré de ΕΒ est égal au carré de ΕΔ. Mais les carrés des droites ΕΒ, ΒΔ sont égaux au carré de ΕΔ (47. 1), car l'angle ΕΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le carré ΕΒ, est égal aux carrés des droites ΕΒ, ΒΔ. Retranchons le carré commun de ΕΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au carré de ΔΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVII.

Si l'on prend un point quelconque hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'angle tombe sur

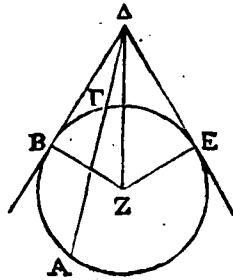
LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 193

προσπίπτῃ, ἥ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς¹ τεμνού-
σης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ
τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφέρειας ἴσον
τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα
ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημῖον ἐκτὸς
τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσ-
πιπτεύσων δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν

in eum cadat, sit autem ipsum sub totâ secantâ
et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et con-
vexam circumferentiam æquale ipsi ex incidente;
incidens continget circulum.

Extra circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punc-
tum Δ, et ex Δ in ΑΒΓ circulum incidenti duæ
rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet



ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτεύω,
ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ² ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς
ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ
εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω
τὸ Ζ³, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα
ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου,
τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον

circulum, ipsa verò ΔΒ in eum incidat, sit
autem ipsum sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ;
dico ipsam ΔΒ contingere ΑΒΓ circulum.

Ducatur enim ipsum ΑΒΓ contingens ipsa
ΔΕ, et sumatur centrum circuli ΑΒΓ, et sit
Ζ, et jungantur ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; ipse igitur ΖΕΔ
rectus est.

Et quoniam ΔΕ contingit ΑΒΓ circulum, se-
cat autem ipsa ΔΓΑ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ

ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise exté-
rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au quarré de
la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur le cercle sera tan-
gente à ce cercle.

Hors du cercle ΑΒΓ prenons un point quelconque Δ, et menons de ce point
les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ, que la droite ΔΓΑ coupe le cercle, et que la droite
ΔΒ tombe sur le cercle; que le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ soit égal au quarré de
ΔΒ; je dis que la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ.

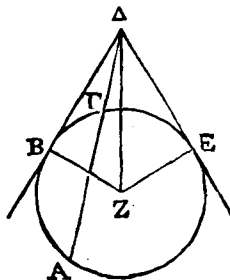
Menons la droite ΔΕ tangente au cercle ΑΒΓ (17. 3), prenons le centre du
cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Ζ; joignons ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; l'angle ΖΕΔ sera droit (18. 3).

Puisque ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΔΓΑ le coupe, le rectangle sous ΑΔ,

194 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν
ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς
ΔΕ ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ
τῇ ΔΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὲ αἱ
ΔΕ, ΕΖ δυοὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις
αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία

æquale est ipsi ex ΔΕ. Erat autem et ipsum
sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ; ipsum igitur ex
ΔΕ æquale est ipsi ex ΔΒ; æqualis igitur ΔΕ
ipsi ΔΒ. Est autem et ΖΕ ipsi ΖΒ æqualis, duæ
igitur ΔΕ, ΕΖ duabus ΔΒ, ΒΖ æquales sunt,
et basis ipsarum communis ΖΔ; angulus igitur



τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἴστί τῇ ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ
ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΖ ἐκβαλλο-
μένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου
πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ
τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύ-
κλου. Ὀμοίως δὲ δεῖχθήσεται καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ
τῆς ΑΓ τυγχάνη. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΕΖ angulo ΔΒΖ est æqualis. Rectus autem
ΔΕΖ; rectus igitur et ΔΒΖ. Et est ΒΖ producta
diameter, ipsa vero diametro circuli ab extre-
mitate ducta contingit et circulum; ipsa ΔΒ
igitur contingit ΑΒΓ circulum. Similiter autem
ostendemus, et si centrum in ΑΓ sit. Si igitur
extra circulum, etc.

ΔΓ est égal au quarré de ΔΕ (36. 3). Mais le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ est
égal au quarré de ΔΒ; donc le quarré de ΔΕ est égal au quarré de ΔΒ;
donc ΔΕ est égal à ΔΒ. Mais ΖΕ est égal à ΖΒ; donc les deux droites ΔΕ, ΕΖ
sont égales aux deux droites ΔΒ, ΒΖ; mais la base ΖΔ est commune; donc l'angle
ΔΕΖ est égal à l'angle ΔΒΖ (8. 1). Mais l'angle ΔΕΖ est droit; donc l'angle
ΔΒΖ est droit aussi. Mais la droite ΒΖ prolongée est un diamètre, et une droite
perpendiculaire au diamètre et menée d'une de ses extrémités est tangente au cercle
(16. 3). Donc la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ. La démonstration serait
la même si le centre était dans ΑΓ. Donc, etc.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R Q U A R T U S.

ΟΡΟΙ.

α. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἔγγραφισθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἔγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἔγγράφεται ἄπτηται.

β'. Σχήμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγρᾶφισθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulorum unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

LIVRE QUATRIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une figure rectiligne, lorsque chacun des angles de la figure inscrite touche chaque côté de celle dans laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement une figure est dite circonscrite à une figure, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche chaque angle de la figure à laquelle elle est circonscrite.

196 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γ'. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἄπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

δ'. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγρῆσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας².

ὁ κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφισθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

ε'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγρῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

ζ. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἢ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῇ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque angulus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circumscriptæ dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figurâ similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

6. Circulus autem circa figuram circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini ejus in circumferentiâ sunt circuli.

PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ, non majori existenti circuli diametro, æqualem rectam aptare.

3. Une figure rectiligne est dite inscrite dans un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

4. Une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche la circonférence de ce cercle.

5. Semblablement un cercle est dit inscrit dans une figure rectiligne, lorsque la circonférence du cercle touche chaque côté de la figure dans laquelle il est inscrit.

6. Un cercle est dit circonscrit à une figure, lorsque la circonférence du cercle touche chaque angle de la figure à laquelle il est circonscrit.

7. Une droite est dite adaptée dans un cercle, lorsque ses extrémités sont dans la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Dans un cercle donné, adapter une droite égale à une droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre.

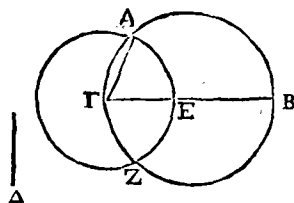
LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 197

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ. διττὴ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἡχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ἐνῆρμοςται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω² τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέν-

Sit datus circulus ΑΒΓ, data autem recta Δ non major circuli diametro; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualem rectam aptare.

Ducatur ΑΒΓ circuli diameter ΒΓ. Si quidem igitur æqualis est ΒΓ ipsi Δ, factum erit propositum. Aptata est enim in ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualis ΒΓ. Si vero major est ΒΓ ipsa Δ, ponatur ipsi Δ æqualis ΓΕ, et centro



τρω μὲν³ τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΑ.

Επεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ⁴ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ⁵, ἴση ἐνῆρμοςται ἡ ΓΑ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

quidem Γ, intervallo vero ΓΕ, circulus describatur ΑΕΖ, et jungatur ΓΑ.

Quoniam igitur Γ punctum centrum est ipsius ΑΕΖ circuli, æqualis est ΓΑ ipsi ΓΕ. Sed ipsi Δ ipsa ΓΕ est æqualis; et Δ igitur ipsi ΓΑ est æqualis.

In dato igitur circulo ΑΒΓ, datæ rectæ Δ, æqualis aptata est ΓΑ. Quod oportebat facere.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ la droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre de ce cercle; il faut dans le cercle ΑΒΓ adapter une droite égale à la droite Δ.

Menons le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ. Si la droite ΒΓ est égale à la droite Δ, on aura fait ce qui était proposé. Car on aura adapté dans le cercle ΑΒΓ, une droite ΒΓ égale à la droite Δ. Mais si la droite ΒΓ est plus grande que la droite Δ, faisons ΓΕ égal à Δ (3. 1), du centre Γ et de l'intervalle ΓΕ décrivons le cercle ΑΕΖ, et joignons ΓΑ.

Puisque le point Γ est le centre du cercle ΑΕΖ, la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΕ; mais Δ est égal à ΓΕ; donc Δ est égal à ΓΑ.

Donc dans le cercle donné ΑΒΓ on a adapté une droite ΓΑ égale à la droite donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

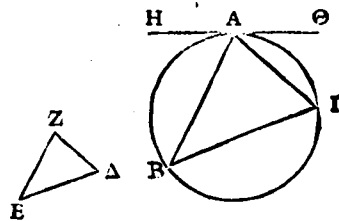
PROPOSITIO II.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθεὶν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

In dato circulo dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum vero triangulum ΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἱφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ducatur ΑΒΓ circulum contingens ipsa ΗΘ in Α, et constituatur ad ΑΘ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΘΑΓ; rursus, ad ΗΑ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΖΔΕ æqualis ΗΑΒ, et jungatur ΒΓ.

PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut dans le cercle ΑΒΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔΕΖ.

Menons la droite ΗΘ, de manière qu'elle touche le cercle ΑΒΓ en un point Α, et sur la droite ΑΘ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΘΑΓ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1). De plus sur la droite ΗΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΗΑΒ égal à l'angle ΖΔΕ, et joignons ΒΓ.

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 199

Επειὶ οὖν κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τις εὐθεΐα ἡ ΘA , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεΐα ἡ $ΑΓ'$ · ἡ ἄρα ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία, τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῇ ὑπὸ $Z\Delta E$ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον⁵.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Puisque la droite ΘA touche le cercle $AB\Gamma$, et que la droite $A\Gamma$ a été menée dans le cercle du point de contact A , l'angle $\Theta A\Gamma$ est égal à l'angle $AB\Gamma$ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle $\Theta A\Gamma$ est égal à l'angle ΔEZ ; donc l'angle $AB\Gamma$ est égal à l'angle ΔEZ . Par la même raison l'angle $A\Gamma B$ est égal à l'angle $Z\Delta E$; donc l'angle restant $BA\Gamma$ est égal à l'angle restant $E\Delta Z$ (32. 1); donc le triangle $AB\Gamma$ est équiangle avec le triangle ΔEZ , et il est inscrit dans le cercle $AB\Gamma$ (déf. 3. 4).

Donc dans le cercle donné, on a inscrit un triangle équiangle avec un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III.

Aun cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

Quoniam igitur $AB\Gamma$ circulum contingit aliqua recta ΘA , a contactu autem ad A in circulo ducta est recta $A\Gamma$, ipse utique $\Theta A\Gamma$ æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo $AB\Gamma$. Sed ipse $\Theta A\Gamma$ ipsi ΔEZ est æqualis; et $AB\Gamma$ igitur angulus ipsi ΔEZ est æqualis. Propter eadem utique et ipse $A\Gamma B$ ipsi $Z\Delta E$ est æqualis, et reliquus igitur $BA\Gamma$ reliquo $E\Delta Z$ est æqualis. Æquiangulum igitur est $AB\Gamma$ triangulum ipsi ΔEZ triangulo, et inscriptum est in $AB\Gamma$ circulo.

In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO III.

Circa datum circulum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

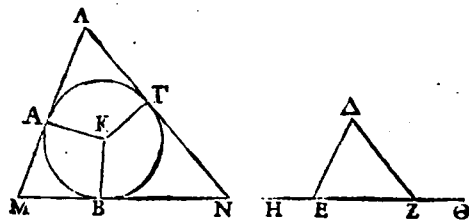
200 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὲ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Εκτελλήσθω ἡ ΕΖ ἐξ ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum autem triangulum ΔΕΖ; oportet igitur circa ΑΒΓ circulum ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Producatur ΕΖ ex utraq̃ue parte ad Η, Θ puncta, et sumatur ΑΒΓ circuli centrum Κ, et ducatur atcunque recta ΚΒ, et constituatur ad ΚΒ rectam et ad punctum in eâ Κ ipsi qui-



αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἢ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἑφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεία, καὶ ἐπιζευγνύμεναι εἰσιν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι

dem ΔΕΗ angulo æqualis ΒΚΑ, ipsi vero ΔΖΘ æqualis ΒΚΓ, et per Α, Β, Γ puncta ducantur tangentes ipsum ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Et quoniam contingunt ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ in Α, Β, Γ punctis, et junctæ sunt ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ; recti utique sunt ipsi ad Α, Β, Γ puncta anguli. Et quoniam ΑΜΒΚ quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales sunt, quandoquidem

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut au cercle ΑΒΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔΕΖ.

Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΛΜ, ΜΝ, ΝΑ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 201

τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπεὶ δὴ πᾶρ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ AMBK, καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, KBM γωνίαι³. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB, AMB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AKB, AMB ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANM τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MAN λοιπῇ⁴ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AMN τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ABΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

dem et in duo triacula dividitur AMBK, et sunt recti MAK, KBM anguli; reliqui igitur AKB, AMB duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ΔΕΗ, ΔΕΖ duobus rectis æquales; ipsi igitur AKB, AMB ipsis ΔΕΗ, ΔΕΖ æquales sunt, quorum AKB ipsi ΔΕΗ est æqualis; reliquus igitur AMB reliquo ΔΕΖ est æqualis. Similiter utique ostendetur et ipsum ANM ipsi ΔΖΕ esse æqualem; et reliquus igitur MAN reliquo ΕΔΖ est æqualis. Equiangulum igitur est AMN triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo, et circumscribitur circum ABΓ circum.

Circa datum igitur circumlum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscripsum est. Quod oportebat facere.

égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère AMBK peut se diviser en deux triangles; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles MAK, KBM sont droits; donc les angles restants AKB, AMB sont égaux à deux droits. Mais les angles ΔΕΗ, ΔΕΖ sont égaux à deux droits (13. 1); donc les angles AKB, AMB sont égaux aux angles ΔΕΗ, ΔΕΖ; mais l'angle AKB est égal à l'angle ΔΕΗ; donc l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ΔΕΖ. Nous démontrerons semblablement que l'angle ANM est égal à l'angle ΔΖΕ; donc l'angle restant MAN est égal à l'angle restant ΕΔΖ (32. 1). Donc le triangle AMN est équiangle avec le triangle ΔΕΖ, et il est circonscrit au cercle ABΓ (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ν.

PROPOSITIO IV.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

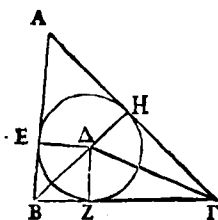
Εστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δι' δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum ΑΓΒ; oportet igitur in ΑΒΓ triangulo circulum inscribere.

Secentur ΑΒΓ, ΑΓΒ anguli bifariam ab ipsis ΒΔ, ΓΔ rectis, et convenient inter se in Δ puncto, et ducantur a Δ ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas perpendiculares ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΓ', ἵστί δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνα ἴστί τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ, τὰς δύο γωνίας ταύτας² δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ³ πλευρᾷ ἴσην, τὴν³ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ,

Et quoniam æqualis est ΑΒΔ angulus ipsi ΔΒΓ, est autem et rectus ΒΕΔ recto ΒΖΔ æqualis; duo igitur triangula sunt ΕΒΔ, ΖΒΔ, duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, sustendens unum æqualium angulorum, commune iis ipsum ΒΔ. Et

PROPOSITION IV.

Inscrire un cercle dans un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné; il faut dans le triangle ΑΒΓ inscrire un cercle.

Partageons en deux parties égales les angles ΑΒΓ, ΑΓΒ par les droites ΒΔ, ΓΔ; que ces droites se rencontrent au point Δ, et du point Δ menons aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (12. 1).

Puisque l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΔΒΓ, et que l'angle droit ΒΕΔ est égal à l'angle droit ΒΖΔ, les deux triangles ΕΒΔ, ΖΒΔ ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΒΔ qui soutend un des

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 203

καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς τὰς λοιπὰς πλευ-
ραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς
ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν·
ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ, καὶ⁹ διαστήματι ἐνὶ τῶν
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ
τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπεται τῶν ΑΒ,
ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς
τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμνῇ
αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς
ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ
κύκλου, ὅπερ ἄτοπον εἰδείχθη⁶. οὐκ ἄρα ὁ κέν-
τρῳ Δ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γρα-
φόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας·
ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμ-
μένος εἰς⁸ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Εγγεγράψθω ὡς
ΖΕΗ⁹.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος
ἐγγέγραπται ὁ¹⁰ ΕΖΗ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia
habebunt; æqualis igitur ΔΕ ipsi ΔΖ. Propter
eadem utique et ΔΗ ipsi ΔΖ est æqualis. Tres igitur
rectæ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ æquales inter se sunt; ergo
centro Δ, et intervallo unâ ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ
circulus descriptus transibit et per reliqua puncta,
et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas, propterea
quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η puncta anguli. Si
enim secet ipsas, erit ipsa diametro circuli ad
rectos ab extremitate ducta intra ipsum cadens
circulum, quod absurdum ostensum est; non
igitur centro Δ, intervallo autem unâ ipsarum
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ descriptus circulus secat ΑΒ, ΒΓ,
ΓΑ rectas; contingit igitur ipsas, et erit cir-
culus descriptus in ΑΒΓ triangulo. Inscribatur
ut ΖΗΕ-

In dato igitur triangulo ΑΒΓ circulus ins-
criptus est ΕΖΗ. Quod oportebat facere.

angles égaux; ils ont donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1);
donc ΔΕ est égal à ΔΖ. Par la même raison ΔΗ est égal à ΔΖ. Donc les trois
droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ sont égales entr'elles; donc le cercle décrit du point Δ
et d'un intervalle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ passera par les autres
points, et touchera les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, les angles étant droits en Ε, Ζ, Η.
Car si le cercle coupait ces droites, une perpendiculaire au diamètre d'un
cercle et menée d'une de ses extrémités tomberait dans ce cercle, ce qui a
été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du point Δ et d'un inter-
valle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ne coupera point les droites ΑΒ, ΒΓ,
ΓΑ; donc elle les touchera, et ce cercle sera inscrit dans le triangle ΑΒΓ (déf. 5. 4).
Qu'il soit inscrit comme ΖΗΕ.

Donc dans le triangle donné ΑΒΓ, on a inscrit le cercle ΕΖΗ. Ce qu'il fallait
faire.

204. LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

PROPOSITIO V.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

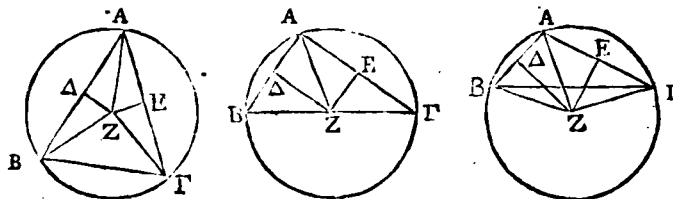
Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ · δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ κύκλον περιγράψαι.

Sit datum triangulum $ABΓ$; oportet igitur circa datum triangulum $ABΓ$ circulum circumscribere.

Τετμήσθωσαν αἱ AB , $ΑΓ$ εὐθείαι¹ δίχα κατὰ τὰ $Δ$, $Ε$ σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν $Δ$, $Ε$ σημείων ταῖς AB , $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ $ΔΖ$, $ΖΕ$ · συμπίπτουσι δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς $BΓ$ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς $BΓ$.

Secentur AB , $ΑΓ$ rectæ bifariam in $Δ$, $Ε$ punctis, et ab ipsis $Δ$, $Ε$ punctis ipsis AB , $ΑΓ$ ad rectos ducantur $ΔΖ$, $ΖΕ$. Convenient autem vel intra $ABΓ$ triangulum, vel in $BΓ$ rectâ, vel extra $BΓ$.



Συμπίπτωσαν οὖν² ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ $Ζ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB , $ZΓ$, ZA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $BΔ$, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔΖ$ · βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση³.

Convenient igitur intus primum in Z , et jungantur ZB , $ZΓ$, ZA . Et quoniam æqualis est $ΑΔ$ ipsi $BΔ$, communis autem et ad rectos ipsa $ΔΖ$; basis igitur AZ ipsi ZB est æqualis. Simi-

PROPOSITION V.

Circonscire un cercle à un triangle donné.

Soit $ABΓ$ le triangle donné; il faut au triangle donné $ABΓ$ circonscire un cercle.

Coupons les droites AB , $ΑΓ$ en deux parties égales aux points $Δ$, $Ε$ (10. 1), et des points $Δ$, $Ε$ menons aux droites AB , $ΑΓ$ les perpendiculaires $ΔΖ$, $ΖΕ$ (11. 1); ces perpendiculaires se rencontreront ou dans le triangle $ABΓ$, ou dans la droite $BΓ$, ou hors de la droite $BΓ$.

Premièrement que ces perpendiculaires se rencontrent dans le triangle, au point Z ; joignons ZB , $ZΓ$, ZA . Puisque $ΑΔ$ est égal à $BΔ$, et que la perpendiculaire $ΔΖ$ est commune et à angles droits, la base AZ est égale à la base ZB (4. 1). Nous

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφέσθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπίπτουσιν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Αλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπίπτουσιν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσεις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος

liter utique ostendemus et ipsam ΓΖ ipsi ΑΖ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ æquales inter se sunt. Ergo centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circulus circa ΑΒΓ triangulum. Circumscribatur ut ΑΒΓ.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient in ΒΓ rectâ in Ζ, ut se habet in secundâ figurâ, et jungatur ΑΖ. Similiter utique ostendemus Ζ punctum centrum esse ipsius circa ΑΒΓ triangulum circumscripti circuli.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient extra ΑΒΓ triangulum, in Ζ rursus, ut se habet in tertiâ figurâ, et jungantur ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Et quoniam rursus æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Similiter utique ostendemus et ΖΓ ipsi ΖΑ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; ergo rursus centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per

démontrerons semblablement que ΓΖ est égal à ΑΖ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ; donc les trois droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ sont égales entr'elles. Donc si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce cercle passera par les autres points, et ce cercle sera circonscrit au triangle ΑΒΓ (déf. 6. 4). Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓ.

Mais que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent dans la droite ΒΓ, au point Ζ, comme dans la seconde figure; joignons ΑΖ. Nous démontrerons semblablement que le point Ζ est le centre du cercle circonscrit au triangle ΑΒΓ.

Mais enfin, que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent hors du triangle ΑΒΓ, au point Ζ, comme dans la troisième figure, et joignons ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Puisque ΑΔ est encore égal à ΔΒ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commune et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous démontrerons semblablement que ΖΓ est égal à ΖΑ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ; donc encore si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce

206 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς $AB\Gamma^8$.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

reliqua puncta, et erit circumscriptus circa $AB\Gamma$ triangulum. Et describatur ut $AB\Gamma$.

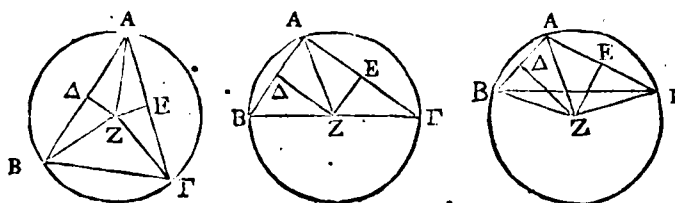
Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι, ὅτε μὲν εἰτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quando quidem intra triangulum cadit centrum circuli, ipsum $BA\Gamma$ angulum



νία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν· ἔτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει⁹, ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$, ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ¹⁰ ἡμικυκλίου

lum, in segmento majore quam semicirculo existentem, minorem esse recto; quando autem in $B\Gamma$ rectam centrum cadit, ipsum $BA\Gamma$ angulum, in semicirculo existentem, rectum esse; quando vero centrum circuli extra triangulum cadit, ipsum $BA\Gamma$, in segmento minore quam semicir-

cercle passera par les points restants, et il sera circonscrit au triangle $AB\Gamma$. Qu'il soit circonscrit comme $AB\Gamma$.

Donc un cercle a été circonscrit dans un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il est évident que si le centre du cercle tombe dans le triangle, l'angle $BA\Gamma$ compris dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est plus petit qu'un angle droit; que si le centre du cercle tombe dans la droite $B\Gamma$, l'angle $BA\Gamma$ compris dans un demi-cercle, est droit; que si enfin le centre du cercle tombe hors du triangle $BA\Gamma$, l'angle $BA\Gamma$ compris dans un segment plus petit qu'un demi-

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 207

τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὡστε καὶ ὅταν ἐλάττω ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ δεδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται¹¹ αἱ ΔΖ, ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθῇ, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐντὸς τῆς ΒΓ¹².

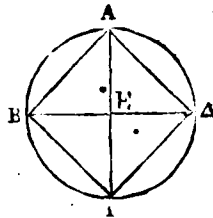
culo, majorem esse recto. Quare et quando minor recto est datus angulus, intra triangulum convenient ΔΖ, ΕΖ; quando autem rectus, in ΒΓ; quando vero major recto, extra ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.
Εστώ ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δι' δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum inscribere.
Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quadratum inscribere.



Ἦχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο² διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ· καὶ ἐπιζεύχθω- αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γάρ τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ· βάσεις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστί. Διὰ³ τὰ αὐτὰ

Ducantur ipsius ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, centrum enim Ε, communis autem et ad rectos ipsa ΕΑ; basis igitur ΑΒ basi ΑΔ æqualis est. Propter

cercle, est plus grand qu'un angle droit. C'est pourquoi si l'angle donné est plus petit qu'un droit, les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontreront dans le triangle; s'il est droit, elles se rencontreront dans ΒΓ, et s'il est plus grand qu'un droit, elles se rencontreront hors de la droite ΒΓ.

PROPOSITION VI.

Inscrire un carré dans un cercle donné.

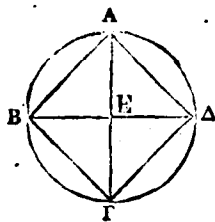
Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un carré dans le cercle ΑΒΓΔ. Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre (11. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1).

208 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρα τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἔρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθογώ-

eadem utique et utraque ipsarum ΒΓ, ΓΔ utri-
que ipsarum ΒΑ, ΑΔ æqualis est ; æquilaterum
igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Dico autem et
rectangulum. Quoniam enim ΒΔ recta diame-
ter est ipsius ΑΒΓΔ circuli, semicirculum igitur
est ΒΑΔ ; rectus igitur ΒΑΔ-angulus. Prop-
ter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ,



νιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Ἐδείχθη.
δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ. Καὶ
ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον⁵.

ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus est ; rectangulum igitur est
ΑΒΓΔ quadrilaterum. Ostensum est autem et
æquilaterum ; quadratum igitur est. Et inscrip-
tum est in dato ΑΒΓΔ circulo.

Εἰς ἄρα δοθέντα⁶ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγω-
νον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

In dato igitur circulo ΑΒΓΔ quadratum ins-
criptum est ΑΒΓΔ. Quod oportebat facere.

Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (31. 1). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral ; donc ce quadrilatère est un carré. Et ce carré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

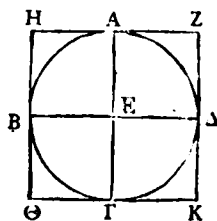
Donc on a inscrit le carré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Εστω δοθεὶς κύκλος ὁ' ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ² περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἠχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἑφαπτίμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.



Επεὶ οὖν ἐφαπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἑπαφὴν ἐπιζεύκται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ³ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur ΑΒΓΔ circuli duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et per Α, Β, Γ, Δ puncta ducantur contingentes ΑΒΓΔ circulum ipsæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Quoniam igitur contingit ΖΗ ipsum ΑΒΓΔ circulum, ab Ε autem centro ad contactum Α ducitur ΕΑ; ipsi igitur ad Α anguli recti sunt. Propter eandem utique et ad Β, Γ, Δ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est ΑΕΒ angulus, est autem rectus et ΕΒΗ; parallela

PROPOSITION VII.

Circonscrire un quarré à un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut circonscrire un quarré au cercle ΑΒΓΔ.

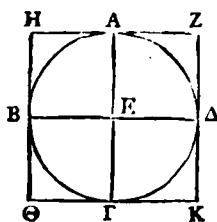
Menons dans le cercle ΑΒΓΔ, les deux diamètres ΑΓ, ΒΔ perpendiculaires l'un à l'autre, et par les points Α, Β, Γ, Δ menons les droites ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ tangentes au cercle ΑΒΓΔ (17. 5).

Puisque la droite ΖΗ est tangente au cercle ΑΒΓΔ, et que la droite ΕΑ a été menée du centre Ε au point de contact Α, les angles sont droits en Α (28. 3). Par la même rasion, les angles sont droits aux points Β, Γ, Δ. Et puisque l'angle ΑΕΒ est droit, et que l'angle ΕΒΗ est droit aussi, la droite ΗΘ est paral-

210 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ὑπὸ EBH· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ τῇ
ΑΓ. Ἐὰν τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστὶ παρ-
άλληλος⁵. Ὅμοιως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάτερα τῶν
HZ, ΘΚ τῇ BEΔ ἐστὶ παράλληλος. Παράλληλό-
γραμμα ἐστὶ τὰ HK, ΗΓ, AK, ZB, BK· ἴση
ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν HZ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ HΘ τῇ ΖΚ.
Καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ⁶ ἡ
μὲν ΑΓ ἑκτέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ⁷, ἡ δὲ ΕΔ ἑκα-

igitur est HΘ ipsi ΑΓ. Propter eadem utique et
ΑΓ ipsi ΖΚ est parallela; quare et HΘ ipsi ΖΚ
est parallela. Similiter utique ostendemus et
utramque ipsarum HZ, ΘΚ ipsi BEΔ esse paral-
lelam. Parallelograma igitur sunt HK, ΗΓ, AK,
ZB, BK; æqualis igitur est HZ quidem ipsi ΘΚ,
ipsa vero HΘ ipsi ΖΚ. Et quoniam æqualis est ΑΓ
ipsi ΒΔ, sed et ipsa quidem ΑΓ utrique ipsa-
rum ΗΘ, ΖΚ, ipsa vero ΕΔ utrique ipsarum



τέρᾳ τῶν HZ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκάτερα ἄρα
τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκτέρᾳ τῶν HZ, ΘΚ ἐστὶν ἴση⁸.
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον.
Λέγω δὴ⁹ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλλη-
λόγραμμον ἐστὶ τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ
ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. Ὅμοιως δὲ δείξο-
μεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαὶ εἴ-
σιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον¹⁰.

HZ, ΘΚ est æqualis; et uterque igitur ipsarum
ΗΘ, ΖΚ utrique ipsarum HZ, ΘΚ est æqualis.
Æquilaterum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum.
Dico et rectangulum. Quoniam enim paralle-
logrammum est ΗΒΕΑ, et est rectus ΑΕΒ; rec-
tus igitur et ΑΗΒ. Similiter utique ostendemus
et ipsos ad Θ, Κ, Ζ angulos rectos esse; rec-
tangulum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum. Os-

lèle à la droite ΑΓ (28. 1). Par la même raison, la droite ΑΓ est parallèle à la
droite ΖΚ. Donc ΗΘ est parallèle à ΖΚ. Nous démontrerons semblablement que
l'une et l'autre des droites HZ, ΘΚ est parallèle à la droite BEΔ. Donc les fi-
gures HK, ΗΓ, AK, ZB, BK sont des parallélogrammes; donc HZ est égal à
ΘΚ (34. 1), et ΗΘ égal à ΖΚ; et puisque ΑΓ est égal à ΒΔ, que ΑΓ est égal à
l'une et à l'autre des droites ΗΘ, ΖΚ, et que ΒΔ est égal à l'une et à l'autre
des droites HZ, ΘΚ, les droites ΗΘ, ΖΚ sont égales aux droites HZ, ΘΚ. Donc
le quadrilatère ΖΗΘΚ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle, car
puisque ΗΒΕΑ est un parallélogramme, et que l'angle ΑΕΒ est droit, l'angle
ΑΗΒ est droit aussi (34. 1). Nous démontrerons semblablement que les angles
sont droits en Θ, Κ, Ζ; donc le quadrilatère ΖΗΘΚ est rectangle; mais on

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 211

Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ.
Καὶ περιγίγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγίγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

tensum est autem et æquilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa ΑΒΓΔ circum-
culum.

Circa datum igitur circumulum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

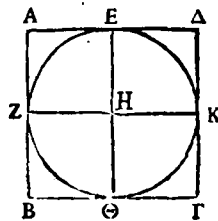
PROPOSITIO VIII.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

In dato quadrato circumulum inscribere.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὲ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ quadrato circumulum inscribere.



Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ, δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ,

Secetur utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam in Ε, Ζ punctis, et per Ε quidem alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallela ducatur ΕΘ; per Ζ vero alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ducatur ΖΚ; parallelogramum igitur est unumquodque ipso-

a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔ.

On a donc circonscrit un quarré à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION VIII.

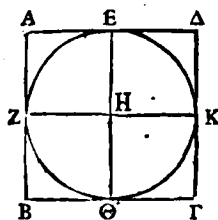
Inscrire un cercle dans un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut inscrire un cercle dans le quarré ΑΒΓΔ.

Coupons en deux parties égales l'une et l'autre des droites ΑΒ, ΑΔ aux points Ζ, Ε (10. 1), et par le point Ε menons ΕΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΓΔ (31. 1), et par le point Ζ menons aussi la droite ΖΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ; donc chacune des figures ΑΚ,

KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσὶ¹. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσὶν², ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν³. Ο ἄρα κέν-

rum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ, et opposita ipsorum latera utique æqualia sunt. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΒ, et est ipsius quidem ΑΔ dimidia ΑΕ, ipsius vero ΑΒ dimidia ΑΖ, æqualis igitur et ΑΕ ipsi ΑΖ; quare et opposita æqualia sunt, æqualis igitur et ΖΗ ipsi ΗΕ. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum ΗΘ, ΗΚ utrique ipsarum ΖΗ, ΗΕ esse æqualem. Quatuor igitur ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ æquales



τρον μὲν τῷ Η, διαστήματι δεινὸν τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάπτεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμνῇ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένη ἐντὸς πεισῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἄτοπον εἰδείχθη⁴. Οὐκ ἄρα ὁ

inter sesunt. Ipse igitur centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ rectas, propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Θ, Κ anguli; si enim secat circulus ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitatē ducta intra cadet circulum, quod absurdum ostend-

KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ est un parallélogramme, et leurs côtés opposés sont égaux (34. 1). Et puisque ΑΔ est égal à ΑΒ, que ΑΕ est la moitié de ΑΔ, et ΑΖ la moitié de ΑΒ, la droite ΑΕ est égale à ΑΖ; donc les côtés opposés sont égaux; donc ΖΗ est égal à ΗΕ. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΗΘ, ΗΚ est égale à l'une et à l'autre des droites ΖΗ, ΗΕ. Donc les quatre droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre H, et d'un intervalle égal à une des droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ passera par les autres points, et sera tangent aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, parce que les angles sont droits en Ε, Ζ, Θ, Κ; car si ce cercle coupait les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une de ses extrémités tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3). Donc le cercle décrit du centre H, et

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 213.

κέντρο μὲν δὲ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Εφάπτεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθέν τετράγωνον κύκλος ἐγγράφεται. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

sum est. Non igitur centro quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ circulus descriptus secat ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ rectas. Continget igitur ipsas et erit inscriptus in ΑΒΓΔ quadrato.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

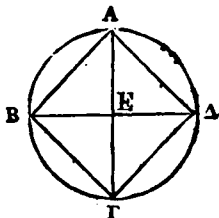
PROPOSITIO IX.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράφει.

Εστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· διττὸ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράφει.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ quadratum circulum circumscribere.



Επιζητούμεν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέσθαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Junctæ enim ΑΓ, ΒΔ, sese secant in Ε.

d'un intervalle égal à des droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ne coupe point les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Donc il sera tangent à ces droites, et il sera inscrit dans le quarré ΑΒΓΔ (déf. 5. 4).

Donc on a inscrit un cercle dans un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION IX.

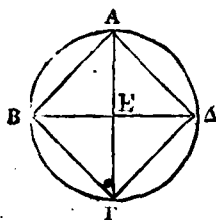
Circonscrire un cercle à un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut circonscrire un cercle au quarré ΑΒΓΔ. Joignons ΑΓ, ΒΔ, et que ces droites se coupent au point Ε.

214 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὲ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυοὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ². ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμνται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμνται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ æqualis; angulus igitur æqualis est ΔΑΓ ipsi ΒΑΓ; ipse igitur ΔΑΒ angulus bifariam sectus est ab ΑΓ. Similiter utique ostendemus et unumquemque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ bifariam sectum esse ab ΑΓ, ΔΒ rectis. Et quoniam æqualis est ΔΑΒ angulus ipsi ΑΒΓ, et est ipsius quidem ΔΑΒ di-



ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάτερα τῶν ΕΑ, ΕΒ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστὶν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο ἄρα κέντρον τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος

midius ipse ΕΑΒ, et ipsius ΑΒΓ dimidius ipse ΕΒΑ; et ΕΑΒ igitur ipsi ΕΒΑ est æqualis. Quare et latus ΕΑ lateri ΕΒ est æquale. Similiter utique ostendemus, et utramque ΕΑ, ΕΒ rectarum utrique ipsarum ΕΓ, ΕΔ æqualem esse; quatuor igitur ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ε, et intervallo unâ ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus tran-

Puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, et que la droite ΑΓ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ, ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8. 1); donc l'angle ΔΑΒ est coupé en deux parties égales par la droite ΑΓ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est coupé en deux parties égales par les droites ΑΓ, ΔΒ. Et puisque l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΑΒΓ, que l'angle ΕΑΒ est la moitié de l'angle ΔΑΒ, et l'angle ΕΒΑ la moitié de l'angle ΑΒΓ, l'angle ΕΑΒ est égal à l'angle ΕΒΑ; donc le côté ΕΑ est égal au côté ΕΒ (6. 1). Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΒ est égale à l'une et à l'autre des droites ΕΓ, ΕΔ; donc les quatre droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Ε, et d'un intervalle égal à une des droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ passera par les autres points,

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 215

γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἴσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ABΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ABΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγίγρῃται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circa ABΓΔ quadratum. Circumscribatur ut ABΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

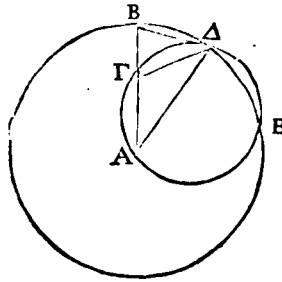
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκάστην τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διαπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Εκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχο-

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque ipsorum ad basim angulorum duplum reliqui.

Exponatur aliqua recta AB, et secetur in Γ puncto, ita ut ipsum sub AB, BΓ contentum



μινον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ A, καὶ διαστήματι τῷ AB' κύκλος γεγράφθω ὁ BΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν

rectangulum æquale sit ipsi ex ΓΑ quadrato; et centro A, et intervallo AB circulus describatur BΔΕ, et aptetur in BΔΕ circulo ipsi AΓ

et il sera circonscrit au quarré ABΓΔ. Qu'il soit circonscrit comme ABΓΔ.

Donc on a circonscrit un cercle à un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.

Soit une droite AB; que cette droite soit coupée en un point Γ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΓ soit égal au quarré de ΓΑ (11. 2); du centre A et de l'intervalle AB décrivons le cercle BΔΕ (dém. 3); dans le cercle

ΔΑΓ. Επειὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείμεθα ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυνεὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑποκείται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνία⁵ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίους⁶. Ἰση δὲ καὶ⁷ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῇ⁸. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρᾳ ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῇ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

qualis est ΒΔΓ ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ. Totus igitur ΒΔΑ æqualis est duobus ΓΔΑ, ΔΑΓ. Sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ æqualis est exterior ΒΓΔ; ipse igitur ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. Sed ΒΔΑ ipsi ΒΓΔ est æqualis, quoniam et latus ΔΑ ipsi ΑΒ est æquale; quare et ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ est æqualis. Tres igitur ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΒΓΔ, æqualis est et latus ΒΔ lateri ΔΓ. Sed ΒΔ ipsi ΓΑ ponitur æqualis; et ΑΓ igitur ipsi ΓΔ est æqualis; quare et angulus ΓΔΑ angulo ΔΑΓ est æqualis; ipsi igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ ipsius ΔΑΓ sunt dupli. Æqualis autem et ΒΓΔ ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ; et ΒΓΔ igitur ipsius ΔΑΓ est duplus. Æqualis autem et ΒΓΔ utrique ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ; et uterque igitur ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΒΑΔ est duplus.

Isosceles igitur triangulum constitutum est ΑΔΒ habens utrumque ipsorum ad ΑΒ basim angulorum duplum reliqui. Quod oportebat facere.

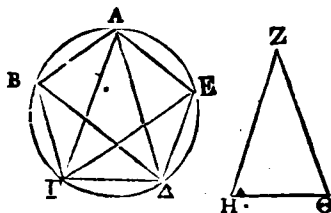
l'angle ΔΑΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΑΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔΑ, l'angle entier ΒΔΑ sera égal aux deux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ. Mais l'angle extérieur ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Mais l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΓΒΔ (5. 1), puisque le côté ΔΑ est égal au côté ΑΒ; donc l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Donc les trois angles ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, le côté ΒΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté ΒΔ est supposé égal au côté ΓΑ; donc le côté ΑΓ est égal au côté ΓΔ; donc l'angle ΓΔΑ est égal à l'angle ΔΑΓ (5. 1); donc les angles ΓΔΑ, ΔΑΓ sont doubles de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΓΔ est double de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal à chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ; donc chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ est double de l'angle ΒΑΔ.

Donc on a construit un triangle isocèle ΑΔΒ, ayant chacun des angles de la base ΒΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἑγγραῖται.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἑγγραῖται.



Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιών² τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἑγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσῃ εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσῃ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ

In dato circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Exponatur triangulum isosceles ΖΗΘ, duplum habens utrumque ipsorum ad Η, Θ angulorum ipsius ad Ζ, et inscribatur in ΑΒΓΔΕ circulo, ipsi ΖΗΘ triangulo æquiangulum triangulum ΑΓΔ, ita ut ipsi quidem Ζ angulo æqualis sit ipse ΓΑΔ, uterque vero ipsorum ad Η, Θ æqualis utrique ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ; et uterque igitur ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ ipsius ΓΑΔ est duplus. Sece-

PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut inscrire dans le cercle ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ΖΗΘ, ayant chacun des angles en Η, Θ double de l'angle Ζ (10. 4); inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le triangle ΑΓΔ équiangle avec le triangle ΖΗΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓΑΔ soit égal à l'angle Ζ, et que chacun des angles Η, Θ soit égal à chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ; chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ sera double de l'angle ΓΑΔ. Coupons chacun des angles ΑΓΔ

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 219

ΓΑΔ ἰστί διπλῇ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας³ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ⁴.

Επεὶ οὖν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίον ἰστί τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἰστί τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Επεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἰστί⁵, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἰστί⁶. Καὶ βεβήκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία⁷ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἰστί⁸. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκα-

tur autem uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam ab utràque ipsarum ΓΕ, ΔΒ rectarum, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Quoniam igitur uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ angulorum duplus est ipsius ΓΑΔ; et secti sunt bifariam à ΓΕ, ΔΒ rectis; quinque igitur anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent; quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; quinque igitur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Dico et æquiangulum. Quoniam enim ΑΒ circumferentia ipsi ΔΕ circumferentiæ est æqualis, communis addatur ΒΓΔ; tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti ΕΔΓΒ circumferentiæ est æqualis. Et insistit ipsi quidem ΑΒΓΔ circumferentiæ angulus ΑΕΔ, ipsi vero ΕΔΓΒ circumferentiæ angulus ΒΑΕ, et ΒΑΕ igitur angulus ipsi ΑΕΔ est æqualis. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ angulo-

ΓΑΔ en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ (9. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Puisque chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ est double de l'angle ΓΑΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ, les cinq angles ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3); donc les cinq arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc les cinq droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égales entr'elles; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΑΒ est égal à l'arc ΔΕ, ajoutons l'arc commun ΒΓΔ; l'arc entier ΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒ. Mais l'angle ΑΕΔ est appuyé sur l'arc ΑΒΓΔ, et l'angle ΒΑΕ sur l'arc ΕΔΓΒ; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΑΕΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ est égal à chacun des angles ΒΑΕ,

220 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τέρα τῶν ὑπὸ BAE, AEA ἴσιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἴσιν τὸ ABΓΔΕ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράφεται. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

rum utrique ipsorum BAE, AEA est æqualis; æquiangulum igitur est ABΓΔΕ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum;

In dato igitur circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

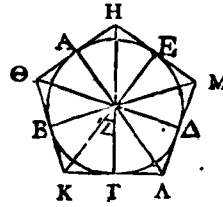
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Εἰσὶν ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ABΓΔΕ· δεῖ δὲ περὶ τὸν ABΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABΓΔΕ; oportet igitur circa ABΓΔΕ circulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.



Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ A, B, Γ, Δ, E, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας·

Intelligentur inscripti pentagoni angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E, ita ut æquales sint AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ circumferentiæ; et per A,

AEA; donc le pentagone ABΓΔΕ est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Circonscrire à un cercle donné un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ABΓΔΕ le cercle donné; il faut au cercle ABΓΔΕ circonscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Concevons que A, B, Γ, Δ, E soient les sommets des angles du pentagone inscrit (11. 4), de manière que les arcs AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ soient égaux;

καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύ-
κλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΗ·
καὶ εἰληφθῶ τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ,
καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΑ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΑ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ
ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου
ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπιζεύκεται ἡ ΖΓ· ἡ
ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΑ· ὀρθὴ ἄρα
ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῇ Γ γωνιών. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι
ἐρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γω-
νία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ,
ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ²· ὥστε τὰ³ ἀπὸ τῶν
ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν
τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῇ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον·
λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπὸν⁴ τῇ ἀπὸ
τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ⁵. Καὶ
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο
δὲ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ
βάσεις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα
ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία πῶ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ

Β, Γ, Δ, Ε ducantur circulum contingentes
ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΗ; et sumatur ΑΒΓΔΕ
circuli centrum Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ,
ΖΑ, ΖΔ.

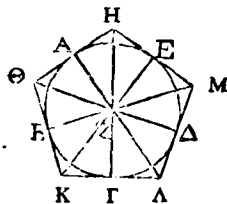
Et quoniam recta quidem ΚΑ contingit
ΑΒΓΔΕ circulum in Γ, ab ipso vero Ζ centro
in contactum ad Γ ducta est ΖΓ; ergo ΖΓ per-
pendicularis est ad ΚΑ; rectus igitur est uterque
ipsorum ad Γ angulorum. Propter eadem uti-
que et ipsi ad Β, Δ puncta anguli recti sunt.
Et quoniam rectus est ΖΓΚ angulus, ipsum igitur
ex ΖΚ æquale est ipsis ex ΖΓ, ΓΚ. Propter
eadem utique et ipsis ex ΖΒ, ΒΚ æquale est ip-
sum ex ΖΚ; quare ipsa ex ΖΓ, ΓΚ ipsis ex ΖΒ,
ΒΚ æqualia sunt, quorum ipsum ex ΖΓ ipsi ΖΒ
est æquale; reliquum igitur ex ΓΚ reliquo
ex ΒΚ est æquale; æqualis igitur ΓΚ ipsi ΒΚ.
Et quoniam æqualis est ΖΒ ipsi ΖΓ, et communis
ΖΚ, duæ utique ΒΖ, ΖΚ duabus ΓΖ, ΖΚ æquales
sunt, et basis ΒΚ basi ΓΚ est æqualis; angulus
igitur quidem ΒΖΚ angulo ΚΖΓ est æqualis,
ipse vero ΒΚΖ ipsi ΖΚΓ est æqualis; duplus igitur

par les points Α, Β, Γ, Δ, Ε, menons au cercle les tangentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΑΜ, ΜΗ (17. 3); prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓΔΕ, et joignons ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΑ, ΖΔ.

Puisque la droite ΚΑ touche le cercle ΑΒΓΔΕ au point Γ, et que la droite ΖΓ est menée du centre Ζ au point de contact Γ, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΚΑ (18. 3); donc chacun des angles en Γ est droit. Chacun des angles aux points Β, Δ est droit, par la même raison. Et puisque l'angle ΖΓΚ est droit, le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΓ, ΓΚ (47. 1). Le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ, par la même raison; donc les carrés des droites ΖΓ, ΓΚ sont égaux aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ; mais le carré de ΖΓ est égal au carré de ΖΒ; donc le carré restant de ΓΚ est égal au carré restant de ΒΚ; donc ΓΚ est égal à ΒΚ. Et puisque ΖΒ est égal à ΖΓ, et que la droite ΖΚ est commune, les deux droites ΒΖ, ΖΚ sont égales aux deux droites ΓΖ, ΖΚ; mais la base ΒΚ est égale à la base ΓΚ; donc l'angle ΒΖΚ

δὲ ὑπὸ BKZ τῇ ὑπὸ ZKΓ ἴσιν⁶. διπλῇ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ BZΓ τῆς ὑπὸ KZΓ, ἡ δὲ ὑπὸ BKΓ τῆς ὑπὸ ZKΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ΓΖΑ ἴσιν διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΑΔ τῆς ὑπὸ ΓΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BZΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. Καὶ ἴσιν ἡ μὲν ὑπὸ BZΓ τῆς ὑπὸ KZΓ διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῇ⁷ τῆς ὑπὸ ΑΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ KZΓ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ· ἴσιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZΓK

tur ipse quidem BZΓ ipsius KZΓ, ipse vero BKΓ ipsius ZKΓ. Propter eadem utique et ipse quidem ΓΖΔ ipsius ΓΖΑ est duplus, ipse vero ΓΑΔ ipsius ΓΑΖ. Et quoniam æqualis est ΒΓ circumferentia ipsi ΓΔ, æqualis est et angulus BZΓ ipsi ΓΖΔ. Et est ipse quidem BZΓ ipsius KZΓ duplus, ipse vero ΔΖΓ duplus ipsius ΑΖΓ; æqualis igitur et KZΓ ipsi ΑΖΓ; est autem et ZΓK angulus ipsi ΖΓΑ æqualis. Duo utique triangula sunt ZKΓ, ΖΑΓ duos an-



γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΑ ἴση⁸. Δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶν τὰ ZKΓ, ΖΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρῃ¹⁰, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν KΓ εὐθεῖα τῇ ΓΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ZKΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

gulos duobus angulis æquales habentia utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsis, ipsum ΖΓ, et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo; æqualis igitur ipsa quidem KΓ recta ipsi ΓΑ, ipse vero ZKΓ angulus ipsi ΖΑΓ. Et quoniam æqualis est KΓ ipsi ΓΑ, dupla igitur ΚΑ ipsius KΓ. Propter eadem

est égal à l'angle KZΓ, et l'angle BKZ à l'angle ZKΓ (8. 1); donc l'angle BZΓ est double de l'angle KZΓ, et l'angle BKΓ double de l'angle ZKΓ. Par la même raison, l'angle ZΓΔ est double de l'angle ΓΖΑ, et l'angle ΓΑΔ double de l'angle ΓΑΖ. Et puisque l'arc ΒΓ est égal à l'arc ΓΔ, l'angle BZΓ est égal à l'angle ΓΖΔ (27. 3). Mais l'angle BZΓ est double de l'angle KZΓ, et l'angle ΔΖΓ double de l'angle ΑΖΓ; donc l'angle KZΓ est égal à l'angle ΑΖΓ; mais l'angle ZΓK est égal à l'angle ΖΓΑ; donc les triangles ZKΓ, ΖΑΓ ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, le côté ΖΓ, qui leur est commun; donc ces deux triangles ont les côtés restants égaux aux côtés restants, et l'angle restant égal à l'angle restant (26. 1); donc la droite KΓ est égale à la droite ΓΑ, et l'angle ZKΓ est égal à l'angle ΖΑΓ. Mais KΓ est égal à ΓΑ; donc

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. • 223

ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλὴ ἄρα ἢ ΚΑ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ διχθίσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλὴ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση¹¹. καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΑ ἔστιν ἴση. Ομοίως δὲ διχθίσεται καὶ ἐκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ ἐκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΑ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, καὶ εἰδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλὴ ἢ ὑπὸ ΘΚΑ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΑΓ διπλὴ ἢ ὑπὸ ΚΑΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΑΜ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ διχθίσεται καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΚΑΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Εἰδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

utique ostendetur, et ΘΚ ipsius ΒΚ dupla. Et est ΒΚ ipsi ΚΓ æqualis; et ΘΚ igitur ipsi ΚΑ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unaquæque ipsarum ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ utrique ipsarum ΘΚ, ΚΑ æqualis; æquilaterum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Dico autem et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΚΓ angulus ipsi ΖΑΓ, et ostensus est ipsius quidem ΖΚΓ duplus ipse ΘΚΑ, ipsius vero ΖΑΓ duplus ipse ΚΑΜ; et ΘΚΑ igitur ipsi ΚΑΜ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unusquisque ipsorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ utrique ipsorum ΘΚΑ, ΚΑΜ æqualis; quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ æquales inter se sunt. Æquiangulum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et circumscriptum est circa ΑΒΓΔΕ circulum. Quod oportebat facere.

ΚΑ est double de ΚΓ. On démontrera de la même manière que ΘΚ est double de ΒΚ. Mais ΒΚ est égal à ΚΓ; donc ΘΚ est égal à ΚΑ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ est égale à l'une et à l'autre des droites ΘΚ, ΚΑ; donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle; car puisque l'angle ΖΚΓ est égal à l'angle ΖΑΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΘΚΑ est double de l'angle ΖΚΓ, et l'angle ΚΑΜ double de l'angle ΖΑΓ, l'angle ΘΚΑ est égal à l'angle ΚΑΜ. On démontrera semblablement que chacun des angles ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ est égal à l'un et à l'autre des angles ΘΚΑ, ΚΑΜ; donc les cinq angles ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ sont égaux entr'eux. Donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équiangle. Mais nous avons démontré qu'il est équilatéral, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔΕ. Ce qu'il fallait faire.

224. LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS, D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

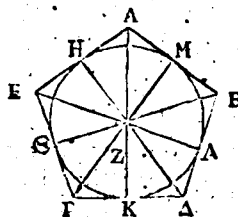
PROPOSITIO XIII.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

In dato pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum inscribere.

Sit datum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inscribere.



Τετμήσθω γὰρ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεξέχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστὶ³. βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶ ἴσον¹,

Secetur enim uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utrâque ipsarum ΓΖ, ΔΖ rectarum; et a Ζ puncto, in quo conveniunt inter se ΓΖ, ΔΖ rectæ, ducantur ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectæ. Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ utique ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ æquales sunt, et angulus ΒΓΖ angulo ΔΓΖ æqualis est; basis igitur ΒΖ basi ΔΖ est æqualis, et ΒΖΓ triângulum ipsi ΔΖΓ triângulo est æquale,

PROPOSITION XIII.

Dans un pentagone équilatéral et équiangle donné, inscrire un cercle.

Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut inscrire un cercle dans le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Coupons chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ en deux parties égales par les droites ΓΖ, ΔΖ (9. 1); et du point Ζ où les deux droites ΓΖ, ΔΖ se rencontrent, menons les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque ΒΓ est égal à ΓΔ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΒΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΔΓ, ΓΖ; mais l'angle ΒΓΖ est égal à l'angle ΔΓΖ; donc la base ΒΖ est égale à la base ΔΖ (4. 1), et le triangle ΒΖΓ est égal au triangle ΔΖΓ, et les angles restans

καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται⁵, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ⁶, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλὴ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ἠχθωσαν δὲ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ἐβθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ἐβθὴ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς⁸ δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθετῷ. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστὶν· αἱ περὶ

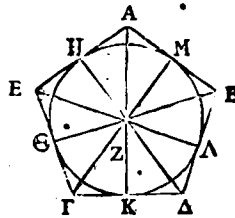
et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΓΒΖ angulus ipsi ΓΔΖ. Et quoniam duplus est ΓΔΕ ipsius ΓΔΖ, æqualis autem ipse quidem ΓΔΕ ipsi ΑΒΓ, ipse vero ΓΔΖ ipsi ΓΒΖ, et ΓΒΑ igitur ipsius ΓΒΖ est duplus; æqualis igitur ΑΒΖ angulus ipsi ΖΒΓ. Ergo ΑΒΓ angulus bifariam secatur à ΒΖ rectâ. Similiter utique ostendetur et utrumque ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ bifariam secari ab utrâque ipsarum ΖΑ, ΖΕ rectorum. Ducantur autem à Ζ puncto ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ rectas perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Et quoniam æqualis est ΘΓΖ angulus ipsi ΚΓΖ, est autem et rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis, duo utique triangula sunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus unj lateri æquale, commune ipsorum ΖΓ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur ΖΘ perpendicularis ipsi ΖΚ perpendiculari. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΑ, ΖΜ, ΖΗ, utrique ipsarum ΖΘ,

égaux aux angles restants, ceux qui soutendent des côtés égaux (4. 1); donc l'angle ΓΒΖ est égal à l'angle ΓΔΖ. Et puisque l'angle ΓΔΕ est double de l'angle ΓΔΖ, que ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΓ, et que ΓΔΖ est égal à ΓΒΖ, l'angle ΓΒΑ est double de l'angle ΓΒΖ; donc l'angle ΑΒΖ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc l'angle ΑΒΓ est coupé en deux parties égales par la droite ΒΖ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΑ, ΖΕ. Du point Ζ menons sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ les perpendiculaires ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Puisque l'angle ΘΓΖ est égal à l'angle ΚΓΖ, et que l'angle droit ΖΘΓ est égal à l'angle droit ΖΚΓ, les deux triangles ΖΘΓ, ΖΚΓ auront deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΖΓ qui soutend un des angles égaux; ils auront donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc la perpendiculaire ΖΘ est égale à la perpendiculaire ΖΚ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΑ, ΖΜ, ΖΗ est égale à l'une et à l'autre

226 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα εὐθείαι αἱ ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπεται τῶν AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H , Θ , K , Λ , M σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμνῇ αὐτάς, συμβεῖσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς

ZK æqualem esse; quinque igitur rectæ ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM æquales inter se sunt. Ergo centro Z , intervallo vero unâ ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔE , EA rectas; propterea quod recti sunt ad H , Θ , K , Λ , M puncta anguli. Si enim non contingit ipsas, sed secat ipsas, eveniet ut ipsa diametrio circuli ad rectos ab extremitate ducta



πίπτειν τοῦ κύκλου; ὅπερ ἄτοπον εἰδέχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμνῇ τὰς AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔE , EA εὐθείας. Εφαπεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφω ὡς ὁ $H\Theta K\Lambda M$.

intra cadat circulum, quod absurdum ostensum est. Non igitur centro Z , intervallo vero unâ ipsarum ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM rectarum descriptus, circulus secabit ipsas AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔE , EA rectas; continget igitur ipsas. Describatur ut $H\Theta K\Lambda M$.

Εἰς ἄρα τὸ δοτὸν πεντάγωνον, ὃ ἴστιν ἰσοπλευρόν τι καὶ ἰσogώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

In dato igitur pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

des droites $Z\Theta$, ZK ; donc les cinq droites ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Z , et d'un intervalle égal à une des droites ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM , passera par les autres points, et touchera les droites AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔE , EA , parce que les angles sont droits en H , Θ , K , Λ , M . Car s'il ne les touchait pas, et s'il les coupait, la perpendiculaire menée d'une de ses extrémités au diamètre, tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde. (16. 3); donc le cercle décrit du centre Z , et d'un intervalle égal à une des droites ZH , $Z\Theta$, ZK , $Z\Lambda$, ZM , ne coupera point les droites AB , BF , $\Gamma\Delta$, ΔE , EA ; donc il les touchera. Décrivons le cercle $H\Theta K\Lambda M$.

Donc on a inscrit un cercle dans un pentagone équilatéral et équiangle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

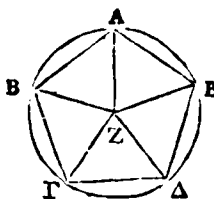
PROPOSITIO XIV.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum circumscribere.

Sit datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulum circumscribere.



Τετμήσθω δὴ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεία ἐπιζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ομοίως δὲ τὸ πρὸς τούτου διεχθήσονται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμνται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία

Secetur quidem uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angularum bifariam ab utrâque ipsarum ΓΖ, ΖΔ, et a Ζ puncto, in quo conveniunt rectæ, ad Β, Α, Ε puncta ducantur rectæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Similiter utique ut antea ostendetur et unumquemque ipsorum ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ angularum bifariam secari ab unâquaque ipsarum ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectarum. Et quoniam æqualis est

PROPOSITION XIV.

Circonscrire un cercle à un pentagone équilatéral et équiangle donné.

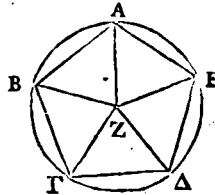
Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut au pentagone ΑΒΓΔΕ circonscrire un cercle.

Coupons en deux parties égales chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ par les droites ΓΖ, ΖΔ (9. 1), et du point Ζ où ces droites se rencontrent, menons aux points Β, Α, Ε les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Nous démontrerons, comme auparavant, que chacun des angles ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque l'angle ΒΓΔ est égal à l'angle ΓΔΕ, et

228 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμί-
σεια ἢ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ
ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση·
ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση.
Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ΖΒ,
ΖΑ, ΖΕ ἐκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε
ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλή-

ΒΓΔ angulus ipsi ΓΔΕ, et est ipsius quidem
ΒΓΔ dimidius ipse ΖΓΔ, ipsius vero ΓΔΕ di-
midius ΓΔΖ, et ΖΓΔ igitur ipsi ΖΔΓ est æqualis;
quare et latus ΖΓ lateri ΖΔ est æquale. Similiter
utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΒ,
ΖΑ, ΖΕ utrique ipsarum ΖΓ, ΖΔ esse æqua-
lem; quinque igitur rectæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ



λαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Ζ, καὶ διαστήματι³
ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμε-
νος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται
περιγραφόμενος⁴. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ
ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθέν⁵ πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσό-
πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται.
Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ζ et in-
tervallo unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ cir-
culus descriptus transibit et per reliqua puncta,
et erit circumscriptus. Circumscribatur, et sit
ΑΒΓΔΕ.

Circa datum igitur pentagonum, quod est
æquilaterumque et æquiangulum, circulus cir-
cumscriptus est. Quod oportebat facere.

que l'angle ΖΓΔ est la moitié de l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΔΖ la moitié de l'angle
ΓΔΕ, l'angle ΖΓΔ est égal à l'angle ΖΔΓ; donc le côté ΖΓ est égal au côté ΖΔ
(6. 1). On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ
est égale à chacune des droites ΖΓ, ΖΔ; donc les cinq droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ,
ΖΕ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du point Ζ et d'un intervalle
égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ passera par les autres points, et sera
circonsrit. Qu'il soit circonsrit, et-qu'il soit ΑΒΓΔΕ.

Donc un cercle a été circonsrit à un pentagone équilatéral et équiangle
donné. Ce qu'il fallait faire.

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 209

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

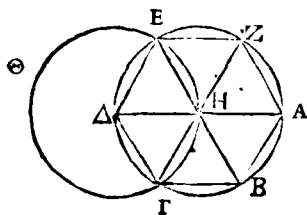
Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγράφαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγράφαι.

PROPOSITIO XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕΖ circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γιγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ

Ducatur ΑΒΓΔΕΖ circuli diameter ΑΔ, et sumatur centrum circuli Η, et centro quidem Δ, intervallo vero ΔΗ circulus describatur ΕΗΓΘ, et junctæ ΕΗ, ΓΗ producantur ad Β; Ζ puncta, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; dico ΑΒΓΔΕΖ hexagonum æquilaterumque esse et æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum est ΑΒΓΔΕΖ circuli, æqualis est ΗΕ ipsi ΗΔ. Rur-

PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

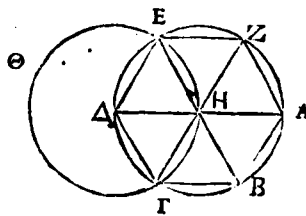
Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ; et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à

230 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δ σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ΑΛΛ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδὴ περ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν.

sus, quoniam Δ punctum centrum est ΕΗΓΘ circuli, æqualis est ΔΕ ipsi ΔΗ. Sed ΗΕ ipsi ΗΔ ostensa est æqualis, ΗΕ igitur ipsi ΕΔ æqualis est; æquilaterum igitur est ΕΗΔ triangulum, et tres igitur ipsius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ æquales inter se sunt, quia isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales; ipse igitur ΕΗΔ angulus tertia pars



Ομοίως δὲ δεῖχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεία ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἱξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ,

est duorum rectorum. Similiter utique ostendetur et ΔΗΓ tertia pars duorum rectorum. Et quoniam ΓΗ recta super ΕΒ insistens deinceps angulos ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales facit, et reliquus igitur ΓΗΒ tertia pars est duorum rectorum; ipsi igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ anguli æquales inter se sunt; Quare et ad verticem ipsi ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales sunt ipsis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ; sex igitur anguli ΕΗΔ,

ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits; donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 231

ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἑξ ἄρα περιφέρειαι αἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας αἱ εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἑξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείμενῃ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ³ ὅλη τῇ ΕΔΓΒΑ⁴ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφέρειας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφέρειας⁵ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ομοίως δὲ⁶ δείχθησεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἰγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τῶν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τι καὶ ἰσογώνιον ἰγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

AH, ZH sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs AB, BG, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutenus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἄλλαις ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐξ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἑξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΕ, ΕΖ, ΖΑ ἄλλαις ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας αἱ εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἑξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείμενῃ ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ³ ὅλη τῇ ΕΔΓΒΑ⁴ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφέρειας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφέρειας⁵ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ομοίως δὲ⁶ δείχθησεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἰγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

In dato igitur circulo hexagonum æquilatrumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ τούτου φανερόν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων⁸ ἑφαπτομένης τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφῆσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ἑμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δεῦν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν⁹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εἰς τὸν δεῦντα κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· διὲ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus æquale esse ipsi ex circuli centro.

Et si per Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ puncta contingentes circumulum ducamus, circumscribetur circa circumulum hexagonum æquilaterumque et æquiangulum, congruenter eis de pentagono dictis. Et etiam congruenter eis de pentagono dictis, in dato hexagono circumulum inscribemusque et circumscribemus.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

COROLLAIRE.

De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

Semblablement si par les points Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ nous menons des tangentes au cercle, on circonscrira à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscrirons un cercle à un hexagone donné.

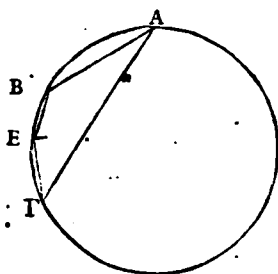
PROPOSITION XVI.

Inscrire dans un cercle donné un quindecagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindecagone équilatéral et équiangle.

Εγγράψω' εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἷων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τριτὸν οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε· ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὔσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω

Inscribatur in ΑΒΓΔ circulo trianguli quidem æquilateri in ipso inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri ipsum ΑΒ; qualium igitur est ΑΒΓΔ circulus æqualium segmentorum quindecim, talium ΑΒΓ quidem circumferentia tertia pars existens circuli erit quinque; ΑΒ vero circumferentia, quinta existens circuli, erit trium; reliqua igitur ΒΓ æqualium duarum. Secetur



ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκάτερα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαίδεκατον ἔσται² τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Εὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας³, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἵναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον; ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαίδεκων ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΓ bifariam in Ε, utraque igitur ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima erit ΑΒΓΔ circuli. Si igitur jungentes ipsas ΒΕ, ΕΓ rectas, æquales ipsis in continuum rectas aptemus in ΑΒΓΔ circulo, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Quod oportebat facere.

Inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le côté ΑΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté ΑΒ d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ΑΒΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ΑΒΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc ΑΒ qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant ΒΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant ΒΓ en deux parties égales au point Ε (30. 3), chacun des arcs ΒΕ, ΕΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓΔ. Donc, si ayant joint les droites ΒΕ, ΕΓ, nous adaptons dans le cercle ΑΒΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

234 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ομοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, εἴαν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαϊδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημίνοισι⁴, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαϊδεκάγωνον, ὃ ἔστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον⁵, κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν⁶.

Congruenter autem eis quæ de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circumducamus, circumscribetur circa circum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Et insuper congruenter eis de pentagono dictis, et in dato quindecagono circum inscribemus et circumscribemus.

Conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, si par les points de divisions d'un cercle, on mène des tangentes à ce cercle, on circonscrira à ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. De plus, conformément à ce qui a été dit pour les démonstrations du pentagone, nous inscrirons et nous circonscrirons une circonférence de cercle à un quindécagone équilatéral et équiangle donné.

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R Q U I N T U S.

ΟΡΟΙ.

α. Μέρος ἐστὶ μείζους μίγθους, τὸ ἐλάσσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρή τὸ μείζον.

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρήται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιεῖ σκίσεις¹.

DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando mensurat majorem.

2. Multiplex autem major minoris, quando mensuratur a minore.

3. Ratio est duorum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem inter se quædam habitudo.

LIVRE CINQUIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

(1) 1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

(2) 2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

(3) 3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

236 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δ'. Αναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης².

ε'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἂ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερ-
ἶχιν.

ς'. Εἰν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμον, ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπέρχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα³.

ζ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη⁴, ἀνάλογον καλεῖσθω.

η'. Οταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλασίον ὑπέρχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλασίον μὴ ὑπέρχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ πρὸς τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη⁵ ἴστί.

4. Proportio autem, rationum identitas.

5. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese superare.

6. In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æque multiples, secundæ et quartæ æque multiples, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant; vel una æquales sunt, vel una deficiunt comparatæ inter se.

7. Ipsæ autem eamdem rationem habentes magnitudines proportionales vocentur.

8. Quando vero æque multiplicium, primæ quidem multiplex superat secundæ multiplicem, tertiæ vero multiplex non superat quartæ multiplicem, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

9. Proportio autem in tribus terminis minima est.

(2) 4. Une proportion est une identité de raisons.

(4) 5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

(5) 6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

(6) 7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

(7) 8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

(9) 9. Une proportion a au moins trois termes.

1. Όταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

1α. Όταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δὲ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἕως ὁμοίως ὥστ' ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

1β. Ομόλογα μεγέθη λέγεται⁸, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγούμενοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

1γ. Εναλλάξ λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.

1δ. Ανάπαλιν λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἐπομένου ὡς ἡγούμενου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.

1ε. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγούμενου μετὰ τοῦ ἐπομένου ὡς ἐνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

1ς. Διάφρασις δὲ λόγου ἐστὶ λήψις τῆς ὑπερσχεύης, ἥ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur, ejus quam ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines proportionales sint, prima ad quartam triplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio rationis est sumptio excessus, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

238 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

15. Αναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἢ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου.

16. Διῖσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ἔντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων¹⁰ τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἢ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἴσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἴσχατον. Ἡ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

16. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἢ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι¹¹.

17. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων¹² τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο

17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quosuperat antecedens consequentem.

18. Ex æqualitate ratio est, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, binis sumptis et in eadem ratione, quando est ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; est autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, fit, ut quidem in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

18. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières gran-

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 239

τι, οὕτως ἐν ταῖς διυτέροις μεγέθεσιν¹³ ἄλλό τι
πρὸς ἡγούμενον.

consequens ad aliam quampiam, ita in secundis
magnitudinibus alia quampiam ad antecedentem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Εάν ἡ οποσαοῦν μεγέθη οποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων
τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκεις πολλαπλά-
σιον· ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, το-
σαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Εστω οποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ οποσωνοῦν
μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάσ-
του ἰσάκεις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὅσαπλάσιόν
ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ
ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

Α	Η	Β
Ε		
Γ	Θ	Δ
Ζ		

Επὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ
τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ

Quoniam enim æque est multiplex ΑΒ ipsius Ε
ac ΓΔ ipsius Ζ; quot igitur sunt in ΑΒ magni-

deurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes
grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres
grandeurs, chacune des premières étant le même équivmultiple de chacune des
secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des
secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

Soient ΑΒ, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à
d'autres grandeurs Ε, Ζ, chacune étant le même multiple de chacune; je dis
que ΑΒ est le même multiple de Ε, que la somme de ΑΒ et de ΓΔ l'est de la
somme de Ε et de Ζ.

Puisque ΑΒ est multiple de Ε, que ΓΔ l'est de Ζ, il y aura dans ΑΒ autant

240 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μὲν ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μὲν ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλῆθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ

tudines æquales ipsi E, tot sunt et in ΓΔ æquales ipsi Z. Dividatur AB quidem in magnitudines AH, HB æquales ipsi E, ipsa vero ΓΔ in ipsas ΓΘ, ΘΔ æquales ipsi Z; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΓΘ, ΘΔ. Et quoniam æqualis est AH quidem ipsi E, ipsa vero ΓΘ ipsi Z; æqualis igitur et AH, ΓΘ

A H B

E

Γ Θ Δ

Z

ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z. ὅσα ἄρα ἴσται ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα τοῖς E, Z· ὅσα πλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z. Εἰ ἄρα ἢ ὅποσα ὦν, καὶ τὰ ἴζῃς.

ipsis E, Z; propter eadem utique æqualis est HB ipsi E, et ΘΔ ipsi Z; æquales igitur et HB, ΘΔ ipsis E, Z; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB, ΓΔ æquales ipsis E, Z; quam multiplex igitur est AB ipsius E, tam multiplices erunt et AB, ΓΔ ipsarum E, Z. Si igitur quotcunque etc.

de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

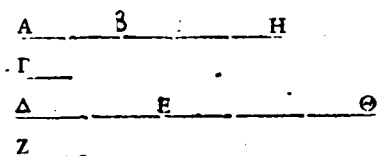
. PROPOSITIO II.

Εάν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γάρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις· ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sit autem et quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; et simul sumptæ prima et quinta secundæ æque erunt multiplices ac tertia et sexta quartæ.

Prima enim AB secundæ Γ æque sit multiplex ac tertia ΔΕ quartæ Ζ, sit autem et quinta BH



Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

secundæ Γ æque multiplex ac sexta ΕΘ quartæ Ζ; dico et simul sumptas primam et quintam ΑΗ secundæ Γ æque fore multiplices ac tertiam et sextam ΔΘ ipsius Ζ.

PROPOSITION II.

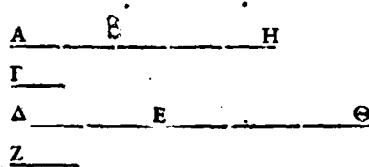
Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième.

Que la première AB soit le même multiple de la seconde r que la troisième ΔΕ l'est de la quatrième z, et que la cinquième BH soit le même multiple de la seconde r que la sixième ΕΘ l'est de la quatrième z; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde r que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième z.

242 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επί γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθει ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Propter eadem utique et quot sunt in BH æquales ipsi Γ, tot et in ΕΘ æquales ipsi Ζ; quot igitur sunt in totâ AH æquales ipsi Γ, tot et in



ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ἰσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα² πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

totâ ΔΘ æquales ipsi Ζ; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ, tam multiplex erit et ΔΘ ipsius Ζ; et simul sumptæ igitur prima et quinta AH secundæ Γ æque erunt multiplices ac tertia et sexta ΔΘ quartæ Ζ. Si igitur prima, etc.

Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Par la même raison, il y a dans BH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΕΘ de grandeurs égales à Ζ. Il y a donc dans la grandeur entière AH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans la grandeur entière ΔΘ de grandeurs égales à Ζ. Donc AH est le même multiple de Γ que ΔΘ l'est de Ζ; donc la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εάν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου καὶ δίσσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γάρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰληφθῶ τῶν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ἔσσι πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

E K Z
A —————
B —————

Επεὶ γὰρ ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα² καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διηρήσθω τὸ μὲν³ ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη

PROPOSITIO III.

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem æque multiples primæ et tertiæ; et ex æquo sumptarum utraque utriusque æque erit multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Prima enim A secundæ B æque sit multiplex ac tertia Γ quartæ Δ, et sumantur ipsarum A, Γ æque multiples EZ, ΗΘ; dico æque esse multiplicem EZ ipsius B ac ΗΘ ipsius Δ.

H Λ Θ
Γ —————
Δ —————

Quoniam enim æque est multiplex EZ ipsius A ac ΗΘ ipsius Γ; quot igitur sunt in EZ æquales ipsi A, tot et in ΗΘ æquales ipsi Γ. Dividatur EZ quidem in magnitudines ipsi A æqua-

PROPOSITION III.

*Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième, le multiple de la première sera, par égalité, le même multiple de la seconde que le multiple de la troisième l'est de la quatrième.

Que la première A soit le même multiple de la seconde B que la troisième Γ l'est de la quatrième Δ; prenons les équimultiples EZ, ΗΘ de A et de Γ; je dis que EZ est le même multiple de B que ΗΘ l'est de Δ.

Puisque EZ est le même multiple de A que ΗΘ l'est de Γ, il y a dans EZ autant de grandeurs égales à A qu'il y a dans ΗΘ de grandeurs égales à Γ. Di-

244 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΑΘ· ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλῆθει τῶν ΗΛ, ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἴστί πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκεις ἄρα ἴστί πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἴστί πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΑΘ τοῦ Δ.

les ΕΚ, ΚΖ, ipsa vero ΗΘ in magnitudines ipsi Γ æquales ΗΛ, ΑΘ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΕΚ, ΚΖ multitudini ipsarum ΗΛ, ΑΘ. Et quoniam æque est multiplex Α ipsius Β ac Γ ipsius Δ; æqualis autem ΒΚ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΛ ipsi Γ; æque igitur est multiplex ΕΚ ipsius Β ac ΗΛ ipsius Δ. Propter eadem utique æque est multiplex ΚΖ ipsius Β ac ΑΘ ipsius Δ. Quoniam

Ε	Κ	Ζ
Α		
Β		

Η	Λ	Θ
Γ		
Δ		

Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἴστί πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἴστί δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΑΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἴστί πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur prima ΕΚ secundæ Β æque est multiplex ac tertia ΗΛ quartæ Δ; est autem et quinta ΚΖ secundæ Β æque multiplex ac sexta ΑΘ quartæ Δ; et simul sumptæ igitur prima et quinta ΕΖ secundæ Β æque sunt multiplices ac tertia et sexta ΗΘ quartæ Δ. Si igitur prima, etc.

visons ΕΖ en grandeurs égales à Α, et que ces grandeurs soient ΕΚ, ΚΖ; divisons ΗΘ en grandeurs égales à Γ, et que ces grandeurs soient ΗΛ, ΑΘ. Le nombre des parties ΕΚ, ΚΖ sera égal au nombre des parties ΗΛ, ΑΘ. Et puisque Α est le même multiple de Β que Γ l'est de Δ, que ΕΚ est égal à Α, et ΗΛ égal à Γ, la grandeur ΕΚ est le même multiple de Β que ΗΛ l'est de Δ. Par la même raison, ΚΖ est le même multiple de Β que ΑΘ l'est de Δ. Et puisque la première ΕΚ est le même multiple de la seconde Β que la troisième ΗΛ l'est de la quatrième Δ, et que la cinquième ΚΖ est le même multiple de la seconde Β que la sixième ΑΘ l'est de la quatrième Δ, la somme de la première et de la cinquième, qui est ΕΖ, sera le même multiple de la seconde Β, que la somme de la troisième et de la sixième, qui est ΗΘ, l'est de la quatrième Δ (2. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὴν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιον πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

K _____
E _____
A _____
B _____
H _____
M _____

τὸ Δ, καὶ εἰλήθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Α, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; et æque multiples primæque et tertiæ ad æque multiples secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem inter se comparatæ.

Prima enim Α ad secundam Β eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, et su-

Λ _____
Ζ _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____
Ν _____

mantur ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Η, Θ; dico esse ut Ε ad Η, ita Ζ ad Θ.

Sumentur enim ipsarum quidem Ε, Ζ æque multiples Κ, Α, ipsarum vero Η, Θ aliæ utcunque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION IV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équimultiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, auront entre eux la même raison.

Car que la première Α ait avec la seconde Β la même raison que Γ avec Δ, prenons des équimultiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Γ, et d'autres équimultiples quelconques Η, Θ de Β et de Δ; je dis que Ε est à Η comme Ζ est à Θ.

Prenons des équimultiples quelconques Κ, Α de Ε et de Ζ, et d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de Η et de Θ.

246 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν

Et quoniam æque est multiplex Ε quidem ipsius Α, ipsa vero Ζ ipsius Γ, et sumptæ sunt ipsarum Ε, Ζ æque multiples Κ, Λ; æque igitur est multiplex Κ ipsius Α ac Λ ipsius Γ. Propter eadem utique æque est multiplex Μ ipsius Β ac Ν ipsius Δ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Κ, Λ, ipsarum vero Β, Δ alia utcun-

Κ _____
Ε _____
Α _____
Β _____
Η _____
Μ _____

Λ _____
Ζ _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____
Ν _____

δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια³, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

que æque multiples Μ, Ν; si igitur superat Κ ipsam Μ, superat et Λ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Κ, Λ quidem ipsarum Ε, Ζ æque multiples, ipsæ vero Μ, Ν ipsarum Η, Θ alia utcunque multiples; est igitur ut Ε ad Η, ita Ζ ad Θ. Si igitur prima, etc.

Puisque Ε est le même multiple de Α que Ζ l'est de Γ, et que l'on a pris des équi-multiples Κ, Λ de Ε et de Ζ, la grandeur Κ est le même multiple de Α que Λ l'est de Γ (3. 5). Par la même raison, Μ est le même multiple de Β que Ν l'est de Δ. Et puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, que l'on a pris des équi-multiples quelconques Κ, Λ de Α et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Β et de Δ, si Κ surpasse Μ, Λ surpasse Ν; si Κ est égal à Μ, Λ est égal à Ν, et si Κ est plus petit que Μ, Λ est plus petit que Ν (déf. 5. *). Mais Κ, Λ sont des équi-multiples quelconques de Ε et de Ζ, et Μ, Ν d'autres équi-multiples quelconques de Η et de Θ; donc Ε est à Η comme Ζ est à Θ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἰδείχθη, ὅτι⁴, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Α τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Α· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἴσται καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. Ἐκ δὲ τοῦτου φανερόν, ὅτι ἂν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

COROLLARIUM.

Quoniam igitur ostensum est, si superat K ipsam M, superare et A ipsam N; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; manifestum est et si M superat K, superare et N ipsam A; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; et propter hoc erit et ut H est ad E, ita Θ ad Z. Ex hoc utique manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sunt, et inversione proportionales fore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσα-πλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

PROPOSITIO V.

Si magnitudo magnitudinis æque sit multiplex ac ablata ablatæ, et reliqua reliquæ æque erit multiplex ac multiplex est tota totius.

COROLLAIRE.

Puisqu'il a été démontré que si K surpasse M, A surpasse N; que si K est égal à M, A est égal à N, et que si K est plus petit que M, A est plus petit que N, il est évident que si M surpasse K, N surpasse A; que si M est égal à K, N est égal à A, et que si M est plus petit que K, N est plus petit que A; par conséquent H est à E comme Θ est à Z. De là il est évident que si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

PROPOSITION V.

Si une grandeur est le même multiple d'une grandeur que la grandeur retranchée l'est de la grandeur retranchée, le reste sera le même multiple du reste que le tout l'est du tout.

248 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μέγεθος γὰρ τὸ AB μέγεθος τοῦ ΓΔ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρέθην τὸ ΑΕ ἀφαιρέθεντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

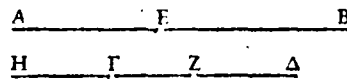
Οσαπλάσιον γὰρ ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γενομένῳ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ· καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ· καί ταις δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλά-

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓΔ æque sit multiplex ac ablata ΑΕ ablatae ΓΖ; dico et reliquam EB reliquæ ΖΔ æque fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓΔ.

Quam multiplex enim est ΑΕ ipsius ΓΖ, tam multiplex fiat et ΕΒ ipsius ΓΗ.

Et quoniam æque multiplex est ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΗΓ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΗΖ; ponitur autem æque multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex ΑΒ utriusque



σιον τὸ ΑΒ ἑκατέρῳ τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλα-

ipsarum ΗΖ, ΓΔ; æqualis igitur ΗΖ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΖ; reliqua igitur ΗΓ reliquæ ΔΖ est æqualis. Et quoniam æque est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΗΓ, æqualis autem ipsi ΗΓ ipsa ΔΖ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΕΒ ipsius ΖΔ. Æque autem ponitur multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac ΑΒ ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex ΕΒ ipsius

Que la grandeur AB soit le même multiple de la grandeur ΓΔ que la grandeur retranchée ΑΕ l'est de la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante ΕΒ sera le même multiple de la grandeur restante ΖΔ que la grandeur entière ΑΒ l'est de la grandeur entière ΓΔ.

Que ΑΕ soit le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΓΗ.

Puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΗΖ (1. 5). Mais l'on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΑΒ l'est de ΓΔ; donc ΑΒ est le même multiple de ΗΖ et de ΓΔ; donc ΗΖ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; le reste ΗΓ sera égal au reste ΔΖ. Et puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΗΓ, et que ΖΔ est égal à ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 249

πλάσιον τὸ EB τοῦ ZΔ καὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ ἰσάκεις ἐστὶν²· πολλαπλάσιον, ἴσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Εὖν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ZΔ ac AB ipsius ΓΔ; et reliqua igitur EB reliquæ ZΔ æque erit multiplex ac multiplex est tota AB totius ΓΔ. Si igitur magnitudo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

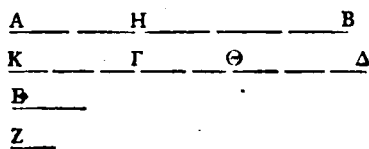
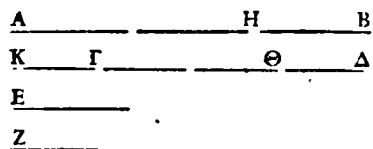
Εὖν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρέντα τίνα τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἢτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρέ-

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque sint multiplices, et ablata quædam earumdem æque sint multiplices; et reliquæ iisdem vel æquales sunt, vel æque earum multiplices.

Dux enim magnitudines AB, ΓΔ duarum magnitudinum E, Z æque sint multiplices, et



θίντα τὰ AH, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἴστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z ἢτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

ablata AH, ΓΘ earumdem E, Z æque sint multiplices; dico et reliquas HB, ΘΔ ipsis E, Z vel æquales esse, vel æque earum multiplices.

que AB l'est de ΓΔ; donc EB est le même multiple de ZΔ que AB l'est de ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs sont des équimultiples de deux grandeurs, et si certaines grandeurs retranchées sont des équimultiples des dernières, les grandeurs restantes seront égales à ces dernières, ou des équimultiples de ces dernières.

Que les deux grandeurs AB, ΓΔ soient des équimultiples des deux grandeurs E, Z, et que les grandeurs retranchées AH, ΓΘ soient des équimultiples de E et de Z; je dis que les grandeurs restantes HB, ΘΔ sont égales aux grandeurs E, Z, ou des équimultiples de ces grandeurs.

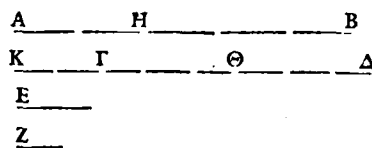
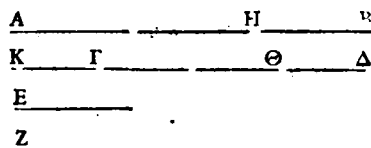
250 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστί. Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ

Sit enim primum HB ipsi E æqualis; dico et ΘΔ ipsi Z æqualem esse. Ponatur enim ipsi Z æqualis ΓΚ.

Et quoniam æque est multiplex ΑΗ ipsius Ε ac ΓΘ ipsius Ζ, æqualis autem ΗΒ quidem ipsi Ε, ipsa vero ΚΓ ipsi Ζ; æque igitur est multiplex ΑΒ ipsius Ε ac ΚΘ ipsius Ζ. Æque autem ponitur multiplex ΑΒ ipsius Ε ac ΓΔ ip-



τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἐκάτερον τῆς ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφῆρῆσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Ζ τὸ ΚΓ ἴσιν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσιν ἴσιν. Ὡστε εἰς τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ.

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πολλαπλάσιον ἢ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μίγηθ, καὶ τὰ ἐξῆς.

sus Ζ; æque igitur est multiplex ΚΘ ipsius Ζ ac ΓΔ ipsius Ζ. Et quoniam utraque ipsarum ΚΘ, ΓΔ ipsius Ζ æque est multiplex; æqualis igitur est ΚΘ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΘ; reliqua igitur ΚΓ reliquæ ΘΔ æqualis est. Sed ipsi Ζ ipsa ΚΓ est æqualis; et ΘΔ igitur ipsi Ζ æqualis est. Quare si ΗΒ ipsi Ε æqualis est, et ΘΔ æqualis erit ipsi Ζ.

Similiter utique ostendemus et si multiplex est ΗΒ ipsius Ε, multiplicem fore et magnitudinem ΘΔ ipsius Ζ. Si igitur duæ, etc.

Premièrement, que HB soit égal à Ε; je dis que ΘΔ est égal à Ζ. Faisons ΓΚ égal à Ζ.

Puisque ΑΗ est le même multiple de Ε que ΓΘ l'est de Ζ, que ΗΒ est égal à Ε, et ΚΓ égal à Ζ, ΑΒ est le même multiple de Ε que ΚΘ l'est de Ζ (2.5). Mais on a supposé que ΑΒ est le même multiple de Ε que ΓΔ l'est de Ζ; donc ΚΘ est le même multiple de Ζ que ΓΔ l'est de Ζ. Et puisque les grandeurs ΚΘ, ΓΔ sont chacune le même multiple de Ζ, ΚΘ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΘ; la grandeur restante ΚΓ sera égale à la grandeur restante ΘΔ. Mais ΚΓ est égal à Ζ; donc ΘΔ est égal à Ζ; donc si ΗΒ est égal à Ε, ΘΔ sera égal à Ζ.

Nous démontrerons semblablement, que si ΗΒ est un multiple de Ε, la grandeur ΘΔ sera le même multiple de Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

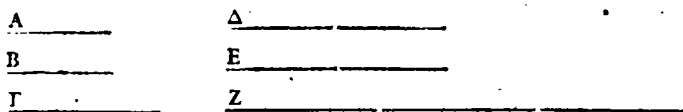
Ἐστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι ὁ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, et eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines Α, Β, alia autem quælibet magnitudo Γ; dico utramque ipsarum Α, Β ad Γ habere eandem rationem, et Γ ad utramque ipsarum Α, Β.

Sumantur enim ipsarum Α, Β quidem æque multiplices Δ, Ε, ipsius vero Γ alia utcumque multiplex Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἀλλο δὲ ὁ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον³· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον.

Quoniam igitur æque est multiplex Δ ipsius Α ac Ε ipsius Β, æqualis autem Α ipsi Β; æqualis igitur et Δ ipsi Ε. Alia vero Ζ ipsius Γ utcumque multiplex; si igitur superat Δ ipsam Ζ, superat et Ε ipsam Ζ; et si æqualis, æqua-

PROPOSITION VII.

Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales Α, Β, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs Α, Β a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β.

Prenons des équimultiples quelconques Δ, Ε de Α et de Β, et un autre multiple quelconque Ζ de Γ.

Puisque Δ est le même multiple de Α que Ε l'est de Β, et que Α est égal à Β, Δ est égal à Ε. Mais Ζ est un autre multiple quelconque de Γ; donc, si Δ surpasse Ζ, Ε surpasse Ζ; si Δ est égal à Ζ, Ε est égal à Ζ; et si Δ est plus petit

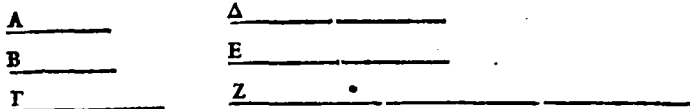
252 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ , E τῶν A , B ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Z τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχεν πολλαπλάσιον ἔστιν⁴. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ , οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Γ .

Λέγω δὴ⁵ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A , B τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

lis; et si minor, minor. Et sunt quidem Δ , E ipsarum A , B æque multiples, ipsa vero Z ipsius Γ alia utcunque multiplex est; est igitur ut A ad Γ , ita B ad Γ .

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum A , B eandem habere rationem.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ⁶ δίδωμι ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ E . ἄλλο δὲ τι τὸ Z . εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Z τοῦ Δ , ὑπερέχει τὸ Z καὶ τοῦ E . καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ , E τῶν A , B ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A , οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ B . Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς⁸.

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus æqualem esse Δ ipsi E ; alia vero quædam Z ; si igitur superat Z ipsam Δ , superat Z et ipsam E ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et est Z quidem ipsius Γ multiplex; ipsæ autem Δ , E ipsarum A , B aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut Γ ad A , ita Γ ad B . Æquales igitur, etc.

que z , E est plus petit que z . Mais Δ , E sont des équi-multiples quelconques de A et de B , et Z est un autre multiple quelconque de Γ ; donc A est à Γ comme B est à Γ (déf. 6. 5).

Je dis aussi que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A , B .

La même construction étant faite, nous démontrerons semblablement que Δ est égal à E ; mais Z est un autre multiple quelconque; donc si Z surpasse Δ , Z surpasse E ; si Z est égal à Δ , Z est égal à E ; et si Z est plus petit que Γ , Z est plus petit que E . Mais Z est un multiple de Γ , et Δ , E sont d'autres équi-multiples quelconques de A et de B ; donc Γ est à A comme Γ est à B (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ μείζον.

Εἴστω ἀνισα μεγεθῆ τὰ AB, Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ AB, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχῃ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ AB.

A — E — B
Γ —
Δ —

Z — H — Θ
K —
Λ —
M —
N —

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ BE, τὸ δὲ ἔλασσον τῶν AE, EB πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὲ τοῦ Δ μείζον. Εἴστω πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ AE, καὶ ἔστω² αὐτοῦ πολλαπλάσιον

Quoniam enim major est AB ipsa Γ, ponatur ipsi Γ æqualis BE, minor utique ipsarum AE, EB multiplicata, erit aliquando ipsa Δ major. Sit primum AE minor ipsa EB, et multiplice-tur AE, et sit ipsius multiplex ZH major

PROPOSITION VIII.

Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande.

Soient les grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande, et que Δ soit une autre grandeur quelconque; je dis que AB a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Δ, et que Δ a avec Γ une plus grande raison qu'avec AB.

Car puisque AB est plus grand que Γ, faisons BE égal à Γ; la plus petite des grandeurs AE, EB étant multipliée, deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Que AE soit d'abord plus petit que EB; multiplions AE, que son multiple

254 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΖΗ μείζον ἐν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσζυταπλάσιον γιγνέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον ἕως οὗ³ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρῶτως δὲ μείζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρῶτως δὲ μείζον τοῦ Κ.

ipsa Δ, et quam multiplex est ΖΗ ipsius ΑΕ, tam multiplex fiat et ΗΘ quidem ipsius ΕΒ, ipsa vero Κ ipsius Γ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem ipsa Δ, tripla vero Μ, et deinceps unā major quoad sumpta multiplex quidem fiat ipsius Δ, primum vero major ipsa Κ. Sumatur, et sit Ν quadrupla quidem ipsius Δ, primum vero major ipsa Κ.

A E B
Γ
Δ

Z H Θ
Κ
Λ
Μ
Ν

Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρῶτως ἐστὶν ἑλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἐστὶν ἑλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολ-

Quoniam igitur Κ ipsa Ν primum est minor, ipsa Κ igitur ipsa Μ non est minor. Et quoniam æque est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΗΘ ipsius ΕΒ, æque igitur est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΖΘ ipsius ΑΒ. Æque autem est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac Κ ipsius Γ; æque igitur est multiplex ΖΘ ipsius ΑΒ ac Κ ipsius Γ; ipsæ ΖΘ, Κ igitur ipsarum ΑΒ, Γ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque est multiplex ΗΘ ipsius

ZH soit plus grand que Δ, et que ΗΘ soit le même multiple de ΕΒ, et Κ le même multiple de Γ, que ΖΗ l'est de ΑΕ. Prenons la grandeur Λ double de Δ, la grandeur Μ triple de Δ, et ainsi de suite, une fois de plus, jusqu'à ce que le multiple de Δ devienne pour la première fois plus grand que Κ. Prenons ce multiple; que Ν, quadruple de Δ, soit plus grand que Κ, pour la première fois.

Puisque Κ est pour la première fois plus petit que Ν, la grandeur Κ n'est pas plus petite que Μ. Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΗΘ l'est de ΕΒ; donc ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΖΘ l'est de ΑΒ (1. 5). Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ est le même multiple de ΑΒ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ, Κ sont des équimultiples de ΑΒ et de Γ. De plus, puis-

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 255

λαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἑλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἑλαττόν ἐστι. Μείζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν. Ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἴσιν ἴσα· ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐκ ὑπερέχει. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐκ ὑπερέχει. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ὁ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

EB ac K ipsius Γ, æqualis autem EB ipsius Γ; æqualis igitur et K ipsi ΗΘ. Ipsa vero K ipsâ M non est minor; non igitur ΗΘ ipsâ M minor est. Major autem ΖΗ ipsâ Δ; tota igitur ΖΘ utrisque simul Δ, Μ major est. Sed utræque simul Δ, Μ ipsi Ν, sunt æquales, quandoquidem Μ ipsius Δ est tripla, utræque autem simul Δ, Μ ipsius Δ sunt quadruplæ, est vero et Ν ipsius Δ quadrupla, utræque simul igitur Μ, Δ ipsi Ν æquales sunt. Sed ΖΘ ipsi Δ, Μ major est; ΖΘ igitur ipsam Μ superat. K vero ipsam Ν non superat. Et sunt ipsæ quidem ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque multiples, ipsa vero Ν ipsius Δ alia utcunque multiplex; ΑΒ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico autem et Δ ad Γ majorem rationem habere, quam Δ ad ΑΒ.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, Ν quidem ipsam Κ superare, Ν vero ipsam ΖΘ non superare. Et est Ν quidem ipsius Δ multiplex, et ipsæ ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ aliæ utcunque æque multiples; Δ igitur ad Γ majorem rationem habet quam Δ ad ΑΒ.

que ΗΘ est le même multiple de ΕΒ que Κ l'est de Γ, et que ΕΒ est égal à Γ, ΗΘ est égal à Κ. Mais Κ n'est pas plus petit que Μ; donc ΗΘ n'est pas plus petit que Μ. Mais ΖΗ est plus grand que Δ; donc la grandeur entière ΖΘ est plus grande que Δ et Μ pris ensemble. Mais Δ, Μ pris ensemble sont égaux à Ν, puisque Μ est triple de Δ, que Δ, Μ pris ensemble sont quadruples de Δ, et que Ν est quadruple de Δ, les grandeurs Μ, Δ prises ensemble sont égales à Ν. Mais ΖΘ est plus grand que Δ, Μ; donc ΖΘ surpasse Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, et ΖΘ, Κ sont des équi-multiples de ΑΒ et de Γ, et Ν est un autre multiple quelconque de Δ; donc ΑΒ a une plus grande raison avec Δ, que Γ avec Δ (déf. 8. 5).

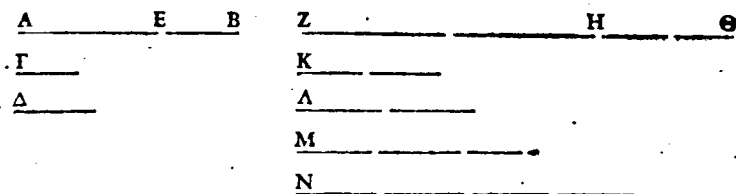
Je dis de plus que Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que Ν surpasse Κ, et que Ν ne surpasse pas ΖΘ. Mais Ν est un multiple de Δ, et ΖΘ, Κ sont d'autres équi-multiples quelconques de ΑΒ et de Γ; donc Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ (déf. 8. 5).

256 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλά δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μείζον ἴστω· τὸ δὲ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὶ τοῦ Δ μείζον. Πολλαπλασιάσθω, καὶ ἴστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μείζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γηγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Καὶ εὐλόγηθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως

Sed et ΑΕ ipsā ΕΒ major sit ; minor ΕΒ utique multiplicata, erit aliquando ipsā Δ major. Multiplicetur, etsit ΗΘ multiplex quidem ipsius ΕΒ, major vero ipsā Δ ; et quam multiplex est ΗΘ ipsius ΕΒ, tam multiplex fiat et ΖΗ quidem ipsius ΑΕ, ipsa vero Κ ipsius Γ. Similiter utique ostendemus ipsas ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque esse multiples. Etsumatur similiter Ν multiplex quidem ipsius Δ, primum vero major ipsā ΖΗ ;



δὲ μείζον τοῦ ΖΗ· ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ μὴ ἔλασσον εἶναι⁸, μείζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ τουτίσται τοῦ Ν ὑπέρχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπέρχει, ἐπειδὴ περ καὶ τὸ ΖΗ μείζον ὢν τοῦ ΗΘ, τουτίσται τὸ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπέρχει. Καὶ ὡσαύτως⁹ κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

quare rursus ΖΗ ipsā Μ non minor erit, major autem ΗΘ ipsā Δ ; tota igitur ΖΘ ipsas Δ, Μ, hoc est Ν superat, Κ vero ipsam Ν non superat, quandoquidem et ΖΗ quæ major est ipsā ΗΘ, hoc est ipsā Κ, ipsam Ν non superat. Et similiter subsequentes superiora absolvemus demonstrationem. Ergo inæqualium, etc.

Mais que ΑΕ soit plus grand que ΕΒ ; la plus petite grandeur ΕΒ étant multipliée deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Qu'elle soit multipliée, et que ΗΘ soit un multiple de ΕΒ plus grand que Δ, et que ΖΗ soit le même multiple de ΑΕ, et Κ de Γ, que ΗΘ l'est de ΕΒ. Nous démontrerons semblablement que ΖΘ, Κ sont des équi-multiples de ΑΒ et de Γ. Prenons semblablement un multiple Ν de Δ qui soit plus grand pour la première fois que ΖΗ ; ΖΗ ne sera pas plus petit que Μ. Mais ΗΘ est plus grand que Δ ; donc la grandeur entière ΖΘ surpasse Δ, Μ pris ensemble, c'est-à-dire Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, parce que ΖΗ étant plus grand que ΗΘ, c'est-à-dire que Κ, ne surpasse pas Ν. Et conformément à ce qui a été dit auparavant, nous achèverons la démonstration. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ᾧ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκείνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν'.

Εἰτά γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Quæ ad eandem eandem habent rationem, æquales inter se sunt; et ad quas eadem eandem habet rationem, illæ æquales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad Γ eandem rationem; dico æqualem esse A ipsi B .

Si enim non, non utraque ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem, habet autem; æqualis igitur est A ipsi B .

A _____
 B _____
 Γ _____

Εἰτά δὲ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B .

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B . Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Habeat autem rursus Γ ad utramque A, B eandem rationem; dico æqualem esse A ipsi B .

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem; habet autem; æqualis igitur est A ipsi B . Quæ igitur ad eandem, etc.

PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entr'elles, et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entr'elles.

Que chacune des grandeurs A, B ait avec Γ la même raison; je dis que A est égal à B .

Car, si cela n'était point, chacune des grandeurs A, B n'aurait pas avec Γ la même raison (8. 5); mais elle l'a; donc A est égal à B .

Que Γ ait la même raison avec chacune des grandeurs A, B ; je dis que A est égal à B .

Car, si cela n'était point, la grandeur Γ n'aurait pas la même raison avec chacune des grandeurs A, B (8. 5). Mais elle l'a; donc A est égal à B . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἰχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἔστι. Πρὸς δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἔστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἥπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Β.

Ipsarum ad eandem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est; ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Habeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ; dico majorem esse A ipsâ B.

A _____
B _____
Γ _____

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἢ ἑλάσσον. Ἰσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἐκαστηρον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἴχει λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἔστι τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὲν ἑλασσόν ἔστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἑλάσσονα εἴχει λόγον· ἥπερ

Si enim non, vel æqualis est A ipsi B, vel minor. Æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem. Non habet vero; non igitur æqualis est A ipsi B. Neque tamen minor est A ipsâ B, nam A ad Γ minorem haberet rationem quam

PROPOSITION X.

Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite.

Que A ait avec Γ une plus grande raison que B avec Γ; je dis que A est plus grand que B.

Car, si cela n'est pas, A est égal à B, ou plus petit. A n'est pas égal à B, car chacune des grandeurs A, B aurait la même raison avec Γ (7. 5). Mais chacune de ces grandeurs n'a pas la même raison avec Γ; donc A n'est pas égal à B. A n'est pas cependant plus petit que B; car A aurait avec Γ une plus petite raison que B avec Γ (8. 5). Mais A n'a pas avec Γ une plus petite raison que

τὸ Β πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Εδείχθη δὲ ὅτι³ οὐδὲ ἴσον, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Εχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μὴ, ἢτοι ἴσον ἐστίν, ἢ μείζον. Ἰσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐ δὲ μὴν μείζον ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἥπερ πρὸς τὸ Α. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μείζον ἐστι τὸ Β τοῦ Α. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

B ad Γ. Non habet autem, non igitur minor est A ipsā B. Ostensa autem est neque æqualis, major igitur est A ipsā B.

Habeat autem rursus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A; dico minorem esse B ipsā A.

Si enim non, vel æqualis est, vel major. Æqualis quidem non est B ipsi A, nam Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem. Non habet vero, non igitur æqualis est A ipsi B. Non autem tamen major est B ipsā A, nam Γ ad B minorem rationem haberet quam ad A. Non habet vero, non igitur major est B ipsā A. Ostensa autem est neque æqualis, minor igitur est B ipsā A. Ipsafum igitur ad eandem, etc.

B avec Γ; donc A n'est pas plus petit que B. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc A est plus grand que B.

De plus, que Γ ait avec B une raison plus grande que Γ avec A; je dis que B est plus petit que A.

Car, si cela n'est pas, il lui est égal, ou il est plus grand. Mais la grandeur B n'est pas égale à A; car alors la grandeur Γ aurait la même raison avec chacune des grandeurs A, B (7. 5). Mais elle ne l'a pas; donc A n'est pas égal à B. La grandeur B n'est pas cependant plus grande que A; car alors Γ aurait avec B une raison plus petite qu'avec A (8. 5). Mais Γ n'a pas avec B une raison plus petite qu'avec A; donc B n'est pas plus grand que A. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc B est plus petit que A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

PROPOSITIO XI.

Οἱ τῇ αὐτῇ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἐστωσαν γάρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως² τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν¹ Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἑτέρωθεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Eidem rationes eadem, et inter se sunt eadem.

Sint enim ut Α quidem ad Β ita Γ ad Δ, ut Γ vero ad Δ, ita Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.

Sumantur enim ipsarum Α, Γ, Ε quidem æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

Η _____
Α _____
Β _____
Λ _____

Θ _____
Γ _____
Δ _____
Μ _____

Κ _____
Ε _____
Ζ _____
Ν _____

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἰληπταὶ τῶν μὲν² Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἑτέρωθεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ³· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque multiples Λ, Μ; si igitur Η superat ipsam Λ, superat et Θ ipsam Μ; et si æqualis, æqualis; et

PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que Α soit à Β comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme Ε est à Ζ.

Prenons des équi-multiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équi-multiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équi-multiples quelconques Η, Θ de Α et de Γ; et d'autres équi-multiples quelconques Λ, Μ de Β et de Δ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ;

καὶ εἰ ἴσον, ἴσον⁴· καὶ εἰ ἑλάττων, ἑλάττων⁵.
 Πάλιν, ἐπεὶ ἴστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ
 Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν⁶ Γ, Ε ἰσά-
 κεις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα
 ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα
 ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν·
 καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάσσον, ἑλάσσον.
 Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ
 τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλατ-
 τον, ἑλάττων· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ,
 ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ
 εἰ ἑλάττων, ἑλάττων. Καὶ ἴστι τὰ μὲν Η, Κ
 τῶν Α, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν
 τῶν Β, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια·
 ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς
 τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἐξῆς.

si minor, minor. Rursus, quoniam est ut Γ ad
 Δ ita Ε ad Ζ, et sumptæ ipsarum quidem Γ, Ε
 æque multiples Θ, Κ, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ
 utcunque æque multiples Μ, Ν; si igitur su-
 perat Θ ipsam Μ, superat et Κ ipsam Ν; et si
 æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed si su-
 perat Θ ipsam Μ, superat et Η ipsam Λ; et si
 æqualis, æqualis; et si minor, minor; quare et
 si superat Η ipsam Λ, superat et Κ ipsam Ν; et
 si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt
 Η, Κ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples,
 ipsæ vero Λ, Ν ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque
 multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.
 Ergo eadem, etc.

et si Η est plus petit que Λ, Θ est plus petit que Μ (déf. 6. 5). De plus,
 puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, et qu'on a pris des équimultiples quel-
 conques Θ, Κ de Γ et de Ε, et d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de
 Δ et de Ζ; si Θ surpasse Μ, Κ surpasse Ν; si Θ est égal à Μ, Κ est égal à Ν,
 et si Θ est plus petit que Μ, Κ est plus petit que Ν. Mais si Θ surpasse Μ,
 Η surpasse Λ; si Θ est égal à Μ, Η est égal à Λ, et si Θ est plus petit que Μ,
 Η est plus petit que Λ; donc, si Η surpasse Λ, Κ surpasse Ν; si Η est égal à
 Λ, Κ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Λ, Κ est plus petit que Ν. Mais
 Η, Κ sont des équimultiples quelconques de Α et de Ε, et Λ, Ν d'autres équi-
 multiples quelconques de Β et de Ζ; donc Α est à Β comme Ε est à Ζ (déf. 6. 5).
 Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εάν ἡ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον ᾖ ὥς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμυνα.

Ἐστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Η _____
Θ _____
Κ _____
Α _____
Γ _____
Ε _____

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἑτυχὲν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἰληπται

PROPOSITIO XII.

Si sint quotcunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Α, Γ, Ε ad ipsas Β, Δ, Ζ.

Λ _____
Μ _____
Ν _____
Β _____
Δ _____
Ζ _____

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ alia utcunque æque multiples Α, Μ, Ν.

Et quoniam est Α ad Β ita Γ ad Δ et Ε ad Ζ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Α, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ; que l'on a pris

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 263

τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερίχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἥλασσον, ἥλασσον. Ὡστε καὶ εἰ ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερίχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἥλασσον, ἥλασσον². Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐπιδήπτει ἂν³ ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσαοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκεις πολλαπλάσια⁴, ὅσαπλασίον ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἰνός, τοσαυταπλάσια ἴσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Α, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἴστιν ἄρα ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ⁵ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Εὰν ἄρα ἢ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

multiplices Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ alia utcunque æque multiplices Α, Μ, Ν; si igitur Η superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ, et Κ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare et si superat Η ipsam Α, superant et Η, Θ, Κ ipsas Α, Μ, Ν; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Et est Η quidem et Η, Θ, Κ ipsius Α et ipsarum Α, Γ, Ε æque multiplices; quoniam si sint quocunque magnitudines quocunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiplices, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. Propter eadem utique et Α et Α, Μ, Ν ipsius Β et ipsarum Β, Δ, Ζ æque sunt multiplices; est igitur ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ. Si igitur sint quocunque, etc.

des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Α, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ; si Η surpasse Α, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν; si Η est égal à Α, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν; et si Η est plus petit que Α, Θ est plus petit que Ν, et Κ plus petit que Ν (déf. 6. 5). Donc, si Η surpasse Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; si Η est égal à Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; et si Η est plus petit que Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Α, Μ, Ν. Mais la grandeur Η et la somme des grandeurs Η, Θ, Κ sont des équimultiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Α et la somme des grandeurs Α, Μ, Ν sont des équimultiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν πρώτη πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ περὶ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρώτη πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ περὶ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρώτην μὲν³ γάρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam majorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima quidem enim Α ad secundam Β eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, tertia vero Γ ad quartam Δ majorem rationem

M _____
A _____
B _____
N _____

H _____
Γ _____
Δ _____
K _____

Θ _____
E _____
Z _____
Λ _____

μείζονα λόγον ἔχεται ἢ περὶ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρώτη τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἔξει ἢ περὶ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Επεὶ γάρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ⁶· ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε

habeat quam quinta Ε ad sextam Ζ; dico et primam Α ad secundam Β majorem rationem habituram esse quam quintam Ε ad sextam Ζ.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem rationem habet quam Ε ad Ζ, sunt quaedam ipsarum

PROPOSITION XIII.

Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième.

Que la première Α ait avec la seconde Β la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que la troisième Γ ait avec la quatrième Δ une raison plus grande que la cinquième Ε avec la sixième Ζ; je dis que la première Α aura avec la seconde Β une raison plus grande que la cinquième Ε avec la sixième Ζ.

Puisque Γ a avec Δ une raison plus grande que Ε avec Ζ, parmi des équi-

ισάκεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ισάκεις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν ἔστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ισάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν

quidem Γ, Ε æque multiples, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples; et ipsius quidem Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superat, ipsius vero Ε multiplex ipsius Ζ multiplicem non superat. Sumantur, et sint ipsarum quidem Γ, Ε æque multiples Η, Θ; ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ; ita ut Η quidem ipsam Κ superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex quidem est Η ipsius Γ, tam multiplex sit et Μ ipsius Α; quam vero multiplex Κ ipsius Δ, tam multiplex sit et Ν ipsius Β.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Μ, Η, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Ν, Κ; si igitur superat Μ ipsam Ν, superat et Η ipsam Κ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superat autem Η ipsam Κ, superat igitur et Μ ipsam Ν. Ipsa vero Θ ipsam Λ non superat; et sunt Μ, Θ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples, ipsæ vero Ν, Λ ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque æque multiples; ergo Α

multiples quelconques de Γ et de Ε, et parmi d'autres équi-multiples quelconques de Δ et de Ζ, un multiple de Γ surpasse un multiple de Δ, et un multiple de Ε ne surpasse pas un multiple de Ζ (déf. 8. 5). Prenons ces équi-multiples, et que Η, Θ soient des équi-multiples de Γ et de Ε, et que Κ, Λ soient d'autres équi-multiples quelconques de Δ et de Ζ, de manière que Η surpasse Κ, et que Θ ne surpasse pas Λ; et que Μ soit le même multiple de Α que Η l'est de Γ, et que Ν soit le même multiple de Β que Κ l'est de Δ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équi-multiples quelconques Μ, Η de Α et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Ν, Κ de Β et de Δ; si Μ surpasse Ν, Η surpasse Κ; si Μ est égal à Ν, Η est égal à Κ; et si Μ est plus petit que Ν, Η est plus petit que Κ (déf. 6. 5). Mais Η surpasse Κ; donc Μ surpasse Ν. Mais Θ ne surpasse pas Λ; et Μ, Θ sont des équi-multiples quelconques de Α et de Ε; et Ν, Λ sont d'autres équi-multiples quelconques de Β

266 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Z. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ad B majorem rationem habet quam E ad Z. Si igitur prima, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14'.

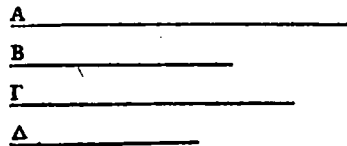
PROPOSITIO XIV.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾗ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἴσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia major sit, et secunda tertia major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

Prima enim A ad secundam B eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, major



τὸ Δ, μείζον δὲ ἴστω τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἴστω.

autem sit A ipsa Γ; dico et B ipsa Δ majorem esse.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἴστω τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὁ ἔτυχε μέγεθος τὸ B· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα

Quoniam enim major est A ipsa Γ, alia autem utcumque magnitudo B; ergo A ad B majorem

et de Z; donc A a avec B une raison plus grande que E avec Z (déf. 8. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième γ avec la quatrième Δ, et que A soit plus grand que γ; je dis que B est plus grand que Δ.

Puisque A est plus grand que γ, et que B est une autre grandeur quelconque,

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 267

λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἐστιν· ἑλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· καὶ ἑλασσον ἢ τὸ Α τοῦ Γ, ἑλασσον ἔσται, καὶ³ τὸ Β τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

rationem habet quam Γ ad B . Ut autem A ad B , ita Γ ad Δ ; et Γ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad B . Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur Δ ipsâ B ; quare major est B ipsâ Δ .

Similiter utique ostendemus et si æqualis sit A ipsi Γ , æqualem fore et B ipsi Δ ; et si minor sit A ipsâ Γ , minorem fore et B ipsâ Δ . Si igitur prima, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

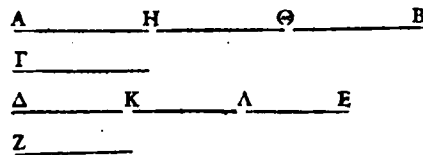
Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ

PROPOSITIO XV.

Partes inter se comparatæ eandem habent rationem quam æque multiples.

Sit enim æque multiplex AB ipsius Γ ac



Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE .

ΔE ipsius Z ; dico esse ut Γ ad Z ita AB ad ΔE .

A a avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme Γ est à Δ ; donc Γ a avec Δ une plus grande raison que Γ avec B (13. 5). Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a la plus grande raison est la plus petite (10. 5); donc Δ est plus petit que B , et par conséquent B plus grand que Δ .

Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ , B sera égal à Δ , et que si A est plus petit que Γ , B sera plus petit que Δ . Donc, etc.

PROPOSITION XV.

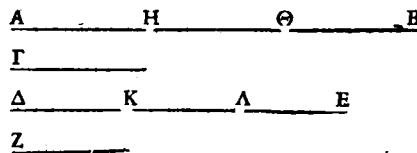
Les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équit multiples.

Que AB soit le même multiple de Γ que ΔE l'est de Z ; je dis que Γ est à Z comme AB est à ΔE .

268 LE CINQUIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθει ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθει ἴσα, τὰ AH, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ AH, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλή-

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot sunt et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Dividatur AB quidem in magnitudines ipsi Γ æquales AH, ΗΘ, ΘΒ, ipsa vero ΔΕ in ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ipsi Ζ æquales; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, ΗΘ, ΘΒ multitudini ipsarum ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et quoniam æquales sunt AH, ΗΘ, ΘΒ inter se, sunt autem



λοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν AH τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔΕ. Τα ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἐξῆς.

et ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ æquales inter se; est igitur ut AH ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, et ΘΒ ad ΛΕ; erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut AH ad ΔΚ ita AB ad ΔΕ. Æqualis autem AH quidem ipsi Γ, ipsa vero ΔΚ ipsi Ζ; est igitur ut Γ ad Ζ ita AB ad ΔΕ. Ergo partes, etc.

Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Divisons AB en parties égales à Γ, et que ces parties soient AH, ΗΘ, ΘΒ; divisons aussi ΔΕ en parties égales à Ζ, et que ces parties soient ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Le nombre des parties AH, ΗΘ, ΘΒ sera égal au nombre des parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et puisque les parties AH, ΗΘ, ΘΒ sont égales entr'elles, et que les parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ sont aussi égales entr'elles, AH est à ΔΚ comme ΗΘ est à ΚΛ, et comme ΘΒ est à ΛΕ (7. 5); donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); donc AH est à ΔΚ comme AB est à ΔΕ. Mais AH est égal à Γ, et ΔΚ égal à Ζ; donc Γ est à Ζ comme AB est à ΔΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Εάν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσται.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

E _____
A _____
B _____
Z _____

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχιν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἰσὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθίντα κατὰλληλα². ἴσται ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales esse, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.

H _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Β æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ alia utcumque æque multiples Η, Θ.

Et quoniam æque est multiplex Ε ipsius Α ac Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. Ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ; et ut igitur

PROPOSITION XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Β, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de Γ et de Δ.

Puisque Ε est le même multiple de Α que Ζ l'est de Β, et que les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équi-multiples (15. 5), la grandeur Α est à Β comme Ε est à Ζ. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc

270 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὥς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· Καὶ ὥς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Εὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μίζον ᾦ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου

Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Rursus, quoniam Η, Θ ipsarum Γ, Δ æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. Ut autem Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; et ut igitur Ε ad Ζ ita Η ad Θ. Si autem quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem tertiâ major sit, et vero secunda quartâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur superat Ε ipsam Η,

E _____
A _____
B _____
Z _____

H _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____

μίζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

superat et Ζ ipsam Θ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt ipsæ quidem Ε, Ζ ipsarum Α, Β æque multiples, ipsæ vero Η, Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Si igitur quatuor, etc.

Γ est à Δ comme Ε est à Ζ (11. 5). De plus, puisque Η, Θ sont des équi-multiples de Γ et de Δ; Γ est à Δ comme Η est à Θ. Mais Γ est à Δ comme Ε est à Ζ; donc Ε est à Ζ comme Η est à Θ (11. 5). Mais si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde est égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde est plus petite que la quatrième (14. 5). Donc si Ε surpasse Η, Ζ surpasse Θ; si Ε est égal à Η, Ζ est égal à Θ; et si Ε est plus petit que Η, Ζ est plus petit que Θ. Mais Ε, Ζ sont des équi-multiples quelconques de Α et de Β, et Η, Θ sont d'autres équi-multiples quelconques de Γ et de Δ; donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

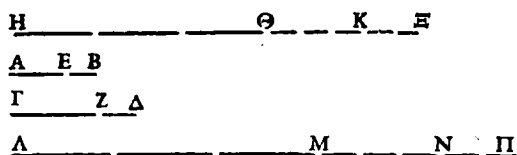
PROPOSITIO XVII.

Εάν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ διαι-
ρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Εστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ,
ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ
ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνά-
λογον ἔσται, ὥς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ
πρὸς τὸ ΖΔ.

Si compositæ magnitudines proportionales
sint, et divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales
ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ;
dico et divisas proportionales fore, ut ΑΕ ad
ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκεις
πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΑΜ, ΜΝ· τῶν δὲ
ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια,
τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἵπτι ἰσάκεις ἔστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ
τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκεις ἄρα ἔστι
πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ.

Sumantur enim ipsarum quidem ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ,
ΖΔ æque multiplices ΗΘ, ΘΚ, ΑΜ, ΜΝ; ip-
sarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multi-
plices ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque est multiplex ΗΘ ip-
sius ΑΕ ac ΘΚ ipsius ΕΒ; æque igitur est
multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΗΚ ipsius ΑΒ.

PROPOSITION XVII.

Si des grandeurs étant composées sont proportionnelles, ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs composées ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ soit à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; je dis que ces grandeurs étant divisées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ.

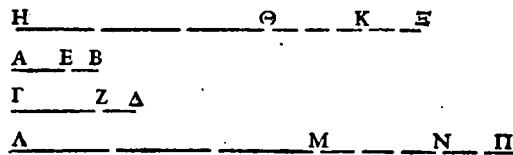
Prenons des équimultiples quelconques ΗΘ, ΘΚ, ΑΜ, ΜΝ des grandeurs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, et d'autres équimultiples quelconques ΚΞ, ΝΠ de ΕΒ et de ΖΔ.

Puisque ΗΘ est le même multiple de ΑΕ que ΘΚ l'est de ΕΒ, ΗΘ est le même multiple de ΑΕ que ΗΚ l'est de ΑΒ (I. 5). Mais ΗΘ est le même multiple de

272 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ισάκεις δὲ ἐστὶ πολλὰπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλὰπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλὰπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλὰπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκεις δὲ ἦν πολλὰπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλὰπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΑΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις ἐστὶ πολλὰπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ

Æque autem est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΑΜ ipsius ΓΖ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΜ ipsius ΓΖ. Rursus, quoniam æque est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; æque igitur est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΑΝ ipsius ΓΔ. Æque autem erat multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΗΚ ipsius ΑΒ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΝ ipsius ΓΔ; ipsæ ΗΚ, ΑΝ igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque



πολλὰπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις πολλὰπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις ἐστὶ πολλὰπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις πολλὰπλάσια τὰ ΗΚ, ΑΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἂ ἔτυχον³ ἰσάκεις πολλὰπλά-

est multiplex ΘΚ ipsius ΕΒ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; est autem et ΚΞ ipsius ΕΒ æque multiplex ac ΝΠ ipsius ΖΔ; et composita ΘΞ ipsius ΕΒ æque est multiplex ac ΜΠ ipsius ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, et sumptæ sunt ipsarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΑΝ, ipsarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ, ΜΠ;

ΑΕ que ΑΜ l'est de ΓΖ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΜ l'est de ΓΖ. De plus, puisque ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΜΝ l'est de ΖΔ, ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΑΝ l'est de ΓΔ. Mais ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΗΚ l'est de ΑΒ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΝ l'est de ΓΔ; donc ΗΚ, ΑΝ sont des équimultiples de ΑΒ et de ΓΔ. De plus, puisque ΘΚ est le même multiple de ΕΒ que ΜΝ l'est de ΖΔ, et que ΚΞ est le même multiple de ΕΒ que ΝΠ l'est de ΖΔ, la grandeur composée ΘΞ est le même multiple de ΕΒ que ΜΠ l'est de ΖΔ (2. 5). Et puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; que ΗΚ, ΑΝ sont des équimultiples quelconques de ΑΒ et de ΓΔ, et que ΘΞ et ΜΠ sont d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; si ΗΚ surpasses ΘΞ, ΑΝ sur-

σια τὰ $\Theta\Xi$, ΜΠ · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ HK τοῦ $\Theta\Xi$, ὑπερέχει καὶ τὸ AN τοῦ ΜΠ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττων, ἑλάττων. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ HK τοῦ $\Theta\Xi$, καὶ κοινοῦ ἀφαιρέντος τοῦ ΘK , ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ $\text{H}\Theta$ τοῦ $\text{K}\Xi$. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ HK τοῦ $\Theta\Xi$, ὑπερέχει καὶ τὸ AN τοῦ ΜΠ · ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ AN τοῦ ΜΠ , καὶ κοινοῦ ἀφαιρέντος τοῦ MN ὑπερέχει καὶ τὸ AM τοῦ ΝΠ · ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ $\text{H}\Theta$ τοῦ $\text{K}\Xi$, ὑπερέχει καὶ τὸ AM τοῦ ΝΠ . Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ $\text{H}\Theta$ τῷ $\text{K}\Xi$, ἴσον ἔσται καὶ τὸ AM τῷ ΝΠ · καὶ ἑλάττων, ἑλάττων. Καὶ ἔστι τὰ $\mu\epsilon\acute{\nu}$ $\text{H}\Theta$, AM τῶν AE , ΓΖ ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ $\text{K}\Xi$, ΝΠ τῶν EB , ΖΔ ἄλλα ἀέτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ . Ἐὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἐξῆς.

si igitur superat HK ipsam $\Theta\Xi$, superat et AN ipsam ΜΠ ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superet autem HK ipsam $\Theta\Xi$, et communi ablata ΘK , superat igitur et $\text{H}\Theta$ ipsam $\text{K}\Xi$. Sed si superat HK ipsam $\Theta\Xi$, superat et AN ipsam ΜΠ ; superat igitur et AN ipsam ΜΠ ; et communi MN ablata, superat et AM ipsam ΝΠ ; quare si superat $\text{H}\Theta$ ipsam $\text{K}\Xi$, superat et AM ipsam ΝΠ . Similiter utique ostendemus et si æqualis sit $\text{H}\Theta$ ipsi $\text{K}\Xi$, æqualem fore et AM ipsi ΝΠ ; et si minor, minorem. Et sunt $\text{H}\Theta$, AM quidem ipsarum AE , ΓΖ æque multiplices, ipsæ vero $\text{K}\Xi$, ΝΠ ipsarum EB , ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices; est igitur ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ . Si igitur compositæ, etc.

passé ΜΠ ; si HK est égal à $\Theta\Xi$, AN est égal à ΜΠ , et si HK est plus petit que $\Theta\Xi$, AN est plus petit que ΜΠ . (déf. 6. 5). Que HK surpasse $\Theta\Xi$; ayant retranché la partie commune ΘK , $\text{H}\Theta$ surpassera encore $\text{K}\Xi$. Mais si HK surpasse $\Theta\Xi$, AN surpassera ΜΠ . Donc AN surpasse ΜΠ ; retranchons la partie commune MN ; la grandeur AM surpassera ΝΠ . Donc, si $\text{H}\Theta$ surpasse $\text{K}\Xi$, AM surpassera ΝΠ . Nous démontrerons semblablement que si $\text{H}\Theta$ est égal à $\text{K}\Xi$, AM sera égal à ΝΠ , et que si $\text{H}\Theta$ est plus petit que $\text{K}\Xi$, AM sera plus petit que ΝΠ . Mais $\text{H}\Theta$, AM sont des équi-multiples quelconques de AE et de ΓΖ , et $\text{K}\Xi$ et ΝΠ d'autres équi-multiples quelconques de EB et de ΖΔ ; donc AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

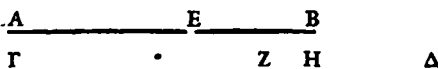
PROPOSITIO XVIII.

Εὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἴσται.

Εἴτω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὥς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἴσται, ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Si divisæ magnitudines proportionales sint, et compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; dico et compositas proportionales fore, ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ.



Εἰ γὰρ μὴ ἴσται ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἴσται ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἥτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ πρὸς μείζον.

Εἴτω πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ ΔΗ. Καὶ ἵπεί ἴσται ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συζυγέμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἴσται· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἴσται· ἴσται ἄρα

Si enim non est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ; erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ, vel ad minorem ipsâ ΔΖ, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem ΔΗ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΗ, compositæ magnitudines proportionales sunt; quare et divisæ proportionales erunt; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ

PROPOSITION XVIII.

Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, étant divisées, soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΕ soit à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ; je dis que ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ.

Car, si ΑΒ n'est pas à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ, ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΔΖ ou à une grandeur plus grande.

Que ΑΒ soit premièrement à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΖΔ, savoir à ΔΗ. Puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΗ, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles; donc ces grandeurs étant divisées seront

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 275

ὥς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὥς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἑλάσσον τοῦ ΖΔ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διηρημένα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ita GH ad HA. Ponitur autem et ut AE ad EB ita GZ ad ZA; et ut igitur GH ad HA ita GZ ad ZA. Major autem prima GH tertiâ GZ; major igitur et secunda HA quartâ ZA. Sed, et minor, quod est impossibile; non igitur est ut AB ad BE ita GA ad minorem ipsâ ZA. Similiter utique ostendemus neque ad majorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Ἐὰν ᾗ ὥς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἴσται ὥς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἐστω γὰρ ὥς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως

PROPOSITIO XIX.

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata

encore proportionnelles (17. 5). Donc AE est à EB comme ΓΗ est à ΗΔ. Mais on a supposé que AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ; donc ΓΗ est à ΗΔ comme ΓΖ est à ΖΔ (11. 5). Mais la première ΓΗ est plus grande que la troisième ΓΖ; donc la seconde ΗΔ est plus grande que la quatrième ΖΔ (14. 5). Mais elle est plus petite, ce qui est impossible; donc AB n'est pas à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΖΔ. Nous démontrerons semblablement que AB n'est pas à BE comme ΓΔ est à une grandeur plus grande que ΖΔ; donc AB est à BE, comme ΓΔ est à ΖΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une grandeur entière est à une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière.

Que la grandeur entière AB soit à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur

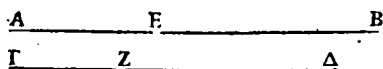
276 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω
ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἴσται
ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ· οὕτως
τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ
ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ συγκεί-
μυνα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα

AE ad ablatam ΓΖ; dico et reliquam EB ad
reliquam ΖΔ fore ut tota AB ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE
ad ΓΖ; et alterne ut BA ad AE ita ΔΓ ad
ΓΖ. Et quoniam compositæ magnitudines
proportionales sunt, et divisæ proportionales



ἀνάλογον ἴσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕ-
τως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἐναλλάξ³, ὡς τὸ
ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ
τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ
πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς
λοιπὸν ΔΖ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.
Εὰν ἄρα ἦ, καὶ τὰ ἐξῆς.

erunt; ut igitur BE ad EA ita ΔΖ ad ΖΓ; et
alterne, ut BE ad ΔΖ ita EA ad ΖΓ. Ut au-
tem AE ad ΓΖ ita posita est tota AB ad totam
ΓΔ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΔΖ erit
ut tota AB ad totam ΓΔ. Si igitur sit, etc.

retranchée AE est à la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante
EB sera à la grandeur restante ΖΔ comme la grandeur entière AB est à la gran-
deur entière ΓΔ.

Car puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme AE
est à ΓΖ, par permutation, BA est à AE comme ΔΓ est à ΓΖ (16. 5). Et puisque
les grandeurs composées sont proportionnelles, les grandeurs divisées seront
encore proportionnelles (17. 5); donc BE est à EA comme ΔΖ est à ΖΓ; donc,
par permutation, BE est à ΔΖ comme EA est à ΖΓ. Mais, par supposition, AE est
à ΓΖ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ; donc la gran-
deur restante EB sera à la grandeur restante ΔΖ comme la grandeur entière AB
est à la grandeur entière ΓΔ (11. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἐστὶν ἀναστρέφαντι⁴. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογοι ᾖ, καὶ ἀναστρέφαντι ἀνάλογον ἔσται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et alterne ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓΖ; compositæ igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est ut AB ad EB ita ΔΓ ad ΖΔ, et est per conversionem. Ex hoc utique manifestum est si compositæ magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.

PROPOSITIO XX.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ¹ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δίσσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτοῦ μείζον ἔσται· καὶ ἐὰν² ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν³ ἑλάσσον, ἑλάσσον.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eâdem ratione, ex æquo autem prima tertiâ major sit; et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

COROLLAIRE.

Puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ; par permutation (16. 5), AB est à AE comme ΓΔ est à ΓΖ; donc ces grandeurs étant composées sont proportionnelles. Mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ΖΔ; ce qui est par conversion. De là il est évident que si des grandeurs composées sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison; si, par égalité, la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

278 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλὰ αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὥς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δείξου δὲ μείζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλάσσον, ἑλάσσον.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eâdem ratione, ut quidem Α ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Β ad Γ ita Ε ad Ζ, ex æquo autem major sit Α ipsâ Γ; dico et Δ ipsâ Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

A	Δ
B	E
Γ	Z

Επεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι⁴ τὸ Β, τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἑλάττω· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως⁵ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὥς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ⁶ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον

Quoniam enim major est Α ipsâ Γ, alia autem quædam Β, et major vero ad eamdem majorem rationem habet quam minor; ipsa igitur Α ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Γ ad Β per inversionem ita Ζ ad Ε; et Δ igitur ad Ε majorem habet rationem quam Ζ ad Ε. Ipsarum autem ad eamdem rationem habentium, majorem rationem habens major est; major

Soient Α, Β, Γ trois grandeurs, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; que, par égalité, Α soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera aussi plus grand que Ζ; que si Α est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque la grandeur Α est plus grande que la grandeur Γ, et que Β est une autre grandeur quelconque, la plus grande grandeur aura avec celle-ci une plus grande raison que la plus petite (8. 5); donc Α a avec Β une raison plus grande que Γ avec Β. Mais Α est à Β comme Δ est à Ε, et, par inversion, Γ est à Β comme Ζ est à Ε; donc Δ a avec Ε une plus grande raison que Ζ avec Ε. Mais, parmi les grandeurs qui ont une raison avec une même grandeur, celle-là est la plus grande qui a une plus grande raison (10. 5); donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ,

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 279

μειζόν ἔστι· μείζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἑλάττω, ἑλάττω. Εὰν ἄρα ἢ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur est Δ ipsa Z. Similiter ostendemus, et si A æqualis sit ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Εὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τιταραζμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δίσσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ· καὶ τὸ τίταρτον τοῦ ἑκτοῦ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλασσον, ἑλασσον.

Εστω τρία μεγέθη· τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμ-

PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ex æquo autem prima tertiâ major sit, et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ et

A	Δ
B	E
Γ	Z

βανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τιταραζμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ

in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Β ad Γ ita Δ ad Ε, ex æquo autem

Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, si leur proportion est troublée, et si par égalité la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; et si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison; que leur raison soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ,

280 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἦ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διίστου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, καὶ ἴσον· καὶ ἑλάττων, ἑλάττων.

Επεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Αλλ' ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὥς δὲ τὸ Γ πρὸς

A ipsâ Γ major sit; dico et Δ ipsâ Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia vero quædam Β; ergo A ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut A quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Γ ad Β per inversionem ita

A _____	Δ _____
B _____	E _____
Γ _____	Z _____

τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλασσόν ἐστιν· ἑλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μείζον ἔστι· ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον³ ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἑλάσσον, ἑλασσον. Εὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

E ad Δ; et E igitur ad Ζ majorem rationem habet quam E ad Δ. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur est Ζ ipsâ Δ; major est igitur Δ ipsâ Ζ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit Α ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Ζ; et si minor, minorem. Si igitur tres, etc.

que B soit à Γ comme Δ est à Ε, et que par égalité Α soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera plus grand que Ζ; que si Α est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque Α est plus grand que Γ, et que Β est une autre grandeur, Α aura avec Β une plus grande raison que Γ avec Β (8. 5). Mais Α est à Β comme Ε est à Ζ, et par inversion, Γ est à Β comme Ε est à Δ; donc Ε a avec Ζ une plus grande raison que Ε avec Δ. Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a une raison plus grande est la plus petite (10, 5); donc Ζ est plus petit que Δ; donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εάν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint quotcunque magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eadem ratione, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo in eadem ratione fore, ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

A	H
B	K
Γ	M
Δ	Θ
Ε	Λ
Ζ	N

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἂ ἑτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἂ ἑτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ, et insuper ipsarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION XXII.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, elles auront la même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de grandeurs que l'on voudra, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que ces grandeurs auront la même raison par égalité, c'est-à-dire que Α sera à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ; prenons d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε, et enfin d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de Γ et de Ζ.

282 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ

Et quoniam est ut A ad B ita Δ ad Ε, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ; ipsarum vero Β, Ε aliæ ut-cunque æque multiples Κ, Λ; est igitur ut Η ad Κ ita Θ ad Λ. Propter eadem utique et ut Κ ad Μ ita Λ ad Ν. Et quoniam tres magnitudi-

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

H _____
K _____
M _____
Θ _____
Λ _____
Ν _____

πρὸς τὸ Ν. Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἔστι τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ διίσσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ³. Εὰν ἄρα ἢ ὀποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

nes sunt Η, Κ, Μ, et aliæ ipsis æquales mul-titudine Θ, Λ, Ν binæ sumptæ et in eadem ra-tione; ex æquo igitur si superat Η ipsam Μ, superat et Θ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Η, Θ quidem ipsarum Α, Δ æque multiples, ipsæ vero Μ, Ν ipsarum Γ, Ζ aliæ ut-cunque æque multiples; est igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur quot-cunque, etc.

Puisque A est à B comme Δ est à Ε, que l'on a pris des équimultiples quel-conques Η, Θ de Α et de Δ, et d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε; Η est à Κ comme Θ est à Λ (4. 5). Par la même raison, Κ est à Μ comme Λ est à Ν. Donc, puisque l'on a trois grandeurs Η, Κ, Μ, et d'autres grandeurs Θ, Λ, Ν égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison; si, par égalité, Η surpasse Μ, Θ surpasse Ν; si Η est égal à Μ, Θ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Μ, Θ est plus petit que Ν (20. 5). Mais Η, Θ sont des équimultiples quelconques de Α et de Δ, et Μ, Ν d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Ζ; donc Α est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν ἡ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

H _____
Θ _____
Λ _____
Κ _____
Μ _____
Ν _____

αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἂν ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem

ratione Δ, Ε, Ζ, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

Sumantur ipsarum quidem Α, Β, Δ æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Γ, Ε, Ζ aliæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, et que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Β, Δ, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Γ, Ε, Ζ.

284 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἔπει ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η, Θ τῶν Α, Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλάσις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἔπει ἔστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ ἐναλλάξ

Et quoniam æque sunt multiples Η, Θ ipsarum Α, Β, partes vero eandem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Θ. Propter eadem utique ut Ε ad Ζ ita Μ ad Ν; et est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; et ut igitur Η ad Θ ita Μ ad Ν. Et quoniam est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε, et alterne ut Β ad Δ ita Γ ad Ε. Et quoniam Θ, Κ ipsarum Β, Δ æque sunt multiples; partes autem eam-

A	H
B	Θ
Γ	Λ
Δ	Κ
Ε	Μ
Ζ	Ν

ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἔπει τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάνεις πολλαπλάσις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἔπει τὰ Α, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Μ.

dem habent rationem quam æque multiples; est igitur ut Β ad Δ ita Θ ad Κ; sed ut Β ad Δ ita Γ ad Ε; et ut igitur Θ ad Κ ita Γ ad Ε. Rursus quoniam Α, Μ ipsarum Γ, Ε æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad Ε ita Α ad Μ. Sed ut Γ ad Ε ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita Α ad Μ, et alterne ut Θ ad Α ita Κ ad Μ. Ostensum autem est et ut Η ad Θ ita Μ ad Ν; et quoniam tres magnitudines sunt

Puisque Η, Θ sont des équi-multiples de Α et de Β, et que les parties ont la même raison que leurs équi-multiples (15. 5); Α est à Β comme Η est à Θ. Par la même raison, Ε est à Ζ comme Μ est à Ν; mais Α est à Β comme Ε est à Ζ; donc Η est à Θ comme Μ est à Ν (11. 5). Et puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, Β est à Δ par permutation, comme Γ est à Ε. Et puisque Θ, Κ sont des équi-multiples de Β et de Δ, et que les parties ont la même raison que leurs équi-multiples, Β est à Δ comme Θ est à Κ. Mais Β est à Δ comme Γ est à Ε; donc Θ est à Κ comme Γ est à Ε. De plus, puisque Α, Μ sont des équi-multiples de Γ et de Ε, Γ est à Ε comme Α est à Μ. Mais Γ est à Ε comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Α est à Μ, et par permutation, Θ est à Α

Αλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Εδείχθη δὴ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἴσσι, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἢ ἀναλογία· διόσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

comme Κ est à Μ. Mais on a démontré que Η est à Θ comme Μ est à Ν ; donc, puisque l'on a trois grandeurs Η, Θ, Λ, et d'autres grandeurs Κ, Μ, Ν égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et que leur proportion est troublée; si, par égalité, Η surpasse Λ, Κ surpassera Ν; si Η est égal à Λ, Κ est égal à Ν; et si Η est plus petit que Λ, Κ est plus petit que Ν (21. 5). Mais Η, Κ sont des équi-multiples de Α et de Δ, et Λ, Ν des équi-multiples de Γ et de Ζ; donc Α est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la cinquième a avec la seconde la même raison que la sixième avec la quatrième, la somme de la première et de la cinquième aura la même raison avec la seconde que la somme de la troisième et de la sixième avec la quatrième.

Η, Θ, Λ, et aliæ ipsis æquales multitudine, ipsæ Κ, Μ, Ν, binæ sumptæ in eadem ratione, et est earum perturbata proportio; ex æquo igitur si superat Η ipsam Α, superat et Κ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Η, Κ quidem ipsarum Α, Δ æque multiples, ipsæ vero Λ, Ν ipsarum Γ, Ζ; est igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur sint tres, etc.

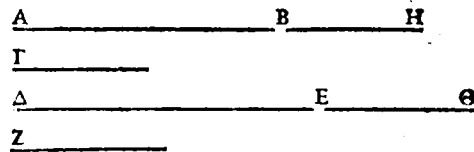
PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptæ prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

286 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὴν αὐτὴν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἔχεται δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέν³ πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Prima quidem enim AB ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔΕ ad quartam Ζ; habeat vero et quinta ΒΗ ad secundam Γ eandem rationem quam sexta ΕΘ ad quartam Ζ; dico et simul sumptas primam et quintam ΑΗ ad secundam Γ eandem habituras esse rationem quam tertia et sexta ΔΘ ad quartam Ζ.



Επεὶ γὰρ ἔστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Επεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διίσου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ διηρημένα μετέβη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογόν ἐσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· διίσου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim est ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; per inversionem igitur ut Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ. Et quoniam est ut ΑΒ ad Γ ita ΔΕ ad Ζ, ut autem Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ; ex æquo igitur est ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΘ. Et quoniam divisæ magnitudines proportionales sunt, et compositæ proportionales erunt; ut igitur ΑΗ ad ΒΗ ita ΔΘ ad ΕΘ. Est autem et ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; ex æquo igitur est ut ΑΗ ad Γ ita ΔΘ ad Ζ. Si igitur prima, etc.

Que la première AB ait avec la seconde Γ la même raison que la troisième ΔΕ a avec la quatrième Ζ, et que la cinquième ΒΗ ait avec la seconde Γ la même raison que la sixième ΕΘ avec la quatrième Ζ; je dis que la somme de la première et de la cinquième ΑΗ aura avec la seconde Γ la même raison que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ a avec la quatrième Ζ.

Puisque ΒΗ est à Γ comme ΕΘ est à Ζ, par inversion, Γ est à ΒΗ comme Ζ est à ΕΘ (cor. 4. 5). Mais ΑΒ est à Γ comme ΔΕ est à Ζ, et Γ est à ΒΗ comme Ζ est à ΕΘ; donc, par égalité, ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΘ (22. 5); donc, puisque ces grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles (18. 5); donc ΑΗ est à ΒΗ comme ΔΘ est à ΕΘ. Mais ΒΗ est à Γ comme ΕΘ est à Ζ; donc, par égalité, ΑΗ est à Γ comme ΔΘ est à Ζ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

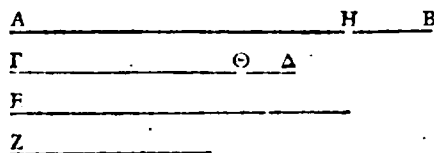
Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον¹ δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Εστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ AB, ΓΔ, E, Z, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴστω δὲ μέγιστον μὲν² αὐτῶν τὸ AB, ἐλάχιστον δὲ τὸ Z· λέγω ὅτι τὰ AB, Z τῶν ΓΔ, E μείζονά ἐστι.

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis majores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; sit autem maxima quidem ipsarum AB, minima vero Z; dico AB, Z ipsis ΓΔ, E majores esse.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν E ἴσον τὸ AH, τῷ δὲ Z ἴσον τὸ ΓΘ.

Επεὶ οὖν³ ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴσον δὲ τὸ μὲν E τῷ AH, τὸ δὲ Z τῷ ΓΘ⁴, ἴστω ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς τὸ AH πρὸς

Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AH, ipsi vero Z æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem ipsa quidem E ipsi AH, ipsa vero Z ipsi ΓΘ; est igitur ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. Et quoniam est ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; et reliqua

PROPOSITION XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

Que les quatre grandeurs AB, ΓΔ, E, Z soient proportionnelles, c'est-à-dire que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; que AB soit la plus grande, et Z la plus petite; je dis que les grandeurs AB, Z sont plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E.

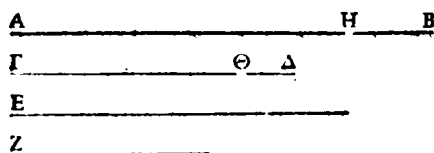
Faisons AH égal à E, et ΓΘ égal à Z.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z, AB est à ΓΔ comme AH est à ΓΘ, et puisque la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée AH est à la grandeur

288 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἔρα τὸ ΗΒ πρὸς
λοιπὸν τὸ ΘΔ ἴσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον
τὸ ΓΔ. Μείζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μείζον ἄρα καὶ
τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἴστί τὸ μὲν ΑΗ
τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἴστί
τοῖς ΓΘ, Ε. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίστοις ἴσα προστεθῇ,

igitur HB ad reliquam ΘΔ erit ut tota AB ad
totam ΓΔ. Major autem AB ipsā ΓΔ; ma-
jor igitur et HB ipsā ΘΔ. Et quoniam æqualis
est ΑΗ quidem ipsi Ε, ΓΘ vero ipsi Ζ; ipsæ
igitur ΑΗ, Ζ æquales sunt ipsis ΓΘ, Ε. Et quo-
niam si inæqualibus æqualia addantur, tota



τὰ ὅλα ἀνίστα ἴστί· ἐὰν ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνί-
σων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ μὲν ΗΒ
προσθεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προσθεθῇ τὰ
ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ,
Ε. Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

inæqualia sunt; si igitur ipsis ΗΒ, ΘΔ inæqua-
libus, existentibus, et majore ipsā ΗΒ, ipsi
quidem ΗΒ addantur ΑΗ, Ζ, ipsi vero ΘΔ
addantur ΓΘ, Ε, fient ΑΒ, Ζ majores ipsis
ΓΔ, Ε. Si igitur quatuor, etc.

retranchée ΓΘ, la grandeur restante ΗΒ sera à la grandeur restante ΘΔ comme la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ (19. 5). Mais ΑΒ est plus grand que ΓΔ; donc ΗΒ est plus grand que ΘΔ. Mais ΑΗ est égal à Ε, et ΓΘ à Ζ; donc les grandeurs ΑΗ, Ζ sont égales aux grandeurs ΓΘ, Ε. Mais si on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales, les grandeurs entières sont inégales; donc, puisque les grandeurs ΗΒ, ΘΔ sont inégales, et que ΗΒ est la plus grande, si l'on ajoute à ΗΒ les grandeurs ΑΗ, Ζ, et à ΘΔ les grandeurs ΓΘ, Ε, les grandeurs ΑΒ, Ζ seront plus grandes que les grandeurs ΓΔ, Ε. Donc, etc.

FIN DU CINQUIÈME LIVRE.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E X T U S.

ΟΡΟΙ.

α. Ομοία σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β. Αντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρω τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ὑπομεινοί τε λόγων ᾗ ὡσιν.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ et angulos æquales habent singulos singulis, et circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciproæ autem figuræ sunt, quando in utrâque figurarum antecedentesque et consequentes rationum sunt,

LIVRE SIXIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

290 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γ'. Ἀκρον καὶ μέσον λόγον εὐθείᾳ τετμηθῆναι λέγεται, ὅταν ἡ ὥς ἢ² ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἐλασσον.

δ'. Ὑψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη³.

3. Secundum extremam et mediam rationem recta secta esse dicitur, quando est ut tota ad majus segmentum ita majus ad minus.

4. Altitudo est omnis figuræ a vertice ad basim perpendicularis ducta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

PROPOSITIO I.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Εἰσὼ τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην¹. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Εκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Α σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ

Triangula et parallelogramma, sub eadem altitudine existentia, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, parallelogramma vero ΕΓ, ΓΖ, sub eadem altitudine existentia, ipsâ ab Α ad ΒΔ perpendiculari ductâ; dico esse ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum, et ΕΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum.

Producatur enim ΒΔ ex utraq̃ue parte ad Θ, Α puncta, et ponantur ipsi quidem ΒΓ basi

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

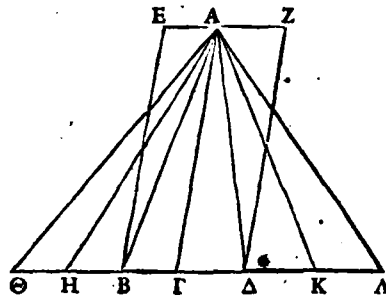
Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Α; prenons tant

βάσει ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν² αἱ BH, HΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπιζεύχουσιν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλή-
λαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρί-
γωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίον ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ
βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ
τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ

æquales. quotcunque BH, HΘ, ipsi vero ΓΔ
basi æquales quotcunque ΔΚ, ΚΛ, et jungan-
tur ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Et quoniam æquales sunt ipsæ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ
inter se, æquales sunt et ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ trian-
gula inter se; quam multiplex igitur est ΘΓ basis
ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est et ΑΘΓ trian-
gulum ipsius ΑΒΓ trianguli. Propter eadem uti-



αὐτὰ δὲ ὁσαπλασίον ἐστὶν ἡ ΓΛ βάσις τῆς ΓΔ
βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρί-
γωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ
βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον
τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς
ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ
ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Τεσσά-
ρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ,

que quam multiplex est ΓΛ basis ipsius ΓΔ
basis, tam multiplex est et ΑΛΓ triangulum
ipsius ΑΓΔ trianguli; et si æqualis est ΘΓ basis
ipsi ΓΛ basi, æquale est et ΑΘΓ triangulum
ipsi ΑΛΓ triangulo; et si superat ΘΓ basis ip-
sam ΓΛ basim, superat et ΑΘΓ triangulum
ipsum ΑΛΓ triangulum; et si minor, minus.
Quatuor igitur existentibus magnitudinibus,

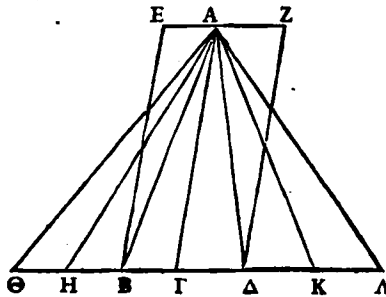
de droites qu'on voudra BH, HΘ, égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites
qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ,
ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. 1); donc le triangle ΑΘΓ est le
même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même
raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base
ΓΛ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle
ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle
ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. 1); et si la base ΘΓ est plus petite que la
base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre

292 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δίδικται ὅτι εἰ ὑπερίχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερίχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ

duabus quidem basibus ΒΓ, ΓΔ, duobus vero triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem ΒΓ et ΑΒΓ trianguli, ipsa ΘΓ basis et ΑΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ et trianguli ΑΓΔ alia utcumque æque multiplicia, ipsaque ΓΛ basis et ΑΛΓ triangulum. Et ostensum est si superat ΘΓ basis ipsam ΓΛ basim, superare et ΑΘΓ triangulum ipsum ΑΛΓ triangulum;



ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον³. ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ

et si æqualis, æquale; et si minor, minus; est igitur ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ quidem duplum est ΕΓ parallelogrammum, ipsius vero ΑΓΔ trianguli duplum est ΖΓ parallelogrammum, partes autem eamdem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad

grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équimultiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a démontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5).

Puisque le parallélogramme ΕΓ est double du triangle ΑΒΓ, que le parallélogramme ΖΓ est double aussi du triangle ΑΓΔ (prop. 41. 1), et que les parties

τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἰδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον⁵, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον⁶ οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸν ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον⁷. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis quidem ΒΓ ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum; ut autem ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum; et ut igitur ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Ergo triacula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεΐα¹, ἀνάλογον τιμῇ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἰὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζυγμένη εὐθεΐα παρὰ τὴν λοιπὴν ἴσται τοῦ τριγώνου πλευράν².

Si trianguli juxta unum laterum ducatur quædam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, ipsa sectiones conjungens recta juxta reliquum erit trianguli latus.

ont entr'elles la même raison que leurs équi-multiples (prop. 15 5)., le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ. Puisqu'on a démontré que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ, la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

294 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Τριγώνου γάρ τοῦ $ABΓ$ παράλληλος μὲ τῶν πλευρῶν τῇ $ΒΓ$ ἤχθω ἡ $ΔΕ$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$.

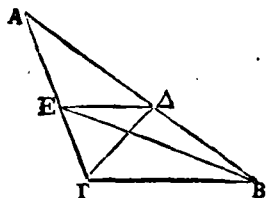
Επιζεύχθωσαν γάρ αἱ $ΒΕ$, $ΓΔ$.

Ἰσὸν δὴ³ ἐστὶ τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον τῷ $ΓΔΕ$ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς $ΔΕ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΔΕ$, $ΒΓ$. Ἄλλο δέ τι τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα

Trianguli enim $ABΓ$ parallela uni laterum $ΒΓ$ ducatur $ΔΕ$; dico esse ut $ΒΔ$ ad $ΔΑ$ ita $ΓΕ$ ad $ΕΑ$.

Jungantur enim $ΒΕ$, $ΓΔ$.

Æquale utique est $ΒΔΕ$ triangulum ipsi $ΓΔΕ$ triangulo, in eadem enim basi sunt $ΔΕ$ et intra easdem parallelas $ΔΕ$, $ΒΓ$. Aliud autem quoddam $ΑΔΕ$ triangulum; æqualia vero ad idem eandem habent rationem; est igitur ut



ὡς τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον· οὕτως τὸ $ΓΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ οὕτως ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ · ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ $Ε$ ἐπὶ τὴν $ΑΒ$ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἀλλήλα εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ⁵ ὡς τὸ $ΓΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$.

$ΒΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ triangulum, ita $ΓΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ triangulum. Sed ut $ΒΔΕ$ quidem triangulum ad $ΑΔΕ$ ita $ΒΔ$ ad $ΔΑ$; nam cum sub eadem altitudine sint, sub ipsâ ab $Ε$ ad $ΑΒ$ perpendiculari ductâ, inter se sunt ut bases. Propter eadem utique ut $ΓΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ ita $ΓΕ$ ad $ΕΑ$; et ut igitur $ΒΔ$ ad $ΔΑ$ ita $ΓΕ$ ad $ΕΑ$.

Menons $ΔΕ$ parallèle à un des côtés $ΒΓ$ du triangle $ΑΒΓ$; je dis que $ΒΔ$ est à $ΔΑ$ comme $ΓΕ$ est à $ΕΑ$.

Joignons $ΒΕ$, $ΓΔ$.

Le triangle $ΒΔΕ$ sera égal au triangle $ΓΔΕ$ (37. 1), parce qu'ils ont la même base $ΔΕ$, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles $ΔΕ$, $ΒΓ$. Mais $ΑΔΕ$ est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle $ΒΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$ comme le triangle $ΓΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$. Mais le triangle $ΒΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$ comme $ΒΔ$ est à $ΔΑ$; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point $Ε$ sur la droite $ΑΒ$, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle $ΓΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$ comme $ΓΕ$ est à $ΕΑ$; donc $ΒΔ$ est à $ΔΑ$ comme $ΓΕ$ est à $ΕΑ$ (11. 5).

Αλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία, ὥς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον⁶, ὥς δὲ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον⁷· καὶ ὥς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον⁸ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον⁹. Ἐκατέρον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον¹⁰ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἰσὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἴσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ¹¹ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed et ΑΒΓ, trianguli latera ΑΒ, ΑΓ proportionaliter secta sint in Δ, Ε punctis, ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ, et jungatur ΔΕ; dico parallelam esse ΔΕ ipsi ΒΓ.

Isidem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ, sed ut ΒΔ quidem ad ΔΑ ita ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum, ut ΓΕ vero ad ΕΑ ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum; et ut igitur ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum. Utrumque igitur ΒΔΕ, ΓΔΕ triangulorum ad ΑΔΕ triangulum eandem habet rationem. Æquale igitur est ΒΔΕ triangulum ipsi ΓΔΕ triangulo; et sunt super eâdem basi ΔΕ. Æqualia autem triangula et super eâdem basi constituta et intra easdem parallelas sunt. Parallela igitur est ΔΕ ipsi ΒΓ. Si igitur trianguli, etc.

Mais que les côtés ΑΒ, ΑΓ du triangle ΑΒΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, Ε, c'est-à-dire que ΒΔ soit à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, et joignons ΔΕ; je dis que ΔΕ est parallèle à ΒΓ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ, que ΒΔ est à ΔΑ comme le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ (1. 6), et que ΓΕ est à ΕΑ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ, le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ (11. 5). Donc chacun des triangles ΒΔΕ, ΓΔΕ a la même raison avec le triangle ΑΔΕ. Donc le triangle ΒΔΕ est égal au triangle ΓΔΕ (9. 5); et ils sont sur la même base ΔΕ. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39. 1). Donc ΔΕ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

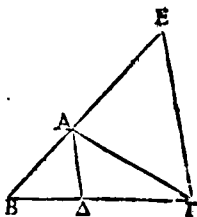
PROPOSITIO III.

Εὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Εστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς $\Delta\Delta$ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$ οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basim; basis segmenta eamdem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si basis segmenta eamdem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, ipsa a vertice ad sectionem ducta recta bifariam secat trianguli angulum.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et secetur $BA\Gamma$ angulus bifariam ab ipsâ $\Delta\Delta$ rectâ; dico esse ut BA ad $\Delta\Gamma$ ita BA ad $A\Gamma$.



Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ $\Delta\Delta$ παραλλήλος ἡ $\Gamma\epsilon$, καὶ διαχθεῖσα ἡ BA συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ E .

Ducatur enim per Γ ipsi $\Delta\Delta$ perallega $\Gamma\epsilon$, et producta BA conveniat cum ipsâ in E .

PROPOSITION III.

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle $AB\Gamma$, que l'angle $BA\Gamma$ soit partagé en deux parties égales par la droite $\Delta\Delta$; je dis que BA est à $\Delta\Gamma$ comme BA est à $A\Gamma$.

Par le point Γ menons $\Gamma\epsilon$ parallèle à $\Delta\Delta$ (31. 1), et que BA prolongé rencontre $\Gamma\epsilon$ au point E .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐ-
θεῖα ἐνέπτεται³ ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία
ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ
ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ
ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλή-
λους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπτεται ἡ ΒΑΕ, ἡ
ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ
ὑπὸ ΑΕΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ
ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνίαί τῇ ὑπὸ ΑΕΓ
ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ
ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν
τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἔκταται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα
ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς
τὴν ΑΕ. Ἰση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα⁵ ἡ ΒΔ πρὸς
τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς⁶ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως
ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω
ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς
ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν
ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ,
ἄλλα καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν⁷ ἡ

Et quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit
ΑΓ; ergo ΑΓΕ angulus æqualis est ipsi ΓΑΔ.
Sed ΓΑΔ ipsi ΒΑΔ ponitur æqualis; et ΒΑΔ
igitur ipsi ΑΓΕ est æqualis. Rursus quoniam in
parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit ΒΑΕ, exterior
angulus ΒΑΔ æqualis est interiori ΑΕΓ. Ostensus
autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΔ æqualis; et ΑΓΕ
igitur angulus ipsi ΑΕΓ est æqualis; quare et
latus ΑΕ lateri ΑΓ est æquale. Et quoniam
trianguli ΒΓΕ juxta unum laterum ΕΓ ducta
est ipsa ΑΔ; proportionaliter igitur est ut ΒΔ
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ. Æqualis autem est ΑΕ
ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Sed et sit ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; et
jungatur ΑΔ; dico bifariam sectum esse ΒΑΓ
angulum ab ΑΔ rectâ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ, sed et ut ΒΔ ad ΔΓ ita
est ΒΑ ad ΑΕ; trianguli enim ΒΓΕ juxta unum

Puisque la droite ΑΓ tombe sur les parallèles ΑΔ, ΕΓ, l'angle ΑΓΕ est égal à
l'angle ΓΑΔ (29. 1). Mais l'angle ΓΑΔ est supposé égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle
ΒΑΔ est égal à l'angle ΑΓΕ. De plus, puisque la droite ΒΑΕ tombe sur les parallèles
ΑΔ, ΕΓ, l'angle extérieur ΒΑΔ est égal à l'angle intérieur ΑΕΓ (29. 1). Mais on
a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle ΑΓΕ est égal
à l'angle ΑΕΓ; donc le côté ΑΕ sera égal au côté ΑΓ (6. 1). Et puisqu'on a mené
la droite ΑΔ parallèle à un des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΔ est à ΔΓ
comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6). Mais ΑΕ est égal à ΑΓ; donc ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ
est à ΑΓ (7. 5).

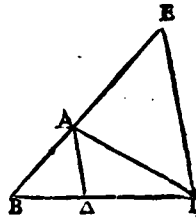
Mais que ΒΔ soit à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ; joignons ΑΔ; je dis que l'angle
ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ, et
que ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6), car la droite ΑΔ est parallèle à un

298 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

BA πρὸς τὴν AE· τριγώνου γὰρ τοῦ BTE παρὰ
μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EF ἤκται⁸ ἡ AD· καὶ
ὥς ἄρα ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ BA πρὸς
τὴν AE· ἴση ἄρα ἡ AG τῇ AE, ὥστε καὶ γω-
νία ἡ ὑπὸ AEF γωνία τῇ ὑπὸ AGE ἐστὶν ἴση.

laterum EF ducta est ipsa AD; et ut igitur BA
ad AG ita BA ad AE; æqualis igitur AG ipsi
AE; quare et angulus AEF angulo AGE est
æqualis. Sed AEF quidem exteriori BAA æqua-
lis, ipse vero et AGE alterno GAD est æqualis;



Αλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEF τῇ ἑκτὸς τῇ ὑπὸ BAA ἴση,
ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AGE τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ GAD
ἐστὶν ἴση⁹· καὶ ἡ ὑπὸ BAA ἄρα τῇ ὑπὸ GAD
ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ BAG γωνία δίχα¹⁰ τέτμη-
ται ὑπὸ τῆς AD εὐθείας. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ
τὰ ἑξῆς.

et BAA igitur ipsi GAD est æqualis. Ipse BAG
igitur angulus bifariam sectus est ab AD rectā.
Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ
πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι
αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτίτουσαι πλευραί'.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia
sunt latera circa æquales angulos; et homo-
loga æquales angulos subtendunt latera.

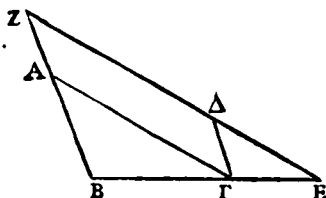
des côtés EF du triangle BTE, la droite BA est à AG comme BA est à AE; donc
AG est égal à AE (9. 5); donc l'angle AEF est égal à l'angle AGE (5. 1). Mais
l'angle AEF est égal à l'angle extérieur BAA (29. 1), et l'angle AGE égal à l'angle
alterne GAD; donc l'angle BAA est égal à l'angle GAD; donc l'angle BAG est partagé
en deux parties égales par la droite AD. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont
proportionnels; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homo-
logues.

Εστω² ἰσογώνια τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΓΕ$, ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ $BAΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$ ³. λέγω ὅτι τῶν $ABΓ$, $ΔΓΕ$ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ⁴.

Sint æquiangula triangula $ABΓ$, $ΔΓΕ$, æqualem habentia $BAΓ$ quidem angulum ipsi $ΓΔΕ$, ipsum vero $ΑΓΒ$ ipsi $ΔΕΓ$, et præterea ipsum $ABΓ$ ipsi $ΔΓΕ$; dico $ABΓ$, $ΔΓΕ$ triangulorum proportionalia esse latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendere latera.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ $BΓ$ τῇ $ΓΕ$. Καὶ ἑπεὶ αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, αἱ ἄρα ὑπὸ⁵ $ABΓ$, $ΔΕΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν· αἱ BA , $ΕΔ$ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. Ἐκτελέσθωσαν, καὶ συμπίπτειν κατὰ τὸ Z .

Καὶ ἑπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΔΓΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ⁶ $ABΓ$, παραλλήλος ἄρα⁷ ἐστὶν ἡ BZ τῇ $ΓΔ$. Πάλιν, ἑπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, παραλλήλος ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ ZE . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZAΓΔ$. ἴση ἄρα ἡ μὲν ZA

Ponatur enim in directum ipsa $BΓ$ ipsi $ΓΕ$. Et quoniam $ABΓ$, $ΑΓΒ$ anguli duobus rectis minores sunt, æqualis autem $ΑΓΒ$ ipsi $ΔΕΓ$, ipsi igitur $ABΓ$, $ΔΕΓ$ duobus rectis minores sunt; ipsæ BA , $ΕΔ$ igitur productæ convenient. Producantur, et convenient in Z .

Et quoniam æqualis est $ΔΓΕ$ angulus ipsi $ABΓ$, parallela igitur est BZ ipsi $ΓΔ$. Rursus, quoniam æqualis est $ΑΓΒ$ ipsi $ΔΕΓ$, parallela est $ΑΓ$ ipsi ZE ; parallelogrammum igitur est $ZAΓΔ$; æqualis igitur ZA quidem ipsi $ΔΓ$, ipsa

Soient les triangles équiangles $ABΓ$, $ΔΓΕ$, ayant l'angle $BAΓ$ égal à l'angle $ΓΔΕ$, l'angle $ΑΓΒ$ égal à l'angle $ΔΕΓ$, et l'angle $ABΓ$ égal à l'angle $ΔΓΕ$; je dis que dans les triangles $ABΓ$, $ΔΓΕ$, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

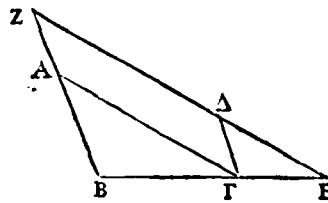
Plaçons la droite $BΓ$ dans la direction de $ΓΕ$. Et puisque les angles $ABΓ$, $ΑΓΒ$ sont plus petits que deux droits (17. 1), et que l'angle $ΑΓΒ$ est égal à l'angle $ΔΕΓ$, les angles $ABΓ$, $ΔΕΓ$ sont plus petits que deux droits; donc les droites BA , $ΕΔ$, étant prolongées, se rencontreront (not. com. 11); qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en Z .

Et puisque l'angle $ΔΓΕ$ est égal à l'angle $ABΓ$, la droite BZ est parallèle à la droite $ΓΔ$ (28. 1). De plus, puisque l'angle $ΑΓΒ$ est égal à l'angle $ΔΕΓ$, la droite $ΑΓ$ est parallèle à ZE ; donc la figure $ZAΓΔ$ est un parallélo-

300 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ περιμῖαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἥκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἰση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ

vero ΑΓ ipsi ΖΔ. Et quoniam trianguli ZBE juxta unum laterum ZE ducta est ΑΓ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΓΔ; ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita ΒΓ ad ΓΕ, et alterne ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. Rursus, quoniam parallela est ΓΔ ipsi ΒΖ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. Æqualis autem ΖΔ ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad



πρὸς τὴν ΔΕ. Ἰση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ¹⁰ εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ¹¹ δίσκου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΕΔ, alterne igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. Et quoniam ostensum est, ut ΑΒ quidem ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ; ut vero ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; et ex æquo igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ. Æquiangulorum igitur, etc.

gramme; donc ΖΑ est égal à ΑΓ, et ΑΓ égal à ΖΔ (34. 1). Et puisqu'un des côtés ΑΓ du triangle ΖΒΕ, est parallèle au côté ΖΕ, ΒΑ est à ΑΖ comme ΒΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΑΖ est égal à ΓΔ; donc ΒΑ est à ΓΔ comme ΒΓ est à ΓΕ (7. 5), et, par permutation (16. 5), ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΓ est à ΓΕ (16. 5). De plus, puisque ΓΔ est parallèle à ΒΖ, ΒΓ est à ΓΕ comme ΖΔ est à ΔΕ. Mais ΖΔ est égal à ΑΓ; donc ΒΓ est à ΓΕ comme ΑΓ est à ΕΔ, et, par permutation, ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ. Et puisqu'on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΓ est à ΓΕ, et que ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ, ΒΑ sera à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

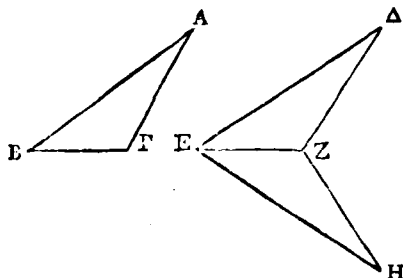
PROPOSITIO V.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, ὡς δὲ τὴν $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως τὴν $ΕΖ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ ἔτι ὡς ἡ

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triangula $ABΓ$, $ΔΕΖ$ latera proportionalia habentia, ut AB quidem ad $ΒΓ$ ita $ΔΕ$ ad $ΕΖ$, ut $ΒΓ$ vero ad $ΓΑ$ ita $ΕΖ$ ad $ΖΔ$; et adhuc ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΕΔ$ ad $ΔΖ$;



$ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τρίγῳ, καὶ ἴσας ἔξουσι τὰς γωνίας, ὅφ' αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΕΖΔ$, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$.

dico æquiangulum esse $ABΓ$ triangulum ipsi $ΔΕΖ$ triangulo, et æquales illa habitura esse angulos, quos homologa latera subtendunt, ipsum quidem $ABΓ$ ipsi $ΔΕΖ$, ipsum vero $ΒΓΑ$ ipsi $ΕΖΔ$; et insuper ipsum $ΒΑΓ$ ipsi $ΕΔΖ$.

PROPOSITION V.

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entr'eux.

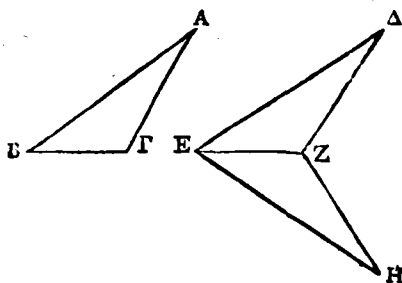
Soient deux triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$, ayant les côtés proportionnels, que AB soit à $ΒΓ$ comme $ΔΕ$ est à $ΕΖ$, que $ΒΓ$ soit à $ΓΑ$ comme $ΕΖ$ est à $ΖΔ$, et que $ΒΑ$ soit à $ΑΓ$ comme $ΕΔ$ est à $ΔΖ$; je dis que les triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$ sont équiangles, et que les angles soutendus par les côtés homologues seront égaux, l'angle $ABΓ$ égal à l'angle $ΔΕΖ$, l'angle $ΒΓΑ$ égal à l'angle $ΕΖΔ$, et enfin l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΕΔΖ$.

Συνιστάτω γάρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς
πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ, τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ
γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἢ
ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ
Η ἴσιν ἴση.

Ισογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ·
τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ
πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμολογοὶ αἱ

Constituatur enim ad EZ rectam, et ad puncta in eâ E, Z , ipsi quidem ABF angulo æqualis ZEH , ipsi vero æqualis BFA ipse EZH ; reliquus igitur ad A reliquo ad H est æqualis.

Æquiangulum igitur est $\triangle AB\Gamma$ triangulum ipsi $\triangle HZ$; ipsorum igitur $\triangle AB\Gamma$, $\triangle HZ$ triangulorum proportionalia sunt latera, circum æquales an-



ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως³ ἡ HE πρὸς τὴν EZ. ΑΛΛ' ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν ΕΖ· ἐκάτερα ἄρα τῶν ΔΕ, HE πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΔΕ τῇ HE. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ HZ ἔστιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΔΕ τῇ EH, κοινὴ δὲ ἡ EZ, δύο δὴ αἱ ΔΕ,

gulos, et homologa æquales angulos latera sub-
tendunt; est igitur ut AB ad BF ita HE ad EZ .
Sed ut AB ad BF ita ponitur ΔE ad EZ ; et ut
igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ ; utraque igitur
ipsarum ΔE , HE ad EZ eandem habet rationem;
æqualis igitur est ΔE ipsi HE . Propter eadem
utique et ΔZ ipsi HZ æqualis est. Et quoniam
æqualis est ΔE ipsi EH , communis autem
 EZ ; duæ utique ΔE , EZ duabus HE , EZ

Construisons sur EZ et aux points E, z l'angle zEH égal à l'angle ABR et l'angle EZH égal à l'angle BGA (23. 1); l'angle restant Δ sera égal à l'angle restant H (32. 1).

Les triangles ABF , EHZ seront équiangles ; donc dans les triangles ABF , EHZ , les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues (4. 6) ; donc AB est à BF comme HE est à EZ . Mais AB est supposé être à BF comme AE est à EZ ; donc AE est à EZ comme HE est à EZ (11. 5) ; donc chacune des droites AE , HE a la même raison avec EZ ; donc AE est égal à HE (9. 5). La droite AZ est égale à HZ , par la même raison. Donc, puisque AE est égal à EH , et que la droite EZ est

ΕΖ δυὸς ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ
βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση⁵. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ
γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔΕΖ τρί-
γωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' αἱ αἱ
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ
ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ
τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ
ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση⁶· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία
τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ
μὲν⁷ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι
ἡ πρὸς τῷ Α πρὸς τῷ Δ⁸· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ
τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὖν ἄρα
δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὖν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην
ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνά-
λογον· ἰσογώνια ἴσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας
ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ
ὑποτείνουσιν.

commune, les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΗΕ, ΕΖ; mais
la base ΖΔ est égale à la base ΖΗ; donc l'angle ΔΕΖ est égal à l'angle ΗΕΖ
(8. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΗΕΖ, et les autres angles que
soutendent des côtés égaux sont égaux; donc l'angle ΔΖΕ est égal à l'angle
ΗΖΕ, et l'angle ΕΔΖ égal à l'angle ΕΗΖ. Et puisque ΖΕΔ est égal à l'angle ΖΕΗ,
et que l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΑΒΓ, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ.
Par la même raison, l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle en Α égal
à l'angle en Δ; donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des
angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les
angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

æquales sunt, et basis ΖΔ basi ΖΗ est æqualis;
angulus igitur ΔΕΖ angulo ΗΕΖ est æqualis. Et
ΔΕΖ triangulum ipsi ΗΕΖ triangulo æquale, et
reliqui anguli reliquis angulis æquales, quos
æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est et
ΔΖΕ quidem angulus ipsi ΗΖΕ, ipse vero ΕΔΖ
ipsi ΕΗΖ. Et quoniam ipse quidem ΖΕΔ ipsi
ΖΕΗ est æqualis, sed ΗΕΖ ipsi ΑΒΓ est æqua-
lis, et ΑΒΓ igitur angulus ipsi ΔΕΖ est æqualis.
Propter eadem utique ipse quidem ΑΒΓ ipsi
ΔΖΕ est æqualis, et insuper ipse ad Α ipsi ad Δ;
æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi
ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo, etc.

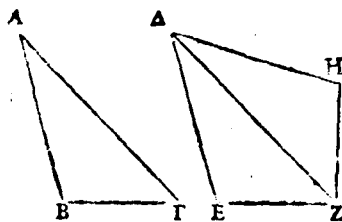
PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo
æqualem habeant, circa æquales autem angu-
los latera proportionalia; æquiangula erunt
triangula, et æquales habebunt angulos, quos
homologa latera subtendunt.

304 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἴτω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ μὲν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰ ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὥς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$.

Sint duo triacula $ABΓ$, $ΔΕΖ$, unum angulum $ΒΑΓ$ uni angulo $ΕΔΖ$ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΕΔ$ ad $ΔΖ$; dico æquiangulum esse $ΑΒΓ$ triangulum ipsi $ΔΕΖ$ triangulo, et æqualem habiturum esse $ΑΒΓ$ quidem angulum ipsi $ΔΕΖ$, ipsum vero $ΑΓΒ$ ipsi $ΔΖΕ$.



Συνιστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ $ΔΖ$ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς $Δ$, $Ζ$, ἑπετέρα μὲν τῶν ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ ἴση ἢ ὑπὸ $ΖΔΗ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἢ ὑπὸ $ΔΖΗ$.

Constituatur enim ad $ΔΖ$ quidem rectam, et ad puncta in ipsâ $Δ$, $Ζ$, alterutri ipsorum quidem $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ æqualis angulus $ΖΔΗ$, ipsi vero $ΑΓΒ$ æqualis ipse $ΔΖΗ$.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Β$ γωνία² λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ $Η$ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΗΖ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὥς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. καὶ ὥς ἄρα ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν

Reliquus igitur ad $Β$ angulus reliquo ad $Η$ æqualis est; æquiangulum igitur est $ΑΒΓ$ triangulum ipsi $ΔΗΖ$ triangulo; proportionaliter igitur est ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΗΔ$ ad $ΔΖ$. Ponitur autem et ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΕΔ$ ad $ΔΖ$; et ut igitur $ΕΔ$ ad $ΔΖ$ ita $ΗΔ$ ad $ΔΖ$;

Soient les deux triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$, ayant l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΕΔΖ$, et les côtés autour des angles égaux proportionnels, de manière que $ΒΑ$ soit à $ΑΓ$ comme $ΕΔ$ est à $ΔΖ$; je dis que les triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$ sont équiangles, et que l'angle $ΑΒΓ$ est égal à l'angle $ΔΕΖ$, et l'angle $ΑΓΒ$ égal à l'angle $ΔΖΕ$.

Sur la droite $ΔΖ$, et aux points $Δ$, $Ζ$ de cette droite, construisons l'angle $ΖΔΗ$ égal à l'un ou à l'autre des angles $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$, et l'angle $ΔΖΗ$ égal à l'angle $ΑΓΒ$ (23. 1).

L'angle restant en $Β$ sera égal à l'angle restant en $Η$ (32. 1); donc les triangles $ΑΒΓ$, $ΔΗΖ$ sont équiangles; donc $ΒΑ$ est à $ΑΓ$ comme $ΗΔ$ est à $ΔΖ$ (4. 6). Mais on suppose que $ΒΑ$ est à $ΑΓ$ comme $ΕΔ$ est à $ΔΖ$; donc $ΕΔ$ est à $ΔΖ$ comme $ΗΔ$

ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ διὰ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση³. βάσεις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται⁴, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ⁵. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

æqualis igitur ΕΔ ipsi ΔΗ, et communis ΔΖ; duæ igitur ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ æquales sunt, et angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ æqualis; basis igitur ΕΖ basi ΖΗ est æqualis, et ΔΕΖ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΔΖΗ quidem ipsi ΔΖΕ, ipse vero ΔΗΖ ipsi ΔΕΖ. Sed ipse ΔΖΗ ipsi ΑΓΒ est æqualis, et ΑΓΒ igitur ipsi ΔΖΕ est æqualis. Ponitur autem et ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ æqualis; et reliquus igitur ad Β reliquo ad Ε æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triângula, etc.

est à ΔΖ (11. 5); donc ΕΔ est égal à ΔΗ (9. 5); mais ΔΖ est commun; donc les deux droites ΕΔ, ΔΖ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΖ; mais l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΗΔΖ; donc la base ΕΖ est égale à la base ΖΗ (4. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΔΗΖ, et les autres angles seront égaux aux autres angles, savoir, ceux qui sont soutendus par des côtés égaux; donc l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΔΗΖ égal à l'angle ΔΕΖ. Mais l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΑΓΒ; donc l'angle ΑΓΒ est égal à ΔΖΕ. Mais l'angle ΒΑΓ est supposé égal à l'angle ΕΔΖ; donc l'angle restant en Β est égal à l'angle restant en Ε (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

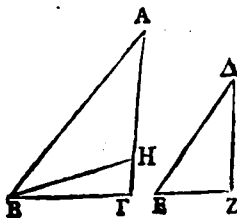
PROPOSITIO VII.

Εάν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μία γωνία ἴσῃ ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἄμα ἢ τοὶ ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ αἷ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευраί.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ , μίαν γωνίαν μία γωνία ἴσῃ ἔχοντα, τὴν ὑπὸ BAG τῇ

Si duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triacula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Sint duo triacula $AB\Gamma$, ΔEZ , unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum BAG



ὑπὸ $E\Delta Z$, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , τὰς πλευρὰς ἀνάλογον², ὡς τὴν AB πρὸς τὴν $B\Gamma$ οὕτως τὴν ΔE πρὸς τὴν EZ , τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ , Z πρότερον ἑκατέραν ἄμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $AB\Gamma$

ipsi $E\Delta Z$, circa alios autem angulos $AB\Gamma$, ΔEZ , latera proportionalia, ut AB ad $B\Gamma$ ita ΔE ad EZ , reliquorum vero ad Γ , Z primum utrumque simul minorem recto; dico æquiangulum esse $AB\Gamma$ triaculum ipsi ΔEZ

PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Soient les deux triangles $AB\Gamma$, ΔEZ , ayant un angle égal à un angle, savoir, l'angle BAG égal à l'angle $E\Delta Z$, et les côtés autour des autres angles $AB\Gamma$, ΔEZ proportionnels entr'eux, de manière que AB soit à $B\Gamma$ comme ΔE est à EZ , et que chacun des autres angles en Γ , Z soit d'abord plus petit qu'un angle droit;

τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλοῦται ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνισὸς ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔστιν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία³ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἔστιν ἴση· ἰσζώνιον ἄρα ἔστί τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ ὑπόκειται οὕτως⁴ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ⁵, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ⁶. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἔστιν ἴση⁷. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἔστιν ὀρθῆς⁹ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἔστιν ὀρθῆς. Καὶ εἰδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα

triangulo, et æqualem fore ΑΒΓ angulum ipsi ΔΕΖ, et reliquum videlicet ad Γ reliquo ad Ζ æqualem.

Si enim inæqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΔΕΖ, unus ipsorum major est. Sit major ΑΒΓ; et constituatur ad ΑΒ rectam et ad punctum in eà Β, ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΑΒΗ.

Et quoniam æqualis est Α quidem angulus ipsi Δ, ipse vero ΑΒΗ angulus ipsi ΔΕΖ, reliquus igitur ΑΗΒ reliquo ΔΖΕ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; est igitur ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΖ. Ut autem ΔΕ ad ΕΖ ponitur ita ΑΒ ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΗ, ipsa igitur ΑΒ ad utramque ipsarum ΒΓ, ΒΗ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΒΓ ipsi ΒΗ; quare et angulus ad Γ angulo ΒΗΓ est æqualis. Minor autem recto ponitur ipse ad Γ; minor igitur est recto ipse ΒΗΓ, quare ipse ei deinceps angulus ΑΗΒ major est recto. Et ostensus est æqualis esse ipsi ad Ζ, et ipse ad Ζ igitur major est recto. Ponitur autem

je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle restant en Γ égal à l'angle restant en Ζ.

Car si l'angle ΑΒΓ n'est pas égal à l'angle ΔΕΖ, l'un des deux sera plus grand. Que l'angle ΑΒΓ soit le plus grand; et construisons sur la droite ΑΒ et au point Β de cette droite, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1).

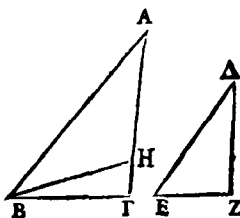
Et puisque l'angle Α est égal à l'angle Δ, et l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ l'angle restant ΑΗΒ est égal à l'angle restant ΔΖΕ (32. 1); donc les triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ sont équiangles; donc ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΖ (4. 6). Mais ΔΕ est supposé être à ΕΖ comme ΑΒ est à ΒΓ (11. 5); donc ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΗ; donc la droite ΑΒ a la même raison avec chacune des droites ΒΓ, ΒΗ; donc ΒΓ est égal à ΒΗ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle ΒΗΓ (5. 1). Mais l'angle en Γ est supposé plus petit qu'un droit; donc l'angle ΒΗΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle de suite ΑΗΒ est plus grand qu'un droit (13. 1). Mais on a démontré qu'il est égal à l'angle Ζ; donc l'angle Ζ est plus grand qu'un

μείζων ἔστιν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ἰρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ , καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ , Z μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

minor recto, quod absurdum; non igitur inæqualis est $AB\Gamma$ angulus ipsi ΔEZ , æqualis igitur. Est autem et ipse ad A æqualis ei ad Δ , et reliquus igitur ad Γ reliquo ad Z æqualis est; æquiangulum igitur est $AB\Gamma$ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.

Sed et rursus ponatur uterque ipsorum ad Γ , Z non minor recto; dico rursus et sic æquiangulum esse $AB\Gamma$ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ BH · ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ $BH\Gamma$ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ἰρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ , οὐκ ἐλάττων ἄρα ἰρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ $BH\Gamma$. Τριγώνου δὴ τοῦ $BH\Gamma$ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ

hisdem enim constructis, similiter ostendemus æqualem esse $B\Gamma$ ipsi BH ; quare et angulus ad Γ ipsi $BH\Gamma$ æqualis est. Non minor autem recto ad Γ ; non minor igitur recto neque ipse $BH\Gamma$. Trianguli igitur $BH\Gamma$ duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod est impossibile; non igitur rursus inæqualis est $AB\Gamma$ angulus ipsi ΔEZ ; æqualis igitur.

droit. Mais on a supposé qu'il était plus petit qu'un droit, ce qui est absurde; donc les angles $AB\Gamma$, ΔEZ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Z ; donc les triangles $AB\Gamma$, ΔEZ sont équiangles.

Mais que chacun des angles Γ , Z ne soit pas plus petit qu'un droit; je dis encore que les triangles $AB\Gamma$, ΔEZ sont équiangles.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que $B\Gamma$ est égal à BH ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle $BH\Gamma$. Mais l'angle Γ n'est pas plus petit qu'un droit; donc l'angle $BH\Gamma$ n'est pas plus petit qu'un droit. Donc deux angles du triangle $BH\Gamma$ ne sont pas plus petits que deux droits, ce qui est impossible (17. 1), donc les angles $AB\Gamma$, ΔEZ ne sont pas encore

δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ
ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν·
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ τρι-
γώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Est autem et ipse ad A ipsi ad Δ æqualis, re-
liquus igitur ad Γ reliquo ad Ζ æqualis est;
æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi
ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

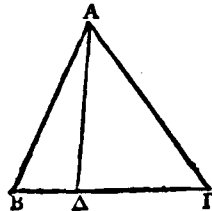
Ἐάν ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γω-
νίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ
καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλή-
λοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον
τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθῳ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab recto angulo ad
basim perpendicularis ducatur; ipsa ad per-
pendiculararem triangula similia sunt et toti et
inter se.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum
habens ΒΑΓ angulum, et ducatur ab Α ad ΒΓ



τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὁμοίων ἐστὶν ἑκά-
τερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ
ἑτὶ ἀλλήλοις.

perpendicularis ΑΔ; dico simile esse utrum-
que ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΓ triangulorum toti ΑΒΓ
et insuper, inter se.

inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ; donc
l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Ζ (32. 1); donc les triangles
ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

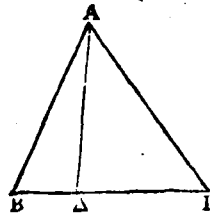
Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit
sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au
triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; du point Α menons sur la
base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables
au triangle entier ΑΒΓ et semblables entr'eux.

310 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἔρθῃ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ

Quoniam enim æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΑΔΒ, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis et ΑΒΓ et ΑΒΔ ipse ad Β; reliquus igitur ΑΓΒ reliquo ΒΑΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo. Est igitur ut ΒΓ subtendens rectum ipsius ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum rectum ipsius ΑΒΔ trianguli, ita eadem ΑΒ subtendens ipsum ad Γ angulum ipsius



ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιον τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum æqualem ipsi ad Γ, ipsum ΒΑΔ ipsius ΑΒΔ trianguli; et etiam ΑΓ ad ΑΔ subtendentem ipsum ad Β angulum, communem duobus triangulis; ipsum ΑΒΓ igitur triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo et æquiangulum est, et ipsa circa æquales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ trian-

Car puisque l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΑΔΒ, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en Β est commun aux deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ, l'angle restant ΑΓΒ est égal à l'angle restant ΒΑΔ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles. Donc le côté ΒΓ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΔ, comme le côté ΑΒ qui soutend l'angle en Γ du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend un angle égal à l'angle Γ, c'est-à-dire l'angle ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ, et comme le côté ΑΓ est au côté ΑΔ qui soutend l'angle Β, commun aux deux triangles; donc les triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6); donc le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle ΑΔΓ est

καὶ τῷ $\triangle A\Gamma$ τριγώνῳ ὅμοιον ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνον⁴. ἐκότερον ἄρα τῶν $\triangle A\Delta$, $\triangle A\Gamma$ τριγώνων ὁμοίον ἐστὶν ὅλῳ τῷ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνῳ⁵.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ $\triangle A\Delta$, $\triangle A\Gamma$ τρίγωνα.

Επεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\angle B\Delta A$ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $\angle A\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ $\angle B\Delta A$ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ B λοιπὴ τῇ ὑπὸ $\angle A\Gamma$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle A\Delta$ τρίγωνον τῷ $\triangle A\Gamma$ τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Delta$ τοῦ $\triangle A\Delta$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ $\angle B\Delta A$, πρὸς τὴν ΔA τοῦ $\triangle A\Gamma$ τριγώνου, ὑποτείνουσιν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν⁶, ἴσην τῇ ὑπὸ $\angle B\Delta A$, οὕτως αὐτὴ ἡ $A\Delta$ τοῦ $\triangle A\Delta$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$ ὑποτείνουσιν τὴν ὑπὸ $\angle A\Gamma$ τοῦ $\triangle A\Gamma$ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ B · καὶ ἐτι ἡ BA ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $\angle A\Delta B$, πρὸς τὴν $A\Gamma$ ὑποτείνουσιν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $\angle A\Gamma$ ⁷. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle A\Delta$ τρίγωνον τῷ $\triangle A\Gamma$ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Similiter utique ostendimus et ipsi $\triangle A\Delta\Gamma$ triangulo simile esse $\triangle AB\Gamma$ triangulum; utrumque igitur ipsorum $\triangle A\Delta$, $\triangle A\Gamma$ triangulorum simile est toti $\triangle AB\Gamma$ triangulo.

Dico etiam et inter se esse similia $\triangle A\Delta$, $\triangle A\Gamma$ triacula.

Quoniam enim rectus $\angle B\Delta A$ recto $\angle A\Delta\Gamma$ est æqualis, sed quidem et ipse $\angle B\Delta A$ ipsi ad Γ ostensus est æqualis, et reliquus igitur ad B reliquo $\angle A\Gamma$ est æqualis; æquiangulum igitur est $\triangle A\Delta$ triangulum ipsi $\triangle A\Gamma$ triangulo. Est igitur ut $B\Delta$ ipsius $\triangle A\Delta$ trianguli, subtendens ipsum $\angle B\Delta A$, ad ΔA ipsius $\triangle A\Gamma$ trianguli, subtendentem ipsum ad Γ angulum, æqualem ipsi $\angle B\Delta A$, ita eadem $A\Delta$ ipsius $\triangle A\Delta$ trianguli, subtendens ipsum ad B angulum, ad $\Delta\Gamma$ subtendentem $\angle A\Gamma$ angulum ipsius $\triangle A\Gamma$ trianguli, æqualem ipsi ad B , et etiam BA subtendens rectum $\angle A\Delta B$, ad $A\Gamma$ subtendentem rectum $\angle A\Gamma$; simile igitur est $\triangle A\Delta$ triangulum ipsi $\triangle A\Gamma$ triangulo. Si igitur in rectangulo, etc.

semblable au triangle $AB\Gamma$; donc chacun des triangles $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ est semblable au triangle entier $AB\Gamma$.

Je dis aussi que les triangles $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit $\angle B\Delta A$ est égal à l'angle droit $\angle A\Delta\Gamma$, et qu'on a démontré que l'angle $\angle B\Delta A$ est égal à l'angle en Γ , l'angle restant en B est égal à l'angle restant $\angle A\Gamma$ (32. 1); donc les deux triangles $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ sont équiangles. Donc le côté $B\Delta$ du triangle $AB\Delta$, qui soutend l'angle $\angle B\Delta A$, est au côté ΔA du triangle $A\Delta\Gamma$, qui soutend l'angle Γ , égal à l'angle $\angle B\Delta A$, comme le côté $A\Delta$ du triangle $AB\Delta$, qui soutend l'angle en B , est au côté $\Delta\Gamma$, qui soutend l'angle $\angle A\Gamma$ du triangle $A\Delta\Gamma$, égal à l'angle en B ; et comme le côté BA , qui soutend l'angle droit $\angle A\Delta B$, est au côté $A\Gamma$ qui soutend l'angle droit $\angle A\Gamma$ (4. 6); donc le triangle $AB\Delta$ est semblable au triangle $A\Delta\Gamma$ (déf. 1. 6). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστιν^δ· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μίση ἀνάλογόν ἐστιν.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in rectangulo triangulo a recto angulo ad basim perpendicularis ducta fuerit, ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basim et unum utriuslibet segmentorum, ipsum ad segmentum latus, medium proportionale esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφαιεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB ; δεῖ δὲ τῆς AB τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφαιεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὲ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ A ἡ AG , γωνίαν περιέχουσα μίτα τῆς AB τυχοῦσαν· καὶ εἰληθῶ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AG τὸ Δ , καὶ κείσθωσαν τῇ

PROPOSITIO IX.

Ab datâ rectâ imperatam partem auferre.

Sit data recta AB ; oportet igitur ab ipsâ AB imperatam partem auferre.

Imperetur et tertia; et ducatur quædam recta AG ab A , quemlibet angulum continens cum ipsâ AB ; et sumatur quodlibet punctum Δ in AG , et ponantur ipsi AD æquales DE , EG ;

COROLLAIRE.

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment contigu.

PROPOSITION IX.

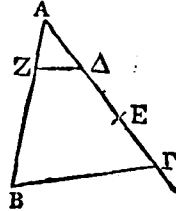
D'une droite donnée retrancher la partie demandée.

Soit AB la droite donnée; il faut de la droite AB retrancher la partie demandée.

Soit demandé le tiers; du point A menons une droite quelconque AG qui fasse un angle quelconque avec la droite AB ; prenons dans AG un point quel-

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 313

ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic du-
διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἡχθω ἡ ΔΖ. catur ΔΖ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἤκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἴστί·ν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῇ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῇ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπι- ταχθῆν τρίτον μέρος ἀφίρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ juxta unum la- terum ΒΓ ducta est ipsa ΖΔ; proportionaliter igitur est ut ΓΔ ad ΔΑ ita ΒΖ ad ΖΑ. Dupla autem ΓΔ ipsius ΔΑ; dupla igitur et ΒΖ ipsius ΖΑ; tripla igitur ΒΑ ipsius ΑΖ.

Ab ipsâ igitur datâ rectâ ΑΒ imperata tertia pars ablata est ipsa ΑΖ. Quod oportebat fa- cere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Datam rectam insectam datæ sectæ similiter secare.

conque Δ, et faisons les droites ΔΕ, ΕΓ égales à ΑΔ (3. 1); joignons ΒΓ, et par le point Δ menons ΔΖ parallèle à ΓΒ (31. 1).

Puisqu'on a mené ΖΔ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite ΓΔ est à ΔΑ comme ΒΖ est à ΖΑ (2. 6). Mais ΓΔ est double de ΔΑ; donc ΒΖ est double de ΖΑ; donc ΒΑ est triple de ΑΖ.

On a donc retranché de la droite donnée ΑΒ la troisième partie demandée ΑΖ. Ce qu'il fallait faire.

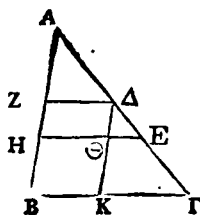
PROPOSITION X.

Partager une droite donnée, qui n'est point partagée de la même manière qu'une droite donnée est partagée.

314 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμήτος ἡ AB , ἡ δὲ τετμημένη ἡ AG^2 , κατὰ τὰ Δ , E σημεία, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ GB , καὶ διὰ τῶν Δ , E τῇ GB παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔZ , EH , διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $\Delta\Theta K$.

Sit data quidem recta insecta AB , ipsa vero secta AG in Δ , E punctis, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et jungatur GB , et per Δ , E ipsi GB parallelæ ducantur ΔZ , EH , per Δ autem ipsi AB parallela ducatur $\Delta\Theta K$.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $Z\Theta$, ΘB . ἴση ἄρα ἡ μὲν $\Delta\Theta$ τῇ ZH , ἡ δὲ ΘK τῇ HB . Καὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ $\Delta K\Gamma$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $K\Gamma$ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΘE . ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν $E\Delta$ οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν $\Theta\Delta$. Ἰση δὲ ἡ μὲν $K\Theta$ τῇ BH , ἡ δὲ $\Theta\Delta$ τῇ HZ . ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν $E\Delta$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ . Πάλιν, ἐπὶ τριγώνου τοῦ AHE παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EH ἤκται ἡ ΔZ . ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔA οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA . Εδείχθη δὲ καὶ

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $Z\Theta$, ΘB ; æqualis igitur ipsa quidem $\Delta\Theta$ ipsi ZH , ipsa vero ΘK ipsi HB . Et quoniam trianguli $\Delta K\Gamma$ juxta unum laterum $K\Gamma$ recta ducta est ΘE ; proportionaliter igitur est ut ΓE ad $E\Delta$ ita $K\Theta$ ad $\Theta\Delta$. Æqualis autem ipsa quidem $K\Theta$ ipsi BH , ipsa vero $\Theta\Delta$ ipsi HZ ; est igitur ut ΓE ad $E\Delta$ ita BH ad HZ . Rursus, quoniam trianguli AHE juxta unum laterum EH ducta est ΔZ ; proportionaliter igitur est ut $E\Delta$ ad ΔA ita HZ ad ZA . De-

Soit AB la droite donnée qui n'est point partagée, et AG une droite partagée aux points Δ , E ; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque; joignons GB , et par les points Δ , E , menons les droites ΔZ , EH parallèles à GB (31. 1), et par le point Δ menons $\Delta\Theta K$ parallèle à AB .

Les figures $Z\Theta$, ΘB seront des parallélogrammes; donc $\Delta\Theta$ est égal à ZH , et ΘK égal à HB (34. 1). Et puisqu'on a mené la droite ΘE parallèle à un des côtés $K\Gamma$ du triangle $\Delta K\Gamma$, la droite ΓE est à $E\Delta$ comme $K\Theta$ est à $\Theta\Delta$ (2. 6). Mais $K\Theta$ est égal à BH , et $\Theta\Delta$ est égal à HZ ; donc ΓE est à $E\Delta$ comme BH est à HZ . De plus, puisqu'on a mené la droite ΔZ parallèle à un des côtés EH du triangle AHE , la droite $E\Delta$ est à ΔA comme

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

ὥς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ·
ἐστὶν ἄρα ὥς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ
πρὸς τὴν ΗΖ, ὥς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ
ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμῆτος ἡ ΑΒ τῇ δο-
θείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ ΑΓ ἰσόιως τέτμηται.
Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

monstratum autem est et ut GE ad EA ita BH
ad HZ; est igitur ut GE quidem ad EA ita
BH ad HZ, ut vero EA ad ΔΑ ita HZ ad ΖΑ.

Data igitur recta insecta AB datæ rectæ
sectæ ΑΓ similiter secta est. Quod oportebat
facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

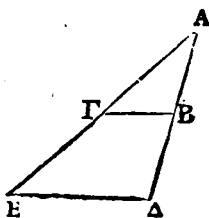
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προ-
σφυρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθω-

PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem
invenire.

Sint datæ AB, ΑΓ, et ponantur ita ut an-



σαν γωνίαν περιέχουσαι τυγχούσαν διὰ δὲ τῶν
ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσφυρεῖν².

gulum quemlibet contineant; oportet igitur
ipsis AB, ΑΓ tertiam proportionalem invenire.

ΗΖ est à ΖΑ. Mais on a démontré que ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ; donc
ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ, et ΕΔ est à ΔΑ comme ΗΖ est à ΖΑ.

Donc la droite donnée AB, qui n'est pas partagée, a été partagée de la même
manière que la droite donnée ΑΓ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XI.

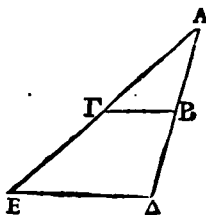
Deux droites étant données, trouver une troisième proportionnelle.

Soient AB, ΑΓ les deux droites données; posons-les de manière qu'elles
comprènent un angle quelconque; il faut trouver une troisième proportion-
nelle aux droites AB, ΑΓ.

316 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτελέσθωσαν γὰρ αἱ AB , AG ἐπὶ τὰ Δ ,
 E σημεία, καὶ κείσθω τῇ AG ἴση ἡ BA , καὶ
 ἐπεζεύχθω ἡ $B\Gamma$, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος
 αὐτῇ³ ἦχθω ἡ ΔE .

Producantur enim AB , AG ad Δ , E puncta,
 et ponatur ipsi AG æqualis BA , et jungatur
 $B\Gamma$, et per Δ parallela huic ducatur ΔE .



Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔDE , παρὰ μίαν τῶν
 πλευρῶν τὴν ΔE ἦκται ἡ $B\Gamma$, ἀνάλογόν ἐστιν
 ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE .
 Ἰση δὲ ἡ BA τῇ AG , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν
 AG οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE .

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB , AG , τρίτη
 ἀνάλογον αὐταῖς προσιύρεται ἡ GE . Ὅπερ ἔδει
 ποιῆσαι.

Quoniam igitur trianguli ΔDE , juxta unum
 laterum ΔE ducta est $B\Gamma$, proportionaliter est
 ut AB ad BA ita AG ad GE . Æqualis autem
 BA ipsi AG , est igitur ut AB ad AG ita AG
 ad GE .

Duabus igitur datis rectis AB , AG , tertia
 proportionalis inventa est GE . Quod oportebat
 facere.

Prolongeons les droites AB , AG vers les points Δ , E ; faisons BA égal à AG ; joignons $B\Gamma$, et par le point Δ menons ΔE parallèle à $B\Gamma$ (31. 1).

Puisque la droite $B\Gamma$ est parallèle à un des côtés ΔE du triangle ΔDE , la droite AB est à BA comme AG est à GE (2. 6). Mais BA est égal à AG ; donc AB est à AG comme AG est à GE .

Donc les deux droites AB , AG étant données, on a trouvé une troisième proportionnelle GE . Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

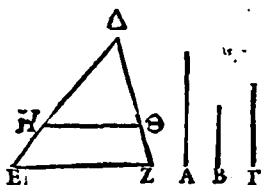
PROPOSITIO XII.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ . διῖ δὴ τῶν A, B, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ A, B, Γ ; oportet igitur ipsis A, B, Γ quartam proportionalem invenire.



Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ $\Delta E, \Delta Z$, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν² τὴν ὑπὸ $E\Delta Z$ · καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔH , τῇ δὲ B ἴση ἡ HE , καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ $\Delta\Theta$ · καὶ ἐπιζυγυθείσης τῆς $H\Theta$, παράλληλος αὐτῇ ἡχθῶ διὰ τοῦ E ἡ EZ .

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔEZ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν³ τὴν EZ ἡκται ἡ $H\Theta$, ἔστιν ἄρα ὡς ΔH πρὸς τὴν HE , οὕτως ἡ $\Delta\Theta$ πρὸς τὴν EZ . Ἴση δὲ ἡ μὲν ΔH τῇ A , ἡ δὲ HE τῇ B , ἡ δὲ $\Delta\Theta$ τῇ Γ . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν EZ .

Exponentur duæ rectæ $\Delta E, \Delta Z$, angulum continentes quemlibet $E\Delta Z$; et ponatur ipsi quidem A æqualis ΔH , ipsi vero B æqualis HE , et insuper ipsi Γ æqualis $\Delta\Theta$; et junctâ $H\Theta$, parallela illi ducatur per E ipsa EZ .

Et quoniam trianguli ΔEZ juxta unum latrum EZ ducta est $H\Theta$, est igitur ut ΔH ad HE ita $\Delta\Theta$ ad EZ . Æqualis autem ΔH quidem ipsi A , ipsa vero HE ipsi B , ipsa autem $\Delta\Theta$ ipsi Γ ; est igitur ut A ad B ita Γ ad EZ .

PROPOSITION XII.

Trois droites étant donnés, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient A, B, Γ les trois droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites A, B, Γ .

Soient les deux droites $\Delta E, \Delta Z$, comprenant un angle quelconque $E\Delta Z$; faisons la droite ΔH égale à A , la droite HE égale à B , et la droite $\Delta\Theta$ égale à Γ ; et ayant joint $H\Theta$, par le point E menons EZ parallèle à $H\Theta$.

Puisque la droite $H\Theta$ est parallèle à un des côtés EZ du triangle ΔEZ , la droite ΔH est à HE comme $\Delta\Theta$ est à EZ (2. 6). Mais ΔH est égal à A , la droite HE égale à B , et la droite $\Delta\Theta$ égale à Γ ; donc A est à B comme Γ est à EZ .

318 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Τριῶν ἄρα δοθειῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσύρεται ἡ ΕΖ. Οπερ ἴδι ποιῆσαι.

Tribus igitur datis rectis Α, Β, Γ, quarta proportionalis inventa est ΕΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

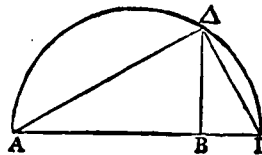
PROPOSITIO XIII.

Δύο δοθειῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Sint datæ duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; oportet igitur ipsis ΑΒ, ΒΓ mediam proportionalem invenire.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἦχθῶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ponantur in directum, et describatur super ipsâ ΑΓ semicirculus ΑΔΓ, et ducatur a Β puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΒΔ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν

Et quoniam in semicirculo angulus est ΑΔΓ, rectus est. Et quoniam in rectangulo triangulo ΑΔΓ a recto angulo ad basim per-

Donc trois droites Α, Β, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΕΖ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΒΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre ΑΒ, ΒΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite ΑΓ décrivons le demi-cercle ΑΔΓ; du point Β menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΔ, ΔΓ (II. I).

Puisque l'angle ΑΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle ΑΔΓ on a mené de l'angle droit la droite

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἐστίν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΒΔ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

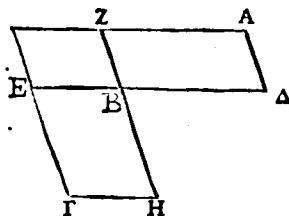
perpendicularis ducta est ΔΒ; ipsa ΔΒ igitur inter basis segmenta ΑΒ, ΒΓ media proportionalis est.

Duabus igitur datis rectis ΑΒ, ΒΓ, media proportionalis inventa est ΒΔ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων¹ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων², ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια³ παραλληλόγραμ-



μα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῇ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ,

Æqualiumque et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

Sint æqualiaque et æquiangula parallelo-

gramma ΑΒ, ΒΓ, æquales habentia ipsos ad Β angulos, et ponantur in directum ΔΒ, ΒΕ,

ΔΒ perpendiculaire à la base, la droite ΔΒ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΒ, ΒΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites ΑΒ, ΒΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle ΒΔ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIV.

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient ΑΒ, ΒΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles

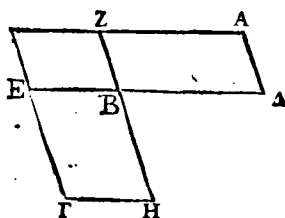
320 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ZB, BH· λέγω ὅτι τῶν AB, BG ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ.

Συμπεπληρώσω γὰρ τὸ ZE παραλληλόγραμ-
μον.

in directum igitur sunt et ZB, BH; dico ipsorum AB, BG reciproca esse latera circa æquales angulos, hoc est esse ut ΔB ad BE ita HB ad BZ.

Complicatur enim ZE parallelogrammum.



Επεὶ οὖν ἴσὺν ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BG παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ZE· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ BG πρὸς τὸ ZE. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν BE, ὡς δὲ τὸ BG πρὸς τὸ ZE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ HB πρὸς τὴν BZ. Τῶν ΔΒ, BG ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονήτωςαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς

Et quoniam æquale est AB parallelogrammum ipsi BG parallelogrammo, aliud autem quoddam ZE; est igitur ut AB ad ZE ita BG ad ZE. Sed ut AB quidem ad ZE ita ΔB ad BE, ut vero BG ad ZE ita HB ad BZ; et ut igitur ΔB ad BE ita HB ad BZ. Ipsorum ΔB, BG igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos.

Sed et reciproca sint latera circa æquales angulos, et sit ut ΔB ad BE ita HB ad BZ; dico

égaux en B, placons BE dans la direction de ΔB, la droite BH sera dans la direction de ZB (14. 1); je dis que les côtés des parallélogrammes AB, BG autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΔB est à BE comme HB est à BZ.

Achevons le parallélogramme ZE.

Puisque le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BG, et que ZE est un autre parallélogramme, AB est à ZE comme BG est à ZE (7. 5). Mais AB est à ZE comme ΔB est à BE (1. 6); et BG est à ZE comme HB est à BZ; donc ΔB est à BE comme HB est à BZ (11. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΔB, BG autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

Mais que les côtés adjacents aux angles égaux soient réciproquement pro-

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 321

τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ· λέγω ὅτι ἴσον ἵστί τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BΓ παραλληλόγραμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴστί ὡς ἢ ΔΒ πρὸς τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ ΔΒ πρὸς τὴν BE οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἢ HB πρὸς τὴν BZ οὕτως τὸ BΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ BΓ πρὸς τὸ ZE· ἴσον ἄρα ἵστί τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BΓ παραλληλόγραμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquale esse AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo.

Quoniam enim est ut ΔΒ ad BE ita HB ad BZ, sed ut ΔΒ quidem ad BE ita AB parallelogrammum ad ZE parallelogrammum, ut HB vero ad BZ ita BΓ parallelogrammum ad ZE parallelogrammum; et ut igitur AB ad ZE ita BΓ ad ZE; æquale igitur est AB parallelogrammum ipsi BΓ parallelogrammo. Ergo æqualium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὡν, μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἵστί ἐκείνα.

PROPOSITIO XV.

Æqualium et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum, unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

portionnels, c'est-à-dire que ΔΒ soit à BE comme HB est à BZ; je dis que le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ.

Puisque ΔΒ est à BE comme HB est à BZ, que ΔΒ est à BE comme le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE (1. 6), et que HB est à BZ comme le parallélogramme BΓ est au parallélogramme ZE, AB est à ZE comme BΓ est à ZE (11. 5); donc le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.

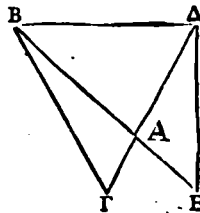
322 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΑΔΕ$, μίαν μὲν ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΑΕ$. λέγω ὅτι τῶν $ABΓ$, $ΑΔΕ$ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτ' ἐστὶν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΓΑ$ τῇ $ΑΔ$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΕΑ$ τῇ $ΑΒ$. Καὶ ἰσχυρίζω ἡ $ΒΔ$.

Sint æqualia trianguła $ABΓ$, $ΑΔΕ$, unum uni æqualem habentia angulum $ΒΑΓ$ ipsi $ΔΑΕ$; dico $ABΓ$, $ΑΔΕ$ triangulorum reciproca esse latera, circa æquales angulos, hoc est esse ut $ΓΑ$ ad $ΑΔ$ ita $ΕΑ$ ad $ΑΒ$.

Ponantur enim ita ut in directum sit $ΓΑ$ ipsi $ΑΔ$; in directum igitur est et $ΕΑ$ ipsi $ΑΒ$. Et jungatur $ΒΔ$.



Επὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΔΕ$ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ $ΑΒΔ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΓΑΒ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον³. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$, ὡς δὲ τὸ $ΕΑΔ$ ⁴ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$ · τῶν $ABΓ$, $ΑΔΕ$ ἄρα τριγώνων⁵ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Et quoniam æquale est $ABΓ$ triangulum ipsi $ΑΔΕ$ triangulo, aliud autem $ΑΒΔ$; est igitur ut $ΓΑΒ$ triangulum ad $ΒΑΔ$ triangulum ita $ΑΔΕ$ triangulum ad $ΒΑΔ$ triangulum. Sed ut $ΓΑΒ$ quidem ad $ΒΑΔ$ ita $ΓΑ$ ad $ΑΔ$, ut $ΕΑΔ$ vero ad $ΒΑΔ$ ita $ΕΑ$ ad $ΑΒ$; et ut igitur $ΓΑ$ ad $ΑΔ$ ita $ΕΑ$ ad $ΑΒ$; ipsorum $ABΓ$, $ΑΔΕ$ igitur triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos.

Soient les triangles égaux $ABΓ$, $ΑΔΕ$, ayant un angle égal à un angle, l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΔΑΕ$; je dis que les côtés des triangles $ABΓ$, $ΑΔΕ$, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que $ΓΑ$ est à $ΑΔ$ comme $ΕΑ$ est à $ΑΒ$.

Plaçons ces triangles de manière que $ΓΑ$ soit dans la direction de $ΑΔ$; la droite $ΕΑ$ sera dans la direction de $ΑΒ$ (14. 1). Joignons $ΒΔ$.

Puisque le triangle $ABΓ$ est égal au triangle $ΑΔΕ$, et que $ΑΒΔ$ est un autre triangle, le triangle $ΓΑΒ$ est au triangle $ΒΑΔ$ comme le triangle $ΑΔΕ$ est au triangle $ΒΑΔ$ (7. 5). Mais le triangle $ΓΑΒ$ est au triangle $ΒΑΔ$ comme $ΓΑ$ est à $ΑΔ$ (1. 6), et le triangle $ΕΑΔ$ est au triangle $ΒΑΔ$ comme $ΕΑ$ est à $ΑΒ$; donc $ΓΑ$ est à $ΑΔ$ comme $ΕΑ$ est à $ΑΒ$ (11. 5); donc les côtés des triangles $ABΓ$, $ΑΔΕ$, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεποιθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$ οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB ; λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνον τῷ $\triangle A\Delta E$ τριγώνῳ.

Ἐπιζυχθείσης γὰρ πάλιν τῆς $B\Delta$, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$ οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$ οὕτως τὸ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνον πρὸς τὸ $\triangle B\Delta\Delta$ τριγώνον, ὡς δὲ ἡ EA πρὸς τὴν AB οὕτως τὸ $\triangle E\Delta\Delta$ τριγώνον πρὸς τὸ $\triangle B\Delta\Delta$ τριγώνον· ὡς ἄρα τὸ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνον πρὸς τὸ $\triangle B\Delta\Delta$ οὕτως τὸ $\triangle E\Delta\Delta$ τριγώνον πρὸς τὸ $\triangle B\Delta\Delta$ · ἐκάτερον ἄρα τῶν $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ πρὸς τὸ $\triangle B\Delta\Delta$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνον τῷ $\triangle E\Delta\Delta$ τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἰζῆς.

Sed utique reciproca sint latera ipsorum $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ triangulorum, et sit ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB ; dico æquale esse $\triangle AB\Gamma$ triangulum ipsi $\triangle A\Delta E$ triangulo.

Juncta enim rursus $B\Delta$, quoniam est ut ΓA ad $A\Delta$ ita EA ad AB , sed ut ΓA quidem ad $A\Delta$ ita $\triangle AB\Gamma$ triangulum ad $\triangle B\Delta\Delta$ triangulum, ut EA vero ad AB ita $\triangle E\Delta\Delta$ triangulum ad $\triangle B\Delta\Delta$ triangulum; ut igitur $\triangle AB\Gamma$ triangulum ad $\triangle B\Delta\Delta$ ita $\triangle E\Delta\Delta$ triangulum ad $\triangle B\Delta\Delta$; utrumque igitur ipsorum $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ ad $\triangle B\Delta\Delta$ eandem habet rationem; æquale igitur est $\triangle AB\Gamma$ triangulum ipsi $\triangle E\Delta\Delta$ triangulo. *Æqualium igitur, etc.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾤσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχόμενῳ ὀρθογώνιῳ καὶ ἄν.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub mediis contento rectangulo; et si sub

Mais que les côtés des triangles $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ soient réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΓA soit à $A\Delta$ comme EA est à AB ; je dis que le triangle $\triangle AB\Gamma$ est égal au triangle $\triangle A\Delta E$.

Joignons encore $B\Delta$. Puisque ΓA est à $A\Delta$ comme EA est à AB , que ΓA est à $A\Delta$ comme le triangle $\triangle AB\Gamma$ est au triangle $\triangle B\Delta\Delta$ (1. 6), et que EA est à AB comme le triangle $\triangle E\Delta\Delta$ est au triangle $\triangle B\Delta\Delta$, le triangle $\triangle AB\Gamma$ est au triangle $\triangle B\Delta\Delta$ comme le triangle $\triangle E\Delta\Delta$ est au triangle $\triangle B\Delta\Delta$ (11. 5); donc chacun des triangles $\triangle AB\Gamma$, $\triangle A\Delta E$ a la même raison avec le triangle $\triangle B\Delta\Delta$; donc le triangle $\triangle AB\Gamma$ est égal au triangle $\triangle E\Delta\Delta$ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes; et si le

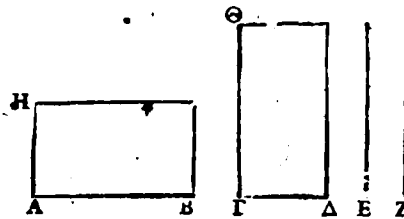
324 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Εἰπωσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, E, Z, ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub extremis contento rectangulo, quatuor rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; dico sub AB, Z contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.



Ἡχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς A, Γ σημείων ταῖς AB, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH, τῇ δὲ E ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπληρώσωσαν τὰ BH, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis AB, ΓΔ rectis ad rectos ipsæ AH, ΓΘ, et ponatur ipsi quidem Z æqualis AH, ipsi vero E æqualis ΓΘ, et compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Z τῇ AH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· τῶν BH, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιτεπόνθασιν αἱ πλευραὶ,

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem E quidem ipsi ΓΘ, ipsa vero Z ipsi AH; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH; ipsorum BH, ΔΘ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales an-

rectangle compris sous les extrêmes et égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

Soient AB, ΓΔ, E, Z quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; je dis que le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Des points A, Γ, et sur les droites AB, ΓΔ, menons les perpendiculaires AH, ΓΘ (11. 1); faisons AH égal à Z, et ΓΘ égal à E; et achevons les parallélogrammes BH, ΔΘ.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que E est égal à ΓΘ, et Z égal à AH, AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à AH (7. 5); donc les côtés des parallélogrammes BH, ΔΘ, placés autour des angles égaux, sont réciproquement propor-

αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ ἰσογώνων παραλληλογράμμων ἀντιπρόσθενται αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείναι· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z, ἴση γὰρ ἡ AH τῇ Z· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E⁶. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἴστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται, ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z τὸ BH, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AH τῇ Z⁸. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E· τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ⁹. καὶ ἐστὶν¹⁰ ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνων παραλληλογράμμων ἀντιπρόσθενται αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα

gulos. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est BH parallelogrammum ipsi ΔΘ parallelogrammo. Et est BH quidem sub AB, Z, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero ΔΘ ipsum sub ΓΔ, E, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur sub AB, Z contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.

Sed utique ipsum sub AB, Z contentum rectangulum æquale sit ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Isidem enim constructis, quoniam ipsum sub AB, Z æquale est ipsi sub ΓΔ, E, et est ipsum quidem sub AB, Z ipsum BH, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero sub ΓΔ, E ipsum ΔΘ, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur BH æquale est ipsi ΔΘ; et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa

tionnels. Mais lorsque les côtés des parallélogrammes équiangles, placés autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, ces parallélogrammes sont égaux (14. 6); donc le parallélograme BH est égal au parallélogramme ΔΘ. Mais le parallélogramme BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z; et le parallélogramme ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Mais que le rectangle compris sous AB, Z soit égal au rectangle compris sous les droites ΓΔ, E; je dis que ces quatre droites sont proportionnelles, c'est-à-dire que AB est à ΓΔ comme E est à Z.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous AB, Z est égal au rectangle sous ΓΔ, E, que le rectangle BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z, et que le rectangle ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc BH est égal à ΔΘ; et ils sont équiangles. Mais les côtés des parallélogrammes égaux et équiangles, placés autour des angles sont égaux, sont réciproquement propor-

326 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ·
ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα
ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ. Εὰν
ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquales angulos; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ
ad ΑΗ. Æqualis autem ΓΘ quidem ipsi Ε,
ipsa vero ΑΗ ipsi Ζ; est igitur ut AB ad ΓΔ
ita Ε ad Ζ. Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν
ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης
τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ,
ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω
ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Κεῖσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ
Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὥς
ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Εὰν δὲ
τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ proportionales sint, sub ex-
tremis contentum rectangulum æquale est ipsi
ex mediâ quadrato; et si sub extremis con-
tentum rectangulum æquale sit ipsi ex mediâ
quadrato, tres rectæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ proportionales Α, Β, Γ, ut
Α ad Β ita Β ad Γ; dico sub Α, Γ contentum
rectangulum æquale esse ipsi ex Β quadrato.

Ponatur ipsi Β æqualis Δ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Β ad Γ, æqualis
autem Β ipsi Δ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad
Γ. Si autem quatuor rectæ proportionales sint,
sub extremis contentum rectangulum æquale

tionnels (14. 6); donc AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à ΑΗ; mais ΓΘ est égal à Ε, et ΑΗ à Ζ; donc AB est à ΓΔ comme Ε est à Ζ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne, ces trois droites seront proportionnelles.

Soient Α, Β, Γ trois droites proportionnelles; de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le rectangle compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

Faisons Δ égal à Β.

Puisque Α est à Β comme Β est à Γ, et que Β égal à Δ, Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous

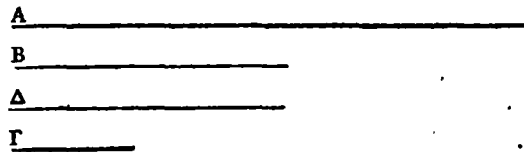
LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 327

περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστίν⁴, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἵστα τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

est ipsi sub mediis contento rectangulo; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Sed ipsum sub Β, Δ ipsum ex Β est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ contentum rectangulum æquale est ipsi ex Β quadrato.

Sed et ipsum sub Α, Γ æquale sit ipsi ex Β; dico esse ut Α ad Β ita Β ad Γ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστίν⁵, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἰση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν ἄρα τρεῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

Isdem enim constructis, quoniam ipsum sub Α, Γ æquale est ipsi ex Β, sed ipsum ex Β ipsum sub Β, Δ est, æqualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β, Δ. Si autem ipsum sub extremis æquale est ipsi sub mediis, quatuor rectæ proportionales sunt; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Æqualis autem Β ipsi Δ; ut igitur Α ad Β ita Β ad Γ. Si igitur tres, etc.

les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Β, Δ. Mais le rectangle sous Β, Δ est égal au carré de Β, car Β est égal à Δ; donc le rectangle compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

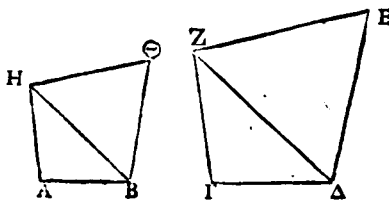
Mais que le rectangle sous Α, Γ soit égal au carré de Β; je dis que Α est à Β comme Β est à Γ.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous Α, Γ est égal au carré de Β, et que le carré de Β est le rectangle sous Β, Δ, car Β est égal à Δ, le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous les droites Β, Δ. Mais si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes, les quatre droites sont proportionnelles (16. 6); donc Α est à Β comme Δ est à Γ. Mais Β est égal à Δ; donc Α est à Β comme Β est à Γ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθύγραμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



Επιζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς A, B τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ HAB, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἢ ὑπὸ ABH· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπὴ δὲ τῇ ὑπὸ AHB ἴστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ HAB τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν HB οὕτως ἢ

Ex datâ rectâ ipsi dato rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Sit data quidem recta AB, datum autem rectilineum GE; oportet igitur ex AB rectâ ipsi GE rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Jungatur ΔΖ, et constituatur ad AB rectam et ad puncta in eâ A, B ipsi quidem ad Γ angulo æqualis ipsi sub HAB, ipsi vero sub ΓΔΖ æqualis ipse sub ABH; reliquus igitur sub ΓΖΔ reliquo sub AHB est æqualis; æquiangulum igitur est ΖΓΔ triangulum ipsi HAB triangulo; proportionaliter igitur est ut ΖΔ ad HB ita

PROPOSITION XVIII.

Sur une droite donnée; décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Soit AB la droite donnée, et GE la figure rectiligne donnée; il faut sur la droite AB décrire une figure rectiligne semblable à la figure rectiligne GE, et semblablement placée.

Joignons AZ, et sur la droite AB et aux points A, B de cette droite, faisons l'angle HAB égal à l'angle en Γ, et l'angle ABH égal à l'angle ΓΔΖ (23. 1); l'angle restant ΓΖΔ sera égal à l'angle restant AHB (32. 1); donc les triangles ΖΓΔ, HAB sont équiangles; donc ΖΔ est à HB comme ΖΓ est à HA, et comme

ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνιστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὸν ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ τε ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθύγραμμῳ.

ZG ad HA et ΓΔ ad AB. Rursus, constituatur ad BH rectam et ad puncta in eâ B, H ipsi quidem ΔZE angulo æqualis BHΘ, ipsi vero ΖΔΕ æqualis ΗΒΘ; reliquus igitur ad E reliquo ad Θ est æqualis; æquiangulum igitur est ΖΔΕ triangulum ipsi ΗΒΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΔΖ ad ΗΒ ita ΖΕ ad ΗΘ, et ΕΔ ad ΘΒ. Ostensum est autem et ut ΖΔ ad ΗΒ et ita ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ; et ut igitur ΖΓ ad ΑΗ ita et ΓΔ ad ΑΒ et ΖΕ ad ΗΘ, et adhuc ΕΔ ad ΘΒ. Et quoniam æqualis est ipse quidem ΓΖΔ angulus ipsi ΑΗΒ, ipse vero ΔΖΕ ipsi ΒΗΘ; totus igitur ΓΖΕ toti ΑΗΘ est æqualis. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΒΘ est æqualis, est autem et ipse quidem ad Γ ipsi ad Α æqualis, ipse vero ad Ε ipsi ad Θ; æquiangulum igitur est ΑΘ ipsi ΓΕ, et circa æquales angulos cum ipso latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΘ, rectilineum ipsi ΓΕ rectilineo.

ΓΔ est à ΑΒ (4. 6). De plus, construisons sur la droite ΒΗ, et aux points Β, Η de cette droite, l'angle ΒΗΘ égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΗΒΘ égal à l'angle ΖΔΕ; l'angle restant en Ε sera égal à l'angle restant en Θ; donc les triangles ΖΔΕ, ΗΒΘ sont équiangles; donc ΔΖ est à ΗΒ comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (4. 6). Mais on a démontré que ΖΔ est à ΗΒ comme ΖΓ est à ΗΑ, et comme ΓΔ est à ΑΒ; donc ΖΓ est à ΑΗ comme ΓΔ est à ΑΒ, comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (11. 5). Mais l'angle ΓΖΔ est égal à l'angle ΑΗΒ, et l'angle ΔΖΕ égal à l'angle ΒΗΘ; donc l'angle entier ΓΖΕ est égal à l'angle entier ΑΗΘ. Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΘ, l'angle en Γ égal à l'angle en Α, et l'angle en Ε égal à l'angle en Θ; donc les figures ΑΘ, ΓΕ sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels entr'eux; donc les deux figures ΑΘ, ΓΕ sont semblables (déf. 1. 6).

330 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Απὸ τῆς δεθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφεται τὸ ΑΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

A datâ igitur rectâ AB dato rectilineo ΓΕ simileque et similiter positum rectilincum descriptum est ΑΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

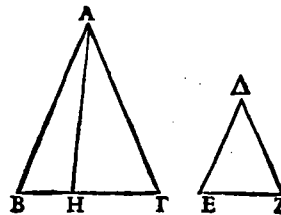
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσων ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε,

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similia triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualem habentia ipsum ad Β angulum ipsi ad Ε, ut



ὥς δὲ τὴν AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

autem AB ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, ita ut homologum sit ΒΓ ipsi ΕΖ; dico ΑΒΓ triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habere ejus quam ΒΓ ad ΕΖ.

Donc, sur la droite donnée AB, on a décrit la figure rectiligne ΑΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΓΕ, et semblablement placée. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

Soient les triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle en Β égal à l'angle en Ε, et que AB soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, de manière que le côté ΒΓ soit l'homologue du côté ΕΖ; je dis que le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἢ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Επεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Αλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων² ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡς δὲ, μίαν μὲν ἴσην ἔχοντων γωνίαν τριγώνων³, ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείναι· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· εἰ δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται⁴ ἢ περ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ

Sumatur enim ipsis ΒΓ, ΕΖ tertia proportionalis ΒΗ, ita ut sit ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; et jungatur ΗΑ.

Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; alterne igitur est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. Sed ut ΒΓ ad ΕΖ ita est ΕΖ ad ΒΗ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΕ ita ΕΖ ad ΒΗ; ipsorum igitur ΑΒΗ, ΔΕΖ triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos. Quorum autem unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; si autem tres rectæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; ΒΓ igitur ad ΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΑΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Æquale autem ΑΒΗ

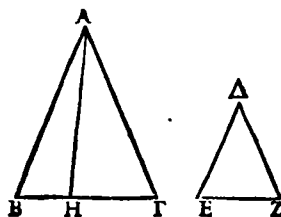
Prenons une troisième proportionnelle ΒΗ aux droites ΒΓ, ΕΖ, de manière que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; et joignons ΗΑ (11. 6).

Puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, par permutation, ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ (16. 6). Mais ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; donc ΑΒ est à ΔΕ comme ΕΖ est à ΒΗ (11. 5); donc les côtés des triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ, autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux, réciproquement proportionnels (15. 6); donc le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ. Et puisque ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ, et que lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle que la première a avec la seconde (10. 5), la droite ΒΓ a avec la droite ΒΗ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais ΒΓ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ (déf. 1. 6); donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΑΒΗ une raison double

332 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἰσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ⁶. καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἰξῆς.

triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ergo similia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἴστω ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον⁸ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπεὶ περὶ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τοῦτίστι τὸ ΔΕΖ⁹.

Ex hoc utique manifestum est, si tres rectæ proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ triangulum ad ipsum ex secundâ simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum, hoc est ΔΕΖ.

de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ; donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ (7. 5). Donc, etc.

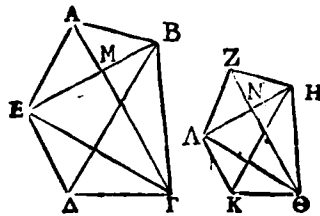
COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le triangle décrit sur la première est au triangle semblable décrit semblablement sur la seconde; puisqu'il a été démontré que ΓΒ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ, c'est-à-dire ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.'

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαι-
ρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς
ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον δι-
πλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ
πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ,
ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λήγω ὅτι τὰ



ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρί-
γωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμό-
λογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς
τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει
ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπιζεύθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Similia polygona in similia triangula divi-
duntur, et in æqualia multitudine et homo-
loga totis; et polygonum ad polygonum duplam
rationem habet ejus quam homologum latus ad
homologum latus.

Sint similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ho-
mologum vero sit ΑΒ ipsi ΖΗ; dico ΑΒΓΔΕ,

ΖΗΘΚΛ polygona et in similia triangula dividi
et in æqualia multitudine et homologa totis,
et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum
duplam rationem habere ejus quam ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

PROPOSITION XX.

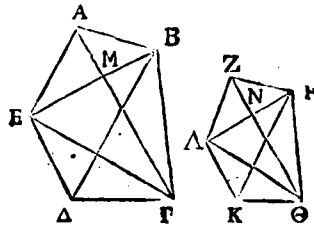
Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables,
égaux en nombre, et homologues aux polygones; et le polygone a avec le
polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté
homologue.

Soient les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que ΑΒ soit l'homologue de
ΖΗ; je dis que les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ peuvent être divisés en triangles
semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones, et que le po-
lygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que ΑΒ
a avec ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολυγώνων τῷ ΖΗΘΚΑ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μίαν γωνίαν ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοίον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη

Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum ipsi ΖΗΘΚΑ polygono, æqualis est ΒΑΕ angulus ipsi ΗΖΛ; et est ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΖΛ. Et quoniam duo triangula sunt ΑΒΕ, ΖΗΛ unum angulum uni angulo æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangulum igitur est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, quare et simile; æqualis igitur est ΑΒΕ angulus ipsi



ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γων-

ΖΗΛ. Est autem et totus ΑΒΓ toti ΖΗΘ æqualis, propter similitudinem polygonorum; reliquus igitur ΕΒΓ angulus reliquo ΛΗΘ est æqualis. Et quoniam propter similitudinem ipsorum ΑΒΕ, ΖΗΛ triangulorum, est ut ΕΒ ad ΒΑ ita ΛΗ ad ΗΖ, sed utique et propter similitudinem polygonorum, est ut ΑΒ ad ΒΓ, ita ΖΗ ad ΗΘ; ex æquo igitur est ut ΕΒ ad ΒΓ ita ΛΗ ad ΗΘ, et circa æquales angulos ΕΒΓ,

Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΑ, l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ; et ΒΑ est à ΑΕ comme ΖΗ est à ΖΛ. Mais les deux triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux proportionnels; donc les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont équiangles (6. 6), et par conséquent semblables (4. 6); donc l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle ΖΗΛ. Mais l'angle entier ΑΒΓ est égal à l'angle entier ΖΗΘ, à cause de la similitude des polygones; donc l'angle restant ΕΒΓ est égal à l'angle restant ΛΗΘ. Mais à cause de la similitude des triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ, ΕΒ est à ΒΑ comme ΛΗ est à ΗΖ, et à cause de la similitude des polygones, ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ; donc, par égalité, ΕΒ est à ΒΓ comme ΛΗ est à ΗΘ (22. 5);

νίας τὰς ὑπὸ $EB\Gamma$, $\Lambda\Theta$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν³. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $EB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Lambda\Theta\Theta$ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον ἔτι τὰ $EB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Lambda\Theta\Theta$ τριγώνῳ⁴. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ τρίγωνον ὁμοιον ἐστὶ τῷ $\Lambda\Theta\Theta$ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta\Lambda$ εἰς τε ὁμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ABE , $EB\Gamma$, $ΕΓΔ$, ἐπίμενα δὲ αὐτῶν τὰ ZHA , $\Lambda\Theta\Theta$, $\Lambda\Theta\Theta$, καὶ ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZH\Theta\Lambda$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ὁμόλογον πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH .

Ἐπεξέχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΖΘ$.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZH\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς $B\Gamma$ οὕτως ἡ ZH πρὸς $H\Theta$ · ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $ZH\Theta$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAG γωνία⁵ τῇ ὑπὸ $H\Theta Z$, ἡ δὲ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ ὑπὸ $H\Theta Z$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAM γωνία τῇ ὑπὸ HZN ,

$\Lambda\Theta\Theta$ latera proportionalia sunt; æquiangulum igitur est $EB\Gamma$ triangulum ipsi $\Lambda\Theta\Theta$ triangulo, quare et simile adhuc $EB\Gamma$ triangulum ipsi $\Lambda\Theta\Theta$ triangulo. Propter eadem utique et $ΕΓΔ$ triangulum simile est ipsi $\Lambda\Theta\Theta$ triangulo; ergo similia polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta\Lambda$ et in similia triangula dividuntur et in æqualia multitudine.

Dico et homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triangula, et antecedentia quidem sint ABE , $EB\Gamma$, $ΕΓΔ$, consequentia vero eorum ipsa ZHA , $\Lambda\Theta\Theta$, $\Lambda\Theta\Theta$, et $AB\Gamma\Delta E$ polygonum ad $ZH\Theta\Lambda$ polygonum duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, AB ad ZH .

Jungantur enim $ΑΓ$, $ΖΘ$.

Et quoniam propter similitudinem polygonorum æqualis est $AB\Gamma$ angulus ipsi $ZH\Theta$, et est ut AB ad $B\Gamma$ ita ZH ad $H\Theta$; æquiangulum est $AB\Gamma$ triangulum ipsi $ZH\Theta$ triangulo; æqualis igitur est quidem BAG angulus ipsi $H\Theta Z$, ipse vero $B\Gamma A$ ipsi $H\Theta Z$. Et quoniam æqualis est BAM angulus ipsi HZN , ostensum autem est et ABM

donc les côtés autour des angles égaux $EB\Gamma$, $\Lambda\Theta\Theta$ sont proportionnels; donc les triangles $EB\Gamma$, $\Lambda\Theta\Theta$ sont équiangles (6. 6); donc le triangle $EB\Gamma$ est semblable au triangle $\Lambda\Theta\Theta$. Le triangle $ΕΓΔ$ est semblable au triangle $\Lambda\Theta\Theta$, par la même raison (4. 6); donc les polygones semblables $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta\Lambda$ sont divisés en triangles semblables et égaux en nombre.

Je dis de plus que ces triangles sont homologues aux polygones, c'est-à-dire que ces triangles sont proportionnels, que les antécédents sont ABE , $EB\Gamma$, $ΕΓΔ$, et que leurs conséquents sont ZHA , $\Lambda\Theta\Theta$, $\Lambda\Theta\Theta$; et que de plus le polygone $AB\Gamma\Delta E$ a avec le polygone $ZH\Theta\Lambda$ une raison double de celle qu'un côté a avec un côté, c'est-à-dire de celle que AB a avec ZH .

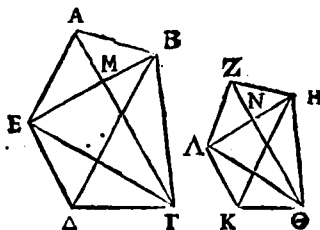
Joignons $ΑΓ$, $ΖΘ$.

Puisqu'à cause de la similitude des polygones, l'angle $AB\Gamma$ est égal à l'angle $ZH\Theta$, et que AB est à $B\Gamma$ comme ZH est à $H\Theta$, les triangles $AB\Gamma$, $ZH\Theta$ sont équiangles (6. 6); donc l'angle BAG est égal à l'angle $H\Theta Z$, et l'angle $B\Gamma A$ égal à l'angle $H\Theta Z$. Et puisque l'angle BAM est égal à l'angle HZN , et qu'il a été

336 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είδειχθη⁶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABM τῇ ὑπὸ ZHN ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ZNH ἴση ἐστίν⁷. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABM τρίγωνον τῷ ZHN τριγώνῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ BMΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ HNΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ AM πρὸς MB οὕτως ἡ ZN πρὸς NH, ὡς δὲ ἡ BM πρὸς MΓ οὕτως ἡ HN πρὸς NΘ· ὥστε καὶ διίστου, ὡς ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως ἡ ZN πρὸς NΘ. ΑΛΛ'

ipsi ZHN æqualis; et reliquus igitur AMB reliquo ZNH æqualis est; æquiangulum igitur est ABM triangulum ipsi ZHN triangulo. Similiter utique ostendemus et BMΓ triangulum æquiangulum esse ipsi HNΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut AM quidem ad MB ita ZN ad NH, ut vèro BM ad MΓ ita HN ad NΘ; quare et ex æquo ut AM ad MΓ ita ZN ad NΘ. Sed ut AM ad MΓ ita ABM triangulum ad



ὡς μὲν⁸ ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως τὸ ABM τρίγωνον πρὸς MBΓ, καὶ τὸ AME πρὸς EMΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα⁹ ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπομένα· ὡς ἄρα τὸ AMB τρίγωνον πρὸς τὸ BMΓ οὕτως τὸ ABE πρὸς τὸ ΓBE. ΑΛΛ' ὡς τὸ AMB πρὸς τὸ BMΓ οὕτως ἡ AM πρὸς MΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ

MBΓ, et AME ad EMΓ, inter se enim sunt ut bases; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur AMB triangulum ad BMΓ ita ABE ad ΓBE. Sed ut AMB ad BMΓ ita AM ad MΓ; et ut igitur AM ad MΓ ita ABE triangulum ad EBF triangulum. Propter eadem utique et ut ZN ad NΘ ita ZHA triangulum ad HΛΘ triangulum. Et est

démontré que l'angle ABM est égal à l'angle ZHN, l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ZNH (32. 1); donc les deux triangles ABM, ZHN sont équiangles. Nous démontrerons semblablement que les deux triangles BMR, HNΘ sont équiangles; donc AM est à MB comme ZN est à NH, et BM est à MΓ comme HN est à NΘ (4. 6); donc, par égalité, AM est à MΓ comme ZN est à NΘ (22. 5). Mais AM est à MΓ comme le triangle ABM est au triangle MBR, et comme le triangle AME est au triangle EMΓ, car ils sont entr'eux comme leurs bases (1. 6), et un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle AMB est au triangle BMR comme le triangle ABE est au triangle ΓBE. Mais AMB est à BMR comme AM est à MΓ; donc AM est à MΓ comme le triangle ABE est au triangle EBF (11. 5).

ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ¹⁰ ΗΑΘ τρίγωνον. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΑ τρίγωνον, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΑΘ τρίγωνον¹¹. Ομοίως δὴ δείξομεν, ἐπιχειρησῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΑΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον¹² πρὸς τὸ ΑΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον¹³ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΑΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ὑγούμενων πρὸς ἐν τῶν ὑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ὑγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ὑπομένα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον¹⁴ διπλάσιον λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλάσιον λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς

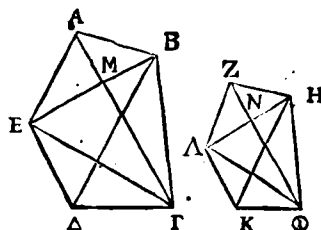
ut AM ad MG ita ZN ad NO; et ut igitur ABE triangulum ad BEG triangulum ita ZHA triangulum ad HOA triangulum, et alterne ut ABE triangulum ad ZHA triangulum ita BEG triangulum ad HOA triangulum. Similiter utique ostendemus, junctis BD, HK, et ut BEG triangulum ad HOA triangulum ita EGD triangulum ad AOK triangulum. Et quoniam est ut ABE triangulum ad ZHA ita EBF ad AHO, et insuper EGD ad AOK; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut ABE triangulum ad ZHA triangulum ita ABΓΔΕ polygonum ad ZHΘΚΑ polygonum. Sed ABE triangulum ad ZHA triangulum duplam rationem habet ejus quam AB homologum latus ad ZH homologum latus; Similia enim triangula in duplâ ratione sunt homologorum laterum; et ABΓΔΕ igitur polygonum ad ZHΘΚΑ polygonum duplam ra-

Par la même raison, ZN est à NO comme le triangle ZHA est au triangle ΗΑΘ. Mais AM est à MG comme ZN est à NO; donc le triangle ABE est au triangle BEΓ comme le triangle ZHA est au triangle ΗΘΑ (11. 5), et par permutation, le triangle ABE est au triangle ZHA comme le triangle BEΓ est au triangle ΗΑΘ (16. 5). Nous démontrerons semblablement, après avoir joint ΒΔ, ΗΚ, que le triangle BEΓ est au triangle ΗΑΘ comme le triangle ΕΓΔ est au triangle ΑΘΚ. Et puisque le triangle ABE est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΑΗΘ, et comme ΕΓΔ est à ΑΘΚ, un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle ABE est au triangle ΖΗΑ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΑ. Mais le triangle ABE a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que le côté homologue AB a avec le côté homologue ΖΗ; car les triangles semblables sont en raison double des côtés homologues; donc le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le

338 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὁμοῖα, καὶ τὰ ἰζήσ.

tionem habet ejus quam AB homologum latus ad ZH homologum latus. Ergo similia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ Α.

COROLLARIUM. I.

Ὡσαύτως δὲ¹⁵ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων διχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἴσθι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ¹⁶ καθόλου τὰ ὁμοῖα εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὅπερ ἴδει δείξαι¹⁷.

Similiter utique et in similibus quadrilateris ostendetur, ea in duplâ ratione esse homologorum laterum. Ostensum autem est et in triangulis; quare et universe similes rectilineæ figuræ inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum. Quod oportebat ostendere.

polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que le côté homologue ΑΒ a avec le côté homologue ΖΗ. Donc, etc.

COROLLAIRE I.

On démontrera de la même manière que les quadrilatères sont en raison double des côtés homologues; mais cela a été démontré pour les triangles semblables (cor. 19. 6); donc généralement les figures rectilignes semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

COROLLARIUM II.

Καὶ ἰὰν τῶν AB, ZH τρίτην ἀνάλογον λάβω-
μεν τὴν Ξ , ἡ AB πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον
ἔχει ἢ περ ἡ AB πρὸς τὴν ZH . Ἐχει δὲ καὶ τὸ
πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ¹⁸ τὸ τετρά-
πλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον
ἢ περ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλει-
ράν¹⁹, τοῦτίστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH . ἰδείχθη δὲ
τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθό-
λου φανερόν, ὅτι ἰὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον
ᾖσιν, ἴσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως
τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διευ-
τέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem Ξ
sumamus, AB ad Ξ duplam rationem habet ejus
quam AB ad ZH . Habet autem et polygonum
ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilate-
rum duplam rationem ejus quam homologum
latus ad homologum latus, hoc est AB ad
 ZH ; ostensum est autem hoc et in triangulis;
quare et universe manifestum est, si tres
rectæ proportionales sint, ut prima ad tertiam
ita futuram esse ipsam a primâ figuram ad ip-
sam a secundâ, similem et similiter descriptam.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Δείζομεν δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα
τὰ τρίγωνα.

Ostendemus utique et aliter expeditius ho-
mologa triangula.

COROLLAIRE II.

Si nous prenons une troisième proportionnelle Ξ aux droites AB, ZH , la droite AB aura avec Ξ une raison double de celle que AB a avec ZH (déf. 10. 5). Mais le polygone a avec le polygone, et le quadrilatère avec le quadrilatère une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire, de celle que AB a avec ZH ; et cela a été démontré pour les triangles; il est donc généralement évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et décrite semblablement sur la seconde.

AUTREMENT.

Nous démontrerons autrement et plus brièvement que les triangles sont homologues.

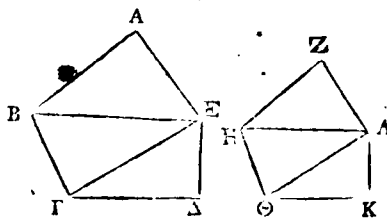
340 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκκεῖσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΑ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΗΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς

Expouantur enim rursus ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ polygona, et jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ; dico esse ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ et ΓΔΕ ad ΘΚΑ.

Quoniam enim simile est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΑ triangulo, ΑΒΕ igitur triangulum ad ΖΗΑ duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΑ. Propter eadem utique et ΕΒΓ triangulum ad ΑΗΘ



τὸ ΗΑΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΗΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον²⁰ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ, τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΓΕ πρὸς τὴν ΘΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΑ; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ. Rursus, quoniam simile est ΕΒΓ triangulum ipsi ΑΗΘ triangulo; ΕΒΓ igitur ad ΑΗΘ duplam rationem habet ejus quam ΓΕ recta ad ΘΑ. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum ad ΑΘΚ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΓΕ ad ΘΑ; est igitur ut ΕΒΓ triangulum ad ΑΗΘ ita ΕΓΔ ad

Soient les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, et joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ; je dis que le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΑΗΘ, et comme ΓΔΕ est à ΘΚΑ.

Puisque les triangles ΑΒΕ, ΖΗΑ sont semblables, le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΑ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΗΑΘ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΑ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le triangle ΕΒΓ est au triangle ΑΗΘ (11. 5). De plus, puisque le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΑΗΘ, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΑΗΘ une raison double de celle que la droite ΓΕ a avec ΘΑ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΓΔ a avec le triangle ΑΘΚ une raison double de celle que ΓΕ a avec ΘΑ; donc le

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 341

πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Εδεί-
χθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ
ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς
τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ
πρὸς τὸ ΛΘΚ²¹. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΛΘΚ. Ostensum est autem et ut ΕΒΓ ad ΛΗΘ
ita ΑΒΕ ad ΖΗΛ; et ut igitur ΑΒΕ ad ΖΗΛ ita
ΒΕΓ ad ΗΛΘ et ΕΓΔ ad ΛΘΚ. Quod oportebat
ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

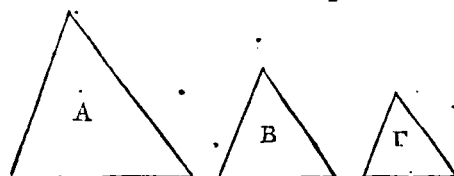
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις
ἴσῃν ὅμοια.

Ἐστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων
τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἴσῃν
ὅμοιον.

PROPOSITIO XXI.

Ipsa eidem rectilineo similia, et inter se
sunt similia.

Sit enim utrumque ipsorum Α, Β rectili-
neorum ipsi Γ simile; dico et Α ipsi Β esse
simile.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιον ἴσῃ τὸ Α τῷ Γ, ἰσχυρίον
τε ἴσῃν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας
πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιον ἴσῃ

Quoniam enim est simile Α ipsi Γ, et
æquiangulum est ipsi, et circa æquales an-
gulos latera proportionalia habet. Rursus, quo-

triangle ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ (11. 5). Mais on a démontré que
ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΑΒΕ est à ΖΗΛ; donc ΑΒΕ est à ΖΗΛ comme ΒΕΓ est à
ΗΛΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Les figures rectilignes semblables à une même figure sont semblables
entr'elles.

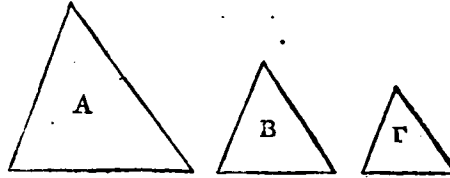
Que chacune des figures rectilignes Α, Β soit semblable à la figure Γ; je
dis que la figure Α est semblable à la figure Β.

Car, puisque la figure Α est semblable à la figure Γ, ces deux figures sont
équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (déf. 1. 6).

342 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς
περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει·
ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιον τε ἐστὶ

niam similē est B ipsi Γ, et æquiangulum est
ipsi, et circa æquales angulos latera propor-
tionalia habet; utrumque igitur ipsorum Α,



καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον
ἔχει². Ομοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Ὅπερ εἶδει
δειξαι.

B ipsi Γ et æquiangulum est et circa æquales
angulos latera proportionalia habet. Simile igitur
est Α ipsi Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, καὶ τὰ ἀπ'
αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀνα-
γεγραμμένα, ἀνάλογον ἴσται· καὶ τὰ ἀπ' αὐ-
τῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγε-
γραμμένα ἀνάλογον ᾦ, καὶ αὗται αἱ εὐθεῖαι
ἀνάλογον ἴσονται.

Si quatuor rectæ proportionales sint, et ab
ipsis rectilinea, similiaque et similiter descripta,
proportionalia erunt; et si ab ipsis rectilinea
similiaque et similiter descripta proportionalia
sint, et ipsæ rectæ proportionales erunt.

De plus, puisque la figure B est semblable à la figure Γ, ces deux figures
sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels;
donc chacune des figures Α, Β est équiangle avec la figure Γ, et elles ont
les côtés autour des angles égaux proportionnels. Donc la figure Α est sem-
blable à la figure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

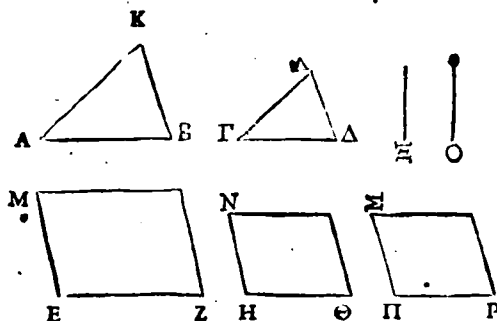
PROPOSITION XXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et
semblablement construites sur ces droites, seront proportionnelles; et si des
figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont
proportionnelles, ces mêmes droites seront proportionnelles.

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 343

Ἐστωσαν τίσταρις εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , ΓA , EZ , $H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν AB , ΓA ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ KAB , $\Lambda\Gamma A$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ MZ , $N\Theta$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma A$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.

Sint quatuor rectæ proportionales AB , ΓA , EZ , $H\Theta$, ut AB ad ΓA ita EZ ad $H\Theta$, et describantur ab ipsis quidem AB , ΓA similiaque et similiter posita rectilinea KAB , $\Lambda\Gamma A$, ab ipsis vero EZ , $H\Theta$ similiaque et similiter posita rectilinea MZ , $N\Theta$; dico esse ut KAB ad $\Lambda\Gamma A$ ita MZ ad $N\Theta$.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AB , ΓA τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ , τῶν δὲ EZ , $H\Theta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ O . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ὡς δὲ ΓA πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ $H\Theta$ πρὸς τὴν O . διίσου ἀρεῖ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν O . ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB

Sumatur enim ipsis quidem AB , ΓA tertia proportionalis Ξ , ipsis vero EZ , $H\Theta$ tertia proportionalis O . Et quoniam est ut AB quidem ad ΓA ita EZ ad $H\Theta$, ut ΓA vero ad Ξ ita $H\Theta$ ad O ; ex æquo igitur est ut AB ad Ξ ita EZ ad O . Sed ut AB quidem ad Ξ ita KAB ad

Soient AB , ΓA , EZ , $H\Theta$ quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à ΓA comme EZ est à $H\Theta$; soient décrites sur les droites AB , ΓA les figures rectilignes semblables et semblablement placées KAB , $\Lambda\Gamma A$, et sur les droites EZ , $H\Theta$, les figures semblables et semblablement placées MZ , $N\Theta$; je dis que KAB est à $\Lambda\Gamma A$ comme MZ est à $N\Theta$.

Prenons une troisième proportionnelle Ξ aux droites AB , ΓA , et une troisième proportionnelle O aux droites EZ , $H\Theta$ (11. 6). Puisque AB est à ΓA comme EZ est à $H\Theta$, et que ΓA est à Ξ comme $H\Theta$ est à O , par égalité, AB est à Ξ comme EZ est à O (22. 5). Mais AB est à Ξ comme KAB est

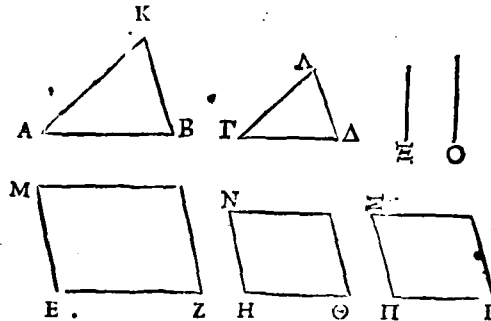
344 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ² KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὥς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ³ ὥς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΗΘ.

ΛΓΔ, ut EZ vero ad O ita MZ ad NΘ; et ut igitur KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad NΘ.

Sed et sit ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad NΘ; dico esse et ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως EZ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω⁵ ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῃ τῶν MZ, ΝΘ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφται ἀπὸ μὲν τῶν AB, ΓΔ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, ΠΡ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως

Si enim non est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ, sit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ, et describatur a ΠΡ alterutri ipsorum MZ, ΝΘ simileque et similiter positum rectilineum ΣΡ.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ, et descripta sunt ab ipsis quidem AB, ΓΔ, similiaque et similiter posita KAB, ΛΓΔ, ab ipsis vero EZ, ΠΡ, similiaque et similiter posita

ἀ ΛΓΔ (cor. 2. prop. 20. 6), et EZ est à O comme MZ est à ΝΘ; donc KAB est à ΛΓΔ comme MZ est à ΝΘ (11. 5).

Mais que KAB soit à ΛΓΔ comme MZ est à ΝΘ; je dis que AB est à ΓΔ comme EZ est à ΗΘ.

Car si AB n'est pas à ΓΔ comme EZ est à ΗΘ, que AB soit à ΓΔ comme EZ est à ΠΡ (12. 6), et sur ΠΡ décrivons la figure rectiligne ΠΡ de manière qu'elle soit semblable à chacune des figures MZ, ΝΘ, et semblablement placée (18. 6).

Puisque AB est à ΓΔ comme EZ est à ΠΡ, que les figures KAB, ΛΓΔ décrites sur AB, ΓΔ sont semblables et semblablement placées, et que les figures

κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ⁶. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἢ⁸ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΜΖ, ΣΡ; est igitur ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΣΡ. Ponitur autem et ut ΚΑΒ ad ΛΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ; et ut igitur ΜΖ ad ΣΡ ita ΜΖ ad ΝΘ; ergo ΜΖ ad utrumque ipsorum ΝΘ, ΣΡ eandem habet rationem; æquale igitur est ΝΘ ipsi ΣΡ. Est autem ipsi simile et similiter positum; æqualis igitur ΗΘ ipsi ΠΡ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, æqualis autem ΠΡ ipsi ΗΘ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΗΘ. Si igitur quatuor, etc.

ΛΗΜΜΑ.

ΟΤΙ δὲ, εἰν εὐθύγραμμα ἴσα ἢ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι. ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Εστώ ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

LEMMA.

Si autem rectilinea æqualia sint et similia, homologa ipsorum latera æqualia inter se esse, sic ostendemus.

Sint æqualia et similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ, et sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ; dico æqualem esse ΡΠ ipsi ΘΗ.

ΜΖ, ΣΡ décrites sur les droites ΕΖ, ΠΡ sont semblables et semblent placées, la figure ΚΑΒ est à la figure ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΣΡ. Mais on a supposé que ΚΑΒ est à ΛΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc ΜΖ est à ΣΡ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc la figure ΜΖ a la même raison avec chacune des figures ΝΘ, ΣΡ (11. 5); donc la figure ΝΘ est égale à la figure ΣΡ (9. 5). Mais elle lui est semblable, et elle est semblablement placée; donc ΗΘ est égal à ΠΡ (lem. suiv.). Et puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ, et que ΠΡ est égal à ΗΘ, ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΗΘ (7. 5). Donc, etc.

LEMME.

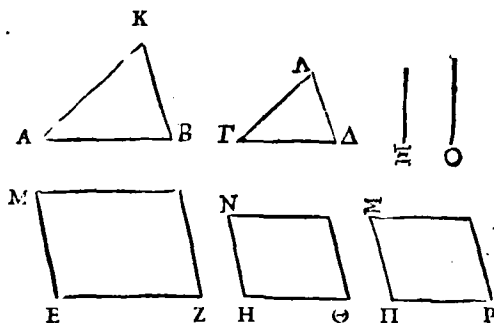
Si des figures rectilignes sont égales et semblables, nous démontrerons de cette manière que leurs côtés homologues sont égaux entr'eux.

Que les figures rectilignes ΝΘ, ΣΡ soient égales et semblables, et que ΗΘ soit à ΗΝ comme ΡΠ est à ΠΣ; je dis que ΡΠ est égal à ΘΗ.

346 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ ἀνισοείσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν.
Εστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ
ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ,
καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ
πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων

Si enim inæquales sint, una ipsarum
major est. Sit major ΡΠ ipsâ ΘΗ. Et quo-
niam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ, et
alterne ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. Major
autem ΠΡ ipsâ ΘΗ; major igitur et ΠΣ ipsâ



ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον
ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον·
οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ, ἴση ἄρα.
Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΝ; quare et ΡΣ majus est ipso ΘΝ; sed et
æquale, quod est impossibile; non igitur inæ-
qualis est ΠΡ ipsi ΘΗ, æqualis igitur. Quod
oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα
λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Æquiangula parallelogramma inter se ratio-
nem habent compositam ex lateribus.

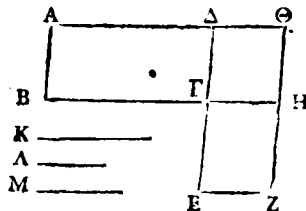
Car si ces droites sont inégales, une d'elles est plus grande. Que ΡΠ soit plus grand que ΘΗ. Puisque ΡΠ est à ΠΣ comme ΘΗ est à ΗΝ, par permutation, ΡΠ est à ΘΗ comme ΠΣ est à ΗΝ (16. 5). Mais ΠΡ est plus grand que ΘΗ; donc ΠΣ est plus grand que ΗΝ; donc la figure ΡΣ est plus grande que la figure ΘΝ (20. 6); mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc les droites ΠΡ, ΗΘ ne sont pas inégales; donc elles sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Εστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσιν ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ'.

Sint æquiaugula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum ipsi ΕΓΗ; dico ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum rationem habere compositam ex lateribus, ex eâ quam habet ΒΓ ad ΓΗ et ex eâ quam habet ΔΓ ad ΓΕ.



Κεῖσθαι γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοὶ εἰσὶ τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Αλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς

Ponantur enim ita ut in directum sit ΒΓ ipsi ΓΗ; in directum igitur est et ΔΓ ipsi ΓΕ; et compleatur ΔΗ parallelogrammum, et exponatur quædam recta Κ, et fiat ut ΒΓ quidem ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut ΔΓ vero ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

Rationes igitur et ipsius Κ ad Λ et ipsius Λ ad Μ eædem sunt quæ rationes laterum, et ipsius ΒΓ ad ΓΗ et ipsius ΔΓ ad ΓΕ. Sed ipsius Κ ad Μ ratio componitur et ex ratione ipsius Κ ad Λ et ex ratione ipsius Λ ad Μ;

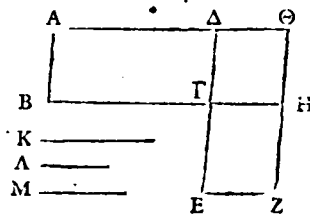
Soient les parallélogrammes équiangles ΑΓ, ΓΖ, ayant l'angle ΒΓΔ égal à l'angle ΕΓΗ; je dis que le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés, c'est-à-dire de celle que ΒΓ a avec ΓΗ, et de celle que ΔΓ a avec ΓΕ.

Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite ΒΓ soit dans la direction de la droite ΓΗ; la droite ΔΓ sera dans la direction de ΓΕ (14. 1). Achévon le parallélogramme ΔΗ; prenons une droite quelconque Κ; faisons en sorte que ΒΓ soit à ΓΗ comme Κ est à Λ, et que ΔΓ soit à ΓΕ comme Λ est à Μ (12. 6). Les raisons de Κ à Λ et de Λ à Μ seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est-à-dire que celle de ΒΓ à ΓΗ et que celle de ΔΓ à ΓΕ. Mais la raison de Κ à Μ est composée de celle de Κ à Λ, et de celle de Λ à

348 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὴν M^2 . ἄσπε καὶ ἡ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τὸν συγχείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$. ἀλλ' ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως ἡ K πρὸς τὴν $Λ$ καὶ ὡς ἄρα ἡ K πρὸς τὴν $Λ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΘ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$. ἀλλ' ὡς ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$

quare et K ad M rationem habet compositam ex lateribus. Et quoniam est ut $BΓ$ ad $ΓΗ$ ita $ΑΓ$ parallelogrammum ad $ΓΘ$; sed ut $BΓ$ ad $ΓΗ$ ita K ad $Λ$; et ut igitur K ad $Λ$ ita $ΑΓ$ ad $ΓΘ$. Rursus, quoniam est ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita $ΓΘ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$; sed ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita $Λ$ ad M ; et ut igitur $Λ$ ad M ita $ΓΘ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$ parallelogrammum.



οὕτως ἡ $Λ$ πρὸς τὴν M καὶ ὡς ἄρα ἡ $Λ$ πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ K πρὸς τὴν $Λ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ $Λ$ πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον³. διότου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ K πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον⁴. Ἡ δὲ K πρὸς τὴν M

Quoniam igitur ostensum est ut K quidem ad $Λ$ ita $ΑΓ$ parallelogrammum ad $ΓΘ$ parallelogrammum, ut $Λ$ vero ad M ita $ΓΘ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$ parallelogrammum; ex æquo igitur est ut K ad M ita $ΑΓ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$ parallelogrammum. At vero K ad M rationem habet compositam ex lateribus; et $ΑΓ$ igitur ad $ΓΖ$ rationem ha-

M ; donc la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés. Et puisque $BΓ$ est à $ΓΗ$ comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΘ$ (1. 6), et que $BΓ$ est à $ΓΗ$ comme K est à $Λ$, K est à $Λ$ comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΘ$ (11. 5). De plus, puisque $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme le parallélogramme $ΓΘ$ est au parallélogramme $ΓΖ$, et que $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme $Λ$ est à M (1. 6), $Λ$ est à M comme le parallélogramme $ΓΘ$ est au parallélogramme $ΓΖ$ (11. 5). Mais on a démontré que K est à $Λ$ comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΘ$, et $Λ$ est à M comme le parallélogramme $ΓΘ$ est au parallélogramme $ΓΖ$; donc, par égalité, K est à M comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΖ$ (22. 5). Mais la

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 349

λόγον ἔχει τὴν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ
ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ
τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια, καὶ τὰ ἐξῆς.

bet compositam ex lateribus. Ergo aequian-
gula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

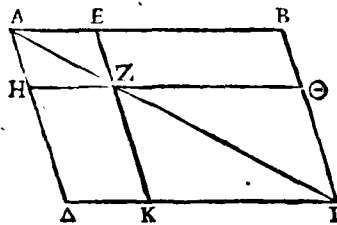
PROPOSITIO XXIV.

Παντὸς παραλληλόγραμμου τὰ περὶ τὴν διά-
μετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε
ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Omnis parallelogrammi circa diametrum pa-
rallelogramma similia sunt et toti et inter se.

Ἐστὼ παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμε-
τρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλλη-
λόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἐκάτερον
τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὁμοίον ἐστὶν
ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter au-
tem ejus ipsa ΑΓ, circa ΑΓ autem parallelo-
gramma sint ΕΗ, ΘΚ; dico utrumque ipsorum
ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum simile esse toti
ΑΒΓΔ et inter se.



Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν
πλευρῶν τὴν ΒΓ ἤκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς

Quoniam enim trianguli ΑΒΓ juxta unum
laterum ΒΓ ducta est ΕΖ, proportionaliter est

droite K a avec la droite M une raison composée des côtés; donc le parallé-
gramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés.
Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes autour de la diagonale
sont semblables au parallélogramme entier et semblables entr'eux.

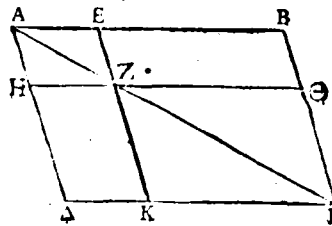
Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de la
diagonale ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ; je dis que les parallélogrammes
ΕΗ, ΘΚ sont semblables au parallélogramme entier ΑΒΓΔ, et semblables entr'eux.

Puisqu'on a mené ΕΖ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite

350 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ BE πρὸς τὴν EA οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν² τὴν ΓΔ ἤκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα³ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. Αλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως εἰδείχθη καὶ ἡ BE πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντε-
θέντι⁵ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν⁶ ΑΗ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς

ut BE ad EA ita ΓΖ ad ΖΑ. Rursus, quoniam trianguli ΑΓΔ juxta unum laterum ΓΔ ducta est ΖΗ, proportionaliter igitur est ut ΓΖ ad ΖΑ ita ΔΗ ad ΗΑ. Sed ut ΓΖ ad ΖΑ ita os- tensa est et BE ad ΕΑ; et ut igitur BE ad ΕΑ ita ΔΗ ad ΗΑ, et per compositionem, ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΑ ad ΑΗ, et alterne ut ΒΑ ad ΔΑ ita ΕΑ ad ΑΗ; ipsorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ parallelogrammorum proportionalia sunt latera



τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ⁸, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΑΓΒ

circa communem angulum ΒΑΔ. Et quoniam parallela est ΗΖ ipsi ΔΓ, æqualis est ipse quidem ΑΗΖ angulus ipsi ΑΔΓ, ipse vero ΗΖΑ ipsi ΔΓΑ, et communis duobus triangulis ΑΔΓ, ΑΗΖ ipse ΔΑΓ angulus; æquiangulum igitur est ΑΔΓ triangulum ipsi ΑΗΖ triangulo. Propter eadem utique et ΑΓΒ triangulum æquiangulum est ipsi ΑΖΕ triangulo; et totum igitur ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΗ parallelo-

BE est à EA comme ΓΖ est à ΖΑ (2. 6). De plus, puisqu'on a mené ΖΗ parallèle à un des côtés ΓΔ du triangle ΑΓΔ, la droite ΓΖ est à ΖΑ comme ΔΗ est à ΗΑ. Mais on a démontré que ΓΖ est à ΖΑ comme BE est à ΕΑ; donc BE est à ΕΑ comme ΔΗ est à ΗΑ (11. 5); et par composition, ΒΑ est à ΑΕ comme ΔΑ est à ΑΗ (18. 5), et par permutation, ΒΑ est à ΔΑ comme ΕΑ est à ΑΗ (16. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ autour de l'angle commun ΒΑΔ sont proportionnels. Et puisque ΗΖ est parallèle à ΔΓ, l'angle ΑΗΖ est égal à l'angle ΑΔΓ (29. 1), et l'angle ΗΖΑ égal à l'angle ΔΓΑ; mais l'angle ΔΑΓ est commun aux deux triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ; donc les triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ sont équi-

τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ AZE τρίγωνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἐστίν· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AD πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ AH πρὸς τὴν HZ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA, ὡς δὲ ἡ AG πρὸς τὴν ΓB οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ZE, καὶ ἔτι ὡς ἡ¹⁰ ΓB πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ ZE πρὸς τὴν EA· καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA, ὡς δὲ ἡ AG πρὸς τὴν ΓB οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ZE· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZE· τῶν ἄρα ABΓΔ, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ¹¹ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστίν· ἐκεί-
τερον ἄρα τῶν EH, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ABΓΔ παραλληλογράμμῳ¹² ὁμοίον ἐστὶ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ EH ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστὶ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἑς.

grammo æquiangulum est; proportionaliter igitur est ut AD ad ΔΓ ita AH ad HZ. Ut autem ΔΓ ad ΓΑ ita HZ ad ZA, ut AG vero ad ΓB ita AZ ad ZE, et insuper ut GB ad BA ita ZE ad EA; et quoniam ostensum est ut ΔΓ quidem ad ΓΑ ita HZ ad ZA, ut AG vero ad ΓB ita AZ ad ZE; ex æquo igitur est ut ΔΓ ad BΓ ita HZ ad ZE. Ipsorum igitur ABΓΔ, EH parallelogrammorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; simile igitur est ABΓΔ parallelogrammum ipsi EH parallelogrammo. Propter eadem utique et ABΓΔ parallelogrammum et ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est; utrumque igitur ipsorum EH, ΘΚ parallelogrammorum ipsi ABΓΔ parallelogrammo simile est. Ipsa autem eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia; et EH igitur parallelogrammum ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est. Omnis igitur, etc.

angles. Les triangles AGB, AZE sont équiangles, par la même raison; donc le parallélogramme entier ABΓΔ, et le parallélogramme EH sont équiangles; donc AD est à ΔΓ comme AH est à HZ (4. 6). Mais ΔΓ est à ΓΑ comme HZ est à ZA, et AG est à ΓB comme AZ est à ZE, de plus, GB est à BA comme ZE est à EA, et l'on a démontré que ΔΓ est à ΓΑ comme HZ est à ZA, et que AG est à ΓB comme AZ est à ZE; donc, par égalité, ΔΓ est à BΓ comme HZ est à ZE (22. 5); donc les côtés des parallélogrammes ABΓΔ, EH, autour des angles égaux, sont proportionnels; donc le parallélogramme ABΓΔ est semblable au parallélogramme EH (déf. 1. 6). Le parallélogramme ABΓΔ est semblable au parallélogramme ΘΚ, par la même raison; donc chacun des parallélogrammes EH, ΘΚ est semblable au parallélogramme ABΓΔ. Mais les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont semblables entr'elles (21. 6); donc le parallélogramme EH est semblable au parallélogramme ΘΚ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

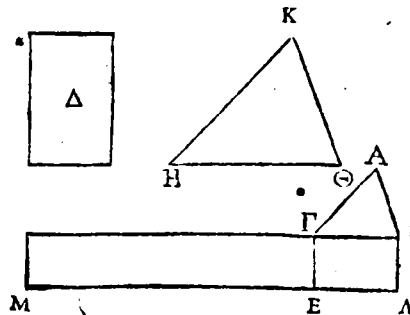
PROPOSITIO XXV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὁμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ. δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὁμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, ipsum ΑΒΓ, cui vero oportet æquale ipsum Δ; oportet igitur ipsi quidem ΑΒΓ simile, ipsi vero Δ æquale idem constituere.



Παραβιβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστίν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΑ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΑΕ

Applicetur enim ad ipsam quidem ΒΓ ipsi ΑΒΓ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕ, ad ipsam vero ΓΕ ipsi Δ æquale parallelogrammum ΓΜ in angulo ΖΓΕ, qui est æqualis ipsi ΓΒΑ; in directum igitur est ΒΓ quidem

PROPOSITION XXV.

Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Soit ΑΒΓ la figure rectiligne donnée, à laquelle il faut construire une figure semblable, et Δ la figure rectiligne à laquelle il faut la faire égale; il faut construire une figure qui soit semblable à la figure ΑΒΓ et égale à la figure Δ.

Construisons sur ΒΓ un parallélogramme ΒΕ qui soit égal au triangle ΑΒΓ (44 et 45. 1), et sur ΓΕ et dans l'angle ΖΓΕ qui est égal à l'angle ΓΒΑ, construisons un parallélogramme ΓΜ qui soit égal à la figure Δ; la droite ΒΓ sera dans la direction de ΓΖ, et ΑΕ dans la direction de ΕΜ (14. 1). Prenons

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 353

τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὁμοίον τι καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἔστιν³ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον⁴. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἰσὺν δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμῳ· ἴσων ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἔστιν ἴσον· καὶ

ipsi ΓΖ, ipsa vero ΑΕ ipsi ΕΜ. Et sumatur inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, et describatur ex ΗΘ ipsi ΑΒΓ simileque et similiter positum ipsum ΚΗΘ.

Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ proportionales sint, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figura ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; est igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum. Sed et ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; et ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; alterne igitur ut ΑΒΓ triangulum ad ΒΕ parallelogrammum ita ΚΗΘ triangulum ad ΕΖ parallelogrammum. Æquale autem ΑΒΓ triangulum ipsi ΒΕ parallelogrammo; æquale igitur et ΚΗΘ triangulum ipsi ΕΖ parallelogrammo. Sed ΕΖ parallelogrammum ipsi Δ est æquale; et ΚΗΘ igitur ipsi Δ est æquale. Est autem ΚΗΘ et ipsi ΑΒΓ simile; ipsi igitur dato

une moyenne proportionnelle ΗΘ entre les droites ΒΓ, ΓΖ (13. 6), et sur ΗΘ construisons une figure ΚΗΘ semblable à la figure ΑΒΓ et semblablement placée (18. 6).

Puisque ΒΓ est à ΗΘ comme ΗΘ est à ΓΖ, et puisque, lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable construite sur la seconde, et semblablement placée (cor. 2. prop. 20. 6), la droite ΒΓ est à la droite ΓΖ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ. Mais ΒΓ est à ΓΖ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ (1. 6); donc le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ; donc, par permutation, le triangle ΑΒΓ est au parallélogramme ΒΕ comme le triangle ΚΗΘ est au parallélogramme ΕΖ (16. 5). Mais le triangle ΑΒΓ est égal au parallélogramme ΒΕ; donc le triangle ΚΗΘ est égal au parallélogramme ΕΖ. Mais le parallélogramme ΕΖ est égal à la figure Δ; donc le triangle ΚΗΘ est égal à la figure Δ.

354 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἴστί· ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

rectilineo ΑΒΓ simile, et alteri dato Δ æquale idem constitutum est ΚΗΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

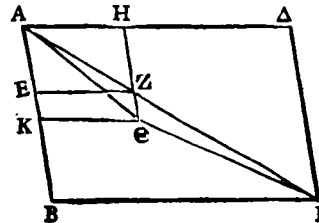
Εὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ παραλληλογράμμου γάρ· τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφαιρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον

PROPOSITIO XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, et simile toti et similiter positum, communem angulum habens cum ipso, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum auferatur ΑΕΖΗ, simile ipsi ΑΒΓΔ



τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

et similiter positum, communem angulum habens ΔΑΒ cum ipso; dico circa eandem diametrum esse ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΑΕΖΗ.

Mais le triangle ΚΗΘ est semblable au triangle ΑΒΓ; on a donc construit la figure ΚΗΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΑΒΓ, et égale à une autre figure donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.

Que du parallélogramme ΑΒΓΔ on retranche le parallélogramme ΑΕΖΗ, semblable au parallélogramme ΑΒΓΔ et semblablement placé, et ayant avec lui l'angle commun ΔΑΒ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est autour de la même diagonale que le parallélogramme ΑΕΖΗ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διά-
μετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ
τὸ Θ³, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ
παράλληλος ἡ ΘΚ.

Επεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ
ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ⁵.
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ
πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα
τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ, καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕ-
τως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς
τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα⁷
πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·
ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι,
ἧπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ⁸ ἔστι περὶ τὴν
αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐ-
τὴν ἄρα ἔστι διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλό-
γραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ. Εὰν ἄρα
ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Non enim, sed si possibile, sit ipsius
diameter ΑΘΓ, et ejecta ΗΖ producat ad Θ,
et ducatur per Θ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ
parallela ΘΚ.

Quoniam igitur circa eandem diametrum
est ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ, si-
mile est ΑΒΓΔ ipsi ΚΗ; est igitur ut ΔΑ ad
ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. Est autem et propter simi-
litudinem ipsorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, et ut ΔΑ ad ΑΒ
ita ΗΑ ad ΑΕ; et ut igitur ΗΑ ad ΑΚ ita ΗΑ ad
ΑΕ; ipsa ΗΑ igitur ad utramque ipsarum ΑΚ,
ΑΕ eandem habet rationem; æqualis igitur est
ΑΕ ipsi ΑΚ, minor majori, quod est impossi-
bile; non igitur non est circa eandem diame-
trum ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ; circa
eandem igitur est diametrum ipsum ΑΒΓΔ
parallelogrammum quam ΑΕΖΗ parallelogram-
mum. Si igitur a parallelogrammo, etc.

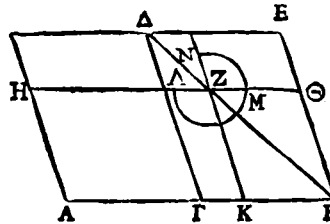
Que cela ne soit point, mais, si cela est possible, que ΑΘΓ soit sa diagonale;
prolongeons ΗΖ vers Θ, et par le point Θ menons ΘΚ parallèle à l'une ou
à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ.

Puisque les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ sont autour de la même diagonale,
le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΚΗ (24. 6); donc
ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΚ (déf. 1. 6). Mais à cause de la similitude
des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ, la droite ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΕ;
donc ΗΑ est à ΑΚ comme ΗΑ est à ΑΕ (11. 5); donc ΗΑ a la même raison
avec chacune des droites ΑΚ, ΑΕ; donc ΑΕ est égal à ΑΚ (9. 5), le plus
petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ,
ΚΗ ne peuvent point ne pas être autour de la même diagonale; donc les pa-
rallélogrammes ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ sont autour de la même diagonale. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παρα-
βαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόν-
των εἶδει παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ
ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγρα-
φομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας
παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον δὲν
τῷ ἑλλείμματι.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τοιμήσθω δίχα κατὰ
τὸ Γ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αὐτὴν AB
εὐθεῖαν τὸ AD παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει



παραλληλογράμμῳ τῷ GE , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως
κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφίντι τῷ E
 AB^2 , τοῦτίστι τῆς GB · λέγω ὅτι πάντων τῶν

Omnium ad eandem rectam applicatorum
parallelogammorum et deficientium figuris
parallelogrammis, similibusque et similiter
positis ipsi ex dimidiâ descripto, maximum
est ipsum ad dimidiam applicatum parallelo-
grammum, simile existens defectui.

Sit recta AB , et secetur bifariam in Γ , et
applicetur ad eandem AB rectam ipsum AD
parallelogammum deficiens figurâ parallelo-

grammâ GE , similique et similiter positâ ei ex
dimidiâ AB descriptæ, hoc est ex ipsâ GB ; dico
omnium ad AB applicatorum parallelogam-

PROPOSITION XXVII.

De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite, et qui sont défailants de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite, et semblablement placés, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut.

Soit la droite AB ; que cette droite soit coupée en deux parties égales au point Γ , et qu'à la droite AB soit appliqué le parallélogramme AD , défailant du parallélogramme GE , semblable à celui qui est décrit sur la moitié de la droite AB , c'est-à-dire sur GB , et semblablement placé; je dis que de tous les parallélo-

παρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδει παραλληλογράμμοις³ ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓΕ, μίγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβελήσθω γὰρ παρὰ τὴν AB εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμου τῷ ΚΘ, ὁμοίω τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μείζον ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Επεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἶσι διάμετρον. Ἡχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ⁴. ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλον τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν⁵. καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον⁶. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΑΜΝ γνῶμονί ἐστιν ἴσον⁷. ὥστε τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτίστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μείζον ἐστίν.

morum, et deficientium figuris parallelogrammis similibusque et similiter positis ipsi ΓΕ, maximum esse ΑΔ. Applicetur enim ad AB rectam ipsum ΑΖ parallelogrammum, deficiens figurâ parallelogrammâ ΚΘ, similique et similiter positâ ipsi ΓΕ; dico majus esse ΑΔ ipso ΑΖ.

Quoniam simile enim est ΓΕ parallelogrammum ipsi ΚΘ parallelogrammo, circa eandem sunt diametrum. Ducatur eorum diameter ΔΒ, det escribatur figura.

Quoniam igitur æquale est ΓΖ ipsi ΖΕ, commune addatur ΚΘ; totum igitur ΓΘ toti ΚΕ est æquale. Sed ΓΘ ipsi ΓΗ est æquale, quoniam et ipsa ΑΓ ipsi ΓΒ æqualis est; et ΗΓ igitur ipsi ΕΚ est æquale. Commune addatur ΓΖ; totum igitur ΑΖ ipsi ΑΜΝ gnomoni est æquale; quare et ΓΕ parallelogrammum, hoc est ΑΔ, ipso ΑΖ parallelogrammo majus est.

grammes qui sont appliqués à la droite ΑΒ, et qui sont défailants de parallélogrammes semblables au parallélogramme ΓΕ, et semblablement placés, le plus grand est le parallélogramme ΑΔ. Car appliquons à la droite ΑΒ le parallélogramme ΑΖ, défailant du parallélogramme ΚΘ semblable au parallélogramme ΓΕ, et semblablement placé; je dis que le parallélogramme ΑΔ est plus grand que le parallélogramme ΑΖ.

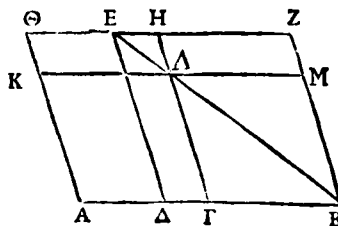
Car puisque le parallélogramme ΓΕ est semblable au parallélogramme ΚΘ, ces deux parallélogrammes sont placés autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΔΒ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΓΖ est égal au parallélogramme ΖΕ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun ΚΘ; le parallélogramme entier ΓΘ sera égal au parallélogramme entier ΚΕ. Mais ΓΘ est égal à ΓΗ (36. 1), parce que la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ; donc ΗΓ est égal à ΕΚ. Ajoutons le parallélogramme commun ΓΖ, le parallélogramme entier ΑΖ sera égal au gnomon ΑΜΝ; donc le parallélogramme ΓΕ, c'est-à-dire le parallélogramme ΑΔ, est plus grand que le parallélogramme ΑΖ (36. 1).

358 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ πάλιν ἡ AB τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβληθὲν τὸ AA ἐλλειπὸν εἶδει τῷ GM , καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἐλλειπὸν τῷ AZ , ὁμοίω τε καὶ ὁμοίως κειμένω τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB , τῷ GM . λέγω ὅτι μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς⁸ ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AA τοῦ AE .

Sit enim rursus AB secta bifariam in Γ , et applicatum ipsum AA , deficiens figurâ GM , et applicetur rursus ad AB ipsum AE parallelogrammum, deficiens ipso AZ , similique et similiter posito ipsi GM ex dimidiâ AB ; dico majus esse ipsum ad dimidiam applicatum AA ipso AE .



Ἐπεὶ γάρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ AZ τῷ GM , περὶ τὴν αὐτὴν εἶσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB , καὶ καταγεγράψω τὸ σχῆμα.

Quoniam enim simile est AZ ipsi GM , circa eandem sunt diametrum; sit eorum diameter EB , et describatur figura.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AZ τῷ $ΛΘ$, ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τῇ $ΗΘ$ · μείζων ἄρα τὸ AZ τοῦ KE . ἴσον δὲ τὸ AZ τῷ $ΔΛ$ · μείζων ἄρα καὶ τὸ $ΔΛ$ τοῦ EK . Κοινὸν προσκείσθω⁹ τὸ $ΚΔ$ · ὅλον ἄρα τὸ AA ὅλου τοῦ AE μείζων ἐστίν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam æquale est AZ ipsi $ΛΘ$, quoniam et ipsa ZH ipsi $ΗΘ$; majus igitur AZ ipso KE . Æquale autem AZ ipsi $ΔΛ$; majus igitur et $ΔΛ$ ipso EK . Commune addatur $ΚΔ$; totum igitur AA toto AE majus est. Omnium igitur, etc.

Coupons de nouveau la droite AB en deux parties égales au point Γ , et appliquons à cette droite le parallélogramme AA , défaillant du parallélogramme GM , et de plus appliquons à la droite AB le parallélogramme AE défaillant du parallélogramme AZ , semblable au parallélogramme décrit sur la moitié de AB , et semblablement placé; je dis que le parallélogramme AA qui est appliqué à la moitié de cette droite est plus grand que le parallélogramme AE .

Car, puisque les parallélogrammes AZ , GM sont semblables, ces deux parallélogrammes sont autour de la même diagonale (26. 6); soit EB leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque AZ est égal à $ΛΘ$ (36. 1), car ZH est égal à $ΗΘ$, AZ est plus grand que KE . Mais AZ est égal à $ΔΛ$ (45. 1); donc $ΔΛ$ est plus grand que EK . Ajoutons le parallélogramme commun $ΚΔ$; le parallélogramme entier AA sera plus grand que le parallélogramme entier AE . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

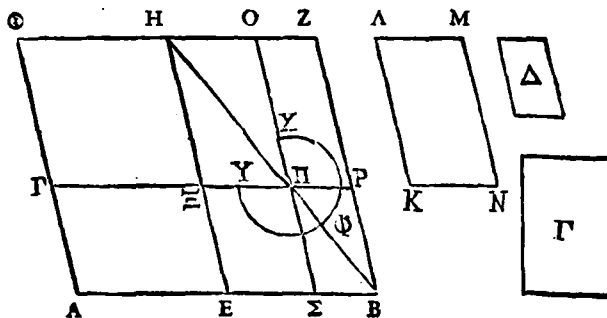
PROPOSITIO XXVIII.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι· διττὸ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ διττὸ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ διττὸ ὅμοιον ἐλλείπειν².

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ simili ipsi dato; oportet utique datum rectilineum cui oportet æquale applicare, non majus esse ipso ad dimidiam applicato, similibus existentibus defectibus et ipso ad dimidiam et ipso cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta ΑΒ, datum vero Γ



εὐθύγραμμον, ᾧ διττὸ ἴσον παρά τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μείζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

rectilineum, cui oportet æquale ad ΑΒ applicare, non majus existens eo ad dimidiam

PROPOSITION XXVIII.

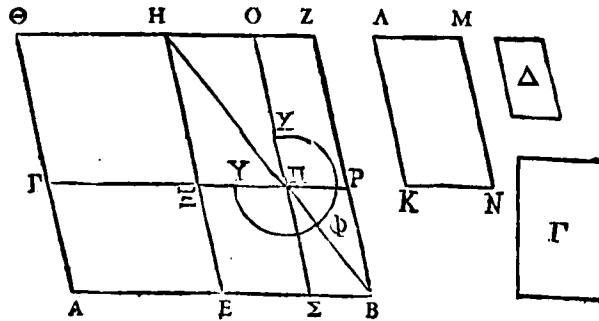
A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défailant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défailant d'un parallélogramme semblable étant semblables entr'eux.

Soit ΑΒ la droite donnée, et Γ la figure rectiligne à laquelle doit être égal le parallélogramme qu'il faut appliquer à la droite ΑΒ; que la figure recti-

360 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἑλλειμμα-
των³, ὃ δὲ δεῖ ὁμοιον ἑλλείπειν τὸ Δ· διὸ δὲ παρὰ
τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυ-
γράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβα-
λεῖν, ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμου, ὁμοίῳ
ὄντι τῷ Δ.

applicato, similibus existentibus defectibus,
ipsum autem Δ cui oportet simile deficere;
oportet igitur ad datam rectam AB dato rec-
tilineo Γ æquale parallelogrammum applicare,
deficiens figurâ parallelogrammâ, simili existente
ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ
ἀναγεγράφω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως
κειμένον τὸ EBZH, καὶ συμπληρώσθω τὸ AH
παραλληλόγραμμον· τὸ δὲ AH ἥτοι ἴσον ἐστὶ
τῷ Γ, ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὅρισμον⁴.
Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ, γεγονός εἴη
τὸ ἱπιταχθεῖν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν
δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ
τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH, ἑλλείπον

Secetur AB bifariam in E puncto, et
describatur ex ipsâ EB ipsi Δ simile et simi-
liter positum EBZH, et compleatur AH paral-
lelogrammum; AH utique vel æquale est ipsi
Γ, vel majus ipso, ob determinationem. Et
si quidem æquale est AH ipsi Γ, factum erit
propositum; applicatum enim ad datam
rectam AB dato rectilineo Γ æquale parallelo-
grammum AH, dificiens figurâ parallelogrammâ

ligne ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de AB, les défauts étant semblables, et soit Δ le parallélogramme auquel le défaut doit être semblable; il faut à la droite donnée AB appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui soit défailant d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons la droite AB en deux parties égales au point E (10. 1); sur EB décrivons le parallélogramme EBZH semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (18. 6), et terminons le parallélogramme AH; le parallélogramme AH sera égal à la figure Γ, ou plus grand, d'après ce qui a été dit. Si le parallélogramme AH est égal à la figure Γ, on aura fait ce qui était proposé; car on aura appliqué à la droite AB un parallélogramme AH semblable à la figure rectiligne

εἶδει παραλληλογράμῳ τῷ ΕΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὐ, μείζον ἐστὶ τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὡς δὲ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπερχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΑΜΝ. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν ὁμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὁμοιον. Ἐστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΑ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζον ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΑΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΑΜ. Κείσθω τῇ μὲν ΚΑ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΑΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοιον ἐστὶ τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ⁷. Ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὁμοιον ἐστὶ⁸· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὁμοιον ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγερράθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ

EZ simili existenti ipsi Δ. Si autem non, majus est ΘΕ ipso Γ. Æquale autem ΘΕ ipsi ΗΒ; majus igitur et ΗΒ ipso Γ. Quo utique majus est ΗΒ ipso Γ, ei excessui æquale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constitutatur ΚΑΜΝ. Sed Δ ipsi ΗΒ est simile; et ΚΜ igitur ipsi ΗΒ est simile. Sit igitur homologa quidem ΚΑ ipsi ΗΕ, ipsa vero ΑΜ ipsi ΗΖ. Et quoniam æquale est ΗΒ ipsis Γ, ΚΜ, majus igitur est ΗΒ ipso ΚΜ; major igitur est et ipsa quidem ΗΕ ipsâ ΑΚ, ipsa vero ΗΖ ipsâ ΑΜ. Ponatur ipsi quidem ΚΑ æqualis ΗΞ, ipsi vero ΑΜ æqualis ΗΟ, et compleatur ΞΗΟΠ parallelogrammum; æquale igitur et simile est ipsi ΚΜ ipsum ΗΠ. Sed ΚΜ ipsi ΗΒ simile est; et ΗΠ igitur ipsi ΗΒ simile est; circa eandem igitur diametrum est ΗΠ circa quam ΗΒ. Sit eorum diameter ΗΠΒ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΒΗ ipsis Γ, ΚΜ,

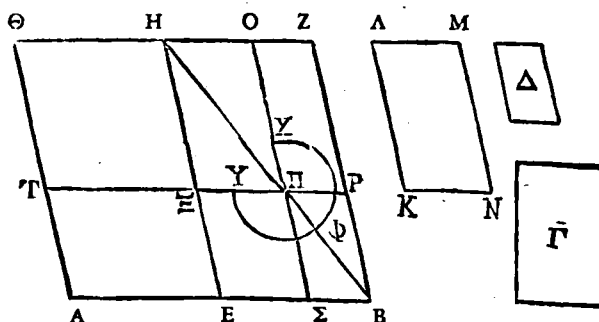
donnée Γ, et défailant d'un parallélogramme ΕΖ semblable au parallélogramme Δ. Mais si cela n'est point, ΘΕ est plus grand que Γ. Mais ΘΕ est égal à ΗΒ; donc ΗΒ est plus grand que Γ. Construisons le parallélogramme ΚΑΜΝ égal à l'excès du parallélogramme ΗΒ sur la figure Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6). Mais le parallélogramme Δ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ. Que la droite ΚΑ soit l'homologue de la droite ΗΕ, et la droite ΑΜ l'homologue de la droite ΗΖ. Puisque le parallélogramme ΗΒ est égal aux deux figures Γ, ΚΜ, le parallélogramme ΗΒ est plus grand que le parallélogramme ΚΜ; donc ΗΕ est plus grand que ΑΚ, et ΗΖ plus grand que ΑΜ (20. 6). Faisons ΗΞ égal à ΚΑ, et ΗΟ égal à ΑΜ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΞΗΟΠ (31. 1); le parallélogramme ΗΠ sera égal et semblable au parallélogramme ΚΜ (24. 6). Mais le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΗΠ est semblable au parallélogramme ΗΒ (21. 6); donc les parallélogrammes ΗΠ, ΗΒ sont autour de la même diagonale (26. 6). Soit ΗΠΒ leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΒΗ est égal aux deux figures Γ, ΚΜ, et que

362 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνόμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλων τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλων τῷ ΥΦΧ γνόμωνι ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ ὁ ΥΦΧ γνόμων τῷ Γ ἰδείχθη ἴσος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

quorum ΗΠ ipsi ΚΜ est æquale; reliquus igitur ΥΦΧ gnomon reliquo Γ est æqualis. Et quoniam æquale est ΟΡ ipsi ΞΣ, commune apponatur ΠΒ; totum igitur ΟΒ toti ΞΒ æquale est. Sed ΞΒ ipsi ΤΕ est æquale, quoniam et latus ΑΕ lateri ΕΒ est æquale; et ΤΕ igitur ipsi ΟΒ est æquale. Commune apponatur ΞΣ; totum igitur ΤΣ toti ΥΦΧ gnomoni est æquale. Sed ΥΦΧ gnomon ipsi Γ ostensus est æqualis; et ΑΠ igitur ipsi Γ est æquale.



Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβίβληται τὸ ΣΤ, ἡλλοῦπον εἶδει παραλληλόγραμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἥπειδ' ἡπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὁμοίον ἐστίν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΣΤ, dificiens figurā parallelogrammā ΠΒ simili existenti ipsi Δ, quandoquidem ΠΒ ipsi ΗΠ simile est. Quod oportebat facere.

ΗΠ est égal à ΚΜ, le gnomon restant ΥΦΧ est égal à la figure restante Γ. Et puisque ΟΡ est égal à ΞΣ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun ΠΒ; le parallélogramme entier ΟΒ sera égal au parallélogramme entier ΞΒ. Mais ΞΒ est égal à ΤΕ (36. 1), parce que le côté ΑΕ est égal au côté ΕΒ; donc ΤΕ est égal à ΟΒ. Ajoutons le parallélogramme commun ΞΣ; le parallélogramme entier ΤΣ sera égal au gnomon entier ΥΦΧ. Mais on a démontré que le gnomon ΥΦΧ est égal à Γ; donc ΑΠ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite ΑΒ un parallélogramme ΣΤ, égal à la figure rectiligne donnée Γ, et défailant d'un parallélogramme ΠΒ semblable à Δ, puisque ΠΒ est semblable à ΗΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

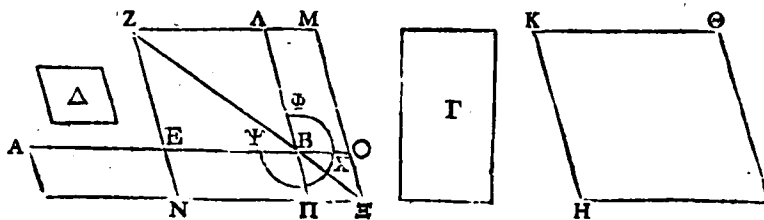
PROPOSITIO XXIX.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρά τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρά τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili datæ.

Sit data quidem recta ΑΒ, datum vero rectilincum Γ, cui oportet æquale ad ΑΒ applicare, Δ autem cui oportet simile applicare; oportet igitur ad ΑΒ rectam ipsi Γ rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγ-
γράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κεί-
μινον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφο-

Secetur ΑΒ bifariam in Ε, et describatur
ex ΕΒ ipsi Δ simile et similiter positum paralle-
logrammum ΒΖ, et utrisque simul quidem ΒΖ,

PROPOSITION XXIX.

Appliquer à une droite donnée, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

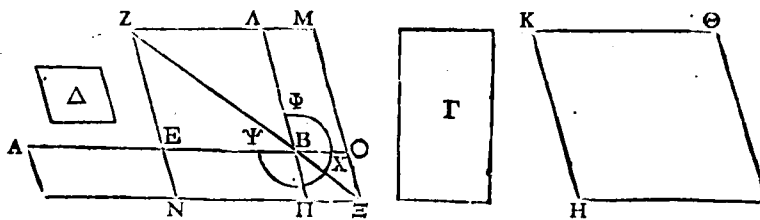
Soit ΑΒ la droite donnée, à laquelle il faut appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée Γ, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme Δ; il faut à la droite ΑΒ appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne Γ, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons ΑΒ en deux parties égales au point Ε (9. I), sur la droite ΕΒ décrivons le parallélogramme ΒΖ semblable au parallélogramme Δ et semblable-

364 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τέροις μὲν τοῖς BZ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνιστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ'. Ομολογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Εκτε-
 λήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΑΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπλη-

Γ æquale, ipsi vero Δ simile et similiter posi-
 tum idem constituatur ΗΘ; simile igitur est
 ΗΘ ipsi ΕΛ. Homologa autem sit ΚΘ quidem
 ipsi ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsi ΖΕ. Et quoniam
 majus est ΗΘ ipso ΖΒ, major igitur est et ipsa
 quidem ΚΘ ipsâ ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsâ ΖΕ.
 Producantur ipsæ ΖΛ, ΖΕ, et ipsi quidem ΚΘ
 æqualis sit ΖΑΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ



ρίσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὁμοίον ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ἡχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ

et compleatur MN; ipsum MN igitur ipsi ΗΘ æqualeque est et simile. Sed ΗΘ ipsi ΕΛ est simile; et MN igitur ipsi ΕΛ simile est; circa eandem igitur diametrum est ipsum ΕΛ circa quam MN. Ducatur eorum diameter ΖΞ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ,

ment placé (18. 6), et construisons le parallélogramme ΗΘ égal aux deux figures ΕΛ, Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6); le parallélogramme ΗΘ sera semblable au parallélogramme ΕΛ. Que ΚΘ soit l'homologue de ΖΛ, et ΚΗ l'homologue de ΖΕ. Puisque ΗΘ est plus grand que ΖΒ, la droite ΚΘ est plus grande que ΖΛ, et la droite ΚΗ plus grande que ΖΕ. Prolongeons ΖΛ, ΖΕ, que ΖΑΜ soit égal à ΚΘ, et ΖΕΝ égal à ΚΗ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΜΝ. Le parallélogramme ΜΝ sera égal et semblable au parallélogramme ΗΘ. Mais le parallélogramme ΗΘ est semblable au parallélogramme ΕΛ; donc le parallélogramme ΜΝ est semblable au parallélogramme ΕΛ (21. 6); donc les deux parallélogrammes ΕΛ, ΜΝ sont autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΖΞ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΗΘ est égal aux figures ΕΛ, Γ, et que

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 365

τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος⁴. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τὸ Γ ἴσος ἐστὶ καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβηται τὸ ΑΞ, ὑπερέχον εἶδος παραλληλογράμμου τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ⁵. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

sed ΗΘ ipsi ΜΝ æquale est; et ΜΝ igitur ipsis ΕΛ, Γ æquale est. Commune auferatur ΕΛ; reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΒ, æquale est et ΑΝ ipsi ΝΒ, hoc est ipsi ΛΟ. Commune apponatur ΕΞ; totum igitur ΑΞ æquale est ipsi ΦΧΨ gnomoni. Sed ΦΧΨ gnomon ipsi Γ æqualis est; et ΑΞ igitur ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figurâ parallelogrammâ ΠΟ simili existenti ipsi Δ, quoniam et ipsi ΕΛ est simile ΟΠ. Quod oportebat facere.

ΗΘ est égal à ΜΝ, le parallélogramme ΜΝ est égal aux figures ΕΛ, Γ. Retrançons le parallélogramme commun ΕΛ; le gnomon restant ΨΧΦ sera égal à Γ. Et puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, le parallélogramme ΑΝ est égal au parallélogramme ΝΒ (36. 1), c'est-à-dire au parallélogramme ΛΟ (43. 1). Ajoutons le parallélogramme commun ΕΞ, le parallélogramme entier ΑΞ sera égal au gnomon entier ΦΧΨ. Mais le gnomon ΦΧΨ est égal à Γ; donc le parallélogramme ΑΞ est égal à Γ.

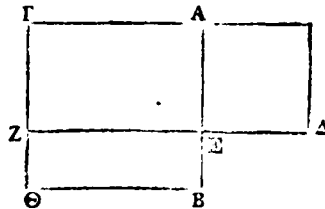
On a donc appliqué à la droite donnée ΑΒ un parallélogramme ΑΞ qui est égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui est excédent d'un parallélogramme ΠΟ semblable au parallélogramme Δ, parce le parallélogramme ΕΛ est semblable au parallélogramme ΟΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν πεπιρασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνῃ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ·
 διὲ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τεμεῖν.

Αναζητήσθω γάρ' ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον
τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ
ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, ὑπερῶλλον εἶδει
τὸ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.



Τετράγωνον δὲ ἴστί τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἔρα
 ἴστί καὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπὶ ἴσον ἴστί τὸ ΒΓ τῷ
 ΓΔ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἔρα τὸ ΒΖ
 λοιπῷ τῷ ΑΔ ἴστί· ἴσον. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώ-
 νιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιτεπόνθασιν αἱ πλευραὶ

Datam rectam terminatam secundum extre-
mam et mediam rationem secare..

Sit data recta terminata AB ; oportet igitur AB rectam secundum extremam et mediam rationem secare.

Describatur enim ex AB quadratum BF , et applicetur ad AF ipsi BF æquale parallelogrammum $\Gamma\Delta$, excedens figurâ $\Lambda\Delta$ simili ipsi BF .

Quadratum autem est BF ; quadratum igitur est et AA . Et quoniam æquale est BF ipsi ΓΔ , commune auferatur FE ; reliquum igitur BZ reliquo AA est æquale. Est autem ei et æquiangulum; ipsorum BZ , AA igitur reciproca

PROPOSITION XXX.

Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison.

Soit donnée la droite finie AB ; il faut couper la droite AB en moyenne et extrême raison.

Sur la droite AB construisons le carré BG (46. 1), et à la droite AR appliquons un parallélogramme ΓΔ, qui soit égal au carré BG, et qui soit excédent d'un parallélogramme ΑΔ semblable à BG (29. 6).

Puisque BR est un carré, AA' est un carré. Et puisque BR est égal à RA , retranchons la partie commune RE ; le reste BZ sera égal au reste AA' . Mais ces deux figures sont équiangles; donc les côtés des parallélogrammes EZ , AA' ,

αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Ἰσὴ δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτίστι τε AB^2 ; ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ³ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶ τὸ ΑΕ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ZE ad EA ita AE ad EB. Æqualis autem ipsa quidem ZE ipsi ΑΓ, hoc est ipsi AB, ipsa vero ΕΔ ipsi ΑΕ; est igitur ut BA ad AE ita AE ad EB. Major autem AB ipsa AE; major igitur et AE ipsa EB.

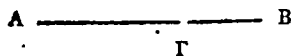
Ipsa igitur AB recta secundum extremam et mediam rationem secta est in E, et majus ejus segmentum est AE. Quod oportebat facere.

ΑΛΛΩΣ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· διῆ δὴ τὴν ΑΒ εἰς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

ALITER.

Sit data recta AB; oportet igitur AB secundum extremam et mediam rationem secare.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ

Secetur enim AB in Γ, ita ut ipsum sub AB, ΒΓ æquale sit ipsi ex ipsa ΑΓ quadrato.

Et quoniam ipsum sub AB, ΒΓ æquale est ipsi ex ΓΑ; est igitur ut AB ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ;

autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ZE est à EA comme AE est à EB. Mais ZE est égal à ΑΓ (34. 1), c'est-à-dire à AB, et ΕΔ est égal à AE; donc BA est à AE comme AE est à EB. Mais AB est plus grand que AE; donc AE est plus grand que EB.

Donc la droite AB a été coupée au point E en moyenne et extrême raison, et AE est son plus grand segment. Ce qu'il fallait faire.

AUTREMENT.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB en moyenne et extrême raison.

Coupons AB au point Γ, de manière que le rectangle sous AB, ΒΓ soit égal au carré de ΑΓ (11. 2).

Puisque le rectangle sous AB, ΒΓ est égal au carré de ΓΑ, AB est à ΑΓ

368 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τίμηται κατὰ τὸ Γ. Ὅπερ εἶδει ποιεῖσαι.

ipsa igitur AB secundum extremam et mediam
rationem secta est in Γ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ.

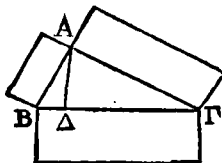
PROPOSITIO XXXI.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν
ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον
ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιχου-
σῶν πλευρῶν εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως
ἀναγραφομένοις.

In rectangulis triangulis, figura ex latere
rectangulum angulum subtendente æqualis est
figuris ex lateribus rectum angulum subten-
dentibus, similibusque et similiter descriptis.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς

Sit triangulum rectangulum ABΓ, rectum
habens ΒΑΓ angulum; dico figuram ex ΒΓ



ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδεσι,
τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

æqualem esse figuris ex ΒΑ, ΑΓ, similibusque
et similiter descriptis.

Ἡχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ducatur perpendicularis ΑΔ.

comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 6); donc la droite ΑΒ a été coupée en moyenne et
extrême raison au point Γ (déf. 3. 6). Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend
l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur
les côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; je dis que la figure
construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur
les côtés ΒΑ, ΑΓ.

Menons la perpendiculaire ΑΔ.

Επειδὴ ὅν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα³ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὁμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἰση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam in recto triangulo ΑΒΓ, ab ipso ad Α recto angulo super ΒΓ basim perpendicularis ducta est ΑΔ; ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur ad perpendiculararem triangula similia sunt et toti ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. Et quoniam tres rectæ proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figurâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; ut igitur ΓΒ ad ΒΔ ita ex ipsâ ΓΒ figura ad ipsam ex ΒΑ, similem et similiter descriptam. Propter eadem utique et ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ipsâ ΒΓ figura, ad ipsam ex ΓΑ; quare et ut ΒΓ ad ipsas ΒΔ, ΔΓ ita ex ipsâ ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ, similes et similiter descriptas. Æqualis autem ΒΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ; æquale igitur et ex ipsâ ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

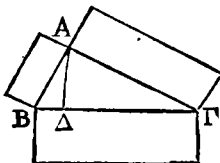
Puisque dans le triangle rectangle ΑΒΓ, on a mené de l'angle droit Α sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ, les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ, autour de la perpendiculaire, sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable, et semblablement construite sur la seconde (2. cor. 20. 6); donc ΓΒ est à ΒΔ comme la figure construite sur ΓΒ est à la figure semblable, et semblablement construite sur ΒΑ. Par la même raison, ΒΓ est à ΓΔ comme la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ; donc ΒΓ est à ΒΔ, ΔΓ comme la figure ΒΓ est aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ (24. 5). Mais la droite ΒΓ est égale aux droites ΒΔ, ΔΓ; donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ. Donc, etc.

ΑΔΔΩΣ.

Επειὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ
 ἴστί⁵ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ
 ἄρα εἶδος⁶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα
 λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐχει δὲ καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ
 τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν
 ΒΑ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς ΒΑ εἶδος⁷ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον

ALITER.

Quoniam similes figuræ in duplâ ratione sunt homologorum laterum, ipsa ex BF igitur figura ad ipsam ex BA figuram duplam rationem habet ejus quam FB ad BA . Habet autem et ex BF quadratum ad ipsum ex BA quadratum duplam rationem ejus quam FB ad BA ; et ut igitur ex BF figura ad ipsam ex BA figuram ita ex FB quadratum ad ipsum ex BA quadratum.



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ
εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος
πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς
ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα.

Propter eadem utique et ut ex BF figura ad ipsam ex ΓA figuram ita ex BF quadratum ad ipsum ex ΓA quadratum; quare et ut ex BF figura ad ipsas ex BA , $\Delta \Gamma$ figuras ita ex BF quadratum ad ipsa ex BA , $\Delta \Gamma$ quadrata. Æquale autem ex BF quadratum ipsis ex BA , $\Delta \Gamma$ qua-

AUTREMENT.

Puisque les figures semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues (13. 6), la figure construite sur BR a avec la figure construite sur BA une raison double de celle que RB a avec BA. Mais le quarré de BR a avec le quarré de BA une raison double de celle que RB a avec BA (1. cor. 20. 6); donc la figure construite sur RB est à celle qui est construite sur BA comme le quarré de RB est au quarré de BA (11. 5). Par la même raison, la figure construite sur BR est à la figure construite sur RA comme le quarré de BR est au quarré de RA; donc la figure construite sur BR est aux figures construites sur BA, AR comme le quarré de BR est aux quarrés des droites BA,

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 371

Ἰσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδει, τοῖς⁸ ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι⁹.

dratis; æqualis igitur et ex ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

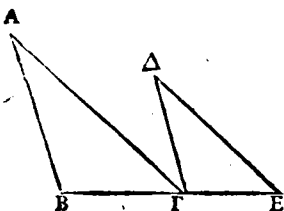
PROPOSITIO XXXII.

Εὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἴσονται.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο

Si duo triacula componantur secundum unum angulum, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ita ut homologa eorum latera et parallela sint; reliqua triangulorum latera in directum erunt.

Sint duo triacula ΑΒΓ, ΔΓΕ, duo latera



πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὥς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς

ΒΑ, ΑΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔΕ proportionalia habentia, ut ΑΒ quidem ad ΑΓ ita ΔΓ

ΑΓ (24. 5). Mais le carré de BG est égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΓ (47. 1); donc la figure construite sur BG est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les droites ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les côtés restants des triangles seront dans la même direction.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, ayant les deux côtés ΒΑ, ΑΓ proportionnels aux deux côtés ΓΔ, ΔΕ, de manière que ΑΒ soit à ΑΓ comme ΔΓ

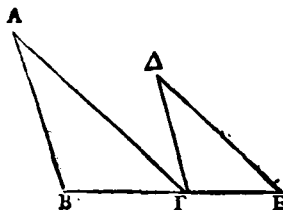
372 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτάς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐν-
αλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις
εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ
ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν

ad ΔΕ, parallela vero ΑΒ quidem ipsi ΔΓ, ipsa vero ΑΓ ipsi ΔΕ; dico in directum esse ipsam ΒΓ ipsi ΓΕ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΔΓ, et in ipsas incidit recta ΑΓ, et alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΔ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΓΔ est æqualis; quare et ΒΑΓ ipsi ΓΔΕ est æqualis. Et quoniam duo



ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μίαν γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ

triangula sunt ΑΒΓ, ΔΓΕ unum angulum ad Α uni angulo ad Δ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΓΕ triangulo; æqualis igitur ΑΒΓ angulus ipsi ΔΓΕ. Ostensus autem est et ΑΓΔ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ æqualis est. Communis

est à ΔΕ; et que ΑΒ soit parallèle à ΔΓ, et ΑΓ parallèle à ΔΕ; je dis que ΒΓ est dans la direction de ΓΕ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΔΓ, et que ΑΓ tombe sur ces deux droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΔ sont égaux entr'eux (29. i.). Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΓΔ; donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΕ. Et puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ ont un angle en Α égal à un angle en Δ, et que les côtés qui comprennent ces angles égaux sont proportionnels, c'est-à-dire que ΒΑ est à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ, les triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΓΕ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle entier ΑΓΕ est égal aux deux

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 373

ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, $BA\Gamma$ ἴση ἔστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ ταῖς ὑπὸ $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $ΑΓΒ$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $ΑΓΒ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ $ΑΓ$, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῃ τῇ Γ , δύο εὐθεῖαι αἱ $B\Gamma$, ΓE , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ ΓE . Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

opponatur $ΑΓΒ$; ipsi igitur $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ ipsis $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $ΑΓΒ$ æquales sunt. Sed ipsi $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $ΑΓΒ$ duobus rectis æquales sunt; et ipsi $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ igitur duobus rectis æquales sunt. Ad quamdam utique rectam $ΑΓ$, et ad punctum in eà Γ , duæ rectæ $B\Gamma$, ΓE , non ad easdem partes positæ, ipsos deinceps angulos $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est $B\Gamma$ ipsi ΓE . Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥς βεβηκῶται· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομῆς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι'.

Ἐστώσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $\Delta E Z$, καὶ πρὸς

PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis anguli eamdem rationem habent quam circumferentiæ in quas insistant, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes; adhuc etiam et sectores quippe ad centra constituti.

Sint æquales circuli $AB\Gamma$, $\Delta E Z$, et ad centra

angles $AB\Gamma$, $BA\Gamma$. Ajoutons l'angle commun $ΑΓΒ$; les angles $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ seront égaux aux angles $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $ΑΓΒ$. Mais les angles $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, $ΑΓΒ$ sont égaux à deux angles droits (32. 1); donc les angles $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ sont égaux à deux angles droits. Donc avec une droite quelconque $ΑΓ$, et au point Γ de cette droite; les deux droites $B\Gamma$, ΓE , placées de différents côtés, font les angles de suite $ΑΓΕ$, $ΑΓΒ$ égaux à deux angles droits; donc la droite $B\Gamma$ est dans la direction de ΓE (14. 1). Donc, etc.

PROPOSITION. XXXIII.

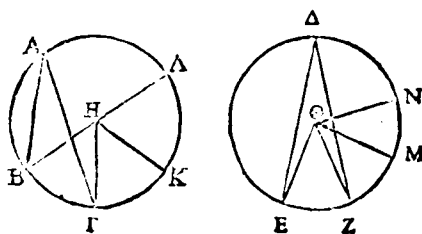
Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

Soient les cercles égaux $AB\Gamma$, $\Delta E Z$; que les angles $B\Gamma\Gamma$, $E\Gamma Z$ soient placés à

374 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς H, Θ γωνίας ἴστωσαν αἱ ὑπὸ $BHG, E\Theta Z$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερίαις αἱ ὑπὸ $BA\Gamma, EAZ$. λέγω ὅτι ἴστί· ὡς ἡ $B\Gamma$ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν οὕτως ἢ τε ὑπὸ BHG γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $E\Theta Z$, καὶ ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ πρὸς τὴν ὑπὸ EAZ . καὶ ἔτι ὁ HBF τομὴς πρὸς τὸν ΘEZ τομὴα².

quidem ipsorum H, Θ anguli sint $BHG, E\Theta Z$, ad circumferentias vero ipsi $BA\Gamma, EAZ$; dico esse ut $B\Gamma$ circumferentia ad EZ circumferentiam ita BHG angulum ad $E\Theta Z$, et ipsum $BA\Gamma$ ad EAZ ; et adhuc HBF sectorem ad ΘEZ sectorem.



Κεῖσθωσαν γὰρ τῇ μὲν $B\Gamma$ περιφέρειᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαιδηποῦν³ αἱ $\Gamma K, K\Lambda$, τῇ δὲ EZ περιφέρειᾳ ἴσαι ὁσαιδηποῦν¹ αἱ ZM, MN , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $HK, H\Lambda, \Theta M, \Theta N$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ $B\Gamma, \Gamma K, K\Lambda$ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $BHG, \Gamma HK, KHA$ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἴστί· ἡ BA περιφέρεια τῇ $B\Gamma$, τοσαυταπλασίον ἴστί καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῇ ὑπὸ BHG . Διὰ τὰ

Ponantur enim ipsi $B\Gamma$ quidem circumferentiæ æquales deinceps quotcumque $\Gamma K, K\Lambda$, ipsi vero EZ circumferentiæ æquales quotcumque ZM, MN , et jungantur $HK, H\Lambda, \Theta M, \Theta N$.

Et quoniam igitur æquales sunt $B\Gamma, \Gamma K, K\Lambda$ circumferentiæ inter se, æquales sunt et $BHG, \Gamma HK, KHA$ anguli inter se. Quam multiplex igitur est BA circumferentia ipsius $B\Gamma$, tam multiplex est BHA angulus ipsius BHG . Propter

leurs centres H, Θ , et que les angles $BA\Gamma, EAZ$ soient placés à leurs circonferences; je dis que l'arc $B\Gamma$ est à l'arc EZ comme l'angle BHG est à l'angle $E\Theta Z$, comme l'angle $BA\Gamma$ est à l'angle EAZ , et comme le secteur HBF est au secteur ΘEZ .

Faisons tant d'arcs de suite $\Gamma K, K\Lambda$, qu'on voudra égaux chacun à l'arc $B\Gamma$, et tant d'arcs qu'on voudra ZM, MN , égaux chacun à l'arc EZ , et joignons $HK, H\Lambda, \Theta M, \Theta N$.

Puisque les arcs $B\Gamma, \Gamma K, K\Lambda$ sont égaux entr'eux, les angles $BHG, \Gamma HK, KHA$ sont aussi égaux entr'eux (27. 3); donc l'angle BHA est le même multiple de BHG , que l'arc BA l'est de l'arc $B\Gamma$. Par la même raison, l'angle $E\Theta N$ est

αὐτὰ δὲ καὶ ὁσαυπλάσιον ἔστιν ἡ EN περιφέρεια τῆς EZ, τοσαυπλάσιον ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ EON γωνία τῆς ὑπὸ EØZ. Εἰ ἄρα⁵ ἴση ἔστιν ἡ BA περιφέρεια τῇ EN περιφέρειᾳ, ἴση ἔστι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BHA τῇ ὑπὸ EON· καὶ εἰ μείζων ἔστιν ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, μείζων ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῆς ὑπὸ EON γωνίας⁶· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τισσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν BΓ, EZ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ BHΓ, EØZ, εἴληπται τῆς μὲν EΓ περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ BHΓ γωνίας ἰσάκεις πολλαπλασίον, ἢ τε BA περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία; τῆς δὲ EZ περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ EØZ γωνίας, ἢ τε EN περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ EON γωνία· καὶ δέδικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῆς ὑπὸ EON· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς BΓ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EØZ. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EØZ οὕτως ἡ ὑπὸ BΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ EAZ, διπλα-

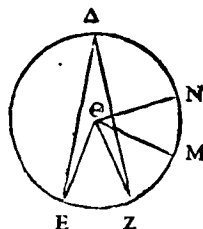
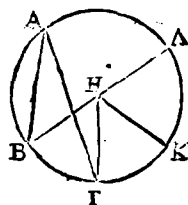
cadem utique et quam multiplex est EN circumferentia ipsius EZ, tam multiplex est et EON angulus ipsius EØZ. Si igitur æqualis est BA circumferentia ipsi EN circumferentiæ, æqualis est et angulus BHA ipsi EON; et si major est BA circumferentia ipsa EN circumferentiâ, major est et BHA angulus ipso EON angulo; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BΓ, EZ, duobus vero angulis BHΓ, EØZ, sumpta sunt ipsius quidem BΓ circumferentiæ, et ipsius BHΓ anguli æque multiplicia, et BA circumferentia et BHA angulus, ipsius vero EZ circumferentiæ et ipsius EØZ anguli, et EN circumferentia et EON angulus; et ostensum est si superat BA circumferentia ipsam EN circumferentiam, superare et BHA angulum ipsum EON; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; est igitur ut BΓ circumferentia ad ipsam EZ ita BHΓ angulus ad ipsum EØZ. Sed ut BHΓ angulus ad ipsum EØZ ita ipsæ BΑΓ ad ipsum EAZ; duplus

le même multiple de BØZ, que l'arc EN l'est de l'arc EZ. Donc si l'arc BA est égal à l'arc EN, l'angle BHA est égal à l'angle EON (27. 3); si l'arc BA est plus grand que l'arc EN, l'angle BHA est plus grand que l'angle EON; et si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, l'angle BHA est plus petit que l'angle EON. Ayant donc quatre grandeurs, deux arcs BΓ, EZ, et deux angles BHΓ, EHZ, on a pris des équimultiples de l'arc BΓ et de l'angle BHΓ, savoir, l'arc BA et l'angle BHA; on a pris aussi des équimultiples de l'arc EZ et de l'angle EØZ, savoir, l'arc EN et l'angle EON; et l'on a démontré que si l'arc BA surpasse l'arc EN, l'angle BHA surpasse l'angle EON; que si l'arc BA est égal à l'arc EN, l'angle BHA est égal à l'angle EON; que si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, l'angle BHA est plus petit que l'angle EON; donc l'arc BΓ est à l'arc EZ comme l'angle BHΓ est à l'angle EØZ (déf. 6. 5). Mais l'angle BHΓ est à l'angle EØZ comme l'angle BΑΓ est à l'angle EAZ (15. 5), car ils sont

376 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἔτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ⁸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

enim uterque utriusque; et ut igitur ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita et ΒΗΓ angulus ad ipsum ΕΘΖ, et ipse ΒΑΓ ad ipsum ΕΔΖ.



Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερίαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερίαις ὥς βεβηκυῖαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

In æqualibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ in quas insistent; sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes. Quod oportebat ostendere.

Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομὴς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομὴα.

Dico et ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.

Ἐπιζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληθόντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ε, Ο σημίων, ἐπιζεύχωσαν καὶ αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, et sumptis in ΒΓ, ΓΚ circumferentiis punctis Ε, Ο, jungantur et ΒΕ, ΕΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ,

Et quoniam duo ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ

doubles les uns des autres (2 o. 5); donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, et comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ.

Donc, dans des cercles égaux, les angles sont proportionnels aux arcs, soit que ces angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences. Ce qu'il fallait démontrer.

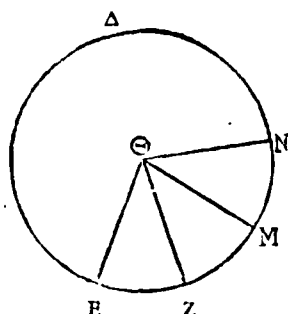
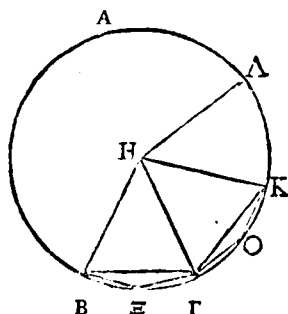
Je dis de plus que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

Joignons ΒΓ, ΓΚ, et ayant pris sur les arcs ΒΓ, ΓΚ, les points Ε, Ο, joignons ΒΕ, ΕΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Puisque les deux droites ΒΗ, ΗΓ sont égales aux deux droites ΓΗ, ΗΚ,

ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ
βάσεις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἴσιν ἴση· ἴσον ἄρα ἴστίῃ
καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφε-
ρείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον πε-
ριφέρεια ἴση ἴστί τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον
κύκλον περιφέρειᾳ¹. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ¹¹

æquales sunt, et angulos æquales comprehen-
dunt, et basis ΒΓ ipsi ΓΚ est æqualis; æquale
igitur est et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ trian-
gulo. Et quoniam æqualis est ΒΓ circumfe-
rentia ipsi ΓΚ circumferentiæ, et reliqua
totius circuli circumferentia æqualis est reli-
quæ totius circuli circumferentiæ; quare et



τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἴσιν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἴστί τὸ
ΒΞΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καὶ εἰσιν ἐπὶ
ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐ-
θειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις
ἐστίν· ἴσον ἄρα ἴστί τὸ ΒΞΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ
τμήματι. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ
ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομὴς

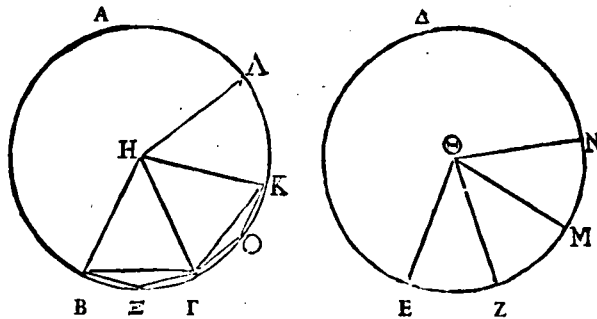
angulus ΒΞΓ angulo ΓΟΚ est æqualis; simile
igitur est ΒΞΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento;
et sunt super æquales rectas ΒΓ, ΓΚ. Sed
super æquales rectas similia segmenta circu-
lorum æqualia inter se sunt; æquale igitur est
ΒΞΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento. Est autem
et ΒΗΓ triangulum ipsi ΗΓΚ triangulo æquale;

et qu'elles comprennent des angles égaux, la base ΒΓ est égale à la base
ΓΚ; donc le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ (4. 1). Mais l'arc ΒΓ
est égal à l'arc ΓΚ; donc le reste de la circonférence du cercle entier
est égal au reste de la circonférence du cercle entier (ax. 3), l'angle ΒΞΓ
est égal à l'angle ΓΟΚ (27. 3); donc le segment ΒΞΓ est semblable au
segment ΓΟΚ (déf. 11. 3), et ces deux segments sont sur les droites égales ΒΓ,
ΓΚ. Mais les segments de cercles semblables placés sur des droites égales, sont
égaux entr'eux (24. 3); donc le segment ΒΞΓ est égal au segment ΓΟΚ. Mais
le triangle ΒΗΓ est égal au triangle ΗΓΚ; donc le secteur entier ΗΒΓ est égal

378 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔλθω τῷ ΗΓΚ τομειῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΑ τομειὺς ἰκατέρῳ τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομειῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομειῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν¹². ὁσαυταπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφέρειας, τοσαυταπλάσιον

et totus igitur ΗΒΓ sector toti ΗΓΚ sectori æqualis est. Propter eadem utique et ΗΚΑ sector utriusque ipsorum ΗΚΓ, ΗΓΒ æqualis est; tres igitur sectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sectores æquales inter se sunt; quam multiplex igitur est ΒΑ circumferentia



ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομειὺς τοῦ ΗΒΓ τομειῶς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαυταπλάσιον ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφέρειας, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομειὺς τοῦ ΘΕΖ τομειῶς. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφέρειᾳ¹³, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομειὺς τῷ ΘΕΝ τομειῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια

ipsius ΒΓ circumferentiæ, tam multiplex est et ΗΒΑ sector ipsius ΗΒΓ sectoris. Propter eadem utique et quam multiplex est ΕΝ circumferentia ipsius ΕΖ circumferentiæ, tam multiplex est et ΘΕΝ sector ipsius ΘΕΖ sectoris; si igitur æqualis est ΒΑ circumferentia ipsi ΕΝ circumferentiæ, æqualis est et ΗΒΑ sector ipsi

au secteur entier ΗΓΚ (ax. 2). Par la même raison, le secteur ΗΚΑ est égal à l'un et l'autre des secteurs ΗΚΓ, ΗΓΒ; donc les trois secteurs ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΑ sont égaux entr'eux. Les secteurs ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sont égaux entr'eux, par la même raison; donc le secteur ΗΒΑ est le même multiple du secteur ΗΒΓ que l'arc ΒΑ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, le secteur ΘΕΝ est le même multiple du secteur ΘΕΖ que l'arc ΕΝ l'est de l'arc ΕΖ. Donc si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ; si l'arc ΒΑ surpasse l'arc

τῆς EN περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ HBA τομὺς τοῦ ΘΕΝ τομῶς· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει¹⁴. Τισ-
σάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, EZ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ το-
μῶν, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομῶς, ἥτις ΒΑ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΑ τομὺς, τῆς δὲ EZ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομῶς ἰσάκεις πο-
λλαπλάσια, ἥτις EN περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ το-
μὺς. Καὶ δίδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς EN περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομὺς τοῦ ΘΕΝ τομῶς· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ οὕτως ὁ ΗΒΓ το-
μὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομῶν.

ΘΕΝ sectori ; et si superat ΒΑ circumfe-
rentia ipsam EN circumferentiam, superat et
HBA sector ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si deficit,
deficit. Quatuor igitur existentibus magnitu-
dinibus, duobus quidem ΒΓ, EZ circumferen-
tiis, duobus vero ΗΒΓ, ΘΕΖ sectoribus,
sumpta sunt æque multiplicia ipsius ΒΓ qui-
dem circumferentiæ et ipsius ΗΒΓ sectoris,
ipsa et ΒΑ circumferentia et ΗΒΑ sector, ipsius
vero EZ circumferentiæ et ipsius ΘΕΖ sectoris
æque multiplicia, ipsa et EN circumferentia
et ipse ΘΕΝ sector. Et ostensum est si supe-
rat ΒΑ circumferentia ipsam EN circumferen-
tiam, superare et ΗΒΑ sectorem ipsum ΘΕΝ
sectorem ; et si æqualis, æqualem ; et si deficit,
dificere ; est igitur ut ΒΓ circumferentia ad EZ
ita ΗΒΓ sector ad ΘΕΖ sectorem.

EN, le secteur HBA surpasse le secteur ΘΕΝ, et si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc EN, le secteur HBA est plus petit que le secteur ΘΕΝ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux arcs ΒΓ, EZ, et les deux secteurs ΗΒΓ, ΘΕΖ, on a pris des équimultiples de l'arc ΒΓ et du secteur ΗΒΓ, savoir, l'arc ΒΑ et le secteur ΗΒΑ ; on a pris aussi des équimultiples de l'arc EZ et du secteur ΘΕΖ, savoir, l'arc EN et le secteur ΘΕΝ. Et on a démontré que si l'arc ΒΑ surpasse l'arc EN, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, que si l'arc ΒΑ est égal à l'arc EN, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ, et que si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc EN, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ ; donc l'arc ΒΓ est à l'arc EZ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ (déf. 6. 5).

380 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομὴς πρὸς τὸν τομὴν οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Et manifestum est et ut sector ad sectorem ita et angulum ad angulum.

COROLLAIRE.

Il est évident que le secteur est au secteur comme l'angle est à l'angle (11. 5).

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E P T I M U S.

ΟΡΟΙ.

DEFINITIONES.

α. Μονάς ἐστὶ, καθ' ἣν ὁ ἕκαστος τῶν ὄντων ἐν λέγεται.

β. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρηῇ τὸν μείζονα.

1. Unitas est secundum quam unumquodque existentium unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, quando metitur majorem.

LIVRE SEPTIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.

3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

382 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

- δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρήῃ.
 ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττω-
 νος, ὅταν καταμετρήται ὑπὸ τοῦ ἐλάττωτος.
 ς'. Ἀρτίος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρού-
 μινος.
 ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα· ἢ
 ὁ² μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.
 η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστιν, ὁ ὑπὸ
 ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθ-
 μόν.
 θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός³ ἐστιν, ὁ
 ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν
 ἀριθμόν.
 ι'. Περισσάκις δὲ ἀρτίος ἐστιν, ὁ ὑπὸ περισ-
 σοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν¹.
 ια'. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστιν⁵, ὁ
 ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν
 ἀριθμόν.
 ιβ'. Πρῶτως ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ
 μετρούμενος.
4. Parties autem, quando non metitur.
 5. Multiplex autem, major minoris, quando
 mensuratur a minore.
 6. Par autem numerus est ipse bifariam di-
 visus.
 7. Impar vero, ipse non divisus bifariam ;
 vel ipse unitate differens a pari numero.
 8. Pariter par numerus est, ipse a pari nu-
 mero mensuratus per parem numerum.
 9. Pariter autem impar numerus est, ipse a
 pari numero mensuratus per imparem nume-
 rum.
 10. Impariter vero par est, ipse ab impari
 numero mensuratus per parem numerum.
 11. Impariter vero impar numerus est, ipse
 ab impari numero mensuratus per imparem
 numerum.
 12. Primus numerus est, ipse ab unitate
 solâ mensuratus.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.
 5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand
 il est mesuré par le plus petit.
 6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.
 7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties
 égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.
 8. Le nombre parement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair
 multiplié par un nombre pair.
 9. Le nombre parement impair est celui qui est mesuré par un nombre
 pair multiplié par un nombre impair.
 10. Le nombre impairement pair est celui qui est mesuré par un nombre
 impair, multiplié par un nombre pair.
 11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre
 impair multiplié par un nombre impair.
 12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

13'. Πρῶτοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

14'. Σύνθετος ἀριθμὸς ἐστίν, ὃς ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

15'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

16'. Αριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιάζομενος, καὶ γένηται τις.

17'. Οταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, ὃ γινόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

18'. Οταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, ὃ γινόμενος στερεὸς καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

13. Primi autem inter se numeri sunt, ipsi ab unitate solâ mensurati communi mensurâ.

14. Compositus numerus est, ipse a numero aliquo mensuratus.

15. Compositi vero inter se numeri sunt, ipsi a numero aliquo mensurati communi mensurâ.

16. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in eo unitates toties additur multiplicatus, et gignitur aliquis.

17. Quando autem duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus planus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

18. Quando autem tres numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus solidus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.

384 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ιβ'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστὶν ὁ ἰσάκεις ἴσος, ἢ ὁ¹⁰ ὑπὸ δύο ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κ'. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκεις ἴσος ἰσάκεις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων¹¹ περιεχόμενος.

κα'. Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκεις ἢ πολλαπλασίσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖσιν.

κβ'. Ομοιοὶ ἐπίπιδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγ'. Τίλειος ἀριθμός ἐστὶν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρισιν ἴσος ὢν.

19. Quadratus numerus est ipse æqualiter æqualis, vel ipse sub duobus æqualibus numeris contentus.

20. Cubus autem, ipse æqualiter æqualis æqualiter; vel ipse sub tribus numeris æqualibus contentus.

21. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi et tertius quarti æque est multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes sunt.

22. Similes plani et solidi numeri sunt, ipsi proportionalia habentes latera.

23. Perfectus numerus est, ipse suis ipsius partibus æqualis existens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ αἰὲ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,

PROPOSITIO I.

Duobus numeris inæqualibus expositis, detracto autem semper minore de majore, si

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

PROPOSITION PREMIÈRE.

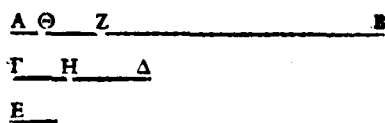
Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché

ἐάν ὁ λειπόμινος μηδέποτε καταμετρή τὸν πρὸς ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀρίστων ἀριθμῶν τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμινος μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸς ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τουτίστιν, ὅτι τοὺς AB, ΓΔ μονάς μόνη μετρεῖ³.

relictus nunquam metiatur ipsum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; a principio numeri primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relictus nunquam metiatur eum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; dico ipsos AB, ΓΔ primos inter se esse, hoc est, ipsos AB, ΓΔ unitate solà mensurari.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ E, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν AB μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ZA, ὁ δὲ ZA τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ, τὸν ZA μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Επεὶ οὖν ὁ E τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ZB μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα τὸν ZB μετρεῖ. Μετρεῖ

Si enim non sunt AB, ΓΔ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit E, et ΓΔ quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem ZA, ipse vero ZA ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΗΓ, ipse ΗΓ autem ipsum ZA metiens relinquat unitatem ΘΑ.

Quoniam et E ipsum ΓΔ metitur, ipse autem ΓΔ ipsum ZB metitur; et ipse igitur E ipsum ZB

du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

Soient les deux nombres inégaux AB, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

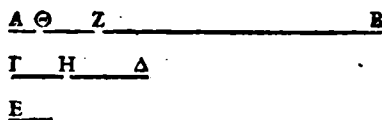
Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse ΗΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin ΗΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘΑ.

Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZB. Mais

386 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

διὲ καὶ ὅλον τὸν AB· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ μετρήσει⁴. Ο δὲ AZ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει⁵. Ο δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει⁶. Με-

metitur. Metitur autem et totum AB; et reliquum igitur AZ metietur. Ipse autem AZ ipsum ΔΗ metitur; et Ε igitur ipsum ΔΗ metietur. Metitur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur ΓΗ metietur. Ipse autem ΓΗ ipsum ΖΘ metitur;



τρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμὸς· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et Ε igitur ipsum ΖΘ metietur. Metitur autem et totum ΖΑ; et reliquam igitur ΑΘ unitatem metietur, numerus existens, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros metietur aliquis numerus; ipsi AB, ΓΔ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

PROPOSITIO II.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔΗ; donc Ε mesurera ΔΗ. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓΗ. Mais ΓΗ mesure ΖΘ; donc Ε mesurera ΖΘ. Mais il mesure ΖΑ tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante ΑΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

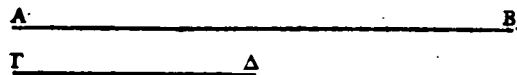
PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 387

Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἴστω ἐλάττω ὁ ΓΔ¹. διὸ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint dati duo numeri non primi inter se ΑΒ, ΓΔ, et sit minor ΓΔ; oportet igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

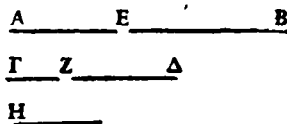


Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ² κοινὸν μέτρον ἴστί. Καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Si ΓΔ quidem ipsum ΑΒ metitur, metitur vero et se ipsum; ipse ΓΔ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Et manifestum est et maximam; nullus enim major ipso ΓΔ ipsum ΓΔ metictur.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου αὐτὸ τοῦ ἐλάττωτος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ληφθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει

Si autem non metitur ΓΔ ipsum ΑΒ, ipsorum ΑΒ, ΓΔ detracto semper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui me-



τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Μονὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται. Εἰ δὲ μὴ, ἴσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ληφθήσεται ἄρα τις

tiatur eum præ se ipso. Unitas quidem non enim relinquetur. Si autem non, erunt ΑΒ, ΓΔ primi inter se, quod non ponitur; relin-

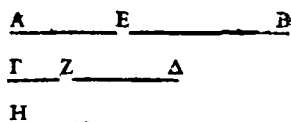
Soient donnés les deux nombres ΑΒ, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ.

Si ΓΔ mesure ΑΒ, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, ΑΒ, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas ΑΒ, et si on retranche toujours le plus petit des nombres ΑΒ, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres ΑΒ, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

ἀριθμὸς, ἕς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λυπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λυπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΕΑ μετρεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. Ο δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ

quetur igitur aliquis numerus, qui metietur eum præ se ipso. Et ipse quidem ΓΔ ipsum ΑΒ metiens relinquat se ipso minorem ΕΑ, ipse vero ΕΑ ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΖΓ, ipse autem ΓΖ ipsum ΕΑ metiatur. Et quoniam ΓΖ ipsum ΑΕ metitur, ipse autem ΑΕ ipsum ΔΖ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΔΖ metietur. Metitur autem et se ipsum; et totum igitur ΓΔ metietur. Ipse



μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. Μετρεῖτω, καὶ ἐστω ὁ Η. Καὶ ἵπτι ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρήσει³. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν

autem ΓΔ ipsum ΒΕ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΒΕ metitur. Metitur autem et ipsum ΕΑ; et totum igitur ΒΑ metietur. Metitur autem et ipsum ΓΔ; ipse ΓΖ igitur ipsos ΑΒ, ΓΔ metitur; ΓΖ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Dico utique et maximam. Si enim non est ΓΖ ipsorum ΑΒ, ΓΔ maxima communis mensura, metietur aliquis ΑΒ, ΓΔ numeros numerus major existens ipso ΓΖ. Me-

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant ΑΒ laisse ΕΑ plus petit que lui-même; que ΕΑ mesurant ΔΓ laisse ΖΓ plus petit que lui-même; et enfin que ΓΖ mesure ΕΑ. Puisque ΓΖ mesure ΑΕ, et que ΑΕ mesure ΔΖ, le nombre ΓΖ mesurera ΔΖ. Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure ΒΕ; donc ΓΖ mesure ΒΕ. Mais il mesure ΕΑ; donc il mesurera ΒΑ tout entier. Mais il mesure ΓΔ; donc ΓΖ mesure ΑΒ et ΓΔ; donc ΓΖ est une commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓΖ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓΖ mesurera les nombres ΑΒ, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit Η. Puisque Η mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ΒΕ, le nombre Η mesurera ΒΕ. Mais il mesure ΒΑ tout entier; donc il mesurera le reste

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 389

BA· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει. Ο δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ΓZ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

tiatur, et sit H. Et quoniam H ipsum ΓΔ metitur, ipse vero ΓΔ ipsum BE metitur; et ipse H igitur ipsum BE metietur. Metitur autem et totum BA; et reliquum igitur ipsum AE metietur. Ipse autem AE ipsum ΔZ metitur; et H igitur ipsum ΔZ metitur. Metitur autem et totum ΔΓ; et reliquum igitur ΓZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur AE, ΓΔ numeros numerus aliquis metietur, major existens ipso ΓZ; ipse ΓZ igitur ipsorum AB, ΓΔ maxima est communis mensura. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἀριθμοὶ δύο ἀριθμοὺς μετρεῖ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει⁴.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

AE. Mais AE mesure ΔZ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là, que si un nombre en mesure deux autres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se Α, Β, Γ; oportet igitur ipsorum Α, Β, Γ maximam communem mensuram invenire.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὲ Δ τὸν Γ ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. Με-

Sumatur enim duorum Α, Β maxima communis mensura Δ; ipse utique Δ ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum, metitur autem et ipsos Α, Β; ipse Δ igitur ipsos Α, Β, Γ metitur; ipse Δ igitur ipsorum Α, Β, Γ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non est Δ ipsorum Α, Β, Γ maxima communis mensura, metietur Α,

PROPOSITION III.

Trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les trois nombres Α, Β, Γ non premiers entr'eux; il faut trouver leur plus grande commune mesure.

Prenons la plus grande commune mesure Δ des deux nombres Α, Β; le nombre Δ mesure, ou ne mesure pas le nombre Γ. Premièrement, qu'il le mesure; mais il mesure aussi les nombres Α, Β; donc il mesure les nombres Α, Β, Γ; donc Δ est une commune mesure des nombres Α, Β, Γ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si Δ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ, un nombre plus grand que Δ mesurera les nombres Α, Β, Γ.

τρίτω, καὶ ἴστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει², καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἴστί· ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἴστί· ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μετρήσει μείζων τοῦ Δ³. ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρεῖται δὲ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὲ τοὺς Α, Β, Γ με-

Β, Γ numeros numerus major existens ipso Δ. Metiatur, et sit Ε. Et quoniam Ε ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β igitur metietur, et ipsorum igitur Α, Β maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis mensura est Δ; ipse igitur Ε ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numeros numerus aliquis metietur major ipso Δ; ipse Δ igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Non metiatur autem Δ ipsum Γ; dico primum numeros Δ, Γ non esse primos inter se. Quoniam enim Α, Β, Γ non sunt primi inter se, metietur aliquis eos numerus; qui autem

Α _____
Β _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

τρῶν, καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρη-

ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β metietur, et ipsorum Α, Β maximam mensuram Δ metietur. Metitur autem et ipsum Γ; ipsos Α, Γ igitur

Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit Ε. Puisque Ε mesure les nombres Α, Β, Γ, il mesurera les nombres Α, Β, et par conséquent leur plus grande commune mesure (cor. 2. 7). Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β; donc Ε mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Δ ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Que Δ ne mesure pas Γ; je dis premièrement que les nombres Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Car puisque les nombres Α, Β, Γ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, et celui qui mesure les nombres Α, Β, Γ, mesurera les nombres Α, Β, et mesurera aussi leur plus grande commune mesure Δ (cor. 2. 7). Mais il mesure aussi Γ; donc quelque nombre mesurera

392 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν
μέτρον, ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ
δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α,
Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς
Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν
ἐστὶ μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ
γὰρ μὴ ἴστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον

numerus aliquis metietur; ipsi Δ, Γ igitur non
sunt primi inter se. Sumatur igitur eorum
maxima communis mensura Ε. Et quoniam Ε
ipsum Δ metitur, ipse autem Δ ipsos Α, Β
metitur; et Ε igitur ipsos Α, Β, metitur. Me-
titur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Α,
Β, Γ metitur; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ
communis est mensura. Dico autem et maximam.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ
ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. Μετρεῖτω,
καὶ ἴστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ
μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β
ἄρα⁵ μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ
τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ
Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ
Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα
μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει⁶. Τὸ δὲ τῶν Γ,

Si enim non est Ε ipsorum Α, Β, Γ maxima
communis mensura, metietur aliquis ipsos Α,
Β, Γ numeros numerus major existens ipso Ε;
metiatur, et sit Ζ. Et quoniam Ζ ipsos Α, Β, Γ
metitur, et ipsos Α, Β metitur, et ipsorum Α, Β
igitur maximam communem mensuram me-
tietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis
mensura est Δ; ipse Ζ igitur ipsum Δ metitur.
Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ζ igitur ipsos Δ, Γ

les nombres Δ, Γ; donc Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Prenons leur plus grande commune mesure Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure les nombres Α, Β, le nombre Ε mesure Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des nombres Α, Β, Γ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si Ε n'est pas la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ, un nombre plus grand que Ε mesurera les nombres Α, Β, Γ. Qu'il les mesure, et que ce soit Ζ. Puisque Ζ mesure les nombres Α, Β, Γ, il mesure Α et Β, et il mesurera par conséquent leur plus grande commune mesure. Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β; donc Ζ mesure Δ. Mais il mesure aussi Γ; donc Ζ mesure Δ et Γ; donc il mesure la plus grande commune mesure des nombres Δ, Γ. Mais Ε est la plus grande

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὧν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστιν κοινὸν μέτρον.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὑρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μέτρῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσῃ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλείονων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρίσκειν⁸.

metitur; et ipsorum Δ, Γ igitur maximam communem mensuram metitur. Ipsorum autem Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ipse Ζ igitur ipsum Ε metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numerus aliquis metietur major existens ipso Ε; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, inventa est maxima communis mensura. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex his utique manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

commune mesure des nombres Γ, Δ; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Ε ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Donc, trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, on a trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là que si un nombre en mesure trois autres, il mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

Plusieurs nombres étant donnés, on trouvera de la même manière leur plus grande commune mesure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

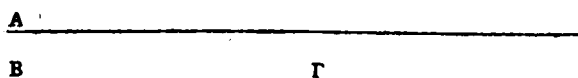
PROPOSITIO IV.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἱλάσσων τοῦ μείζονος, ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρος.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α, ΒΓ, καὶ ἴστω ἱλάσσων ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ ΒΓ τοῦ Α ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρος.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri Α, ΒΓ, et sit minor ΒΓ; dico ΒΓ ipsius Α vel partem esse vel partes.



Οἱ Α, ΒΓ¹ γὰρ ἥτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρῶτον οἱ Α, ΒΓ² πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρέντος δὲ τοῦ ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ ΒΓ μέρος τὸ τοῦ Α· ὥστε μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Μὴ ἴστωσαν δὲ οἱ Α, ΒΓ³ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὲ ΒΓ τὸν Α ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Εἰ μὲν οὖν ὁ ΒΓ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Ipsi Α, ΒΓ enim vel primi inter se sunt, vel non; sint primum Α, ΒΓ primi inter se, et divisio ΒΓ in unitates quæ in ipso, erit quæque unitas earum quæ in ΒΓ pars aliqua ipsius Α; quare partes est ΒΓ ipsius Α.

Non sint autem Α, ΒΓ primi inter se; ipse utique ΒΓ ipsum Α vel metitur, vel non metitur. Si autem ΒΓ ipsum Α metitur, pars est ΒΓ ipsius Α.

PROPOSITION IV.

Tout nombre est ou une partie ou plusieurs parties de tout autre nombre, le plus petit du plus grand.

Soient deux nombres Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit le plus petit; je dis que ΒΓ est ou une partie ou plusieurs parties de Α.

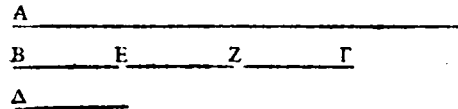
Car les nombres Α, ΒΓ sont premiers entr'eux, ou non; qu'ils soient d'abord premiers entr'eux; ayant divisé le nombre ΒΓ en ses unités, chacune des unités de ΒΓ sera quelque partie de Α (déf. 1 et 2. 7); donc ΒΓ sera plusieurs parties de Α.

Que les nombres Α, ΒΓ ne soient pas premiers entr'eux; le nombre ΒΓ mesure Α ou ne le mesure pas. Si ΒΓ mesure Α, le nombre ΒΓ est une partie de Α.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 395

Εἰ δὲ οὐ. Εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διηρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῶν Δ ἴσους, τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἵπαι ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α. Ἴσος δὲ ἕκαστῳ

Si autem non. Sumatur ipsorum Α, ΒΓ maxima communis mensura Δ, et dividatur ΒΓ in numeros ipsi Δ æquales ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Et quoniam Δ ipsum Α metitur, pars est Δ ipsius Α.



τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. Ἀπας ἄρα ἀριθμὸς, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Æqualis igitur unicuique ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; et unusquisque igitur ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ ipsius Α pars est; quare partes est ΒΓ ipsius Α. Omnis igitur numerus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO V.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφοτέρος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται, ἔπειρ ὁ εἰς τοῦ ἑνός.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars; et uterque simul utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τῶν ΒΓ μέρος ἴστω,

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter

S'il ne le mesure pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, ΒΓ (2. 7), et partageons ΒΓ en parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ égales à Δ. Puisque Δ mesure Α, le nombre Δ est une partie de Α. Mais Δ est égal à chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; donc chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ est une partie de Α; donc ΒΓ est plusieurs parties de Α. Donc, etc.

PROPOSITION V.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, leur somme sera aussi la même partie de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre

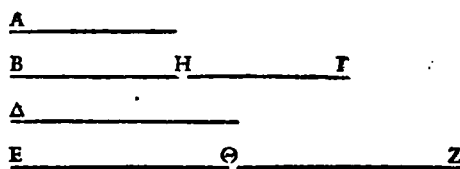
396 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ἑτέρος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ A τοῦ $B\Gamma$. λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ A , Δ συναμφοτέρου τοῦ $B\Gamma$, EZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ A τοῦ $B\Gamma$.

Επεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ $B\Gamma$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ EZ . ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $B\Gamma$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A , τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ . Διηρήσθω ὁ μὲν $B\Gamma$ εἰς τοὺς τῷ A ἴσους τοὺς BH , $H\Gamma$. ὁ δὲ EZ

Δ alterius EZ eadem pars, quæ ipse A ipsius $B\Gamma$; dico et utrumque simul A , Δ utriusque simul $B\Gamma$, EZ eandem partem esse quæ ipse A ipsius $B\Gamma$.

Quoniam enim quæ pars est A ipsius $B\Gamma$, eadem pars est et Δ ipsius EZ ; quot igitur sunt in $B\Gamma$ numeri æquales ipsi A , tot sunt et in EZ numeri æquales ipsi Δ . Dividatur $B\Gamma$ quidem in numeros ipsi A æquales BH , $H\Gamma$; ipse



εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς $E\Theta$, ΘZ . ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH , $H\Gamma$ τῷ πλῆθει τῶν $E\Theta$, ΘZ . Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A , ὁ δὲ $E\Theta$ τῷ Δ . καὶ οἱ BH , $E\Theta$ ἄρα τοῖς A , Δ ἴσοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ $H\Gamma$ τῷ A ἴσος ἐστὶν, ὁ δὲ ΘZ τῷ Δ . καὶ οἱ $H\Gamma$, ΘZ ἄρα τοῖς A , Δ ἴσοι εἰσὶν³. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $B\Gamma$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A , τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς $B\Gamma$, EZ ἴσοι τοῖς A , Δ . ὅσα πλάσιων ἄρα ἐστὶν ὁ $B\Gamma$ τοῦ⁴ A , τοσαυταπλάσιων ἐστὶ, καὶ συναμφοτέρος ὁ $B\Gamma$, EZ

vero EZ in numeros ipsi Δ æquales $E\Theta$, ΘZ ; erit utique æqualis multitudo ipsorum BH , $H\Gamma$ multitudini ipsorum $E\Theta$, ΘZ . Et quoniam æqualis est BH quidem ipsi A , ipse vero $E\Theta$ ipsi Δ ; et BH , $E\Theta$ igitur ipsis A , Δ æquales. Propter eadem utique et $H\Gamma$ ipsi A æqualis est, ipse autem ΘZ ipsi Δ ; et $H\Gamma$, ΘZ igitur ipsis A , Δ æquales sunt; quot igitur sunt in $B\Gamma$ numeri æquales ipsi A , tot sunt et in ipsis $B\Gamma$, EZ æquales ipsis A , Δ ; quam multiplex igitur est $B\Gamma$ ipsius A , tam mul-

Δ soit la même partie d'un autre nombre EZ , que A l'est de $B\Gamma$; je dis que la somme de A et de Δ est la même partie de la somme de $B\Gamma$ et de EZ , que A l'est de $B\Gamma$.

Car puisque A est la même partie de $B\Gamma$, que Δ l'est de EZ , il y aura dans $B\Gamma$ autant de nombres égaux à A , qu'il y a dans EZ de nombres égaux à Δ . Partageons $B\Gamma$ en nombres BH , $H\Gamma$ égaux à A , et EZ en nombres $E\Theta$, ΘZ égaux à Δ , la quantité des nombres BH , $H\Gamma$ sera égale à la quantité des nombres $E\Theta$, ΘZ . Mais BH est égal à A , et $E\Theta$ égal à Δ ; donc la somme de BH et de $E\Theta$ est égale à la somme de A et de Δ . Par la même raison, $H\Gamma$ est égal à A , et ΘZ égal à Δ ; donc la somme de $H\Gamma$ et de ΘZ est égale à la somme de A et de Δ ; il y a donc dans $B\Gamma$ autant de nombres égaux à A , qu'il y a dans $B\Gamma$, EZ de

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 397

συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

tiplex est et uterque simul ΒΓ, ΕΖ utriusque simul Α, Δ; quæ igitur pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et uterque simul Α, Δ utriusque simul ΒΓ, ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

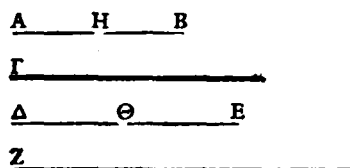
Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ καὶ συναμφοτέρως συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὁ εἰς τοῦ ἐνός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἴστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρως ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

PROPOSITIO VI.

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eadem partes est; et uterque simul utriusque simul eadem partes erit quæ unus unius.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes quæ ΑΒ ipsius Γ; dico et utrumque simul ΑΒ, ΔΕ utriusque simul Γ, Ζ eadem partes esse, quæ ΑΒ ipsius Γ.



Επεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν

Quoniam enim quæ partes est ΑΒ ipsius Γ eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur

nombres égaux aux nombres Α, Δ; donc ΒΓ est le même multiple de Α, que la somme de ΒΓ et de ΕΖ l'est de la somme de Α et de Δ; donc Α est la même partie de ΒΓ que la somme de Α et de Δ, l'est de la somme de ΒΓ et de ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

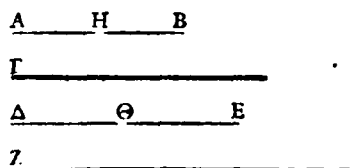
Si un nombre est plusieurs parties d'un nombre, et si un autre nombre est les mêmes parties d'un autre nombre, leur somme sera les mêmes parties de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre ΑΒ soit plusieurs parties du nombre Γ, et qu'un autre nombre ΔΕ soit les mêmes parties d'un autre nombre Ζ, que ΑΒ l'est de Γ; je dis que la somme de ΑΒ et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ que ΑΒ l'est de Γ.

398 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηγήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in ipsius Γ partes ΑΗ, ΗΒ, ipse vero ΔΕ in ipsius Ζ partes ΔΘ, ΘΕ.



Εἰσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλῆθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ³ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ, καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ⁴ καὶ συναμφοτέρως ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ἂ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ AB, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. Οὔτε ἴδει δειξαι.

Erit utique æqualis multitudo ipsorum ΑΗ, ΗΒ multitudini ipsorum ΔΘ, ΘΕ. Et quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ; quæ igitur pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et uterque simul ΑΗ, ΔΘ utriusque simul Γ, Ζ. Propter eadem utique et quæ pars est ΗΒ ipsius Γ, et ipse ΘΕ ipsius Ζ; ipse igitur pars est ΗΒ ipsius Γ et uterque simul ΗΒ, ΘΕ utriusque simul Γ, Ζ; quæ igitur partes est AB ipsius Γ, eadem partes est et uterque simul AB, ΔΕ utriusque simul Γ, Ζ. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Partageons AB en parties de Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΒ; partageons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ.

Le nombre des parties ΑΗ, ΗΒ sera égal au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque ΑΗ est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Ζ, ΑΗ est la même partie de Γ, que la somme de ΑΗ et de ΔΘ l'est de la somme de Γ et de Ζ (5. 7). Par la même raison, ΗΒ est la même partie de Γ, que ΘΕ l'est de Ζ; donc ΗΒ est la même partie de Γ, que la somme de ΗΒ et de ΘΕ l'est de la somme de Γ et de Ζ; donc la somme de AB et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ, que AB l'est de Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρέ-
θῃς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ
αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος
ἔστω, ὅπερ ἀφαιρέθῃς ὁ AE ἀφαιρεθέντος τοῦ
ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ
τὸ αὐτὸ μέρος ἔστιν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου
τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri pars est, quæ ablatuſ
ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit,
quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ pars sit, quæ
ablatuſ AE ablati ΓΖ; dico et reliquum EB re-
liqui ΖΔ eandem partem esse, quæ totus AB
totius ΓΔ.



Ο γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ
μέρος ἔστω καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος
ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ
EB τοῦ ΓΗ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ,
τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΗΖ, ὁ δὲ
μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπό-
κειται καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ

Quæ enim pars est AE ipsius ΓΖ, eadem
pars sit et EB ipsius ΓΗ. Et quoniam quæ
pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars est EB
ipsius ΓΗ; quæ igitur pars est AE ipsius ΓΖ,
eadem pars est et AB ipsius ΗΖ; quæ autem
pars est AE ipsius ΓΖ, eadem pars ponitur et
AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est et AB ipsius

PROPOSITION VII.

Si un nombre est la même partie d'un nombre, que le nombre retranché
l'est du nombre retranché, le nombre restant sera la même partie du nombre
restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit la même partie du nombre ΓΔ, que le nombre
retranché AE l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB
est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du
nombre entier ΓΔ.

Que EB soit la même partie de ΓΗ, que AE l'est de ΓΖ. Puisque AE est
la même partie de ΓΖ, que EB l'est de ΓΗ; le nombre AE est la même
partie de ΓΖ, que AB l'est de ΗΖ (5. 7); mais on a supposé que AE est la même
partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de ΗΖ, que

400 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ AB τοῦ HZ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ^α. ὁ AB ὅρα ἑκατέρου τῶν HZ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ HZ τῷ ΓΔ. Κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσος^β. Καὶ ἐπὶ δ' μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ^γ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ^δ ΖΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ

HZ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; ipse AB igitur utriusque ipsorum HZ, ΓΔ eadem pars est; æqualis igitur est HZ ipsi ΓΔ. Communis aufe-
ratur ΓΖ; reliquus igitur ΗΓ reliquo ΖΔ est æqualis. Et quoniam quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΗΓ, æqualis autem ΗΓ ipsi ΖΔ; quæ igitur pars est ΑΕ ipsius



ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ^β. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΖΔ. Sed quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est ΕΒ ipsius ΖΔ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus AB totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de HZ et de ΓΔ; donc HZ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; la partie restante ΗΓ sera égale à la partie restante ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΗΓ, et ΗΓ est égal a ΖΔ; donc ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc ΕΒ est la même partie de ΖΔ, que AB l'est de ΓΔ; donc le nombre restant ΕΒ est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

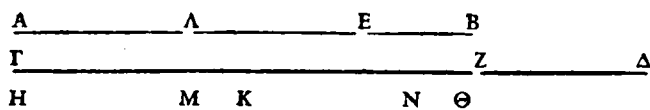
PROPOSITIO VIII.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, ἅπερ ἀφαιρέ-
θῃς ἀφαιρέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ
αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἴστω,
ἅπερ ἀφαιρέθῃς ὁ AE ἀφαιρέντος τοῦ ΓΖ·
λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ
αὐτὰ μέρη ἴστων, ἅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri partes est, quæ ablatu
ablatis; et reliquus reliqui eadem partes erit,
quæ totus-totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ partes sit,
quæ ablatu AE ablati ΓΖ; dico et reliquum
EB reliqui ΖΔ easdem partes esse, quæ totus
AB totius ΓΔ.



Κείσθω γὰρ τῷ AB ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἴστων
ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἴστω καὶ ὁ AE τοῦ
ΓΖ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ
ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ AE εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ·
ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλῆθει
πάν ΑΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἴστων ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,
τὸ αὐτὸ μέρος ἴστω καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ· μείζων δὲ ὁ
ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. Κείσθω
τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὁ ἄρα μέρος ἴστων ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,

Ponatur enim ipsi AB æqualis ΗΘ; quæ
igitur partes est ΗΘ ipsius ΓΔ, eadem partes
est et AE ipsius ΓΖ. Dividatur ΗΘ quidem in
ipsius ΓΔ partes ΗΚ, ΚΘ, ipse vero AE in
ipsius ΓΖ partes ΑΛ, ΛΕ; erit igitur æqualis
multitudo ΗΚ, ΚΘ ipsi multitudini ΑΛ, ΛΕ.
Et quoniam quæ pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, ea-
dem pars est et ΑΛ ipsius ΓΖ; major autem
ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΗΚ ipso ΑΛ. Po-

PROPOSITION VIII.

Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, que le nombre re-
tranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera aussi les mêmes parties
du nombre restant, que le tout l'est du tout.

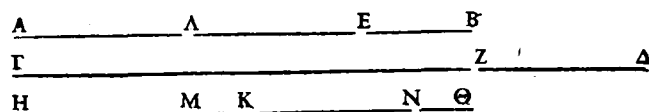
Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre ΓΔ, que le nombre
retranché AE l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB
est les mêmes parties du nombre restant ΖΔ, que le tout AB l'est du tout ΓΔ.

Faisons ΗΘ égal à AB; le nombre ΗΘ sera les mêmes parties de ΓΔ, que AE
l'est de ΓΖ. Divisons ΗΘ en parties de ΓΔ, et que ces parties soient ΗΚ, ΚΘ;
divisons ΔΕ en parties de ΓΖ, et que ces parties soient ΑΛ, ΛΕ; le nombre
des parties ΗΚ, ΚΘ sera égal au nombre des parties ΑΛ, ΛΕ. Et puisque
ΗΚ est la même partie de ΓΔ, que ΑΛ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que
ΓΖ, ΗΚ est plus grand que ΑΛ. Faisons ΗΜ égal à ΑΛ; ΗΚ sera la même partie

402 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛΕ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΛΕ. Κείσθω τῷ ΛΕ ἴσος ὁ ΚΝ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ

natur ipsi ΛΑ æqualis ipse ΗΜ; quæ igitur pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΗΜ ipsius ΓΖ; et reliquus igitur ΜΚ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus ΗΚ totius ΓΔ. Rursus, quoniam quæ pars est ΚΘ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΛΕ ipsius ΓΖ, major autem ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΚΘ ipso ΛΕ. Ponatur ipsi ΛΕ æqualis ipse ΚΝ; quæ igitur pars est ΚΘ ipsius ΓΔ, eadem pars est et ΚΝ ipsius ΓΖ; et re-



ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΔΓ· καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΔΓ. Ἴσος δὲ συναμφοτέρως μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

liquis igitur ΝΘ reliqui ΖΔ eadem pars est, quæ totus ΚΘ totius ΓΔ. Ostensum autem est et reliquum ΜΚ reliqui ΖΔ eandem partem esse quæ totus ΗΚ totius ΔΓ; et uterque simul igitur ΜΚ, ΝΘ ipsius ΔΖ eadem partes est quæ totus ΘΗ totius ΔΓ. Æqualis autem uterque simul ΜΚ, ΝΘ quidem ipsi ΕΒ, ipse vero ΘΗ ipsi ΒΑ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eadem partes est quæ totus ΑΒ totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

de ΓΔ, que ΗΜ l'est de ΓΖ; donc le reste ΜΚ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΗΚ l'est du tout ΓΔ. De plus, puisque ΚΘ est la même partie de ΓΔ, que ΛΕ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que ΓΖ, ΚΘ est plus grand que ΛΕ. Faisons ΚΝ égal à ΛΕ; ΚΘ sera la même partie de ΓΔ, que ΚΝ l'est de ΓΖ; donc le reste ΝΘ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΚΘ l'est du tout ΓΔ. Mais on a démontré que le reste ΜΚ est la même partie du reste ΖΔ, que le tout ΗΚ l'est du tout ΔΓ; donc la somme de ΜΚ et de ΝΘ, est les mêmes parties de ΔΖ, que le tout ΘΗ l'est du tout ΔΓ. Mais la somme de ΜΚ et de ΝΘ est égale à ΕΒ, et ΘΗ égal à ΒΑ; donc le reste ΕΒ est les mêmes parties du reste ΖΔ, que le tout ΑΒ l'est du tout ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

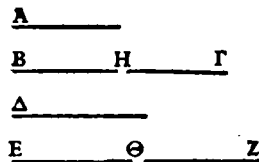
PROPOSITIO IX.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἦ¹· καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ Α τοῦ Δ²· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars est; et alterne quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem pars erit vel eadem partes et secundus quarti.

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter Δ alterius ΕΖ eadem pars quæ Α ipsius ΒΓ, minor autem sit Α ipso Δ; dico et alterne quæ pars est Α ipsius Δ vel partes, eandem partem esse et ΒΓ ipsius ΕΖ vel partes.



Επεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ; τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ³ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν πᾶσι ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt

PROPOSITION IX.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, le premier est, par permutation, la même partie ou les mêmes parties du troisième, que le second l'est du quatrième.

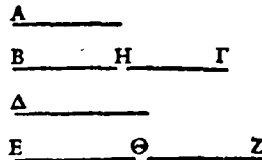
Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre Δ soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ, et que Α soit plus petit que Δ; je dis que, par permutation, Α est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ.

Puisque Α est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y a dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux

404 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς
τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς
τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἴσον ἴσται δὴ τὸ
πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

et in ΕΖ æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ qui-
dem in ipsos ipsi Α æquales ΒΗ, ΗΓ, ipse
vero ΕΖ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΘ, ΘΖ; æ-
qualis erit utique multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ
multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλή-
λοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλ-
λήλοις, καὶ ἴστω τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ
τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ
ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ
ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρος· ὥστε καὶ ὁ
μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ
μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρως ὁ ΒΓ συναμφοτέ-
ρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρος· ἴσος δὴ ὁ μὲν ΒΗ
τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α
τοῦ Δ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ
τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρος. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΓ numeri
inter se, sunt autem et ΕΘ, ΘΖ numeri æ-
quales inter se, et est æqualis multitudo ipso-
rum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ;
quæ igitur pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes,
eadem pars est et ΗΓ ipsius ΘΖ vel eadem
partes; quare et quæ pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel
partes, eadem pars est et uterque simul ΒΓ,
utriusque simul ΕΖ vel eadem partes; æqua-
lis utique ΒΗ quidem ipsi Α, ipse vero ΕΘ
ipsi Δ; quæ igitur pars est et Α ipsius Δ
vel partes, eadem pars est et ΒΓ ipsius ΕΖ vel
eadem partes. Quod oportebat ostendere.

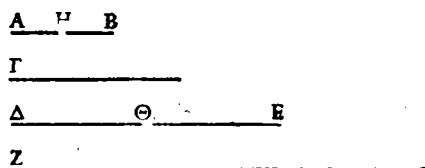
à Δ. Partageons ΒΓ en parties égales à Α, et que ces parties soient ΒΗ, ΗΓ;
partageons aussi ΕΖ en parties égales à Δ, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ; le
nombre des parties ΒΗ, ΗΓ sera égal au nombre des parties ΕΘ, ΘΖ.

Puisque les nombres ΒΗ, ΗΓ sont égaux entr'eux, que les nombres ΕΘ,
ΘΖ sont aussi égaux entr'eux, et que la quantité des nombres ΒΗ, ΗΓ est égale
à la quantité des nombres ΕΘ, ΘΖ, le nombre ΒΗ est la même partie ou les
mêmes parties de ΕΘ, que ΗΓ l'est de ΘΖ; donc ΒΗ est la même partie ou
les mêmes parties de ΕΘ, que la somme ΒΓ l'est de la somme ΕΖ (5 et 6. 7).
Mais ΒΗ est égal à Α, et ΕΘ égal à Δ; donc Α est la même partie ou les
mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλάξ ἃ μέρη· ἔστιν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ¹ μέρος.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ AB τοῦ ΔΕ ἐλάσσων²· λέγω καὶ ἐναλλάξ ἃ μέρη ἔστιν ὁ AB τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτό³ μέρος.



Επεὶ γὰρ ἃ μέρη ἔστιν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ,

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eadem partes; et alterne quæ partes est primus tertii vel pars, eadem partes erit et secundus quarti vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes, sit autem AB ipso ΔΕ minor; dico et alterne quæ partes est AB ipsius ΔΕ vel pars, easdem partes esse et Γ ipsius Ζ vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes est AB ipsius Γ, eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in partes ΑΗ, ΗΒ ipsius Γ, ipse vero ΔΕ in partes ΔΘ, ΘΕ ipsius Ζ; erit utique æqualis multi-

PROPOSITION X.

Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, qu'un autre l'est d'un autre, le premier sera aussi, par permutation, les mêmes parties ou la même partie du troisième, que le second l'est du quatrième.

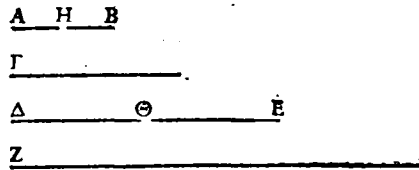
Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre Γ, qu'un autre nombre ΔΕ l'est d'un autre nombre Ζ, et que AB soit plus petit que ΔΕ; je dis que, par permutation, AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ, que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Divisons AB en parties de Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΒ; divisons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ; le nombre des parties ΑΗ, ΗΒ sera égal

406 , LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

HB τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος
 ἴσθιν ὁ ΑΗ τοῦ⁴ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσθι καὶ ὁ
 ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἴσθιν ὁ ΑΗ τοῦ
 ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσθι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ
 ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος
 ἴσθιν ὁ ΗΒ τοῦ⁵ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος
 ἴσθι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ
 ὁ μέρος ἴσθιν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ

tudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΔΘ,
 ΘΕ. Et quoniam quæ pars est AH ipsius Γ,
 eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ, et alterne quæ
 pars est AH ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars
 est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes. Propter
 eadem utique et quæ pars est HB ipsius ΘΕ
 vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel
 eadem partes; quare si quæ pars est AH ip-



μέρος ἴσθι καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ
 ὁ ἄρα μέρος ἴσθιν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ
 αὐτὸ μέρος ἴσθι καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ
 μέρη⁶· ἀλλ' ὁ μέρος ἴσθιν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη,
 τὸ αὐτὸ μέρος ἰδίχθην⁷ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ
 μέρη, καὶ ὁ ἄρα⁸ μέρη ἴσθιν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ
 μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἴσθι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ
 αὐτὸ μέρος. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

sus ΔΘ vel partes, eadem pars est et HB
 ipsius ΘΕ vel eadem partes; et quæ igitur pars
 est AH ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est
 et AB ipsius ΔΕ vel eadem partes; sed quæ pars
 est AH ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars ostensa
 est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes, et quæ igitur
 partes est AB ipsius ΔΕ vel pars, eadem par-
 tes est et Γ ipsius Ζ vel eadem pars. Quod
 oportebat ostendere.

au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque AH est la même partie de Γ, que ΔΘ
 l'est de Ζ; par permutation, AH est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ,
 que Γ l'est de Ζ (9. 7). Par la même raison, HB est la même partie ou les
 mêmes parties de ΘΕ, que Γ l'est de Ζ; donc AH est la même partie ou les
 mêmes parties de ΔΘ, que HB l'est de ΘΕ (5 et 6. 7); donc AH est la même
 partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que AB l'est de ΔΕ; mais on a démontré
 que AH est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ;
 donc AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ.
 Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

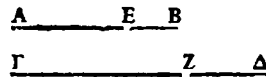
PROPOSITIO XI.

Εάν ἡ ὥς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὥς ὅλος πρὸς ὅλον.

Εστω ὥς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστὶν ὥς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Si est ut totus ad totum ita ablatum ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatum AE ad ablatum ΓΖ; dico et reliquum EB ad reliquum ΖΔ esse ut totus AB ad totum ΓΔ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὥς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΓΔ ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρος, ἅπир AB τοῦ ΓΔ· ἐστὶν ἄρα ὥς ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ. Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; quæ igitur pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars est et AE ipsius ΓΖ vel eadem partes; et reliquus igitur EB reliqui ΖΔ eadem pars est vel partes, quæ AB ipsius ΓΔ; est igitur ut EB ad ΖΔ ita AB ad ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XI.

Si le tout est au tout comme le nombre retranché est au nombre retranché, le nombre restant sera aussi au nombre restant comme le tout est au tout.

Que le tout AB soit au tout ΓΔ comme le nombre retranché AE est au nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est au nombre restant ΖΔ comme le tout AB est au tout ΓΔ.

Car, puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, AB est la même partie ou les mêmes parties de ΓΔ que AE l'est de ΓΖ; donc le reste EB est la même partie ou les mêmes parties du reste ΖΔ que AB l'est de ΓΔ (7 et 8. 7); donc EB est à ΖΔ comme AB est à ΓΔ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

PROPOSITIO XII.

Εάν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἱπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγουμένοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἱπομένους.

Εστώσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Si sunt quotcunque numeri proportionales, erit ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico esse ut Α ad Β ita ipsos Α, Γ ad ipsos Β, Δ.

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{E} & \text{B} \\ \hline \text{Γ} & \text{Z} & \text{Δ} \end{array}$$

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρος, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρος· καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel partes; et uterque simul igitur Α, Γ utriusque simul Β, Δ eadem pars est vel eadem partes, quæ Α ipsius Β; est igitur ut Α ad Β ita ipsi Α, Γ ad ipsos Β, Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres proportionnels qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, Α est la même partie ou les mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc Α est la même partie ou les mêmes parties de Β que Γ l'est de Δ; donc la somme des nombres Α, Γ est la même partie ou les mêmes parties de la somme des nombres Β, Δ, que Α l'est de Β (5 et 6. 7); donc Α est à Β comme la somme des nombres Α, Γ est à la somme des nombres Β, Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

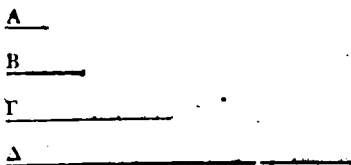
PROPOSITIO XIII.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσι· καὶ ἐκα-
λάξ ἀνάλογον ἔσονται.

Εστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β,
Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ·
λέγω ὅτι καὶ ἐκαλλάξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α
πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Si quatuor numeri proportionales sunt; et
alterne proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β,
Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne
proportionales fore, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ
πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ
μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ
αὐτὰ μέρη· ἐκαλλάξ ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ
Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ
τὰ αὐτὰ μέρη· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ
οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; quæ
igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars
est et Γ ipsius Δ vel eadem partes; alterne igitur
quæ pars est Α ipsius Γ vel partes, eadem pars
est et Β ipsius Δ vel eadem partes; Est igitur ut
Α ad Γ ita Β ad Δ. Quod oportebat ostē-
dere.

PROPOSITION XIII.

Si quatre nombres sont proportionnels; ils seront encore proportionnels par
permutation.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres proportionnels, et que Α soit à Β comme
Γ est à Δ; je dis qu'ils seront encore proportionnels, par permutation, c'est-à-
dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ; Α est la même partie ou les
mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc, par permutation,
Α est la même ou les mêmes parties de Γ, que Β l'est de Δ (9 et 10. 7); donc
Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν ὧσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται.

Εστώσαν γάρ¹ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ² ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὥς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὥς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ διίσου ἐστὶν ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Si sunt quotcunque numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri Α, Β, Γ, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione Δ, Ε, Ζ, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur est ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Rursus, quoniam est ut Β ad Γ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Β ad Ε ita Γ ad Ζ. Ut autem Β ad

PROPOSITION XIV.

Si l'on a tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres égaux en quantité aux premiers, et si ces nombres étant pris deux à deux sont en même raison, ils seront aussi en même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres Δ, Ε, Ζ égaux en quantité à ceux-ci, que ces nombres soient pris deux à deux et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que, par égalité, Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Car, puisque Α est à Β comme Δ est à Ε, par permutation, Α est à Δ comme Β est à Ε (13. 7). De plus, puisque Β est à Γ comme Ε est à Ζ; par permu-

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 411

ἄρα ἴσθιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ ἄρα ἴσθιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπρι ἴδει δείξαι.

E ita A ad Δ; et ut igitur A ad Δ ita Γ ad Z; alterne igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

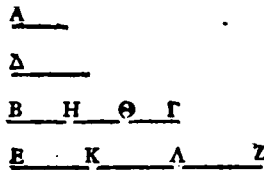
Εὰν μονὰς ἀριθμὸν τινα μετρή, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινα ἀριθμὸν μετρή· καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσιν καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἢ Α ἀριθμὸν τινα τὸν ΒΓ μετρίτω, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινα ἀριθ-

PROPOSITIO XV.

Si unitas numerum aliquem metitur, æqualiter autem alter numerus alium aliquem numerum metitur; et alterne æqualiter unitas tertium numerum metietur ac secundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem ΒΓ metiatur, æqualiter autem alter numerus Δ alium



μὸν τὸν ΕΖ μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρή καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

aliquem numerum EZ metiatur; dico et alterne æqualiter A unitatem ipsum Δ numerum metiri ac ΒΓ ipsum EZ.

tation, B est à E comme Γ est à Z. Mais B est à E comme A est à Δ; donc A est à Δ comme Γ est à Z; donc, par permutation, A est à Γ comme Δ est à Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XV.

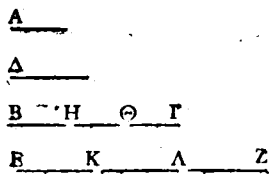
Si l'unité mesure un nombre autant de fois qu'un autre nombre mesure un autre nombre; par permutation, l'unité mesurera autant de fois le troisième nombre que le second mesure le quatrième.

Que l'unité A mesure un nombre BR autant de fois qu'un autre nombre Δ mesure un autre nombre EZ; je dis que, par permutation, l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que BR mesure EZ.

412 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες τοσούτοι εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διηρίσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ

Quoniam enim æqualiter Α unitas ipsum ΒΓ numerum metitur ac Δ ipsum ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ unitates tot sunt et in ΕΖ numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in ipsas in eo unitates ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ipse vero ΕΖ in ipsos ipsi Α æquales ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ; erit igitur æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitates inter



ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ ἀριθμῶν· ἔσται³ ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΑΖ ἀριθμὸν. Ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς

se, sunt autem et ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ numeri æquales inter se, et est æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitatum multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ numerorum; erit igitur ut ΒΗ unitas ad ΕΚ numerum ita ΗΘ unitas ad ΚΛ numerum, et ΘΓ unitas ad ΑΖ numerum. Erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΒΗ

Puisque l'unité Α mesure le nombre ΒΓ autant de fois que Δ mesure ΕΖ, il y aura dans ΒΓ autant d'unités, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ. Partageons ΒΓ en ses unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, et partageons ΕΖ en nombres égaux à Δ, et que ces nombres soient ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ; la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Puisque les unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sont égales entr'elles, que les nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ sont égaux entr'eux, et que la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ est égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ, l'unité ΒΗ sera au nombre ΕΚ comme l'unité ΗΘ est au nombre ΚΛ, et comme l'unité ΘΓ est au nombre ΑΖ. Donc un antécédent sera à son conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 7); donc l'unité ΒΗ est au nombre ΕΚ comme ΒΓ est

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 413.

τὸν ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ· ἰσάκεις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

unitas ad ΕΚ numerum ita ΒΓ ad ΕΖ. Æqualis autem ΒΗ unitas ipsi Α unitati, ipse vero ΕΚ numerus ipsi Δ numero; est igitur ut Α unitas ad Δ numerum ita ΒΓ ad ΕΖ; æqualiter igitur Α unitas ipsum Δ numerum metitur ac ΒΓ ipsum ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

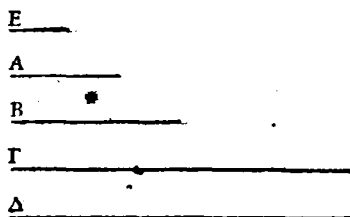
Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Εστώσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β

PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri multiplicantes sese faciunt aliquos; facti ex ipsis æquales inter se erunt.

Sint duo numeri Α, Β, et Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat, ipse vero Β



τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω· ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

ipsum Α multiplicans ipsum Δ faciat; dico æqualem esse Γ ipsi Δ.

à ΕΖ. Mais l'unité ΒΗ est égale à l'unité Α, et le nombre ΕΚ au nombre Δ; donc l'unité Α est au nombre Δ comme ΒΓ est à ΕΖ; donc l'unité Α mesure le nombre Δ autant de fois que ΒΓ mesure ΕΖ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres se multipliant l'un et l'autre en produisent d'autres; les nombres produits seront égaux entr'eux.

Soient les deux nombres Α, Β; que Α multipliant Β produise Γ, et que Β multipliant Α produise Δ; je dis que Γ est égal à Δ.

414 LE SEPTIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκιν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκιν· ὁ Α ἄρα τὸν

Quoniam enim Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit ; Β igitur ipsum Γ metitur per ipsas in Α unitates. Metitur autem et Ε unitas ipsum Α numerum per ipsas in eo unitates ; æqualiter igitur Ε unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Γ ; alterne igitur æqualiter Ε unitas ipsum Β numerum metitur ac Α ipsum Γ. Rursus , quoniam Β ipsum Α multiplicans

Ε
Α
Β
Γ
Δ

Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. ἰσάκεις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Α ἰκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Δ fecit; ipse Α igitur ipsum Δ metitur per ipsas in Β unitates. Metitur autem et Ε unitas ipsum Β per ipsas in eo unitates ; æqualiter igitur Ε unitas ipsum Β numerum metitur ac Α ipsum Δ. Æqualiter autem Ε unitas ipsum Β numerum metitur ac Α ipsum Γ. Æqualiter igitur Α utrumque ipsorum Γ, Δ metitur; æqualis igitur est Γ ipsi Δ. Quod oportebat ostendere.

Car, puisque Α multipliant Β a produit Γ; Β mesure Γ par les unités qui sont en Α (déf. 15. 7). Mais l'unité Ε mesure le nombre Α par les unités qu'il contient; donc l'unité Ε mesure le nombre Α autant de fois que Β mesure Γ; donc, par permutation, l'unité Ε mesure le nombre Β autant de fois que Α mesure Γ (15. 7). De plus, puisque Β multipliant Α a produit Δ, Α mesure Δ par les unités qui sont en Β. Mais l'unité Ε mesure le nombre Β par les unités qu'il contient; donc l'unité Ε mesure le nombre Β autant de fois que Α mesure Δ. Mais l'unité Ε mesure le nombre Β autant de fois que Α mesure Γ; donc Α mesure également Γ et Δ; donc Γ est égal à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

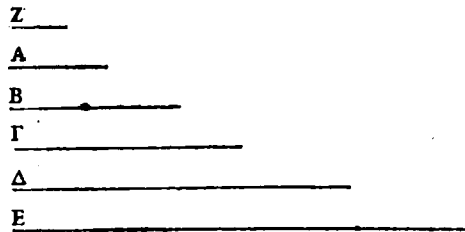
PROPOSITIO XVII.

Ἐάν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσιν ἰσὺν πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Si numerus duos numeros multiplicans facit aliquos, facti ex ipsis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

Numerus enim Α duos numeros Β, Γ multiplicans ipsos Δ, Ε faciat; dico esse ut Β ad Γ ita Δ ad Ε.



Ἐπὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποῖκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ

Quoniam enim Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; Β igitur ipsum Δ metitur per ipsas in Α unitates. Metitur autem et Ζ unitas ipsum Α numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur Ζ unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Δ; est igitur ut Ζ unitas ad Α numerum ita Β ad Δ. Propter eandem uti-

PROPOSITION XVII.

Si un nombre multipliant deux nombres en produit d'autres; les nombres produits auront la même raison que les nombres multipliés.

Que le nombre Α multipliant les nombres Β, Γ produise les nombres Δ, Ε; je dis que Β est à Γ comme Δ est à Ε.

Car, puisque Α multipliant Β a produit Δ; Β mesure Δ par les unités qui sont en Α (déf. 15. 7). Mais l'unité Ζ mesure le nombre Α par les unités qu'il contient; donc l'unité Ζ mesure le nombre Α autant de fois que Β mesure Δ; donc l'unité Ζ est au nombre Α comme Β est à Δ. Par la même raison,

416 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε³. ἑναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπρι εἶδει δειξαι.

que et ut Z unitas ad A numerum ita Γ ad E; et ut igitur B ad Δ ita Γ ad E; alterne igitur est ut B ad Γ ita Δ ad E. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινὰ πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινὰς· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἔχουσι τὸν λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινὰ τὸν

PROPOSITIO XVIII.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes faciunt aliquos; facti ex ipsis et eadem habebunt rationem quam multiplicantes.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem Γ

A _____
B' _____
Γ _____
Δ _____
E _____

Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιήτωσαν λόγον ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

multiplicantes ipsos Δ, Ε faciant; dico esse ut A ad B ita Δ ad E.

L'unité Z est au nombre A comme Γ est à E; donc B est à Δ comme Γ est à E; donc, par permutation, B est à Γ comme Δ est à E (13. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Si deux nombres multipliant un autre nombre en produisent d'autres; les nombres produits auront la même raison que les multiplicateurs.

Que les deux nombres A, B multipliant un nombre Γ produisent Δ, Ε; je dis que A est à B comme Δ est à E.

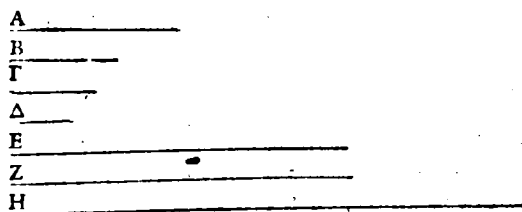
LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 417

Επει γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16'.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινόμενῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστῶσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β,



Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε

Quoniam enim Α ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit ; et Γ igitur ipsum Α multiplicans ipsum Δ fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum Β multiplicans ipsum Ε fecit ; numerus utique Γ duos numeros Α, Β multiplicans ipsos Δ, Ε fecit ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Ε. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales sunt, ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis erit ipsi ex secundo et tertio facto numero ; et si ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis est ipsi ex secundo et tertio , quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β,

Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Α quidem ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse vero Β

Puisque Α multipliant Γ produit Δ, Γ multipliant Α produit Δ (16. 7). Par la même raison Γ multipliant Β produit Ε ; donc Γ multipliant les deux nombres Α, Β produit les nombres Δ, Ε ; donc Α est à Β, comme Δ est à Ε (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

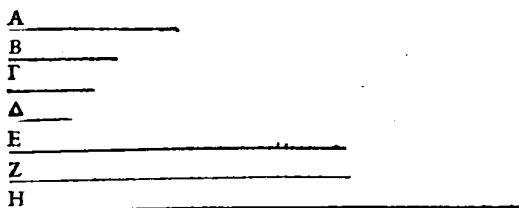
Si quatre nombres sont proportionnels, le nombre produit par le premier et par le quatrième sera égal au nombre produit par le second et par le troisième ; et si le nombre produit par le premier et par le quatrième est égal au nombre produit par le second et par le troisième, les quatre nombres seront proportionnels.

Soient les quatre nombres proportionnels Α, Β, Γ, Δ ; que Α soit à Β comme Γ

418 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ποιεῖτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ
ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

ipsum Γ multiplicans faciat ipsum Ζ ; dico æqua-
lem esse Ε ipsi Ζ.



Ο γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω.
Επεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πε-
ποιήκει, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πε-
ποιήκει· ἀριθμὸς δὲ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ
πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποιήκει· ἐστὶν
ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε.
Ἀλλ' ὡς² ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β·
καὶ ὡς ἄρα³ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε.
Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η
πεποιήκει, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλα-
σιάσας τὸν Ζ πεποιήκει· δύο δὲ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β
ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς
Η, Ζ πεποιήκασιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν
Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α
πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα
ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα
πρὸς ἐκάτερον τῶν⁴ Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·
ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ipsæ enim Α ipsum Γ multiplicans ipsum Η
faciat. Et quoniam Α ipsum Γ multiplicans ipsum
Η fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ε fecit;
numerus utique Α duos numeros Γ, Δ multi-
plicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ
ita Η ad Ε. Sed ut Γ ad Δ ita Α ad Β; et ut
igitur Α ad Β ita Η ad Ε. Rursus, quoniam Α ipsum
Γ multiplicans ipsum Η fecit, sed et Β ipsum Γ
multiplicans ipsum Ζ fecit; duo utique numeri
Α, Β numerum aliquem Γ multiplicantes ipsos
Η, Ζ fecerunt; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Ζ.
Sed et ut Α ad Β ita Η ad Ε; et ut igitur Η ad Ε
ita Η ad Ζ; ipse Η igitur ad utrumque ipsorum
Ε, Ζ eandem habet rationem; æqualis igitur
est Ε ipsi Ζ.

est à Δ ; que Α multipliant Δ produise Ε , et que Β multipliant Γ produise Ζ ; je
dis que Ε est égal à Ζ.

Que Α multipliant Γ produise Η. Puisque Α multipliant Γ produit Η, et que
Α multipliant Δ produit Ε, le nombre Α multipliant les deux nombres Γ, Δ pro-
duit Η, Ε; donc Γ est à Δ comme Η est à Ε (17. 7). Mais Γ est à Δ comme Α est
à Β; donc Α est à Β comme Η est à Ε. De plus, puisque Α multipliant Γ produit Η,
et que Β multipliant Γ produit Ζ; les deux nombres Α, Β multipliant un nom-
bre Γ produisent Η, Ζ (18. 7). Donc Α est à Β comme Η est à Ζ. Mais Α est à Β
comme Η est à Ε; donc Η est Ε comme Η est Ζ; donc Η a la même raison avec
chacun des nombres Ε, Ζ; donc Ε est égal à Ζ.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 419

Εστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἴστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε ποιήκειν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Αλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου². ἰὰν δὲ ὁ ὑπὸ³ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται⁴.

Εστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

De plus, que E soit égal à Z; je dis que A est à B comme Γ est à Δ.

Faisons la même construction. Puisque A multipliant les nombres Γ, Δ produit Η, Ε, le nombre Γ est à Δ comme Η est à Ε. Mais Ε est égal à Ζ; donc Η est à Ε comme Η est à Ζ. Mais Η est à Ε comme Γ est à Δ (18. 7); donc Γ est à Δ comme Η est à Ζ. Mais Η est à Ζ comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Γ est à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si trois nombres sont proportionnels, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen; et si le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, les trois nombres seront proportionnels.

Soient Α, Β, Γ trois nombres proportionnels; que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le produit des nombres Α, Γ est égal au carré de Β.

Sit autem rursus æqualis Ε ipsi Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Γ ad Δ.

Iisdem enim constructis, quoniam Α ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. Æqualis autem Ε ipsi Ζ; est igitur ut Η ad Ε ita Η ad Ζ. Sed ut Η quidem ad Ε ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Η ad Ζ. Ut autem Η ad Ζ ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XX.

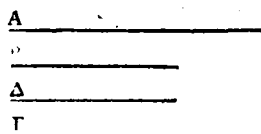
Si tres numeri proportionales sunt, ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio; si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico ipsum ex Α, Γ æqualem esse ipsi ex Β.

420 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κείσθω γὰρ τῷ B ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Δ. Ο δὲ ἐκ τῶν B, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B· ἴσος γὰρ ὁ B τῷ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, Δ. Ipse autem ex B, Δ æqualis est ipsi ex B; æqualis enim B ipsi Δ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B.



Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ B· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ.

Sed et ipse ex A, Γ æqualis sit ipsi ex B; dico esse ut A ad B ita B ad Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἴσος τῷ ὑπὸ⁵ τῶν B, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ἰσος δὲ ὁ B τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipse ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, ipse autem ex B æqualis ipsi ex B, Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Æqualis autem B ipsi Δ; est igitur ut A ad B ita B ad Γ. Quod oportebat ostendere.

Que Δ soit égal à B; A sera à B comme Δ est à Γ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au produit des nombres B, Δ (19. 7). Mais le produit des nombres B, Δ est égal au carré de B; parce que B est égal à Δ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B.

Mais que le produit des nombres A, Γ soit égal au carré de B; je dis que A est à B comme B est à Γ.

Car puisque le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B, et que le carré de B est égal au produit des nombres B, Δ; le nombre A est à B comme Δ est à Γ (19. 7). Mais B est égal à Δ; donc A est à B comme B est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

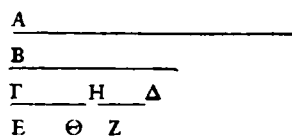
PROPOSITIO XXI.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωτα.

Ἐστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter eos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem.

Sicut enim minimi numeri ΓΔ, ΕΖ ipsorum eandem rationem habentium cum Α, Β; dico æqualiter ΓΔ ipsum Α metiri ac ΕΖ ipsum Β.



Ο ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρη. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἔστιν ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. Διηρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ

Ipsæ ΓΔ enim ipsius Α non est partes. Si enim possibile, sit; et ΕΖ igitur ipsius Β eandem partes est quæ ΓΔ ipsius Α; quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius Α, tot sunt et in ΕΖ partes ipsius Β. Dividatur ΓΔ quidem in ipsas ipsius Α partes ΓΗ, ΗΔ, ipse vero ΕΖ in ipsas ipsius Β partes ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ.

PROPOSITION XXI.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit.

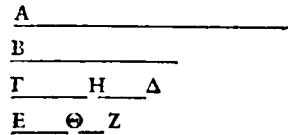
Que ΓΔ, ΕΖ soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Β; je dis que ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β.

Le nombre ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α; car, que cela soit, s'il est possible; ΕΖ sera les mêmes parties de Β que ΓΔ l'est de Α (déf. 20. 7). Il y aura donc dans ΓΔ autant de parties de Α qu'il y dans ΕΖ de parties de Β. Partageons ΓΔ en parties de Α, et que ces parties soient ΓΗ, ΗΔ; et ΕΖ en parties de Β, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ. Le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ sera égal au nombre

422 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

εἰσὶν ἀλλήλοις², εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΟΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις³, καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΟΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαστας τοὺς

Et quoniam æquales ΓΗ, ΗΔ sunt inter se, sunt autem et ΕΘ, ΟΖ numeri inter se æquales, et est æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΟΖ; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΟΖ; erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes



ἐπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττωτες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδυνάτον· ὑπόκειται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΓΔ ad ΕΖ; ipsi ΓΗ, ΕΘ igitur cum ipsis ΓΔ, ΕΖ in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur partes est ΓΔ ipsius Α; pars igitur; et ΕΖ ipsius Β eadem pars est quæ ΓΔ ipsius Α; æqualiter igitur ΓΔ ipsum Α metitur ac ΕΖ ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

des parties ΕΘ, ΟΖ; et puisque les parties ΓΗ, ΗΔ sont égales entr'elles, que les parties ΕΘ, ΟΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ est égal au nombre des parties ΕΘ, ΟΖ; la partie ΓΗ est à la partie ΕΘ comme ΗΔ est à ΟΖ; donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents (12. 7); donc ΓΗ est à ΕΘ comme ΓΔ est à ΕΖ; donc les nombres ΓΗ, ΕΘ sont en même raison que les nombres ΓΔ, ΕΖ qui sont plus petits que ces derniers, ce qui est impossible; car on a supposé que ΓΔ, ΕΖ sont les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; donc ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α. Donc il en est une partie; mais ΕΖ est la même partie de Β que ΓΔ l'est de Α; donc ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 423

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Εάν ὡςι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἥ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ A, B, Γ , καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος οἱ Δ, E, Z , σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ², ἴστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὥς μὲν ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z , ὥς δὲ ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E . λέγω ὅτι καὶ δίσσου ἴσται ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z .

A	
B	
Γ	
Δ	
E	
Z	

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z · ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Z ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, E . Πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E · ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος

Si sunt tres numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres numeri A, B, Γ , et alii Δ, E, Z , ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita E ad Z , ut B vero ad Γ ita Δ ad E ; dico et ex æquo esse ut A ad Γ ita Δ ad Z .

Quoniam enim est ut A ad B ita E ad Z ; ipse igitur ex A, Z æqualis est ipsi ex B, E . Rursus, quoniam ut B ad Γ ita Δ ad E ; ipse igitur ex Γ, Δ æqualis est ipsi ex B, E . Os-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois nombres et autant d'autres nombres, si ces nombres pris deux à deux sont en même raison, et si leur proportion est troublée, ces nombres seront en même raison par égalité.

Soient A, B, Γ trois nombres, et autant d'autres nombres Δ, E, Z ; que ces nombres pris deux à deux soient en même raison, et que leur proportion soit troublée; c'est-à-dire que A soit à B comme E est à Z , et que B soit à Γ comme Δ est à E ; je dis que par égalité A est à Γ comme Δ est à Z .

Car puisque A est à B comme E est à Z , le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E (19. 7). De plus, puisque B est à Γ comme Δ est à E ; le produit des nombres Γ, Δ est égal au produit des nombres B, E . Mais

424 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τῷ ἐξ τῶν B, E. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Z ἴσος τῷ ἐκ τῶν B, E· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Z ἄρα ἴσος τῷ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tensus est autem et ipse A, Z æqualis ipsi ex B, E; et ipse ex A, Z igitur æqualis ipsi ex Γ, Δ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Εστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ A, B· λέγω ὅτι οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint primi inter se numeri A, B; dico ipsos A, B minimos esse eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
E _____

Εἰ γὰρ μὴ', ἔσονται τινες τῶν A, B ἐλάσσονες² ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B. Εστωσαν οἱ Γ, Δ.

Si enim non, erunt aliqui ipsis A, B minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis A, B. Sint Γ, Δ.

on a démontré que le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E; donc le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres Γ, Δ; donc A est à Γ comme Δ est à Z (19. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Que A, B soient des nombres premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Car s'ils ne le sont pas, il y aura des nombres plus petits que A, B qui auront la même raison avec A, B. Que ce soient Γ, Δ.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 425

Επεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα, τουτίστιν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον ἰσάκεις ἄρα ὁ Γ τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν B . Οσάκις δὴ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ E · καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας· καὶ ὁ E ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ E ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἴστί· ἀδύνατον οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν A, B ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὅντις τοῖς A, B · οἱ A, B ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam minimi numeri eorum eandem rationem habentium metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Γ ipsum A metitur ac Δ ipsum B . Quoties autem Γ ipsum A metitur, tot unitates sint in E ; et Δ igitur ipsum B metitur per unitates quæ in E . Et quoniam Γ ipsum A metitur per unitates quæ in E ; et E igitur ipsum A metitur per unitates quæ in Γ . Propter eadem utique et E ipsum B metitur per unitates quæ in Δ ; ipse E igitur ipsos A, B metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis A, B minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis A, B ; ipsi A, B igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Puisque les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; le nombre Γ mesurera le nombre A autant de fois que Δ mesurera B . Qu'il y ait dans E autant d'unités que Γ mesure de fois A ; le nombre Δ mesurera B par les unités qui sont en E . Mais Γ mesure A par les unités qui sont en E ; donc le nombre E mesure A par les unités qui sont en Γ . Par la même raison, E mesure B par les unités qui sont en Δ ; donc E mesure les nombres A, B qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc il n'y a point de nombres plus petits que A, B qui ayent la même raison avec les nombres A, B ; donc les nombres A, B sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐστῶσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς οἱ A, B . λέγω ὅτι οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἴσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B , μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω Γ . Καὶ ὅσάκις μὲν Γ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ , ὅσάκις δὲ Γ τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E .

Minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B ; dico A, B primos inter se esse.

Si enim non sunt primi inter se A, B , metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit Γ . Et quoties Γ quidem ipsum A metitur, tot unitates sint in Δ , quoties vero Γ ipsum B metitur, tot unitates sint in E .

A _____
 B _____
 Γ _____
 Δ _____
 E _____

Καὶ ἐπεὶ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ Γ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὲ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς

Et quoniam Γ ipsum A metitur per unitates quæ in Δ ; ipse Γ igitur ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum E multiplicans ipsum B fecit; numerus igitur Γ duos numeros Δ, E multiplicans ipsos A, B

PROPOSITION XXIV.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, sont premiers entr'eux.

Que A, B soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que les nombres A, B sont premiers entr'eux.

Car si les nombres A, B ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Γ . Qu'il y ait dans Δ autant d'unités que Γ mesure de fois A , et qu'il y ait dans E autant d'unités que Γ mesure de fois B .

Puisque Γ mesure A par les unités qui sont dans Δ , le nombre Γ multipliant Δ produira A . Par la même raison, Γ multipliant E produit B ; donc le nombre Γ multipliant les deux nombres Δ, E produira A, B ; donc Δ est à E comme A est

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 427

A, B πεποιήκιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · οἱ Δ, E ἄρα τοῖς A, B ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοῖς A, B ἀριθμοῖς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

fecit; est igitur ut Δ ad E ita A ad B ; ipsi Δ, E igitur cum ipsis A, B in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; non igitur ipsos A, B numeros numerus aliquis metietur; ipsi A, B igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ τὸν ἓνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B , τὸν δὲ A μετρίτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ . λέγω ὅτι καὶ οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se sunt, numerus unum eorum metiens ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A, B , ipsum autem A metiatur aliquis numerus Γ ; dico et ipsos B, Γ primos inter se esse.

A	
B	
Γ	
Δ	

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Δ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ

Si enim non sint B, Γ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit Δ . Et quoniam Δ ipsum Γ metitur, ipse autem Γ

à B (17. 7); donc les nombres Δ, E ont la même raison que les nombres A, B , qui sont plus petits qu'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres A, B ; donc A, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION . XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le nombre qui mesure l'un d'eux sera premier avec l'autre.

Que les deux nombres A, B soient premiers entr'eux; et que quelque nombre Γ mesure A ; je dis que B, Γ sont premiers entr'eux.

Car que B, Γ ne soient pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera; que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ . Puisque Δ mesure Γ , et que

428 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ.
Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ,
πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἴσθιν ἀδύ-
νατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις
μετρήσει· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι
ᾧσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν
πρῶτος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς τινὰ ἀριθμὸν
τὸν Γ πρῶτοι ἴστωσαν¹, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλα-
πλασιάσας τὸν Δ ποιήτω· λίγω ὅτι οἱ Γ, Δ
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A
B
Γ
Δ
E
Z

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους, μετρήσει τις τοὺς Γ, Δ² ἀριθμὸς. Με-
τρήτω, καὶ ἴστω ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρῶτοι

ipsum Α metitur; et Δ igitur ipsum Α metitur.
Metitur autem et ipsum Β; ipse Δ igitur ipsos
Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod
est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros
numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Β igitur primi
inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi
sunt, et ipse ex ipsis factus ad eum primus
erit.

Duo enim numeri Α, Β ad aliquem numerum
Γ primi sint, et Α ipsum Β multiplicans ipsum
Δ faciat; dico Γ, Δ primos inter se esse.

Si enim non sint Γ, Δ primi inter se, metietur
aliquis ipsos Γ, Δ numerus. Metiatur, et sit Ε.
Et quoniam Γ, Α primi inter se sunt, ipsum

Γ mesure Α, le nombre Δ mesurera Α. Mais il mesure Β; donc Δ mesure Α, Β qui
sont premiers entr'eux, ce qui est impossible (déf. 12. 7); donc quelque nombre ne
mesurera pas Α, Β; donc Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si deux nombres sont premiers avec quelque nombre, le produit de ces deux
nombres sera un nombre premier avec ce nombre.

Que les deux nombres Α, Β soient deux nombres premiers avec quelque
nombre Γ, et que Α multipliant Β fasse Δ; je dis que Γ, Δ sont premiers entr'eux.

Car si Γ, Δ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera Γ, Δ. Que
quelque nombre les mesure, et que ce soit Ε. Puisque Γ, Α sont premiers entr'eux,

πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οσαῖς δὲ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάζας τὸν Δ πιποῖνκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Δ πιποῖνκειν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. Ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μίζων τὸν μίζωνα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστιν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετράσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

autem Γ metitur aliquis numerus Ε; ipsi Ε, Α igitur primi inter se sunt. Quoties autem Ε ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ζ; et Ζ igitur ipsum Δ metitur per unitates quæ in Ε; ipse Ε igitur ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed et Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Ζ ipsi ex Α, Β. Si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex mediis, quatuor numeri proportionales sunt; est igitur ut Ε ad Α ita Β ad Ζ. Ipsi autem Α, Ε primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Ε igitur ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Β, Γ metitur primos existentes inter se, quod est impossibile. Non igitur ipsos Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

et qu'un nombre Ε mesure Γ, les nombres Ε, Α seront premiers entr'eux (25. 7). Qu'il y ait dans Ζ autant d'unités que Ε mesure de fois Δ; le nombre Ζ mesurera Δ par les unités qui sont dans Ε; donc Ε multipliant Ζ produira Δ. Mais Α multipliant Β produit Δ; donc le produit de Ε par Ζ est égal au produit de Α par Β. Mais lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre nombres sont proportionnels (19. 7); donc Ε est à Α comme Β est à Ζ. Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux; et les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; donc Ε mesure Β; mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Β, Γ qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible. Donc quelque nombre ne mesurera pas Γ, Δ; donc Γ, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

PROPOSITIO XXVII.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α εἰαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ.

Si duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, et Α se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ, Β primos inter se esse.

$$\begin{array}{r} \underline{Α} \\ \underline{Β} \\ \underline{Γ} \\ \underline{Δ} \end{array}$$

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. Καὶ ἵπαι οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἐκότερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔστί· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. Ο δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γενόμενος ἀριθμὸς ἔστιν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

Ponatur enim ipsi Α æqualis Δ. Et quoniam Α, Β primi inter se sunt, æqualis autem Α ipsi Δ; et Δ, Β igitur primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Δ, Α ad Β primus est; et ipse ex Δ, Α igitur factus ad ipsum Β primus erit. Ipse autem ex Α, Δ factus numerus est Γ; ipsi Γ, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux, et que Α multiplié par lui-même produise Γ; je dis que Γ, Β sont premiers entr'eux.

Que Δ soit égal à Α. Puisque Α, Β sont premiers entr'eux, et que Α est égal à Δ, les nombres Δ, Β sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres Δ, Α est premier avec Β; donc le produit de Δ par Α sera premier avec Β (26. 7). Mais le produit de Α par Δ est Γ; donc les nombres Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμούς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ᾧσι καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς δύο ἀριθμούς τοὺς Γ, Δ , ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἕστωσαν, καὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν E ποιήτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιήτω· λέγω ὅτι οἱ E, Z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A _____
 B _____
 E _____
 Γ _____
 Δ _____
 Z _____

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν A, B πρὸς τὸ Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν A, B ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται¹. Ὁ δὲ ἐκ τῶν A, B γινόμενός ἐστιν ὁ E ²; οἱ E, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ³ E, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν E πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi sunt; et ipsi ex ipsis facti primi inter se erunt.

Duo enim numeri A, B ad duos numeros Γ, Δ , uterque ad utrumque, primi sint, et A quidem ipsum B multiplicans ipsum E faciat, ipse vero Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat; dico E, Z primos inter se esse.

Quoniam enim uterque ipsorum A, B ad Γ primus est, et ipse ex A, B igitur factus ad Γ primus erit. Ipse autem ex A, B factus est E ; ipsi E, Γ igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique E, Δ primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Γ, Δ ad E primus est; et ipse ex Γ, Δ igitur factus ad E primus erit.

PROPOSITION XXVIII.

Si deux nombres sont premiers avec deux autres, l'un et l'autre avec l'un et l'autre, leurs produits seront premiers entr'eux.

Que les deux nombres A, B soient premiers avec les deux nombres Γ, Δ , l'un et l'autre avec l'un et l'autre; que A multipliant B produise E , et que Γ multipliant Δ produise Z ; je dis que les nombres E, Z sont premiers entr'eux.

Puisque chacun des nombres A, B est premier avec Γ , le produit de A par B sera premier avec Γ (26.7). Mais le produit de A par B est E ; donc les nombres E, Γ sont premiers entr'eux. Par la même raison E, Δ sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres Γ, Δ est premier avec E ; donc le produit de Γ par Δ

432 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ, Δ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται.
Ο δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γινόμενος ἐστὶν ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ipsæ autem ex Γ, Δ factus est Ζ; ipsi Ε, Ζ
igitur primi inter se sunt. Quod oportebat os-
tendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

PROPOSITIO XXIX.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι,
καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τι-
νας¹, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους ἔσονται· καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινόμενους
πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινὰς, κακίνοι πρῶ-
τοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς
ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Εστώσαν ἀριθμοὶ δύο² πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν

Si duo numeri primi inter se sint, et
multiplicans uterque se ipsum faciat aliquos,
facti ex ipsis primi inter se erunt; et si ipsi a
principio factos multiplicantes faciant aliquos,
et illi primi inter se erunt; et semper circa
extremos hoc continget.

Sint duo numeri Α, Β primi inter se, et Α
se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat, ipsum

A	_____
B	_____
Γ	_____
Δ	_____
Ε	_____
Z	_____

Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε
ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν³ πολλαπλασιάσας
τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ
ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι
πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

autem Γ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem
Β quidem se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat,
ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; dico
et ipsos Γ, Ε et ipsos Δ, Ζ primos inter se esse.

sera premier avec Ε (16. 7). Mais le produit de Γ par Δ est Ζ; donc les nombres Ε, Ζ
sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et si ces nombres étant multipliés
par eux-mêmes font des nombres, les produits de ces nombres seront premiers
entr'eux; et si les nombres proposés multipliant les produits font d'autres nom-
bres, ces derniers seront aussi premiers entr'eux, et il en sera toujours ainsi
pour les derniers nombres qui auront été produits.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux, que Α étant multiplié par
lui-même fasse Γ, que Α multipliant Γ fasse Ε, que Β étant multiplié par lui-même
fasse Δ, que Β multipliant Δ fasse Ζ; je dis que Γ, Ε et Δ, Ζ sont premiers entr'eux.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 433

Επει γὰρ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ A αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Επει οὖν οἱ Γ, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς B, Δ ἀμφοτέροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν B, Δ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν A, Γ ὁ E , ὁ δὲ ἐκ τῶν B, Δ ὁ Z · οἱ E, Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι, καὶ συναμφοτέρος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφοτέρος πρὸς ἑνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Puisque les nombres A, B sont premiers entr'eux, et que A étant multiplié par lui-même fait Γ , les nombres Γ, B sont premiers entr'eux (27. 7); et puisque Γ, B sont premiers entr'eux, et que B multiplié par lui-même fait Δ , les nombres Γ, Δ sont premiers entr'eux. De plus, puisque A, B sont premiers entr'eux, et que B multiplié par lui-même a fait Δ , les nombres A, Δ sont premiers entr'eux. Mais les deux nombres A, Γ sont premiers avec les deux nombres B, Δ , l'un et l'autre avec l'un et l'autre; donc le produit de A par Γ est premier avec le produit de B par Δ (28. 7.) Mais le produit de A par Γ est E , et le produit de B par Δ est Z . Donc les nombres E, Z sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme sera un nombre premier avec chacun d'eux; et si leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux, les deux nombres proposés seront premiers entr'eux.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt, et A se ipsum multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi Γ, B igitur primi inter se sunt. Et quoniam Γ, B primi inter se sunt, et B se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit, ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Rursus, quoniam A, B primi inter se sunt, et B se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit; ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt; et quoniam duo numeri A, Γ ad duos numeros B, Δ uterque ad utrumque primi sunt; et ipse ex ipsis A, Γ igitur factus ad ipsum ex ipsis B, Δ primus est. Et est ipse quidem ex A, Γ ipse E , ipse vero ex B, Δ ipse Z ; ipsi E, Z igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

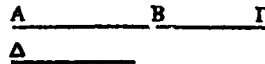
PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter se sunt, et uterque simul ad utrumque eorum primus erit; et si uterque simul ad unum aliquem eorum primus est, et ipsi a principio numeri primi inter se erunt.

434 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB , BF . λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ AF πρὸς ἑκάτερον τῶν AB , BF πρῶτός ἐστιν.

Componantur duo numeri primi inter se AB , BF ; dico et utrumque simul AF ad utrumque eorum AB , BF primum esse.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ GA , AB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς GA , AB ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ . Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς GA , AB μετρεῖ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν BF μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν BA . ὁ Δ ἄρα τοὺς AB , BF μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς GA , AB ἀριθμούς τις μετρήσει· οἱ GA , AB ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ AF , FB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν³. ὁ GA ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν AB , BF πρῶτός ἐστιν.

Ἐστωσαν δὴ πάλιν οἱ GA , AB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους⁴. λέγω ὅτι καὶ οἱ AB , BF πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρῶτοι οἱ AB , BF πρὸς ἀλλήλους⁵, μετρήσει τις τοὺς AB , BF ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον

Si enim non sint GA , AB primi inter se, metietur aliquis ipsos GA , AB numerus. Metiatur, et sit Δ . Et quoniam Δ ipsos GA , AB metitur; et reliquum igitur BF metietur. Metitur autem et ipsum BA ; ipse Δ igitur ipsos AB , BF metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur GA , AB numeros numerus aliquis metietur; ipsi GA , AB igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique et AF , FB primi inter se sunt; ipse GA igitur ad utrumque ipsorum AB , BF primus est.

Sint et GA , AB primi inter se; dico et AB , BF primos inter se esse.

Si enim non sint primi AB , BF inter se, metietur aliquis ipsos AB , BF numerus. Metiatur, et sit Δ . Et quoniam Δ utrumque eorum AB ,

Ajoutons les deux nombres premiers entr'eux AB , BF ; je dis que leur somme AF est un nombre premier avec chacun des nombres AB , BF .

Car si les nombres GA , AB ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera GA , AB . Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ . Puisque Δ mesure GA , AB , il mesurera le reste BF ; mais il mesure BA ; donc Δ mesure AB , BF qui sont deux nombres premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres GA , AB ; donc GA , AB sont premiers entr'eux. Par la même raison AF , FB sont premiers entr'eux; donc le nombre GA est premier avec chacun des nombres AB , BF .

De plus, que GA , AB soient premiers entr'eux; je dis que AB , BF sont premiers entr'eux.

Car si AB , BF ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ . Puisque Δ mesure chacun

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 435

τῶν AB , $BΓ$ μετρεῖ· καὶ ἔλκεν ἄρα τὸν $ΓΑ$ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν $ΑΒ$ · ὁ $Δ$ ἄρα τοὺς $ΓΑ$, $ΑΒ$ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς $ΑΒ$, $BΓ$ ἀριθμούς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ $ΑΒ$, $BΓ$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

$BΓ$ metitur; et totum igitur $ΓΑ$ metietur. Metitur autem et ipsum $ΑΒ$; ipse $Δ$ igitur ipsos $ΓΑ$, $ΑΒ$ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos $ΑΒ$, $BΓ$ numeros numerus aliquis metietur; ipsi $ΑΒ$, $BΓ$ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Ἄπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ A , καὶ τὸν B μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οἱ B , A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A
 B
 $Γ$

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ B , A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ $Γ$. Καὶ ἐπεὶ ὁ $Γ$ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ A τὸν B οὐ μετρεῖ· ὁ $Γ$ ἄρα τῷ A οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ $Γ$ τοὺς B , A μετρεῖ καὶ τὸν A ἄρα

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A , et ipsum B non metiatur; dico B , A primos inter se esse.

Si enim non sint B , A primi inter se, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit $Γ$. Et quoniam $Γ$ ipsum B metitur, ipse autem A ipsum B non metitur; ipse $Γ$ igitur cum ipso A non est idem. Et quoniam $Γ$ ipsos B , A metitur;

des nombres AB , $BΓ$, il mesurera leur somme $ΓΑ$. Mais il mesure AB ; donc $Δ$ mesure $ΓΑ$, $ΑΒ$, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres $ΑΒ$, $BΓ$; donc $ΑΒ$, $BΓ$ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXI.

Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas.

Soit le nombre premier A , et que A ne mesure pas B ; je dis que B , A sont premiers entr'eux.

Car si B , A ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit $Γ$. Puisque $Γ$ mesure B , et que A ne mesure pas B , le nombre $Γ$ n'est pas le même nombre que A . Et puisque $Γ$

436 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρεῖ πρώτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ
 ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς B, A μετρήσει τις
 ἀριθμός· οἱ A, B ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους
 εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et ipsum A igitur metitur primum existentem,
 non existens cum ipso idem, quod est impossi-
 bile; non igitur ipsos B, A metietur aliquis nu-
 merus; ipsi A, B igitur primi inter se sunt.
 Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ΄.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους
 ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετρή-
 τις πρώτος ἀριθμός· καὶ ἵνα τῶν ἐξ ἀρχῆς με-
 τρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πολλαπλασιάσαντες
 ἀλλήλους τὸν Γ ποιήσωσαν, τὸν δὲ Γ μετρίτω
 τις πρώτος ἀριθμός ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἵνα τῶν
 A, B μετρεῖ.

PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri sese multiplicantes faciant ali-
 quem, eum vero factum ex ipsis metiatur aliquis
 primus numerus; et unum eorum qui a prin-
 cipio metietur.

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes
 ipsum Γ faciant, ipsum autem Γ metiatur aliquis
 primus numerus Δ; dico Δ unum eorum A, B
 metiri.

A _____
 B _____
 Γ _____
 Δ _____
 E _____

Τὸν γὰρ A μὴ μετρίτω, καὶ ἴσθι πρώτος ὁ Δ·
 οἱ A, Δ ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· καὶ
 ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴσ-

Ipsum enim A non metiatur, et est primus Δ;
 ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt. Et quoties Δ
 ipsum Γ metitur, tot unitates sint in E. Et

mesure B, A, il mesure A qui est un nombre premier, quoique Γ ne soit pas
 le même que A, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera
 pas B, A; donc A, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque
 nombre premier mesure leur produit, il mesurera un des nombres proposés.

Car que les deux nombres A, B se multipliant l'un l'autre fassent Γ, et que
 quelque nombre premier Δ mesure Γ; je dis que Δ mesure un des nombres A, B.

Qu'il ne mesure pas A; puisque Δ est un nombre premier, les nombres A, Δ
 seront premiers entr'eux (31. 7). Qu'il y ait autant d'unités dans E que Δ mesure

τῶν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποιήκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποιήκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετρεῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μίζων τὸν μίζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἂν ὁ Δ² τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἓνα τῶν Α, Β μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

quoniam Δ ipsum Γ metitur per ipsas quæ in E unitates, ipse Δ igitur ipsum E multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; æqualis igitur est ipse ex Δ, E, ipsi ex A, B; est igitur ut Δ ad A ita B ad E. Ipsi autem Δ, A primi, ipsi vero primi et minimi, ipsi autem minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Δ igitur ipsum B metitur. Similiter utique ostendemus et si Δ ipsum B non metitur, ipsum A mensurum esse; ipse Δ igitur unum eorum A, B metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἀπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστὼ σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur.

Sit compositus numerus A; dico ipsum A a primo aliquo numero mensurari.

de fois γ. Puisque Δ mesure γ par les unités qui sont en E, le nombre Δ multipliant E fera γ. Mais A multipliant B fait γ; donc le produit de Δ par E est égal au produit de A par B; donc Δ est à A comme B est à E (19. 7). Mais Δ, A sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont avec eux la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Δ mesure B. Nous démontrerons de la même manière que si Δ ne mesure pas B, il mesurera A; donc Δ mesure un des nombres A, B. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que A soit un nombre composé; je dis que A est mesuré par quelque nombre premier.

438 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχύν¹· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ,

Quoniam enim compositus est Α, metietur aliquis ipsum numerus. Metiatur, et sit Β. Et si quidem primus est Β, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum Β metitur, ipse autem Β ipsum Α metitur; et Γ igitur ipsum Α metitur. Et si quidem primus

Α
Β
Γ

γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχύν²· εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Τσαύτης δὲ γινεμένης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμοὶ ἀπειροὶ ἀριθμοὶ, ὧν ὁ³ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς· ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς⁵.

est Γ, factum erit propositum; si vero compositus, metietur aliquis ipsum numerus. Tali utique factâ consideratione, relinquetur aliquis primus numerus, qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum Α metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipsum Α numerum infiniti numeri quorum alter altero minor est, quod est impossibile in numeris. Relinquetur aliquis igitur primus qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum Α metietur. Omnis igitur, etc.

Puisque Α est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Β. Si Β est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; et si Β est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure Β, et que Β mesure Α, le nombre Γ mesurera Α; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre Α. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient Α, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre Α. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπας ἀριθμὸς ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω ἀριθμὸς ὁ A · λέγω ὅτι ὁ A ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ A , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθεῖν'. Εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus vel primus est, vel a primo aliquo numero mensuratur.

Sit numerus A ; dico A vel primum esse, vel a primo aliquo mensurari.

Si quidem igitur primus est A , factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum primus numerus. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὅσωνοῦν, εὑρεῖν τοὺς ἐλάχιστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ὅσωνοῦν ἀριθμοὶ, εἰ A , B , Γ · δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλάχιστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A , B , Γ .

Οἱ A , B , Γ γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν οἱ A , B , Γ πρῶτοι πρὸς

PROPOSITIO XXXV.

Numeris datis quocumque, invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum eis.

Sint dati quocumque numeri A , B , Γ ; oportet igitur invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum ipsis A , B , Γ .

Ipsi A , B , Γ enim vel primi inter se sunt, vel non. Si quidem igitur A , B , Γ primi inter

PROPOSITION XXXIV.

Tout nombre est premier, ou il est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre A ; je dis que A est un nombre premier, ou qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

Si A est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; s'il est composé, quelque nombre premier le mesurera (33. 7). Donc, etc.

PROPOSITION XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étant donnés, trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

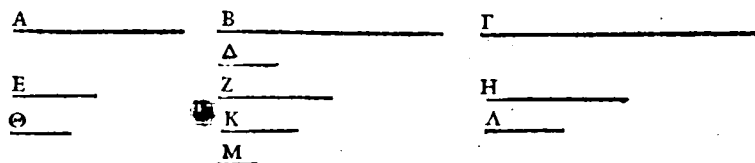
Soient A , B , Γ tant de nombres donnés qu'on voudra; il faut trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A , B , Γ .

Les nombres A , B , Γ sont ou premiers entr'eux, ou ne le sont pas. S'il sont

440 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

se sunt, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.



Εἰ δὲ οὐ· εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ἰσάκεις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῦς Α, Β, Γ ἰσάκεις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ, ἴσονται τινεῖς τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. Ἐστώσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. Ὡς ἂν δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ

Si autem non; sumatur ipsorum Α, Β, Γ maxima communis mensura Δ, et quoties Δ unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque eorum Ε, Ζ, Η; et unusquisque igitur Ε, Ζ, Η unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur per unitates quæ in Δ; ipsi Ε, Ζ, Η igitur ipsos Α, Β, Γ æqualiter metiuntur; ipsi Ε, Ζ, Η igitur cum ipsis Α, Β, Γ in eadem ratione sunt. Dico utique et minimos. Si enim non sunt Ε, Ζ, Η minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ, erunt aliqui ipsis Ε, Ζ, Η minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ. Sint Θ, Κ, Λ; æqualiter igitur Θ ipsum Α metitur ac uterque eorum Κ, Λ utrumque eorum Β, Γ. Quoties autem Θ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Μ; et uterque igitur eorum Κ, Λ

premiers entr'eux, ils seront les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (25. 7).

S'ils ne le sont pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, Β, Γ (3. 7), et qu'il y ait dans chacun des nombres Ε, Ζ, Η autant d'unités que Δ mesure de fois chacun des nombres Α, Β, Γ. Chacun des nombres Ε, Ζ, Η mesurera chacun des nombres Α, Β, Γ par les unités qui sont dans Δ; donc les nombres Ε, Ζ, Η mesurent également les nombres Α, Β, Γ; donc les nombres Ε, Ζ, Η sont en même raison que les nombres Α, Β, Γ (18. 7). Je dis de plus qu'ils sont les plus petits. Car si Ε, Ζ, Η ne sont pas les plus petits de ceux qui ont avec Α, Β, Γ la même raison, il y aura quelques nombres plus petits que Ε, Ζ, Η qui auront la même raison avec Α, Β, Γ; que ce soient Θ, Κ, Λ; le nombre Θ mesurera Α autant de fois que chacun des nombres Κ, Λ mesure chacun des nombres Β, Γ (21. 7). Qu'il y ait dans

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 441

μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἐκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἐκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. Μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μίγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἰσάσσοις ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

utrumque eorum Β, Γ metitur per unitates quæ in Μ. Et quoniam Θ ipsum Α metitur per unitates quæ in Μ; et Μ igitur ipsum Α metitur per unitates quæ in Θ. Propter eadem utique et Μ utrumque eorum Β, Γ metitur per unitates quæ in ipsis Κ, Α; ipse Μ igitur ipsos Α, Β, Γ metitur; et quoniam Θ ipsum Α metitur per unitates quæ in Μ; ipse Θ igitur ipsum Μ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Ε ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Δ ipsi ex Θ, Μ; est igitur ut Ε ad Θ ita Μ ad Δ. Major autem Ε ipso Θ; major igitur et Μ ipso Α, et metitur ipsos Α, Β, Γ, quod est impossibile; ponitur enim Δ eorum Α, Β, Γ maxima communis mensura; non igitur erunt aliqui ipsis Ε, Ζ, Η minores numeri in eadem ratione in quâ Α, Β, Γ; ipsi Ε, Ζ, Η igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ. Quod oportebat ostendere.

Μ autant d'unités que Θ mesure de fois Α; chacun des nombres Κ, Λ mesurera chacun des nombres Β, Γ par les unités qui sont en Μ. Et puisque Θ mesure Α par les unités qui sont en Μ, le nombre Μ mesurera Α par les unités qui sont en Θ. Par la même raison, Μ mesurera chacun des nombres Β, Γ par les unités qui sont dans chacun des nombres Κ, Α; donc Μ mesure Α, Β, Γ. Mais Θ mesure Α par les unités qui sont en Μ; donc Θ multipliant Μ fait Α. Par la même raison, Ε multipliant Δ fait Α; donc le produit de Ε par Δ est égal au produit de Θ par Μ; donc Ε est à Θ comme Μ est à Δ (19. 7). Mais Ε est plus grand que Θ; donc Μ est plus grand que Δ, et Μ mesure Α, Β, Γ, ce qui est impossible; car on a supposé que Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ; donc il n'y a pas de nombres plus petits que Ε, Ζ, Η qui ayent la même raison que Α, Β, Γ; donc Ε, Ζ, Η sont les plus petits nombres qui ayent la même raison avec Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 35'

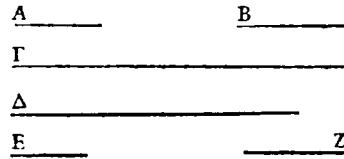
PROPOSITIO XXXVI.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ἐν ἐλάχιστον μετρεῦσιν ἀριθμὸν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A , B · δεῖ δὲ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετρεῦσιν ἀριθμὸν.

Duobus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri A , B ; oportet igitur invenire quem minimum metiantur numerum.



Οἱ A , B γὰρ ἢ τοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Εστωσαν πρότερον οἱ A , B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ B ἄρα τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ A , B ἄρα τὸν Γ μετρεῦσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A , B ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ . Μετρεῖτωσαν τὸν Δ . Καὶ ὅσakis ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E · ὅσakis δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z · ὁ μὲν A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν

Ipsi A , B enim vel primi inter se sunt, vel non. Sint primum A , B primi inter se, et A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum A multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi A , B igitur ipsum Γ metiuntur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi A , B minorem existentem ipso Γ . Metiantur Δ . Et quoties A ipsum Δ metitur, tot unitates sint in E ; quoties autem B ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Z ; ipse quidem A igitur ipsum E multiplicans ipsum Δ fecit, ipse

PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres étant donnés; trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient A , B les deux nombres donnés; il faut trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Car les nombres A , B sont premiers entr'eux, ou ne le sont pas. Que les nombres A , B soient d'abord premiers entr'eux, et que A multipliant B produise Γ ; le nombre B multipliant A produira Γ (16. 7); donc les nombres A , B mesureront Γ ; je dis que Γ est le plus petit. Car si cela n'est pas, les nombres A , B mesureront quelque nombre plus petit que Γ . Qu'ils mesurent Δ . Qu'il y ait dans E autant d'unités que A mesure de fois Δ ; et qu'il y ait dans Z autant d'unités que B mesure de fois Δ ; donc A multipliant E produira Δ , et B multipliant Z pro-

LE SEPTIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE. 443

Δ πεποιήκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσᾶκίς, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάστονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἐπόμενος ἐπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποιήκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἔρα οἱ Α, Β μετρήσουσι² τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ἔντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν³. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὲ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. Καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν·

vero B ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex A, E ipsi ex B, Z; est igitur ut A ad B ita Z ad E. Ipsi autem A, B primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse B igitur ipsum E metitur, ut consequens consequentem. Et quoniam A ipsos B, E multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut B ad E ita Γ ad Δ; metitur autem B ipsum E; metitur igitur et Γ ipsum Δ, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem existentem ipso Γ, quoniam A, B primi inter se sunt; ipse Γ igitur minimus existens ab ipsis A, B mensuratur.

Non sint autem A, B primi inter se, et sumantur minimi numeri Z, E eorum eandem rationem habentium quam ipsi A, B; æqualis igitur est ex A, E ipsi ex B, Z. Et A ipsum E multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum Z multiplicans ipsum Γ fecit. Ipsi A, B igitur ipsum Γ metiun-

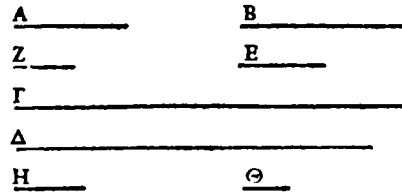
duira Δ; donc le produit de A par E est égal au produit de B par Z; donc A est à B comme Z est à E (19. 7). Mais les nombres A, B sont premiers entr'eux; les nombres premiers sont les plus petits (25. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont une même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc le nombre B mesure E, c'est-à-dire le conséquent le conséquent. Mais A multipliant B, E a fait Γ, Δ; donc B est à E comme Γ est à Δ (18. 7); mais B mesure E; donc Γ mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B ne mesureront pas quelque nombre plus petit que Γ, puisque A, B sont premiers entr'eux; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B.

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux. Prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec A, B (35. 7), et que ces nombres soient Z, E; le produit de A par E sera égal au produit de B par Z (19. 7). Que A multipliant E fasse Γ; donc B multipliant Z fera Γ; donc A, B mesurent Γ; je dis que Γ est le

444 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, ἐλάσσονα ἔντα τοῦ Γ. Μετρεῖτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὅσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ

tur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, minorem existentem ipso Γ. Metiantur ipsum Δ. Et quoties Α quidem ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Η, quoties vero Β ipsum Δ metitur, tot



μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῷ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

unitates sint in Θ; ipse quidem Α igitur ipsum Η multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β ipsum Θ multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis est ipse ex Α, Η ipsi ex Β, Θ; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Ut autem Α ad Β ita Ζ ad Ε; sed ut Α ad Β ita Θ ad Η; et ut igitur Ζ ad Ε ita Θ ad Η. Ipsi autem Ζ, Ε minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse Ε igitur ipsum Η metitur. Et quoniam Α ipsos Ε, Η multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Ε ad Η ita Γ ad Δ. Ipse autem Ε ipsum Η metitur; et Γ

plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β mesureront quelque nombre plus petit que Γ. Qu'ils mesurent Δ, et qu'il y ait dans Η autant d'unités, que Α mesure de fois Δ, et dans Θ autant d'unités que Β mesure de fois Δ. Le nombre Α multipliant Η fera Δ, et Β multipliant Θ fera Δ; donc le produit de Α par Η est égal au produit de Β par Θ; donc Α est à Β comme Θ est à Η (19. 7). Mais Α est à Β comme Ζ est à Ε; et Α est à Β comme Θ est à Η; donc Ζ est à Ε comme Θ est à Η. Mais Ζ, Ε sont les plus petits nombres, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc Ε mesure Η. Mais Α multipliant Ε, Η fait Γ, Δ; donc Ε est à Η comme Γ est à Δ (17. 7). Mais Ε mesure Η;

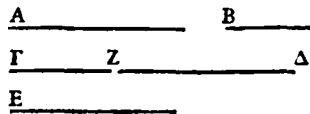
LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 445

Ο δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατόν· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσιν τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινὰ μετρώσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσῃ.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινὰ τὸν ΓΔ μετρεῖτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.



Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετροῦσιν. Μετροῦσιν δὲ

igitur ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur Α, Β metientur aliquem numerum minorem ipso Γ; ipse Γ igitur minimus existens ab Α, Β mensuratur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duo numeri numerum aliquem metiantur, et minimus ab illis mensuratus eundem mensurabit.

Duo enim numeri Α, Β numerum aliquem ΓΔ metiantur, minimum autem ipsum Ε; dico et Ε ipsum ΓΔ metiri.

Si enim non metitur Ε ipsum ΓΔ, Ε metiens ΖΔ relinquat se ipso minorem ΓΖ. Et quoniam Α, Β ipsum Ε metiuntur, ipse autem Ε ipsum ΔΖ metitur; et Α, Β igitur ipsum ΔΖ metiuntur.

donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7), le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Α, Β ne mesurent pas quelque nombre plus petit que Γ; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, le plus petit qu'ils mesurent mesurera ce même nombre.

Que les deux nombres Α, Β mesurent quelque nombre ΓΔ, et que Ε soit le plus petit nombre qu'ils mesurent; je dis que Ε mesure ΓΔ.

Car si Ε ne mesure pas ΓΔ, que Ε mesurant ΖΔ laisse ΓΖ plus petit que lui-même. Puisque les nombres Α, Β mesurent Ε, que Ε mesure ΔΖ, les nombres

446 LE SEPTIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρή-
σουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὥστε ἐστὶν ἀδύνα-
τον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, μετρεῖ ἄρα.
Οπιρ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον
μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ
δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετρήσουσιν ἀριθμὸν.

A _____ B _____ Γ _____
Δ _____
Ε _____

Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος
μετρούμενος ὁ Δ. Ο δὴ Γ τὸν Δ ἢ τοι μετρεῖ, ἢ
οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ
οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρή-
σουσι³. Λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, με-
τρήσουσι τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα
ὄντα τοῦ Δ. Μετρεῖτωσαν τὸν Ε. Επεὶ οὖν οἱ Α,
Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε

tur. Metiuntur autem et totum ΓΔ; et reliquum
igitur ΓΖ metientur, minorem existentem ipso Ε,
quod est impossibile; non igitur non metitur Ε ip-
sum ΓΔ, metitur igitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis, invenire quem mini-
mum metiantur numerum.

Sint dati numeri Α, Β, Γ; oportet igitur inve-
nire quem minimum metientur numerum.

Sumatur enim a duobus Α, Β minimus men-
suratus ipse Δ. Ipse utique Γ ipsum Δ vel meti-
tur, vel non metitur. Metiatur primum. Metiun-
tur autem et Α, Β ipsum Δ; ipsi Α, Β, Γ igitur
ipsum Δ metientur. Dico et minimum. Si enim
non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, Γ,
minorem existentem ipso Δ. Metiantur ipsum Ε.
Et quoniam Α, Β, Γ ipsum Ε metiuntur, et Α, Β

Α, Β mesureront ΔΖ; mais ils mesurent ΓΔ tout entier; donc ils mesureront le
reste ΓΖ plus petit que Ε, ce qui est impossible; donc Ε ne peut pas ne point
mesurer ΓΔ; donc il le mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVIII.

Trois nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient Α, Β, Γ les nombres donnés; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils
mesurent.

Prenons le plus petit nombre Δ mesuré par les deux nombres Α, Β (56. 7). Le
nombre Γ mesurera Δ, ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure. Puisque
les nombres Α, Β mesurent Δ, les nombres Α, Β, Γ mesureront Δ. Je dis aussi
que Δ est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β, Γ mesureront quelque
nombre plus petit que Δ. Qu'ils mesurent Ε. Puisque les nombres Α, Β, Γ me-

μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενος τὸν E μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ · ὁ Δ ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσιν τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ἔντα τοῦ Δ · οἱ A, B, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετρήσουσι.

Μὴ μετρεῖτω δὲ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ , καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, ὁ E . Ἐπεὶ οὖν οἱ A, B τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν E μετρεῖ· καὶ οἱ A, B ἄρα τὸν E μετρή-

igitur ipsum E metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensuratus ipsum E metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ ; ipse Δ igitur ipsum E metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso Δ ; ipsi A, B, Γ igitur minimum Δ metiuntur.

Non metiatur autem rursus Γ ipsum Δ , et sumatur a Γ, Δ minimus mensuratus numerus E . Et quoniam A, B ipsum Δ metiuntur, ipse autem Δ ipsum E metitur; et A, B igitur ipsum E me-

A	B	Γ
Δ		
E		
Z		

σουσι⁸. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ · καὶ οἱ A, B, Γ ἄρα τὸν E μετρήσουσι¹⁰. Λέγω δὲ¹¹ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσιν τινα οἱ A, B, Γ , ἐλάσσονα ἔντα τοῦ E . Μετρεῖτωσαν τὸν Z . Καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ τὸν Z μετροῦσι· καὶ οἱ A, B ἄρα τὸν Z μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν A, B με-

tientur. Metitur autem et ipse Γ ; et A, B, Γ igitur ipsum E metientur. Dico et minimum. Si enim non, metientur aliquem ipsi A, B, Γ , minorem existentem ipso E . Metiantur Z . Et quoniam A, B, Γ ipsum Z metiuntur; et A, B igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensu-

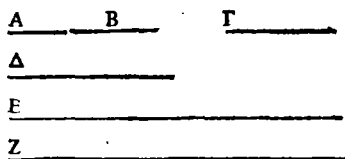
surent E , les nombres A, B mesureront E , et le plus petit nombre mesuré par A, B mesurera E (57. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par A, B est Δ ; donc Δ mesure E , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B, Γ ne mesurent pas un nombre plus petit que Δ ; donc Δ est le plus petit nombre mesuré par les nombres A, B, Γ .

Que Γ ne mesure pas Δ . Prenons le plus petit nombre E mesuré par Γ, Δ (36. 7). Puisque A, B mesurent Δ , et que Δ mesure E , les nombres A, B mesureront E . Mais Γ mesure E ; donc les nombres A, B, Γ mesureront E . Je dis que E est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres A, B, Γ mesureront quelque nombre plus petit que E . Qu'ils mesurent Z . Puisque les nombres A, B, Γ mesurent Z , les nombres A, B mesureront Z , et le plus petit nombre mesuré par AB me-

448 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρούμενος τὸν Z μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν. ὁ Δ ὁ Δ ἄρα τὸν Z μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Z . οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Z μετροῦσιν· καὶ ὁ ελάχιστος ἄρα¹² ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Z μετρήσει¹³. Ὁ δὲ ελά-

ratus ipsum Z metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ ; ipse Δ igitur ipsum Z metitur. Metitur autem et Γ ipsum Z ; ipsi Δ, Γ igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur a Δ, Γ mensuratus ipsum Z metietur. Ipse autem mini-



χιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ E . ὁ E ἄρα τὸν Z μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ελάχιστον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσι¹⁴ τινα ἀριθμὸν ελάχιστον ὄντα τοῦ E . ὁ E ἄρα ελάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B, Γ μετρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

mus a Δ, Γ mensuratus est E ; E igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso E ; ipse E igitur minimus existens ab A, B, Γ mensuratur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

PROPOSITIO XXXIX.

Εὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι.

Si numerus ab aliquo numero mensuratur, mensuratus denominatam partem habebit a metiente.

surera Z . Mais le plus petit mesuré par A, B est Δ ; donc Δ mesure Z . Mais Γ mesure Z ; donc Δ, Γ mesurent Z . Donc le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ mesurera Z (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ est E ; donc E mesure Z , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc les nombres A, B, Γ ne mesureront pas quelque nombre plus petit que E ; donc E est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

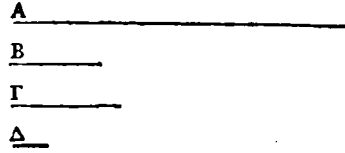
PROPOSITION XXXIX.

Si un nombre est mesuré par quelque nombre, le nombre mesuré aura une partie dénommée par le nombre qui le mesure.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 419

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπὸ τίνος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Numerus enim A ab aliquo numero B mensuretur; dico A denominatam partem habere ab ipso B.



Ὅσakis γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β· ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ἔντα τῷ Β. Ὅπρι εἶδει δεικνύει.

Quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates sint in Γ; et quoniam B ipsum A metitur per unitates quæ in Γ, metitur autem et Δ unitas ipsum Γ numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius B numeri, eadem pars est et Γ ipsius A. Ipsa autem Δ unitas ipsius B numeri pars est denominata ab eo; et Γ igitur ipsius A pars est denominata ab ipso B; quare A partem habet Γ denominatam ab ipso B. Quod oportebat ostendere.

Que le nombre A soit mesuré par le nombre B; je dis que A a une partie dénommée par B.

Qu'il y ait dans Γ autant d'unités que B mesure de fois A. Puisque B mesure A par les unités qui sont en Γ, et que l'unité Δ mesure Γ par les unités qui sont en lui, l'unité Δ mesurera Γ autant de fois que B mesure A; donc, par permutation, l'unité Δ mesurera B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ est la même partie de A que l'unité Δ l'est de B. Mais l'unité Δ est une partie de B dénommée par lui; donc Γ est une partie de A dénommée par B; donc A a une partie Γ dénommée par B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Εάν ἀριθμὸς μέρος ἔχη ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἔχεται ὁτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμωνυμος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

A
B
Γ
Δ

Επεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμωνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμωνυμον αὐτῷ· ὁ μέρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἰναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Ὅπρι ἴδει διῆξαι.

Si numerus partem habeat quamcumque, mensurabitur a denominato a parte numero.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et a B parte denominatus sit Γ; dico Γ ipsum A metiri.

Quoniam enim B ipsius A pars est et denominata ab ipso Γ, est autem Δ unitas ipsius Γ pars denominata ab eo; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius Γ numeri eadem pars est et B ipsius A; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; ipse Γ igitur ipsum A metitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XL.

Si un nombre a une partie quelconque, ce nombre sera mesuré par le nombre dénommé par cette partie.

Que le nombre A ait une partie quelconque B, et que le nombre Γ soit dénommé par B; je dis que Γ mesure A.

Puisque B est une partie de A dénommée par Γ, et que l'unité Δ est une partie de Γ dénommée par lui, l'unité Δ est la même partie du nombre Γ que B l'est de A; donc l'unité Δ mesure le nombre Γ autant de fois que B mesure A; donc par permutation l'unité Δ mesure le nombre B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ mesure A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

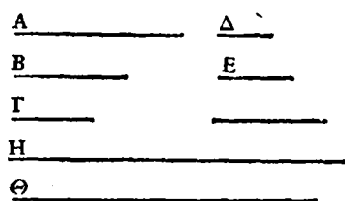
PROPOSITIO XLI.

Ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὦν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ . διττὸ δὲ ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὦν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ .

Numerum invenire, qui minimus existens, habeat datas partes.

Sint datæ partes A, B, Γ ; oportet igitur numerum invenire, qui minimus existens habeat datas partes A, B, Γ .



Ἐστώσαν τοῖς A, B, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί², οἱ Δ, E, Z , καὶ εἰλήφθω ὁ³ ὑπὸ τῶν Δ, E, Z ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ H . ὁ H ἄρα⁴ ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, E, Z . Τοῖς δὲ Δ, E, Z ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ A, B, Γ . ὁ H ἄρα ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη. Λέγω δὲ ὅτι ἐλάχιστος ὦν. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τις τοῦ H ἐλάττω ἀριθμὸς ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη, ὁ Θ ⁵. Ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων

Sint ab ipsis A, B, Γ partibus denominati numeri, Δ, E, Z , et sumatur ab ipsis Δ, E, Z minimus mensuratus numerus H ; ipse H igitur denominatas partes habet ab ipsis Δ, E, Z . Ab ipsis autem Δ, E, Z denominatæ partes sunt A, B, Γ . Ipse H igitur habet A, B, Γ partes. Dico et minimum esse. Si enim non, sit aliquis Θ ipso H minor numerus qui habeat A, B, Γ partes. Quoniam Θ habet A, B, Γ partes; ipse Θ igitur a

PROPOSITION XLI.

Trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait des parties données.

Soient A, B, Γ les parties données; il faut trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait les parties données A, B, Γ .

Que les nombres Δ, E, Z soient dénommés par les parties A, B, Γ ; prenons le plus petit nombre H qui est mesuré par Δ, E, Z (38. 7); le nombre H aura des parties dénommées par Δ, E, Z (39. 7). Mais les parties dénommées par Δ, E, Z sont A, B, Γ ; donc H a les parties A, B, Γ . Je dis que H est le plus petit. Car si cela n'est pas, soit un nombre Θ plus petit que H qui ait les parties A, B, Γ . Puisque Θ a les parties A, B, Γ , le nombre Θ sera mesuré par les nombres dénommés par les parties A, B, Γ (40. 7). Mais les nombres dénommés

452 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς A, B, Γ μέρει. Τοῖς δὲ A, B, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ Δ, E, Z . ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, E, Z μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ H , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

denominatis numeris ab A, B, Γ partibus mensurabitur. Ab ipsis autem A, B, Γ partibus denominati numeri sunt Δ, E, Z ; ipse Θ igitur ab ipsis Δ, E, Z mensuratur, et est minor ipso H , quod est impossibile; non igitur erit aliquis ipso H minor numerus, qui habeat A, B, Γ partes. Quod oportebat ostendere.

par les parties A, B, Γ sont Δ, E, Z ; donc Θ plus petit que H sera mesuré par Δ, E, Z , ce qui est impossible; il n'y a donc pas quelque nombre plus petit que H qui ait les parties A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME LIVRE.

COLLATIO

CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

IMPERIALIS,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI
SUNT MOMENTI.

Litterà *a* antecedente designatur codex 190; litterà *b*, editio Oxoniæ; litterà *c*, codex 1038; litterà *d*, codex 2466; litterà *e*, codex 2344; litterà *f*, codex 2345; litterà *g*, codex 2342; litterà *h*, codex 2346; litterà *k*, codex 2481; litterà *l*, codex 2531; litterà *m*, codex 2547; litterà *n*, codex 2343 (*).

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
θ' (1) εἰρημένην	<i>Idem. a</i>	deest. <i>b, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>
ι' (2) ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἔστι·	<i>Id. a, d, m.</i>	ἔστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· <i>b, e, f, h, k, n.</i>
ιέ (3) πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περι- φέρειαν	<i>Id. a, d, e, h, k, l, m.</i>	desunt. <i>b, f, n.</i>
ιή (4) τῆς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, n.</i>	deest. <i>b.</i>
(5) αὐτῆς	<i>Id. a, d, e, h, m.</i> . .	αὐτῆς τῆς <i>b, h.</i>
ιθ' (6) σχῆμα	<i>Id. a, d, e, f, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
(7) ἡ μείζωνος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου.	<i>Id. a, d, e, h, k,</i> <i>l, m, n.</i>	desunt. <i>b, f.</i>
κ' (8) Σχήματα εὐθύγραμμά . .	<i>Id. a, d, m.</i>	Εὐθύγραμμα σχήματά <i>b, e, f, h,</i> <i>k, l, m, n.</i>

(*) Initium codicis 1038 deest usque ad propositionem octavam secundi libri elementorum, et initium codicis 2342 usque ad propositionem trigesimam secundam primi libri.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

κδ' (9) τὰς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
κε' (10) ἀνίστους	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m.</i>	ἀνίστας <i>b, n.</i>
κζ' (11) τε	δὲ. <i>a.</i>	τὲ <i>b, d, e, f, k, l.</i>
κθ' (12) τὰς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
λι' (13) εἰς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	ἐπ' <i>b.</i>

POSTULATA.

ε' (1) ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχίς	<i>Id. a, d.</i>	κατὰ τὸ συνεχίς ἐπ' εὐθείας <i>b, c, f, h, k.</i>
δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.	<i>Id. a, d, e, f, h, k,</i>	deest. <i>b, l, m, n.</i>
ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐν τὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.	<i>Id. a, d, e, f, h, k,</i>	deest. <i>b, l, m, n.</i>
ζ'. Καὶ δύο εὐθείας μὴ περιέχειν.	<i>Id. a, e, h, k.</i>	deest. <i>b, d, f, h, l, m, n.</i>

Hoc postulatam in codice *e* exaratur eadem manu in postulatis, et alienā in not. com.; in codice *f* alienā in postulatis, et eadem in not. com.; in codicibus *h, k* in post. et in com. not. eadem manu exaratur.

NOTIONES COMMUNES.

θ'. (1) ἴστι.	εἶναι.	ἴστι.
ι'. deest.	<i>Id. a, d, f, h, k, l, m, n.</i>	ι'. καὶ παῖσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. <i>b.</i>
ια'. deest. <i>a.</i>	<i>Id. b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>	ια'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐν τὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS. 455

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον
συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ
μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν
ἐλάσσονες γωνίαι. *b*.

ιβ'. deest. deest. *a*. ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ πε-
ρίεχουσιν. *b, d, f, h, k, l, m, n*.

PROPOSITIO I.

1. Εκθέσις.	<i>Id. a, d, e.</i> . . .	deest. <i>b, f, h, k, l, m, n</i> .
2. Εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.
3. Προσδιορισμὸς.	<i>Id. a, d, e.</i> . . .	deest. <i>b, f, h, k, m, n</i> .
4. πεπερασμένης	<i>Id.</i>	deest.
5. Κατασκευή.	<i>Id. a, d, e.</i> . . .	deest. <i>b, f, h, k, m, n</i> .
6. Αποδείξις. Καὶ ἐπεὶ . . .	<i>Id. a, d, e.</i> . . .	Επεὶ οὖν <i>b, f, h, k, m, n</i> .
7. ἴση ἐστίν·	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση·
8. Σύμπερασμα.	<i>Id. a, d, e.</i> . . .	deest. <i>b, f, h, k, m, n</i> .
9. συνίσταται	<i>Id.</i>	συνίσταται

PROPOSITIO II.

1. τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ . .	<i>Id.</i>	τῇ ΒΓ εὐθείᾳ
2. ὁ	<i>Id.</i>	deest.
3. τῷ Δ, καὶ διαστήματι . .	<i>Id.</i>	μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ
4. Πάλιν, ...	<i>Id.</i>	Καὶ πάλιν,

PROPOSITIO III.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IV.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. σημείων	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. AB πλευρᾷ τῇ ΑΓ	<i>Id.</i>	ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ
2. ΑΒ τῇ ΑΓ, μία	<i>Id.</i>	ΑΓ τῇ ΑΒ ἑτέρα
3. ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ	<i>Id.</i>	ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ
4. τὸ ἐλασσον τῷ μείζονι . . .	<i>Id.</i>	τῷ ἐλάσσονι τὸ μείζον

PROPOSITIO VII.

1. αἱ	deest.	αἱ
2. τὰ Α, Β	<i>Id.</i>	τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις
3. Καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκτελέσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπ' τὰ Ε, Ζ.	Desunt in omnibus codicibus et in omnibus editionibus.	

PROPOSITIO VIII.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. αἱ	deest.	αἱ

PROPOSITIO IX.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴση ἰστίν.	<i>Id.</i>	ἴσθι ἴση.

PROPOSITIO X.

1. εὐθεῖαν πεπεραμένην . . .	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴση ἰστίν.	<i>Id.</i>	ἴσθι ἴση.
3. ἴση ἰστίν	<i>Id.</i>	ἴσθι ἴση

PROPOSITIO XI.

1. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσθιν .	<i>Id.</i>	ἰσθιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν
2. εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται . . .	<i>Id.</i>	γραμμὴ ἥκται εὐθεῖα

PROPOSITIO XII.

1. εὐθεῖα	<i>Id.</i>	deest.
2. εὐθεῖαι	<i>Id.</i>	deest.
3. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσθιν .	<i>Id.</i>	ἰσθιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. Εὰν	<i>Id.</i>	Ὡς ἂν
2. ἦτοι	<i>Id.</i>	ἢ
3. εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.
4. ἴσαι εἰσί.	<i>Id.</i>	εἰσὶν ἴσαι.
5. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα γωνίαι αἱ
6. Εὰν	<i>Id.</i>	Ὡς ἂν

PROPOSITIO XV.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.	deest. <i>a, h, i, k, n.</i>	Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ
	In codicibus <i>d, e, f</i>	ἴσαι δὴ ποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνουσιν
	hoc corollarium exaratum est in margine	ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ
	vel inter lineas.	γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι. <i>b, m.</i>

PROPOSITIO XVI.

1. προσεκβληθείσης, ...	<i>Id.</i>	ἐκβληθείσης,
2. γωνιῶν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐπ' εὐθείας	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVIII.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XX.

1. desunt.	desunt.	ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μίζων ἐστὶ.
2. ΔΑ τῇ ΑΓ.	<i>Id.</i>	ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ.

PROPOSITIO XXI.

1. πλευραὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. πλευραὶ	deest.	πλευραὶ
3. ταῦτα τοίνυν	<i>Id.</i>	τὰ αὐτὰ ἄρα.

PROPOSITIO XXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. εὐθείαις, ...	deest.	εὐθείαις,
2. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μετα- λαμβανομένας.	<i>Id.</i>	desunt.
3. καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ	πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, καὶ διαστήματι	Καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ
4. συνίσταται	<i>Id.</i>	συνίστηκει
5. οὖν	<i>Id.</i>	γὰρ

PROPOSITIO XXIII.

1. δύο	<i>Id.</i>	αἱ δύο

PROPOSITIO XXIV.

1. γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ	ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας	γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ ΕΔΖ
2. ἴσθιν	deest.	ἴσθιν
3. αὐτῇ	αὐτῷ	αὐτῇ
4. ἴστί	deest.	ἴστί
5. ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία	<i>Id.</i>	γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXV.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. διὰ βάσιν	<i>Id.</i>	βάσιν δὲ
3. ἥχη	deest.	ἥχη
4. ΒΑΓ	<i>Id.</i>	ΒΑΓ γωνία
5. ἂν ᾦν	<i>Id.</i>	ᾦ
6. γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ	<i>Id.</i>	Η ὑπὸ ΒΑΓ γωνία
7. οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ,	<i>Id.</i>	ἀλλ' οὐδὲ μὲν ἐλάσσων,

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

8. ἀν ἥν *Id.* ἥ
9. ΒΑΓ *Id.* ΒΑΓ γωνία

PROPOSITIO XXVI.

1. ταῖς deest. ταῖς
2. ἦτοι *Id.* ἦτον
3. Εστω *Id.* Εστωσαν
4. ἰστίν. *Id.* ἴσται.
5. ἰστὶ, ... *Id.* ἴσται,
6. ἴσονται, ... *Id.* ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα,
7. τῇ *Id.* deest.
8. τῇ λοιπῇ γωνίᾳ *Id.* λοιπῇ
9. ἡ *Id.* deest.
10. Εστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἢ *Id.* Εστω εἰ δυνατόν μείζων ἢ ΒΓ,
ΒΓ τῆς ΕΖ,
11. ἴσονται, ... *Id.* ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα
12. ΒΓΑ *Id.* ΒΓΑ γωνία
13. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ *haec verba in margine* concordat cum edit. Paris.
ΒΓΑ ἰστὶν ἴση· *alienâ manu exarata*
sunt.
14. ἴσον, καὶ λοιπῇ *Id.* ἴσον ἰστὶ, καὶ ἡ λοιπῇ
15. ἴση. *Id.* ἴση ἰστίν.

PROPOSITIO XXVII.

1. ΓΔ *Id.* ΓΔ εὐθεία.
2. ἴση ἰστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναν- *Id.* μείζων ἰστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναν-
τίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ, ... τίων γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ
καὶ ἴση,

PROPOSITIO XXVIII.

1. ποιῇ· deest. ποιῇ·
2. ἀπεναντίον *Id.* ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη

PROPOSITIO XXIX.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190.	EDITIO OXONIE.
1. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . .	desunt.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
2. τε	deest.	τε
3. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . . .	desunt.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
4. ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. .	Id.	ἡ ὑπὸ ΑΗΘ. Καὶ ἐπει μίζων ἴσιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ.
5. ἀλλὰ	Id.	ἀλλὰ καὶ
6. αἱ	Id.	καὶ αἱ

PROPOSITIO XXX.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. εὐθείας	δύο εὐθείας.	εὐθείας
3. αἱ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς . . .	conclusio deest . .	conclusio adest.

PROPOSITIO XXXI.

1. σημείου, ...	σημείου, ὃ μὴ ἴσιν ἐπὶ αὐτῆς,	σημείου,
2. ὑμπίπτουσα	Id.	ὑμπίσσοῦσα

PROPOSITIO XXXII.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. ἐκτὸς	deest.	ἐκτὸς

PROPOSITIO XXXIII.

1. τε	Id.	deest.
1. γὰρ	deest.	γὰρ
3. ἴσιν.	deest.	ἴσιν.
4. τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ . . .	deest.	τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ

PROPOSITIO XXXIV.

1. χωρίον	Id.	deest.
2. πλευρὰν	Id.	πλευρὰν τῇ

3. καὶ ἐπὶ ἴση ἰστὶν	<i>Id.</i>	desunt.
4. ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἰστὶν ἴση. .	<i>Id.</i>	ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἰστὶν.
5. δὲ	deest.	δὲ
6. ἴση ἰστὶ καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἰστί.	ἴση καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ ἴση.	ἴση ἰστί καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἰστί.

PROPOSITIO XXXV.

1. ὄντα	deest.	ὄντα
2. ΕΒΓΖ.	ΕΒΓΖ παραλληλογράμμω.	ΕΒΓΖ.
3. ἴση ἰστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.	<i>Id.</i>	τῇ ΒΓ ἴση ἰστὶν ἡ ΑΔ.
4. ἰστὶν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἰστὶν.
5. ἰστὶν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἰστί.
6. ἰστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἰστὶν,
7. ἰσται.	<i>Id.</i>	ἰστί.
8. ἰστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἰστί.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. ὄντα	deest.	ὄντα
3. ἀλλὰ	<i>Id.</i>	ἀλλὰ καὶ
4. τε	deest.	τε
5. ἰστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἰστί.

PROPOSITIO XXXVII.

1. ὄντα	deest.	ὄντα
2. Ε, Ζ, ...	<i>Id.</i>	Ε, Ζ σημεία,
3. εἰς αὐτὴν ἴσα.	<i>Id.</i>	ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῇ ΔΒΓΖ,
4. εἰσι	<i>Id.</i>	ἰσται

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἰστὶν.	<i>Id.</i>	εἰσιν.
2. τὰ	<i>Id.</i>	deest.

3. ὄντα	deest.	ὄντα
4. ἐπὶ	κατὰ	ἐπὶ
5. αὐτὸ δίχα	Id.	δίχα αὐτὸ
6. αὐτὸ δίχα	Id.	δίχα αὐτὸ

PROPOSITIO XXXIX.

1. καὶ	Id.	deest.
2. ἴσα τρίγωνα	Id.	τρίγωνα ἴσα
3. μέρη	μέρη τῆς ΒΓ	μέρη
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἄρα	δὴ	ἄρα
6. ταῖς ΒΓ, ΑΕ.	deest.	ταῖς ΒΓ, ΑΕ.
7. τρίγωνον	Id.	deest.
8. ἴστιν	Id.	deest.

PROPOSITIO XL.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. καὶ	Id.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη,
3. ἴσα τρίγωνα	Id.	τρίγωνα ἴσα
4. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη	deest.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
5. ἄρα	δὴ	ἄρα
6. τριγώνω	deest.	τριγώνω
7. τρίγωνον	deest.	τρίγωνον
8. ἴστων	Id.	deest.
9. ἴστιν	Id.	ἴστιν
10. ἴστί παράλληλος	Id.	παράλληλός ἴστι.

PROPOSITIO XLI.

1. ἴσται	Id.	ἴσται
2. τε	deest.	τε
3. παραλλήλοις ἴστω	Id.	ἴστω παραλλήλοις
3. τρίγωνον	Id.	deest.

PROPOSITIO XLII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. γωνία εὐθυγράμμου	<i>Id.</i>	εὐθυγράμμου γωνία.
2. γωνία εὐθυγράμμος ἢ Δ°	<i>Id.</i>	εὐθύγραμμος γωνία Δ°
3. ἴση	deest.	ἴση
4. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
5. συνίσταται	<i>Id.</i>	συνιστάθη
6. ἡ τις	<i>Id.</i>	ἡ

PROPOSITIO XLIII.

1. παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ	<i>Id.</i>	τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ
2. τριγώνῳ	<i>Id.</i>	deest.
3. λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπλήρωματι ἐστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπλήρωματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.

PROPOSITIO XLIV.

1. ὥστε	<i>Id.</i>	ὥστε
2. ἐνέπιπεν	<i>Id.</i>	ἐμπεπτωκεν
3. ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ
4. εἰσὶν ἴσαι	<i>Id.</i>	ἴσαι εἰσὶν
5. τὴν	<i>Id.</i>	deest.
6. τὰ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἀλλὰ	<i>Id.</i>	ἀλλὰ καὶ
8. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XLV.

1. γωνία εὐθυγράμμου	<i>Id.</i>	εὐθυγράμμου γωνία.
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. τῇ δοθείσῃ	<i>Id.</i>	ἴση
4. ἴση ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση
5. ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ

464 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

EDITIO. PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. ἴσιν ἴση.	Id.	ἴση ἴσιν.
7. εὐθεία	εὐθείας	εὐθεία
8. ἴσιν	ἴστι καὶ	ἴσιν
9. ἴσιν ἴσον.	Id.	ἴσον ἴσί.
10. τῇ	Id.	deest.

PROPOSITIO XLVI.

1. Ἀλλὰ	Id.	Ἀλλὰ καὶ

PROPOSITIO XLVII.

1. γωνίαν.	Id.	deest.
2. εὐθεία	Id.	deest.
3. καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσιν ἢ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἢ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ. δύο δὲ	Id.	καὶ ἐπεὶ δύο.
4. ἴση.	Id.	ἴση ἴσιν.
5. ἴση, ...	Id.	ἴσιν ἴση,
6. ἴστι	deest.	ἴστι
7. εἰσι παραλλήλοις	Id.	παραλλήλοις εἰσὶ
8. τετράγωνον	Id.	τετράγωνον ΒΕ

PROPOSITIO XLVIII.

1. εὐθεία πρὸς ὀρθάς	Id.	πρὸς ὀρθάς εὐθεία
2. ἴση.	Id.	ἴσιν ἴση
3. ἴση.	Id.	ἴσιν ἴση,

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

COD. 190.

EDITIO OXONIE.

β' (1) παραλληλογράμμων ἐν . Id. ἐν παραλληλογράμμων

PROPOSITIO I.

1. τε ὑπὸ	Id.	ὑπὸ τε
2. τε ὑπὸ	Id.	ὑπὸ τε
3. ἔτι	deest.	ἔτι
4. μὴν	Id.	deest.
5. τῶν	Id.	deest.
6. τὸ	τῶ	τὸ
7. τὸ	τῶ	τὸ
8. τὸ	τῶ	τὸ

PROPOSITIO II.

1. τὰ	τὰ	τὰ
2. περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα	περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον	περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα
3. τῆς	Id.	τῶν
4. τῶν	deest.	τῶν
5. ἑστὶ	deest.	ἑστὶ

PROPOSITIO III.

1. τμηθῇ ὡς ἔτυχι, ...	Id.	ὡς ἔτυχι τμηθῇ,
2. Γ'	Id.	Γ σημεῖον
3. τῆς	τοῦ	τῆς
4. διήχθω	Id.	ἡχθω
5. τὸ	Id.	deest.

PROPOSITIO IV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν	deest.	τῶν
3. ἀλλὰ ἡ μὲν	Id.	ἀλλὰ καὶ ἡ
3. καὶ εἰς αὐτάς ἐπίπτεσιν ἡ ΓΒ.	verba in margine re- centi manu exarata.	καὶ εἰς αὐτάς ἐπίπτεσιν ἡ ΓΒ.
4. εἰσὶν ἴσαι.	Id.	ἴσαι εἰσίν.
5. ἀπὸ	deest.	ἀπὸ
6. τῶν	deest.	τῶν
7. τεσσάρα	Id.	deest.
8. τὸ	deest.	τὸ

A L I T E R.

Hæc altera demonstratio exarata est in chartâ paginæ contiguâ.

1. καὶ ἄλλως.	Id.	Ετέρᾳ διέξει.
2. ἐντὸς καὶ	desunt.	ἐντὸς καὶ
3. τῷ	Id.	τὸ
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἰστί.	deest.	ἰστί.
6. ἰστὶν ἴσον	Id.	ἴσον ἰστί
7. ἴση ἰστί	Id.	ἴση
8. ἄρα	deest.	ἄρα

COROLLARIUM.

9. ἰστί	deest.	ἰστί

PROPOSITIO V.

1. ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ πα- ράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.	Id.	ἤχθω πάλιν ἡ ΚΑΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.
2. ἰστὶν ἴση.	Id.	ἴση ἰστί
3. ΝΞΘ γνώμονι	Id.	ΔΖ καὶ ΔΑ
4. μὲν	deest.	μὲν

5. γὰρ ἡ	ἡ γὰρ	γὰρ ἡ
6. ΔΒ.	<i>Id.</i>	ΔΒ· τὸ δὲ ΖΔ, ΔΑ ἔστιν ὁ ΝΞΟ γνώμων·
7. τῆς	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VI.

1. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφῆντι .	Hæc verba manu re- centi inter lineas exarata sunt.	ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι
2. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἀλλὰ	<i>Id.</i>	ἀλλὰ καὶ
4. ὀρθογωνίῳ.	deest.	ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ
2. ἴσον ἔστιν·	<i>Id.</i>	ἔστιν ἴσον·
3. τῷ	<i>Id.</i>	τῷ τε

PROPOSITIO VIII.

1. ἀπὸ τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴση τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ, ...	<i>Id.</i>	τῇ ΓΒ ἴση ἢ ΒΔ,
3. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
4. μὲν	deest.	μὲν
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. μὲν	deest.	μὲν
7. ἔστιν ἴσον, ...	ἴσον ἔστί, ...	ἔστιν ἴσον,
8. ἴσον ἔστί·	<i>Id.</i>	ἔστιν ἴσον·
9. ἔστιν	deest.	ἔστιν
10. ἔστιν ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἔστί·
11. ἴση ἔστί.	<i>Id.</i>	ἔστιν ἴση.
12. μὲν	deest.	μὲν
13. τετραπλάσιά ἐστιν.	<i>Id.</i>	ἔστί τετραπλάσια.

468 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

14. ἐστὶ τοῦ AK.	<i>Id.</i>	τοῦ AK ἐστὶ.
15. γὰρ	<i>Id.</i>	γὰρ καὶ
16. τῆς	deest.	τῆς
17. τὸ ἄρα τετράκλις ὑπὸ τῶν AB, BA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AD τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἢ BA τῇ BG.	<i>Id.</i> in codice a legitur ἀπὸ AG, ἀπὸ AD.	desunt.

PROPOSITIO IX.

1. παράλληλος ἦχθω	desunt.	adsunt.
2. καὶ εἰσὶν ἴσαι	<i>Id.</i>	desunt.
3. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
4. πλειυρᾶ	deest.	πλειυρᾶ
5. ἐστὶ πάλιν	<i>Id.</i>	πάλιν ἐστὶ
6. τῆς	deest.	τῆς
7. τῆς	deest.	τῆς
8. τῆς	deest.	τῆς
9. τῆς	deest.	τῆς
10. ἴσον ἐστὶ	ἐστὶν ἴσον	ἴσον ἐστὶ
11. EZ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ.	<i>Id.</i>	EZ· ἀπὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ τετρά- γώνον.
12. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ·	<i>Id.</i>	ἴση δὲ ἢ HZ τῇ ΓΔ·
13. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO X.

1. ἀναγραφέντος τετραγώνου.	ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.	concordat cum edit. Paris.
2. πάλιν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
4. ὀρθῆς ἐστὶν	<i>Id.</i>	ὀρθῆς ἐστὶν
5. ΔHB	<i>Id.</i>	ΔHB ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἢ ἄρα ὑπὸ ΔHB

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS. 469

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

6. ἴση ἴστιν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἴσον ἴστι τὸ ἀπὸ ΕΓ . concordat cum edit. Paris.
ἴστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ

7. ΗΖ	<i>Id.</i>	ΔΖ τετράγωνον
8. ΖΕ	<i>Id.</i>	ΖΕ τετραγώνω.
9. ΕΗ	<i>Id.</i>	ΕΗ τετράγωνον.
10. ΑΗ	<i>Id.</i>	ΑΗ τετράγωνον.
11. ΓΔ	<i>Id.</i>	ΓΔ τετραγώνων.

PROPOSITIO XI.

1. ποιεῖν	<i>Id.</i>	εἶναι
2. τῆς ΕΒ τετραγώνω	ΕΒ	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	deest.	τῆς
4. ὀρθογώνιον	deest.	ὀρθογώνιον
5. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ	<i>Id.</i>	Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ; ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ.
6. τῆς	deest.	τῆς
linea decima.		
7. ποιεῖν	<i>Id.</i>	εἶναι

PROPOSITIO XII.

1. ἐκλεθεισαν	deest.	ἐκλεθεισαν
2. γωνίαν, ...	deest.	γωνίαν,
3. περιεχομένην ὀρθογωνίῳ.	desunt.	περιεχομένην ὀρθογωνίῳ.
4. τῷ.	<i>Id.</i>	τὸ.
5. ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἴστι
6. τετραγώνον	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIII.

1. τοῦ	<i>Id.</i>	τῆς
2. τῆς	deest.	τῆς

470 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. ἴστί	deest.	ἴστί
4. ἴστί	deest.	ἴστί
5. τῶν	deest.	τῶν
6. τὸ	Id.	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. γὰρ	Id.	deest.
2. μὲν	deest.	μὲν
3. τῆς HE ἴσον	HE ἴσον	τῆς HE ἴσα
4. τὸ ὑπὸ τῶν BE, EA ἴστί,	Id.	τὸ BA ἴστί,
5. καὶ	Id.	deest.

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
α. (1) ἴσαι εἰσίν.	<i>Id.</i>	εἰσὶν ἴσαι.
β. (2) ἐπὶ μηδέτερα μερή. . .	<i>Id.</i>	deest.
δ. (3) ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
η. (4) τις	deest.	τις
ι. (5) τοῦ κύκλου συσταθῇ . .	<i>Id.</i>	αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ

PROPOSITIO I.

1. Ηχθω	~~Id.~~	Διήχθω.
2. κύκλου.	deest.	κύκλου.
3. linea 12 paginæ 119 δύο δὲ	<i>Id.</i>	δύο δὲ
4. ἐστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν,
5. τοῦ Η.	deest.	τοῦ Η.
6. ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση.
7. ἴσων	deest.	ἴσων
8. ἐλάττων τῇ μείζονι, . . .	<i>Id.</i>	μείζον τῇ ἐλάττωνι
9. κύκλου.	deest.	κύκλου.
10. ὅπερ εἶδει ποιῆσαι. . . .	desunt.	Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

COROLLARIUM.

11. εὐθεῖα τις	<i>Id.</i>	τις εὐθεῖα
12. κύκλου.	κύκλου. Ὅπερ εἶδει ποιῆ- σαι.	κύκλου.

PROPOSITIO II.

1. αὐτὰ	deest.	αὐτὰ
2. δύο τυχόντα	<i>Id.</i>	τυχόντα δύο
3. ΔΖ.	<i>Id.</i>	ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε.
4. linea 10 paginæ 122 πι- σῖται.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190. 2	EDITIO OXONIE.
linea 1 paginæ 123 τέμνει .	<i>Id.</i>	τεμνί
linea 2 paginæ 123 τέμνει .	<i>Id.</i>	τεμνί
1. δὴ	deest.	δὴ
2. εἰσι , ...	deest.	εἰσι.
3. γωνία ἄρα	<i>Id.</i>	καὶ γωνία
4. ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἴσιν· ὀρθὴ ἄρα ἴσιν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ AZE, BZE.	<i>Id.</i>	ὀρθὴ ἴσιν ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν· ἑκάτερα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθὴ ἴσιν.
5. οὕσα	<i>Id.</i>	deest.
6. αὐτὴν	deest.	αὐτὴν
7. καὶ	deest.	καὶ
8. ἡ EA	<i>Id.</i>	ἡ ἐκ τοῦ κέντρου EA
9. ἄρα	deest.	ἄρα

PROPOSITIO IV.

1. σημείον, ...	<i>Id.</i>	deest.
2. κέντρου	<i>Id.</i>	κέντρου ἡ γμίνην
3. τέμνει	<i>Id.</i>	τεμνί
4. ἄρα ἴσιν	<i>Id.</i>	ἴσιν ἄρα
5. τέμνει	<i>Id.</i>	τεμνί
6. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἡ EF καὶ, ...	<i>Id.</i>	καὶ ἡ EF,
2. ἴσιν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν,
3. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VI.

1. ἐντός, ...	deest.	ἐντός,
2. ἐφαπτίσθωσαν	ἐπτίσθωσαν	ἐφαπτίσθωσαν

3. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
4. καὶ	<i>deest.</i>	καὶ
5. ἴσται ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἴσται
6. ἴσται	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>

PROPOSITIO VII.

1. πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες*	<i>Id.</i>	προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον*
2. μόνον	<i>Id.</i>	μόνον εὐθεῖαι
3. EB, EZ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα EB, EZ
4. δὲ	<i>deest.</i>	δὲ
5. ἴσται	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>
6. ἴσαι	<i>Id.</i>	ἴσαι εὐθεῖαι
7. ἴσται ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσται,
8. μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ	<i>Id.</i>	ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ ἴση ἴσται.
9. ἴσται ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσται,
10. τῇ	τῆς	τῇ
11. HEZ	<i>Id.</i>	HEZ γωνία
12. ἴσται	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>

PROPOSITIO VIII.

1. Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν- τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχι· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι- φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἴσται ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἑγγιον τῆς διὰ κέντρου τῆς ἀπώτερον μίζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν	Εὰν κύκλου ληφθῇ τι ση- μεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύ- κλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοι- παὶ ὡς ἔτυχι· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι- φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἴσται ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ	Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκ- τός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν- τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχι· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι- φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μίζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπ-

EDITIO PARISIENSIS.

προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

CODEX 190.

τοῦ τε σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου προσπίπτουσα· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶ· ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

EDITIO OXONIÆ.

τουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπισοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὲν δὲ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐσται, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἐλαχίστη δὲ ἡ μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΡ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὲν δὲ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐσται, ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὸν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐ-

EDITIO PARIISIENSIS.

μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰὲ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

CODEX 190.

διαμέτρου ἡ ΑΗ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΑΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚ■ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· αἰὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

EDITIO OXONIÆ.

θειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰὲ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

2. Αἱ δὲ	<i>Id.</i>	ἀλλ' αἱ
3. προσκείσθω	<i>Id.</i>	δὲ
4. αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα	<i>Id.</i>	αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ
5. ἴση δὲ	<i>Id.</i>	ὧν ἐστὶν ἴση
6. ἴσαι	<i>Id.</i>	ἴσαι εὐθεῖαι
7. προσπιπτοῦνται	<i>Id.</i>	συμπεσοῦνται
8. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ·
9. δὴ	deest.	δὴ
10. ἐστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν,
11. Ἐπεὶ	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ
12. ἐστὶν ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν·
13. ἄρα	deest.	ἄρα
14. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
15. ἴσαι	<i>Id.</i>	εὐθεῖαι

PROPOSITIO IX.

1. ἴσαι εὐθεῖαι, ...	<i>Id.</i>	εὐθεῖαι ἴσαι,
2. ἴσαι εὐθεῖαι, ...	<i>d.</i>	εὐθεῖαι ἴσαι,
3. ἐστὶν ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν
4. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ
5. τέμνει δὶχᾶ καὶ πρὸς ὀρθὰς.	<i>Id.</i>	δίχᾶ τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.
6. ΑΒΓ	deest.	ΑΒΓ
7. κύκλου.	<i>Id.</i>	deest.

A L I T E R.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

8. ἡ ΖΗ ἄρα *Id.* ἡ δὲ ΖΗ
 9. τὸ Δ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ... *Id.* ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ,
 10. κύκλου. κύκλου. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. κύκλου.

PROPOSITIO X.

1. Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει *Id.* Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον
 2. διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε *Id.* ἐπὶ τὰ ΑΕ διήχθωσαν
 3. καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ... *Id.* τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς,
 4. ἀλλήλῃς deest. ἀλλήλῃς
 5. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλ-
 λήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ
 αὐτό ἐστὶ κέντρον τὸ Ο,

A L I T E R.

6. εὐθεῖαι ἴσαι, ... *Id.* ἴσαι εὐθεῖαι,
 7. κέντρον ἰστί *Id.* ἰστί κέντρον
 8. ἀλλήλους ἀλλήλων ἀλλήλους

PROPOSITIO XI.

1. Καὶ *Id.* deest.
 2. ἐφαπτίθωσαν *Id.* ἀπτίθωσαν
 3. κύκλου κύκλου τὸ κύκλου
 4. τὸ Α *Id.* τὸ Α σημεῖον
 5. τῆς ΖΘ, ... *Id.* τῆς ΖΘ, ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ
 ἀπὸ κέντρου γὰρ ἁμῶν
 6. ἐστὶν *Id.* deest.
 7. κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συνα-
 φῆς πισεῖται. *Id.* ἐπ' αὐτὴν ἄρα.

A L I T E

8. ἐκβεβλήσθω *Id.* προσεκβεβλήσθω
 9. ἄτοπον. ἄτοπον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. ἄτοπον.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἐφάπτονται	<i>Id.</i>	ἄπτιται
2. εὐθεία	deest.	εὐθεία
3. κύκλου	deest.	κύκλου

PROPOSITIO XIII.

1. ἐφαπτόνται ἐάν τε ἔκτος. . .	<i>Id.</i>	ἐάν τε ἔκτος ἐφάπτηται.
2. ἐφαπτίσθω	<i>Id.</i>	ἀπτίσθω
3. εὐθεία	deest.	εὐθεία
4. ὑπὲρ	<i>Id.</i>	ὑπὲρ ἴσιν
3. τοῦ	<i>Id.</i>	ἡ
6. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
7. αὐτὰ	deest.	αὐτὰ

PROPOSITIO XIV.

1. αἱ AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
3. λοιπῶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἴσιν, ἴση ἄρα	τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἴσιν, ἴση ἄρα καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. ἴσιν	<i>Id.</i>	ἴσιν καὶ
5. ἴσιν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἴσιν,
6. λοιπῶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἴσιν	ἴσον ἴσιν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ἴσιν	deest.	ἴσιν <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i>
2. τοῦ Ε κέντρου	τῆς ΑΔ διαμέτρου <i>a, c, d.</i>	τοῦ Ε κέντρου
3. Ε	<i>Id. e, f, g, h, k, l, m.</i>	deest.
4. ἄρα	deest. <i>a, f, g, h, k, l, m.</i>	ἄρα <i>b, c, d, e, h.</i>
5. μίζων	<i>Id.</i>	μίζων ἴσιν <i>b, c, d, e, f, g, h,</i> <i>k, l, m.</i>
6. μὲν	<i>Id. a, c, d, e, g, h,</i> <i>k, l, m.</i>	deest. <i>b, f.</i>

PROPOSITIO XVI.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. παρεμπιπείται	<i>Id.</i>	παραμπιπείται.
2. γωνίας ὀξείας	<i>Id.</i>	ὀξείας γωνίας .
3. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ.
4. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ	<i>Id.</i>	αἱ ἄρα
5. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
6. γωνίας ὀξείας	<i>Id.</i>	ὀξείας γωνίας .
7. ἡ	<i>Id.</i>	ἡ
8. εὐθεῖα παρεμπιπείται, . . .	<i>Id.</i>	παραμπιπείται εὐθείαι,
9. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. τούτου	τούτου	τούτων
11. εἰδείχθη.	εἰδείχθη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	εἰδείχθη.

PROPOSITIO XVII.

1. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
2. τὴν	deest.	τὴν
3. ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. . .	<i>Id.</i>	τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ
4. ΒΓΑ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVIII.

1. ἐφαπτομένην	<i>Id.</i>	ἀπτομένην
2. ἐφαπτέσθω	<i>Id.</i>	ἀπτίσθω
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. ὀρθὰς	<i>Id.</i>	ὀρθὰς γωνίας
2. τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς	<i>Id.</i>	πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΕ
3. οὖν	deest.	οὖν

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἴση καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA·	<i>Id.</i>	καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA ἴση ἐστίν·
2. ἑτέρα γωνία	<i>Id.</i>	γωνία ἑτέρα

PROPOSITIO XXI.

1. αὐτῶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXII.

1. Ἐπεὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ
2. ἄρα τριγώνου	<i>Id.</i>	deest.
3. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. συσταθήσεται	<i>Id.</i>	συσταθήσονται

PROPOSITIO XXIV.

1. ἐστίν.	<i>Id. a, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>	εἰσὶν <i>b.</i>
2. τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἵφαρ- μοσάσης,	<i>Id. a.</i>	ἵφαρμοσάσης δὲ τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>
3. ἥτοι εἰς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτός, ἢ παραλλάξει ὥς τὸ ΓΘΗΔ καὶ κύκλος κύκλον τέμ- νει κατὰ	<i>Id. a.</i>	ἀλλὰ παραλλάξει ὥς τὸ ΓΘΗΔ. Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>

PROPOSITIO XXV.

1. δὴ	δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος	δὴ
2. γωνία ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα γωνία
3. ἢ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε	<i>Id.</i>	ἐπὶ τὸ Ε ἢ ΑΒ
4. εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.

480 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. ἴσιν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν,
6. βάσεις	<i>Id.</i>	καὶ βάσεις
7. ἴσιν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν.
8. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
9. κύκλος.	<i>Id.</i>	deest.
10. ἐκτὸς αὐτοῦ	<i>Id.</i>	αὐτοῦ ἐκτὸς
11. καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾗ	<i>Id.</i>	κἀν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση
12. πρὸς αὐτῇ σημείῳ τὸ Α, .	<i>Id.</i>	τῷ Α σημείῳ
13. ὡς τὸ Ε, ...	<i>Id.</i>	deest.
14. οὐ πέρ ἐστι τὸ τμήμα. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVI.

1. γάρ	<i>Id.</i>	deest.
2. πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἕστωσαν,	<i>Id.</i>	ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἕστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις
3. εἰσί.	deest.	εἰσί.
4. ἴστί.	deest.	ἴστί.
5. ἴσιν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν.
6. ἴσιν.	deest.	εἰσίν.
7. τμήματι.	deest.	τμήματι
8. λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμήμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρειά ἴσιν ἴση τῇ ΕΔΖ περιφέρειᾳ.	deest.	λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμήμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΔΖ περιφέρειᾳ ἴσιν ἴση

PROPOSITIO XXVII.

1: ἐπὶ	<i>Id.</i> <i>a, c, d, e, f, g,</i> καὶ ἐπὶ <i>b, k.</i> <i>h, l, m.</i>	
2. γωνία	<i>Id.</i> <i>a.</i>	deest. <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i>
3. ἴσιν ἴση.	<i>Id.</i> <i>a, k.</i>	deest. <i>b, c, d, e, f, g, h, l, m.</i>
4. Εἰ γὰρ ἄριστος ἴσιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται.	<i>Id.</i> <i>a.</i>	Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἔσθι τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανέρον ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἔσθιν· Εἰ δὲ οὐ μία, αὐτῶν μείζων ἔστιν. <i>b, c, d, e, f,</i> <i>g, h, k, l, m.</i>

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. αὐτοῖς	τοῖς κύκλοις	αὐτοῖς
2. τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.	τῇ ΔΘΕ.	ἴση τῇ ΔΘΕ ἐλάττονι.
3. ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ πε- ριφέρεια.	ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.	περιφέρεια ΑΗΒ τῇ ΔΘΕ περ- ρεία.
4. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XXIX.

1. ὑπὸ	deest.	ὑπὸ
2. εὐθεῖα	hoc verbum manu alienā inter lineas exaratum est.	εὐθεῖα
3. καὶ ἴστω	Id.	deest.
4. γωνίας ἴσας	Id.	ἴσας γωνίας

PROPOSITIO XXX.

1. τέμνειν.	Id.	τέμνειν.
2. τέμνειν.	Id.	τέμνειν.
3. βάσις ἄρα	Id.	καὶ βάσις
4. κατὰ τὸ Δ σημεῖον	Id.	deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. τμήματι	Id.	deest.
2. ὀρθῆς.	Id.	ἴσθιν ὀρθῆς.
3. ἡ ὑπὸ ΒΑΓ	Id.	deest.
4. ἡ ὑπὸ ΑΔΓ	Id.	deest.
5. καὶ	deest.	καὶ
6. ΒΑΓ.	Id.	ΒΑΓ γωνία.
7. γωνία μείζων ὀρθῆς ἴσθι, καὶ ἴσθιν ἐν τῷ ΑΔΓ	Id.	μείζων ἴσθιν ὀρθῆς, καὶ ἴσθιν ἐν τῷ
8. λέγω	Id.	λέγω δὲ

482 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

9. τε	<i>Id.</i>	deest.
10. τε	<i>Id.</i>	deest.
11. γωνία	deest.	γωνία
12. περιεχομένη	<i>Id.</i>	deest.

ALITER.

13. Η	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM.

14. Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἴαν ἢ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ἢ, ὀρθή ἐστιν ἢ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Όταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν.	<i>Id.</i> hoc corollarium eadem manu in margine exaratum est.	Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἴαν τριγώνου ἢ μία γωνία δυσὶν ἴση ἢ, ὀρθή ἐστι· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Όταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXII.

1. εἰς	<i>Id.</i>	ἐπὶ
2. εἰς	<i>Id.</i>	ἐπὶ
3. γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἢ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένη γωνία.	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἢ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι.
4. ἀπὸ δὲ τῆς	<i>Id.</i>	σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β
5. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
6. Η ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.	<i>Id.</i>	deest.
7. Εἴσι δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι·	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXXIII.

1. τῷ Γ.	<i>Id.</i>	τῷ Γ γωνία.
2. δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία	<i>Id.</i>	γὰρ πρὸς τῷ Γ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. ὡς	καὶ ὡς	ὡς
4. καὶ	deest.	καὶ
5. Καὶ	deest.	Καὶ
6. γωνία	Id.	deest.
7. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ABE .	Id.	Καὶ ἐπὶ τοῦ ABE κύκλου
8. εἰς	Id.	ἐπὶ
9. τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου . .	ἐναλλάξ τοῦ κύκλου .	τῷ ἐναλλάξ
10. ἔστω πάλιν	Id.	πάλιν ἔστω
11. γωνία	Id.	deest.
12. Ἰση ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ BAC .	Id.	ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ BAC τῇ ἐν τῷ
γωνίᾳ τῇ ἐν τῷ AEB τμηματί,		AEB τμήματι ἴση,
13. καὶ ἡ ὑπὸ BAC τῇ πρὸς τῷ Γ	Id.	ἡ ὑπὸ BAC τῇ πρὸς τῷ Γ ἔστιν
ἴση ἔστί.		ἴση.
14. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμήματι	Id.	deest.
ἄρα ἴση ἔστί τῇ πρὸς τῷ Γ		
15. ἡ	Id.	deest.
16. ἐρχέσθω ὡς ὁ AEB. . . .	Id.	οἰχέσθω ὡς AEB.
20. ἥκται	ἔστιν	ἥκται
21. ἄρα δοθείσης	Id.	δοθείσης ἄρα

PROPOSITIO XXXIV.

1. δοθείση γωνία εὐθυγράμμω τῇ	Id.	πρὸς τὸ Δ γωνία.
πρὸς τῷ Δ. •		
2. κύκλου	deest.	κύκλου
3. ἴση ἔστί τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία.	Id.	γωνία ἴση ἔστί τῇ πρὸς τῷ Δ.

PROPOSITIO XXXV.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ .	Id.	Ἐστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ
3. κύκλου, ...	Id.	deest.
4. τέμνει	Id.	τέμνει
5. προσκείσθω κοινὸν	Id.	κοινὸν προσκείσθω
7. εἰδείχθη δὲ ὅτι	ὥστε	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. περιεχόμενον ὀρθογώνιον . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ ἄρα ΔΓΑ	Id.	ἡ ΔΓΑ
3. ΑΔ, ΔΓ	ΑΔΓ	ΑΔ, ΔΓ
4. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ζ ἴσα ἐστὶ τὰ	Id.	ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς
5. ὀρθῇ γὰρ ἢ ὑπὸ ΖΒΔ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. σημειῶν, ...	Id.	deest.
7. ἴσον	Id.	ἴσα
8. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθῇ γὰρ ἢ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ·	Id.	τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὀρθῇ γὰρ ἢ ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ·

PROPOSITIO XXXVII.

1. τῆς	Id.	deest.
2. ΑΔ, ΔΓ	ΑΔΓ	ΑΔ, ΔΓ
3. τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἴστω τὸ Ζ,	Id.	τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,
4. Ἦν δὲ καὶ	Id.	ὑποκείται δὲ
5. ἐστὶ	Id.	deest.
linea 10 paginæ 194.		
6. καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται	Id.	deest.

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

β'. (1) δὲ	deest.	δὲ
δ'. (2) τοῦ περιγραφομένου ἐφάπ- τηται τῆς τοῦ κύκλου περιφε- ρείας.	Id.	τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.
εἰ. (3) εἰς σχῆμα ὁμοίως . . .	Id.	ὁμοίως εἰς σχῆμα

PROPOSITIO I.

1. δὲ	Id.	δὲ εὐ
2. κείσθω	Id.	καὶ κείσθω
3. μὲν	deest.	μὲν
4. τῇ Δ ἢ ΓΕ	Id.	ἢ Δ τῇ ΓΕ
5. εὐθεία, ...	Id.	εὐθεία, μὴ μείζονι οὐσῇ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου

PROPOSITIO II.

1. πρὸς	Id.	πρὸς μὲν
2. πάλιν, πρὸς	Id.	πρὸς δὲ
3. ΖΔΕ	Id.	ΖΔΕ γωνία
4. ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ.	Id.	ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς διῆκται τὴς ἡ ΑΓ.
5. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒ κύκλον.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

1. ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκατέρω τὰ μέρη κατὰ	Id.	ἐφ' ἑκατέρω τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ
2. σημεία, καὶ	Id.	ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεία

486 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. καὶ εἶσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, *Id.* τετράπλευρον ὧν αἱ ὑπὸ KAM,
KBM γωνίαι. KBM γωνίαι δύο ὀρθαὶ εἰσιν.
4. λοιπῇ deest. λοιπῇ

PROPOSITIO IV.

1. ΔΒΓ, ... *Id.* ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέμνεται ὃ ὑπὸ
ΑΒΓ,
2. ταῖς *Id.* deest.
3. τὴν *Id.* deest.
4. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθείαι αἱ ΔΕ, *Id.* deest.
ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
5. καὶ *Id.* μὴ
6. εἰδείχθη. *Id.* deest.
7. ὁ deest. ὁ
8. εἰς *Id.* ἐπὶ
9. Εγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ. *Id.* deest.
10. ὁ deest. ὁ

PROPOSITIO V.

1. εὐθεῖα *Id.* deest.
2. οὖν ἐντὸς πρότερον *Id.* πρότερον ἐντὸς
3. ἐστὶν ἴση. *Id.* ἴση ἐστίν.
4. ἐστὶν *Id.* deest.
5. Περιγραφείσθω *Id.* Καὶ περιγραφείσθω
6. ἐστὶν *Id.* deest.
7. πάλιν deest. πάλιν
8. Καὶ γεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ. deest. concordat cum. edit. Paris.

COROLLARIUM.

9. εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ *Id. a.* ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ἐρβὴ
ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ
τυγχάνουσα ἐρβὴ ἐστίν· ὃ τε δὲ
κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τρι-
γώνου πίπτει, ... ἐσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς ΒΓ
εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, *b,*
c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

10. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
11. συμπίσσωται	πίσσωται	συμπίσσωται
12. τῆς ΒΓ	τῆς ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.	τῆς ΒΓ.

PROPOSITIO VI.

1. τὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. δύο	<i>Id.</i>	deest.
3. διὰ	<i>Id.</i>	κατὰ
4. γωνία.	<i>Id.</i>	deest.
5. δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον	ΑΒΓΔ κύκλον	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα δοθέντα	<i>Id.</i>	δοθέντα ἄρα

PROPOSITIO VII.

1. δοθεὶς κύκλος ὁ	<i>Id.</i>	ὁ δοθεὶς κύκλος
2. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἐστὶ παράλληλος.	<i>Id.</i>	παράλληλός ἐστιν.
5. Ὡστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος.	<i>Id.</i>	deest.
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ΖΚ	<i>Id.</i>	ΖΚ ἐστὶν ἴση.
8. καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκάτερα τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση.	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
10. τετράπλευρον.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. εἰσί.	deest.	εἰσί.
2. ἴσαι εἰσὶν, ...	deest.	ἴσαι εἰσὶν,
3. εἰσίν.	deest.	εἰσίν.
4. εἰδείχθη	<i>Id.</i>	deest.

5. μὲν Id. deest.
 6. ἄρα τὸ δοθέν Id. τὸ δοθέν ἄρα

PROPOSITIO IX.

1. ἴση Id. ἴσιν ἴση.
 2. γωνία ἄρα ἴση ἴσιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ Id. ἡ ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία
 γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσιν ἴση.

PROPOSITIO X.

1. καὶ κέντρον τῷ Α, καὶ δια- Id. κέντρον μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ
 2. στήματι τῷ ΑΒ τῷ ΑΒ
 3. τῶν deest. τῶν
 4. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ, Id. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΔ,
 5. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση Id. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση
 6. γωνία Id. deest.
 7. εἴσι διπλασίους. Id. διπλασίους εἰσίν.
 8. καὶ deest. καὶ
 9. τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἴσιν διπλῇ. Id. διπλῇ ἴσιν τῆς ὑπὸ ΔΑΓ.

PROPOSITIO XI.

1. Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· deest. concordat cum edit. Paris.
 δεῖ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον
 πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
 ἰσογώνιον ἐγγράφαι
 2. τῷ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν λοιπῶν concordat cum edit. Paris.
 3. ἑκατέρας Id. deest.
 4. ΔΕ, ΕΑ ΓΕ, ΔΕ, ΕΑ ΔΕ, ΕΑ
 5. ἴσιν ἴση, ... Id. ἴση ἴσιν,
 6. ἴσιν ἴση. Id. ἴση ἴσιν.
 7. ἄρα γωνία Id. γωνία ἄρα
 8. ἴσιν ἴση. Id. ἴση ἴσιν.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ .	<i>Id.</i>	τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον.
3. Ὡστε τὰ	<i>Id.</i>	τὰ ἄρα
4. λοιπῶ	deest.	λοιπῶ
5. ΓΚ τῇ ΒΚ	<i>Id.</i>	ΒΚ τῇ ΓΚ.
6. ἴσιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴσιν ἴση·	ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσιν, ἴση ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ·	concordat cum edit. Paris.
7. διπλῇ	deest.	διπλῇ
8. ἴστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΔ ἴση.	<i>Id.</i>	deest. deest.
9. ἴσιν	deest.	ἴσιν
10. ἑκατέραν ἑκατέρα, . . .	desunt.	concordat cum edit. Paris.
11. Καὶ ἴσιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση·	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ Γ, καὶ ἴστι διπλῇ ἡ μὲν ΛΔ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ·

PROPOSITIO XIII.

1. ἰσόπλευρόν	<i>Id.</i>	ὅ ἴσιν ἰσόπλευρόν
2. ὑπὸ	<i>Id.</i>	ὑφ'
3. ἴσιν	deest.	ἴσιν
4. ἴσιν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἔστι,
5. ἴσονται, ...	<i>Id.</i>	εἰσιν
6. διπλῇ ἴσιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ,	<i>Id.</i>	ἴσιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ διπλῇ,
7. ἐρθῇ	deest.	ἐρθῇ
8. ταῖς	deest.	ταῖς
9. κύκλος	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ὅ	<i>Id.</i>	ἕπερ
2. αἱ	<i>Id.</i>	deest.

490 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. καὶ διαστήματι *Id.* διαστήματι δὲ
 4. περιγεγραμμένος *Id.* περιγεγραμμένος περὶ τὸ ABΓΔΕ
 πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρον
 καὶ ἰσογώνιον.
 5. ἄρα τὸ δοθὲν *Id.* τὸ δοθὲν ἄρα

PROPOSITIO XV.

1. ἴση ἐστίν *Id.* ἐστὶν ἴση
 2. αἱ *Id.* deest.
 3. ZABΓΔ *Id.* ZABΓΔ περιφέρειά
 4. ΕΔΓΒΑ *Id.* ΕΔΓΒΑ περιφέρειά
 5. περιφέρειας *Id.* deest.
 6. δὴ *Id.* δὲ
 7. ἐστὶ *Id.* deest.

COROLLARIUM.

8. Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ο ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ concordat cum edit. Paris.
 Ε, Ζ σημείων πενταγώνου ἐὰν διὰ
 τῶν κατὰ κύκλον δια-
 ρεσιῶν
 9. τε καὶ περιγράφωμεν Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. Εγγεγράφω *Id.* Γεγράφω
 2. ἴσται *Id.* ἐστὶ
 3. εὐθείας, ... deest. εὐθείας,
 4. εἰρημένοις, ... δείξεων εἰρημένοις
 5. ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσο- deest. concordat cum edit. Paris..
 γώνιον,
 6. deest. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. deest.

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

COD. 190.

EDITIO OXONIÆ.

γ'. (1) πρὸς ἄλληλα	deest.	concordat cum edit. Paris.
δ'. (2) Ἀναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης.	<i>Id. a. c.</i>	hæc definitio, quæ est octava in edit. Oxoniæ, ita se habet : Ἀναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν ὁμοιότης. <i>b.</i>
ε'. (3) ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ἦ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ	<i>Id.</i>	ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ἦ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ
ζ'. (4) λόγον μεγέθη, ...	<i>Id.</i>	μεγέθη λόγον,
θ'. (5) ἐλαχίστη	<i>Id.</i>	ἐλαχίστοις
ια'. (6) τὸ	deest.	τὸ
(7) ὁμοίως ὡς	<i>Id.</i>	ἐν πλείον, ὡς
ιβ'. (8) λέγεται, ...	<i>Id.</i>	λέγεται εἶναι,
ισ'. (9) δὲ	deest.	δὲ
ιη'. (10) αὐτοῖς ἴσων	<i>Id.</i>	ἴσων αὐτοῖς
ιθ'. (11) Τεταγμένη ἀναλογία ἐσ- τίν, ὅταν ἦ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπό- μενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπό- μενον πρὸς ἄλλο τι.	deest. <i>a. c.</i>	concordat cum edit. Paris. <i>b.</i>
κ'. (12) αὐτοῖς ἴσων	<i>Id.</i>	ἴσων αὐτοῖς
(13) μετέθισιν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO I.

1. μεγέθων	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη . . .	<i>Id.</i>	μεγέθη ἐστὶν ἐν τῷ AB
2. AH, HB τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ.	<i>Id.</i>	ΓΘ, ΘΔ τῷ πλήθει AH, HB

492 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς ἴσον ἄρα τὸ AH τῷ E, concordat cum edit. Paris.
E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς his tantum exceptis : in
τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z. E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ edit. Paris. legitur ἴσον ἐστὶ,
ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, in edit. vero Oxoniæ legi-
E, Z. καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z. tur ἐστὶν ἴσον.

PROPOSITIO II.

1. μεγέθη deest. μεγέθη
2. ἄρα Id. ἄρα τὸ

PROPOSITIO III.

1. ἴσάνις ἐστὶ πολλαπλάσιον. ὁσαπλάσιον concordat cum edit. Paris.
2. τοσαῦτα Id. τοσαῦτα δὴ
3. μὲν Id. deest.
4. δὴ Id. δὲ

PROPOSITIO IV.

1. ἐστὶν ὡς τὸ E πρὸς τὸ H, ... Id. ὡς τὸ E πρὸς τὸ H ἐστὶν,
2. ἀλλὰ ἔτυχεν Id. deest.
3. ἑλάττων. Καὶ ἐστὶ ἑλάττων. Καὶ ἐπὶ ὑπερέ-
χει τὸ K τοῦ M, καὶ τὸ
Λ τοῦ N, καὶ εἰ ἴσον,
ἴσον, καὶ εἰ ἐλάττων,
ἑλάττων. Καὶ ἐστὶ

COROLLARIUM.

4. ὅτι deest. ὅτι

PROPOSITIO V.

1. καὶ τὸ EB τοῦ HG ἴσάνις ἄρα Id. deest.
ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AE τοῦ
ΓZ,
2. ἴσται Id. ἐστὶ

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.

COD. 190.

EDITIO OXONIE.

1. τῷ Z ἴσον	ἴσον τῷ Z	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	deest.	καὶ
3. τῷ Z τὸ ΚΓ	Id.	τὸ ΚΓ τῷ Z
4. ἴστί·	Id.	ἴσον ἴστί·.
5. εἰ	Id.	ὅτι

PROPOSITIO VII.

1. τι	Id.	deest.
2. μὲν	Id.	deest.
3. τοῦ Γ πολλαπλάσιον·	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί·	Id.	deest.
5. δὴ	deest.	δὴ
6. δὴ	Id.	deest.
7. τὸ Z	Id.	deest.
8. deest.	Πόρισμα. Εκ δὴ τούτου φαίνεται ὅτι εἰ μὲν μέγιστον τινὰ ἀνάλογον ἦ, καὶ ἀναπάλιν ἀνάλογον ἴσ- ται. Οὗτοι εἶδαι δεῖξαι.	deest in omnibus aliis codi- cibus.

PROPOSITIO VIII.

1. AB, ...	Id.	AB τοῦ Γ
2. καὶ ἴστω	Id.	ἕως τοῦ τὸ γινόμενον μείζον ἔσται τοῦ Δ. Καὶ ἔσται
3. οὗ	Id.	ἂν
4. τὸ	Id.	deest.
5. ἐπειδὴ περὶ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλά- σιον ἔστι, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἔστι τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετρα- πλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἔστί·. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζων ἔστι·	Id.	desunt.
6. τὸ Ν τοῦ ΖΘ	Id.	τοῦ δὲ ΖΘ

PROPOSITIO IX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
7. τοῦ EB μείζον ἔστω . . .	<i>Id.</i> . . .	μείζων ἔστω τοῦ EB.
8. μὴ ἔλασσον εἶναι, . . .	<i>Id.</i> . . .	οὐκ ἔστιν ἔλασσον,
9. ὡσαύτως . . .	<i>Id.</i> . . .	ὡσαύτως.
1. ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις . . .	ἐκεῖνα ἴσα. . .	καὶ ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις.

PROPOSITIO X.

1. τὸν . . .	deest. . .	τὸν.
2. τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον . .	ἐλάσσονα εἶχε λόγον . .	τὸν ἐλάσσονα λόγον εἶχεν
3. ὅτι . . .	deest. . .	ὅτι

PROPOSITIO XI.

1. λόγοι . . .	λόγῳ . . .	λόγοι
1. μὲν . . .	deest. . .	μὲν
2. μὲν . . .	<i>Id.</i> . . .	deest.
3. ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλα- πλάσια τὰ Λ, Μ.		ἰσάκεις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε τὰ Λ, Μ.
4. ἴσον, ἴσον . . .	ἴσον ἔστιν, ἴσον . . .	concordat cum edit. Paris.
5. ἔλαττον, ἔλαττον . . .	ἐλλείπει, ἐλλείπει . . .	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν . . .	<i>Id.</i> . . .	deest.

PROPOSITIO XII.

1. τὰ H, Θ, K, τῶν Λ, Μ, Ν.	τὰ H, Θ, K τῶν Λ, Μ, Ν.	concordat cum edit. Paris.
2. ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλαττονα.	ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασ- σον.	concordat cum edit. Paris.
3. ἂν . . .	<i>Id.</i> . . .	ἐὰν
4. πολλαπλάσια, . . .	πολλαπλάσιον, . . .	concordat cum edit. Paris.
5. τὰ . . .	τὰ . . .	τὸ

PROPOSITIO XIII.

1. ἥπερ . . .	ἡ . . .	ἥπερ
2. ἥπερ . . .	ἡ . . .	ἥπερ
3. μὲν . . .	<i>Id.</i> . . .	deest.
4. ἥπερ . . .	<i>Id.</i> . . .	ἥπερ
5. πέμπτον τὸ E πρὸς ἕτερον τὸ Z.	τὸ E πρὸς τὸ Z . . .	concordat cum edit. Paris.

6. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον deest. concordat cum edit. Paris.
 ἔχει ἥπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ·
 7. τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερ- *Id.* ὑπερέχει τοῦ Δ πολλαπλασίου,
 ἔχει,
 8. μὴ *Id.* οὐχ

PROPOSITIO XIV.

1. μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, . . . *Id.* τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἔστιν,
 2. μέγεθος deest. μέγεθος
 3. καὶ *Id.* deest.

PROPOSITIO XV.

1. μέγεθος deest. μέγεθος

PROPOSITIO XVI.

1. ἀνάλογον ἔστιν, ... ἔστιν ἀνάλογον ἔσται,
 2. ληθόντα κατάλληλα· . . . deest. concordat cum edit. Paris.
 3. καὶ εἰ *Id.* καὶ
 4. καὶ εἰ *Id.* καὶ

PROPOSITIO XVII.

1. ἔστι *Id.* deest.
 2. τὸ HK τοῦ AB καὶ τὸ AM τὸ AM τοῦ ΓZ καὶ τὸ . . . concordat cum edit. Paris.
 τοῦ ΓZ. HK τοῦ AB.
 3. ἀλλὰ ἂ ἔτυχεν deest. concordat cum edit. Paris.
 4. τὰ *Id.* δὲ τὰ

PROPOSITIO XVIII.

1. τὸ *Id.* deest.

PROPOSITIO XIX.

1. τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ *Id.* ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ
 2. ἄρα deest. ἄρα
 3. ἵναλλάξ *Id.* ἵναλλάξ ἄρα ἔστιν

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

4. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

concordat cum edit.
Oxonie.

Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

PROPOSITIO XX.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ ἰάν	<i>Id.</i>	κᾶν
3. καὶ ἰάν	<i>Id.</i>	κᾶν
4. τι	<i>Id.</i>	ὁ ἔτυχ
5. οὕτως	deest.	οὕτως
6. δὲ τὸ Γ πρὸς τὴ Β	δὲ Γ πρὸς Β	concordat cum edit Paris.
7. τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον	τὸ μείζονα λόγον ἔχον	τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκείνο

PROPOSITIO XXI.

1. μέγεθος	μέγεθος ἀνάλογον	μέγεθος
2. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ·	<i>Id.</i>	ἴσον· δηλονότι κᾶν ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ·

PROPOSITIO XXII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.	ἔσται	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ Ζ.	Καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ.	deest.

PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

Ι. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τούτοις ἰσάκεις πολλαπλασίους τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Α, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Μ. Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Α οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.

Id. a, c, d. . . .

καὶ εἴληπται τῶν Β, Δ ἰσάκεις πολλαπλασία τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὸ Α, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Α οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. *ὁ.*

PROPOSITIO XXIV.

1. ἔχη	ἔχει	ἔχη
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. πρῶτον	<i>Id.</i>	τὸ πρῶτον
4. ἔστιν ἄρα ὡς	<i>Id.</i>	ὡς ἄρα

PROPOSITIO XXV.

1. δύο	τὰ δύο	δύο
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. οὖν	deest.	οὖν
4. τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ·	<i>Id.</i>	τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ·
5. ἀνισα ἔστιν·	<i>Id.</i>	ἔστιν ἀνισα·
6. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
β'. (1) λόγων	<i>Id.</i>	ὄροι
γ'. (2) ἡ	deest.	ἡ
ι'. (3) deest.	hæc definitio, quæ in Euclidē nullum ha- bet usum, in mar- gine tantum exa- rata est.	Λόγος ἐκ λόγων συγκείσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πληρότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖ- σαι, τριῶσι τινάς. <i>a, b, c,</i> <i>d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>

PROPOSITIO I.

1. ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην.	τὸ ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
2. ἰσαίδηππευῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἑλαττων, ἑλαττον.	ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλατ- τον, ἑλαττον.	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ μὲν	μὲν ἡ	ἡ μὲν
5. τρίγωνον, ...	<i>Id.</i>	deest.
6. τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον	<i>Id.</i>	πρὸς τὸ ΑΓΔ
7. παραλληλόγραμμον.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO II.

1. εὐθεῖα, ...	<i>Id.</i>	εὐθεῖα παράλληλος
2. πλευρὴν.	<i>Id.</i>	πλευρὰν παράλληλος.
3. δὴ	<i>Id.</i>	ἄρα
4. τρίγωνον	deest.	τρίγωνον
5. δὴ	δὴ καὶ	εἰ
6. τρίγωνον, ...	τρίγωνον	deest.
7. τρίγωνον·	<i>Id.</i>	deest.
8. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIA.

9. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
10. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
11. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

1. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐνέπεσιν	<i>Id.</i>	ἐμπίπτωκεν
4. ἄρα γωνία	<i>Id.</i>	deest.
5. ὡς ἄρα	<i>Id.</i>	ἔστιν ἄρα
6. ὡς	<i>Id.</i>	deest.
7. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
8. ἥκται	<i>Id.</i>	ἥται παράλληλος
9. ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση·	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ·
10. γωνία	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IV.

1. πλευραὶ	deest.	πλευραὶ
2. Εστω	<i>Id.</i>	Εστωσαν
3. μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ·	<i>Id.</i>	ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ·
4. πλευραὶ	deest.	πλευραὶ.
5. ὑπὸ	<i>Id.</i>	περὶ
6. ὑπὸ	<i>Id.</i>	περὶ
7. ἄρα	deest.	ἄρα
8. τῶν πλευρῶν	desunt.	concordat cum edit. Paris.
9. ἐναλλάξ ἄρα	καὶ ἐναλλάξ	concordat cum edit. Paris.
10. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ	Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ μὲν	Επεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ
11. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. linea 4 paginæ 302, πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ Η	<i>Id.</i>	ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ
2. ΕΗΖ	<i>Id.</i>	ΕΑΖ τριγώνω
3. οὕτως	deest.	οὕτως
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
6. ἐστὶν ἴση	deest.	ἐστὶν ἴση,
7. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
8. Δ	<i>Id.</i>	Δ ἐστὶν ἴση

PROPOSITIO VI.

1. ἴση	<i>Id.</i>	γωνία ἴση
2. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴση	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση
4. ἴσονται, ...	<i>Id.</i>	ἴσονται ἑκατέρα ἑκατέρα,
5. ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. . .	<i>Id.</i>	πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε.

PROPOSITIO VII.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευ- ρὰς ἀνάλογον,	<i>Id.</i>	τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ,
3. γωνία	deest.	γωνία
4. ὑπὸκειται οὕτως	<i>Id.</i>	οὕτως ὑπὸκειται
5. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
7. πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῷ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΗ
8. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
9. ἐρθῆς	<i>Id.</i>	ἐρθῆς καὶ
10. ἰσωνίων ἐστι	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἰσωνίων
11. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γωνία	deest.	γωνία
2. τῇ πρὸς τῷ Γ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἔστι	deest.	ἔστι
4. τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ἕμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.	Id.	τὸ ΑΔΓ τριγώνον ἕμοιόν ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ
5. ἕμοιόν ἐστίν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τρί- γώνῳ.	Id.	ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἕμοιόν ἐστίν.
6. γωνίαν, ...	Id.	γωνίαν,
7. ὑποτείνουσα τὴν ἐρθήν τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσιν τὴν ἐρθήν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ.	πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσιν τὰς ἐρθάς.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

8. ἔστιν.	Οτερ ἴδει δεῖξαι.	ἔστιν.

PROPOSITIO IX.

1. καὶ	deest.	καὶ
2. αὐτῇ ἢ χθω ἢ ΔΖ.	Id.	ἢ χθω τῇ ΒΓ ἢ ΔΖ.

PROPOSITIO X.

1. δεθείση	Id.	δεθείση εὐθείᾳ
2. ΑΓ, ...	Id. a, c, d.	δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄτμητον τῇ ΑΓ τετ- μημένη ὁμοίως τεμεῖν. Ἐστω τετμημένη ἡ ΑΓ β.

PROPOSITIO XI.

1. αἰ	Id.	δύο εὐθεῖαι αἰ
2. προσευρεῖν.	εὐρεῖν.	προσευρεῖν.
3. αὐτῇ	Id.	αὐτῇ

PROPOSITIO XII.

1. Γ	Id.	Γ εὐθειῶν
2. τυχοῦσαν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν πλευρῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἴσوزωνίων	<i>Id.</i>	μίαν μιᾷ ἴσων ἐχόντων γωνίαν
2. ἴσوزωνίων παραλληλογράμμων, ...	<i>Id.</i>	παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσων ἐχόντων γωνίαν,
3. τε καὶ ἴσوزώνια	<i>Id.</i>	dcest.
4. ΔΒ, ΒΓ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ΔΒ, ΒΓ
5. ἐντιστοιθεύωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ	dcest.	concordat cum edit. Paris.
6. παραλληλόγραμμον	<i>Id.</i>	dcest.

PROPOSITIO XV.

1. τριγώνων, ...	<i>Id.</i>	dcest.
2. αἱ	dcest.	αἱ
3. τριγώνων.	<i>Id.</i>	dcest.
4. ΕΑΔ	<i>Id.</i>	ΕΑΔ τριγώνων
5. ἄρα τριγώνων	<i>Id.</i>	τριγώνων ἄρα

PROPOSITIO XVI.

1. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ εἰ
2. αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ	<i>Id.</i>	τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἀνάλογον,
3. γὰρ	dcest.	γὰρ
4. ἄρα παραλληλογράμμων	<i>Id.</i>	παραλληλογράμμων ἄρα
5. αἱ	dcest.	αἱ
6. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε	ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ	περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε.
7. τῶν	<i>Id.</i>	dcest.
8. ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ Ζ	<i>Id.</i>	τῇ Ζ ἡ ΑΗ.
9. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ	dcest.	concordat cum edit. Paris.
10. καὶ ἐστὶν	<i>Id.</i>	εἴσιν

PROPOSITIO XVII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ εἰ
2. ἀπὸ	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῆς μίσης

3. οὕτως	deest.	οὕτως
4. τὸ ἀπὸ τῆς B ἐστίν, . . .	<i>Id.</i>	τῷ ἀπὸ τῆς B ἐστὶν ἴσον,
5. τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἐστίν, . .	<i>Id.</i>	τῷ ἀπὸ τῶν B, Δ

PROPOSITIO XVIII.

1. ἴση ἡ ὑπὸ HAB, ...	<i>Id.</i>	ἡ ὑπὸ HAB ἴση,
2. ἴση	<i>Id.</i>	deest.
3. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ
4. τε	<i>Id.</i>	deest.
5. αὐτῷ	αὐτῶν	αὐτῷ

PROPOSITIO XIX.

1. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
2. ἄρα τριγώνων	<i>Id.</i>	τριγώνων ἄρα
3. τριγώνων	<i>Id.</i>	deest.
4. ἔχειν λέγεται	ἔχει	concordat cum edit. Paris.
5. τριγώνου	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM.

7. ἐν	<i>Id.</i>	καὶ
8. τριγώνον	εἶδες	concordat cum edit. Paris.
9. ΔΕΖ.	ΔΕΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

1. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
2. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ
3. εἶσιν	<i>Id.</i>	deest.
4. ἔτι τὸ ΕΒΓ τριγώνον τῷ ΑΗΘ τριγώνου.	<i>Id.</i>	deest.
5. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
6. εἰδείχθη	ἐστὶ	concordat cum edit. Paris.
7. ἴση ἐστίν	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση.
8. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

504 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

9. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
10. τὸ	deest.	τὸ
11. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
12. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
13. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
14. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM I.

15. δὴ	δε	δὴ
16. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
17. πλευρῶν	πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει δειξαι.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM II.

18. καὶ	ἢ	καὶ
19. πλευρὰν, ...	<i>Id.</i>	deest.

ALITER.

20. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
21. deest.	deest.	καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγευμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπεμένων οὕτως ἅπαντα τὰ τὰ ἡγευμένα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δειξαι.

Nota. In demonstratione propositionis XX, codicibus *a*, *c*, articulus τὴν non ponitur ante litteras figuram designantes, ante quas poni solet.

PROPOSITIO XXI.

1. ὅμοιον ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶν ὅμοιον
2. deest.	deest.	ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιον τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἰσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει.

PROPOSITIO XXII.

1. μὲν ὃ	<i>Id.</i>	ἢ μὲν
2. τὸ	<i>Id.</i>	καὶ τὸ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. καὶ *Id.* deest.
 4. καὶ *Id.* ? deest.
 5. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς
 τὴν ΓΔ οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ,
 ἔστω
 6. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ *Id.* deest.
 οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.
 7. ΣΡ *Id.* καὶ ΣΡ
 8. ἢ *Id.* ἔστιν ἡ

Λ Η Μ Μ Α.

9. ἢ καὶ ὅμοια, ... *Id.* καὶ ὅμοια ἢ.

PROPOSITIO XXIII.

1. τοῦ τε ἐνέχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ deest. concordat cum edit. Paris.
 καὶ τοῦ ἐνέχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.
 2. τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε concordat cum edit. Paris.
 τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Α· λόγου καὶ τοῦ τῆς Κ πρὸς Α· λόγου
 τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Μ· καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς Μ·
 3. παραλληλόγραμμον· *Id.* concordat cum edit. Paris.
 4. παραλληλόγραμμον. *Id.* deest.

PROPOSITIO XXIV.

1. αὐτοῦ *Id.* αὐτῷ
 2. τῶν πλευρῶν deest. concordat cum edit. Paris.
 3. ἄρα deest. concordat cum edit. Paris.
 4. ἡ *Id.* deest.
 5. συντεθέντι *Id.* συντεθέντι ἄρα
 6. τὴν ΑΗ, καὶ ΑΗ concordat cum edit. Paris.
 7. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ *Id.* τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα
 8. ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. concordat cum edit. Paris.
 ὑπὸ ΗΖΔ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ,
 9. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμ- ἄρα deest, et reliquum concordat cum edit. Paris.
 μον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἔστι τῷ ΕΗ παραλλη-
 ἰσογώνιον ἔστιν· λογράμμῳ·

506 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
11. καὶ	deest.	καὶ
12. παραλληλογράμῳ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. δεῖ	<i>Id.</i>	deest.
2. τε	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔστιν	deest.	ἔστιν
4. τρίγωνον.	<i>Id.</i>	deest.
5. τῷ Δ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVI.

1. παραλληλογράμμου γὰρ	<i>Id.</i>	γὰρ παραλληλογράμμου
2. ἀφαιρήθῃ	<i>Id.</i>	ἀφαιρήθῃ
3. αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκκληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθῃ ἐπὶ τὸ Θ, ...	<i>Id. a.</i>	αὐτῶν ἡ διάμετρος ΑΘΓ, <i>b, c, d,</i> <i>e, f, g, h, k, l, m, n.</i>
4. αὐτὴν	<i>Id.</i>	deest. <i>b.</i>
5. ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἄρα	deest.	ἄρα
8. οὐκ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVII.

1. αὐτὴν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, ...	τῆς ΑΒ ἀναγραφέντι	concordat cum edit. Paris.
3. παραλληλογράμμοις	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. προσκείσθῃ τὸ ΚΘ, ...	δὲ τὸ ΖΒ	concordat cum edit. Paris.
5. ἴση ἔστιν, ...	<i>Id.</i>	ἴστιν ἴση.
6. ἔστιν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἔστι.
7. ὥστε	<i>Id.</i>	ὥστε καὶ
8. τῆς	<i>Id.</i>	τὴν
9. προσκείσθῃ	<i>Id.</i>	ἔστω

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ὁμοίῳ	<i>Id.</i>	ὁμοίῳ ὄντι
2. τῶν ἑλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἑλλείπειν.	<i>Id.</i>	τοῦ τε ἑλλείμματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ἡμισίων ἑλλείπειν παραλληλογράμμου.
3. ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁ- μοίων ὄντων τῶν ἑλλειμμάτων,	AB ἀναγραφόμενου ὁμοίου τῷ ἑλλειμμάτι,	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ δὴ AH ἥτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ὅρισμον.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
5. οὖν	deest.	οὖν
6. μὲν τῇ Λ	τῇ AK μὲν	μὲν τῇ Λ
7. τῷ KM τὸ ΗΠ.	<i>Id.</i>	τὸ ΕΟ τῷ KM.
9. ἐστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστὶν.

PROPOSITIO XXIX.

1. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΑ.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
3. οὖν	deest.	οὖν
4. ἐστὶν ἴσος.	<i>Id.</i>	ἴσος ἐστὶ.
5. τῷ ΕΑ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ. .	<i>Id.</i>	τὸ ΕΑ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ.

PROPOSITIO XXX.

1. γὰρ	deest.	γὰρ
2. ΑΓ, τευτίεστι τε ΑΒ, . . .	ΑΒ, ...	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ	<i>Id.</i>	deest.

A L I T E R.

4. ΑΒ	<i>Id.</i>	ΑΒ εὐθεῖαν

PROPOSITIO XXXI.

1. τε	<i>Id.</i>	deest.
2. τε	<i>Id.</i>	deest.

508 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIA.

3. ἔρα	deest.	ἄρα
4. ἡ	Id.	deest.

A L I T E R.

5. ἐστὶ	Id.	εἰσὶ
6. ἄρα εἶδος	Id.	εἶδος ἄρα
7. εἶδος	Id.	deest.
8. τοῖς	deest.	τοῖς
9. Ὅτι εἶδει δεῖξαι.	deest.	deest.

Hæc altera demonstratio in infimâ paginâ codicis 190 exarata est, vocabulis contractis.

PROPOSITIO XXXII.

1. αὶ	Id.	deest.
2. τὰ	Id.	deest.
3. ΑΛΛὰ αὶ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ δυσὶν ἐρθαῖς ἴσαι εἰσὶ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομῆς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι,	hæc verba inter lineas exarata sunt manu alienâ, et secunda pars demonstratio- nis, quæ ad secto- res attinet, nec- non corollarium, in margine manu alie- nâ exarata sunt, vo- cabulis contractis.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομῆς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
3. κατὰ τὸ ἐξῆς ἰσαιοηποτοῦν .	Id.	ἰσαιοηποτοῦν κατὰ τὸ ἐξῆς
4. ἴσαι ἰσαιοηποτοῦν	Id.	ἰσαιοηποτοῦν ἴσαι
5. Εἰ ἄρα	Id.	Καὶ εἰ

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS. 509

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
6. γωνίας*	deest.	γωνίας
7. διπλασίων	διπλασια	concordat cum edit. Paris.
8. ὑπὸ	deest.	ὑπὸ
9. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερεία*	<i>Id.</i>	ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερεία*
11. ΒΕΓ	<i>Id.</i>	ΒΕΓ γωνία
12. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλή- λοις εἰσίν*	desunt.	concordat cum edit. Paris.
13. Εἰ ὅρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περι- φέρεια τῇ ΕΝ περιφερεία,	<i>Id.</i>	καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΕΝ,
14. ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομῆς ταῦ ΘΕΝ τομῶς* καὶ εἰ ἐλλεί- πει, ἐλλείπει.	desunt.	concordat cum edit. Paris.

LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190.	EDITIO OXONIÆ.
α. (1) ἦν	<i>Id.</i>	ἦν ὁ
ζ. (2) ὁ	deest.	ὁ
θ. (3) ἀριθμός	<i>Id.</i>	deest.
ι. (4) Περισσάκις δὲ ἄρτιός ἐστιν, ἔ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρού- μενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.	<i>Id.</i> a, c, e, f, g, h, k, l, m, n.	deest. b, d.
ια. (5) ἀριθμός ἐστιν, ...	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἀριθμός,
ιγ. (6) δὲ	<i>Id.</i>	deest.
ιδ. (7) ἴσαι	ἴσαι	ἴσαι ἴσαι
(8) τοσαυτάκις	<i>Id.</i>	τοσάκις
ιη. (9) καλεῖται	ἐστὶ	καλεῖται.
ιβ. (10) ὁ	deest.	ὁ
ικ. (11) ἀριθμῶι ἴσων	<i>Id.</i>	ἴσων ἀριθμῶν

PROPOSITIO I.

1. Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαίρουμένου δὲ αἰ τοῦ ἐλάσ- σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἴαν	<i>Id.</i>	Εὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων ἀνθυφαίρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσ- σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,
2. ἀνίσων	deest.	ἀνίσων
3. μετρεῖ.	<i>Id.</i>	μετρεῖ.
4. μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει ὁ Ε.
5. μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει ὁ Ε.
6. μετρήσει.	μετρεῖ.	μετρήσει.

PROPOSITIO II.

1. καὶ ἴστω ἐλάσσων ο ΓΔ	desunt.	concordat cum. edit. Paris.
2. AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	ΓΔ, AB
3. linea secunda et tertia pa- ginæ 589 μετρεῖ.	<i>Id.</i>	μετρήσει.

C O R O L L A R I U M.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. μετρήσει. μετρήσει. Ὅπερ ἴδι διείξει. μετρήσει.

PROPOSITIO III.

1. μέγιστον κοινὸν μέτρον, . .	<i>Id.</i>	κοινὸν μέγιστον μέτρον,
2. μετρήσει, ...	<i>Id.</i>	μετρήσας
3. μετρήσει μείζων τοῦ Δ'. . .	<i>Id.</i>	τις μετρήσει μείζων ὧν τοῦ Δ'
4. δὴ	deest.	δὴ
5. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
6. μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρεῖ
7. ποιησαι.	δείξει.	concordat cum edit. Paris.

C O R O L L A R I U M.

1. Hoc corollarium deest in codice *a*.

PROPOSITIO IV.

1. Οἱ A, BΓ	<i>Id.</i>	οἱ A, BΓ πρότερον
2. πρότερον οἱ A, BΓ	<i>Id.</i>	desunt.
3. οἱ A, BΓ	<i>Id.</i>	desunt.
4. δὴ ἐκάστῳ τῶν BE, EZ, ZΓ. .	<i>Id.</i>	δὲ ὁ Δ ἐκατέρῃ τῶν BE, EZ.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. εἰσὶν ἐν τῷ BΓ ἀριθμοὶ . . .	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν τῷ BΓ
3. καὶ οἱ BH, EΘ ἄρα A, Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ HΓ τῷ A ἴσος ἐστίν, ὁ δὲ ΘZ τῷ Δ' καὶ οἱ HΓ, ΘZ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι εἰσὶν.	<i>Id.</i>	ὁ BH ἄρα καὶ EΘ τοῖς A, Δ ἴσοι εἰσὶ. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ HΓ τῷ A ἴσος ἐστὶ, καὶ ὁ ΘZ τῷ Δ' καὶ οἱ HΓ, ΘZ ἄρα τοῖς A, Δ ἴσοι εἰσὶν.
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. η	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	αὐτὸ τὸ
4. καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ

PROPOSITIO VII.

1. ὁ	deest.	ὁ
2. ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν·	hæc verba aliena man- nu in margine exa- rata sunt.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν ἴσος.	<i>Id.</i>	ἴσος ἐστὶ.
4. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
5. τῷ	<i>Id.</i>	τῷ
6. ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. τῷ ΑΕ ἴσος	<i>Id.</i>	ἴσος τῷ ΑΕ
2. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IX.

1. η	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐλάσσω δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ·	desunt.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	καὶ
4. δὲ	<i>Id.</i>	δὲ

PROPOSITIO X.

1. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	desunt.
2. ἴστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσω·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEPTIMUS. 513

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	deest.
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ
5. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ
6. καὶ ὁ ἄρα μέρους ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρους ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.	<i>Id.</i>	desunt.
7. εἰδείχθη	<i>Id.</i>	ἐστὶ
8. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIII.

1. τὰ αὐτὰ	<i>Id.</i>	desunt.

PROPOSITIO XIV.

1. γὰρ	deest.	γὰρ
2. καὶ	deest.	καὶ

PROPOSITIO XV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	deest.
2. δὲ	δὴ	δὲ
3. ἔσται	<i>Id.</i>	ἐστὶν
4. ἀριθμὸν	deest.	ἀριθμὸν
5. ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν	ὁ Α τὸν Δ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVII.

1. ἔξουσι λόγον	<i>Id.</i>	λόγον ἔχουσι
2. ἀριθμὸν	deest.	ἀριθμὸν
3. καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕ- τως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε.	desunt.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. τὸν αὐτὸν ἔχουσι *Id.* καὶ αὐτὸν ἔξουσιν

PROPOSITIO XIX.

1. ὁ πρῶτος καὶ τετάρτος πρῶτος καὶ τετάρτος τοῦ πρῶτου καὶ δευτέρου
 2. ἀλλ' ὥς *Id.* ὥς δὲ
 3. ἄρα ὥσπερ ἄρα
 4. τῶν *Id.* τὸν

PROPOSITIO XX.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 eadem manu exarata est, vocabulis contractis.

2. ἐὰν δὲ καὶ ἐὰν ἐὰν δὲ
 3. ὑπὸ *Id.* ἀπὸ
 4. ἔσονται εἰσίν ἔσονται
 5. ὑπὸ *Id.* ἀπὸ

PROPOSITIO XXI.

1. ἔχοντας *Id.* ἔχοντας αὐτοῖς
 2. ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ εἰσὶν ἀλλήλοις, *Id.* οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν,
 3. ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, . . . *Id.* ἀλλήλοις ἴσοι,
 4. τὸ αὐτὸ *Id.* αὐτὸ τὸ

PROPOSITIO XXII.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 alienâ manu exarata est, vocabulis contractis.

2. πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, *Id.* πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ

PROPOSITIO XXIII.

1. μὴ *Id.* εἰσὶν οἱ Β, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς,
 2. ἐλάσσονες *Id.* ἐλάχιστοι

PROPOSITIO XXVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. πρῶτοι ἴστανται, ...	<i>Id.</i>	ἴστανται πρῶτοι,
2. τοὺς Γ, Δ	<i>Id.</i>	αὐτοὺς
3. δὴ	<i>Id.</i>	δε
4. τε	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVII.

1. καὶ	deest.	καὶ

PROPOSITIO XXVIII.

1. πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται.	<i>Id.</i>	πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ.
2. οἱ	<i>Id.</i>	ὁ

PROPOSITIO XXIX.

1. τινες, ...	<i>Id.</i>	τινα,
2. ἀριθμοὶ δύο	<i>Id.</i>	δύο ἀριθμοὶ
3. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
4. οὖν	<i>Id.</i>	ἄρα

PROPOSITIO XXX.

1. τῶν	τὸν	τῶν
2. τοὺς ΓΑ, ΑΒ	<i>Id.</i>	αὐτοὺς
3. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ...	<i>Id.</i>	desunt.
ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.		
4. πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.	<i>Id.</i>	πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι
5. οἱ ΑΒ, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους, ...	<i>Id.</i>	πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ,
6. τοὺς ΑΒ, ΒΓ	<i>Id.</i>	αὐτοὺς

PROPOSITIO XXXI.

1. καὶ ἴστω ὁ Γ.	<i>Id.</i>	καὶ ἴστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα οὐκ ἔστι μονάς.

PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἀλλήλους *Id.* deest.
 2. ὁ Δ deest. ὁ Δ

PROPOSITIO XXXIII.

1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι *Id.* δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον
 2. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι *Id.* δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.
 3. ὁ deest. ὁ
 4. πρῶτος ἀριθμὸς, ... *Id.* desunt.

A L I T E R.

deest. deest. *a, c, d, e, f,*
g, h, n.

Εστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω
 ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ
 μετρεῖται.

Επεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, με-
 τρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ. Καὶ
 ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων
 αὐτὸν ὁ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός
 ἐστιν.

A _____
 B _____
 Γ _____

Εἰ γὰρ μὴ, σύνθετός ἐστι μετρη-
 θήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος.
 Μετρίσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ με-
 τρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσ-
 σων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Β
 μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α με-
 τρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ,
 ἐλάσσω ὢν τοῦ Β, ἐλαχίστου
 ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπερ
 ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετος
 ἀριθμὸς ἐστι· πρῶτος ἄρα. Ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι. *b, h, l.*

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι.	<i>Id.</i>	ἄλλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.

PROPOSITIO XXXV.

1. ἐν	deest.	ἐν
2. ἐχόντων	<i>Id.</i>	ἐχόντων αὐτοῖς
3. τινες	deest.	τινες

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁ Α	<i>Id.</i>	ὁ
2. μετρήσουσί	<i>Id.</i>	μετροῦσί
3. ὅταν οἱ Α, Β πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν.	hæc verba inter lineas alienâ manu exarata sunt.	concordat cum edit. Paris.
4. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η.	<i>Id.</i>	desunt.

PROPOSITIO XXXVII.

1. μετροῦσι, ...	<i>Id.</i>	μετρήσουσι.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. μετρήσουσιν	<i>Id.</i>	μετροῦσιν
2. δὲ	<i>Id.</i>	δὲ
3. οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι.	deest.	οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι.
4. οὖν	deest.	οὖν
5. τὸν Ε	deest.	τὸν Ε
6. μετρήσουσί	<i>Id.</i>	μετροῦσι
7. μετρήσουσι.	<i>Id.</i>	μετροῦσι.
8. μετρήσουσι.	<i>Id.</i>	μετροῦσι.
9. ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ τὸν Ε.
10. μετρήσουσι.	<i>Id.</i>	μετροῦσι.

518 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEPTIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

11. δὴ	<i>Id.</i>	dcest.
12. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα . . .	<i>Id.</i>	ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος
13. τὸν Z μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει τὸν .
14. μετρήτουσί	<i>Id.</i>	μετροῦσι

PROPOSITIO XL.

1. ἔστω	<i>Id.</i>	ἔστω ἀριθμὸς
2. μέρος ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα μέρος

PROPOSITIO XLI.

1. τὰ δεθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.	τὰ A, B, Γ μέρη . . .	τὰ δεθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.
2. ἀριθμοὶ	dcest.	ἀριθμοὶ
3. ὁ	dcest.	ὁ
4. ὁ H ἄρα	<i>Id.</i>	ἐπεὶ οὖν ὁ H ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ με- τρεῖται, ὁ H
5. ἔστω τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ- μὸς ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη, ὁ Θ.	<i>Id.</i>	ὁ H ἐλάχιστος ὃν ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη, ἔσται τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ- μὸς ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη. Ἐστω ὁ Θ.

FINIS TOMI PRIMI.

ERRATA.

Signo * indicantur correctiones in textu faciendæ; quæ autem hoc signo carent, nullius fere sunt momenti.

Littera *b* indicat lineas ab infimâ paginâ esse computandas.

Cum in meâ editione litteræ circa figuras incisas sint mobiles, non mirandum est si qua in aliquot figuris operis impressi deesse potuerit.

Pagina	linea		Pagina	linea	
xij et xij*	7,	1808, lege 1807.	84*	3,	in æqualia, <i>lege</i> in.
5*	7, <i>b.</i>	τις ² , lege τις.	87,	5, <i>b.</i>	τὸ δ', lege τὸ δέ.
*	2, <i>b.</i>	γωνίαι ³ , lege γωνίαι.	88*	5,	ὀρθόγωνῳ, lege ὀρθογωνίῳ.
*	1, <i>b.</i>	μὴ ⁴ , lege μὴ.	100*		littera M deest in figurâ.
8*	3,	ἴστί ⁷ , lege ἴστιν.	101*	11,	gnomonon quadrupla,
*	3,	ἴση ἴστί ⁷ , lege ἴση ἴστί ⁷ .			<i>lege</i> gnomon quadrupla.
8,	3, <i>b.</i>	εὐθεία, lege εὐθεία.	102,	2,	δε, lege δέ.
10,		littera B deest in figurâ.	107*	9,	igitur ΔHE, <i>lege</i> igitur ΔHB.
14,	5, <i>b.</i>	περιέχουσιν, leg. περιέχουσι.	111*	10,	ποιεῖν, lege ποιεῖν ⁷ .
	4, <i>b.</i>	ἴστί ⁷ , lege ἴστί.	117*	7,	point, leg. d'aucun côté.
20*	1,	quidem, <i>lege</i> autem.	119*	3, <i>b.</i>	ταῖς ΗΔ, ΔΒ, lege ταῖς ΔΒ, ΗΔ.
20,	1, <i>b.</i>	triangulo æquilatERO, L. triangulum æquilaterum.	*	3, <i>b.</i>	duabus ΗΔ, ΔΒ, <i>lege</i> duabus ΔΒ, ΗΒ.
21,	8,	ἡ, lege ἡ.	*	3, <i>b.</i>	droites ΗΔ, ΔΒ <i>lege</i> droites ΔΒ, ΗΔ.
21,	1, <i>b.</i>	πιπιρατμήνην, lege πιπιρασμήνην ¹ .	119* et 120*,		in figurâ in locum litteræ A ponatur B et in locum litteræ B ponatur A.
23*	3,	triangulo æquilatERO, <i>leg.</i> triangulum æquilaterum.	121*	{	littera B deest in figurâ.
25,	1,	ἰπί, lege ἰπί.	125*	1, <i>b.</i>	τιμνέ ³ ὀρθῶ ³ ἄρα ³ , lege τίμν ³ ὀρθῶ ³ ἄρα.
32*	1,	δύο, lege δυοῖ.	126*	3,	τίμν ⁵ ὀρθῶ ⁵ ἄρα ⁵ , lege τίμν ⁵ ὀρθῶ ⁵ ἄρα.
46*	10,	ἴσην, lege ἴση.		6,	ἴστί ⁷ , lege ἴστιν.
62,	3, <i>b.</i>	καὶ εἶν ⁷ , lege καὶ εἶσιν.	152*	8,	γωνία, lege γωνία.
66,	4,	præter AB; ΑΔ, lege ΑΔ; ΑΔ.	154,	3, <i>b.</i>	ἰπεὶ δὴ π.ρ., lege ἰπιδὴ π.ρ.
71,	2, <i>b.</i>	ἴστί ⁷ ἡ, lege ἴστιν ἡ.	163,	3,	ἄρα, lege ἄρα.
72*	1, <i>b.</i>	ὥστε, lege ὥστε ¹ .	179,	1,	ἱκτός, lege ἱκτός.
73*	1,	τῇ ΒΑ ¹ , lege τῇ ΒΑ.	181,	4,	εἰσιν, lege εἰσὶ.
78*	—	littera Θ deest in figurâ.	183*	4,	κύκλου, lege τοῦ κύκλου.
79*	16,	αἱ ΔΒ, ΔΑ, lege ΔΒ, ΒΑ.	184*	*	littera B deest in figurâ.
*	15,	utique ΔΒ, ΔΑ, lege ΔΒ, ΒΑ.			
*	11,	droites ΔΒ, ΔΑ, lege ΔΒ, ΒΑ.			

Pagina	linea	
195*	9,	δ', lege δ'.
196*	1,	δ', lege δ'.
*	8,	ὁμοίως, lege ὁμοίως ³ .
198,	6, b.	η, lege η.
209*	4, b.	ducitur, lege ducta est.
218*	7, b.	τῶ, lege τῶν.
227*	4,	ὁ, lege ὁ.
227*	4, b.	τὸ, lege τῶ.
228*	5, b.	περιγραφόμενος, lege περι- γεγραμμένος.
233*		littera Δ deest in figurâ.
235*	5,	μιγέθους, lege μιγέθους.
235*	1, b.	σέσις, lege σχέσις.
236*	8,	surpassent, chacun à chacun, lege surpass- sent.
237,	3, b.	divisio, lege divisio au- tem.
240*	1,	qu'il y a, lege qu'il y a dans ΓΔ.
245*	1, b.	multiplices, lege æque multiplices.
247*	9,	sunt, lege sint.
275*	4,	δὲ τὸ, lege δὲ τὸ'.
302*	4,	τῶ Δ, lege τῶ Α.
*	4,	ad Δ, lege ad Α.
*	2,	restant Δ, lege restent Α.
311,	1,	ὁμοιον ἐστὶ, lege ὁμοιον ἐστι.
320*	5, b.	τῶν ΔΒ, lege τῶν ΑΒ.
*	5, b.	ipsarum ΔΒ, lege ipsa- rum ΑΒ.
*	3, b.	ΔΒ, ΒΓ autour, lege ΑΒ, ΒΓ autour.
334*	1, b.	ΑΗ, lege Η ΑΗ.
*	1, b.	ΑΗ ad, lege ad ΑΗ.
*	1, b.	comme ΑΗ, l. comme ΑΗ.
344,	8,	lege η.
344,	10,	πὸ, lege ἀπὸ.
345,	8,	η, lege η.
355*	4, b.	τῶ ΚΗ, lege τῶ ΕΗ.
*	4, b.	ipsum ΚΗ, l. ipsum ΕΗ.
*	2, b.	ΚΗ ne peuvent, lege ΕΗ ne peuvent.

Pagina	linea	
359,	7,	ἴτων, lege ἄντων.
360,	1, b.	semblable, lege égal.
382,	2, b.	πρῶτως, lege πρῶτος.
382,	4,	ipse bifariam divisus, lege qui bifariam di- viditur; etsimili modo emendentur defini- tiones 7.....15; vo- cabulo qui in locum vocabuli ipse posito, indicativo autem in locum participii.
388*	1, b.	μετρήσι ³ , lege μετρήσι.
389*	2, 3,	μετρεῖ, lege μετρεῖ ³ .
416*	9,	αὐτὸν ἔχουσι τὸν, lege τὸν αὐτὸν ἔχουσι.
423*	7,	πλήθως, lege πλήθος.
439,	7,	ἐπιταχθῆν, lege ἐπιταχθῆν.
477*	7,	col. 1. ἐφαπαπτήται, leg. ἐφάπτηται.
478*	14,	col. 3. εὐθεῖαι, l. εὐθεῖα.
480*	3, b.	col. 3. οὐ μία, αὐτῶν, leg. οὐ, μία αὐτῶν.
484*	13,	col. 1. τῶν ΕΖ, leg. τῶν ΔΖ.
491*	5, b.	col. 1. μετέθισιν, lege μι- γέθισιν.
492*	17,	col. 1. ἀλλὰ ἔτυχεν, lege ἀλλὰ ἂ ἔτυχεν.
*	18,	col. 1. ἔλαττων, lege ἔλαττον.
494*	1,	propositio IX, lege pro- positio VIII.
497*	6,	col. 3. τὲ Α, lege τὸ Α.
*	7,	col. 3. τὸ Α, lege τὸ Α.
498*	9,	col. 3. τριῶσι, leg. ποιῶσι.
499*	10, b.	col. 3. ΑΓΕ, lege ΑΓΒ.
500*	4,	col. 1. Δ, leg. Α.
*	4,	col. 3. ΕΑΖ, lege ΗΕΖ.
502*	6,	col. 1. ΔΒ, lege ΑΒ.
507*	5,	col. 3. ὁμοίων, l. ὁμοιον.
*	13,	col. 1. Α, lege ΚΑ.
*	11,	col. 3. Α, lege ΚΑ.