

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES OEUVRES D'EUCLIDE.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR, place Cambrai, n° 6;
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17;
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24;
Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

LES OEUVRES D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE.

DÉDIÉ AU ROI.

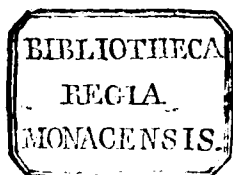
TOME PREMIER.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1814.



A U R O I.

SIRE,

IL y a long-temps que mon Euclide en trois langues aurait dû paraître. Je me plaignais des circonstances qui en retardaient la publication. Combien, au contraire, je me serais félicité de ce retard, s'il m'avait été donné de prévoir que le monde entier, bouleversé jusque dans ses fondements, devait bientôt rentrer dans l'ordre accoutumé; que les tempêtes allaient se dissiper, la sérénité renaître dans le ciel, et le bonheur sur la terre! si surtout j'avais pu penser que VOTRE MAJESTÉ, reparaissant parmi nous comme un astre bienfaisant, daignerait permettre que mon ouvrage parût sous ses auspices augustes!

SIRE, cette faveur inattendue, qui met le comble au plus cher de mes vœux, sera gravée dans mon cœur jusqu'à mon dernier soupir.

Je suis avec respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ,

Le très-humble, très-obéissant
et très-fidèle sujet,

F. PEYRARD.

P R Æ F A T I O.

EUCLIDES vixit temporibus Ptolemæi-Lagi, circiter annum 272 ante æram vulgarem; Archimedes suis in libris sæpe de illo meminit. Euclides a Ptolemæo interrogatus an non esset methodus discendæ Geometriæ methodo suâ faciliior : Non est regia, inquit Euclides, ad Geometriam via. Hæc tantum de Euclide novimus : quâ sit patriâ oriundus ignoratur.

Ante Euclidem permulti floruerunt geometræ. Primus omnium Græcorum, Euclides eorum opera collegit, collecta digessit, et quæ fuerant incondite demonstrata, ea demonstrationibus inconcussis exornavit.

Plurima opera Euclides conscripserat; ex quibus tredecim libri Elementorum et Data tantum supersunt.

Librorum omnium qui de scientiarum elementis agunt liber perfectissimus semper habita sunt Euclidis Elementa, quæ in omnes omnino linguas fuerunt conversa.

De Elementis Euclidis sic Cardanus : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Ait Pemberton se non semel Newtonem audivisse mœrentem quod sese Cartesii aliorumque algebristarum operibus totum dedisset, antequam studuisset Euclidis Elementis, et illa fuisset meditatus.

D. *Lagrange* quem extinctum luget et diu lugebit Europa, mihi dictabat Geometriam esse linguam mortuam; et qui in Euclidis Elementis

PRÉFACE.

EUCLIDE vivait du temps de Ptolémée-Lagus, vers l'an 272 avant l'ère vulgaire; Archimède l'a cité dans plusieurs de ses livres. Ptolémée ayant demandé à Euclide s'il n'y avait pas de manière plus facile que la sienne pour apprendre la Géométrie, Euclide répondit qu'il n'y avait point de chemin royal pour arriver à cette science. C'est tout ce que nous savons d'Euclide: on ignore même quelle fut sa patrie.

Beaucoup de géomètres avaient paru avant Euclide. Le premier des Grecs, Euclide rassembla leurs ouvrages, les mit dans un ordre convenable, et donna des démonstrations inattaquables de ce qui n'avait pas été démontré d'une manière rigoureuse.

Euclide avait composé un grand nombre d'ouvrages. Les treize livres des *Éléments* et les *Données* sont les seuls qui soient parvenus jusqu'à nous.

Les *Éléments* d'Euclide ont toujours été regardés comme le plus parfait de tous les livres élémentaires; ils ont été traduits et commentés dans toutes les langues.

Cardan, en parlant des *Éléments* d'Euclide, s'exprime ainsi : *Quorum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta est, ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas; quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habeant familiarem.*

Pemberton nous apprend qu'il avait entendu plusieurs fois Newton se plaindre de s'être livré tout entier aux ouvrages de Descartes et des autres algébristes, avant d'avoir étudié et médité les *Éléments* d'Euclide.

M. Lagrange, dont l'Europe déplore et déplorera long-temps la perte, me répétait souvent que la Géométrie était une langue morte; que celui qui

Geometriæ non studebat, eum perinde facere ac si quis græcam latinamve linguam in recentioribus operibus græce et latine scriptis discere velit.

Theoremata subsequencia, quæ in quolibet Geometriæ tractatu adesse solent, in Elementis Euclidis desiderantur:

Circulorum circumferentiæ inter se sunt ut eorum diametri.

Quilibet circulus æqualis est triangulo rectangulo cujus unum ex lateribus angulum rectum continentibus æquale est semi-diametro, alterum autem æquale circumferentiæ.

Cujuslibet cylindri recti superficies convexa æqualis est rectangulo cujus altitudo æqualis est cylindri lateri, cujus autem basis æqualis est circumferentiæ basis cylindri, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter latus cylindri et diametrum basis cylindri.

Cujuslibet conï recti, exceptâ basi, superficies convexa æqualis est triangulo rectangulo cujus unum laterum angulum rectum continentium æquale est conï lateri, alterum vero æquale circumferentiæ basis conï, vel circulo cujus semi-diameter media proportionalis est inter conï latus et semi-diametrum circuli qui conï est basis.

Superficies convexæ cylindrorum rectorum et similium, et etiam conorum rectorum et similium, sunt inter se ut diametri basium eorundem cylindrorum et conorum.

Cujuslibet sphæræ superficies æqualis est quatuor maximis ejusdem sphæræ circulis, vel superficiei convexæ cylindri circumscripti.

Sphærarum superficies inter se sunt ut quadrata earum diametrorum.

Quælibet sphæra æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

Nonnulli credidere hæc theoremata ex Euclidis Elementis evanuisse temporum inclementiâ; sed falso. Hæc enim theoremata quæ demonstrari non possunt nisi ope quatuor primorum postulatorum in initio primi libri *de Sphæra et Cylindro* positorum, demonstrari non potuerunt ab Euclide, qui hæc Archimedis postulata non admiserat.

n'étudiait pas la Géométrie dans Euclide, faisait la même chose que celui qui voudrait apprendre le grec et le latin, en lisant les ouvrages modernes écrits dans ces deux langues.

Les théorèmes suivants, qui se trouvent ordinairement dans tout traité élémentaire de Géométrie, ne se trouvent pas dans les *Éléments* d'Euclide :

Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diamètres.

Tout cercle est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.

La surface convexe de tout cylindre droit est égale à un rectangle dont la hauteur est égale au côté du cylindre, et dont la base est égale à la circonférence de la base du cylindre, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cylindre et le diamètre de sa base.

La surface de tout cône droit, la base exceptée, est égale à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au côté du cône, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de la base du cône, ou bien à un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône et le rayon du cercle qui est la base du cône.

Les surfaces convexes des cylindres droits et semblables, des cônes droits et semblables, sont entre elles comme les diamètres des bases de ces cylindres et de ces cônes.

La surface de toute sphère est égale aux quatre grands cercles de cette sphère, ou à la surface convexe du cylindre circonscrit.

Les surfaces des sphères sont entre elles comme les quarrés de leurs diamètres.

Toute sphère est égale aux deux tiers du cylindre circonscrit.

Des personnes ont pensé que ces théorèmes avaient disparu des *Éléments* d'Euclide par l'injure des temps ; c'est une erreur. Ces théorèmes, qui ne peuvent se démontrer qu'à l'aide des quatre premières demandes placées au commencement du premier livre *de la Sphère et du Cylindre*, n'ont pu l'être par Euclide, qui n'avait point admis ces demandes d'Archimède.

Forsan dici potest solam dissimilitudinem quæ intercedit Euclidis inter et Archimedis methodum, consistere in rejectione vel in admissione postulatorum de quibus hic incidit sermo.

In præfatione meæ versionis librorum 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 Elementorum Euclidis, quæ anno 1804 edita fuit, suscepi munus edendi versiones operum completorum Euclidis, Archimedisque et Apollonii. Mea versio operum Archimedis vulgata est anno 1808; quo quidem tempore, vertendis Euclidis operibus ultimam manum admoveram. Sed antequam prelo subjiceretur, consulere volui codices manuscriptos bibliothecæ regię de plurimis locis qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione Oxoniæ, quâ usus fueram in convertendo Euclide. Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi fuerunt, et statim animadverti editionem Oxoniæ nullius horum manuscriptorum esse exemplar; hos omnes manuscriptos explere lacunas, et restituere locos corruptos in editione Basiliensi et in editione Oxoniæ quæ nihil aliud est quam ejus exemplar. Quin etiam animadverti hos omnes manuscriptos, manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme consentaneos; manuscriptum autem 190 explere lacunas, restituere locos corruptos qui ope aliorum manuscriptorum nec explebantur, nec restituebantur.

Manuscriptus 190 ad bibliothecam vaticanam pertinebat: is Româ Lute-tiam a comite *de Pelise* fuit missus.

In manuscripto græco 2348, sub finem sæculi decimi sexti exarato, quique continet Euclidis Data cum quinque antiquissimis vaticanis manuscriptis græcis collata a Josepho Auriâ, celebri geometrâ, ne unam quidem reperiatis e pretiosissimis lectionibus manuscripti 190 variantibus; quod probare videtur hunc manuscriptum tunc temporis in bibliothecâ vaticanâ fuisse desideratum.

Manuscriptus 190 manuscriptorum exeunte nono sæculo exaratorum omnia præ se fert indicia; alii vero manuscripti pertinent ad sæcula multo recentiora.

Hoc manuscripto mihi commisso, statim in animum incidit edere græce, latine et gallice Elementa et Data, sola procul dubio quæ supersint Euclidis

On pourrait peut-être dire que la seule différence entre la méthode d'Euclide et celle d'Archimède, consiste dans le rejet ou l'admission des quatre demandes dont je viens de parler.

Dans la préface de ma traduction des livres 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12 des *Éléments* d'Euclide, qui parut en 1804, je pris l'engagement de publier les traductions des œuvres complètes d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius. Ma traduction des œuvres d'Archimède parut en 1808. A cette époque j'avais mis la dernière main à la traduction des œuvres d'Euclide. Mais avant de la livrer à l'impression, je voulus consulter les manuscrits de la bibliothèque du Roi sur les passages qui me paraissaient tronqués ou altérés dans l'édition d'Oxford, d'après laquelle j'avais fait ma traduction. Ces manuscrits, qui sont au nombre de 23, me furent confiés, et je ne tardai pas à m'apercevoir que l'édition d'Oxford n'est la copie d'aucun de ces manuscrits; que tous ces manuscrits remplissent des lacunes, et rétablissent des passages altérés qui se trouvent dans l'édition de Bâle, et dans celle d'Oxford qui n'en est que la copie. Je remarquai aussi que tous ces manuscrits, le n° 190 seul excepté, sont à peu de chose près conformes les uns aux autres; que le n° 190 remplit des lacunes, et rétablit des passages altérés, qui ne peuvent pas l'être à l'aide des autres manuscrits.

Le manuscrit 190 appartenait à la bibliothèque du Vatican : il fut envoyé de Rome à Paris par le comte de Peluse.

Dans le manuscrit grec n° 2348, qui est de la fin du seizième siècle, et qui contient les *Données* d'Euclide collationnées par Joseph Auria, géomètre célèbre, avec les cinq plus anciens manuscrits grecs de la bibliothèque du Vatican, on ne trouve aucune des précieuses variantes du manuscrit 190; ce qui semble prouver que ce manuscrit n'était pas alors à la bibliothèque du Vatican.

Le manuscrit 190 porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle, tandis que les autres appartiennent à des siècles beaucoup plus rapprochés de nous.

Étant dépositaire de ce précieux manuscrit, je me déterminai, sans balancer, à donner une édition grecque, latine et française des *Éléments* et

opera. Quapropter, contuli manuscriptum 190 cum editione Oxoniæ, exaravique lectiones variantes in margine operis impressi.

His perfectis, ad variantes lectiones margini appositas sedulus attendi, et aliis manuscriptis accersitis, hanc aut illam lectionem variantem in editionem parisiensem admisi, vel ab eâ rejeci. Manuscriptum 190 potiore habui, quotiescumque nulla mihi fuit ratio cur hanc aut illam lectionem præferrem.

Textum græcum sic constitutum in latinum converti, et quæcunque ex variantibus quas admiseram lectionibus, mutari fuit opportunum, hæc in versione gallicâ mutata sunt.

Mea latina versio ad verbum textui græco congruit, nisi quid peculiare me coegerit ut secus facerem. Nonnulli in meâ versione occurrent forte hellenismi, aut saltem quædam locutiones a quibus lingua latina abhorere videtur. Illas quidem vitare potuissem; sed mea versio cum textu græco minus fuisset consentanea.

De meâ convertendi ratione, viros in græcâ latinâque linguâ versatissimos consului. D. *Delambre*, secretarius perpetuus classis scientiarum physicarum et mathematicarum Instituti Franciæ, necnon Universitatis quæstor, meam versionem dignatus est perpendere, et utilia mihi dare consilia. Hanc eâ de re ad me scripsit epistolam :

Parisiis, 20 februarii 1812.

Cum voluptate legimus sex prima folia tui Euclidis trilinguis. Tui commissarii desiderium enuntiaverant videndi editum Euclidis textum græcum expurgatum omnibus mendis quas castigavisti manuscriptorum ope, et locupletatum omnibus incrementis quæ tibi suppeditaverunt manuscripti : mox eorum omniumque doctorum explebis desiderium.

Multum probo quod constitutum habuisti reddere versionem latinam tam consentaneam quam utraque lingua ferre potest. Græcis erant duæ viæ indicandorum casuum obliquorum, terminatio scilicet et articulus; quando una earum duarum rationum eos deficiebat, quod sæpe in geometriâ contingit, articulus satis erat ad omnem tollendam dubitationem.

des Données d'Euclide, qui sont certainement les seuls ouvrages qui nous restent de ce géomètre à jamais célèbre. Pour cela, je comparai le manuscrit 190 avec l'édition d'Oxford, et j'écrivis les variantes en marge de l'ouvrage imprimé.

Ce travail terminé, j'examinai attentivement les variantes marginales, et à l'aide des autres manuscrits, j'adoptai ou je rejetai, pour l'édition de Paris, telle ou telle variante. Le manuscrit 190 a toujours eu la préférence, toutes les fois que je n'avais pas de motif pour préférer une leçon à une autre.

Le texte grec étant ainsi arrêté, je le traduisis en latin, et je fis à la traduction française les changements exigés par les variantes que j'avais adoptées.

Ma traduction latine correspond mot pour mot au texte grec, à moins que quelque règle particulière ne m'ait forcé de faire autrement. On trouvera quelquefois des hellénismes dans ma traduction, ou du moins certaines expressions qui semblent s'écarter un peu du génie de la langue latine. J'aurais pu les éviter; mais ma traduction aurait été moins fidèle.

J'avais soumis mon système de traduction à des personnes versées dans la langue grecque et dans la langue latine. M. Delambre, secrétaire perpétuel de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut de France, et trésorier de l'Université, eut la complaisance de l'examiner avec soin, et de m'aider de ses sages conseils. Voici la lettre qu'il me fit l'honneur de m'écrire à ce sujet :

Paris, 20 février 1812.

MONSIEUR, j'ai lu avec plaisir les six premières feuilles de votre Euclide en trois langues. Vos commissaires avaient exprimé le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits vous ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils vous ont fournies : vous allez remplir leur vœu et celui de tous les savants.

J'approuve beaucoup le parti que vous avez pris de rendre la version latine aussi littérale que le permet le génie des deux langues. Les Grecs avaient deux moyens pour indiquer les cas obliques, la terminaison et l'article ; quand l'une de ces deux ressources leur manquait, comme il arrive souvent en géométrie, l'article suffisait pour ôter toute incertitude.

Tibi autem in linguâ latinâ hæc via non erat; tua versio nimis consentanea, sæpe obscura fuisset. Eorum qui te præcesserunt exemplo, usus es pronomine *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Non ignoras mihi eâ de re aliquid fuisse hæsitationis; locutionibus illis *ipsi* ΑΓ, *ipsi* ΑΒΓ, anteposuissem has locutiones *lineæ* ΑΓ, *angulo* ΑΒΓ, quod longiusculum est.

Sed quoniam omnes geometrarum græcorum interpretes jamdudum iisdem interpolationibus usi sunt, capessivisti recte viam brevissimam amovendorum impedimentorum quæ singulis momentis occurrunt, etc.

Ad significandum duos angulos eundem verticem et latus commune habentes super eâdem rectâ collocatos esse, græce dicitur: αἱ ἐπὲς γωνίαι. Commandini, Torelli, etc. exemplo, has tres græcas voces converti in has duas voces latinas: *deinceps anguli*. Sunt qui me dehortati sunt ab utendo vocē hâc *deinceps*, quia, inquebant, *deinceps* in linguâ latinâ rerum ordinem numquam significavit. Non illis morem gessi. Nam, cum in Thesaurō linguæ latinæ Roberti Stephani, edito Lipsiæ anno 1739, legissem: *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque alias deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut deinceps qui occubarent, canerent*. CIC., etc. pro certo habui Titum-Livium, Cæsarem et Cicero- nem, etc. vocem *deinceps* eodem sensu accepisse, quo ego acceperam.

Quod ad versionem gallicam attinet, ea cum textu græco tam consentanea est quam per eam linguam licet.

Sub finem cujusque tomi collocavi recensionem accuratissimam omnium variantium meæ editionis cum manuscripto 190; et cum editione Oxoniæ; ita ut harum lectionum variantium ope, possit, si quis velit, habere manuscripti 190 exemplar huic plane congruum,

Ad calcem tomi ultimi, qui hoc anno 1814 corrente edetur, adjicientur animadversiones in variantes lectiones insignissimas, et in quosdam locos Euclidis.

Summâ diligentia usus sum ut mea editio quam maxime emendata esset; specimina a me prælecta, lecta fuerunt deinde a D. Jannet, necnon a D. Patris, mei operis editore, rursusque a me relecta. In nullo specimine

Vous n'aviez pas cette ressource en latin; votre version trop littérale eût été souvent obscure. A l'exemple de ceux qui vous ont précédé, vous vous êtes permis l'emploi du pronom *ipse*, *ipsius*, *ipsi*. Vous savez que j'avais à cet égard quelque scrupule; au lieu de *ipsi* AR *ipsi* ABR, j'aurais mieux aimé *lineæ* AR, *angulo* ABR, ce qui est un peu plus long.

Mais tous les traducteurs des géomètres grecs vous ont déjà donné l'exemple de pareilles intercalations, et vous avez bien fait de choisir le moyen le plus court pour vous tirer d'un embarras qui renaît à chaque instant, etc.

Pour exprimer que deux angles, qui ont le même sommet et un côté commun, sont placés sur une même droite, le grec dit : *αι ἐπεξῆς γωνίαι*. A l'exemple de Commandin, de Torelli, etc. j'ai traduit ces trois mots grecs par *deinceps anguli*. Plusieurs personnes m'avaient invité à ne pas me servir du mot *deinceps*, parce que, disaient-elles, le mot *deinceps* n'a jamais en latin exprimé l'ordre des choses. Je ne me rendis pas à leur avis. Car, ayant lu dans le Trésor de la langue latine de Robert Étienne, édition de Leipsick, 1739 : *duo deinceps reges*. TIT. LIV. *Funera deinde deinceps duo duxit*. TIT. LIV. *His perfectis collocatisque alias deinceps rates jungebat*. CÆS. *Morem apud majores hunc epularum fuisse ut d.inceps qui occubarent canerent*. CIC., etc., il me parut démontré que Tite-Live, César, Cicéron, etc. donnaient au mot *deinceps* la même signification que moi.

Quant à la traduction française, elle est aussi littérale que le permet le génie de cette langue.

J'ai placé à la fin de chaque volume la liste exacte de toutes les variantes de mon édition avec le manuscrit 190 et l'édition d'Oxford. Par le moyen de ces variantes, on pourrait, si on le désirait, avoir une copie du manuscrit 190 qui lui serait parfaitement conforme.

Le dernier volume, qui paraîtra dans le courant de 1814, sera terminé par des observations sur les variantes les plus remarquables, et sur quelques passages d'Euclide.

J'ai fait tous mes efforts pour que mon édition fût de la plus grande correction; les épreuves, après avoir été lues par moi, ont été lues par M. Jannet, par M. Patris, éditeur de mon ouvrage, et relues encore par

prius subscripsi, *prelo subjiciatur*, quam illud mendis omnibus fuisset expurgatum. Ope erratorum ad finem ultimi tomi collocatorum, corrigi poterunt mendæ, si quas detexero in legendo perattente opere impresso.

D. *Nicolopoulo*, smyrnæus, vir eximiâ doctrinâ commendabilis et diligentissimus emendator, sponte suâ legit plurima specimina. D. *Patris*, qui linguam græcam, latinam et gallicam diu excoluit, summâ curâ et diligentia usus est ut mea editio prelis gallicis honori esset; in speciminibus legendis, versionem latinam et gallicam cum textu græco perattente comparabat, et margini notationes apponebat.

Ex lectionibus variantibus tomi primi, quædam præsertim sunt notandæ.

In omnibus editionibus græcis et latinis postulata 4, 5, 6 inter communes notiones collocata sunt.

Demonstratio propositionis septimæ libri primi duos habet casus, et tamen unus solum casus demonstratur in omnibus manuscriptis, nullo excepto, et in editionibus Basilæ et Oxoniæ. Secundus casus est cùm punctum Δ incidit in triangulum $AB\Gamma$, vel punctum Γ in triangulum ABA . Ut secundus casus demonstraretur, antea demonstrandum fuerat, lateribus æqualibus trianguli isocelis productis, angulos sub basi inter se æquales esse; quod quidem Euclides demonstravit in propositione quintâ, et hoc tantum propositionis septimæ causâ, quandoquidem, propositione septimâ exceptâ, hæc demonstratio nullum usum habet in reliquis Euclidis Elementis; ex hoc manifeste sequitur, inquiunt omnes Euclidis commentatores, textum græcum propositionis septimæ esse mutilatum. Omnes commentatores in errore versabantur. Figura incompleta erat in omnibus manuscriptis et in omnibus editionibus. Secundam descripsi figuram; produxi rectas $B\Gamma$, BA , et demonstratio completa fuit, in textu græco nullâ voce mutata.

Demonstratio propositionis 24 tertii libri tres casus habet. Posito enim A super Γ , et puncto B super Δ , oportet demonstrare segmentum AEB non

moi. Je n'ai jamais donné de bon à tirer que je ne me fusse assuré auparavant que toutes les corrections avaient été faites. Par le moyen d'un *errata*, que je placerai à la fin du dernier volume, on pourra corriger les fautes qu'une lecture très-attentive que je ferai de l'ouvrage imprimé m'aura fait découvrir.

M. Nicolopoulo, de Smyrne, homme recommandable par ses rares talents et très-habile correcteur, a bien voulu lire un grand nombre de mes épreuves. M. Patris, qui a cultivé long-temps les langues grecque, latine et française, s'est donné des peines infinies pour que mon édition fit honneur aux presses françaises; en lisant les épreuves, il avait soin de comparer soigneusement la version latine et la version française au texte grec, et de me faire des observations marginales.

Parmi les variantes de ce premier volume, il en est quelques-unes qui méritent surtout d'être remarquées.

Dans toutes les éditions grecques et latines, les demandes 4, 5, 6, sont placées au nombre des notions communes.

La démonstration de la proposition 7 du livre I^{er} a deux cas, et cependant un seul cas est démontré dans tous les manuscrits sans exception, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Le second cas est celui où le point Δ tombe dans le triangle $AB\Gamma$, ou bien le point Γ dans le triangle $AB\Delta$. La démonstration du second cas exige qu'il soit démontré auparavant que les côtés égaux d'un triangle isocèle étant prolongés, les angles au-dessous de la base sont égaux entre eux; et c'est ce qu'a fait Euclide dans la proposition 5, et ce qu'il n'a fait que pour la proposition 7, puisque, hors de là, cette démonstration n'est plus nécessaire dans le reste des *Éléments* d'Euclide; d'où il suit évidemment, disent tous les commentateurs, que le texte grec de la démonstration de la proposition 7 est tronqué. Tous les commentateurs avaient tort. La figure était incomplète dans tous les manuscrits et dans toutes les éditions. J'ai tracé une seconde figure; j'ai prolongé les droites $B\Gamma$, $B\Delta$, et la démonstration s'est trouvée complète, sans que j'eusse changé un seul mot au texte grec.

La démonstration de la proposition 24 du livre trois a trois cas. En effet, le point A étant sur le point Γ , et le point B sur le point Δ , il faut démontrer

posse incidere vel intra segmentum AZ , vel extra, vel partim intra et partim extra; hi tres casus in manuscripto 190 et in editione parisiensi demonstrantur.

Sed in omnibus aliis manuscriptis, et in omnibus aliis editionibus græcis, tantum demonstratur segmentum AEB non incidere posse partim intra segmentum AZ , et partim extra. *Commandinus* dat aliorum casuum demonstrationem. At *Robert Simson* ex propositione 24 eximit partem quam propositioni 23 adjungit.

In propositione 26 libri sexti locus quidam minime intelligi poterat; lectio varians tertia omnem ex eâ obscuritatem dispulit.

Gregorius, de corollario propositionis 19 libri quinti sermonem habens, sic loquitur : *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret.* Clavius in locum hujus corollarii alterum subdidit. *Robert Simson* dicit : « Hoc corollarium manifeste ostendere librum quintum a geometriæ » ignaris corruptum fuisse, et hoc corollarium nullo modo pendere ex » propositione 19. » In hoc errat *Robert Simson*, et illum sæpiissime errare in meis animadversionibus ostendam.

Gregorii versio intellectu est perdifficilis.

Suppressi tertiam vocem corollarii $\epsilon\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta$. Loco proportionis : $\omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, scripsi hanc proportionem : $\omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ AE\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma Z$; loco tandem proportionis : $\omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ AE\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma Z$, scripsi hanc proportionem : $\omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$. Ope harum levium correctionum corollarium evasit inconcussum.

In meâ editione, phrasis $\epsilon\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta$ de $\omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Delta\Gamma\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, sed ostensum est ut AB ad EB ita $\Delta\Gamma$ ad $Z\Delta$ (19. 5), manifeste locum habet harum duarum phrasium : $\epsilon\delta\epsilon\acute{\iota}\chi\theta\eta$ de $\omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, $\epsilon\acute{\nu}\alpha\lambda\lambda\alpha\acute{\xi}\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \omega\varsigma\tau\omicron\ AB\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ EB\ \omicron\upsilon\tau\omega\varsigma\ \tau\omicron\ \Gamma\Delta\ \pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\omicron\ Z\Delta$, ostensum autem est ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EB ad $Z\Delta$ (19. 5); alterne igitur ut AB ad EB ita $\Gamma\Delta$ ad $Z\Delta$ (16. 5.)

que le segment AEB ne peut tomber ni en dedans du segment AZA, ni en dehors, ni partie en dedans et partie en dehors. Ces trois cas sont démontrés dans le manuscrit 190 et dans l'édition de Paris.

Mais dans tous les autres manuscrits et dans toutes les autres éditions grecques, on démontre seulement que le segment AEB ne peut pas tomber partie en dedans du segment ΓZA et partie en dehors. Commandin donne la démonstration des deux autres cas. Robert Simson retranche une partie de la proposition 24, qu'il ajoute à la proposition 23.

Dans la proposition 26 du livre six, il y avait un passage tout à fait intelligible; la variante 3 en a fait disparaître l'obscurité.

Grégori, en parlant du corollaire de la proposition 19 du livre cinq, s'exprime ainsi : *Corruptissimus est hic locus ; nec ope veterum exemplarium restitui potest : versionem ideo mutavimus , ut sensus constaret.* Clavius a remplacé ce corollaire par un autre de sa façon. Robert Simson nous dit que ce corollaire prouve manifestement que le cinquième livre a été corrompu par des ignares en géométrie, et que ce corollaire ne dépend en aucune manière de la proposition 19. Robert Simson a tort ici comme dans une foule d'autres occasions, ainsi que je le ferai voir dans mes remarques.

La version de Grégori est inintelligible.

J'ai fait disparaître le troisième mot du corollaire ἐδείχθη. A la place de ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ, j'ai mis ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ; et à la place de ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ, j'ai écrit ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ. par le moyen de ces légères corrections, le corollaire se trouve rétabli dans toute sa pureté.

Dans mon édition, la phrase ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, *mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ΖΔ (19. 5),* tient évidemment lieu de ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ, *ἐν ἀλλὰ ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, mais on a démontré que AB est à ΓΔ comme EB est à ΖΔ (19. 5); donc par permutation AB est à EB comme ΓΔ est à ΖΔ (16. 5).*

Euclides hoc corollarium mutare potuisset in theorema, hoc modo :

Si magnitudines compositæ (*) sint proportionales, proportionales erunt per conversionem.

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{E} \quad \text{B} \\ \hline \text{Γ} \quad \text{Ζ} \quad \text{Δ} \end{array} .$$

Sint magnitudines compositæ AB, AE, ΓΔ, ΓΖ, et sit ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓΖ; dico per conversionem ut AB ad EB ita esse ΓΔ ad ΖΔ.

Quoniam enim ut AB ad AE ita ΓΔ est ad ΓΖ, alterne igitur ut AB ad ΓΔ ita est AE ad ΓΖ (16. 5); ostensum autem est ut AB ad ΓΔ ita esse EB ad ΖΔ (19. 5); alterne igitur ut AB ad EB ita est ΓΔ ad ΖΔ, hoc est ut AB ad AB—AE ita est ΓΔ ad ΓΔ—ΓΖ (16. 5 ; quod est per conversionem. Quod erat demonstrandum.

In textu græco manuscripti 190, nequaquam agitur de circulorum sectoribus in ultimâ sexti libri propositione. Manus aliena inter lineas et in margine manuscripti exaravit omnia quæ ad sectores attinent, et quæ adsunt in textu græco omnium aliorum manuscriptorum et in editionibus Basilicæ et Oxoniæ. Hoc addimentum, quod in meam editionem admittere non debuissim, textui a Theone factum est. Sic loquitur Theon in suis in Almagestum commentariis, p. 50, l. 7, edit. Basilicæ, anno 1538 : « ὅτι δὲ οἱ ἐπὶ τῶν κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι δέδεικται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἔκτου βιβλίου. » *Quod autem in æqualibus circulis sectores inter se sunt ut anguli in illis positi, ostensum fuit a nobis in editione Elementorum ad finem libri sexti.*

hoc Theonis addimentum, quod in subsequentibus nullum habet usum, Euclidis festinationi moram affert. In libris præsertim 10, 14, 15, necnon in Datis bene multas superfluitates reperias quarum nullam in textu manuscripto 190. Ob id præcipue Euclidem mirati sunt quod ille ad propositum directe tendit, numquam de viâ declinans suâ demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam sunt necessaria. Sed hoc soli manuscripto 190 convenire potest; itaque non absurde conjecerim emendatum Euclidis

(*) Quatuor magnitudines dicuntur compositæ, quando secunda est quædam fractio primæ, et quarta quædam fractio tertiæ.

Euclide aurait pu donner à ce corollaire la forme d'un théorème, en disant :
Si des grandeurs composées (*) sont proportionnelles, elles sont proportionnelles par conversion.

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \quad \quad \text{E} \quad \quad \quad \text{B} \\ \hline \text{Γ} \quad \quad \quad \text{Z} \quad \quad \quad \Delta \end{array}$$

Soient les grandeurs composées AB, AE, ΓΔ, ΓZ, et que AB soit à AE comme ΓΔ est à ΓZ; je dis que par conversion AB est à EB comme ΓΔ est à ΖΔ.

Car, puisque AB est à AE comme ΓΔ est à ΓZ, par permutation AB est à ΓΔ comme AE est à ΓZ (16. 5); mais on a démontré que AB est à ΓΔ comme EB est à ΖΔ (19. 5); donc, par permutation, AB est à EB comme ΓΔ est à ΖΔ, c'est-à-dire que AB est à AB — AE, comme ΓΔ est à ΓΔ — ΓZ (16. 5); ce qui est par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

Dans le texte du manuscrit 190, il n'est nullement question de secteurs circulaires dans la dernière proposition du livre 6. Une main étrangère a interligné et écrit en marge de ce manuscrit ce qui se trouve de relatif aux secteurs circulaires dans le texte de tous les autres manuscrits, et dans les éditions de Bâle et d'Oxford. Cette addition au texte, que je n'aurais pas dû conserver, est de Théon. Voici ce qu'il dit lui-même dans ses commentaires sur l'Almageste, pag. 50, l. 7, édition de Bâle, 1538: « ὅτι δὲ οἱ ἐπ' ἰσων κύκλων τομεῖς πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ γωνίαι ἐφ' ὧν βεβήκασι δὲ δεικνύται ἡμῖν ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν στοιχείων πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἑκτοῦ βιβλίου. » *J'ai démontré dans mon édition des Éléments, et à la fin du sixième livre, que dans les cercles égaux les secteurs sont entre eux comme les angles placés dans ces cercles.*

Cette addition de Théon, qui n'est d'aucun usage dans la suite, ne sert qu'à retarder la marche d'Euclide. On trouve dans les livres 10, 14, 15 surtout, ainsi que dans les Données, une foule de pareilles superfluités dont aucune n'est admise dans le texte du manuscrit 190. On a toujours admiré Euclide en ce qu'il marchait directement vers son but, sans jamais s'écarter de son chemin, pour démontrer ce qui ne lui était pas nécessaire pour aller en avant. Mais cela n'est vrai que pour le seul manuscrit 190; c'est pour-

(*) Quatre grandeurs sont dites composées, lorsque la seconde est une fraction de la première, et que la quatrième est une fraction de la troisième.

textum in hoc manuscripto contineri, aliosque manuscriptos nihil aliud esse quam editionis vulgatæ a Theone exemplaria. Non diffiteor tamen editione in meâ quasdam adesse superfluitates, quarum indicem ad calcem animadversionum subjiciam, hoc est, indicem instituam omnium quæ licet sublata subsequentibus nullo modo obesse possunt.

Corollarium propositionis 15 primi libri suppressi, quamvis eâdem manu in margine manuscripti 190 exaratum sit, quia hoc corollarium non præ se fert signum quod in hoc manuscripto monet in margine exarata ad textum pertinere, ac insuper hoc corollarium tantum adest in textu unius ex manuscriptis, quia tandem hoc corollarium in subsequentibus nullum habet usum.

Definitio 5 sexti libri eâdem manu in imâ paginâ exarata est cum signo quod monet eam ad textum pertinere; sed manifestum est erravisse transcriptorem. Eam suppressi, quia nullum in Euclidis Elementis usum habet. *Robert Simson* sex paginas in-4^o scripsit probandi causâ illam a Geometriæ ignaro in textum fuisse admissam.

Non plura dicam de lectionibus meæ editionis variantibus; lectori se certiores facere licebit permulta evanuisse menda typographica, necnon et plurimos locos obscuros vel corruptos, vel detruncatos, præsertim in libris 10, 14, 15, et in Datis; Euclidisque textum permultis superfluitatibus me curante fuisse expurgatum.

Dixi Euclidis in omnes linguas conversa fuisse opera et commentariis illustrata; editiones et versiones notabilissimæ Euclidis hæc sunt:

Campanus primum in latinum ex arabico convertit Euclidem. Hæc versio Venetiis anno 1482 edita, comprehendit quindecim libros Elementorum.

Zambertus, venetus, ex græco convertit in latinum quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Hæc versio edita fuit Parisiis anno 1516, deinde Basilie anno 1537 et anno 1546. Euclidis Data adsunt tantum in duabus posterioribus editionibus.

quoi il me sera permis de penser que ce manuscrit contient le texte pur d'Euclide, et que les autres ne sont que des copies de l'édition de Théon. J'avoue cependant qu'il existe quelques superfluités dans le manuscrit 190, et par conséquent dans mon édition; j'en donnerai la liste à la suite de mes remarques, c'est-à-dire, que je donnerai la liste de tout ce qui peut se supprimer sans nuire à ce qui suit.

J'ai supprimé le corollaire de la proposition 25 du premier livre, quoiqu'il soit écrit de la même main dans la marge du manuscrit 190, parce que ce corollaire n'est pas précédé du signe qui, dans ce manuscrit, sert toujours à indiquer que ce qui est écrit en marge doit faire partie du texte; parce que ce corollaire ne se trouve que dans le texte d'un seul manuscrit; et enfin, parce qu'il n'est d'aucun usage dans la suite.

La définition 5 du sixième livre est écrite de la même main au bas de la page, et avec le signe qui indique qu'elle doit faire partie du texte; mais il est hors de doute que c'est une faute du copiste. Je l'ai supprimée, parce qu'elle n'est d'aucun usage dans les *Éléments* d'Euclide. Robert Simson a écrit six pages in-4° pour prouver qu'elle a été introduite dans le texte par un ignare en Géométrie.

J'en en dirai pas davantage sur les variantes de mon édition; le lecteur pourra s'assurer lui-même qu'elle a fait disparaître un très-grand nombre de fautes typographiques, beaucoup de passages obscurs ou altérés, ou tronqués, surtout dans les livres 10, 14, 15, et dans les *Données*, et que j'ai purgé le texte d'Euclide d'un très-grand nombre de superfluités.

J'ai dit que les œuvres d'Euclide ont été traduites et commentées dans toutes les langues; voici quelles sont les éditions et les traductions les plus remarquables.

La première traduction latine que nous ayons d'Euclide est celle de Campanus, qui parut à Venise en 1482. Cette traduction, qui a été faite d'après l'arabe, contient les quinze livres des *Éléments*.

Zamberti, vénitien, traduisit en latin, d'après le grec, les quinze livres des *Éléments* et les *Données* d'Euclide. Cette traduction, qui parut à Paris en 1516, reparut à Bâle en 1537, et ensuite en 1546. Les *Données* d'Euclide ne se trouvent que dans ces deux dernières éditions.

Textus græcus quindecim librorum Elementorum Euclidis cum commentario Theonis et Procli, primum editus fuit Basiliæ anno 1533, apud Herwagem, celeberrimum typographum. Simon Gryuæus textûs græci fuit editor. Quindecim libri Elementorum editi fuerunt ex duobus manuscriptis qui Simoni Grynæo suppeditati fuerunt, alter Venetiis a Lazaro Bayfio, alter Parisiis a Joanne Ruellio. Commentarium Procli editum fuit ex manuscripto inemendato qui Oxoniâ Simoni Grynæo missus fuit a Joanne Claymando.

Candalla edidit, anno 1566, versionem latinam quindecim librorum Elementorum.

Commandinus, unus optimorum geometrarum suæ ætatis, et apprime versatus in linguâ græcâ et latinâ, convertit in latinum quindecim libros Elementorum ex textu græco editionis basiliensis. Hæc versio, omnium Euclidis versionum, textui græco erat maxime consentanea; illa edita fuit Pisauri anno 1572, et deinde anno 1619.

Versio latina quindecim librorum Elementorum quam Clavius edidit Romæ, anno 1574, est quam minime consentanea; Clavius sibi concessit facultatem commutandi in permultis locis textum Euclidis; sed nonnullo in pretio est commentarium quod suæ versionî adjunxit, quamvis nimio plus sit diffusum.

Textus græcus Datorum Euclidis, cum versione latinâ Hardiæi, editus primum fuit anno 1625.

Henrion edidit, anno 1615, versionem gallicam quindecim librorum Elementorum et Datorum Euclidis. Hæc versio a textu Euclidis differt singulis momentis.

Le Murdelé edidit, non multo post, alteram versionem gallicam quindecim librorum Elementorum. Hæc versio in permultis locis differt a textu Euclidis.

Gregorius edidit Oxoniæ, anno 1703, græce et latine, quindecim libros Elementorum et Data Euclidis. Gregorius usus fuit, in quindecim libris Elementorum, versione latinâ Commandini, et in Datis, versione latinâ Hardiæi: quas duas versiones Gregorius ipse recognoverat.

Le texte grec des quinze livres des Éléments d'Euclide avec le commentaire de Théon et de Proclus, parut pour la première fois à Bâle en 1533, chez Herwage, célèbre imprimeur. Simon Grynæus en fut l'éditeur. Les quinze livres des Éléments furent imprimés d'après deux manuscrits grecs envoyés à Simon Grynæus; l'un de Venise, par Lazare Bayfius, et l'autre de Paris, par Jean Ruellius. Le commentaire de Proclus fut imprimé, d'après un manuscrit très-défectueux envoyé d'Oxford à Simon Grynæus, par Jean Claymandus.

Candalle publia, en 1566, une traduction latine des quinze livres des Éléments.

Commandin, un des plus grands géomètres de son temps, et homme très-versé dans les langues latine et française, traduisit en latin les quinze livres des Éléments d'après le texte grec de l'édition de Bâle. C'était, de toutes les traductions, la plus conforme au texte grec d'Euclide; elle parut à Pesaro en 1572, et ensuite en 1619.

La traduction latine des quinze livres des Éléments que Clavius publia à Rome, en 1574, n'est rien moins que fidèle; Clavius s'est permis de faire de nombreux changements au texte d'Euclide; mais on estime le commentaire qui accompagne sa traduction, malgré sa très-grande prolixité.

Le texte grec des Données d'Euclide, accompagné d'une traduction latine de Hardi, parut pour la première fois en 1625.

Henrion publia, en 1615, une traduction française des quinze livres des Éléments et des Données d'Euclide. Cette traduction diffère à chaque instant du texte d'Euclide.

Le Mardelé publia, quelque temps après, une nouvelle traduction des quinze livres des Éléments. Cette traduction diffère dans une foule d'endroits du texte d'Euclide.

Grégori publia à Oxford, en 1703, en grec et en latin, les quinze livres des Éléments et les Données d'Euclide. Grégori fit usage, pour les quinze livres des Éléments, de la traduction latine de Commandin, et pour les Données, de celle de Hardi. Ces deux traductions avaient été revues par Grégori lui-même.

In hac editione, præter quindecim libros Elementorum, et Data, adsunt plura opera quæ procul dubio Euclidis non sunt; quod quidem Gregorius ipse non diffitetur in suâ præfatione.

Robert Simson edidit, anno 1756, versionem latinam librorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 Elementorum.

Robert Simson, in pluribus locis, commutavit textum Euclidis.

Dixi in bibliothecâ imperiali adesse manuscriptos græcos tres et viginti. Eorum manuscriptorum secundum vetustatis ordinem hic est index:

Nº 190. Is manuscriptus præ se fert omnia indicia manuscriptorum sub finem noni sæculi exaratorum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14 et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo contigit alio manuscripto. In meâ editione eundem ordinem sum secutus, ipsomet D. *Lagrange* suadente.

Nº 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium Elementorum usque ad propositionem octavam secundi libri, inenunte undecimo sæculo exaratus videtur. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur reliqua Elementa et Data, Româ Parisios fuit missus a comite *de Peluse*.

Nº 2466. Is manuscriptus, in quo deprehenduntur tredecim libri Elementorum, duodecimo sæculo exaratus videtur.

Nº 2344. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo duodecimo exaratus videtur.

Nº 2345. Is manuscriptus, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo tertio exaratus videtur.

Omnes ii manuscripti sunt membranacei; subsequentes sunt cartacei.

Nº 2373. Is manuscriptus, in quo deprehenditur Euclidis Geometria cum scholiis, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium usque ad propositionem 23 primi libri, et in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, et Data, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2762. Is codex, in quo tantum deprehenduntur octo priores libri Elementorum, sub finem sæculi decimi quinti exaratus videtur.

Nº 2346. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Dans cette édition, outre les quinze livres des *Éléments*, et les *Données*, on trouve plusieurs autres traités qui bien évidemment ne sont pas d'Euclide; Grégori lui-même en convient dans sa préface.

Robert Simson publia, en 1756, la traduction latine des livres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12 des *Éléments* d'Euclide. C'est la traduction de Commandin, revue par Robert Simson.

Robert Simson a fait de nombreux changements au texte d'Euclide.

J'ai dit que la bibliothèque impériale renferme vingt-trois manuscrits grecs. En voici la liste par ordre d'ancienneté :

N° 190. Ce manuscrit porte tous les caractères des manuscrits de la fin du neuvième siècle. Les *Données* sont placées immédiatement après le treizième livre des *Éléments*. Le 14^e et le 15^e livre viennent ensuite; ce qui n'existe dans aucun autre manuscrit de la bibliothèque impériale. J'ai suivi le même ordre dans mon édition, d'après le conseil de M. Lagrange.

N° 1038. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 8 du second livre, paraît être du commencement du onzième siècle. Il contient le reste des *Éléments*, et les *Données*; il appartenait à la bibliothèque du Vatican; et il fut envoyé de Rome à Paris, avec le manuscrit 190, par le comte de Peluse.

N° 2466. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du douzième siècle.

N° 2344. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du douzième siècle.

N° 2345. Ce manuscrit, qui contient seulement les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du treizième siècle.

Tous ces manuscrits sont en parchemin; les suivants sont en papier.

N° 2373. Ce manuscrit, qui contient la *Géométrie* d'Euclide avec des scholies, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2342. Ce manuscrit, qui ne commence qu'à la proposition 23 du premier livre, et qui contient le reste des *Éléments*, et les *Données*, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2762. Ce manuscrit, qui ne contient que les huit premiers livres des *Éléments*, paraît être de la fin du quinzième siècle.

N° 2346. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des *Éléments*, paraît être du quinzième siècle.

Nº 2481. Is codex, in quo tantum deprehenduntur decem priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2531. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2343. Is codex, in quo deprehenduntur quindecim libri Elementorum, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2547. Is codex, in quo tantum deprehenduntur tredecim priores libri Elementorum, et Data, ineunte sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2448. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quarto exaratus videtur.

Nº 2352. Is codex, in quo Data deprehenduntur, a J. Rossi fuit exaratus anno 1488.

Nº 2363. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo quinto exaratus videtur.

Nº 2349. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2350. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 1981. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2467. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2472. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur; sub finem nonnulla desiderantur.

Nº 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, sæculo decimo sexto exaratus videtur.

Nº 2348. Is codex comprehendit Euclidis Data, collata cum quinque antiquissimis manuscriptis bibliothecæ vaticanæ, a Josepho Auria, neapolitano, celebri geometræ sæculi decimi sexti decedentis.

Anno 1814 currente editurus sum versionem gallicam Diophanti operum. Lectiones variantes manuscriptorum bibliothecæ imperialis cum editione 1670, meam versionem subsequenter. Imprimis usus sum manuscripto 2380 græco et latino, cujus initio legere est; *Diophanti Alexandrini arithmetorum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus Josepho Auria interprete*; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operæ et studio Josephi Auria.

Mea versio conicorum Apollonii edetur anno 1815 currente.

N° 2481. Ce manuscrit, qui contient les dix premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2531. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, paraît être du quinzième siècle.

N° 2343. Ce manuscrit, qui contient les quinze livres des Éléments, paraît être du seizième siècle.

N° 2547. Ce manuscrit, qui contient les treize premiers livres des Éléments, et les Données, paraît être du commencement du seizième siècle.

N° 2448. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quatorzième siècle.

N° 2352. Ce manuscrit, qui contient les Données, fut écrit par J. Rossi en 1488.

N° 2363. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du quinzième siècle.

N° 2349. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2350. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 1981. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2467. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2472. Ce manuscrit, qui contient les Données d'Euclide, paraît être du quatorzième siècle; il manque quelque chose à la fin.

N° 3366. Ce manuscrit, qui contient les Données, paraît être du seizième siècle.

N° 2348. Ce manuscrit contient les données d'Euclide comparées avec les cinq plus anciens manuscrits de la bibliothèque du Vatican, par Joseph Auria de Naples, célèbre géomètre de la fin du seizième siècle.

Je publierai dans le courant de l'année 1814 une traduction française des œuvres de Diophante. Les variantes des manuscrits de la bibliothèque du roi, avec l'édition de 1670, seront placées à la suite de ma traduction. J'ai fait principalement usage du manuscrit 2380 grec et latin. On lit en tête de ce manuscrit : *Diophanti Alexandrini arithmeticonum libri sex, ejusdem de numeris polygonis libellus, Josepho Auria interprete; cum antiquissimis vaticanis codicibus tribus græcis manuscriptis diligentissime collati operâ et studio Josephi Auria.*

Ma traduction des coniques d'Apollonius paraîtra dans le courant de l'année 1825.

INSTITUT DE FRANCE.

Rapport de MM. DELAMBRE et PRONY, sur une édition grecque, latine et française des quinze livres des Éléments et du livre des Données d'Euclide, par M. Peyrard.

LA classe avait déjà, sur le rapport de MM. Lagrange, Legendre et Delambre, donné son approbation à une traduction complète des OEuvres qui nous restent d'Euclide ; M. Peyrard, auteur de ce travail, avait comparé tous les manuscrits grecs qui sont à la bibliothèque impériale, au nombre de vingt-trois. Il était résulté de cette comparaison qu'aucun de ces manuscrits n'est entièrement conforme à l'édition d'Oxford ; que cette édition, qui passe pour la meilleure, et qui est sans contredit la plus belle, n'est pourtant, quant au texte grec, qu'une copie de l'édition de Bâle, dont elle a reproduit jusqu'aux fautes les plus palpables ; que la plupart de ces manuscrits offrent des variantes qui remplissent quelques lacunes, ou éclaircissent quelques passages de ces deux éditions principales ; qu'en général cependant tous ces manuscrits diffèrent peu les uns des autres, et diffèrent beaucoup d'un manuscrit portant le n° 190, qui provient de la bibliothèque du Vatican, d'où il fut envoyé en France par M. Monge.

Ce manuscrit porte tous les caractères qui peuvent en attester l'ancienneté, tous les autres paraissent plus modernes ; M. Peyrard le croit de la fin du neuvième siècle. Mais cette date n'est pas son principal mérite ; le texte y paraît plus pur, plus clair, moins prolix, et par-là même plus intelligible. C'est à ce manuscrit que M. Peyrard s'est principalement attaché, il en avait porté toutes les variantes aux marges d'un exemplaire de l'édition d'Oxford ; cet exemplaire et le manuscrit qui avait servi à le corriger, furent remis aux commissaires nommés par la classe ; ils vérifièrent les notes marginales de M. Peyrard ; ils y remarquèrent des additions nécessaires, d'autres simplement utiles, des suppressions qui n'étaient pas moins avantageuses, d'autres changements sur lesquels les avis pouvaient être partagés, quelques-uns même qui ne semblaient pas devoir être adoptés, et leur conclusion fut que la classe pouvait donner son approbation au travail de M. Peyrard ; que s'il n'était pas permis d'espérer une édition du texte grec purgé de toutes les fautes que les manuscrits pouvaient corriger, et enrichi de toutes les additions qu'ils pouvaient fournir, édition qui ne pouvait manquer d'être dispendieuse et qui demanderait beaucoup de temps, il était au moins à souhaiter que M. Peyrard ajoutât à sa traduction la liste des variantes qu'il aurait adoptées ou simplement recueillies, afin que les géomètres pussent corriger les éditions anciennes en attendant l'édition plus correcte qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Ces conclusions adoptées par la classe inspirèrent un nouveau courage à M. Peyrard ; il entreprit l'édition grecque, latine et française, dont nous avons à rendre compte ; elle aura deux volumes in-4° ; le premier est achevé. Sur la demande de l'auteur, S. E. le Ministre de l'intérieur, par sa lettre du 20 novembre 1813, invite la classe à examiner *si l'ouvrage est aussi exact que l'auteur a désiré le faire, si les leçons choisies sont en effet celles qui méritaient*

d'être adoptées de préférence , enfin si le livre remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées.

La classe d'histoire et de littérature ancienne a été en même temps invitée à considérer la traduction sous le rapport du style et de l'exécution ; S. E. *prie les deux classes de vouloir bien , soit en particulier , soit en se réunissant , examiner le volume sous ces divers rapports.*

Deux commissions ont été nommées ; les deux rapporteurs choisis par elles ont eu plusieurs conférences ; ils se sont trouvés du même avis , et chacun d'eux s'attachera plus particulièrement aux objets qui sont de sa compétence , en observant la ligne de démarcation tracée par S. E. le Ministre de l'intérieur.

L'ouvrage est précédé d'une préface , où l'éditeur rend compte des recherches qu'il a faites , des secours qu'il s'est procurés , du système qu'il a suivi ; cette préface est en deux langues , nous n'en examinerons ici que les idées.

Ce qu'on sait sur la personne d'Euclide se réduit à bien peu de chose , mais son ouvrage jouit de la plus grande réputation. On convient assez généralement qu'Euclide n'a fait que rassembler et mettre en ordre les théorèmes trouvés par les géomètres qui étaient venus avant lui ; peut-être a-t-il augmenté le nombre de ces théorèmes , il se peut qu'il en ait perfectionné les démonstrations ; cependant quelques auteurs attribuent ces démonstrations à Théon , l'un des plus anciens et plus célèbres commentateurs des Éléments. Proclus , qui nous a laissé quatre livres de commentaires sur le premier livre d'Euclide , dans une longue liste de tous les grecs qui se sont distingués dans les mathématiques , en cite quatre qui avaient composé des éléments avant Euclide. Le premier est Hippocrate de Chios , célèbre encore aujourd'hui par ses Lunules ; le second est Théon , dont l'ouvrage était plus plein , plus utile que celui de son prédécesseur ; le troisième est Theudius de Magnésie , que Proclus loue pour l'ordre qu'il a mis dans la rédaction ; après Théon vient Hermotime de Colophon , qui , perfectionnant les découvertes d'Eudoxe et de Thætète , mit aussi beaucoup du sien dans les éléments ; peu de temps après vint Euclide , qui , suivant le témoignage de Proclus , *rassembla les éléments , mit en ordre beaucoup de choses trouvées par Eudoxe , perfectionna ce qui avait été commencé par Thætète , et démontra plus rigoureusement ce qui n'avait encore été que trop mollement démontré avant lui. Euclide vivait sous le premier des Ptolémées , car Archimède le cite dans son premier livre ; il avait fait beaucoup d'autres ouvrages remarquables par leur admirable exactitude et pleins de théories savantes.* Proclus cite particulièrement son optique , sa catoptrique , ses éléments de musique , et enfin , son livre des dièses , *διαρίτων* ; mais ce qu'il admire surtout c'est le livre des éléments , tant pour l'ordre que pour le choix des théorèmes et des problèmes , qui méritent véritablement le nom d'*élémentaires* : il est à remarquer que Proclus ne dit rien des *données* , et qu'il n'a pas nommé Théon.

Ce passage que nous traduisons fidèlement , et dont Grégori dans sa préface avait seulement extrait quelques lignes , semble décisif ; aussi l'idée de ceux qui voulaient dépouiller presque entièrement Euclide en faveur de Théon , a-t-elle été vivement combattue par Butéon et Savilius ; Robert Simson en se rangeant à leur avis , le modifie d'une manière qui le rend encore plus favorable à Euclide. Par une espèce de superstition , excusable dans un traducteur , il a l'air de poser comme un *axiôme* qu'il est impossible qu'Euclide se soit jamais trompé , ou qu'il ait eu la moindre distraction. Ainsi quand il est obligé de reconnaître qu'une définition n'est pas assez

juste, qu'une démonstration est incomplète ou peu rigoureuse, il en rejette assez durement la faute sur Théon ou quelque autre commentateur, qu'il accuse nettement d'ineptie ou au moins d'ignorance en mathématiques. Le nouveau traducteur, sans s'éloigner beaucoup de cette manière de voir de Simson, est au moins plus modéré dans les termes; et pour rejeter plusieurs choses qui véritablement paraissent peu dignes d'Euclide, il a, ce qui manquait à Simson, l'autorité d'un bon manuscrit, dans lequel les passages dignes de censure se trouvent omis ou corrigés.

Cette prévention en faveur de son auteur, et la supériorité du manuscrit du Vatican sur tous les autres, ont fait penser à M. Peyrard, que ce manuscrit pourrait bien être le véritable texte d'Euclide, tandis que tous les autres, et en particulier ceux qui ont servi à l'édition de Bâle ou d'Oxford, seraient les éditions données par Théon, ou par les commentateurs venus après lui.....

En avouant que nous n'avons aucun argument bien péremptoire pour rejeter la conjecture de M. Peyrard, nous dirons pourtant qu'elle ne nous paraît pas suffisamment établie.....

Nous n'attribuerons donc pas à Théon toutes les différences qui se trouvent entre les manuscrits plus modernes et le manuscrit du Vatican; nous ne dirons pas que ce manuscrit soit le texte véritable d'Euclide, car alors il faudrait attribuer à Euclide les mauvaises leçons que M. Peyrard a justement rejetées de son édition pour suivre ou les autres manuscrits ou les éditions de Bâle et d'Oxford. Nous ne dirons pas même que Théon soit décidément l'auteur de la définition condamnée par Simson; il est vrai que Théon la développe et l'explique dans son commentaire sur l'Almageste; mais il la rapporte sans pour cela s'en déclarer l'auteur, au lieu que dans un autre endroit il donne formellement comme de lui le théorème concernant les secteurs, qu'il dit avoir démontré dans son explication d'Euclide, car c'est ainsi que pour éviter l'équivoque nous traduisons le mot *ιδέσθαι*, qu'on traduit communément par le mot *édition*.

Nous n'accuserons point Théon d'avoir supprimé des démonstrations rigoureuses, pour en substituer d'autres qui ne prouvent rien ou qui sont inintelligibles. Nous admettrons aisément que Théon a pu commettre quelques fautes par inattention; mais non qu'il ait été assez ignorant pour ne sentir ni le mérite d'une bonne démonstration, ni les défauts de celles qu'il mettait à la place. Au reste, ce reproche que nous avons l'air d'adresser à M. Peyrard, va bien plus justement à Simson, dont la préface toute entière roule sur cette idée; et d'ailleurs nous sommes loin de donner trop d'importance à l'opinion d'un commentateur sur la source des erreurs avouées qu'il s'agit de rectifier. Que ces erreurs viennent d'Euclide lui-même ou de l'un de ses commentateurs, ou, ce qui souvent est plus probable, qu'elles viennent des copistes, rien n'est plus indifférent; pourvu que le nouvel éditeur les corrige bien, il aura rempli sa tâche; et s'il peut prouver que ses corrections sont appuyées du témoignage d'un ancien manuscrit, on n'a rien de plus à lui demander.

Ce qui distingue les *Éléments* d'Euclide, ce sont moins les théorèmes eux-mêmes, ou l'ordre dans lequel il les a fait dériver les uns des autres, que la manière dont il les a démontrés.....

Le mérite principal est dans la marche rigoureuse qu'il a suivie dans toutes ses démonstrations; on pourrait dire cependant que cette méthode même a trouvé plus de prôneurs que d'imitateurs.....

Mais sans nous déclarer exclusivement les admirateurs d'une manière passée de mode, nous dirons que cette manière a des avantages précieux, en même temps qu'elle a des inconvénients graves; qu'elle forme un langage aujourd'hui peu connu et qui mérite de l'être d'avantage; qu'en

la voyant appliquée par Euclide à des théorèmes assez simples, on pourra devenir en état de suivre plus facilement les démonstrations plus longues et plus obscures d'Apollonius et d'Archimède; que cette étude sera du moins un exercice utile pour s'habituer à la rigueur des démonstrations dont on n'est que trop disposé à se relâcher. On ne serait écouté de personne aujourd'hui si l'on proposait de commencer l'étude des mathématiques dans Euclide; mais on dira une chose vraie en assurant que tout géomètre fera très-bien de lire une fois en sa vie Euclide en entier, pour avoir une idée nette de ce genre de démonstrations, et se mettre en état de l'employer dans l'occasion.

Ces réflexions prouvent l'utilité de l'entreprise formée par M. Peyrard. Aujourd'hui que l'étude du grec commence à reflourir dans l'Université royale, il est à croire que peu de géomètres désormais se refuseront la satisfaction de lire Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante dans leur langue. Il ne faut pas avoir fait une longue étude du grec pour entendre ces auteurs, qui ne sont pas plus difficiles que les fables d'Ésope, et bien moins, certainement, que les dialogues de Lucien, ou les vies de Plutarque, qu'on met entre les mains des enfants. Euclide surtout est d'une grande simplicité, ses phrases sont courtes, elles offrent peu d'inversions, on n'y voit pas une réflexion, pas un raisonnement grammaticalement compliqué; les mêmes expressions reparaissent à chaque instant; le vocabulaire n'est que trop borné, et les termes techniques que l'on y rencontre ne paraissent jamais sans avoir été préalablement définis.

L'intelligence du texte grec sera rendue plus facile encore par le système que M. Peyrard a suivi dans sa traduction latine. Partout il lui a donné la même fidélité qu'aux traductions interlinéaires des ouvrages qui servent à la première instruction. Les termes correspondants se suivent dans le même ordre dans les deux langues. Il n'est pas jusqu'aux articles qui manquent au latin, que le traducteur n'ait tenté de reproduire, par l'emploi continuuel du pronom *ipse*, *ipsius*, etc., pour marquer les cas obliques des lignes, des angles, des figures, désignés en grec par des lettres indéclinables. Ces mots subsidiaires dont la répétition continuelle a quelque chose de fatigant, auraient pu être évités, sans doute, en les remplaçant parfois par les mots *rectæ*, *anguli*, *arcus*, ou tels autres qui n'auraient guères été plus longs; mais M. Peyrard est suffisamment excusé par l'exemple des traducteurs qui l'ont précédé, et même par celui des géomètres modernes qui ont écrit en latin. D'ailleurs, la traduction latine est moins destinée à être lue de suite, qu'à faciliter l'intelligence du texte grec; et ceux qui y trouveraient trop de difficulté pourront se borner à la traduction française qui est au bas de chaque page; outre le secours qu'il trouvait dans nos articles indéfinis, l'auteur n'a pas fait scrupule d'y introduire ces mots *ligne*, *angle*, etc., que nous regrettons tout-à-l'heure de ne pas trouver dans le latin. Cette licence est la seule qu'il ait prise; à cela près, le français est presque aussi littéral que le latin; on serait tenté quelquefois d'en faire un reproche au traducteur; mais la phrase d'Euclide est si simple, qu'il n'y a guères deux manières de la traduire, à moins de prendre des libertés qui, sans avantages bien réels, changeraient tout-à-fait le style de la démonstration.

Il nous reste à parler des variantes qui assurent à la nouvelle édition du texte une supériorité marquée sur les éditions précédentes, lesquelles d'ailleurs commencent à devenir un peu rares.

La première de ces variantes est celle qui place parmi les *demandes* trois propositions, que les éditions précédentes avaient rangées parmi les *notions communes*. Tous les auteurs qui ont depuis reproduit ces propositions se sont crus obligés de les démontrer; Euclide qui s'en est

dispensé , n'a pu cependant les regarder comme des vérités évidentes , mais seulement comme des principes qu'on pouvait lui accorder et qui lui étaient indispensables pour établir sa doctrine. Il faut convenir pourtant que ces trois demandes sont d'un genre tout différent des trois précédentes. En effet , il faudrait être d'un esprit bien difficile pour nier à Euclide la possibilité de mener une droite d'un point donné à un point donné , de prolonger une droite donnée , ou de décrire un cercle d'un centre et d'un rayon donnés. Mais on pourrait lui demander la preuve que tous les angles droits sont égaux , que deux lignes droites ne peuvent renfermer un espace , et surtout que deux droites se couperont nécessairement si on les prolonge suffisamment du côté où elles forment sur une autre droite deux angles dont la somme est moindre que celle de deux angles droits.

L'édition de Paris est conforme à tous les manuscrits de la Bibliothèque royale , si ce n'est que le n° 2545 place parmi les notions communes la troisième des propositions dont nous venons de parler , et que les n° 2546 et 2481 la placent tout à la fois , et parmi les demandes et parmi les notions communes. L'édition de Paris est encore conforme à l'édition arabe , à la traduction latine de Campan , faite d'après l'arabe , et à la traduction latine de Zamberti , faite d'après le texte grec , avant l'édition de Bâle ; Proclus , qui a démontré d'une manière très-simple que tous les angles droits sont égaux , place parmi les demandes , les deux premières propositions , et la troisième parmi les notions communes ; Boèce , qui a supprimé la troisième , place aussi les deux autres parmi les demandes. Tout porte donc à croire que Simon Grynœus , qui est l'auteur de l'édition de Bâle , jugeant ces trois propositions déplacées , changea les accusatifs en nominatifs , les infinitifs en indicatifs , pour reposer ces propositions à une place qu'il jugeait plus convenable. Quoi qu'il en soit , nous croyons M. Peyrard plus qu'autorisé à la leçon qu'il a adoptée de préférence.

La proposition 7 du premier livre a plusieurs cas ; un seul cependant est énoncé et démontré dans tous les manuscrits. Clavius a senti la nécessité de nouveaux développements , il y consacre cinq figures et donne cinq démonstrations , qu'il pouvait réduire à trois ; Simson donne double démonstration et double figure , et la seconde est prise dans Clavius. M. Peyrard qui ne voyait dans les manuscrits qu'une seule figure et qu'une seule démonstration , pouvait dire tout simplement qu'Euclide avait eu un moment de distraction ; il pouvait compléter la démonstration dans une note. Il a voulu sauver Euclide de tout reproche ; en empruntant comme Simson , une figure à Clavius , et prolongeant deux lignes dans la figure d'Euclide , il a fait que la démonstration d'Euclide s'applique à la fois aux deux figures et aux deux cas qui renferment tous les autres. Ainsi *la démonstration s'est trouvée complète sans y changer un seul mot* , dit M. Peyrard , et cela est vrai ; mais dans la préparation il a été obligé d'ajouter une ligne qu'il a enfermée entre deux crochets , parce qu'elle ne se trouve dans aucun manuscrit ; il serait assez difficile d'imaginer comment les copistes auraient non-seulement omis une figure toute entière , mais encore les deux prolongements de la première figure , et enfin la ligne du texte qui explique ces prolongements ; ce n'est donc pas ici une variante que M. Peyrard porte dans le texte , c'est une véritable correction faite à un passage incomplet , mais du moins il l'a faite dans les moindres termes , et c'est par dévouement à son auteur qu'il se borne au mérite d'avoir retrouvé la véritable leçon.

La proposition 24 du livre III , a trois cas ; les éditions grecques n'en démontrent qu'un seul , Commandin dans sa traduction démontre les deux autres : Clavius développe la proposition , il y

emploie cinq figures ; Simson retranche une partie de la proposition qu'il reporte à la précédente ; à l'aide de son manuscrit M. Peyrard remplit la lacune.

Dans la proposition 26, la variante (3) éclarcit la démonstration, elle est donc utile ; M. Peyrard a bien fait de l'introduire dans le texte. Tous les traducteurs en avaient senti la nécessité, le manuscrit a légitimé leurs conjectures.

Le corollaire de la proposition 19 du livre V a paru si corrompu, que Gregori s'est cru obligé de le changer pour y donner un sens raisonnable. Clavius lui en avait donné l'exemple. Robert Simson, avec son aménité ordinaire, dit que tout ce livre V a été corrompu par des ignares en géométrie.....

Le manuscrit est absolument semblable à l'édition d'Oxford, c'est par des changements assez légers que M. Peyrard a rendu ce corollaire intelligible ; mais ces changements nécessaires ne sont autorisés par aucun manuscrit ; il lui donne ensuite la forme d'un théorème, et le démontre directement d'une manière assez courte dans sa préface.

Dans la dernière proposition du livre VI, ce qui regarde les secteurs circulaires paraît une addition de Théon, qui en réclame formellement la démonstration à la page 50 de son commentaire sur Ptolémée. Cet article ne se trouve pas dans le manuscrit du Vatican, et M. Peyrard se reproche de ne l'avoir pas retranché de son édition, par la raison qu'il n'est d'aucun usage dans tout ce qui suit ; mais puisque ce théorème est vrai, nous croyons le scrupule exagéré. Pour qu'un théorème soit admis dans un livre d'éléments, il n'est pas bien nécessaire qu'il serve à démontrer un théorème subséquent..... Cet article des secteurs a cependant trouvé grâce aux yeux de Simson, qui en ignorait probablement le véritable auteur, ou qui n'a pas vu dans le passage de Théon une preuve bien sûre qu'Euclide n'eût pas donné lui-même ce théorème.

Le traducteur continue de donner les raisons pour lesquelles il a rejeté du texte plusieurs variantes qu'il discute. Ces raisons sont assez plausibles, mais quand on ne les admettrait pas, comme les leçons rejetées se retrouvent à la fin du volume, personne n'aurait à se plaindre ; on sait qu'en pareille matière les éditeurs les plus estimables sont rarement du même avis.

Après avoir examiné la préface, nous aurions à passer en revue les variantes que l'auteur, soit en les admettant, soit en les rejetant, n'a pas jugées assez importantes pour leur consacrer un article particulier ; mais cet examen serait beaucoup trop long, nous nous bornerons à celles qui pourront nous fournir quelque remarque ; nous laisserons toutes celles qui nous ont paru ou indifférentes ou bien placées, soit qu'elles se trouvent dans le texte ou qu'elles soient à la fin du volume.

Dans la définition 15 du livre I^{er}, l'éditeur, d'après plusieurs manuscrits, a reçu dans le texte les mots *πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν*, qui nous paraissent un double emploi, une glose fort inutile des mots *πρὸς ἣν* qui se trouvent deux lignes plus haut.

L'éditeur a marqué par des titres les différentes parties dont se compose la première proposition. Ces dénominations qui nous ont été conservées par Proclus, et qui sont *exposition*, *détermination*, *construction*, *démonstration* et *conclusion*, paraissent une pédanterie de commentateur, et le nouvel éditeur a bien fait de ne les employer qu'une seule fois pour exemple.

Il a rejeté parmi les variantes le corollaire de la proposition XV, qui dit que la somme des angles autour d'un même point est toujours égale à quatre angles droits. Sa raison est qu'il manque dans la plupart des manuscrits, et que dans les autres il est écrit d'une main étrangère. Il nous

semble qu'on aurait pu le conserver, à l'exemple de Simson. S'il n'est pas d'Euclide, s'il est implicitement renfermé dans ce qui précède, il a le mérite d'être court, et de contenir une remarque qui aurait pu échapper à quelques lecteurs. Il aurait pu, sans inconvénient, conserver quatre mots qu'il a retranchés de la proposition XX ; à la vérité, ils n'étaient pas bien nécessaires, mais ils paraissent dans la manière d'Euclide. Dans la proposition XXII, au contraire, il a rétabli dans le manuscrit deux lignes qui ne gâtent rien, mais dont on pouvait se passer.

Dans la proposition XXVI, l'addition faite (15) était nécessaire, quoique dans le manuscrit elle fût écrite en marge et d'une autre main ; elle se trouvait déjà dans l'édition d'Oxford.

Dans la proposition XXVII, la leçon du manuscrit est plus concise et suffisante ; celle d'Oxford est plus développée et plus dans la manière d'Euclide. On peut en dire autant de la proposition XXVIII. La leçon nouvelle de la proposition XXIX a le mérite de la brièveté.

A la proposition XXXI, l'éditeur s'est écarté de son manuscrit pour se conformer à l'édition d'Oxford ; il a cru parfaitement inutiles les mots qu'il supprimait : il y a dans tous ces choix un peu d'arbitraire, et nul inconvénient. Ainsi à la proposition XXXIV, le mot *χαρίων* ajouté à *παλλήλογραμμοι* n'était nullement nécessaire ; mais en le rétablissant, on a rendu l'énoncé plus conforme à celui de la proposition. A la proposition XXXVII, le retranchement autorisé par le manuscrit n'a aucun inconvénient : on fait toujours bien quand on retranche des mots inutiles ; la démonstration y gagne toujours, car celles des Grecs sont toujours un peu longues.

A la fameuse proposition XLVII (le carré de l'hypoténuse), on trouve une faute qui ne peut échapper au lecteur, et dont nous n'aurions pas fait mention, si elle ne se trouvait dans les trois langues : c'est un ΔA au lieu de BA .

Dans le livre II, proposition VIII, on serait tenté de regarder comme inutiles les quatre lignes introduites d'après le manuscrit ; mais dans la proposition IX, on a très-bien fait d'introduire ces mots *et elles sont égales*, qu'on était obligé de sous-entendre. La variante (12) de la même proposition est préférable à la leçon d'Oxford, qui pourtant revient à peu près au même ; car si les carrés sont égaux, les racines ou les côtés le sont nécessairement.

Le manuscrit avait, dans la proposition X, une faute évidente, qui n'était ni dans l'édition d'Oxford, ni dans celle de Bâle.

Dans le livre III, définition 2, l'éditeur a bien fait d'ajouter, d'après le manuscrit, les mots *ἐπὶ μηδὲ τιμα μὲν* ; mais il a oublié de les traduire en français.

Dans la proposition VIII, l'éditeur a bien fait de suivre l'édition d'Oxford plutôt que le manuscrit ; la longue variante n'offre rien de bien intéressant.

Dans la proposition XIII on a ajouté, d'après le manuscrit, deux mots qui étaient si nécessaires, que Gregori les avait traduits ; quoiqu'ils ne fussent pas dans le texte.

Dans la proposition XXIV, le manuscrit et l'édition nouvelle présentent un sens moins incomplet : il y manque pourtant encore quelque chose, mais le sens ne peut être douteux.

La variante (6) de la proposition XXXVII, est certainement une amélioration.

Livre IV, au corollaire de la proposition V, la correction tirée du manuscrit est bonne ; la leçon d'Oxford était defectueuse ; cependant le sens était visible.

Livre V, proposition IV, l'éditeur a rétabli d'après le manuscrit deux mots qui manquaient, et que Simson avait jugés indispensables. Il y a ensuite, dans le manuscrit, trois lignes que l'éditeur a bien fait de ne point admettre dans son texte.

Proposition V, la variante (1) était nécessaire.

Proposition VII, l'éditeur n'a point inséré dans le texte un corollaire qui contient une proposition vraie, utile, et qui manque à ce livre, mais qui ne peut se conclure de la proposition précédente : il ne se trouve dans aucun manuscrit, si ce n'est celui du Vatican. Simson a donné à part cette proposition, qu'il a marquée de la lettre B. Dans la manière moderne de traiter les proportions, ce théorème est évident ; il suffira d'en trouver l'énoncé parmi les variantes ; mais il pouvait figurer dans le texte, avec une note.

A la proposition VIII, les sept lignes ajoutées d'après le manuscrit améliorent la démonstration sans la rendre encore bien claire. Simson avait raison de la trouver incomplète ; mais il avait probablement tort d'en rejeter la faute sur Théon. Au reste, la proposition en elle-même est si simple, qu'on serait tenté d'en faire un axiôme ; et de là vient peut-être la difficulté de la démontrer à la manière des anciens. Il y avait dans l'édition d'Oxford une faute de grammaire, un indicatif pour un infinitif ; cette faute a été corrigée d'après le manuscrit.

A la proposition XXI, variante (3), la leçon d'Oxford était tronquée ; on y ajoutait une explication qui paraît avoir été une note marginale, qui depuis aurait passé dans le texte. La leçon rend la glose inutile ; ainsi le passage devient à la fois et plus court et plus clair.

A la proposition XXIII, on trouve une longue variante fournie par quatre manuscrits. Elle est préférable à la leçon d'Oxford. Simson a refondu la démonstration, et dans ses notes il critique vivement les interprètes qui l'ont précédé. Sa démonstration n'est pas non plus d'une grande clarté. Le théorème est un de ceux qu'on n'explique nulle part, et qu'on applique sans le connaître. Il suffit de l'écrire algébriquement pour en sentir la justesse. Cette espèce de traduction est en général le moyen le plus sûr pour juger les démonstrations des divers éditeurs ; mais alors, si on les rend plus claires, on aperçoit en même temps qu'elles sont longues et peu naturelles.

Au livre VI, l'éditeur a supprimé la 5^e définition, parce qu'elle n'est pas dans son manuscrit. Elle pourrait être de Théon ; c'est celle que Simson a si vivement critiquée. La meilleure raison, c'est qu'elle est à peu près inutile, et qu'elle n'est point assez correcte. C'est la définition de la raison composée.

Dans la proposition II, l'éditeur a supprimé deux fois le mot *παράλληλος* qui n'est pas dans le manuscrit, et qui est de trop dans les imprimés. *Αγιν παρά* signifie chez les Grecs ce que nous exprimons par *mener parallèlement*. On voit donc que le mot *parallèle* devient inutile. Deux lignes sont parallèles quand elles sont à côté l'une de l'autre sans jamais se couper ; c'est ce que signifie *παρά* chez les géomètres grecs.

Dans la proposition III, l'éditeur a rétabli quelques articles qui manquaient, et adopté quelques variantes qui, sans être bien importantes par le sens, rendent la phrase plus correcte.

A la proposition X, il y avait dans l'édition d'Oxford une répétition inutile, occasionnée par l'insertion d'une phrase également superflue. L'éditeur, d'après quatre manuscrits, a donné une leçon plus courte et plus exacte.

A la fin de la deuxième démonstration de la proposition XIV, on a supprimé, d'après le manuscrit, quatre lignes qui formaient une glose peu nécessaire.

La proposition XXI avait un double emploi plus sensible, que le manuscrit a fait supprimer.

A la proposition XXII, le manuscrit a fourni deux développements utiles, qu'on pouvait cependant sous-entendre.

A la proposition XXVI, les éditeurs de Bâle et d'Oxford offraient un texte altéré, une figure mal faite. Clavius avait changé la démonstration et substitué deux figures à la figure unique du texte. Le manuscrit a fourni un texte correct et une figure exacte. Simson, en conservant la figure, avait changé le texte pour l'y faire cadrer. Sa correction était bonne, mais rien ne l'appuyait. Il est à croire que la nouvelle édition offre la véritable rédaction d'Euclide.

A la proposition XXVII, $\tau\eta$ était une faute d'impression dans l'édition d'Oxford.

Livre VII. C'est le premier de ceux qui sont omis dans les éditions communes d'Euclide; il traite des nombres. La définition de l'unité ne signifie pas grand chose en grec, et ce défaut est bien plus sensible en latin et en français, où les mots *un* et *unité* ont une ressemblance que n'ont pas les mots *monade* et *un*; $\mu\omega\upsilon\varsigma$ et $\iota\upsilon$.

L'éditeur a rétabli, d'après le manuscrit, la définition du nombre impairement pair qui manquait évidemment, quoiqu'on pût la supposer comprise dans celle du nombre pairement impair qui précède.

A la proposition X, on trouve une addition utile.

A la proposition XIX, $\delta\iota\upsilon\tau\iota\sigma\tau\epsilon\upsilon$ pour $\tau\epsilon\tau\alpha\pi\tau\epsilon\upsilon$, était dans l'édition d'Oxford une faute prise dans celle de Bâle, et d'autant plus étonnante dans celle-là, qu'elle était corrigée dans la traduction.

A la proposition XXIII, la première variante a le mérite de plus de brièveté, la seconde celui de plus de justesse.

Nous sentons plus que personne combien ces détails sont arides et minutieux. Nous avons dû les rapporter pour donner à la Classe la preuve du scrupule avec lequel nous avons fait l'examen dont elle nous avait chargés. Notre conclusion sera que, nonobstant quelques fautes d'impression dont nous ajouterons ici la liste (1), qui étaient presque inévitables dans une entreprise de ce genre, et qui d'ailleurs sont bien moins nombreuses que celles de la belle édition d'Archimède, imprimée à Oxford, l'ouvrage est *exact*, non pas sans doute *autant que l'auteur aurait désiré le faire*, mais autant qu'il était possible de l'espérer; *que les leçons choisies sont en général celles qui méritaient la préférence*. Si quelquefois à cet égard nous nous sommes trouvés différer de sentiment avec l'éditeur, nous n'oserions assurer que nous avons toujours raison; et ceux qui se trouveraient de notre avis auraient toujours la ressource de consulter la table des variantes; ainsi l'inconvénient, s'il en existe, est extrêmement léger. Nous dirons *que l'ouvrage remplit bien toutes les conditions qui pouvaient être exigées*, et que l'édition est évidemment supérieure à toutes celles que nous connaissons.

Fait à Paris, le 21 février 1814.

Signé PRONY et DELAMBRE, rapporteur.

Certifié conforme à l'original.

Le Secrétaire perpétuel,

Signé DELAMBRE.

(1) Cette liste est imprimée à la fin du volume.

INSTITUT DE FRANCE.

CLASSE D'HISTOIRE ET DE LITTÉRATURE ANCIENNE.

Paris, le 26 Février 1814.

Le Secrétaire perpétuel de la Classe, à Son Excellence le Ministre de l'intérieur.

MONSIEUR LE COMTE,

Les *Éléments* d'Euclide ne renfermant que des définitions et des propositions de géométrie, sont essentiellement du ressort de la Classe des Sciences physiques et mathématiques, et sont entièrement étrangers, pour le fonds, au genre des travaux de celle d'histoire et de littérature ancienne. Cette Classe cependant, pour répondre, autant qu'il est en elle, au témoignage de confiance que Votre Excellence a jugé à propos de lui donner en la consultant sur le mérite du travail de M. Peyrard, s'est empressée de l'examiner sous le petit nombre de rapports qui la concernent et sur lesquels elle peut avoir une opinion motivée. Le compte que M. Delambre rendit il y a quelques années à la première Classe de la traduction française d'Euclide, et celui qu'il vient de lui rendre de l'édition du texte et des traductions latine et française dont il est accompagné, ainsi que de l'ensemble du travail de M. Peyrard, présentent les détails les plus intéressants qui supposent un examen très-approfondi de ce travail sous le rapport littéraire et sous celui de la science, et font connaître suffisamment ce qu'on doit en penser.

La classe d'histoire a donc cru devoir se borner à soumettre à Votre Excellence quelques observations générales sur la partie littéraire de l'ouvrage, et sur la manière dont il est exécuté.

Le texte d'Euclide lui a paru plus correct dans la nouvelle édition que dans les éditions antérieures; cependant elle pense que celle qui fut publiée à Bâle en 1533, par Simon Grynéus, malgré quelques fautes d'impression, moins nombreuses qu'on ne le croit communément, et faciles à corriger, sera toujours précieuse aux amateurs de la langue grecque.

La partie typographique est en général soignée dans l'édition de M. Peyrard: il s'y est néanmoins glissé quelques fautes d'impression, surtout vers la fin du volume.

En comparant le texte grec de cette édition avec celui des éditions précédentes, on y remarque quelques différences. Les plus essentielles ont été relevées et appréciées dans le rapport fait à la première Classe, qui constate encore que l'éditeur a rempli heureusement plusieurs lacunes avec le secours des manuscrits.

Les deux traductions jointes au texte sont très-littérales; peut-être même la traduction française l'est-elle trop. Cette manière de traduire mot à mot peut être bonne pour une version latine, dans laquelle on cherche plutôt l'exactitude et la fidélité que l'élégance, et dont quelques personnes peuvent avoir besoin pour entendre le texte; mais il semble que la traduction française aurait dû être faite avec un peu plus de liberté (1).

J'ai l'honneur de faire repasser à Votre Excellence l'ouvrage de M. Peyrard qu'elle m'avait envoyé, et de lui renouveler l'hommage de mes sentiments les plus respectueux.

Signé DACIER.

Certifié conforme à l'original,

Signé BARBIER DE NEUVILLE, chef de
la 3^{me} division du Ministère de l'intérieur.

(1) Voyez le rapport de M. Delambre, page 36, alinéa trois.

INSTITUT DE FRANCE.

Paris, 14 août 1809.

Rapport de MM. LAGRANGE, LEGENDRE et DELAMBRE, sur une traduction complète des quinze livres des Éléments, et des Données d'Euclide, par M. PEYRARD.

LA Classe a déjà donné son approbation à une traduction d'Euclide, par M. Peyrard. A l'exemple de presque tous les éditeurs qui l'ont précédé, il avait omis les livres qui traitent des Quantités numériques, les trois derniers livres, et le livre des Données; mais il avait annoncé dès-lors une traduction complète. Le désir de lui donner toute la perfection possible lui a fait consulter tous les manuscrits de la bibliothèque royale.

Dépositaire de ces précieux manuscrits, M. Peyrard les a comparés soigneusement avec l'édition grecque d'Oxford; il a noté en marge de l'imprimé toutes les variantes, les a traduites en latin; et c'est sur ce texte rectifié qu'il a composé sa version, qui est aussi littérale que l'a permis le génie des deux langues.

Il a fait principalement usage du n° 190, qu'il nous a remis pour que nous pussions examiner son travail, et vérifier toutes les variantes dont il a enrichi les marges de son exemplaire de l'édition d'Oxford. Nous avons fait cette vérification, et nous avons reconnu partout la plus grande conformité avec le manuscrit.

Ces variantes, comme on peut s'y attendre, ne sont pas toutes de la même importance, et ne méritent pas toujours la préférence sur les leçons imprimées. Parmi ces variantes, il en est qui consistent en quelques mots omis dans les imprimés, dont les traducteurs avaient senti la nécessité, et que Grégori a fait entrer dans son texte, en les enfermant entre deux crochets; quelquefois c'est un présent au lieu d'un futur; *ierai* au lieu de *ieriv*, ou réciproquement; le mot *ios* au lieu de *i aivis*, *égal*, pour *le même*; des expressions plus ou moins conformes au style ordinaire des géomètres, ou d'Euclide en particulier. Toutes ces variantes n'auraient de valeur qu'aux yeux des philologues et des érudits; mais il en est de vraiment dignes de l'attention des géomètres, en ce qu'elles changent en mieux le sens, ou qu'elles donnent un sens raisonnable à ce qui n'en présentait aucun. Ce sont des superfluités élaguées, des lignes entières omises dans les imprimés, et qui sont ou absolument nécessaires à la démonstration, ou y portent au moins des développements utiles. D'autres fois on y rencontre des leçons plus concises, et qui présentent un sens tout aussi clair; des transpositions qui rendent parfaitement intelligible ce qui paraissait obscur ou peu exact. La définition 5^e du VI^e livre, qui se trouve dans toutes les

éditions grecques, est une simple note placée au bas du manuscrit, d'où elle avait été mal à propos portée dans le texte : Robert Simson a écrit six pages contre cette mauvaise et inutile définition, et elle n'est pas d'Euclide.

Le même traducteur relève une bévue remarquable de tous les textes grecs imprimés; un changement de lettre dans la figure avait causé tout l'embarras. En rétablissant la lettre véritable ϕ au lieu de ω , on ne donne plus à Euclide le ridicule de paraître ignorer une vérité de la géométrie la plus élémentaire. Voyez *Prop. 17, liv. XII*.

La proposition 86 des *Données* avait fort inquiété Grégori qui, dans sa préface, en propose deux rédactions identiques, et à laquelle il voulait en ajouter une troisième, qui compléterait le système de la résolution des équations bi-quadratiques à la manière des anciens. Cette dernière conjecture n'est pas confirmée par le manuscrit, qui n'offre que l'une des deux premières rédactions. Grégori croyait le théorème singulièrement altéré; son erreur venait de ce qu'il ne connaissait pas un lemme qui se trouve dans le manuscrit à la fin des *Données*, et qui doit précéder la proposition 86.

M. Peyrard donne ce lemme qui, au reste, est une proposition bien simple et bien connue. Il s'agit de trouver la surface d'un parallélogramme obtus-angle; mais cette proposition renferme une construction nécessaire à la démonstration des propositions 86 et 87, qui disent que si deux lignes formant un angle donné comprennent un espace donné, et que le carré de l'une, augmenté ou diminué d'un espace donné, soit au carré de la seconde, en raison donnée, ces deux lignes seront connues.

D'après toutes ces considérations, nous pensons que la classe peut donner son approbation au travail de M. Peyrard, pour l'encourager encore à terminer l'entreprise qu'il poursuit avec une persévérance digne d'éloges, et qui nous fera mieux connaître tous les mathématiciens grecs. Nous exprimerions le vœu de voir paraître une édition grecque du texte d'Euclide, purgée de toutes les fautes que les manuscrits ont fait rectifier, et enrichie de toutes les additions qu'ils ont fournies; mais cette édition serait dispendieuse et demanderait beaucoup de temps : nous nous bornerons donc à souhaiter que M. Peyrard ajoute à sa traduction la liste de toutes les variantes qu'il a recueillies, et qui lui paraîtront mériter quelque attention. Ainsi les géomètres pourront corriger les éditions anciennes, en attendant celle qui pourrait faire oublier toutes les précédentes.

Signé à la minute, LAGRANGE, LEGENDRE, DELAMBRE, rapporteur.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R P R I M U S.

ΟΡΟΙ.

- α'. ΣΗΜΕΙΟΝ ἴστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.
γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.
δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἴστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς
ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖοις κεῖται.
ε'. Επιφάνεια δὲ ἴστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος
μόνον ἔχει.
ς'. Επιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.
ζ'. Επίπεδος ἐπιφανεία ἴστιν, ἥτις ἐξ ἴσου
ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

DEFINITIONES.

1. PUNCTUM est, cujus pars nulla.
2. Linea autem, longitudo non lata.
3. Lineæ vero extrema, sunt puncta.
4. Recta linea est, quæ ex æquo inter sua
puncta ponitur.
5. Superficies autem est, quod longitudinem
et latitudinem solum habet.
6. Superficieci vero extrema, sunt lineæ.
7. Plana superficies est, quæ ex æquo inter
suas rectas ponitur.

LE PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.

2 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

η'. Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Οταν δὲ αἱ περιέχουσai τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶ· καὶ ἡ ἐφίστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφίστηκεν.

ια'. Ἀμβλυῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Οξεία δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὀρος ἐστὶν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσai εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando autem continentes dictum angulum lineæ rectæ sunt, rectilineus appellatur angulus.

10. Quando autem recta in rectam insistent deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; et insistent recta perpendicularis vocatur in quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major recto.

12. Acutus autem, qui recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur,

15. Circulus est figura plana ab unâ lineâ contenta, quæ vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum intra figuram positurum, omnes cadentes rectæ ad circuli circumferentiam æquales inter se sunt.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

15'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

15". Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

16". Ημικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιχόμενον σχῆμα, ὑπὸ τε τῆς⁴ διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς⁵ τοῦ κύκλου περιφέρειας.

16". Τμήμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιχόμενον σχῆμα⁶ ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας, ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου⁷.

17". Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι⁸, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

17". Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

18". Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

19". Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλείονων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

20". Τῶν δὲ τριπλείρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς⁹ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

16. Centrum autem circuli, hoc punctum vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quædam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentiâ; quæ et bifariam secat circumulum.

18. Semicirculus vero est contenta figura ab et diametro, et circumferentiâ circuli apprehensâ ab diametro.

19. Segmentum circuli est, contenta figura ab et rectâ, et circuli circumferentiâ, vel majore vel minore semicirculo existente.

20. Figuræ rectilineæ sunt, quæ ab rectis continentur.

21. Trilateræ quidem, quæ ab tribus.

22. Quadrilateræ autem, quæ ab quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ ab pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum, æquilaterum quidem triangulum est quod tria æqualia habet latera.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

4 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κί. Ισοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κς'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους¹⁰ ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἐτι τε¹¹, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κή. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλυῖαν γωνίαν.

κθ'. Οξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς¹² τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον.

λα'. Ετερόμηνες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ.

λβ'. Ρόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δὲ.

λγ'. Ρομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπεζίαι καλεῖσθω.

25. Isosceles vero, quod duo solum æqualia habet latera.

26. Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

27. Insuper, trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet rectum angulum.

28. Obtusangulum autem, quod habet obtusum angulum.

29. Acutangulum vero, quod tres acutos habet angulos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum, quadratum quidem est, quod et æquilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero æquilaterum.

32. Rhombus vero, quod æquilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboides autem, quod et opposita latera et angulos æqualia inter se habet, quod neque æquilaterum est, nec rectangulum.

34. Præter hæc autem quadrilatera trapezia vocentur.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le carré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 5

λί. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς¹¹ ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

35. Parallelae sunt rectae, quae in eodem plano existentes, et productae in infinitum ad utramque partem, in neutram sibi coincidunt.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α. Ἡτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχές¹² ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.

δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἴαν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις¹³ ἱμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἰλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' αὐτὰ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἰλάσσονες γωνίαι³.

ς. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ⁴ περιέχειν.

POSTULATA.

1. POSTULETUR, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.

2. Et finitam rectam in directum secundum continuum producere.

3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

4. Et omnes angulos rectos æquales inter se esse.

5. Et si in duas rectas recta quædam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere ad quas partes sunt duobus rectis minores anguli.

6. Et duas rectas spatium non continere.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

6 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

- α'. Τὰ τῇ αὐτῇ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν ἴσα.
 β'. Καὶ ἰὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσιν ἴσα.
 γ'. Καὶ ἰὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἴσιν ἴσα.
 δ'. Καὶ ἰὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσιν ἄνισα.
 ε'. Καὶ ἰὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἴσιν ἄνισα.
 — ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.
 ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.
 η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις ἴσιν.
 — θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἴσιν.

NOTIONES COMMUNES.

1. Quæ eidem æqualia, et inter se sunt æqualia.
2. Et si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
4. Et si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.
5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
6. Et quæ ejusdem duplicia, æqualia inter se sunt.
7. Et quæ ejusdem dimidia, æqualia inter se sunt.
8. Et quæ congruunt inter se, æqualia inter se sunt.
9. Et totum parte majus est.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les tous seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

PROPOSITIO I.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τριγώνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

SUPER datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum constituere.

ΕΚΘΕΣΙΣ ¹. Εἴτω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ² πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

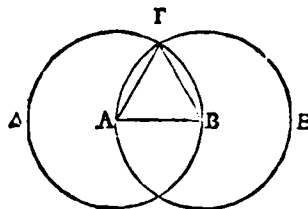
EXPOSITIO. Sit data recta terminata AB.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ³. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας πεπερασμένης ⁴ τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

DETERMINATIO. Oportet igitur super AB rectam terminatam triangulum æquilaterum constituere.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ⁵. Κέντρον μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρον μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τίμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεία ἐπιζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

CONSTRUCTIO. Centro quidem A, intervallo autem AB, circulus describatur BΓΔ; et rursus, centro quidem B, intervallo autem BA, circulus describatur ΑΓΕ; et ab Γ puncto, in quo sese secant circuli, ad A, B puncta adiungantur rectæ ΓΑ, ΓΒ.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ⁶. Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ

DEMONSTRATIO. Et quoniam A punctum centrum est BΓΔ circuli, æqualis est ΑΓ ipsi ΑΒ; rursus, quoniam B punctum centrum est ΑΓΕ circuli, æqualis est ΒΓ ipsi ΒΑ. Ostensa

PROPOSITION PREMIÈRE.

SUR une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

EXPOSITION. Soit AB une droite donnée et finie.

DÉTERMINATION. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

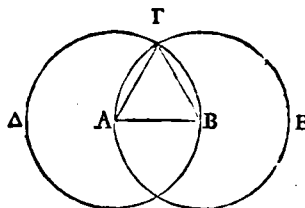
CONSTRUCTION. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence ΑΓΕ; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓΑ, ΓΒ (dem. 1).

DÉMONSTRATION. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite ΑΓ est égale à la droite ΑΒ (déf. 15); de plus, puisque le point B est le

8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἴσιν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσιν· ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἴσιν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

est autem et ΓΑ ipsi ΑΒ æqualis; utraque igit. ipsarum ΓΑ, ΓΒ ipsi ΑΒ æqualis est. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et ΓΑ igitur ipsi ΓΒ est æqualis; tres igitur ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ æquales inter se sunt.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ³. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἑπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

CONCLUSIO. Æquilaterum igitur est ΑΒΓ triangulum, et constitutum est super datam rectam terminatam ΑΒ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

Εστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθεῖᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Sit quidem datum punctum Α, data autem recta ΒΓ; oportet igitur ad Α punctum, datæ rectæ ΒΓ æqualem rectam ponere.

Επιζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνιστάτω ἐπ' αὐτῆς

Adjungatur enim ab Α puncto ad Β punctum recta ΑΒ, et constituatur super eam triangulum

centre du cercle ΑΓΕ, la droite ΒΓ est égale à la droite ΒΑ; mais on a démontré que la droite ΓΑ était égale à la droite ΑΒ; donc chacune des droites ΓΑ, ΓΒ est égale à la droite ΑΒ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓΑ est égale à la droite ΓΒ; donc les trois droites ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ sont égales entre elles.

CONCLUSION. Donc le triangle ΑΒΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION II.

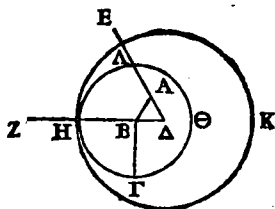
A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut au point Α placer une droite égale à la droite donnée ΒΓ.

Menons du point Α au point Β la droite ΑΒ (dem. 1); sur cette droite construisons

τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκτετασθῶσαν
 ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθείαις αἱ ΑΕ, ΒΖ,
 καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ,
 κύκλος γιγράφῃσθ' ὁ ἔστι ΓΗΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ
 τῷ Δ, καὶ διαστήματι ἑστῷ ΔΗ, κύκλος γιγράφῃσθ' ὁ
 ἔστι ΗΚΛ.

æquilaterum $\triangle ABE$, et producantur in directum
ipsis $\triangle A$, $\triangle B$ rectæ AE , BZ , et centro
quidem B , intervallo vero BE , circulus descri-
batur $\Gamma H\Theta$; et rursus centro A , et intervallo
 $\triangle H$ circulus describatur HKA .



Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν*, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΑ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΗ, ὣν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΑ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΑ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΑ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ Α, τῇ
δοθείσῃ ὑψείδι τῇ ΒΓ ἴση ὑψείδι καίται ἡ ΑΔ.
Ὅπερ ἔδει ποιεῖν.

Quoniam igitur B punctum centrum est $\Gamma H\Theta$ circuli, æqualis est $B\Gamma$ ipsi BH . Rursus, quoniam Δ punctum centrum est HKA circuli, æqualis est ΔA ipsi ΔH , quarum ΔA ipsi ΔB æqualis est; reliqua igitur AA reliquæ BH est æqualis. Ostensa est autem et $B\Gamma$ ipsi BH æqualis; utraque igitur ipsarum AA , $B\Gamma$ ipsi BH est æqualis. Quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; et AA igitur ipsi $B\Gamma$ est æqualis.

Ad datum igitur punctum Λ , datæ rectæ
 $\text{B}\Gamma$ æqualis recta ponitur $\Lambda\Delta$. Quod oportebat
 facere.

le triangle équilatéral $\triangle AB$ (prop. 1); menons les droites AE , BZ dans la direction de $\triangle A$, $\triangle B$; du centre B et de l'intervalle BR , décrivons le cercle $\rho\eta\theta$ (dem. 3); et de plus, du centre Δ et de l'intervalle ΔH , décrivons le cercle $\eta\kappa\lambda$.

Puisque le point B est le centre du cercle THO, BR est égal à BH (déf. 15); de plus, puisque le point A est le centre du cercle HKA, la droite AA est égale à la droite AH; mais AA est égal à AB; donc le reste AA est égal au reste BH (not. 3). Mais on a démontré que BR est égal à BH; donc chacune des droites AA, BR est égale à BH. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1.); donc AA est égal à BR.

Donc, au point donné A, on a placé une droite AA' égale à la droite donnée br.
Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

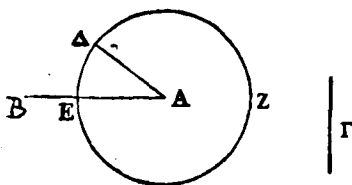
Εστωσαν αἱ δοθεισῆαι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ AB, Γ, ὧν μείζων ἴστω ἡ AB· διττὴ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω γάρ· πρὸς τῷ A σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ AD· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AD, κύκλος γυγράφω ὁ ΔEZ.

Duobus datis rectis inæqualibus, a majore minori æqualem rectam auferre.

Sint datæ duæ rectæ inæquales AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur a majore AB minori Γ æqualem rectam auferre.

Ponatur enim ad A punctum ipsi Γ rectæ æqualis AD; et centro quidem A, intervallo vero AD circulus describatur ΔEZ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔEZ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ AD· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ AD ἐστὶν ἴση. Ἐκατέρα ἄρα τῶν AE, Γ τῇ AD ἔστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ AE τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν AB, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην ἀφίρηται ἡ AE. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam A punctum centrum est ΔEZ circuli, æqualis est AE ipsi AD; sed et Γ ipsi AD est æqualis; utraque igitur ipsarum AB, Γ ipsi AD est æqualis; quare et AE ipsi Γ est æqualis.

Duabus igitur datis rectis inæqualibus AB, Γ, a majore AB minori Γ æqualis ablata est AE. Quod oportebat facere.

PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Soient AB, γ les deux droites inégales données, que AB soit la plus grande; il faut de là plus grande AB retrancher une droite égale à la plus petite γ.

Au point A plaçons une droite AD égale à γ (prop. 2), et du centre A et de l'intervalle AD, décrivons le cercle ΔEZ (dem. 3).

Puisque le point A est le centre du cercle ΔEZ, AE est égal à AD; mais γ est égal à AD; donc chacune des droites AE, γ, est égale à la droite AD; donc la droite AE est égale à la droite γ.

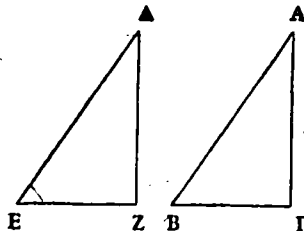
Donc les deux droites inégales AB, γ, étant données, on a retranché de la plus grande AB une droite AE égale à la plus petite γ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς' ὁσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ὑψιῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant, ab æqualibus rectis contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt.



Εστω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB, AΓ, ταῖς ὁσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ ΔΕ, τὴν δὲ AΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ BΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ BΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται,

Sint duo triangula ABΓ, ΔΕΖ, duo latera AB, AΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi ΔΕ, AΓ vero ipsi ΔΖ, et angulum BΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem; dico et basim BΓ basi ΕΖ æqualem esse, et ABΓ triangulum ΔΕΖ triangulo æquale fore, et reliquos angulos reliquis angulis æquales fore utrumque utrique, quos æqualia

PROPOSITION IV.

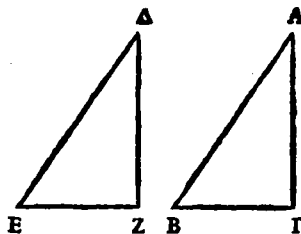
Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ABΓ, ΔΕΖ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, AΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔΕ, et le côté AΓ au côté ΔΖ, et qu'ils aient aussi l'angle BΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ; je dis que la base BΓ est égale à la base ΕΖ, que le triangle ABΓ sera égal au triangle ΔΕΖ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux,

12 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑκατέρᾳ ἑκατέρῳ, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-
τείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ $\Delta\Gamma\text{B}$ τῇ ὑπὸ $\Delta\text{E}\text{Z}$, ἡ δὲ ὑπὸ
 $\Delta\Gamma\text{B}$ τῇ ὑπὸ $\Delta\text{Z}\text{E}$.

latera subtendunt, $\Delta\text{B}\Gamma$ quidem ipsi $\Delta\text{E}\text{Z}$, $\Delta\Gamma\text{B}$
vero ipsi $\Delta\text{Z}\text{E}$.



Εφαρμοζομένου γάρ τοῦ $\Delta\text{B}\Gamma$ τριγώνου ἐπὶ τὸ
 $\Delta\text{E}\text{Z}$ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Δ σημείου
ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΔB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔE ,
ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον² ἐπὶ τὸ E , διὰ τὸ
ἴσων εἶναι τὴν ΔB τῇ ΔE · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς
 ΔB ἐπὶ τὴν ΔE , ἐφαρμόσει καὶ ἡ $\Delta\Gamma$ εὐθεῖα ἐπὶ
τὴν ΔZ , διὰ τὸ ἴσων εἶναι τὴν ὑπὸ $\Delta\text{B}\Gamma$ γωνίαν
τῇ ὑπὸ $\Delta\text{E}\text{Z}$ · ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z
σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσων πάλιν εἶναι τὴν
 $\Delta\Gamma$ τῇ ΔZ . Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ B ἐπὶ τὸ E ἐφερ-
μόκει, ὥστε βάσις ἡ $\text{B}\Gamma$ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρ-
μόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσαντος,
τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Z , ἡ $\text{B}\Gamma$ βάσις ἐπὶ τὴν EZ
οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν,
ἐπερ ἔστιν³ ἀδύνατον. Εφαρμόσει ἄρα ἡ $\text{B}\Gamma$ βάσις

Congruente enim $\Delta\text{B}\Gamma$ triangulo $\Delta\text{E}\text{Z}$ trian-
gulo, et posito quidem Δ puncto super Δ
punctum, ΔB vero rectâ super ΔE ; congruet
et B punctum ipsi E , quia est æqualis ΔB
ipsi ΔE ; congruente autem ΔB ipsi ΔE , con-
gruet et $\Delta\Gamma$ recta ipsi ΔZ , quia æqualis est
 $\Delta\text{B}\Gamma$ angulus ipsi $\Delta\text{E}\text{Z}$; quare et Γ punctum
 Z puncto congruet, quia æqualis rursus est $\Delta\Gamma$
ipsi ΔZ . Sed quidem et B ipsi E congruebat;
quare basis $\text{B}\Gamma$ basi EZ congruet; si enim
quidem B ipsi E congruente, Γ vero ipsi Z ,
 $\text{B}\Gamma$ basis ipsi EZ non congruat, duæ rectæ
spatium continebunt, quod est impossibile. Con-
gruet igitur $\text{B}\Gamma$ basis ipsi EZ , et æqualis ei
erit; quare et totum $\Delta\text{B}\Gamma$ triangulum toti $\Delta\text{E}\text{Z}$

$\Delta\text{B}\Gamma$

seront égaux chacun à chacun; l'angle $\Delta\text{B}\Gamma$ égal à l'angle $\Delta\text{E}\text{Z}$, et l'angle $\Delta\text{B}\Gamma$ égal à
l'angle $\Delta\text{Z}\text{E}$.

Car le triangle $\Delta\text{B}\Gamma$ étant appliqué sur le triangle $\Delta\text{E}\text{Z}$, le point Δ étant posé
sur le point Δ , et la droite ΔB sur la droite ΔE , le point B s'appliquera sur le
point E , parce que ΔB est égal à ΔE ; mais ΔB étant appliqué sur ΔE , la droite $\Delta\Gamma$
s'appliquera sur ΔZ , parce que l'angle $\Delta\text{B}\Gamma$ est égal à l'angle $\Delta\text{E}\text{Z}$; donc le point Γ
s'appliquera sur le point Z , parce que $\Delta\Gamma$ est égal à ΔZ ; mais le point B s'applique
sur le point E ; donc la base $\text{B}\Gamma$ s'appliquera sur la base EZ ; car si le point B
s'appliquant sur le point E , et le point Γ sur le point Z , la base $\text{B}\Gamma$ ne s'ap-
pliquait pas sur la base EZ , deux droites comprendraient un espace, ce qui
est impossible (dem. 6); donc la base $\text{B}\Gamma$ s'appliquera sur la base EZ , et lui sera

ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἴσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἑφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἑφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἴσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτίθουσιν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ, προσκεκληθειῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἴσονται.

triangulo congruet, et æquale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et æquales eis erunt, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΑΓΒ vero ipsi ΔΖΕ.

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo æqualem habeant ab æqualibus lateribus contentum; et basim basi æqualem habebunt, et triangulum triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V.

Isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt; et productis æqualibus rectis, sub basim anguli æquales inter se erunt.

égale; donc le triangle entier ΑΒΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔΕΖ, et lui sera égal; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ΑΒΓ à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΑΓΒ à l'angle ΔΖΕ.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

Dans les triangles isoscèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés égaux étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux.

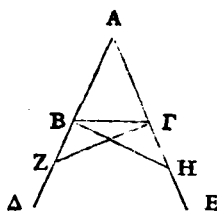
14 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ABΓ$, ἴσην ἔχον τὴν AB πλευρὰν τῇ $ΑΓ$ πλευρᾷ, καὶ προστεθείσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς AB , $ΑΓ$ εὐθεῖαι αἱ $ΒΔ$, $ΓΕ$. λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΒΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΕ$.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $ΒΔ$ τυχὸν σημεῖον τὸ $Ζ$, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς $ΑΕ$ τῇ ἐλάσσονι τῇ $ΑΖ$ ἴση ἡ $ΑΗ$, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $ΖΓ$, $ΗΒ$ εὐθεῖαι.

Sit triangulum isosceles $ABΓ$, æquale habens AB latus $ΑΓ$ lateri, et producantur in directum ipsis AB , $ΑΓ$ rectæ $ΒΔ$, $ΓΕ$; dico quidem $ABΓ$ angulum ipsi $ΑΓΒ$ æqualem esse, $ΓΒΔ$ vero ipsi $ΒΓΕ$.

Sumatur enim in $ΒΔ$ quodlibet punctum $Ζ$, et auferatur à majore $ΑΕ$ minori $ΑΖ$ æqualis ipsa $ΑΗ$, et jungantur $ΖΓ$, $ΗΒ$ rectæ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $ΑΖ$ τῇ $ΑΗ$, ἡ δὲ $ΑΒ$ τῇ $ΑΓ$, δύο δὲ αἱ $ΖΑ$, $ΑΓ$ δυοὶ ταῖς $ΗΑ$, $ΑΒ$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ $ΖΑΗ$. βάσις ἄρα ἡ $ΖΓ$ βάσις τῇ $ΗΒ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΑΖΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΗΒ$ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

Quoniam igitur est quidem $ΑΖ$ ipsi $ΑΗ$, $ΑΒ$ vero ipsi $ΑΓ$, duæ igitur $ΖΑ$, $ΑΓ$ duabus $ΗΑ$, $ΑΒ$ æquales sunt, utraque utrique, et angulum communem continent $ΖΑΗ$; basis igitur $ΖΓ$ basi $ΗΒ$ æqualis est, et $ΑΖΓ$ triangulum $ΑΗΒ$ triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt, $ΑΓΖ$ quidem

Soit le triangle isoscèle $ABΓ$, ayant le côté AB égal au côté $ΑΓ$; menons les droites $ΒΔ$, $ΓΕ$, dans la direction de AB , $ΑΓ$ (dem. 2); je dis que l'angle $ABΓ$ est égal à l'angle $ΑΓΒ$, et que l'angle $ΓΒΔ$ est aussi égal à l'angle $ΒΓΕ$.

Car prenons dans $ΒΔ$ un point quelconque $Ζ$, et de la droite $ΑΕ$, plus grande que $ΑΖ$, retranchons une droite $ΑΗ$ égale à la plus petite $ΑΖ$, et joignons les droites $ΖΓ$, $ΗΒ$.

Puisque $ΑΖ$ est égal à $ΑΗ$, et $ΑΒ$ à $ΑΓ$, les deux droites $ΖΑ$, $ΑΓ$ sont égales aux deux droites $ΗΑ$, $ΑΒ$, chacune à chacune; mais elles comprennent un angle commun $ΖΑΗ$; donc (4) la base $ΖΓ$ est égale à la base $ΗΒ$, le triangle $ΑΖΓ$ sera égal au triangle $ΑΗΒ$, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront

τείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλη τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὣν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὲ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἴσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἵσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνία εἰδείχθη ἴση, ὣν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τῷ ΑΒΓ τριγώνου· εἰδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καὶ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi ABH, AZG vero ipsi AHB. Et quoniam tota AZ toti AH est æqualis, quarum AB ipsi AG est æqualis, reliqua igitur BZ reliquæ GH est æqualis. Ostensa est autem et ZG ipsi HB æqualis; duæ igitur BZ, ZG duabus GH, HB æquales sunt, utraque utrique, et angulus BZG angulo GHB æqualis, et basis eorum communis BG; et BZG igitur triangulum GHB triangulo æquale erit, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est quidem ZBG ipsi HGB, BGZ vero ipsi GBH. Quoniam igitur totus ABH angulus toti AGZ angulo ostensus est æqualis, quorum GBH ipsi BGZ æqualis; reliquus igitur ABG reliquo AGB est æqualis, et est ad basim ABG trianguli; ostensus est autem et ZBG ipsi HGB æqualis, et sunt sub basim; isoscelium igitur triangulorum, etc.

égaux chacun à chacun; l'angle AGZ à l'angle ABH, et l'angle AZG à l'angle AHB. Et puisque la droite entière AZ est égale à la droite entière AH, et que AB est égal à AG, la restante BZ sera égale à la restante GH (not. 3). Mais on a démontré que ZG est égal à HB; donc les deux droites BZ, ZG sont égales aux droites GH, HB, chacune à chacune; mais l'angle BZG est égal à l'angle GHB, et la droite BG est leur base commune; donc le triangle BZG sera égal au triangle GHB, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; donc l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et l'angle BGZ égal à l'angle GBH. Mais on a démontré que l'angle entier ABH est égal à l'angle entier AGZ, et l'angle GBH est égal à l'angle BGZ; donc l'angle restant ABG est égal à l'angle restant AGB (not. 3), et ces angles sont sur la base; mais on a démontré aussi que l'angle ZBG est égal à l'angle HGB, et ces angles sont sous la base; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνεσθαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Εστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ γωνίᾳ· λήθω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ AB πλευρᾷ τῇ $A\Gamma$ ἴστί· ἴση.

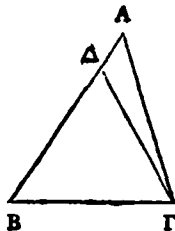
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ $A\Gamma$, μία² αὐτῶν μείζων ἐστίν. Εστω μείζων ἡ AB , καὶ ἀφ' ἡγήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ $A\Gamma$ ἴση ἡ ΔB , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $\Delta\Gamma$.

PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli æquales inter se sunt, et æquales angulos subtendentia latera æqualia inter se erunt.

Sit triangulum $AB\Gamma$ æqualem habens $AB\Gamma$ angulum $A\Gamma B$ angulo; dico et latus AB lateri $A\Gamma$ esse æquale.

Si enim inæquale est AB ipsi $A\Gamma$, unum eorum majus est. Sit majus AB , et auferatur a majore AB minori $A\Gamma$ æqualis ΔB , et jungatur $\Delta\Gamma$.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔB τῇ $A\Gamma$, κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὲ αἱ ΔB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς $A\Gamma$, ΓB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ $\Delta\Gamma$ βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Gamma B$.

Quoniam igitur æqualis est ΔB ipsi $A\Gamma$, communis autem $B\Gamma$, duæ igitur ΔB , $B\Gamma$ duabus $A\Gamma$, ΓB æquales sunt, utraque utrique, et angulus $\Delta B\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ est æqualis; basis igitur $\Delta\Gamma$ basi AB æqualis est, et $\Delta B\Gamma$ trian-

PROPOSITION VI.

Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.

Soit le triangle $AB\Gamma$, ayant l'angle $AB\Gamma$ égal à l'angle $A\Gamma B$; je dis que le côté AB est égal au côté $A\Gamma$.

Car si le côté AB n'est pas égal au côté $A\Gamma$, l'un d'eux sera plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand; retranchons du plus grand côté AB la droite ΔB égale au plus petit $A\Gamma$ (3), et joignons $\Delta\Gamma$.

Puisque ΔB est égal à $A\Gamma$, et que $B\Gamma$ est commun, les deux côtés ΔB , $B\Gamma$ sont égaux aux deux côtés $A\Gamma$, ΓB , chacun à chacun; mais l'angle $\Delta B\Gamma$ est égal à l'angle $A\Gamma B$; donc la base $\Delta\Gamma$ est égale à la base AB , et le triangle $\Delta B\Gamma$ sera égal

τρίγωνον ἴσον ἴσται, τὸ ἐλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ AG· ἴση ἄρα. Εἰ δὲ ἄρα τρίγωνον, καὶ τὰ ἐξῆς.

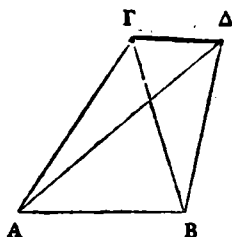
gulum $\triangle AFB$ triangulo æquale erit, minus majori, quod est absurdum; non igitur inæqualis est AB ipsi AG ; ergo æqualis. Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλη καὶ ἄλλη σημίῳ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

PROPOSITIO VII.

Super eadem rectâ, duabus eisdem rectis aliæ duæ rectæ æquales utraque utrique non constituentur, ad aliud et aliud punctum ad easdem partes, eosdem terminos habentes quos primæ rectæ.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς AG, GB ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ AA, ΔB ἴσαι ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ συνιστάτωσαν, πρὸς ἄλλη καὶ ἄλλη σημίῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ A, B· ὥστε

Si enim possibile, super eadem rectâ AB duabus eisdem rectis AG, GB, aliæ duæ rectæ AA, ΔB æquales utraque utrique constituentur ad aliud et aliud punctum Γ et Δ, ad easdem partes, Γ, Δ, et eosdem terminos habentes A, B; ita ut æqualis sit quidem GA ipsi ΔA, eundem ter-

au triangle $\triangle AFB$, le plus petit au plus grand, ce qui est absurde; donc les droites AB, BG ne sont pas inégales; donc AB est égal à BG. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

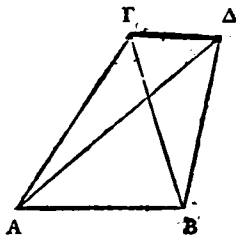
Sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, on ne peut pas construire deux droites égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres.

Car, si cela est possible, sur une même droite AB, et à deux points différens Γ et Δ, placés du même côté, construisons les deux droites AΔ, ΔB égales à deux autres droites AG, GB, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités A, B; de

18 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ.

minum habens quem illa, punctum A, GB vero ipsi ΔB, eundem terminum habens quem illa, punctum B; et jungatur ΓΔ.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μίζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μίζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. Εδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μίζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ; major igitur ΑΔΓ ipso ΔΓΒ; multo igitur ΓΔΒ major est ipso ΔΓΒ. Rursus quoniam æqualis est ΓΒ ipsi ΔΒ, æqualis est et angulus ΓΔΒ angulo ΔΓΒ. Ostensus est autem ipso et multo major, quod est impossibile. Non igitur super, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνία ἴσην ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ὠθειῶν περιεχομένην.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basim basi æqualem; et angulum angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis contentum.

manière que la droite ΓΑ soit égale à la droite ΔΑ, et ait la même extrémité Α que celle-ci, et que la droite ΓΒ soit égale à la droite ΔΒ, et ait la même extrémité Β que celle-ci; et joignons ΓΔ.

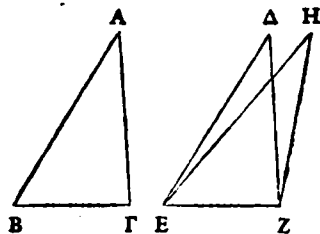
Puisque ΑΓ est égal à ΑΔ, l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΑΔΓ (5); donc l'angle ΑΔΓ est plus grand que l'angle ΔΓΒ; donc l'angle ΓΔΒ est beaucoup plus grand que l'angle ΔΓΒ. De plus, puisque ΓΒ est égal à ΔΒ, l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΔΓΒ; mais on a démontré qu'il est beaucoup plus grand, ce qui est impossible. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς $ΔΕ$, $ΔΖ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρῃ, τὴν μὲν AB τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$. ἔχεται δὲ καὶ βάσιν τὴν $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴσθιν ἴση.

Sint duo triangula $ABΓ$, $ΔEZ$, duo latera AB , $ΑΓ$ duobus lateribus $ΔΕ$, $ΔΖ$ æqualia habentia utrumque utrique, AB quidem ipsi $ΔΕ$, $ΑΓ$ vero ipsi $ΔΖ$; habeat autem et basim $ΒΓ$ basi $ΕΖ$ æqualem; dico et angulum $ΒΑΓ$ angulo $ΕΔΖ$ esse æqualem.



Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ἐπὶ τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν B σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον, τῆς δὲ $ΒΓ$ εὐθείας ἐπὶ τὴν $ΕΖ$, ἑφαρμόσει καὶ τὸ $Γ$ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z , διὰ τὸ ἴσθιν εἶναι τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΕΖ$. ἑφαρμοσάσης δὲ τῆς $ΒΓ$ ἐπὶ τὴν $ΕΖ$, ἑφαρμόσουσι καὶ αἱ BA , $ΓΑ$ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ $ΒΓ$ ἐπὶ βάσιν τὴν $ΕΖ$ ἑφαρμόσει, αἱ δὲ BA , $ΑΓ$ πλευραὶ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$ οὐκ ἑφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ $ΕΗ$, $ΗΖ$, συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, πρὸς

Congruente enim $ABΓ$ triangulo ipsi $ΔΕΖ$ triangulo, etposito quidem B puncto super E punctum, $ΒΓ$ vero rectā super $ΕΖ$, congruet et $Γ$ punctum ipsi Z , quia æqualis est $ΒΓ$ ipsi $ΕΖ$; congruente igitur $ΒΓ$ ipsi $ΕΖ$, congruent et BA , $ΓΑ$ ipsis $ΕΔ$, $ΔΖ$. Si enim basis quidem $ΒΓ$ basi $ΕΖ$ congruat, BA , $ΑΓ$ vero latera ipsis $ΕΔ$, $ΔΖ$ non congruant, sed situm mutant ut $ΕΗ$, $ΗΖ$, constituentur super eādē rectā duabus rectis aliæ duæ rectæ æquales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, cosdem terminos habentes. Non constituuntur

Soient les deux triangles $ABΓ$, $ΔEZ$, ayant les deux côtés AB , $ΑΓ$ égaux aux deux côtés $ΔΕ$, $ΔΖ$, chacun à chacun, le côté AB égal au côté $ΔΕ$, et le côté $ΑΓ$ égal au côté $ΔΖ$; qu'ils aient de plus la base $ΒΓ$ égale à la base $ΕΖ$; je dis que l'angle $ΒΑΓ$ est égal à l'angle $ΕΔΖ$.

Car le triangle $ABΓ$ étant appliqué sur le triangle $ΔEZ$, le point B étant placé sur le point E , et la droite $ΒΓ$ sur la droite $ΕΖ$, le point $Γ$ s'appliquera sur le point Z , parce que $ΒΓ$ est égal à $ΕΖ$; la droite $ΒΓ$ s'appliquant sur la droite $ΕΖ$, les droites BA , $ΓΑ$ s'appliqueront sur les droites $ΕΔ$, $ΔΖ$; car si la base $ΒΓ$ s'appliquant sur la base $ΕΖ$, les côtés BA , $ΑΓ$ ne s'appliquaient pas sur les côtés $ΔΕ$, $ΔΖ$, et prenaient une autre position, comme $ΕΗ$, $ΗΖ$, on pourrait construire sur une même droite, et à deux points différens placés du même côté, deux droites

20 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν. Οὐ συνίστανται δὲ οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. Εφαρμόσουσιν ἄρα ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἕξῃς.

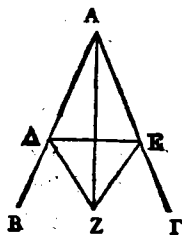
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τιμεῖν.
Εστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τιμεῖν.

quidem. Non igitur, congruente ΒΓ basi ΕΖ basi, non congruent et ΒΑ, ΑΓ latera ipsais ΕΔ, ΔΖ. Congruent igitur; quare et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ congruet, et æqualis ei erit. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.
Sit datus angulus rectilineus ΒΑΓ; oportet igitur ipsum bifariam secare.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημείον τὸ Δ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ πεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω

Sumatur enim in ΑΒ quodlibet punctum Δ, et auferatur ab ΑΓ ipsi ΑΔ æqualis ΑΕ, et jungatur ΔΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatERO ΔΕΖ, et jungatur ΑΖ;

égales à deux autres droites, chacune à chacune, et ayant les mêmes extrémités que ces deux autres; mais elles ne peuvent pas être construites (7); donc la base ΒΓ s'appliquant sur la base ΕΖ, les côtés ΒΑ, ΑΓ ne peuvent pas ne point s'appliquer sur les côtés ΕΔ, ΔΖ; donc ils s'appliqueront les uns sur les autres; donc l'angle ΒΑΓ s'applique sur l'angle ΕΔΖ; donc il lui est égal. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit ΒΑΓ un angle rectiligne donné; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite ΑΒ un point quelconque Δ, retranchons de la droite ΑΓ une droite ΑΕ égale à la droite ΑΔ, joignons ΔΕ, sur la droite ΔΕ, construisons

ἡ AZ · λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ $BAΓ$ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς AZ εὐθείας.

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AD τῇ AE , κοινὴ δὲ ἡ AZ , δύο δὲ αἱ DA , AZ δυσὶ ταῖς EA , AZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ AZ βάσις τῇ EZ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ DAZ γωνία τῇ ὑπὸ EAZ ἴση ἐστίν·.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ $BAΓ$, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς AZ εὐθείας. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τμήν.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB . Διὶ δὲ τὴν AB εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τμήν.

dico $BAΓ$ angulum bifariam secari ab AZ rectâ.

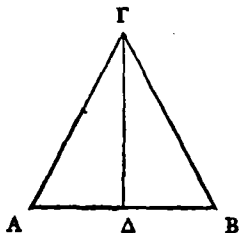
Quoniam enim æqualis est AD ipsi AE , communis autem AZ , duæ DA , AZ duabus EA , AZ æquales sunt, utraque utrique, et basis AZ basi EZ æqualis est; angulus igitur DAZ angulo EAZ æqualis est.

Datus igitur angulus rectilineus $BAΓ$ bifariam secatur ab AZ rectâ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X.

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata AB ; oportet igitur AB rectam terminatam bifariam secare.



Συνιστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $ABΓ$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία δίχα

Constituatur super ipsâ triangulum æquilaterum $ABΓ$, et secetur $ΑΓΒ$ angulus bifariam

le triangle équilatéral $ΔEZ$ (1), et joignons AZ ; je dis que l'angle $BAΓ$ est partagé en deux parties égales par la droite AZ .

Puisque AD est égal à AE , et que la droite AZ est commune, les deux droites DA , AZ seront égales aux deux droites EA , AZ , chacune à chacune; mais la base AZ est égale à la base EZ ; donc l'angle $ΔAZ$ est égal à l'angle EAZ (8).

Donc l'angle rectiligne donné $BAΓ$ est partagé en deux parties égales par la droite AZ ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

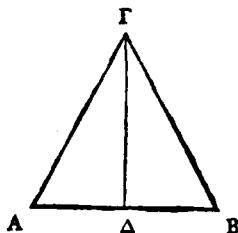
Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit donnée une droite finie AB ; il faut partager la droite finie AB en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral $ABΓ$ (1), et partageons

22 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ AB εὐθεῖα δίχα ab ΓΔ rectā; dico AB rectam bifariam secari in Δ puncto.



Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὲ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστὶν². βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶν³.

Ἡ ἄρα δευτέρα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB δίχα τίτμηται κατὰ τὸ Δ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΓΔ angulo ΒΓΔ æqualis est; basis igitur ΑΔ basi ΒΔ æqualis est.

Ergo data recta terminata AB bifariam secatur in puncto Δ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XI.

Data rectæ, a puncto in eâ dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta AB, datum vero punctum in eâ Γ; oportet igitur a Γ puncto ipsi AB rectæ ad rectos angulos rectam lineam ducere.

L'angle AΓB en deux parties égales par la droite ΓΔ (9); je dis que la droite AB est partagée en deux parties égales au point Δ.

Car puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites ΑΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΒΔ (4).

Donc la droite donnée et finie AB est partagée en deux parties égales au point Δ; ce qu'il fallait faire.

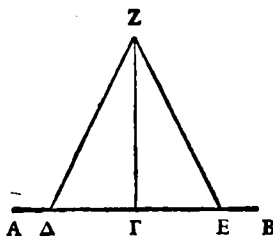
PROPOSITION XI.

A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Soit AB une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite; il faut du point Γ mener à la droite AB une ligne droite à angles droits.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημείου τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνιστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐκτείνωται ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεία γραμμὴ ἥκται ἡ ΖΓ.

Sumatur in ΑΓ quodlibet punctum Δ, et ponatur ipsi ΓΔ æqualis ΓΕ, et constituatur super ΔΕ triangulo æquilatelo ΖΔΕ, et jungatur ΖΓ; dico datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos rectam lineam ductam esse ΖΓ.



Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυοὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσις τῇ ΖΕ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεία γραμμὴ ἥκται ἡ ΖΓ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Quoniam enim æqualis est ΓΔ ipsi ΓΕ, communis vero ΓΖ, duæ sane ΔΓ, ΓΖ duabus ΕΓ, ΓΖ æquales sunt utraque utrique, et basis ΔΖ basi ΖΕ æqualis est; angulus igitur ΔΓΖ angulo ΕΓΖ æqualis est, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angularum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Ergo datæ rectæ ΑΒ a dato in eâ puncto Γ, ad rectos angulos recta linea ducta est ΓΖ. Quod oportebat facere.

Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (3), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ; je dis que la droite ΖΓ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10); donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit.

Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

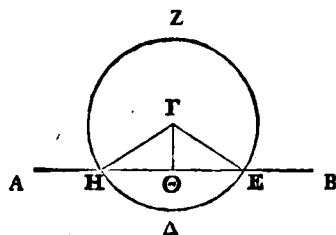
PROPOSITIO XII.

Επὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὲ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta infinita ΑΒ, datum vero punctum Γ, quod non est in eâ; oportet igitur super datam rectam infinitam ΑΒ, a dato puncto Γ, quod non est in eâ, perpendicularem rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα διχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Sumatur enim ad alteram partem ΑΒ rectæ quodlibet punctum Δ, et centro quidem Γ, intervallo autem ΓΔ, circulus describatur ΕΖΗ, et secetur ΕΗ recta bifariam in Θ, et jungantur ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ rectæ; dico super datam rectam infinitam ΑΒ, a dato puncto Γ, quod non est in eâ, perpendicularem ductam esse ΓΘ.

PROPOSITION XII.

A une droite indéfinie et donnée, et d'un point donné qui n'est pas dans cette droite, mener une ligne droite perpendiculaire.

Soit ΑΒ une droite indéfinie et donnée, et Γ un point donné qui n'est pas dans cette droite; il faut à cette droite indéfinie et donnée ΑΒ, mener du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, une ligne droite perpendiculaire.

Prenons de l'autre côté de la droite ΑΒ un point quelconque Δ, et du centre Γ et d'un intervalle ΓΔ, décrivons le cercle ΕΖΗ (dem. 3), partageons la droite ΕΗ en deux parties égales au point Θ (10), et joignons ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ; je dis qu'à la droite indéfinie et donnée ΑΒ, et du point donné Γ qui n'est pas dans cette droite, on a mené une perpendiculaire ΓΘ.

Επει γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΗΘ$ τῇ $ΘΕ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΘΓ$, δύο δὲ αἱ $ΘΗ$, $ΘΓ$ δυσὶ ταῖς $ΕΘ$, $ΘΓ$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ $ΓΗ$ βάσι τῇ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΘΗ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΘΓ$ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἰφιεζῆς. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἰφιεζῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· καὶ ἡ ἰφιστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἢ ἐν ἰφίστηκεν.

Επὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν $ΑΒ$, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ $Γ$, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἤκται ἡ $ΓΘ$. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἥτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ $ΑΒ$ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $ΓΔ$ σταθεῖσα γωνίας ποιεῖτω, τὰς ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$ · λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$ γωνίαι, ἥτοι δύο ὀρθαὶ εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Car puisque la droite $ΗΘ$ est égale à la droite $ΘΕ$, et que la droite $ΘΓ$ est commune, les deux droites $ΘΓ$, $ΘΗ$ sont égales aux deux droites $ΕΘ$, $ΘΓ$, chacune à chacune ; mais la base $ΓΗ$ est égale à la base $ΓΕ$ (déf. 15) ; donc l'angle $ΓΘΗ$ est égal à l'angle $ΕΘΓ$ (8) ; mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit, et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

On a donc mené $ΓΘ$ perpendiculaire à la droite indéfinie $ΑΒ$, du point donné $Γ$ placé hors de cette droite. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits.

Qu'une droite $ΑΒ$ placée sur une droite $ΓΔ$ fasse les angles $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$; je dis que les angles $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$ sont ou deux droits, ou égaux à deux droits.

Quoniam enim æqualis est $ΗΘ$ ipsi $ΘΕ$, communis autem $ΘΓ$, duæ utique $ΘΗ$, $ΘΓ$ duabus $ΕΘ$, $ΘΓ$ æquales sunt, utraque utrique, et basis $ΓΗ$ basi $ΓΕ$ est æqualis ; angulus igitur $ΓΘΗ$ angulo $ΕΘΓ$ est æqualis, et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est ; et insistens recta perpendicularis appellatur in quam insistit.

Super datam igitur rectam infinitam $ΑΒ$ a dato puncto $Γ$ quod non est in eâ, perpendicularis ducta est $ΓΘ$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII.

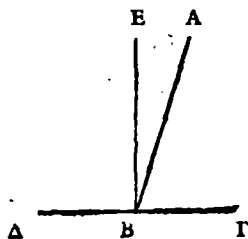
Si recta in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet.

Recta enim quædam $ΑΒ$ in rectam $ΓΔ$ insistens angulos faciat $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$; dico $ΓΒΑ$, $ΑΒΔ$ angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales.

26 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ἦχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ ευθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ,

Si igitur quidem æqualis est $\Gamma B A$ ipsi $A B \Delta$, duo recti sunt. Si vero non, ducatur a B puncto $\Gamma \Delta$ rectæ ad rectos ipsa BE; ergo $\Gamma B E$, $E B \Delta$ duo recti sunt. Et quoniam $\Gamma B E$ duobus $\Gamma B A$, $A B E$ æqualis est, communis addatur $E B \Delta$; ergo $\Gamma B E$, $E B \Delta$ tribus $\Gamma B A$, $A B E$, $E B \Delta$ æquales sunt. Rursus, quoniam $\Delta B A$ duobus $\Delta B E$, $E B A$ æqualis est, communis addatur $A B \Gamma$; ergo



κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσιν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. Εὐὶ ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

$\Delta B A$, $A B \Gamma$ tribus $\Delta B E$, $E B A$, $A B \Gamma$ æquales sunt. Ostensi sunt autem et $\Gamma B E$, $E B \Delta$ tribus eisdem æquales; quæ autem eidem æqualia, et inter se sunt æqualia; ergo et $\Gamma B E$, $E B \Delta$ ipsis $\Delta B A$, $A B \Gamma$ æquales sunt; sed $\Gamma B E$, $E B \Delta$ duo recti sunt; ergo et $\Delta B A$, $A B \Gamma$ duobus rectis æquales sunt. Si igitur, etc.

Car si l'angle $\Gamma B A$ est égal à l'angle $A B \Delta$, ces deux angles sont droits (déf. 10). Si non, du point B conduisons BE à angles droits à $\Gamma \Delta$ (11); les deux angles $\Gamma B E$, $E B \Delta$ seront droits; et puisque l'angle $\Gamma B E$ est égal aux deux angles $\Gamma B A$, $A B E$, si l'on ajoute l'angle commun $E B \Delta$, les angles $\Gamma B E$, $E B \Delta$ seront égaux aux trois angles $\Gamma B A$, $A B E$, $E B \Delta$. De plus, puisque l'angle $\Delta B A$ est égal aux deux angles $\Delta B E$, $E B A$, si l'on ajoute l'angle commun $A B \Gamma$, les angles $\Delta B A$, $A B \Gamma$ seront égaux aux trois angles $\Delta B E$, $E B A$, $A B \Gamma$. Mais on a démontré que les angles $\Gamma B E$, $E B \Delta$ leur sont égaux; et les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles; donc les angles $\Gamma B E$, $E B \Delta$ sont égaux aux angles $\Delta B A$, $A B \Gamma$; mais les angles $\Gamma B E$, $E B \Delta$ sont deux angles droits; donc les angles $\Delta B A$, $A B \Gamma$ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἴσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

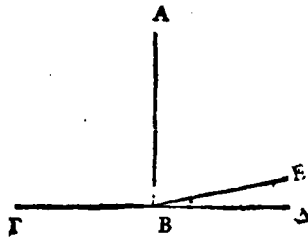
Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ B , δύο εὐθεῖαι αἱ BF , BD , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ABF , ABD δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἴσθι τῇ FB ἢ BD .

Εἰ γὰρ μὴ ἴσθι τῇ BF ἐπ' εὐθείας ἢ BD , ἴστω τῇ FB ἐπ' εὐθείας ἢ BE .

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciant, in directum erunt sibi ipsis rectæ.

Ad aliquam enim rectam AB , et ad punctum in ea B , duæ rectæ BF , BD , non ad easdem partes positæ, deinceps angulos ABF , ABD duobus rectis æquales faciant; dico in directum esse ipsi FB ipsam BD .

Si enim non est ipsi BF in directum BD , sit ipsi FB in directum BE .



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ AB ἐπ' εὐθεῖαν τὴν GBE ἐφίστηκιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ABF , ABE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ABF , ABD

Quoniam igitur recta AB super rectam GBE insistit, ABF , ABE anguli duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ABF , ABD duobus

PROPOSITION XIV.

Si à une droite, et à un point de cette droite, deux droites, non placées du même côté font les angles de suite égaux à deux droits, ces deux droites seront dans la même direction.

Qu'à une droite AB , et à un point B de cette droite, les deux droites BF , BD , non placées du même côté, fassent les angles de suite ABF , ABD égaux à deux droits; je dis que BD est dans la direction de FB .

Car si BD n'est point dans la direction de BF , que BE soit dans la direction de FB (dem. 2).

Puisque la droite AB est placée sur la droite GBE , les angles ABF , ABE sont égaux à deux droits (13); mais les angles ABF , ABD sont égaux à deux droits;

28 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

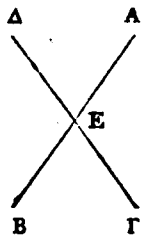
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

rectis æquales; ergo ΓΒΑ, ΑΒΕ ipsis ΓΒΑ, ΑΒΔ æquales sunt. Communis auferatur ΓΒΑ; reliquus igitur ΑΒΕ reliquo ΑΒΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur in directum est ΒΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque esse aliam quamdam præter ΒΔ; in directum igitur est ΓΒ ipsi ΒΔ. Si igitur, etc.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ sese secant, ad verticem angulos æquales inter se facient.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Duæ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ sese secant in E puncto; dico æqualem esse quidem ΑΕΓ angulum ipsi ΔΕΒ, ΓΕΒ vero ipsi ΑΕΔ.

donc les angles ΓΒΑ, ΑΒΕ sont égaux aux angles ΓΒΑ, ΑΒΔ. Retranchons l'angle commun ΓΒΑ, l'angle restant ΑΒΕ sera égal à l'angle restant ΑΒΔ, le plus petit au plus grand; ce qui est impossible. ΒΕ n'est donc pas dans la direction de ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre excepté ΒΔ; donc ΓΒ est dans la direction de ΒΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux.

Que les droites ΑΒ, ΓΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΔΕΒ, et l'angle ΓΕΒ égal à l'angle ΑΕΔ.

Επει γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἰφίστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἰφίστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. Ομοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Παντὸς τριγώνου μιᾷς τῶν πλευρῶν προσεκβλή-
θείσης', ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ
ἀπεναντίον γωνιῶν² μείζων ἐστίν.

Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβλήσθω
αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

Car puisque la droite AE est placée sur la droite ΓΔ, faisant les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ, les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits. De plus, puisque la droite ΔΕ est placée sur la droite ΑΒ, faisant les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ, les angles ΑΕΔ, ΔΕΒ sont égaux à deux droits. Mais on a démontré que les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux à deux droits; donc les angles ΓΕΑ, ΑΕΔ sont égaux aux angles ΑΕΔ, ΔΕΒ. Retranchons l'angle commun ΑΕΔ; l'angle restant ΓΕΑ sera égal à l'angle restant ΒΕΔ. On démontrera semblablement que les angles ΓΕΒ, ΔΕΑ sont égaux. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Soit le triangle ΑΒΓ, prolongeons le côté ΒΓ vers Δ; je dis que l'angle

Quoniam enim recta ΑΕ in rectam ΓΔ in-
sistit angulos faciens ΓΕΑ, ΑΕΔ; ipsi ΓΕΑ,
ΑΕΔ anguli duobus rectis æquales sunt. Rursus,
quoniam recta ΔΕ in rectam ΑΒ insistit,
angulos faciens ΑΕΔ, ΔΕΒ; ipsi ΑΕΔ, ΔΕΒ
anguli duobus rectis æquales sunt. Ostensi sunt
autem et ΓΕΑ, ΑΕΔ duobus rectis æquales;
ergo ΓΕΑ, ΑΕΔ ipsis ΑΕΔ, ΔΕΒ æquales sunt.
Communis auferatur ΑΕΔ, reliquus igitur ΓΕΑ
reliquo ΒΕΔ æqualis est. Similiter autem os-
tendemus et ΓΕΒ, ΔΕΑ esse æquales. Si
igitur duo, etc.

PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli uno laterum producto, exte-
rior angulus utroque interiorum et oppositorum
angulorum major est.

Sit triangulum ΑΒΓ, et producaturs ipsius
unum latus ΒΓ ad Δ; dico exteriorem angulum

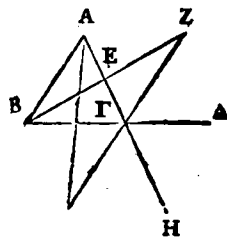
30 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίων, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ διχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζυγθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκτελλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η,

ΑΓΔ majorem esse utroque interiorum et oppositorum ΓΒΑ, ΒΑΓ angulorum.

Secetur ΑΓ bifariam in Ε, et juncta ΒΕ producat in directum ad Ζ, et ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, et jungatur ΖΓ, et producat ΑΓ ad Η.



Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσεις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἱ εἰσὶ πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. Μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ.

Quoniam igitur æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΓ, ΒΕ vero ipsi ΕΖ, duæ ΑΕ, ΕΒ duabus ΓΕ, ΕΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΑΕΒ angulo ΖΕΓ æqualis est, ad verticem enim est; basis igitur ΑΒ basi ΖΓ æqualis est, et ΑΒΕ triangulum ΖΕΓ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales sunt, uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΒΑΕ ipsi ΕΓΖ. Major autem est ΕΓΔ ipso ΕΓΖ; major est

extérieur ΑΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Partageons la droite ΑΓ en deux parties égales en Ε (10); et ayant joint la droite ΒΕ, prolongeons-la vers Ζ, faisons ΕΖ égal à ΒΕ (3), joignons la droite ΖΓ, et prolongeons ΑΓ vers Η.

Puisque ΑΕ est égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΖ, les deux droites ΑΕ, ΕΒ sont égales aux deux droites ΓΕ, ΕΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΕΒ est égal à l'angle ΖΕΓ (15), puisqu'ils sont au sommet; donc la base ΑΒ est égale à la base ΖΓ (4); le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΖΕΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΕΓΖ (not. 9); mais l'angle ΕΓΔ est plus grand que l'angle ΕΓΖ; donc l'angle ΑΓΔ est plus grand

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ομοίως δὲ, τῆς ΒΓ τειτμημένης δίχα, διχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτίστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἰζῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἑλάσσονες εἰσὶ, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

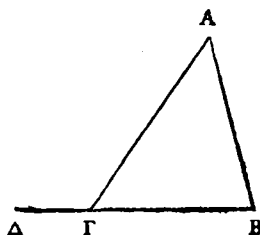
Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δείξω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἑλάσσονες εἰσὶ, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

igitur ΑΓΔ ipso ΒΑΕ. Similiter autem, ΒΓ sectâ bifariam, ostendetur et ΒΓΗ, hoc est ΑΓΔ, major et ipso ΑΒΓ. Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, omnifariam sumpti.

Sit triangulus ΑΒΓ; dico ΑΒΓ trianguli duos angulos duobus rectis minores esse, omnifariam sumptos.



Εκτελέσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίας, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονες

Producatur enim ΒΓ ad Δ.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ exterior est angulus ΑΓΔ, major est interiore et opposito ΑΒΓ. Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ ipsis ΑΒΓ, ΒΓΑ majores sunt. Sed ΑΓΔ, ΑΓΒ duobus

que l'angle ΒΑΕ. Si on partage le côté ΒΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle ΒΓΗ, c'est-à-dire ΑΓΔ, est plus grand que l'angle ΑΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; je dis que deux angles du triangle ΑΒΓ, de quelque manière qu'ils soient pris, sont moindres que deux droits.

Prolongeons ΒΓ vers Δ (dcm. 2).

Puisque l'angle ΑΓΔ du triangle ΑΒΓ est extérieur, il est plus grand que l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ (16). Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ, les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront

32 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι
είσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες
είσιν. Ομοίως δὲ δειξόμεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,
ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ
ΓΑΒ, ΑΒΓ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

rectis æquales sunt; ergo ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus
rectis minores sunt. Similiter autem osten-
demus et ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis minores
esse, et adhuc ipsos ΓΑΒ, ΑΒΓ. Omnis
igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

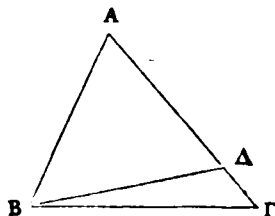
Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μεί-
ζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω γάρ τριγώνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν
ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

PROPOSITION XVIII.

Omnis trianguli majus latus majorem an-
gulum subtendit.

Sit enim triangulum ΑΒΓ, majus habens ΑΓ
latus ipso ΑΒ; dico et angulum ΑΒΓ majorem
esse ipso ΒΓΑ.



Ἐπεὶ γάρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω
τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία
ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεν-
αντίας, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ

Quoniam enim major est ΑΓ ipsā ΑΒ, po-
natur ipsi ΑΒ æqualis ΑΔ, et jungatur ΒΔ.

Et quoniam trianguli ΒΓΔ exterior est an-
gulus ΑΔΒ, major est interiore et opposito ΑΓΒ.
Æqualis autem ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ, quia et latus ΑΒ

plus grands que les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux
droits (13); donc les angles ΑΒΓ, ΒΓΑ sont moindres que deux droits. Nous démon-
trerons semblablement que les angles ΒΑΓ, ΑΓΒ, et les angles ΓΑΒ, ΑΒΓ sont moindres
que deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle.

Soit le triangle ΑΒΓ, ayant le côté ΑΓ plus grand que le côté ΑΒ; je dis que
l'angle ΑΒΓ est plus grand que l'angle ΒΓΑ.

Puisque ΑΓ est plus grand que ΑΒ, faisons ΑΔ égal à ΑΒ (3), et joignons ΒΔ.

Puisque ΑΔΒ est un angle extérieur du triangle ΒΔΓ, cet angle est plus grand que
l'angle intérieur et opposé ΔΓΒ (16); mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5), parce

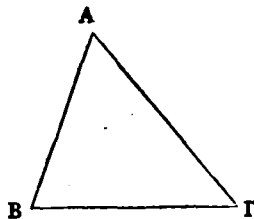
LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 33

ὕπὸ $AB\Delta$, ἵπτι καὶ πλευρὰ ἡ AB τῇ AD ἴσιν
 ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ τῆς ὑπὸ AGB ·
 πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ AGB .
 Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ
 μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ
 $AB\Gamma$ γωνίαν τῆς ὑπὸ BGA · λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ
 ἡ AG πλευρᾶς τῆς AB μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ AB , ἡ
 ἐλάσσων· ἴση μινούν οὐκ ἐστὶν ἡ AG τῇ AB · ἴση
 γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ AGB ·
 οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ AB .
 Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ AG τῇ AB · ἐλάσσων
 γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῆς ὑπὸ AGB .

ipsi AD est æquale; major igitur et $AB\Delta$ ipso
 AGB ; multo igitur $AB\Gamma$ major est ipso AGB .
 Omnis igitur trianguli, etc.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli majorem angulum majus
 latus subtendit.

Sit triangulum $AB\Gamma$, majorem habens $AB\Gamma$
 angulum ipso BGA ; dico et latus AG latere
 AB majus esse.

Si enim non; vel æqualis est AG ipsi AB , vel
 minor; æqualis quidem non est AG ipsi AB ,
 æqualis enim esset et angulus $AB\Gamma$ ipsi AGB .
 Non est autem; non igitur æqualis est AG ipsi
 AB . Neque tamen minor est AG ipsâ AB ; minor
 enim esset et angulus $AB\Gamma$ ipso AGB ; non est

que le côté AB est égal au côté AD ; donc l'angle $AB\Delta$ est plus grand que l'angle AGB ;
 donc l'angle $AB\Gamma$ est beaucoup plus grand que l'angle AGB . Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Dans tout triangle, un plus grand côté soutend un plus grand angle.

Soit le triangle $AB\Gamma$, ayant l'angle $AB\Gamma$ plus grand que l'angle BGA ; je dis que
 le côté AG est plus grand que le côté AB .

Car si cela n'est point, AG est égal à AB , ou plus petit. Mais AG n'est pas
 égal à AB , car alors l'angle $AB\Gamma$ serait égal à l'angle AGB (5); mais il ne l'est pas;
 donc AG n'est pas égal à AB . Le côté AG n'est pas plus petit que le côté AB , car
 alors l'angle $AB\Gamma$ serait plus petit que l'angle AGB (18); mais il ne l'est pas; donc le

34 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οὐκ ἔστι δὲ οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.
Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶ· μείζων ἄρα ἐστὶν
ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἰζήσ.

autem ; non igitur minor est ΑΓ ipsā ΑΒ. Os-
tensum est autem neque æqualem esse ; major
igitur est ΑΓ ipsā ΑΒ. Omnis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

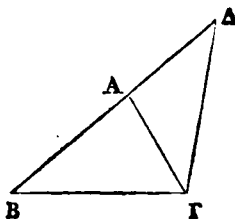
Παντὲς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς
μειζόνες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται.

Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ
τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζόνες
εἰσι, πάντῃ μεταλαμβάνονται, αἱ μὲν ΒΑ,
ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ,
ΓΑ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora
sunt, omnifariam sumpta.

Sit enim tringulum ΑΒΓ ; dico ΑΒΓ trian-
guli duo latera reliquo majora esse, omni-
fariam sumpta ; ipsa quidem ΒΑ , ΑΓ ipso ΒΓ,
ipsa vero ΑΒ , ΒΓ ipso ΑΓ , et ipsa ΒΓ , ΓΑ
ipso ΑΒ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημειῶν, καὶ
κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ

Producatur enim ΒΑ ad Δ punctum, et po-
natur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΔΑ ipsi ΑΓ,
æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ, major

côté ΑΓ n'est pas plus petit que le côté ΑΒ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas
égal ; donc ΑΓ est plus grand que ΑΒ. Donc , etc.

PROPOSITION XX.

Deux côtés d'un triangle quelconque , de quelque manière qu'ils soient pris ,
sont plus grands que le côté restant.

Soit le triangle ΑΒΓ ; je dis que deux côtés du triangle ΑΒΓ , de quelque
manière qu'ils soient pris , sont plus grands que le côté restant ; les côtés ΒΑ , ΑΓ
plus grands que ΒΓ ; les côtés ΑΒ , ΒΓ plus grands que ΑΓ , et les côtés ΒΓ , ΓΑ plus
grands que ΑΒ.

Prolongeons ΒΑ vers Δ , faisons ΑΔ égal à ΓΑ , et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΑΓ , l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5) ; donc l'angle ΒΓΔ

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 35

ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἵπαι τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἢ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἴση δὲ ἢ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονες εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Εάν τριγώνου ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν εἰσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνιστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

utique est $\angle BGD$ ipso $\angle ADG$; et quoniam triangulum est $\triangle GVB$, majorem habens $\angle BGD$ angulum ipso $\angle BGD$, majorem autem angulum majus latus subtendit; AB igitur ipsa BG est major; æqualis autem DA ipsi AG ; majores igitur BA , AG ipsa BG . Similiter autem ostendemus et ipsas quidem AB , BG ipsa GA majores esse; ipsas vero BG , GA ipsa AB . Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XXI.

Si trianguli super uno laterum a terminis duæ rectæ intus constituentur, constructæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABG super uno laterum BG , a terminis B , G , duæ rectæ intus constituentur BD , DG ; dico BD , DG latera reliquis trianguli duobus lateribus BA , AG minora quidem esse, majorem vero angulum continere, ipsum $\angle BGD$ ipso $\angle BAG$.

est plus grand que l'angle $\angle ADG$ (not. 9); donc, puisque dans le triangle $\triangle GVB$, l'angle $\angle BGD$ est plus grand que l'angle $\angle BGD$, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté AB est plus grand que le côté BG ; mais DA est égal à AG ; donc les côtés BA , AG sont plus grands que BG . Nous démontrerons semblablement que les côtés AB , BG sont plus grands que GA , et les côtés BG , GA plus grands que AB . Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si des extrémités d'un des côtés d'un triangle, on construit intérieurement deux droites, ces deux droites seront plus petites que les deux côtés restants du triangle, mais elles comprendront un plus grand angle.

Des extrémités B , G du côté BG du triangle ABG , construisons intérieurement les deux droites BD , DG ; je dis que les droites BD , DG sont plus petites que les deux côtés restants BA , AG , et qu'elles comprennent un angle $\angle BGD$ plus grand que l'angle $\angle BAG$.

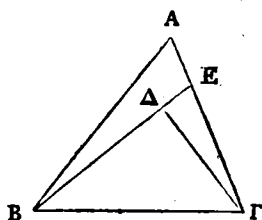
36 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονες εἰσι· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονες εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῶν ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονες εἰσι.

Producatur enim ΒΔ ad Ε.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ΑΒΕ trianguli duo latera ΑΒ, ΑΕ ipso ΒΕ majora sunt. Communis addatur ΕΓ; ergo ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΕ, ΕΓ majores sunt. Rursus, quoniam ΓΕΔ trianguli duo latera ΓΕ, ΕΔ ipso ΓΔ majora sunt; communis addatur ΔΒ; ergo ΓΕ, ΕΒ ipsis ΓΔ, ΔΒ majores sunt. Sed ipsis ΒΕ, ΕΓ majores ostensæ sunt ΒΑ, ΑΓ; multo igitur ΒΑ, ΑΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ majores sunt.



Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων εἰδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῶν ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Εὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Rursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito major est, ΓΔΕ trianguli exterior angulus ΒΔΓ major est ipso ΓΕΔ. Propter eadem utique et ΑΒΕ trianguli exterior angulus ΓΕΒ major est ipso ΒΑΓ. Sed ipso ΓΕΒ major ostensus est ΒΔΓ; multo igitur ΒΔΓ major est ipso ΒΑΓ. Si igitur, etc.

Prolongeons ΒΔ vers Ε.

Puisque deux côtés d'un triangle quelconque sont plus grands que le côté restant (20), les deux côtés ΑΒ, ΑΕ du triangle ΑΒΕ sont plus grands que le côté ΒΕ; donc si nous ajoutons la droite commune ΒΓ, les droites ΒΑ, ΑΓ seront plus grandes que ΒΕ, ΕΓ. De plus, puisque les deux côtés ΓΕ, ΕΔ du triangle ΓΕΔ sont plus grands que ΓΔ, si nous ajoutons la droite commune ΔΒ, les droites ΓΕ, ΕΒ seront plus grandes que ΓΔ, ΔΒ; mais on a démontré que les droites ΒΑ, ΑΓ sont plus grandes que ΒΕ, ΕΓ; donc les droites ΒΑ, ΑΓ sont beaucoup plus grandes que ΒΔ, ΔΓ.

De plus, puisqu'un angle extérieur d'un triangle quelconque est plus grand qu'un des angles intérieurs et opposés (16), l'angle ΒΔΓ, qui est un angle extérieur du triangle ΔΕΓ, est plus grand que l'angle ΓΕΔ. Par la même raison l'angle ΓΕΒ, qui est un angle extérieur du triangle ΑΒΕ, est plus grand que l'angle ΒΑΓ; mais il a été démontré que l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΓΕΒ; donc l'angle ΒΔΓ est beaucoup plus grand que l'angle ΒΑΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

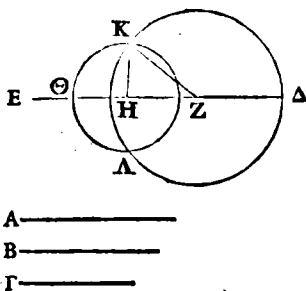
PROPOSITIO XXII.

Εκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ ἢ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντα μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου, τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντα μεταλαμβανομένας.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἕστωσαν, πάντα μεταλαμβανομένας, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὲ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliquâ majores esse, omnifariam sumptas, quia et omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, omnifariam sumpta.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ, quarum duæ reliquâ majores sint, omnifariam sumptæ, ipsæ quidem Α, Β ipsâ Γ, ipsæ vero Α, Γ ipsâ Β, et denique ipsæ Β, Γ ipsâ Α; oportet igitur ex rectis æqualibus ipsis Α, Β, Γ triangulum constituere.



Εκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἀπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση

Exponatur aliqua recta ΔΕ, terminata quidem ad Δ, infinita vero ad Ε; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΖ, ipsi vero Β æqualis ΖΗ, et ipsi Γ

PROPOSITION XXII.

Avec trois droites qui sont égales à trois droites données, construire un triangle: il faut que deux de ces trois droites, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grande que la troisième; parce que deux côtés d'un triangle, de quelque manière qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

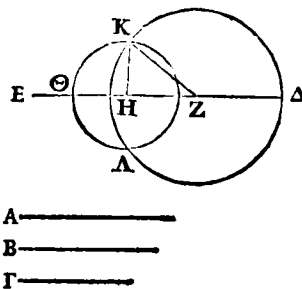
Soient données les trois droites Α, Β, Γ, dont deux, de quelque manière qu'elles soient prises, soient plus grandes que la troisième; les droites Α, Β plus grandes que Γ; les droites Α, Γ plus grandes que Β, et enfin les droites Β, Γ plus grandes que Α; il faut, avec trois droites égales aux droites Α, Β, Γ, construire un triangle.

Soit la droite ΔΕ, terminée en Δ, et indéfinie en Ε; faisons la droite ΔΖ égale à la droite Α (prop. 3), la droite ΖΗ égale à la droite Β, et la droite ΗΘ égale à

38 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ $H\Theta$ · καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ τῷ $Z\Delta$, κύκλος γεγράφθω ὁ $\Delta K\Lambda$ · καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ τῷ $H\Theta$, κύκλος γεγράφθω ὁ $K\Lambda\Theta$, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ KZ , KH · λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς A , B , Γ , τρίγωνον συνίσταται τὸ KZH .

α qualis $H\Theta$; et centro quidem Z , intervallo vero $Z\Delta$, circulus describatur $\Delta K\Lambda$; et rursus, centro quidem H , intervallo vero $H\Theta$, circulus describatur $K\Lambda\Theta$, et jungantur KZ , KH ; dico ex tribus rectis, æqualibus ipsis A , B , Γ , triangulum constitutum esse KZH .



Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Delta K\Lambda$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $Z\Delta$ τῇ ZK · ἀλλὰ ἡ $Z\Delta$ τῇ A ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ A ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $K\Lambda\Theta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ HK · ἀλλὰ ἡ $H\Theta$ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KH ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ZH τῇ B ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ KZ , ZH , HK , τρισὶ ταῖς A , B , Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν KZ , ZH , HK , αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς A , B , Γ , τρίγωνον συνίσταται τὸ KZH . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam igitur Z punctum centrum est $\Delta K\Lambda$ circuli, æqualis est $Z\Delta$ ipsi ZK ; sed $Z\Delta$ ipsi A est æqualis ; et KZ igitur ipsi A est æqualis. Rursus, quoniam H punctum centrum est $K\Lambda\Theta$ circuli, æqualis est $H\Theta$ ipsi HK ; sed $H\Theta$ ipsi Γ est æqualis ; et KH igitur ipsi Γ est æqualis. Est autem et ZH ipsi B æqualis ; tres igitur rectæ KZ , ZH , HK tribus A , B , Γ æquales sunt.

Ex tribus igitur rectis KZ , ZH , HK , quæ sunt æquales datis rectis A , B , Γ , triangulum constitutum est KZH . Quod oportebat facere.

la droite Γ ; du centre Z et de l'intervalle $Z\Delta$ décrivons le cercle $\Delta K\Lambda$ (dem. 3) ; et de plus du centre H et de l'intervalle $H\Theta$ décrivons le cercle $K\Lambda\Theta$, et joignons KZ , KH ; je dis que le triangle KZH est construit avec trois droites égales aux droites A , B , Γ .

Car puisque le point Z est le centre du cercle $\Delta K\Lambda$, $Z\Delta$ est égal à ZK (déf. 15) ; mais $Z\Delta$ est égal à A ; donc KZ égal à A . De plus, puisque le point H est le centre du cercle $K\Lambda\Theta$, $H\Theta$ est égal à HK ; mais $H\Theta$ est égal à Γ ; donc KH est égal à Γ . Mais ZH est égal à B ; donc les trois droites KZ , ZH , HK sont égales aux trois droites A , B , Γ .

Donc le triangle KZH a été construit avec trois droites KZ , ZH , HK , qui sont égales aux trois droites données A , B , Γ . Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

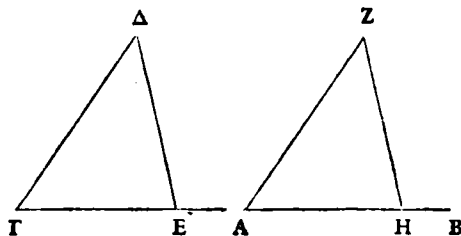
PROPOSITIO XXIII.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσῃ γωνίαν εὐθυγράμμῳ συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθυγράμμος ἡ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ · δεῖ δὲ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$ ἴσῃ γωνίαν εὐθυγράμμῳ συστήσασθαι.

Ad datam rectam, et ad punctum in eâ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit quidem data recta AB , in eâ vero punctum A , et datus angulus rectilineus $\Delta ΓΕ$; oportet igitur ad datam rectam AB , et ad punctum in eâ A , dato angulo rectilineo $\Delta ΓΕ$ æqualem angulum rectilineum constituere.



Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν $ΓΔ$, $ΓΕ$ τυχόντα σημεία τὰ Δ , E , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $\Delta Ε$ · καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς $ΓΔ$, $\Delta Ε$, $ΓΕ$, τρίγωνον συνστήσω τὸ AZH , ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν $ΓΔ$ τῇ AZ , τὴν δὲ $ΓΕ$ τῇ AH , καὶ ἔτι τὴν $\Delta Ε$ τῇ ZH .

Sumantur in utrâque ipsarum $ΓΔ$, $ΓΕ$ quælibet puncta Δ , E , et jungatur $\Delta Ε$; et ex tribus rectis, quæ sunt æquales tribus $ΓΔ$, $\Delta Ε$, $ΓΕ$, triangulum constituatur AZH , ita ut æqualis sit $ΓΔ$ quidem ipsi AZ , ipsa vero $ΓΕ$ ipsi AH , et denique $\Delta Ε$ ipsi ZH .

PROPOSITION XXIII.

A une droite donnée, et à un point de cette droite, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soient donnés la droite AB , et un point A dans cette droite; que $\Delta ΓΕ$ soit l'angle rectiligne donné; il faut à la droite donnée AB et au point A de cette droite, construire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné $\Delta ΓΕ$.

Soient pris, dans l'une et l'autre des droites $ΓΔ$, $ΓΕ$, deux points quelconques Δ , E , joignons $\Delta Ε$, et avec trois droites égales aux droites $ΓΔ$, $\Delta Ε$, $ΓΕ$, construisons le triangle AZH (22), de manière que $ΓΔ$ soit égal à AZ , $ΓΕ$ égal à AH , et $\Delta Ε$ égal à ZH .

40 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει οὖν ἡ δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυοὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΔΕ ἴσας τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἴσιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν ἴσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξῃ.

Εστώ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ ἡ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἴσιν.

Puisque les deux droites ΔΓ, ΓΕ sont égales aux deux droites ΖΑ, ΑΗ, chacune à chacune, et que la base ΔΕ est égale à la base ΖΗ, l'angle ΔΓΕ sera égal à l'angle ΖΑΗ (8).

Donc à la droite ΑΒ, et au point Α de cette droite, on a construit l'angle rectiligne ΖΑΗ égal à l'angle rectiligne ΔΓΕ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXIV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux côtés ΑΒ, ΑΓ égaux aux deux côtés ΔΕ, ΔΖ, chacun à chacun, le côté ΑΒ égal au côté ΔΕ, et le côté ΑΓ égal au côté ΔΖ; que l'angle ΒΑΓ soit plus grand que l'angle ΕΔΖ; je dis que la base ΒΓ est plus grande que la base ΕΖ.

Quoniam igitur duæ ΔΓ, ΓΕ duabus ΖΑ, ΑΗ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΔΕ basi ΖΗ æqualis, angulus utique ΔΓΕ angulo ΖΑΗ est æqualis.

Ad datam igitur rectam ΑΒ, et ad punctum in eâ Α, dato angulo rectilinetico ΔΓΕ, æqualis angulus rectilineus constitutus est ΖΑΗ. Quod oportebat facere.

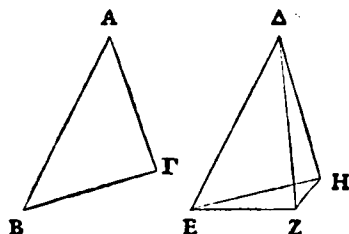
PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo majorem habeant, qui ab æqualibus lateribus continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia habentia, utrumque utrique, ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ vero ipsi ΔΖ, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΖ major sit; dico et basim ΒΓ basi ΕΖ majorem esse.

Επει γὰρ μείζων ἴσιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνιστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ³ σημείω τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ⁴· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Quoniam enim major est ΒΑΓ angulus ΕΔΖ angulo, constituatur ad ΔΕ rectam, et ad punctum in eâ Δ, ipsi ΒΑΓ angulo æqualis ΕΔΗ; et ponatur alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΖ æqualis ΔΗ, et jungantur ΕΗ, ΖΗ.



Επει οὖν ἴση ἴσιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυοὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἴσιν⁴· βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἴσιν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἴσιν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἴσιν καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ, τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῶν ἄρα μείζων ἴσιν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνεται· μείζων ἄρα καὶ⁶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur æqualis est ΑΒ quidem ipsi ΔΕ, ΑΓ ipsa vero ipsi ΔΗ, duæ utique ΒΑ, ΑΓ duabus ΕΔ, ΔΗ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΒΑΓ angulo ΕΔΗ æqualis est; basis igitur ΒΓ basi ΕΗ est æqualis. Rursus, quoniam æqualis est ΔΖ ipsi ΔΗ, æqualis est et ΔΖΗ angulus ipsi ΔΗΖ; major igitur ΔΖΗ ipso ΕΗΖ; multo igitur major est ΕΖΗ ipso ΕΗΖ. Et quoniam triangulum est ΕΖΗ, majorem habens ΕΖΗ angulum ipso ΕΗΖ; majorem autem angulum majus latus subtendit; majus igitur et latus ΕΗ ipso ΕΖ. Æquale autem ΕΗ ipsi ΒΓ; majus igitur et ΒΓ ipso ΕΖ. Si igitur duo, etc.

Car puisque l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ, construisons sur la droite ΔΕ, et au point Δ de cette droite, un angle ΕΔΗ égal à l'angle ΒΑΓ (23); faisons la droite ΔΗ égale à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΖ (3), et joignons ΕΗ, ΖΗ.

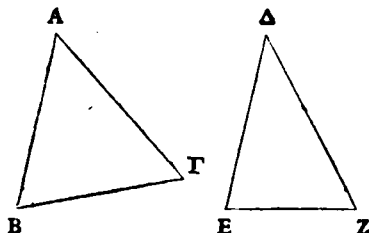
Puisque ΑΒ est égal à ΔΕ, et ΑΓ à ΔΗ, les deux droites ΒΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΕΔ, ΔΗ, chacune à chacune; mais l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΕΔΗ; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΗ (4). De plus, puisque ΔΖ est égal à ΔΗ, l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΗΖ (5); donc l'angle ΔΖΗ est plus grand que l'angle ΕΗΖ; donc l'angle ΕΖΗ est beaucoup plus grand que l'angle ΕΗΖ; et puisque ΕΖΗ est un triangle, ayant l'angle ΕΖΗ plus grand que l'angle ΕΗΖ, et qu'un plus grand côté soutend un plus grand angle (19), le côté ΕΗ est plus grand que le côté ΕΖ; mais ΕΗ est égal à ΒΓ; donc le côté ΒΓ est plus grand que le côté ΕΖ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'..

PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς ταῖς' ὁσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ' βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἢ χῆ'· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς δύο πλευράς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς ὁσὶ πλευραῖς ταῖς $ΔE$, $ΔZ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ $ΔE$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔZ$. Βάσις δὲ ἡ $BΓ$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BAΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $EΔZ$ μείζων ἔστί.



Εἰ γὰρ μὴ, ἥτοι ἴση ἔστιν αὐτῇ, ἢ ἐλάττω· ἴση μὲν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ $BAΓ$ τῇ ὑπὸ $EΔZ$, ἴση γὰρ ἂν ἦν· καὶ ἡ βάσις ἡ $BΓ$ βάσει τῇ EZ · οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἴση ἔστι γωνία ἡ ὑπὸ

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique, basim autem basi majorem habeant; et angulum angulo majorem habebunt, qui ab æqualibus rectis continetur.

Sint duo triangula $ABΓ$, $ΔEZ$, duo latera AB , $ΑΓ$ duobus lateribus $ΔE$, $ΔZ$ æqualia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi $ΔE$, $ΑΓ$ vero ipsi $ΔZ$, basis autem $BΓ$ basi EZ major sit; dico et angulum $BAΓ$ angulo $EΔZ$ majorem esse.

Si enim non, vel æqualis est ei, vel minor; æqualis autem non est $BAΓ$ ipsi $EΔZ$, æqualis enim esset et basis $BΓ$ basi EZ ; non est autem; non igitur æqualis est angulus $BAΓ$ ipsi $EΔZ$.

PROPOSITION XXV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et la base de l'un plus grande que la base de l'autre, ils auront les angles compris entre les côtés égaux plus grands l'un que l'autre.

Soient deux triangles $ABΓ$, $ΔEZ$, ayant les deux côtés AB , $ΑΓ$ égaux aux deux côtés $ΔE$, $ΔZ$, chacun à chacun, le côté AB égal au côté $ΔE$, et le côté $ΑΓ$ égal au côté $ΔZ$; que la base $BΓ$ soit plus grande que la base EZ ; je dis que l'angle $BAΓ$ est plus grand que l'angle $EΔZ$.

Car si cela n'est point, il lui est égal, ou il est plus petit; mais l'angle $BAΓ$ n'est pas égal à l'angle $EΔZ$, car alors la base $BΓ$ seroit égale à la base EZ (4); mais elle ne l'est point; donc l'angle $BAΓ$ n'est pas égal à l'angle $EΔZ$. Mais l'angle $BAΓ$

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 43

ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Οὐδὲ μὲν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ ⁷, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν ⁸ καὶ βάσις ἢ ΒΓ βάσιως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ⁹ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Εὖν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὖν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς ¹ δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἥτοι ² τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Εστω ³ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἔχεται δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις

Neque tamen minor est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ, minor enim esset et basis ΒΓ basi ΕΖ; non est autem; non igitur minor est ΒΑΓ angulus ipso ΕΔΖ. Ostensum est autem neque æqualem esse; major igitur est ΒΑΓ ipso ΕΔΖ. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, utrumque utriusque, et unum latus uni lateri æquale, vel quod est ad æquales angulos, vel quod subtendit unum æqualium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utriusque, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus ΔΕΖ, ΕΖΔ æquales habentia, utrumque utriusque, ΑΒΓ quidem ipsi ΔΕΖ, ΒΓΑ vero ipsi ΕΖΔ, habeant autem et unum latus uni lateri æquale; primum, quod est ad æquales angulos, ipsum ΒΓ ipsi ΕΖ; dico et reliqua latera

n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ, car alors la base ΒΓ serait plus petite que la base ΕΖ (24); mais elle ne l'est point; donc l'angle ΒΑΓ n'est pas plus petit que l'angle ΕΔΖ. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc l'angle ΒΑΓ est plus grand que l'angle ΕΔΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVI.

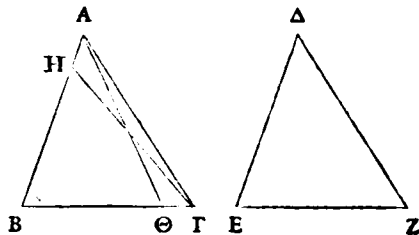
Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, ou celui qui est adjacent aux angles égaux, ou celui qui est opposé à un des angles égaux, ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΔΕΖ, ΕΖΔ, chacun à chacun, l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΕΖΔ; que ces deux triangles aient aussi un côté égal à un côté, et d'abord celui qui est adjacent aux angles égaux, le côté ΒΓ égal au

44 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνίαις τὴν BF τῇ EZ . λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ ΔE , τὴν δὲ AF τῇ ΔZ , καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ $\text{E}\Delta\text{Z}$.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν*. Ἐστω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω τῇ ΔE ἴση ἡ BH , καὶ ἐπιξυύχθω ἡ HG .



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BH τῇ ΔE , ἡ δὲ BF τῇ EZ , δύο δὴ αἱ BH , BF δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ HBF γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴση ἐστὶ* βάσις ἄρα ἡ HG βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ HBF τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ⁵, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται⁶, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν* ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ HGB γωνία τῇ ὑπὸ ΔZE . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔZE τῇ ὑπὸ BGA ὑπόκειται ἴση* καὶ ἡ ὑπὸ BGH ἄρα τῇ ὑπὸ BGA

reliquis lateribus æqualia habitura esse, utrumque utrique, AB quidem ipsi ΔE , AF vero ipsi ΔZ , et reliquum angulum reliquo angulo, BAG ipsi $\text{E}\Delta\text{Z}$.

Si enim inæqualis est AB ipsi ΔE , una earum major est. Sit major AB , et ponatur ipsi ΔE æqualis BH , et jungatur HG .

Quoniam igitur æqualis est BH quidem ipsi ΔE , BF vero ipsi EZ , duæ utique BH , BF duabus ΔE , EZ æquales sunt, utraque utrique, et angulus HBF angulo ΔEZ æqualis est; basis igitur HG basi ΔZ æqualis est, et HBF triangulum ΔEZ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur HGB angulus ipsi ΔZE . Sed ΔZE ipsi BGA ponitur æqualis; igitur et BGH ipsi BGA æqualis est,

côté EZ ; je dis qu'ils auront les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔE , le côté AF égal au côté ΔZ , et l'angle restant égal à l'angle restant, l'angle BAG égal à l'angle $\text{E}\Delta\text{Z}$.

Car si le côté AB n'est pas égal au côté ΔE , l'un d'eux est plus grand que l'autre. Soit AB le plus grand; faisons BH égal à ΔE (3), et joignons HG .

Puisque BH est égal à ΔE , et BF égal à EZ , les deux côtés BH , BF sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais l'angle HBF est égal à l'angle ΔEZ ; donc la base HG est égale à la base ΔZ (4); le triangle HBF est égal au triangle ΔEZ , et les angles restants, soutenus par les côtés égaux, seront égaux aux angles restants; donc l'angle HGB est égal à l'angle ΔZE ; mais l'angle ΔZE est supposé

ἴση ἐστίν, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔE . ἴση ἄρα. Ἐστί δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ ἴση, δύο δὲ αἱ AB , $B\Gamma$ δυοὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση· ὥστε ἄρα ἡ $A\Gamma$ βάσις τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὲ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὥς ἡ AB τῇ ΔE . λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν $A\Gamma$ τῇ ΔZ , ἡ δὲ $B\Gamma$ τῇ EZ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ $B\Gamma$ τῆς EZ , καὶ κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ $B\Theta$, καὶ ἐπέεχθω ἡ $\Delta\Theta$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $B\Theta$ τῇ EZ , ἡ δὲ AB τῇ ΔE , δύο δὲ αἱ AB , $B\Theta$ δυοὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ $A\Theta$ βάσις τῇ ΔZ ἴση

minor majori, quod impossibile. Non igitur inæqualis est AB ipsi ΔE ; æqualis igitur est. Est autem et $B\Gamma$ ipsi EZ æqualis, duæ utique AB , $B\Gamma$ duabus ΔE , EZ æquales sunt, utraque utrique, et angulus $AB\Gamma$ angulo ΔEZ est æqualis; basis igitur $A\Gamma$ basi ΔZ æqualis est, et reliquus angulus BAG reliquo angulo $E\Delta Z$ æqualis est.

Sed et rursus, sint ipsa æquales angulos latera subtendentia æqualia, ut AB ipsi ΔE ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus æqualia futura esse, $A\Gamma$ quidem ipsi ΔZ , $B\Gamma$ vero ipsi EZ , et adhuc reliquum angulum BAG reliquo angulo $E\Delta Z$ æqualem esse.

Si enim inæqualis est $B\Gamma$ ipsi EZ , una earum major est. Sit major, si possibile est, $B\Gamma$ ipsâ EZ , et ponatur ipsi EZ æqualis $B\Theta$, et jungatur $\Delta\Theta$.

Et quoniam æqualis est $B\Theta$ quidem ipsi EZ , AB vero ipsi ΔE , duæ utique AB , $B\Theta$ duabus ΔE , EZ æquales sunt, utraque utrique, et angulos æquales continent; basis igitur $A\Theta$ basi ΔZ

égal à l'angle $B\Gamma A$; donc l'angle $B\Gamma H$ est égal à l'angle $B\Gamma A$, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les côtés AB , ΔE ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais $B\Gamma$ est égal à EZ ; donc les deux côtés AB , $B\Gamma$ sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais l'angle $AB\Gamma$ est égal à l'angle ΔEZ ; donc la base $A\Gamma$ est égale à la base ΔZ (4), et l'angle restant BAG est égal à l'angle restant $E\Delta Z$.

Mais de plus, que les côtés opposés aux angles égaux soient égaux, le côté AB égal au côté ΔE ; je dis que les côtés restants seront égaux aux côtés restants, le côté $A\Gamma$ égal au côté ΔZ , et le côté $B\Gamma$ égal au côté EZ , et que l'angle restant BAG est égal à l'angle restant $E\Delta Z$.

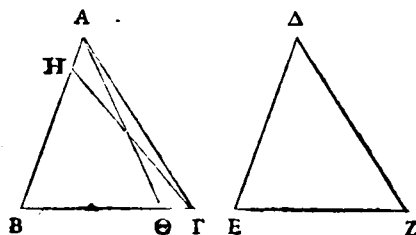
Car si le côté $B\Gamma$ n'est pas égal au côté EZ , l'un d'eux est plus grand que l'autre; que $B\Gamma$ soit plus grand que EZ , s'il est possible; faisons $B\Theta$ égal à EZ (3), et joignons $\Delta\Theta$.

Puisque $B\Theta$ est égal à EZ , et AB égal à ΔE , les deux côtés AB , $B\Theta$ sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base $A\Theta$ est égale à la base ΔZ (4); le triangle $AB\Theta$ est égal au

46 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί, καὶ τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἴστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσονται¹¹, ὅφ' αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ γωνία τῇ ὑπὸ $EZ\Delta$. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $EZ\Delta$ τῇ ὑπὸ $B\Gamma A$ ¹² ἴστί ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ ἄρα τῇ ὑπὸ $B\Gamma A$ ἴστί ἴση¹³· τριγώνου δὲ τοῦ $A\Theta\Gamma$ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ ἴση ἴστί τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $B\Gamma A$, ὅπερ

α qualis est, et triangulum $AB\Theta$ triangulo ΔEZ α quale est, et reliqui anguli reliquis angulis α quales erunt, quos α qualia latera subtendunt; α qualis igitur est $B\Theta A$ angulus ipsi $EZ\Delta$. Sed $EZ\Delta$ ipsi $B\Gamma A$ est α qualis; et $B\Theta A$ igitur ipsi $B\Gamma A$ est α qualis; trianguli igitur $A\Theta\Gamma$ exterior angulus $B\Theta A$ α qualis est interiori et opposito $B\Gamma A$, quod est impossibile. Non igitur in α qualis est



ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἔστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο δὲ αἱ AB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσεις ἄρα ἡ $A\Gamma$ ἴσεται τῇ ΔZ ἴση ἴστί, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον· καὶ λοιπὴ¹⁴ γωνία ἡ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση¹⁵. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

$B\Gamma$ ipsi EZ ; α qualis igitur. Est autem et AB ipsi ΔE α qualis; duæ igitur AB , $B\Gamma$ duabus ΔE , EZ α quales sunt, utraque utrique, et angulos α quales continent; basis igitur $A\Gamma$ basi ΔZ α qualis est, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΔEZ α quale, et reliquus angulus $B\Gamma A$ reliquo angulo $E\Delta Z$ α qualis. Si igitur duo, etc.

triangle ΔEZ , et les angles restants, opposés aux côtés égaux, seront égaux aux angles restants, chacun à chacun; donc l'angle $B\Theta A$ est égal à l'angle $EZ\Delta$; mais l'angle $EZ\Delta$ est égal à l'angle $B\Gamma A$; donc l'angle $B\Theta A$ est égal à l'angle $B\Gamma A$; donc l'angle extérieur $B\Theta A$ du triangle $A\Theta\Gamma$ est égal à l'angle intérieur et opposé $B\Gamma A$; ce qui est impossible (16); donc les côtés $B\Gamma$, EZ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais le côté AB est égal au côté ΔE ; donc les deux côtés AB , $B\Gamma$ sont égaux aux deux côtés ΔE , EZ , chacun à chacun; mais ces côtés comprennent des angles égaux; donc la base $A\Gamma$ est égale à la base ΔZ (4); le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle ΔEZ , et l'angle restant $B\Gamma A$ égal à l'angle restant $E\Delta Z$. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

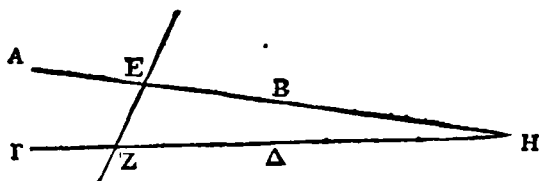
PROPOSITIO XXVII.

Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἴσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ , τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ AEZ , $EZ\Delta$ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos æquales inter se faciat, parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas AB , $\Gamma\Delta$ recta incidens EZ , alternos angulos AEZ , $EZ\Delta$ æquales inter se faciat; dico parallelam esse AB ipsi $\Gamma\Delta$.



Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ συμπίπτουσι, ἤτοι ἐπὶ τὰ $B\Delta$ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ $A\Gamma$. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ $B\Delta$ μέρη κατὰ τὸ H .

Τριγώνου δὲ τοῦ EHZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσι ἐπὶ τὰ $B\Delta$

Si enim non, productæ AB , $\Gamma\Delta$, convenient vel ad $B\Delta$ partes, vel ad $A\Gamma$; producantur, et convenient ad $B\Delta$ partes in H .

Trianguli igitur EHZ exterior angulus AEZ æqualis est interiori et opposito EZH , quod est impossibile; non igitur AB , $\Gamma\Delta$ productæ convenient ad $B\Delta$ partes. Similiter autem osten-

PROPOSITION XXVII.

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les deux droites AB , $\Gamma\Delta$ fasse les angles alternes AEZ , $EZ\Delta$ égaux entr'eux; je dis que la droite AB est parallèle à la droite $\Gamma\Delta$.

Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB , $\Gamma\Delta$ étant prolongées se rencontreront, ou du côté $B\Delta$, ou du côté $A\Gamma$. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté $B\Delta$, au point H .

L'angle extérieur AEZ du triangle EHZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH , ce qui est impossible (16); donc les droites AB , $\Gamma\Delta$ prolongées du côté $B\Delta$ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se ren-

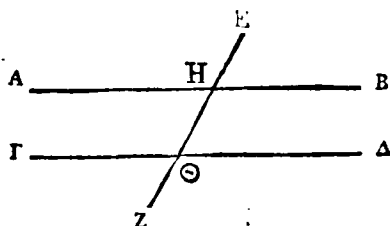
48 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μέρη. Ομοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ΑΓ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἕξῃς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Εὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσῃ ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ¹· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον² γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ



ἴσῃ ποιεῖτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

detur neque ad ΑΓ; quæ autem in neutras partes conveniunt, parallelæ sunt; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes æqualem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales faciat; parallelæ erunt inter se rectæ.

In duas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidens ΕΖ exteriorem angulum ΕΗΒ interiori et opposito, angulo ΗΘΔ æqualem faciat, vel inte-

riores et ad easdem partes ipsos ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales; dico parallelam esse ΑΒ ipsi ΓΔ.

contreront pas non plus du côté ΑΓ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35); donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

7

PROPOSITION XXVIII.

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite ΕΖ tombant sur les droites ΑΒ, ΓΔ fasse l'angle extérieur ΕΗΒ égal à l'angle intérieur ΗΘΔ, opposé, et placé du même côté, ou bien les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits; je dis que la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ.

Επει γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἑναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσὶ. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἑναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Εὰν ἄρα εἰς δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἱμπίπτουσα τὰς τι ἑναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην¹, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἱμπίπτειτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τὰς τι²

Quoniam enim æqualis est ΕΗΒ ipsi ΗΘΔ, sed ΕΗΒ ipsi ΑΗΘ est æqualis, et ΑΗΘ igitur ipsi ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ.

Rursus, quoniam anguli ΒΗΘ, ΗΘΔ duobus rectis æquales sunt, sunt autem anguli ΑΗΘ, ΒΗΘ duobus rectis æquales; ergo ΑΗΘ, ΒΗΘ ipsis ΒΗΘ, ΗΘΔ æquales sunt. Communis auferatur ΒΗΘ; reliquus igitur ΑΗΘ reliquo ΗΘΔ est æqualis; et sunt alterni; parallela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Si igitur in duas, etc.

PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos æquales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad eandem partes æqualem, et interiores et ad eandem partes duobus rectis æquales.

In parallelas enim rectas ΑΒ, ΓΔ recta incidat ΕΖ; dico eam alternos angulos ΑΗΘ, ΗΘΔ æquales

Car puisque l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ, et que l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΑΗΘ (15), l'angle ΑΗΘ est égal à l'angle ΗΘΔ; mais ces angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ (27).

De plus, puisque les angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles ΑΗΘ, ΒΗΘ seront égaux aux angles ΒΗΘ, ΗΘΔ. Retranchons l'angle commun ΒΗΘ; l'angle restant ΑΗΘ sera égal à l'angle restant ΗΘΔ; mais ces deux angles sont alternes; donc la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΔ. (27). Donc, etc.

PROPOSITION XXIX.

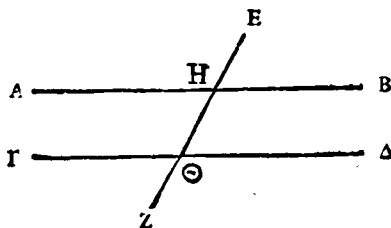
Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite ΕΖ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΓΔ; je dis que cette droite fait les angles alternes ΑΗΘ, ΗΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur ΕΗΒ, égal à

50 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἀλλὰ ἡ γωνία τὰς ὑπὸ $AH\Theta$, $H\Theta\Delta$ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

facere, et exteriorum angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes $H\Theta\Delta$ æqualem, et interiores ad easdem partes $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ duobus rectis æquales.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῆς ὑπὸ $H\Theta\Delta$. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $BH\Theta$. αἱ ἄρα ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ τῶν ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα AB , $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ · ἴση ἄρα.

Si enim inæqualis est $AH\Theta$ ipsi $H\Theta\Delta$, unus eorum major est; sit major $AH\Theta$ ipso $H\Theta\Delta$. Communis addatur $BH\Theta$; ergo $AH\Theta$, $BH\Theta$ ipsis $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ majores sunt. Sed $AH\Theta$, $BH\Theta$ duobus rectis æquales sunt; et igitur $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ in infinitum concurrent. Ipsæ igitur AB , $\Gamma\Delta$ productæ in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelæ ponuntur; non igitur inæqualis est $AH\Theta$ ipsi $H\Theta\Delta$; æqualis igitur.

L'angle $H\Theta\Delta$ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.

Car si l'angle $AH\Theta$ n'est pas égal à l'angle $H\Theta\Delta$, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle $AH\Theta$ soit plus grand que $H\Theta\Delta$. Ajoutons l'angle commun $BH\Theta$, les angles $AH\Theta$, $BH\Theta$ seront plus grands que les angles $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$; mais les angles $AH\Theta$, $BH\Theta$ sont égaux à deux droits (13); donc les angles $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem. 5); donc les droites AB , $\Gamma\Delta$ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles; donc les angles $AH\Theta$,

Αλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἴσιν ἴση·
καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσιν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ
ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν.
Αλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·
καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι
εἰσίν. Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed $\angle AHB$ ipsi $\angle EHB$ est æqualis; et $\angle EHB$ igitur
ipsi $\angle H\Theta\Delta$ est æqualis.

Communis addatur $\angle BHO$; ergo $\angle EHB$, $\angle BHO$
ipsis $\angle BHO$, $\angle H\Theta\Delta$ æquales sunt. Sed $\angle EHB$, $\angle BHO$
duobus rectis æquales sunt; et $\angle BHO$, $\angle H\Theta\Delta$
igitur duobus rectis æquales sunt. Ergo in
parallelas, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις
εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλ-
ληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλ-
ληλος.

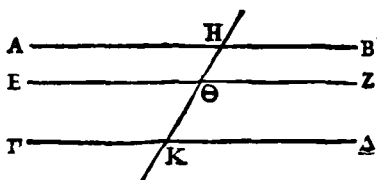
Ἐμπίπτειτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ parallelæ sunt, et inter se
sunt parallelæ.

Sit utraqûe ipsarum ΑΒ, ΓΔ ipsi ΕΖ paral-
lela; dico et ΑΒ ipsi ΓΔ esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta ΗΚ.



Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ,
ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτων ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ
ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς

Et quoniam in parallelas rectas ΑΒ, ΕΖ recta
incidit ΗΚ, æqualis est $\angle AHO$ ipsi $\angle HOZ$. Rursus
quoniam in parallelas rectas ΕΖ, ΓΔ recta in-

ΗΘΔ ne sont point inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle ΑΗΘ est égal à
l'angle ΕΗΒ (15); donc l'angle ΕΗΒ est égal à l'angle ΗΘΔ.

Ajoutons l'angle commun ΒΗΘ, les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ seront égaux aux angles
ΒΗΘ, ΗΘΔ; mais les angles ΕΗΒ, ΒΗΘ sont égaux à deux droits (15); donc les
angles ΒΗΘ, ΗΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

Que chacune des droites ΑΒ, ΓΔ soit parallèle à ΕΖ; je dis que ΑΒ est parallèle à ΓΔ.

Que la droite ΗΚ tombe sur les droites ΑΒ, ΓΔ.

52 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

αλλήλους² εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἰμ-
πέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΟΖ τῇ ὑπὸ
ΗΚΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΟΖ
ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ
εἰσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ³, καὶ τὰ ἐξῆς.

cidit ΗΚ, æqualis est ΗΟΖ ipsi ΗΚΔ, Ostensus
est autem et ΑΗΚ ipsi ΗΟΖ æqualis; ΑΗΚ igitur
ipsi ΗΚΔ est æqualis; et sunt alterni. Paral-
lela igitur est ΑΒ ipsi ΓΔ. Quæ igitur eidem
rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

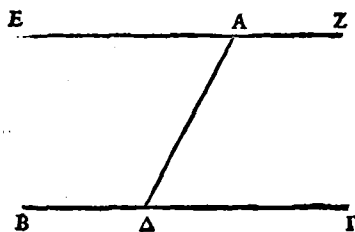
Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου¹, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ
παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ
δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ, διὰ τοῦ Α σημείου,
τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν
ἀγαγεῖν.

PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum, datæ rectæ parallelam
rectam lineam ducere.

Sit quidem datum punctum Α, data vero
recta ΒΓ; oportet igitur, per Α punctum, ipsi
ΒΓ rectæ parallelam rectam lineam ducere.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ,
καὶ ἰπεζεύχω ἡ ΑΔ· καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΑΔ

Sumatur in ΒΓ quodlibet punctum Δ, et jun-
gatur ΑΔ; et constituatur ad ΑΔ rectam, et ad

Puisque la droite ΗΚ tombe sur les droites parallèles ΑΒ, ΕΖ, l'angle ΑΗΘ est
égal à l'angle ΗΟΖ (27). De plus, puisque la droite ΗΚ tombe sur les droites paral-
lèles ΕΖ, ΓΔ, l'angle ΗΟΖ est égal à l'angle ΗΚΔ (28). Mais on a démontré que l'angle
ΑΗΚ est égal à l'angle ΗΟΖ; donc l'angle ΑΗΚ est égal à l'angle ΗΚΔ; mais ces
angles sont alternes; donc ΑΒ est parallèle à ΓΔ (26). Donc, etc. 74

PROPOSITION XXXI.

Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée.

Soit Α le point donné, et ΒΓ la droite donnée; il faut par le point Α conduire
une ligne droite parallèle à la droite ΒΓ.

Prenons sur la droite ΒΓ un point quelconque Δ, et joignons ΑΔ; construisons

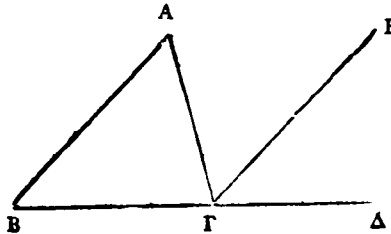
εὐθεία, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκτελέσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκει, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾷς τῶν πλευρῶν προσεκτελέσεισθαι, ἢ ἐκτὸς γωνία δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ εἰς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυὸν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.



Εστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκτελέσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι

sur la droite ΔΑ, et au point Α de cette droite, l'angle ΔΑΕ égal à l'angle ΑΔΓ (25), et prolongeons la droite ΑΖ dans la direction de ΕΑ.

Puisque la droite ΑΔ, tombant sur les deux droites ΒΓ, ΕΖ, fait les angles alternes ΕΑΔ, ΑΔΓ égaux entr'eux, la droite ΕΖ est parallèle à droite ΒΓ (27).

Donc la ligne droite ΕΑΖ a été menée, par le point donné Α, parallèle à la droite donnée ΒΓ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXII.

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ΑΒΓ; et prolongeons le côté ΒΓ en Δ; je dis que l'angle exté-

punctum in cā Α, angulo ΑΔΓ æqualis angulus ΔΑΕ, et producat in directum ipsi ΕΑ recta ΑΖ.

Et quoniam in duas rectas ΒΓ, ΕΖ recta incidens ΑΔ alternos angulos ΕΑΔ, ΑΔΓ æquales inter se facit, parallela est ΕΖ ipsi ΒΓ.

Per datum igitur punctum Α, datæ rectæ ΒΓ parallela recta linea ducta est ΕΑΖ. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis æqualis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit triangulus ΑΒΓ, et producat ipsius unum latus ΒΓ in Δ; dico exteriorem angulum

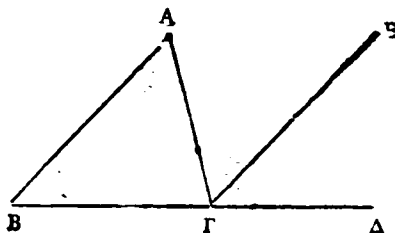
54 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς' δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἠχθω γάρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

ΑΓΔ æqualem esse duobus interioribus et oppositis ΓΑΒ, ΑΒΓ, et interiores trianguli tres angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duabus rectis æquales esse.

Ducatur enim, per Γ punctum, ipsi ΑΒ rectæ parallela ΓΕ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ· Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσηκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τριπλὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit ΑΓ, alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΕ, et in ipsas incidit recta ΒΔ, exterior angulus ΕΓΔ æqualis est interiori et opposito ΑΒΓ. Ostensus autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΔ exterior angulus æqualis est duobus interioribus et oppositis ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Communis addatur ΑΓΒ; ergo ΑΓΔ, ΑΓΒ tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ æquales sunt. Sed ΑΓΔ,

rieur ΑΓΔ est égal aux angles intérieurs et opposés ΓΑΒ, ΑΒΓ; et que les trois angles intérieurs ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits.

Menons, par le point Γ, la droite ΓΕ parallèle à ΑΒ (31).

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΕ, et que ΑΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΕ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque la droite ΑΒ est parallèle à la droite ΓΕ, et que la droite ΒΔ tombe sur ces droites, l'angle extérieur ΕΓΔ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΒΓ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle extérieur ΑΓΔ est égal aux deux angles intérieurs et opposés ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ajoutons l'angle commun ΑΓΒ; les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ seront égaux aux trois

είσιν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Παντὸς ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἰζήσ.

ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ igitur duobus rectis æquales sunt. Omnis igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. λγ'.

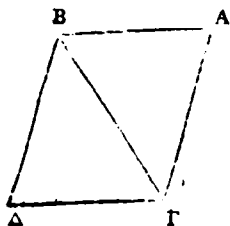
Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζυγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Εστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζυγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

PROPOSITIO XXXIII.

Quæ et æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ, et ipsæ æquales et parallelæ sunt.

Sint et æquales et parallelæ ΑΒ, ΓΔ, et conjungant ipsas ad easdem partes rectæ ΑΓ, ΒΔ; dico et ΑΓ, ΒΔ et æquales et parallelas esse.



Επιζεύχθω γάρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ

Jungatur enim ΒΓ.

Et quoniam parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΑΒ

angles ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ. Mais les angles ΑΓΔ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits (15); donc les angles ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

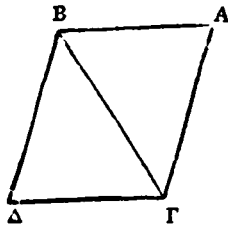
Soient ΑΒ, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites ΑΓ, ΒΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites ΑΓ, ΒΔ sont égales et parallèles.

Joignons ΒΓ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (20). De plus, puisque ΑΒ est égale à ΓΔ, et que

ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὲ αἱ AB , $B\Gamma$, δυοὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση ἐστίν. Βάσις ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσις τῇ $ΒΔ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $B\Gamma\Delta$ τριγώνῳ ἶσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκάτερα ἑκάτερα, ὅτ' ἂν αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑπο-

ipsi $\Gamma\Delta$, communis autem $B\Gamma$; duæ igitur AB , $B\Gamma$ duabus $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ æquales sunt, et angulus $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma\Delta$ æqualis. Basis igitur $ΑΓ$ basi $ΒΔ$ est æqualis, et $AB\Gamma$ triangulum $B\Gamma\Delta$ triangulo æquale est; et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt uterque utrique, quos æqualia latera subtendunt; æqualis est igitur $ΑΓΒ$ an-



τείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς $ΑΓ$, $ΒΔ$ εὐθεῖα ἡμπίπτουσα ἡ $B\Gamma$ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$. Εδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulus ipsi $ΓΒΔ$. Et quoniam in duas rectas $ΑΓ$, $ΒΔ$ recta incidens $B\Gamma$, alternos angulos $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ æquales inter se facit, parallela est $ΑΓ$ ipsi $ΒΔ$. Ostensa est autem ipsi et æqualis; quæ igitur æquales, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli æqualia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

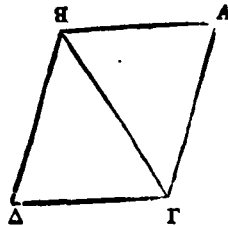
la droite $B\Gamma$ est commune, les deux droites AB , $B\Gamma$ sont égales aux deux droites $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$; mais l'angle $AB\Gamma$ est égal à l'angle $B\Gamma\Delta$; donc la base $ΑΓ$ est égale à la base $ΒΔ$, le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $B\Gamma\Delta$, et les angles restans, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle $ΑΓΒ$ est égal à l'angle $ΓΒΔ$. Mais la droite $B\Gamma$ tombant sur les deux droites $ΑΓ$, $ΒΔ$ fait les angles alternes $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ égaux entr'eux; donc la droite $ΑΓ$ est parallèle à la droite $ΒΔ$ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Εστω παραλληλόγραμμον χωρίον¹ τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει.

Sit parallelogrammum spatium ΑΓΔΒ, diameter autem ipsius ΒΓ; dico ΑΓΔΒ parallelogrammi opposita et latera et angulos æqualia inter se esse, et ΒΓ diametrum illud bifariam secare.



Επεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευράν² μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, et in ipsas incidit recta ΒΓ, alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ, æquales inter se sunt. Rursus, quoniam parallela est ΑΓ ipsi ΒΔ, et in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se sunt. Duo igitur triangula sunt ΑΒΓ, ΒΓΔ, duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, commune utrique ΒΓ; et reliqua igitur reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo; æquale igitur est ΑΒ quidem latus ipsi ΓΔ,

Soit le parallélogramme ΑΓΔΒ, et que ΒΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme ΑΓΔΒ sont égaux entr'eux, et que la diagonale ΒΓ le partage en deux parties égales.

Car puisque ΑΒ est parallèle à ΓΔ, et que la droite ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΒΓ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque ΑΓ est parallèle à ΒΔ, et que ΒΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ΑΓΒ, ΓΒΔ sont égaux entr'eux; donc les deux triangles ΑΒΓ, ΒΓΔ ont les deux angles ΑΒΓ, ΒΓΑ égaux aux deux angles ΒΓΔ, ΓΒΔ, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, savoir, le côté commun ΒΓ, qui est adjacent aux angles égaux; ils auront donc les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun (26), et l'angle restant égal à l'angle restant; donc le côté ΑΒ est égal au côté ΓΔ, le côté ΑΓ égal au côté ΒΔ, et l'angle

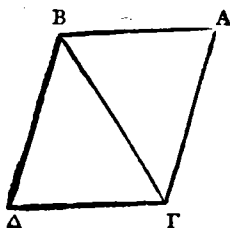
58 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴση ἄρα ἡ μὲν AB πλευρὰ τῇ $\Gamma\Delta$, ἡ δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν³ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΔΓ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΒΔ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ · ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $ΑΓΔ$ ἐστὶν ἴση⁴· εἰδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΔΒ$ ἴση·

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίων πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

$ΑΓ$ vero ipsi $ΒΔ$, et adhuc æqualis est $ΒΑΓ$ angulus ipsi $ΒΔΓ$. Et quoniam æqualis est quidem $ΑΒΓ$ angulus ipsi $ΒΓΔ$, et $ΓΒΔ$ ipsi $ΑΓΒ$; totus igitur $ΑΒΔ$ toti $ΑΓΔ$ est æqualis; ostensus est autem et $ΒΑΓ$ ipsi $ΓΔΒ$ æqualis;

Ergo parallelogammorum spatiorum opposita et latera et anguli æqualia inter se sunt.



Λέγω δὲ⁵ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, κοινὴ δὲ ἡ $ΒΓ$, δύο δὲ αἱ AB , $ΒΓ$ δυσὶ ταῖς $\DeltaΓ$, $ΓΒ$ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἴση ἐστὶ· καὶ βάσεις ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΒΔ$ ἴση ἐστὶ⁶· καὶ τὸ $ΑΒΓ$ ἄρα τρίγωνον τῷ $ΒΔΓ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα $ΒΓ$ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ $ΑΓΔΒ$ παραλληλόγραμμον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim æqualis est AB ipsi $\Gamma\Delta$, communis autem $ΒΓ$, duæ igitur AB , $ΒΓ$ duabus $\DeltaΓ$, $ΓΒ$ æquales sunt, utraque utrique, et angulus $ΑΒΓ$ angulo $ΒΓΔ$ æqualis est; et basis igitur $ΑΓ$ ipsi $ΒΔ$ æqualis est; et igitur triangulum $ΑΒΓ$ triangulo $ΒΔΓ$ æquale est;

Ergo $ΒΓ$ diameter bifariam secat $ΑΓΔΒ$ parallelogammum. Quod oportebat ostendere.

$ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΒΔΓ$. Puisque l'angle $ΑΒΓ$ est égal à l'angle $ΒΓΔ$, et l'angle $ΓΒΔ$ égal à l'angle $ΑΓΒ$, l'angle total $ΑΒΔ$ est égal à l'angle total $ΑΓΔ$. Mais on a démontré que l'angle $ΒΑΓ$ est égal à l'angle $ΓΔΒ$;

Donc les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux.

Je dis de plus que la diagonale partage les parallélogrammes en deux parties égales. Car puisque AB est égal à $\Gamma\Delta$, et que la droite $ΒΓ$ est commune, les deux droites AB , $ΒΓ$ sont égales aux droites $\DeltaΓ$, $ΓΒ$, chacune à chacune; mais l'angle $ΑΒΓ$ est égal à l'angle $ΒΓΔ$; donc la base $ΑΓ$ est égale à la base $ΒΔ$ (4), et le triangle $ΑΒΓ$ égal au triangle $ΒΔΓ$.

Donc la diagonale $ΒΓ$ partage le parallélogramme $ΑΓΔΒ$ en deux parties égales; ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΕ.

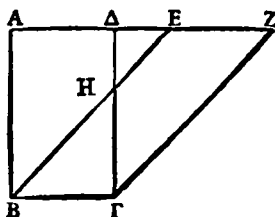
PROPOSITIO XXXV.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἑλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ $ABΓΔ$, $EBΓΖ$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα¹ τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AZ , $ΒΓ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$ τῷ $EBΓΖ$.

Parallelogramma, super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint parallelogramma $ABΓΔ$, $EBΓΖ$ super eadem basi $ΒΓ$ constituta et in eisdem parallelis AZ , $ΒΓ$; dico æquale esse $ABΓΔ$ ipsi $EBΓΖ$.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$, ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΓ$ ³. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ EZ τῇ $ΒΓ$ ἐστὶν ἴση⁴· ὥστε καὶ ἡ $ΑΔ$ τῇ EZ ἐστὶν ἴση⁵. καὶ κοινὴ ἡ $ΔΕ$ · ἔλη ἄρα ἡ AE ἔλη τῇ $ΔΖ$ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AB τῇ $ΔΓ$ ἴση· δύο δὲ αἱ EA , AB δυσὶ ταῖς $ΖΔ$, $ΔΓ$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΖΔΓ$ γωνία τῇ

Quoniam enim parallelogrammum est $ABΓΔ$, æqualis est $ΑΔ$ ipsi $ΒΓ$. Propter eadem, et EZ ipsi $ΒΓ$ est æqualis. Quare et $ΑΔ$ ipsi EZ est æqualis; et communis $ΔΕ$; tota igitur AE toti $ΔΖ$ est æqualis. Est autem et AB ipsi $ΔΓ$ æqualis; duæ igitur EA , AB duabus $ΖΔ$, $ΔΓ$ æquales sunt utraque utrique, et angulus $ΖΔΓ$ angulo EAB

PROPOSITION XXXV.

Les parallélogrammes, contruits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes $ABΓΔ$, $EBΓΖ$ soient construits sur la même base $ΒΓ$, et entre les mêmes parallèles AZ , $ΒΓ$; je dis que le parallélogramme $ABΓΔ$ est égal au parallélogramme $EBΓΖ$.

Car puisque $ABΓΔ$ est un parallélogramme, $ΑΔ$ est égal à $ΒΓ$ (34); par la même raison, EZ est égale à $ΒΓ$; donc $ΑΔ$ est égal à EZ ; mais la droite $ΔΕ$ est commune; donc la droite totale AE est égale à la droite totale $ΔΖ$ (not. 2); mais AB est égal à $ΔΓ$ (34); donc les deux droites EA , AB sont égales aux deux droites $ΖΔ$, $ΔΓ$, chacun à chacune; mais l'angle extérieur $ΖΔΓ$ est égal à l'angle intérieur

60 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὕπὸ ΕΑΒ ἔστιν ἴση^δ, ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσει
ἄρα ἢ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ
τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται 7. Κοινὸν
ἀφαιρεθῶ τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέ-
ζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπέζιῳ ἔστιν ἴσον 8.
Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ἔλον ἄρα
τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἕλθω τῷ ΕΒΓΖ παρ-
αλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί. Τὰ ἄρα παραλληλό-
γραμμα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων
βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις,
ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Εστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ
ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα² τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς
αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον
ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Επεξίχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

est æqualis, exterior interiori; basis igitur ΕΒ
basi ΖΓ æqualis est, et ΕΑΒ triangulum ipsi ΔΓΖ
triangulo æquale erit. Commune auferatur ΔΗΕ;
reliquum igitur ΑΒΗΔ trapezium reliquo ΕΗΓΖ
trapezio est æquale. Commune addatur ΗΒΓ
triangulum; totum igitur ΑΒΓΔ parallelogram-
mum toti ΕΒΓΖ parallelogrammo æquale est.
Ergo parallelogramma, etc.

PROPOSITION XXXVI.

Parallelogramma, super æqualibus basibus
constituta et in eisdem parallelis, æqualia
inter se sunt.

Sint parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ super
æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΖΗ, et in
eisdem parallelis ΑΘ, ΒΗ; dico æquale esse
ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΘ.

ΕΑΒ (29); donc la base ΕΒ est égale à la base ΖΓ (4); donc le triangle ΕΑΒ
sera égal au triangle ΔΓΖ. Retranchons la partie commune ΔΗΕ; le trapèze
restant ΑΒΗΔ sera égal au trapèze restant ΕΗΓΖ (not. 5); ajoutons le triangle
commun ΗΒΓ, le parallélogramme total ΑΒΓΔ sera égal au parallélogramme
total ΕΒΓΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

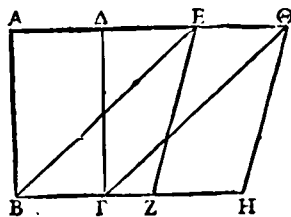
Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes paral-
lèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ soient construits sur des bases égales
ΒΓ, ΖΗ, et entre les mêmes parallèles ΑΘ, ΒΗ; je dis que le parallélogramme
ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ.

Joignons ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσιν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἴσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τε εἴσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα

Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΖΗ, et ΖΗ ipsi ΕΘ est æqualis; et ΒΓ igitur ipsi ΕΘ est æqualis. Sunt autem et parallelæ, et jungunt ipsas ipsæ ΒΕ, ΓΘ, quæ autem æquales et parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales et parallelæ sunt; et ΕΒ, ΓΘ igitur et æquales sunt et parallelæ. Parallelogrammum



ἴστι τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάζειν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἰζῆς.

igitur est ΕΒΓΘ, et est æquale ipsi ΑΒΓΔ; basim enim eandem habet ΒΓ quam ipsum, et in eisdem parallelis est ΒΓ, ΑΘ. Propter eadem, et ΕΖΗΘ eidem ΕΒΓΘ est æquale; quare et ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΖΗΘ est æquale. Ergo parallelogramma, etc.

Puisque ΒΓ est égal à ΖΗ, et ΖΗ égal à ΕΘ, la droite ΒΓ est égale à ΕΘ; mais les droites ΒΕ, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (33); donc les droites ΕΒ, ΓΘ sont égales et parallèles; donc ΕΒΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ΑΒΓΔ (35); car il a la même base ΒΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme ΕΖΗΘ est égal au parallélogramme ΕΒΓΘ; donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est égal au parallélogramme ΕΖΗΘ. Donc, etc.

62 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

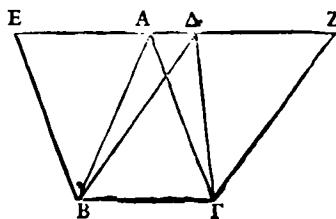
PROPOSITIO XXXVII.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔBΓ$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα ¹ τῆς $BΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΑΔ$, $BΓ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔBΓ$ τριγώνῳ.

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triangula $ABΓ$, $ΔBΓ$ super eadem basi constituta $BΓ$ et in eisdem parallelis $ΑΔ$, $BΓ$; dico æquale esse $ABΓ$ triangulum $ΔBΓ$ triangulo.



Ἐκβεβλήσθω ἡ $ΑΔ$ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ E , Z ², καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ $ΓΑ$ παράλληλος ἤχθω ἡ BE , διὰ δὲ τοῦ $Γ$ τῇ $ΒΔ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $ΓΖ$.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $EBΓΑ$, $ΔBΓΖ$ · καὶ εἰσιν ἴσα ³· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι ⁴ τῆς $BΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $BΓ$, $EΖ$ · καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $EBΓΑ$ παρ-

Producatur $ΑΔ$ ex utraque parte in E , Z , et per B quidem ipsi $ΓΑ$ parallela ducatur BE , per $Γ$ vero ipsi $ΒΔ$ parallela ducatur $ΓΖ$.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $EBΓΑ$, $ΔBΓΖ$; et æqualia sunt, nam super eadem basi sunt $BΓ$ et in eisdem parallelis $BΓ$, $EΖ$; et est ipsius $EBΓΑ$ quidem parallelogrammi

PROPOSITION XXXVII.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles $ABΓ$, $ΔBΓ$ soient sur la même base $BΓ$ et entre les mêmes parallèles $ΑΔ$, $BΓ$; je dis que le triangle $ABΓ$ est égal au triangle $ΔBΓ$.

Prolongeons de part et d'autre la droite $ΑΔ$ aux points E , Z , et par le point B conduisons BE parallèle à $ΓΑ$ (31), et par le point $Γ$ conduisons $ΓΖ$ parallèle à $ΒΔ$.

Les figures $EBΓΑ$, $ΔBΓΖ$ sont des parallélogrammes, et ces parallélogrammes sont égaux (35); car ils sont sur la même base $BΓ$, et entre les mêmes parallèles; mais le triangle $ABΓ$ est la moitié du parallélogramme $EBΓΑ$; car

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 63

αλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

dimidium ΑΒΓ triangulum, nam ΑΒ diameter ipsum bifariam secat; est vero ipsius ΔΒΓΖ parallelogrammi dimidium ΑΒΓ triangulum, nam ΔΓ diameter ipsum bifariam secat; æqualium autem dimidia æqualia inter se sunt; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΒΓ triangulo. Ergo triacula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

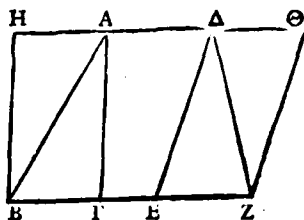
Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

PROPOSITIO XXXVIII.

Triacula, super æqualibus basibus constituta et in eisdem parallelis, æqualia inter se sunt.

Sint triacula ΑΒΓ, ΔΕΖ super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΕΖ et in eisdem parallelis ΒΖ, ΑΔ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo.



Ἐκτελέσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐξ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ

Producatur enim ΑΔ ex utraque parte in Η, Θ, et per Β quidem ipsi ΓΑ parallela

la diagonale ΑΒ le partage en deux parties égales; le triangle ΑΒΓ est la moitié du parallélogramme ΔΒΓΖ, car la diagonale ΔΓ le partage en deux parties égales (34); mais les moitiés des quantités égales sont égales entr'elles; donc le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVIII.

Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

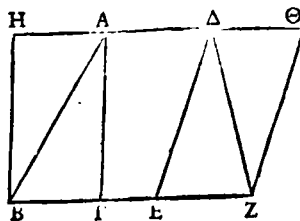
Que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΕΖ et entre les mêmes parallèles ΒΖ, ΑΔ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ.

Prolongeons de part et d'autre la droite ΑΔ aux points Η, Θ; par le

64 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράλληλος ἢ χθω ἢ BH, διὰ δὲ τοῦ Z τῇ ΔΕ
παράλληλος ἢ χθω ἢ ZΘ.

ducatur BH, per Z vero ipsi ΔΕ parallela du-
catur ZΘ.



Παραλληλογράμμου ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν
HBΓA, ΔEZΘ· καὶ ἴσον τὸ HBΓA τῷ ΔEZΘ,
ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν BΓ, EZ, καὶ ἐν
ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ, HΘ· καὶ
ἐστὶ τοῦ μὲν HBΓA παραλληλογράμμου ἡμισυ
τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ
δίχα⁵ τέμνει· τοῦ δὲ ΔEZΘ παραλληλογράμμου
ἡμισυ τὸ ZEΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔZ διάμετρος
αὐτὸ δίχα⁶ τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα
ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον
τῷ ΔEZ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Parallelogrammum igitur est utrumque ipso-
rum HBΓA, ΔEZΘ; et æquale HBΓA ipsi
ΔEZΘ, in æqualibus enim et basibus sunt BΓ, EZ,
et in eisdem parallelis BZ, HΘ; et est autem
ipsius HBΓA parallelogrammi dimidium ABΓ
triangulum, AB enim diameter ipsum bifariam
secat; est vero ipsius ΔEZΘ parallelogrammi
dimidium ZEΔ triangulum, nam ΔZ diameter
ipsum bifariam secat. Æqualium autem dimidia
æqualia inter se sunt; æquale igitur est ABΓ
triangulum ipsi ΔEZ triangulo. Ergo triangula, etc.

point B conduisons la droite BH parallèle à la droite ΓA (34); et par le point Z
conduisons la droite ZΘ parallèle à la droite ΔE. 4

Les figures HBΓA, ΔEZΘ sont des parallélogrammes; mais le parallélogramme
HBΓA est égal au parallélogramme ΔEZΘ (36), car ils sont construits sur des bases
égales BΓ, EZ et entre les mêmes parallèles BZ, HΘ; mais le triangle ABΓ est la moitié
du parallélogramme HBΓA, car la diagonale AB le partage en deux parties égales (34);
le triangle ZEΔ est la moitié du parallélogramme ΔEZΘ, car la diagonale ΔZ le
partage en deux parties égales, et les moitiés des quantités égales sont égales
entr'elles; donc le triangle ABΓ est égal au triangle ΔEZ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

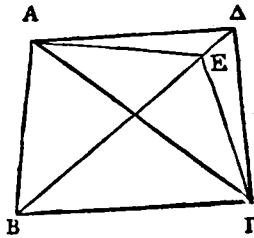
PROPOSITIO XXXIX.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εστω ἴσα τρίγωνα^α τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς $B\Gamma$, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη^β. Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γάρ ἡ AD . Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AD τῇ $B\Gamma$.

Æqualia triangula, super eâdem basi constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$, super eâdem basi $B\Gamma$ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Jungatur enim AD ; dico parallelam esse AD ipsi $B\Gamma$.



Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ A σημείου τῇ $B\Gamma$ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ AE , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ EG .

Ἴσον ἄρα^γ ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $EB\Gamma$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῶ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, AE ^δ. Ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον^ε τῷ $\Delta B\Gamma$ ἐστὶν

Si enim non, ducatur per A punctum ipsi $B\Gamma$ rectæ parallela AE , et jungatur EG .

Æquale igitur est $AB\Gamma$ triangulum ipsi $EB\Gamma$ triangulo; super eâdem enim basi est $B\Gamma$ super quâ ipsum $BE\Gamma$, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AE ; sed $AB\Gamma$ triangulum ipsi $\Delta B\Gamma$ est æquale; ergo

PROPOSITION XXXIX.

Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

Que les deux triangles égaux $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ soient construits sur la même base $B\Gamma$, et placés du même côté; je dis que ces deux triangles sont compris entre les mêmes parallèles. Joignons AD ; je dis que AD est parallèle à $B\Gamma$.

Car si cela n'est pas, par le point A conduisons AE parallèle à $B\Gamma$ (31), et joignons EG .

Le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $EB\Gamma$ (37), puisque ces deux triangles sont construits sur la base $B\Gamma$, et placés entre les mêmes parallèles $B\Gamma$, AE . Mais le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $\Delta B\Gamma$; donc le triangle $\Delta B\Gamma$ est égal au

66 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν⁸ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἐξῆς.

et ΔΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ æquale est, majus minori, quod est impossibile. Non igitur parallela est ΑΕ ipsi ΒΓ. Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse præter ΑΒ; ΑΔ igitur ipsi ΒΓ est parallela. Ergo æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν¹ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ² ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εστω ἴσα τρίγωνα³ τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπιζεύχθω γάρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γάρ μὴ, ἦχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΖ.

PROPOSITIO XL.

Æqualia triangula, super æqualibus basibus constituta et ad easdem partes, et in eisdem parallelis sunt.

Sint æqualia triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, super æqualibus basibus constituta ΒΓ, ΓΕ et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse; jungatur enim ΑΔ; dico parallelam esse ΑΔ ipsi ΒΕ.

Si enim non, ducatur per Α ipsi ΒΕ parallela ΑΖ, et jungatur ΕΖ.

triangle ΕΒΓ, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible; donc ΑΕ n'est point parallèle à ΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucune autre droite, excepté ΑΔ, n'est parallèle à ΒΓ; donc ΑΔ est parallèle à ΒΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XL.

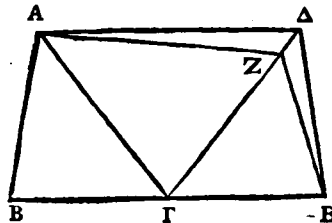
Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

Que les triangles égaux ΑΒΓ, ΔΓΕ soient construits sur les bases égales ΒΓ, ΓΕ et placés du même côté; je dis qu'ils sont entre les mêmes parallèles. Joignons ΑΔ; je dis que ΑΔ est parallèle à ΒΕ.

Car si cela n'est pas, par le point Α, conduisons ΑΖ parallèle à ΒΕ, et joignons ΕΖ.

Ἰσον ἄρα⁵ ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῇ $Z\Gamma E$ τρι-
γώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $B\Gamma$, ΓE
καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BE , AZ .
Ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῇ $\Delta\Gamma E$ τρι-
γώνῳ⁶· καὶ τὸ $\Delta\Gamma E$ τρίγωνον⁷ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῇ

$\Delta\Gamma E$ triangulum igitur æquale est ipsi $Z\Gamma E$
triangulo; in æqualibus enim basibus sunt $B\Gamma$,
 ΓE et in eisdem parallelis BE , AZ . Sed $AB\Gamma$
triangulum æquale est ipsi $\Delta\Gamma E$ triangulo; et
 $\Delta\Gamma E$ triangulum igitur æquale est ipsi $Z\Gamma E$ trian-



$Z\Gamma E$ τριγώνῳ, τὸ μείζον τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ
ἐστίν⁸ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν⁹
ἡ AZ τῇ BE . Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη
τις πλὴν τῆς AD · ἡ AD ἄρα τῇ BE ἐστὶ παράλ-
ληλος¹⁰. Τὰ ἄρα ἴσα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

gulo, majus minori, quod est impossibile; non
igitur parallela est AZ ipsi BE . Similiter autem
ostendemus neque aliam quampiam esse præter
 AD ; AD igitur ipsi BE est parallela. Ergo
æqualia, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

PROPOSITIO XLI.

Εὰν παραλληλόγραμμον τρίγωνῳ βάσιν τε ἔχῃ
τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ·
διπλάσιον ἐστὶ¹ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ
τρίγωνου.

Si parallelogrammum quam triangulum basim
habeat eandem, et in eisdem parallelis sit,
duplum est parallelogrammum trianguli.

Le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $Z\Gamma E$ (38); puisque ces deux triangles
sont construits sur des bases égales $B\Gamma$, ΓE , et qu'ils sont entre les mêmes
parallèles BE , AZ . Mais le triangle $AB\Gamma$ est égal au triangle $\Delta\Gamma E$; donc le triangle
 $\Delta\Gamma E$ est égal au triangle $Z\Gamma E$, le plus grand au plus petit, ce qui est impossible;
donc AZ n'est point parallèle à BE . Nous démontrerons semblablement qu'aucune
autre droite, excepté AD , n'est parallèle à BE ; donc AD est parallèle à BE .
Donc, etc.

PROPOSITION XLI.

Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les
mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

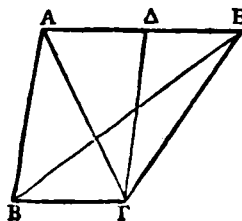
68 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε² ἔχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω³ ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου.

Επιζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Parallelogrammum enim ΑΒΓΔ quam triangulum ΕΒΓ basim habeat eamdem ΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ sit; dico duplum esse ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓ trianguli.

Jungatur enim ΑΓ.



Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον³ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῶ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΕΒΓ triangulo; nam super eadem basi est ΒΓ super quā ipsum ΕΒΓ, et in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ. Sed ΑΒΓΔ parallelogrammum duplum est ipsius ΑΒΓ trianguli, nam ΑΓ diameter ipsum bifariam secat; quare ΑΒΓΔ parallelogrammum et ipsius ΕΒΓ trianguli est duplum. Si igitur parallelogrammum, etc.

Que le parallélogramme ΑΒΓΔ ait la même base ΒΓ que le triangle ΕΒΓ, et qu'il soit entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ.

Joignons ΑΓ.

Le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΕΒΓ (37), puisqu'il est sur la même base ΒΓ que lui et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΕ. Mais le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΑΒΓ, car la diagonale ΑΓ partage ce parallélogramme en deux parties égales (34); donc le parallélogramme ΑΒΓΔ est double du triangle ΕΒΓ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

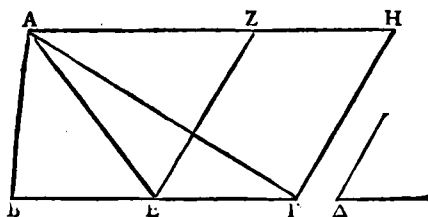
PROPOSITIO XLII.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον
συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ¹.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ
δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὲ τῷ ΑΒΓ
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι
ἐν ἰσῇ³ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Dato triangulo æquale parallelogrammum
constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum ΑΒΓ, datus vero
angulus rectilineus Δ; oportet igitur ipsi ΑΒΓ
triangulo æquale parallelogrammum constituere
in æquali ipsi Δ angulo rectilineo.



Τιμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπ-
εζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση
ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλ-
ληλος ἢ χθῶ ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλ-
ληλος ἢ χθῶ ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ
τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ
τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ

Secetur ΒΓ bifariam in Ε, et jungatur ΑΕ,
et constituatur ad ΕΓ rectam et ad punctum
in eâ Ε ipsi Δ angulo æqualis ΓΕΖ, et per Α
quidem ipsi ΕΓ parallela ducatur ΑΗ, per Γ vero
ipsi ΕΖ parallela ducatur ΓΗ; parallelogrammum
igitur est ΖΕΓΗ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΓ, æquale est
et ΑΒΕ triangulum ipsi ΑΕΓ triangulo; nam super

PROPOSITION XLII.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.

Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε(10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (23), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

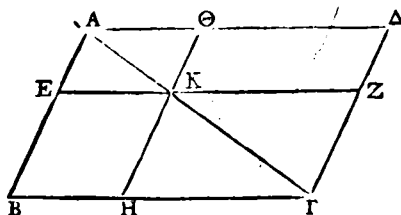
Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

PROPOSITIO XLIII.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λίσσω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.



Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τριγώνον

Omnis parallelogrammi eorum circa diametrum parallelogrammorum complementa æqualia inter se sunt.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, et circa ΑΓ parallelogramma quidem sint ΕΘ, ΖΗ, ipsa vero dicta complementa ΒΚ, ΚΔ; dico æquale esse ΒΚ complementum ipsi ΚΔ complemento.

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius ΑΓ, æquale est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΓΔ triangulo. Rursus quoniam parallelogrammum est ΕΚΘΑ, diameter autem ipsius est ΑΚ, æquale est ΑΕΚ triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo. Propter eadem et ΚΖΓ triangulum ipsi ΚΗΓ

PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les complémens des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle complémens; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.

Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le

τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ² ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἐστὶ δὲ καὶ ἕλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἕλω τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΗΔ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον³. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξ ἡς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Περὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμον.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας

est æquale. Quoniam igitur ΑΕΚ quidem triangulum ipsi ΑΘΚ triangulo est æquale; ΚΖΓ vero ipsi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ cum ipso ΚΗΓ est æquale ipsi ΑΘΚ triangulo cum ΚΖΓ triangulo; est autem et totum ΑΕΓ triangulum toti ΑΔΓ æquale. Reliquum igitur ΒΚ complementum reliquo ΗΔ complemento est æquale. Omnis igitur parallelogrammi, etc.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit quidem data recta ΑΒ, datum vero triangulum Γ, et datus angulus rectilineus Δ; oportet igitur ad datam rectam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare in æquali ipsi Δ angulo.

Constituatur ipsi Γ triangulo æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ qui est æqualis, ipsi Δ; et ponatur in directum ΒΕ ipsi ΒΑ, et

triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΕΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

PROPOSITION XLIV.

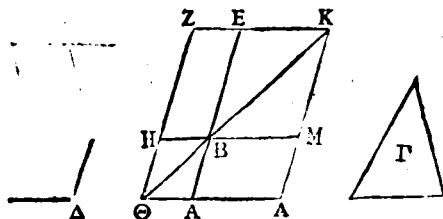
A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

Dans un angle ΕΒΗ égal à l'angle Δ, construisons un parallélogramme ΒΕΖΗ égal au triangle Γ (42), plaçons la droite ΒΕ dans la direction de la droite ΒΑ, prolonge-

εἶναι τὴν BE τῇ BA', καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν BH, EZ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, EZ εὐθεῖα ἐνέπεισεν² ἡ ΘΖ, αἱ ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα³ ῥωνίαί δὲ οὖν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι⁴. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἑλάσσονες εἰσὶν· αἱ δὲ ἀπὸ ἑλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Εὐκείνησθωσαν καὶ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΑ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Α, Μ σημεία.

producatur ZH ad Θ, et per A alterutri ipsarum BH, EZ parallela ducatur ΑΘ, et jungatur ΘΒ. Et quoniam in parallelas ΑΘ, EZ recta incidit ΘΖ, ipsi ΑΘΖ, ΘΖΕ anguli duobus rectis sunt æquales; ergo ΒΘΗ, ΗΖΕ duobus rectis minores sunt; rectæ autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productæ concurrunt; ΘΒ, ΖΕ igitur productæ concurrent. Producantur et concurrant in Κ, et per Κ punctum alterutri ipsarum ΕΑ, ΖΘ parallela ducatur ΚΑ, et producantur ΘΑ, ΗΒ ad Α, Μ puncta.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΑΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ⁵ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ⁶ ΑΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ

Parallelogrammum igitur est ΘΑΚΖ, diametrum autem ipsius ΘΚ, et circa ΘΚ parallelogramma quidem ΑΗ, ΜΕ, ipsa vero dicta complementa ΑΒ, ΒΖ; æquale igitur est ΑΒ ipsi ΒΖ,

geons la droite ZH vers Θ, par le point A conduisons ΑΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites BH, EZ (31), et joignons ΘΒ. Puisque la droite ΘΖ tombe sur les parallèles ΑΘ, EZ, les angles ΑΘΖ, ΘΖΕ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΒΘΗ, ΗΖΕ sont moindres que deux droits. Mais les droites prolongées à l'infini, du côté où les angles intérieurs sont moindres que deux angles droits, se rencontrent (dém. 5); donc les droites ΘΒ, ΖΕ étant prolongées, se rencontreront; qu'elles soient prolongées (dém. 2), et qu'elles se rencontrent en Κ; par le point Κ, conduisons ΚΑ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΕΑ, ΖΘ (31), et prolongeons les droites ΘΑ, ΗΒ vers les points Α, Μ.

La figure ΘΑΚΖ est un parallélogramme, ΘΚ est sa diagonale, et autour de ΘΚ sont les parallélogrammes ΑΗ, ΜΕ, et les parallélogrammes ΑΒ, ΒΖ, qu'on nomme compléments; donc ΑΒ est égal à ΒΖ (43). Mais ΒΖ est égal au triangle

74 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ AB τῷ BZ. ἀλλὰ τὸ BZ τῷ Γ τριγώνῳ ἴστί· καὶ τὸ AB ἄρα τῷ Γ ἴστί· καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστί· ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ Δ ἴστί· καὶ ἡ ὑπὸ ABM ἄρα τῇ Δ γωνία ἴστί.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν AB, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέληται τὸ AB, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM, ἡ ἴστί· ἴση τῇ Δ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Sed BZ ipsi Γ triangulo est æquale; et AB igitur ipsi Γ est æquale. Et quoniam æqualis est HBE angulus ipsi ABM, sed HBE ipsi Δ est æquale; et ABM igitur ipsi Δ angulo est æqualis.

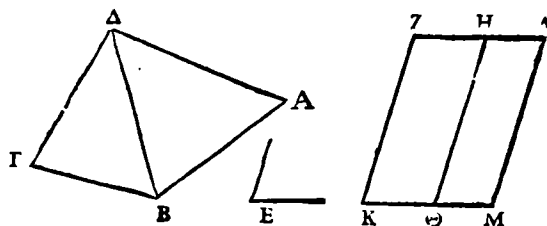
Ad datam igitur rectam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicatum est AB, in angulo ABM qui est æqualis ipsi Δ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μί.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

PROPOSITIO XLV.

Dato rectilineo, æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.



Ἐστω τὸ μὲν² δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ABΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ABΓΔ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ³ γωνίᾳ τῇ Ε.

Sit quidem datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus E; oportet igitur ipsi ABΓΔ rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo E.

Γ; donc AB est égal à Γ. Et puisque l'angle HBE est égal à l'angle ABM (15), et que l'angle HBE est égal à l'angle Δ, l'angle ABM est égal à l'angle Δ.

Donc à la droite donnée AB, et dans l'angle ABM égal à Δ, on applique le parallélogramme AB égal au triangle donné Γ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLV.

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée.

Soit ABΓΔ la figure rectiligne donnée, et E l'angle rectiligne donné; il faut, dans l'angle donné E, construire un parallélogramme égal à la figure rectiligne ABΓΔ.

Επιζεύχθω γάρ ἡ ΔΒ, καὶ συνιστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἶσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶ τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἶσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΟΜ γωνίᾳ, ἡ ἴση ἐστὶν τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΟΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα⁵ τῇ ὑπὸ ΗΟΜ ἐστὶν ἴση⁶. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΟΜ ἴσαι εἰσίν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΟΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΚ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐπιζήσας γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖαι⁷ ἐνέπεισιν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. Αλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν

Jungatur enim ΔΒ, et constituatur ipsi ΑΒΔ triangulo æquale parallelogrammum ΖΘ, in ΘΚΖ angulo, qui æqualis est ipsi Ε; et applicetur ad ΘΗ rectam ipsi ΔΒΓ triangulo æquale parallelogrammum ΗΜ, in ΗΟΜ angulo, qui est æqualis ipsi Ε.

Et quoniam Ε angulus utrique ipsorum ΘΚΖ, ΗΟΜ est æqualis; et ΘΚΖ igitur ipsi ΗΟΜ est æqualis. Communis addatur ΚΘΗ; ergo ΖΚΘ, ΚΘΗ, ipsis ΚΘΗ, ΗΟΜ æquales sunt. Sed ΖΚΘ, ΚΘΗ duobus rectis æquales sunt; et ΚΘΗ, ΗΟΜ igitur duobus rectis æquales sunt. Ad aliquam igitur rectam ΗΘ, et ad punctum in eâ Θ, duæ rectæ ΘΚ, ΘΜ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est ΚΘ ipsi ΘΜ. Et quoniam in parallelas ΚΜ, ΖΗ recta incidit ΘΗ, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ æquales inter se sunt. Communis addatur ΘΗΛ; ergo ΜΘΗ, ΘΗΛ ipsis ΘΗΖ, ΘΗΛ æquales sunt. Sed ΜΘΗ, ΘΗΛ duobus rectis æquales sunt; et ΘΗΖ, ΘΗΛ igitur duobus rectis æquales sunt; in directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. Et quoniam ΚΖ

Joignons ΔΒ, et construisons dans l'angle εκΖ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΖΘ égal au triangle ΑΒΔ (42), et à la droite ΗΘ appliquons dans l'angle ΗΟΜ égal à l'angle Ε, le parallélogramme ΗΜ égal au triangle ΔΒΓ.

Puisque l'angle Ε est égal à chacun des angles εκΖ, ΗΟΜ, l'angle εκΖ est égal à l'angle ΗΟΜ; ajoutons-leur l'angle commun ΚΘΗ; les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ seront égaux aux angles ΚΘΗ, ΗΟΜ. Mais les angles ΖΚΘ, ΚΘΗ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΚΘΗ, ΗΟΜ sont égaux à deux droits. Donc les deux droites εκ, ομ, non placées du même côté, font avec la droite ΗΘ, et au point ο de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΚΘ est dans la direction de la droite ομ (14). Et puisque la droite ΘΗ tombe sur les parallèles ΚΜ, ΖΗ, les angles alternes ΜΘΗ, ΘΗΖ sont égaux entr'eux (29). Ajoutons-leur l'angle commun ΘΗΛ; les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ seront égaux aux angles ΘΗΖ, ΘΗΛ. Mais les angles ΜΘΗ, ΘΗΛ sont égaux à deux droits (29); donc les angles ΘΗΖ, ΘΗΛ sont aussi égaux à deux

76 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘHZ , $\Theta H\Lambda$ ἄρα
 δυὸν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν⁸
 ἡ ZH τῇ $H\Lambda$. Καὶ ἐπεὶ ἡ KZ τῇ ΘH ἴση τε καὶ
 παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘH τῇ $M\Lambda$ ·
 καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ $M\Lambda$ ἴση τε καὶ παράλληλός
 ἐστίν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτάς εὐθεῖαι αἱ KM ,
 $Z\Lambda$, καὶ αἱ KM , $Z\Lambda$ ἴσαι τε καὶ παράλληλός εἰσιν·
 παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $KZAM$. Καὶ ἐπεὶ
 ἦτον ἐστὶ τὸ μὲν $AB\Delta$ τρίγωνον τῷ $Z\Theta$ παραλλη-
 λογράμμῳ, τὸ δὲ $\Delta B\Gamma$ τῷ HM · ὅλον ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta$
 εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ $KZAM$ παραλληλογράμμῳ
 ἐστὶν ἴσον ⁹.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ $AB\Gamma\Delta$ ἴσον
 παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ $KZAM$, ἐν
 γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZKM , ἥ ἐστὶν ἴση τῇ¹⁰ δοθείσῃ
 τῇ E . Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΣ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνόν ἀνα-
 γράψαι.

Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ἡ AB · δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς
 AB εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

droits; donc la droite ZH est dans la direction de la droite $H\Lambda$; mais KZ est
 égal et parallèle à ΘH , et ΘH égale et parallèle à $M\Lambda$; donc la droite KZ est égale
 et parallèle à $M\Lambda$ (not. 1 et 30); mais ces deux droites sont jointes par les
 droites KM , $Z\Lambda$, et les droites KM , $Z\Lambda$ sont égales et parallèles (33); donc
 $KZAM$ est un parallélogramme. Mais le triangle $AB\Delta$ est égal au parallélogramme
 $Z\Theta$, et le triangle $\Delta B\Gamma$ est égal au parallélogramme HM ; donc la figure recti-
 ligne entière $AB\Gamma\Delta$ est égale au parallélogramme entier $KZAM$.

Donc le parallélogramme $KZAM$ a été construit égal à la figure rectiligne
 lonnée $AB\Gamma\Delta$, dans l'angle ZKM égal à l'angle donné E ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLVI.

Décrire un carré avec une droite donnée.

Soit AB la droite donnée; il faut décrire un carré avec la droite AB .

ipsi ΘH æqualis et parallela est, sed ΘH ipsi $M\Lambda$;
 et KZ igitur ipsi $M\Lambda$ æqualis et parallela est; et
 jungunt ipsas rectæ KM , $Z\Lambda$, et KM , $Z\Lambda$ æquales
 et parallelae sunt; parallelogrammum igitur est
 $KZAM$. Et quoniam aquale est quidem $AB\Delta$
 triangulum ipsi $Z\Theta$ parallelogrammo; $\Delta B\Gamma$ vero
 ipsi HM ; totum igitur $AB\Gamma\Delta$ rectilineum toti
 $KZAM$ parallelogrammo est æquale.

Ergo dato rectilineo $AB\Gamma\Delta$ æquale parallelo-
 grammum constitutum est $KZAM$ in angulo ZKM ,
 qui est æqualis dato E . Quod oportebat facere.

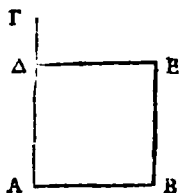
PROPOSITIO XLVI.

Ex datâ rectâ quadratum describere.

Sit data recta AB ; oportet igitur ex AB rectâ
 quadratum describere.

Ἡχθω τῇ AB εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A, πρὸς ὀρθᾶς ἡ AG· καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ AD· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ AB παράλληλος ἡχθω ἡ DE· διὰ δὲ τοῦ B σημείου τῇ AD παράλληλος ἡχθω ἡ BE.

Ducatur ipsi AB rectæ, a puncto in eâ A, ad rectos ipsa AG; et ponatur ipsi AB æqualis AD; et per Δ quidem punctum ipsi AB parallela ducatur DE; per B vero punctum ipsi AD parallela ducatur BE.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ADEB· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ DE, ἡ δὲ AD τῇ BE. Ἀλλὰ ἡ AB τῇ AD ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ BA, AD, DE, EB ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ADEB παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς AB, DE εὐθεῖα ἐπέπεσεν ἡ AD· αἱ ἄρα ὑπὸ BAD, ADE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BAD· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ADE. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ἀπεναντίων τῶν ὑπὸ ABE, BED γωνιῶν ὀρθογώνιον.

Parallelogrammum igitur est ADEB; æqualis igitur est quidem AB ipsi DE, AD vero ipsi BE. Sed AB ipsi AD est æqualis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ADEB parallelogrammum. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim in parallelas AB, DE recta incidit AD; ergo BAD, ADE anguli duobus rectis æquales sunt. Rectus autem est BAD; rectus igitur et ADE. Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli æqualia inter se sunt; rectus igitur et uterque oppositorum ABE, BEA angulorum; rectangulum igitur est ADEB. Ostensum autem est et æquilaterum;

Du point A, donné dans cette droite, conduisons AG perpendiculaire à AB (11); faisons AD égal à AB (5); par le point Δ conduisons DE parallèle à AB (31); et par le point B conduisons BE parallèle à AD.

La figure ADEB est un parallélogramme; donc AB est égal à DE, et AD égal à BE. Mais AB est égal à AD; donc les quatre droites BA, AD, DE, EB sont égales entr'elles; donc le parallélogramme ADEB est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite AD tombe sur les parallèles AB, DE, les angles BAD, ADE sont égaux à deux droits (29); mais l'angle BAD est droit; donc l'angle ADE est droit aussi. Mais les côtés et angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux (34); donc chacun des angles opposés ABE, BEA est droit; donc le parallélogramme ADEB est rectangle; mais nous avons démontré qu'il est

78 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἔστι τὸ ΑΔΕΒ. Εδιέχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·
τετράγωνον ἄρα ἔστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ
εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

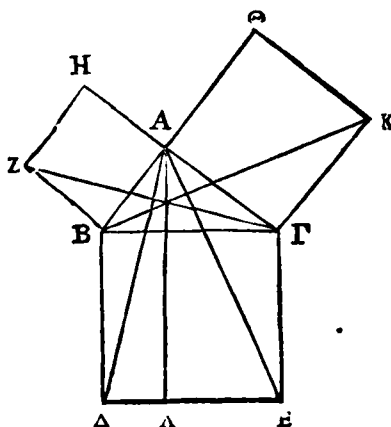
quadratum igitur est, et est ex ΑΒ rectā descrip-
tum. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς
τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετρά-
γωνον, ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν
περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere
rectum angulum subtendente æquale est quadra-
tis ex lateribus rectum angulum continentibus.



Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον
τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ
τετράγωνον ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τε-
τραγώνοις.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum
habens ΒΑΓ angulum; dico quadratum ex ΒΓ
æquale esse quadratis ex ipsis ΒΑ, ΑΓ.

équilateral; donc le parallélogramme ΑΔΕΒ est un carré, et il est décrit avec la
droite ΑΒ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est
égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le carré
du côté ΒΓ est égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ᾗχθω ἡ ΑΑ· καὶ ἐπιεὺχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ² τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ἔλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὴ³ αἱ ΔΒ, ΔΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση⁴. Βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσις τῇ ΖΓ⁵ ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι⁶ τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς

Describatur enim ex ΒΓ quidem quadratum ΒΔΕΓ; ex ipsis vero ΒΑ, ΑΓ ipsa ΗΒ, ΘΓ; et per Α alterutri ipsarum ΒΔ, ΓΕ parallela ducatur ΑΑ; et jungantur ΑΔ, ΖΓ.

Et quoniam rectus est uterque ipsorum ΒΑΓ, ΒΑΗ angulorum, ad aliquam igitur rectam ΒΑ, et ad punctum in eâ Α, duæ rectæ ΑΓ, ΑΗ, non ad easdem partes positæ, deinceps angulos duobus rectis æquales faciunt; in rectum igitur est ΓΑ ipsi ΑΗ. Propter eadem et ΒΑ ipsi ΑΘ est in rectum. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΖΒΑ, rectus enim uterque, communis addatur ΑΒΓ; totus igitur ΔΒΑ toti ΖΒΓ est æqualis. Et quoniam æqualis est quidem ΔΒ ipsi ΒΓ, ipsa vero ΖΒ ipsi ΒΑ; duæ utique ΔΒ, ΔΑ duabus ΓΒ, ΒΖ æquales sunt, utraque utrique, et angulus ΔΒΑ angulo ΖΒΓ æqualis; basis igitur ΑΔ basi ΖΓ æqualis, et ΑΒΔ triangulum ipsi ΖΒΓ triangulo est æquale. Et est quidem ipsius ΑΒΔ trianguli duplum ΒΑ παραλληλογράμμου, basim enim eandem habent ΒΔ et in eisdem sunt parallelis ΒΔ, ΑΑ; ipsius vero ΖΒΓ trianguli duplum ΒΗ quadratum, et enim rursus basim eandem habent et in eisdem

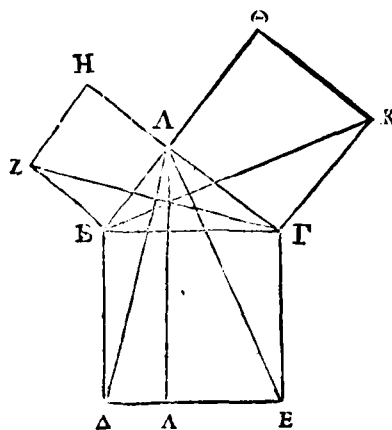
Décrivons avec ΒΓ le carré ΒΔΕΓ, et avec ΒΑ, ΑΓ les carrés ΗΒ, ΔΓ; et par le point Α conduisons ΑΑ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.

Puisque chacun des angles ΒΑΓ, ΒΑΗ est droit, les deux droites ΑΓ, ΑΗ, non placées du même côté, font avec la droite ΒΑ au point Α de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓΑ est dans la direction de ΑΗ; la droite ΒΑ est dans la direction ΑΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΖΒΑ, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ΑΒΓ, l'angle entier ΔΒΑ sera égal à l'angle entier ΖΒΓ (not. 4). Et puisque ΔΒ est égal à ΒΓ, et ΖΒ à ΒΑ, les deux droites ΔΒ, ΔΑ sont égales aux deux droites ΓΒ, ΒΖ, chacune à chacune; mais l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc la base ΑΔ est égale à la base ΖΓ, et le triangle ΑΒΔ égal au triangle ΖΒΓ (4). Mais le parallélogramme ΒΑ est double du triangle ΑΒΔ (41), car ils ont la même base ΒΔ et ils sont entre

80 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις⁹ ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετράγωνῳ. Ομοίως

sunt parallelis ΖΒ, ΗΓ; æqualium autem dupla æqualia inter se sunt; æquale igitur est et ΒΑ parallelogrammum ipsi ΗΒ quadrato. Similiter autem junctis ΑΕ, ΒΚ ostendetur et ΓΑ parallelogrammum æquale ipsi ΘΓ quadrato. Totum igitur ΒΔΕΓ quadratum duobus ΗΒ, ΘΓ quadratis æ-



δὲ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΑ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετράγωνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυοῖ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετράγωνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον⁸ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετράγωνοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

quale est, et est quidem ΒΔΕΓ quadratum ex ΒΓ descriptum, ipsa vero ΗΒ, ΘΓ ex ΒΑ, ΑΓ; ergo quadratum ex ΒΓ latere æquale est quadratis ex ΒΑ, ΑΓ lateribus; ergo in rectangulis, etc.

les mêmes parallèles ΒΔ, ΑΛ; le carré ΒΗ est double du triangle ΖΒΓ, car ils ont la même base ΒΖ et ils sont entre les mêmes parallèles ΖΒ, ΗΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélogramme ΒΑ est égal au carré ΗΒ. Ayant joint ΑΕ, ΒΚ, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΑ est égal au carré ΘΓ; donc le carré entier ΒΔΕΓ est égal aux deux carrés ΗΒ, ΘΓ. Mais le carré ΒΔΕΓ est décrit avec ΒΓ, et les carrés ΗΒ, ΘΓ sont décrits avec ΒΑ, ΑΓ; donc le carré du côté ΒΓ est égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ. Donc dans les triangles, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

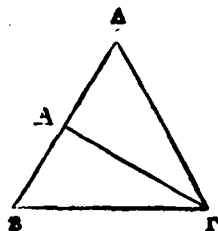
PROPOSITIO XLVIII.

Εάν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γάρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Si trianguli ex uno laterum quadratum æquale est quadratis ex reliquis trianguli duobus lateribus ; contentus angulus a reliquis trianguli duobus lateribus rectus est.

Trianguli enim ΑΒΓ ex uno ΒΓ latere quadratum æquale sit quadratis ex ΒΑ, ΑΓ lateribus ; dico rectum esse ΒΑΓ angulum.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετρα-

Ducatur enim ab Α puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectes ΑΔ, et ponatur ipsi ΒΑ æqualis ΑΔ, et jungatur ΔΓ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, æquale est et ex ΔΑ quadratum ipsi ex ΑΒ quadrato. Commune addatur ex ΑΓ quadratum ; ipsa igitur ex

PROPOSITION XLVIII.

Si le carré d'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit.

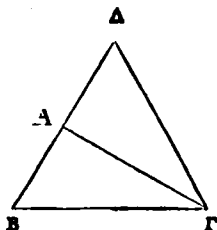
Que le carré du côté ΒΓ du triangle ΑΒΓ soit égal aux carrés des côtés ΒΑ, ΑΓ ; je dis que l'angle ΑΒΓ est droit.

Du point Α, conduisons la droite ΑΔ perpendiculaire à ΑΓ (11), faisons ΑΔ égal à ΒΑ, et joignons ΔΓ.

Car puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, le carré de ΔΑ est égal au carré de ΑΒ. Ajoutons le carré commun de ΑΓ ; les carrés des droites ΔΑ, ΑΓ seront égaux

γωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔA , $A\Gamma$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ τετραγώνους. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔA , $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνῳ· ὥστε

ΔA , $A\Gamma$ quadrata æqualia sunt ipsis ex BA , $A\Gamma$ quadratis. Sed ipsis quidem ex ΔA , $A\Gamma$ æquale est ipsum ex $\Delta\Gamma$, rectus enim est $\Delta A\Gamma$ angulus; ipsis vero ex BA , $A\Gamma$ æquale est ipsum ex $B\Gamma$, ponitur enim; ipsum igitur ex $\Delta\Gamma$ quadratum æquale est ipsi ex $B\Gamma$ quadrato; quare et latus $\Delta\Gamma$ ipsi $B\Gamma$ est æquale; et quoniam æqualis est



καὶ πλευρὰ ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ $B\Gamma$ ἐξὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐξὶν ἡ ΔA τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ $A\Gamma$, δύο δὴ αἱ ΔA , $A\Gamma$ δυοῖ ταῖς BA , $A\Gamma$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ $\Delta\Gamma$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B A \Gamma$ ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $B A \Gamma$. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔA ipsi AB , communis autem $A\Gamma$, duæ utique ΔA , $A\Gamma$ duabus BA , $A\Gamma$ æquales sunt, et basis $\Delta\Gamma$ basi $B\Gamma$ est æqualis; angulus igitur $\Delta A\Gamma$ angulo $B A \Gamma$ est æqualis. Rectus autem $\Delta A\Gamma$; rectus igitur et $B A \Gamma$. Si igitur trianguli, etc.

aux carrés des droites BA , $A\Gamma$. Mais le carré de $\Delta\Gamma$ est égal aux carrés des droites ΔA , $A\Gamma$ (47), car l'angle $\Delta A\Gamma$ est droit, et le carré de $B\Gamma$ est supposé égal aux carrés des droites BA , $A\Gamma$; donc le carré de $\Delta\Gamma$ est égal au carré de $B\Gamma$; donc le côté $\Delta\Gamma$ est égal au côté $B\Gamma$; mais ΔA est égal à AB , et $A\Gamma$ est commun; donc les deux droites ΔA , $A\Gamma$ sont égales aux deux droites BA , $A\Gamma$; mais la base $\Delta\Gamma$ est égale à la base $B\Gamma$; donc l'angle $\Delta A\Gamma$ est égal à l'angle $B A \Gamma$ (8). Mais l'angle $\Delta A\Gamma$ est droit; donc l'angle $B A \Gamma$ est droit aussi. Donc, etc.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

ΟΡΟΙ.

α. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεται λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἐν ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυοῖ παραπληρώμασι γνώμων καλεῖσθω.

DÉFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectum angulum continentibus rectis.

2. Omnis autem parallelogrammi spatii eorum circa diametrum ipsius parallelogrammorum unumquodque cum duobus complementis gnomon vocetur.

LE DEUXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

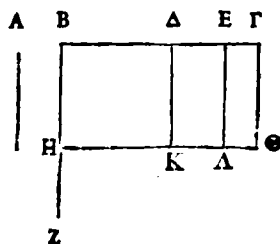
1. Tout parallélogramme rectangle est dit contenu sous deux droites qui comprennent un angle droit.

2. Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εάν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα διηγοτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.



Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Si sint duæ rectæ, secta fuerit autem altera ipsarum in æqualia quotcumque segmenta; contentum rectangulum sub duabus rectis æquale est et ipsis sub non sectâ et unoquoque segmentorum contentis rectangulis.

Sint duæ rectæ Α, ΒΓ, et secta sit ΒΓ utcumque in Δ, Ε punctis; dico ipsum sub Α, ΒΓ contentum rectangulum æquale esse et ipsi sub Α, ΒΔ contento rectangulo, et ipsi sub Α, ΔΕ, et etiam ipsi sub Α, ΕΓ.

Ducatur enim a Β ipsi ΒΓ ad rectos ΒΖ, et ponatur ipsi Α æqualis ΒΗ, et per Η quidem ipsi ΒΓ parallela ducatur ΗΘ; per Δ, Ε, Γ vero ipsi ΒΗ parallelæ ducantur ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a deux droites, et si l'une d'elles est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre.

Soient deux droites Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit coupé à volonté aux points Δ, Ε; je dis que le rectangle contenu sous Α, ΒΓ est égal au rectangle contenu sous Α, ΒΔ, au rectangle sous Α, ΔΕ, et au rectangle sous Α, ΕΓ.

Par le point Β, conduisons la droite ΒΖ perpendiculaire à ΒΓ (11. 1); faisons ΒΗ égal à Α, et par le point Η conduisons ΗΘ parallèle à ΒΓ (31. 1); et par les points Δ, Ε, Γ, conduisons les droites ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ, parallèles à la droite ΒΗ.

Ισον δὴ ἐστὶ τὸ $B\Theta$ τοῖς BK , $\Delta\Lambda$, $E\Theta$. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $B\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν A , $B\Gamma$, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν HB , $B\Gamma$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A . τὸ δὲ BK τὸ ὑπὸ τῶν A , $B\Delta$, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν HB , $B\Delta$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A . τὸ δὲ $\Delta\Lambda$ τὸ ὑπὸ τῶν A , ΔE , ἴση γὰρ ἡ ΔK , τοῦτ' ἐστὶν ἡ BH , τῇ A . καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ $E\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν A , $E\Gamma$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ A , $B\Delta$, καὶ τῷ ὑπὸ A , ΔE , καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ A , $E\Gamma$. Ἐὰν ἄρα ᾧσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est $B\Theta$ ipsis BK , $\Delta\Lambda$, $E\Theta$; et est quidem $B\Theta$ ipsum sub A , $B\Gamma$, continetur enim sub HB , $B\Gamma$, æqualis autem BH ipsi A ; BK vero ipsum sub A , $B\Delta$, continetur enim sub HB , $B\Delta$, æqualis autem BH ipsi A ; $\Delta\Lambda$ vero ipsum sub A , ΔE , æqualis enim ΔK , hoc est BH , ipsi A ; et etiam similiter $E\Theta$ ipsum sub A , $E\Gamma$; ergo ipsum sub A , $B\Gamma$ æquale est ipsi sub A , $B\Delta$, et ipsi sub ipsis A , ΔE , et etiam ipsi sub A , $E\Gamma$. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ.

Le rectangle $B\Theta$ est égal aux rectangles BK , $\Delta\Lambda$, $E\Theta$. Mais $B\Theta$ est le rectangle sous A , $B\Gamma$, puisqu'il est contenu sous HB , $B\Gamma$, et que BH est égal à A ; BK est le rectangle sous A , $B\Delta$, puisqu'il est contenu sous HB , $B\Delta$, et que BH est égal à A ; $\Delta\Lambda$ est le rectangle sous A , ΔE , puisque ΔK , c'est-à-dire BH , est égal à A ; et semblablement, $E\Theta$ est le rectangle sous A , $E\Gamma$; donc le rectangle contenu sous A , $B\Gamma$ est égal au rectangle sous A , $B\Delta$, au rectangle sous A , ΔE , et encore au rectangle sous A , $E\Gamma$. Donc, etc.

PROPOSITION II.

Si une ligne droite est coupée à volonté, les rectangles contenus sous la droite entière et sous l'un et l'autre segment, sont égaux au carré de la droite entière.

Que la droite AB soit coupée à volonté en un point Γ ; je dis que le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$, avec le rectangle contenu sous AB , $A\Gamma$, est égal au carré de AB .

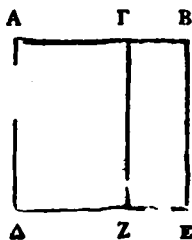
PROPOSITIO II.

Si recta linea secetur utcumque, ipsa sub totâ et utroque segmentorum contenta rectangula æqualia sunt ipsi ex totâ quadrato.

Recta enim AB secetur utcumque in Γ puncto; dico ipsum sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum, cum ipso sub BA , $A\Gamma$ contento rectangulo, æquale esse ipsi ex AB quadrato.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔΕΒ$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν $ΑΔ$, $ΒΕ$ παράλληλος ἡ ΓZ .

Describatur enim ex AB quadratum $ΑΔΕΒ$, et ducatur per Γ alterutri ipsarum $ΑΔ$, $ΒΕ$ parallela ΓZ .



Ἰσὸν δὲ ἔστι ^{5} τὸ AE τοῖς AZ , ΓE · καὶ ἔστι τὸ μὲν AE τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον· τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔA , $A\Gamma$, ἴση δὲ ἡ ΔA τῇ AB · τὸ δὲ ΓE τὸ ὑπὸ AB , $B\Gamma$, ἴση γὰρ ἡ BE τῇ AB · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Æquale utique est AE ipsis AZ , ΓE ; et est quidem AE ipsum ex AB quadratum, AZ vero ipsum sub BA , $A\Gamma$ contentum rectangulum, continetur etenim sub ΔA , $A\Gamma$, æqualis autem ΔA ipsi AB ; ΓE vero ipsum sub AB , $B\Gamma$, æqualis enim BE ipsi AB ; ipsum igitur sub BA , $A\Gamma$, cum ipso sub AB , $B\Gamma$, æquale est ipsi ex AB quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε¹, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum æquale est et ipsi sub segmentis contento rectangulo, et ipsi ex prædicto segmento quadrato.

Avec AB décrivons le quarré $ΑΔΕΒ$ (46. 1), et par le point Γ conduisons ΓZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites $ΑΔ$, $ΒΕ$ (31. 1).

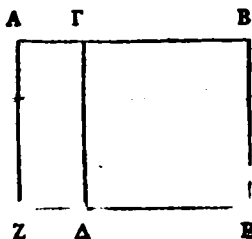
Le quarré AE est égal aux rectangles AZ , ΓE ; mais AE est le quarré de AB , AZ est le rectangle contenu sous AB , $A\Gamma$, puisqu'il est contenu sous ΔA , $A\Gamma$, et que ΔA est égal à AB ; et ΓE est le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$; puisque BE est égal à AB ; donc le rectangle sous BA , $A\Gamma$, avec le rectangle sous AB , $B\Gamma$, est égal au quarré de AB . Donc, etc.

PROPOSITION III.

Si une ligne droite est coupée à volonté, le rectangle contenu sous la droite entière et l'un des segments, est égal au rectangle contenu sous les segments et au quarré du segment premièrement dit.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ · λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνου.

Αναγεγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς GB τετραγώνον τὸ $\Gamma\Delta EB$, καὶ διήχθω ^{4} ἡ EA ἐπὶ τὸ Z , καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν $\Gamma\Delta$, BE παράλληλος ἦχθω ἡ AZ .



Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ AE τοῖς AD , GE · καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AE τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν AB , BE , ἴση δὲ ἡ BE τῇ $B\Gamma$ · τὸ δὲ AD τὸ ^{5} ὑπὸ τῶν AG , GB , ἴση γὰρ ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΓB · τὸ δ' ΔB τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, κατὰ τοῦ ἀπὸ τῆς GB τετραγώνου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Recta enim AB secetur utcumque in Γ ; dico ipsum sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub AG , GB contento rectangulo, cum ipso ex $B\Gamma$ quadrato.

Describatur enim ex GB quadratum $\Gamma\Delta EB$, et producat^{ur} EA in Z , et per A alterutri ipsarum $\Gamma\Delta$, BE parallela ducatur AZ .

Æquale utique est AE ipsis AD , GE ; et est quidem AE ipsum sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum, continetur etenim sub AB , BE ; æqualis autem BE ipsi $B\Gamma$; AD vero ipsum sub AG , GB , æqualis enim $\Delta\Gamma$ ipsi ΓB ; ΔB autem ex GB est quadratum; ipsum igitur sub AB , $B\Gamma$ contentum rectangulum æquale est ipsi sub AG , GB contento rectangulo, cum ipso ex GB quadrato. Si igitur rectæ etc.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ ; je dis que le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$ est égal au rectangle contenu sous AG , GB , avec le carré de $B\Gamma$.

Avec GB décrivons le carré $\Gamma\Delta EB$ (46. 1), prolongeons EA en Z , et par le point A conduisons AZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites $\Gamma\Delta$, BE (31. 1).

Le rectangle AE est égal aux rectangles AD , GE ; mais AE est le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$, puisqu'il est contenu sous AB , BE , et que BE est égal à $B\Gamma$; AD est le rectangle sous AG , GB , puisque $\Delta\Gamma$ est égal à ΓB ; et ΔB est le carré de ΓB ; donc le rectangle contenu sous AB , $B\Gamma$ est égal au rectangle contenu sous AG , GB , avec le carré de ΓB . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

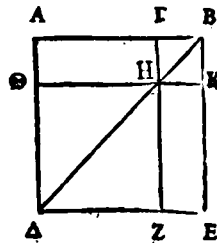
PROPOSITIO IV.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Εὐθεῖα γάρ γραμμὴ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG , GB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB περιεχομένῳ ὀρθόγωνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, ipsum ex totâ quadratum æquale est et ipsis ex segmentis quadratis, et ipsi bis sub segmentis contento rectangulo.

Recta enim linea AB secetur utcumque in Γ ; dico ipsum ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex AG , GB quadratis, et ipsi bis sub AG , GB contento rectangulo.



Αναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνου τὸ $ADEB$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BD , καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν AD , EB παραλλήλος ῥιχθῶ ἡ GHZ , διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρᾳ τῶν AB , DE παραλλήλος ῥιχθῶ ἡ ΘK .

Describatur enim ex AB quadratum $ADEB$, et jungatur BD , et per Γ quidem alterutri ipsarum AD , EB parallela ducatur GHZ , per H vero alterutri ipsarum AB , DE parallela ducatur ΘK .

PROPOSITION IV,

Si la droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments.

Que la droite AB soit coupée à volonté au point Γ ; je dis que le carré de AB est égal aux carrés des segments AG , GB , et à deux fois le rectangle contenu sous AG , GB .

Avec AB décrivons le carré $ADEB$ (46. 1); joignons BD ; par le point Γ conduisons GHZ parallèle à l'une ou à l'autre des droites AD , EB (31. 1), et par le point H conduisons ΘK parallèle à l'une ou à l'autre des droites AB , DE .

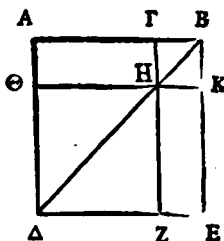
Καὶ ἐπεὶ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτων ἡ ΒΔ, ὁ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. Αλλ' ὁ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΤΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση². Αλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λίγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλος ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπυσιν ἡ ΓΒ³. αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι⁴. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ. Ὡστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἔστιν ἀπὸ⁵ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση

Et quoniam parallela est ΓΖ ipsi ΑΔ, et in ipsas incidit ΒΔ, exterior angulus ΓΗΒ æqualis est interiori et opposito ΑΔΒ. Sed ΑΔΒ ipsi ΑΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΒΑ ipsi ΑΔ est æquale; et ΓΗΒ igitur angulus ipsi ΗΒΓ est æqualis; quare et latus ΒΓ lateri ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; et ΗΚ igitur ipsi ΚΒ est æqualis; æquilaterum igitur est ΓΗΚΒ. Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parallela est ΓΗ ipsi ΒΚ, et in ipsas incidit ΓΒ; ipsi igitur ΚΒΓ, ΒΓΗ anguli duobus rectis sunt æquales. Rectus autem est ΚΒΓ; rectus igitur et ΒΓΗ. Quare et oppositi ΓΗΚ, ΗΚΒ recti sunt; rectangulum igitur est ΓΗΚΒ. Ostensum autem est et æquilaterum; quadratum igitur est, et est ex ΓΒ. Propter eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est ex ΘΗ, hoc est ex ΑΓ; ipsa igitur ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ sunt. Et quoniam æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub ΑΓ, ΓΒ, æqualis enim

Puisque ΓΖ est parallèle à ΑΔ, et que ΒΔ tombe sur ces deux droites, l'angle extérieur ΓΗΒ est égal à l'angle intérieur et opposé ΑΔΒ (29. 1). Mais l'angle ΑΔΒ est égal à l'angle ΑΒΔ (5. 1), puisque le côté ΒΑ est égal au côté ΑΔ; donc l'angle ΓΗΒ est égal à l'angle ΗΒΓ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (6. 1); mais ΓΒ est égal à ΗΚ (34. 1), et ΓΗ égal à ΒΚ; donc ΗΚ est égal à ΚΒ; donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est équilatéral. Je dis qu'il est rectangle. Car puisque ΓΗ est parallèle à ΒΚ, et que ΓΒ tombe sur ces deux droites, les angles ΚΒΓ, ΒΓΗ sont égaux à deux droits (29. 1). Mais l'angle ΚΒΓ est droit (déf. 30. 1); donc l'angle ΒΓΗ est droit. Donc les angles opposés ΓΗΚ, ΗΚΒ sont droits aussi (34. 1); donc le quadrilatère ΓΗΚΒ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un carré, et ce carré est décrit avec ΓΒ. Par la même raison ΘΖ est aussi un carré, et ce carré est décrit avec ΘΗ, c'est-à-dire avec ΑΓ; donc ΘΖ, ΓΚ sont des carrés décrits avec ΑΓ, ΓΒ. Et puisque le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΗΕ (43. 1), et que le rectangle ΑΗ est com-

γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ
 ὑπὸ τῶν⁶ ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἵτι τῇ
 δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ
 τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ
 ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν
 ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ

ΗΓ ipsi ΓΒ; et HE igitur æquale ipsi sub ΑΓ,
 ΓΒ; ipsa igitur ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt ipsi bis
 sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et ΘΖ, ΓΚ quadrata
 ex ΑΓ, ΓΒ; ergo quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ
 æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et
 ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Sed



περιχομένην ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα⁷ ΘΖ,
 ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὃ ἐστὶ τὸ⁸ ἀπὸ
 τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετρά-
 γωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετρα-
 γώνοις καὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιχομένην
 ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἰξῆς.

quatuor ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ totum sunt ΑΔΕΒ,
 quod est ex ΑΒ quadratum; ergo ex ΑΒ qua-
 dratum æquale est et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis
 et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo. Si
 igitur recta, etc.

pris sous les droites ΑΓ, ΓΒ, car ΗΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΗΕ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quarrés ΘΖ, ΓΚ sont décrits avec les droites ΑΓ, ΓΒ; donc les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les quatre figures ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΔΕΒ, qui est le quarré de ΑΒ; donc le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Donc, etc.

ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ.

ET ALITER.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιχομένῳ ὀρθογώνῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἑπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἑπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἑκατέρω ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσιά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ³ Α· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσιά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Αλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. Ἐχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἴστιν

Dico ex AB quadratum æquale esse et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ contento rectangulo.

Quoniam enim, in eadem figurâ, æqualis est ΒΑ ipsi ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΒΔ ipsi ΑΔΒ; et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ergo ΑΒΔ trianguli tres anguli ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ duobus rectis æquales sunt. Rectus autem ΒΑΔ; reliqui igitur ΑΒΔ, ΑΔΒ uni recto æquales sunt; et sunt æquales; uterque igitur ipsorum ΑΒΔ, ΑΔΒ dimidius est recti. Rectus est autem ΒΓΗ, æqualis enim est interiori et opposito qui ad Α; reliquus igitur ΓΗΒ dimidius est recti; æqualis igitur est ΓΗΒ angulus ipsi ΓΒΗ; et latus ΒΓ ipsi ΓΗ est æquale. Sed ΓΒ quidem ipsi ΗΚ est æqualis, ΓΗ vero ipsi ΒΚ; æquilaterum igitur est ΓΚ. Habet autem et rectum ΓΒΚ angulum; quadratum igitur est ΓΚ, et est ex ΓΒ. Propter

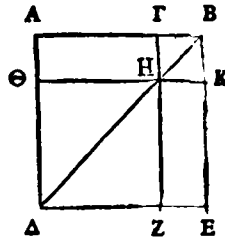
ET AUTREMENT.

Je dis que le carré de AB est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ.

Car puisque, dans la même figure, ΒΑ est égal à ΑΔ, l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΑΔΒ (5. 1); et puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΒΑΔ est droit; donc les deux angles restants ΑΒΔ, ΑΔΒ sont égaux à un droit; et ils sont égaux; donc chacun des angles ΑΒΔ, ΑΔΒ est la moitié d'un droit. Mais l'angle ΒΓΗ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé en Α; donc l'angle restant ΓΗΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΓΗΒ est égal à ΓΒΗ; donc le côté ΒΓ est égal au côté ΓΗ (34. 1). Mais ΓΒ est égal à ΗΚ, et ΓΗ égal à l'angle ΒΚ (34. 1); donc ΓΚ est équilatéral. Mais il a l'angle droit ΓΒΚ; donc ΓΚ

ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΘΖ τε-
τράγωνόν ἐστι⁵, καὶ ἐστὶν ἴσον⁶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ·
τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνα ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσα
τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ
τῷ ΗΕ, καὶ ἴστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,
ἴση ἐστὶ⁷ γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα⁸ ἴσον
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ
τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ

eadem utique et ΘΖ quadratum est, et est æ-
quale ipsi ex ΑΓ; ergo ΓΚ, ΘΖ quadrata sunt,
et sunt æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam
æquale est ΑΗ ipsi ΗΕ, et est ΑΗ ipsum sub
ΑΓ, ΓΒ, æqualis est enim ΓΗ ipsi ΓΒ; et ΕΗ
igitur æquale est ipsi sub ΑΓ, ΓΒ; ergo ΑΗ, ΗΕ
æqualia sunt ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sunt autem et



ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ,
ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δις
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ,
ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΒ τε-
τράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ
τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις
ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ὁπρ
ἴδι διῆξαι.

ipsa ΓΚ, ΘΖ æqualia ipsis ex ΑΓ, ΓΒ; ergo ΓΚ,
ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia sunt et ipsis ex ΑΓ, ΓΒ et
ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed ΓΚ, ΘΖ et ΑΗ, ΗΕ
totum sunt ΑΕ, quod est ex ΑΒ quadratum;
ergo ex ΑΒ quadratum æquale est et ipsis ex
ΑΓ, ΓΒ quadratis et ipsi bis sub ΑΓ, ΓΒ con-
tento rectangulo. Quod oportebat ostendere.

est un carré, et il est le carré de ΓΒ. Par la même raison, ΘΖ est un carré, et il est égal à celui de ΑΓ; donc ΓΚ, ΘΖ sont des carrés, et ils sont égaux à ceux des droites ΑΓ, ΓΒ. Et puisque ΑΗ est égal à ΗΕ (31. 1), et que ΑΗ est sous ΑΓ, ΓΒ, car ΓΗ est égal à ΓΒ; le rectangle ΕΗ est égal au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc les rectangles ΑΗ, ΗΕ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les carrés ΓΚ, ΘΖ sont égaux aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ; donc les figures ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ sont égales aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Mais les figures ΓΚ, ΘΖ, et ΑΗ, ΗΕ sont la figure entière ΑΕ, qui est le carré de ΑΒ, donc le carré de ΑΒ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτων φανερὸν ἔστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἴσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εάν εὐθὺς γραμμῇ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἀνίσω,
τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιχό-
μινον ὀρθωγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν
τομῶν τετραγώνου ἴσον ἰστέ τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισυαίας
τετραγώνῳ.

Εὐθεία γάρ τις ἡ AB τιτμύσθω εἰς μὴν ἴσα
κατὰ τὸ Γ , εἰς δὲ ἄλιστα κατὰ τὸ Δ · λέγω ὅτι τὸ

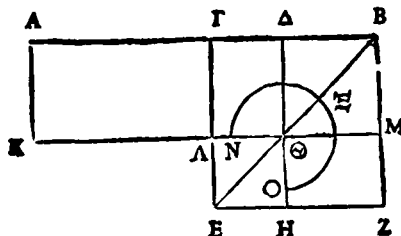
COROLLARIUM.

Ex his utique evidens est, in quadratis spa-
tiis, circa diametrum parallelogramma quadrata
esse.

PROPOSITIO V.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ipsum sub inæqualibus totius segmentis contentum rectangulum cum ipso ex ipsâ inter sectiones quadrato æquale est ipsi ex dimidiâ quadrato.

Recta enim aliqua AB secta sit in æqualia quidem ad Γ , in inæqualia vero ad Δ ; dico



ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ
τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἰσὶ τῇ ἀπὸ
τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

ipsum sub $\Lambda\Delta$, ΔB contentum rectangulum
cum ipso ex $\Gamma\Delta$ quadrato æquale esse ipsi ex
 ΓB quadrato.

COROLLAIRE.

De là il est évident que, dans les quarrés, les parallélogrammes autour de la diagonale sont des quarrés.

PROPOSITION V.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite placée entre les sections, est égal au carré de la moitié de la droite entière.

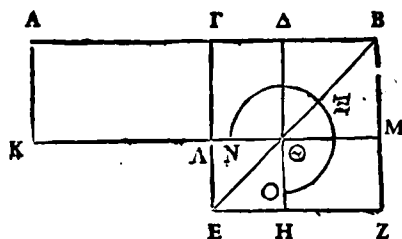
Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ , et en deux parties inégales au point Δ , je dis que le rectangle compris sous $\Delta\Delta$, ΔB , avec le carré de $\Gamma\Delta$, est égal au carré de ΓB .

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΒΖ παράλληλος ἦχθῇ ἡ ΔΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἦχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ'.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΟΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλον τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ

Describatur enim ex ΓΒ quadratum ΓΕΖΒ, et jungatur ΒΕ; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓΕ, ΒΖ parallela ducatur ΔΗ, per Θ vero alterutri ipsarum ΑΒ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ, et rursus per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΒΜ parallela ducatur ΑΚ'.

Et quoniam æquale est ΓΘ complementum ipsi ΟΖ complemento, commune addatur ΔΜ; totum igitur ΓΜ toti ΔΖ æquale est. Sed ΓΜ



τὸ ΓΜ τῷ ΑΑ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση². καὶ τὸ ΑΑ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΞΟ γνώμονι³ ἴσον ἐστὶ. Ἀλλὰ τὸ μὲν⁴ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ⁵ ΔΘ τῇ ΔΒ⁶. καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΗ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὃ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ

ipsi ΑΑ æquale est, quia et ΑΓ ipsi ΓΒ æqualis; et ΑΑ igitur ipsi ΔΖ æquale est. Commune addatur ΓΘ; totum igitur ΑΘ ipsi ΝΞΟ gnomoni æquale est. Sed ΑΘ quidem ipsum sub ΑΔ, ΔΒ est, æqualis enim ΔΘ ipsi ΔΒ; et ΝΞΟ igitur gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΔ; ergo ΝΞΟ gnomon et ΑΗ æqualia sunt ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo et ipsi ex ΓΔ quadrato.

Avec la droite ΓΒ décrivons le carré ΓΕΖΒ (46. 1), et joignons ΒΕ; par le point Δ conduisons ΔΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΒΖ (31. 1): par le point Θ conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΕΖ; et par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΒΜ,

Puisque le complément ΓΘ est égal au complément ΟΖ (43. 1), ajoutons le carré commun ΔΜ, le rectangle entier ΓΜ sera égal au rectangle entier ΔΖ. Mais ΓΜ est égal à ΑΑ (36. 1), puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ; donc le rectangle ΑΑ est égal au rectangle ΔΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΘ, le rectangle entier ΑΘ sera égal au gnomon ΝΞΟ; mais ΑΘ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, puisque ΔΘ est égal à ΔΒ; donc le gnomon ΝΞΟ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le carré commun ΑΗ, qui est égal au carré de ΓΔ (corol. 4. 2); le gnomon ΝΞΟ et le carré ΑΗ seront égaux au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, et au carré

ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνόμων καὶ τὸ ΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Sed ΝΞΟ gnomon et ΑΗ totum sunt ΓΕΖΒ quadratum, quod est ex ΓΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΔ quadrato æquale est ipsi ex ΓΒ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ὶ.

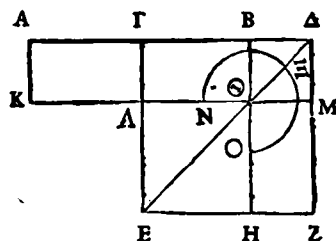
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης συν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεκλιμένης ἢ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα

PROPOSITIO VI.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsum sub totâ cum adjeciâ, et sub adjeciâ contentum rectangulum cum ipso ex dimidiâ quadrato æquale est ipsi ex compositâ ex dimidiâ et adjeciâ tanquam ex unâ descripto quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secetur bifariam ad Γ punctum, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in



ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

directum ΒΔ; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ipso ex ΓΒ quadrato æquale esse ipsi ex ΓΔ quadrato.

de ΓΔ. Mais le gnomon ΝΞΟ et ΑΗ sont le quarré entier ΓΕΖΒ, qui est décrit avec ΓΒ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΔ, est égal au quarré de ΓΒ. Donc,

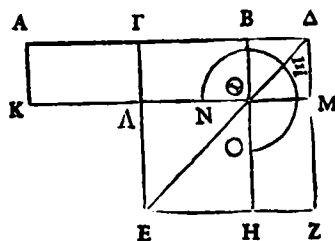
PROPOSITION VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite ΑΒ soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite ΒΔ; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ, avec le quarré de ΓΗ, est égal au quarré de ΓΔ.

Αναγινράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὴν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ᾗ ΖΗ· ἡ ΒΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ᾗ ΖΗ· ἡ ΚΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΑ, ΔΜ παράλληλος ᾗ ΖΗ· ἡ ΑΚ.

Describatur enim ex ΓΔ quadratum ΓΕΖΔ, et jungatur ΔΕ, et per Β quidem punctum alterutri ipsarum ΓΕ, ΔΖ parallela ducatur ΒΗ; per Θ vero punctum alterutri ipsarum ΑΔ, ΕΖ parallela ducatur ΚΜ; et adhuc per Α alterutri ipsarum ΓΑ, ΔΜ parallela ducatur ΑΚ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσων ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. Αλλὰ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΟΖ ἴσων ἐστὶ· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΟΖ ἴσων ἐστὶν. Κοινὸν προσκίεσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΕΘ γνώμην ἐστὶν ἴσων. Αλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΕΘ ἄρα γνώμην ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Κοινὸν προσκίεσθω τὸ ΑΗ, ὃ ἐστὶν ἴσων τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μιτὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσων ἐστὶ τῷ

Quoniam igitur æqualis est ΑΓ ipsi ΓΒ, æquale est et ΑΛ ipsi ΓΘ. Sed ΓΘ ipsi ΟΖ æquale est; et ΑΛ igitur ipsi ΟΖ est æquale. Commune addatur ΓΜ; totum igitur ΑΜ ipsi ΝΕΘ gnomoni est æquale. Sed ΑΜ est ipsum sub ΑΔ, ΔΒ, æqualis enim est ΔΜ ipsi ΔΒ; et igitur ΝΕΘ gnomon æqualis est ipsi sub ΑΔ, ΔΒ contento rectangulo. Commune addatur ΑΗ, quod est æquale ipsi ex ΓΒ quadrato; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΒ contentum rectangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi ΝΕΘ gnomoni et ipsi ΑΗ. Sed ΝΕΘ gno-

Avec la droite ΓΔ décrivons le carré ΓΕΖΔ (46. 1); joignons ΔΕ; par le point Β conduisons ΒΗ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (31. 1); par le point Θ, conduisons ΚΜ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΕΖ, et enfin par le point Α conduisons ΑΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΑ, ΔΜ.

Puisque ΑΓ est égal à ΓΒ, le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΟΖ (43. 1); donc le rectangle ΑΛ est égal au rectangle ΟΖ; ajoutons le rectangle commun ΓΜ, le rectangle entier ΑΜ sera égal au gnomon ΝΕΘ. Mais ΑΜ est le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, car ΔΜ est égal à ΔΒ (4. 2); donc le gnomon ΝΕΘ est égal au rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ. Ajoutons le carré ΑΗ qui est égal au carré de ΓΒ; le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le carré de ΓΒ sera égal au gnomon ΝΕΘ et au carré ΑΗ.

ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΔΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώ-
μων καὶ τὸ ΔΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον,
ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ
περιχομένον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ
τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.
Εὰν ἄρα εὐθεία, καὶ τὰ ἰξῆς.

mon et ΔΗ totum sunt ΓΕΖΔ quadratum, quod
est ex ΓΔ; ergo sub ΑΔ, ΔΒ contentum rec-
tangulum cum ex ΓΒ quadrato æquale est ipsi
ex ΓΔ quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

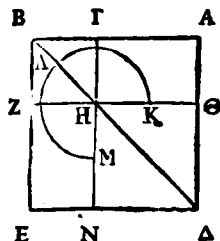
Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήθῃ ὡς ἔτυχῃ, τὸ ἀπὸ
τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ
συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις
ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περι-
εχομένῳ ὀρθογώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ
τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τιτμήσθω ὡς ἔτυχῃ
κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ,

PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur utcunque, ipsa ex totâ
et ex uno segmentorum, simul sumpta quadrata
æqualia sunt et ipsi bis sub totâ et dicto
segmento contento rectangulo, et ipsi ex reli-
quo segmento quadrato.

Recta enim aliqua ΑΒ secta sit utcunque in
Γ puncto; dico ex ΑΒ, ΒΓ quadrata æqualia



ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΑΒ,
ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογώνῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ
τετραγώνῳ.

esse et ipsi bis sub ΑΒ, ΒΓ contento rectan-
gulo et ipsi ex ΓΑ quadrato.

Mais le gnomon ΝΞΟ, et le carré ΔΗ sont le carré entier ΓΕΖΔ, qui est le carré
de ΓΔ; donc le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΒ avec le carré de ΓΒ est égal au
carré de ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si une ligne droite est coupée d'une manière quelconque, le carré de la droite
entière et le carré de l'un des segments, pris ensemble, sont égaux à deux fois
le rectangle compris sous la droite entière et ledit segment, et au carré du
segment restant.

Qu'une droite ΑΒ soit coupée d'une manière quelconque au point Γ; je dis
que les carrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont égaux à deux fois le rectangle compris
sous ΑΒ, ΒΓ, et au carré de ΓΑ.

τῶν AB, BG τετράγωνα ἴσα ἴστί, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου. Εἰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

tento rectangulo cum ex AG quadrato. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

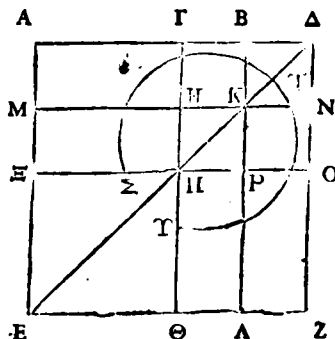
PROPOSITIO VIII.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχῃ, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὶς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἴστί τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Si recta linea secetur utcumque, quater sub totâ et uno segmentorum contentum rectangulum cum ipso ex reliquo segmento quadrato æquale est ipsi ex totâ et dicto segmento tanquam ex unâ descripto quadrato.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχῃ κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λίστω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB,

Recta enim aliqua AB secta sit utcumque in Γ puncto; dico et quater sub AB, BG conten-



BG περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου, ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς AB, BG ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

tum rectangulum cum ipso ex AG quadrato æquale esse ipsi ex ipsâ AB, BG tanquam ex unâ descripto quadrato.

quarrés des droites AB, BG; donc les quarrés des droites AB, BG sont égaux à deux fois le rectangle compris sous AB, BG, et au quarré de AG. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Si une droite est coupée d'une manière quelconque, quatre fois le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, avec le quarré du segment restant, est égal au quarré décrit avec la droite entière et ledit segment, comme avec une seule droite.

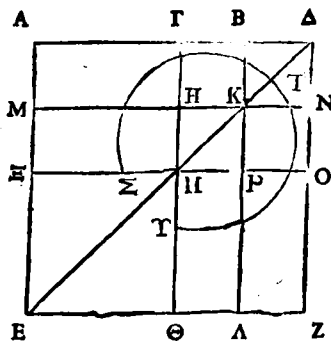
Qu'une droite AB soit coupée d'une manière quelconque au point Γ : je dis que quatre fois le rectangle compris sous les droites AB, BG, avec le quarré de AG, est égal au quarré décrit avec les droites AB, BG, comme avec une seule droite.

Εκτελέσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ AB εὐθεία ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ², καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα³ τῇ ΚΝ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν⁴ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ⁵ ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ⁶ τὸ μὲν⁶ ΓΚ

Producatur enim in directum ipsi AB recta BD, et ponatur æqualis ipsi GB ipsa BD, et describatur ex AD quadratum AEZΔ, et construatür dupla figura.

Quoniam igitur æqualis est BG ipsi BD, sed GB quidem ipsi HK est æqualis, et BD ipsi KN; et HK igitur ipsi KN est æqualis. Propter eadem utique et PR ipsi PO est æqualis. Et quoniam æqualis est GB quidem ipsi BD, et HK ipsi KN;



τῇ ΒΝ, τὸ δὲ ΗΡ τῇ ΚΟ. Αλλὰ τὸ ΓΚ τῇ ΠΝ ἐστὶν ἴσον⁷, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΒΝ ἄρα τῇ ΗΡ ἴσον ἐστὶν⁸. τὰ τέσσαρα ὅρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ΓΚ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΓΗ ἐστὶν⁹ ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ΗΠ ἐστὶν

æquale igitur est GK quidem ipsi BN, et HP ipsi KO. Sed GK ipsi PN est æquale, complementa enim sunt ipsius GO parallelogrammi; et BN igitur ipsi HP æquale est; quatuor igitur GK, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ æqualia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius GK. Rursus, quoniam æqualis est GB ipsi BD, sed BD quidem ipsi BK, hoc est, ipsi GH est æqualis, GB vero ipsi HK, hoc est,

Conduisons la droite BD dans la direction de AB; faisons BD égal à BG; décrivons avec AD le carré AEZΔ (46. 1), et construisons une double figure.

Puisque BG est égal à BD, que GB est égal à HK (34. 1), et BD égal à KN, la droite HK est égale à la droite KN. La droite PR est égale à la droite PO, par la même raison. Et puisque GB est égal à BD, et HK égal à KN, le rectangle GK est égal au rectangle BN, et le rectangle HP égal au rectangle KO (36. 1). Mais le rectangle GK est égal au rectangle PN (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme GO; donc le rectangle BN est égal au rectangle HP; donc les quatre rectangles GK, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont le quadruple du rectangle GK. De plus, puisque GB est égal à BD, et BD égal à BK, c'est-à-dire à GH (34. 1), et que GB est égal à HK, c'est-à-dire à HP, la

ἴση¹⁰· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν¹¹. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν¹² ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. Αλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γάρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσια ἐστίν¹³. Εδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ἐκτὼς ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ΑΚ¹⁴. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστίν, ἴση γάρ¹⁵ ἡ ΚΒ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ΑΚ. Εδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μιὰ τοῦ ἀπὸ¹⁶ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. Αλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ἕλουν ἐπὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ,

ipsi ΗΠ est æqualis; et ΓΗ igitur ipsi ΗΠ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΓΗ quidem ipsi ΗΠ, et ΠΡ ipsi ΡΟ; æquale est et ΑΗ quidem ipsi ΜΠ, et ΠΛ ipsi ΡΖ. Sed ΜΠ ipsi ΠΛ est æquale, complementa enim sunt ipsius ΜΛ parallelogrammi; et ΑΗ igitur ipsi ΡΖ æquale est; quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ æqualia inter se sunt; quatuor igitur ipsius ΑΗ quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ ipsius ΓΚ quadrupla; ergo octo quæ continet ΣΤΥ gnomon quadrupla sunt ipsius ΑΚ. Et quoniam ΑΚ ipsum sub ΑΒ, ΒΔ est, æqualis enim est ΚΒ ipsi ΒΔ; ergo ipsum quater sub ΑΒ, ΒΔ quadruplum est ipsius ΑΚ. Ostensus est autem ipsius ΑΚ quadruplus et ΣΤΥ gnomon. Ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni. Commune addatur ΞΘ, quod æquale est ipsi ex ΑΓ quadrato; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ contentum rectangulum cum ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni et ipsi ΞΘ. Sed ΣΤΥ gnomon et ΞΘ totum sunt ΑΕΖΔ quadratum, quod est ex

droite ΓΗ est égale à la droite ΗΠ. Et puisque ΓΗ est égal à ΗΠ, et que ΠΡ est égal à ΡΟ, le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΜΠ, et le rectangle ΠΛ égal au rectangle ΡΖ (36. 1). Mais le rectangle ΜΠ est égal au rectangle ΠΛ (43. 1), car ils sont les compléments du parallélogramme ΜΛ; donc le rectangle ΑΗ est égal au rectangle ΡΖ; donc les quatre rectangles ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ sont égaux entr'eux; donc ces quatre rectangles sont quadruples du rectangle ΑΗ. Mais on a démontré que les quatre carrés ΓΚ, ΚΔ, ΗΡ, ΠΝ sont quadruples du carré ΓΚ; donc les huit figures qui composent le gnomon ΣΤΥ sont quadruples du rectangle ΑΚ. Mais le rectangle ΑΚ est sous ΑΒ, ΒΔ; car ΚΒ est égal à ΒΔ (cor. 4. 2); donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est quadruple du rectangle ΑΚ. Mais on a démontré que le gnomon ΣΤΥ est quadruple du rectangle ΑΚ; donc quatre fois le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ est égal au gnomon ΣΤΥ. Ajoutons le carré commun ΞΘ, qui est égal au carré de ΑΓ (cor. 4. 2); quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΔ, avec le carré de ΑΓ sera égal au gnomon ΣΤΥ et au carré ΞΘ. Mais le gnomon ΣΤΥ et le carré ΞΘ sont le carré entier ΑΕΖΔ, qui est décrit avec ΑΔ; donc quatre fois

ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς¹⁷ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς¹⁸ ΑΔ τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ¹⁹. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς²⁰ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ὁπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Εὐὲν ἄρα εὐθείᾳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εὐθείᾳ γραμμῇ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετραγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθείᾳ γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἱ-

ΑΔ; ipsum igitur quater sub ΑΒ, ΒΔ cum ipso ex ΑΓ æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato. Æqualis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ; ergo quater sub ΑΒ, ΒΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΑΓ quadrato æquale est ipsi ex ΑΔ quadrato, hoc est, ex ipsâ ΑΒ et ΒΓ tanquam ex unâ descripto quadrato. Si igitur recta, etc.

PROPOSITIO IX.

Si recta linea secetur in æqualia et inæqualia, ex inæqualibus totius segmentis quadrata dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex ipsâ inter sectiones quadrati.

Recta enim aliquā ΑΒ secta sit in æqualia quidem ad Γ, in inæqualia vero ad Δ; dico ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla esse ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum.

Ducatur enim a Γ ipsi ΑΒ ad rectos ΓΕ, et ponatur æqualis utrique ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et jun-

le rectangle sous ΑΒ, ΒΔ avec le quarré de ΒΓ est égal au quarré de ΑΔ. Mais ΒΔ est égal à ΒΓ; donc quatre fois le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΓ avec le quarré de ΑΓ est égal au quarré de ΑΔ, c'est-à-dire au quarré décrit avec ΑΒ et ΒΓ comme avec une seule droite. Donc; etc.

PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, les quarrés des segments inégaux de la droite entière sont doubles du quarré de la moitié de cette droite et du quarré de la droite placée entre les sections.

Que la droite ΑΒ soit coupée en parties égales en Γ, et en parties inégales en Δ; je dis que les quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ.

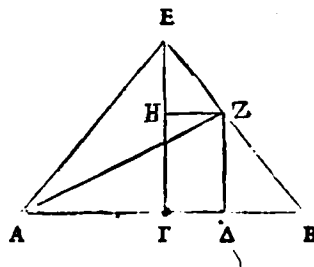
Du point Γ conduisons ΓΕ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1); faisons la droite ΒΓ égale à l'une et à l'autre des droites ΑΓ, ΓΒ, et joignons ΑΕ, ΕΒ; par le point

ἐξέχθωσαν αἱ AE, EB , καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ EF παράλληλος ἤχθω ἡ ΔZ , διὰ δὲ τοῦ Z τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ZH , καὶ ἐπεξέχθω ἡ AZ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GE , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ EAG γωνία τῇ ὑπὸ AEG . Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ G , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ EAG, AEG μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν, καὶ εἰσὶν ἴσαι²· ἡμίσηια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ GEB, GAE . Διὰ τὰ αὐτὰ

gantur AE, EB , et per Δ quidem ipsi EF parallela ducatur ΔZ , per Z vero ipsi AB parallela ducatur ZH , et jungatur AZ .

Et quoniam æqualis est AG ipsi GE , æqualis est et EAG angulus ipsi AEG . Et quoniam rectus est ad G , reliqui igitur EAG, AEG uni recto æquales sunt, et sunt æquales; dimidius igitur recti est uterque ipsorum GEB, GAE . Propter eadem utique et



δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ GEB, EBG ἡμίσηια ἐστὶν ὀρθῆς· ἔλκῃ ἄρα ἡ ὑπὸ AEB ὀρθὴ ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ HEZ ἡμίσηια ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EHZ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EFB · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EZH ἡμίσηια ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν³ ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ EZH · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EH πλευρᾷ τῇ HZ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ B γωνία ἡμίσηια ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ZAB , ἴση

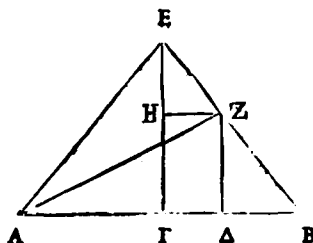
uterque ipsorum GEB, EBG dimidius est recti; totus igitur AEB rectus est. Et quoniam HEZ dimidius est recti, rectus autem EHZ , æqualis enim est interiori et opposito EFB ; reliquus igitur EZH dimidius est recti; æqualis igitur est HEZ angulus ipsi EZH ; quare et latus EH lateri HZ est æquale. Rursus quoniam ad B angulus dimidius est recti, rectus autem ZAB , æqualis enim est rursus interiori et opposito

Δ conduisons ΔZ parallèle à EF (31. 1), et par le point Z conduisons ZH parallèle à AB , et joignons AZ .

Puisque AG est égal à GE , l'angle EAG est égal à l'angle AEG (5. 1). Et puisque l'angle en G est droit, les angles restants EAG, AEG sont égaux à un droit (32. 1); mais ils sont égaux; donc chacun des angles GEB, GAE est la moitié d'un droit. Par la même raison, chacun des angles GEB, EBG est la moitié d'un droit; donc l'angle entier AEB est droit. Et puisque l'angle HEZ est la moitié d'un droit, et que l'angle EHZ est droit, car il est égal à l'angle intérieur et opposé EFB (29. 1), l'angle EZH est la moitié d'un droit; donc l'angle HEZ est égal à l'angle EZH ; donc le côté EH est égal au côté HZ (6. 1). De plus, puisque l'angle en B est la moitié d'un droit, et que l'angle ZAB est droit, car il est égal à l'angle intérieur

γὰρ ἐστὶ πάλιν⁵ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεικντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῇ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλείρα ἡ ΖΔ πλείρα τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς⁶ ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς⁷ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς⁸ ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ

ΕΓΒ; reliquus igitur ΔΖΒ dimidius est recti; æqualis igitur ad Β angulus ipsi ΔΖΒ; quare et latus ΖΔ lateri ΔΒ est æquale. Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æquale est et ipsum ex ΑΓ ipsi ex ΓΕ; ergo ex ΑΓ, ΓΕ quadrata dupla sunt ipsius ex ΑΓ. Ipsis autem ex ΑΓ, ΓΕ æquale est ex ΑΕ quadratum, rectus enim est ΑΓΕ angulus; ipsum igitur ex ΑΕ duplum est ipsius ex ΑΓ. Rursus quoniam æqualis est ΕΗ



ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς⁹ ΑΓ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ¹⁰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον¹¹· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ¹²· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς

ipsi ΗΖ, æquale est et ipsum ex ΕΗ ipsi ex ΗΖ; ergo ex ΕΗ, ΗΖ quadrata dupla sunt ipsius ex ΗΖ quadrati. Ipsis autem ex ΕΗ, ΗΖ quadratis æquale est ipsum ex ΕΖ quadratum; ergo ex ΕΖ quadratum duplum est ipsius ex ΗΖ quadrati. Sed æquale est ipsum ex ΗΖ ipsi ex ΓΔ; ipsum igitur ex ΕΖ duplum est ipsius ex ΓΔ. Est autem ipsum ex ΕΑ duplum ipsius ex ΑΓ; ergo ex ΑΕ, ΕΖ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum; ipsia vero ex ΑΕ, ΕΖ æquale est ex ΑΖ quadratum,

et opposé ΕΓΒ (29. 1), l'angle restant ΔΖΒ est la moitié d'un droit; donc l'angle en Β est égal à l'angle ΔΖΒ; donc le côté ΖΔ est égal au côté ΔΒ (6. 1). Et puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, le carré de ΑΓ est égal au carré de ΓΕ; donc les carrés des droites ΑΓ, ΓΕ sont doubles du carré de ΑΓ. Mais le carré de ΑΕ est égal aux carrés des droites ΑΓ, ΓΕ (47. 1), car l'angle ΑΓΕ est droit; donc le carré de ΑΕ est double du carré de ΑΓ. De plus, puisque ΕΗ est égal à ΗΖ, le carré de ΕΗ est égal au carré de ΗΖ; donc les carrés des droites ΕΗ, ΗΖ sont doubles du carré de ΗΖ. Mais le carré de ΕΖ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1); donc le carré de ΕΖ est double du carré de ΗΖ. Mais ΗΖ est égal à ΓΔ (54. 1); donc le carré de ΕΖ est double du carré de ΓΔ. Mais le carré de ΕΑ est

ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσια ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὁρθὴ γὰρ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὁρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσια ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Ἰση ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσια ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων, Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

rectus enim est ΑΕΖ angulus; ergo ΑΖ quadratum duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi vero ex ΑΖ æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΖ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsa igitur ex ΑΔ, ΔΖ dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Æqualis autem ΔΖ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐκ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσια ἔστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ' τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὥς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου'.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; ipsa ex totâ cum adjectâ et ex adjectâ, simul sumpta quadrata, dupla sunt et ipsius ex dimidiâ et ipsius ex compositâ ex dimidiâ et adjectâ tanquam ex unâ descripti quadrati.

double du quarré de ΑΓ; donc les quarrés des droites ΑΕ, ΕΖ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le quarré de ΑΖ est égal aux quarrés des droites ΑΕ, ΕΖ (47. 1), car l'angle ΑΕΖ est droit; donc le quarré ΑΖ est double des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les quarrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont égaux au quarré de ΑΖ (47. 1), car l'angle en Δ est droit; donc les quarrés des droites ΑΔ, ΔΖ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais ΔΖ est égal à ΔΒ; donc les quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des quarrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION X.

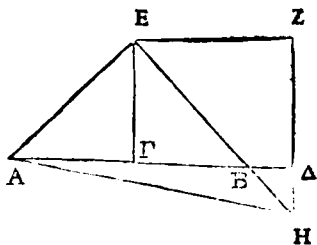
Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le quarré de la droite entière avec la droite ajoutée, et le quarré de la droite ajoutée, étant pris ensemble, sont doubles du quarré de la moitié de la droite entière, et du quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ BD · λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AD , DB τετράγωνα διπλάσια ἴσσι τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ GE , καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν AG , GB , καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ EA , EB · καὶ διὰ μὲν τοῦ E τῇ AD παράλληλος ἤχθω ἡ EZ · διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ

Recta enim aliqua AB secta sit bifariam in Γ , adjiciatur autem aliqua ei recta in directum BD ; dico ex AD , DB quadrata dupla esse ex AG , GB quadratorum.

Ducatur enim a Γ puncto ipsi AB ad rectos GE , et ponatur æqualis utrique ipsorum AG , GB , et jungantur EA , EB ; et per E quidem ipsi AD parallela ducatur EZ ; per Δ vero ipsi GB



GE πάλιν² παράλληλος ἤχθω ἡ ZD . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς EG , ZD εὐθεῖα τις ἐνέπυσιν ἡ EZ , αἱ ὑπὸ GEZ , EZD ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ZEB , EZD δύο ὀρθῶν ἑλασσόνες εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἑλασσόνων ἡ δύο ὀρθῶν ἑκαλλόμεναι συμπέπτουσιν· αἱ ἄρα EB , ZD ἑκαλλόμεναι ἐπὶ τὰ BD μέρη συμπίπτουσιν. Ἐκβλήσθωσαν, καὶ συμπεπίπτωσαν κατὰ τὸ H , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AH .

rursus parallela ducatur ZD . Et quoniam in parallelas rectas EG , ZD recta aliqua incidit EZ , anguli GEZ , EZD igitur duobus rectis æquales sunt; ergo ZEB , EZD duobus rectis minores sunt. Rectæ autem a minoribus quam duobus rectis productæ conveniunt; ergo EB , ZD productæ ad partes BD convenient. Producantur, et conveniant in H , et jungatur AH .

Qu'une droite AB soit coupée en deux parties égales en Γ , et qu'on lui ajoute directement une droite BD ; je dis que les quarrés des droites AD , DB sont doubles des quarrés des droites AG , GB .

Du point Γ conduisons GE perpendiculaire à AB (11. 1); faisons cette droite égale à l'une ou à l'autre des droites AG , GB ; joignons EA , EB ; par le point E conduisons EZ parallèle à AD ; et par le point Δ conduisons ZD parallèle à GE (31. 1). Puisque la droite EZ tombe sur les parallèles EG , ZD , les angles GEZ , EZD sont égaux à deux droits (29. 1); donc les angles ZEB , EZD sont plus petits que deux droits. Mais deux droites prolongées se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits (dém. 5); donc les droites EB , ZD prolongées se rencontreront du côté BD . Prolongeons ces droites; qu'elles se rencontrent au point H ; et joignons AH .

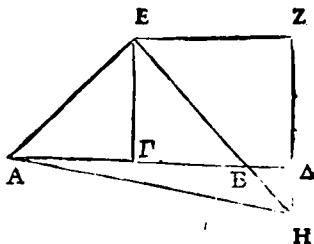
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν³ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς⁴· ἐρῶν ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ἐρῶν ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἵναλλαξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ⁵ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρὰ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρὰ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς⁶ ΕΓ τετραγώνου τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ

Et quoniam æqualis est ΑΓ ipsi ΓΕ, æqualis est et angulus ΑΕΓ ipsi ΕΑΓ; atque rectus est ad Γ; dimidius igitur recti est uterque ipso- rum ΕΑΓ, ΑΕΓ. Propter eadem utique et uterque ipsorum ΓΕΒ, ΕΒΓ dimidius est recti; rectus igitur est ΑΕΒ. Et quoniam dimidius recti est ΕΒΓ, dimidius igitur recti est et ΔΒΗ. Est autem et ΒΔΗ rectus; æqualis enim est ipsi ΔΓΕ alterno. Reliquus igitur ΔΗΒ ipsi ΔΒΗ est æqualis; quare et latus ΒΔ lateri ΔΗ est æquale. Rursus, quoniam ΕΗΖ dimidius est recti, rectus autem est qui ad Ζ, æqualis enim est opposito qui ad Γ; reliquus igitur ΖΕΗ dimidius est recti; æqualis igitur ΕΗΖ angulus ipsi ΖΕΗ; quare et latus ΗΖ lateri ΖΕ est æquale. Et quoniam æqualis est ΕΓ ipsi ΓΑ, æquale est et ex ΕΓ quadratum ipsi ex ΓΑ quadrato. Ergo ex ΕΓ, ΓΑ quadrata dupla sunt ex ΓΑ quadrati. Ipsis autem ex ΕΓ, ΓΑ æquale est ipsum ex ΑΕ; ergo ex ΕΑ quadratum duplum est ipsius ex ΑΓ quadrati. Rursus, quoniam æqualis est ΖΗ ipsi ΖΕ, æquale est et ipsum ex ΗΖ ipsi ex ΖΕ. Ipsa igitur ex ΗΖ, ΖΕ dupla sunt ipsius ex ΕΖ. Ipsis autem ex ΗΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΗ. Ipsum

Puisque ΑΓ est égal à ΓΕ, l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΕΑΓ (5. 1); mais l'angle en Γ est droit; donc chacun des angles ΕΑΓ, ΑΕΓ est la moitié d'un droit (32. 1). Par la même raison, chacun des angles ΓΕΒ, ΕΒΓ est la moitié d'un droit, donc l'angle ΑΕΒ est droit. Et puisque l'angle ΕΒΓ est la moitié d'un angle droit, l'angle ΔΒΗ est la moitié d'un droit (15. 1). Mais l'angle ΒΔΗ est droit (29. 1), car il est égal à l'angle alterne ΔΓΕ; donc l'angle restant ΔΗΒ est égal à l'angle ΔΒΗ; donc le côté ΒΔ est égal au côté ΔΗ (6. 1). De plus, puisque l'angle ΕΗΖ est la moitié d'un droit, et que l'angle en Ζ est droit, car il est égal à l'angle opposé en Γ (34. 1), l'angle restant ΖΕΗ est la moitié d'un droit; donc l'angle ΕΗΖ est égal à l'angle ΖΕΗ; donc le côté ΗΖ est égal au côté ΖΕ (6. 1). Et puisque ΕΓ est égal à ΓΑ, le carré de ΕΓ est égal au carré de ΓΑ; donc les carrés des droites ΕΓ, ΓΑ sont doubles du carré de ΓΑ. Mais le carré de ΑΕ est égal aux carrés des droites ΕΓ, ΓΑ (47. 1); donc le carré de ΕΑ est double du carré de ΑΓ. De

καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τῷ ἀπὸ τῆς ZE⁸. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν HZ, ZE διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν HZ, ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH⁹. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ. Ἰση δὲ EZ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετραγώνων διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Εἰδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE, EH τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν

igitur ex EH duplum est ipsius ex EZ. Æqualis autem EZ ipsi ΓΔ; ergo ex EH quadratum duplum est ipsius ex ΓΔ. Demonstratum est autem et ipsum ex EA duplum ipsius ex ΑΓ; ergo ex AE, EH quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Ipsi autem ex AE, EH quadratis æquale est ex AH quadratum; ipsum igitur ex AH duplum est ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Ipsi autem ex AH æqualia sunt ipsa ex ΑΔ, ΔΗ; ipsa



ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE, EH τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ¹⁰ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ¹¹. Ἰση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. Εὰν ἄρα εὐθεῖα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ex ΑΔ, ΔΗ dupla sunt ipsorum ex ΑΓ, ΓΔ. Æqualis autem est ΔΗ ipsi ΔΒ; ergo ex ΑΔ, ΔΒ quadrata dupla sunt ex ΑΓ, ΓΔ quadratorum. Si igitur recta, etc.

plus, puisque ZH est égal à ZE, le carré de HZ est égal au carré de ZE; donc les carrés des droites HZ, ZE sont doubles du carré de EZ. Mais le carré de EH est égal aux carrés des droites HZ, ZE (47. 1); donc le carré de EH est double du carré de ΓΔ. Mais on a démontré que le carré de EA est double du carré de ΑΓ; donc les carrés des droites AE, EH sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais le carré de AH est égal aux carrés des droites AE, EH (47. 1); donc le carré AH est double des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Mais les carrés des droites ΑΔ, ΔΗ sont égaux au carré de AH (47. 1); donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΗ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ; mais la droite ΔΗ est égale à la droite ΔΒ; donc les carrés des droites ΑΔ, ΔΒ sont doubles des carrés des droites ΑΓ, ΓΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'

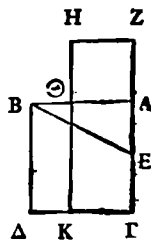
PROPOSITIO XI.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τμήειν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· διτ' δὴ τὴν ΑΒ τμήειν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Datam rectam secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.

Sit data recta ΑΒ; oportet igitur ipsam ΑΒ secare, ita ut sub totâ et altero segmentorum contentum rectangulum æquale sit ipsi ex reliquo segmento quadrato.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τιμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ὑπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΒΔΓ, et secetur ΑΓ bifariam in Ε puncto, et jungatur ΒΕ, et producaturs ΓΑ in Ζ, et ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, et describatur ex ΑΖ quadratum ΖΘ, et producaturs ΗΘ ad Κ; dico ΑΒ sectam

PROPOSITION XI.

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

Soit ΑΒ la droite donnée; il faut couper ΑΒ de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

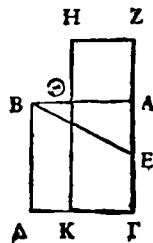
Avec la droite ΑΒ décrivons le carré ΑΒΔΓ (46. 1); coupons ΑΓ en deux parties égales au point Ε (10. 1); joignons ΒΕ, prolongeons ΓΑ vers Ζ; faisons ΕΖ égal à ΒΕ (3. 1); décrivons avec ΑΖ le carré ΖΘ; et prolongeons ΗΘ vers Κ; je dis que la

διήχθω ἡ $H\Theta$ ἐπὶ τὸ K · λέγω ὅτι ἡ AB τέτμηται κατὰ τὸ Θ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ τετραγώνῳ.

Επεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AG τέτμηται δίχα κατὰ τὸ E , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ AZ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ

esse in Θ , ita ut sub AB , $B\Theta$ contentum rectangulum æquale faciat ipsi ex $A\Theta$ quadrato.

Quoniam enim recta AG secatur bifariam in E , adjicitur autem ei ipsa AZ ; ergo sub ΓZ , ZA contentum rectangulum cum ex AE quadrato æquale est ipsi ex EZ quadrato. Æqua-



τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ EZ τῇ EB · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB τετραγώνῳ². Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς³ EB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA , AE , ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AE . Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον⁴ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. Καὶ ἴσται τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA

lis autem EZ ipsi EB ; ergo sub ΓZ , ZA contentum rectangulum cum ex AE quadrato æquale est ipsi ex EB quadrato. Sed ipsi ex EB æqualia sunt ipsa ex BA , AE , reclus enim est ad A angulus; ipsum igitur sub ΓZ , ZA cum ipso ex AE æquale est ipsis ex BA , AE . Commune auferatur ipsum ex AE ; reliquum igitur sub ΓZ , ZA contentum rectangulum æquale est ipsi ex AB quadrato. Et est ipsum quidem sub ΓZ , ZA ipsum ZK , æqualis enim est AZ ipsi ZH ; ipsum

droite AB est coupée en Θ , de manière que le rectangle compris sous AB , $B\Theta$ est égal au carré de $A\Theta$.

Puisque la droite AG est coupée en deux parties égales en E , que AZ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓZ , ZA avec le carré de AE est égal au carré de EZ (6. 2). Mais EZ est égal à EB ; donc le rectangle compris sous ΓZ , ZA avec le carré de AE , est égal au carré de EB . Mais les carrés des droites BA , AE sont égaux au carré de EB (47. 1), car l'angle en A est droit; donc le rectangle sous ΓZ , ZA avec le carré de AE est égal aux carrés des droites BA , AE . Retranchons le carré commun de AE ; le rectangle restant compris sous ΓZ , ZA sera égal au carré de AB . Mais le rectangle sous les droites ΓZ , ZA est le rectangle

τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἢ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφ-
ηρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον
ἐστὶ. Καὶ ἴσται τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΘ· τὸ δὲ
ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ
περιεχόμενον ὀρθογωνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἢ ΑΒ τίτμηται κατὰ
τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον
ὀρθογώνιον ἴσον ποιῇν τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.
Ὅπερ ἴδιαι ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς
τὴν ἀμβλείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τε-
τράγωνον μεῖζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλείαν
γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ
περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμ-
βλείαν γωνίαν ἢ ἐκκληθεῖσαν ἢ καθέτος
πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς
καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

ΖΚ, parce que ΑΖ est égal à ΖΗ, et le quarré de ΑΒ est le quarré ΑΔ; donc le
rectangle ΖΚ est égal au quarré ΑΔ. Retranchons le rectangle commun ΑΚ; le quarré
restant ΖΘ sera égal au rectangle ΘΔ. Mais ΖΘ est le quarré de ΑΘ, et ΘΔ est le
rectangle sous ΑΒ, ΒΘ; donc le rectangle compris sous ΑΒ, ΒΘ est égal au quarré
de ΘΑ.

Donc la droite ΑΒ est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous
ΑΒ, ΒΘ est égal au quarré de ΘΑ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Dans les triangles obtusangles, le quarré du côté qui soutend l'angle obtus est
plus grand que les quarrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux fois
le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement du-
quel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la perpen-
diculaire à l'angle obtus.

vero ex ΑΒ ipsum ΑΔ; ipsum igitur ΖΚ æquale
est ipsi ΑΔ. Commune auferatur ΑΚ; reliquum
igitur ΖΘ ipsi ΘΔ æquale est. Et est quidem ΖΘ
ipsum ex ΑΘ; ipsum vero ΘΔ ipsum sub ΑΒ,
ΒΘ; ipsum igitur sub ΑΒ, ΒΘ contentum rec-
tangulum æquale est ipsi ex ΘΑ quadrato.

Ergo data recta ΑΒ secta est in Θ, ita ut ipsum
sub ΑΒ, ΒΘ contentum rectangulum æquale fa-
ciat ipsi ex ΘΑ quadrato. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII.

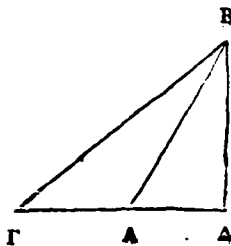
In obtusangulis triangulis quadratum ex latere
obtusum angulum subtendente majus est quam
quadrata ex lateribus obtusum angulum conti-
nentibus, contento bis sub uno ipsorum circa
obtusum angulum in quod productum perpen-
dicularis cadit, et assumptâ extra a perpendi-
culari ad obtusum angulum.

Εστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλιῶν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκκληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνων μείζον ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Επὶ γὰρ εὐθείᾳ ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ

Sit obtusangulum triangulum ΑΒΓ obtusum habens ΒΑΓ angulum, et ducatur a Β puncto ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ; dico ex ΒΓ quadratum majus esse quam ex ΒΑ, ΑΓ quadrata, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo.

Quoniam enim recta ΓΔ secatur utcumque in Α puncto; ipsum igitur ex ΓΔ æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΔ quadratis, et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento



τῶν ΓΑ, ΑΔ περιχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Κοινὸν προσκείμεν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιχομένῳ ὀρθογώνιῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνον ἴσον ἔστι τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ

rectangulo. Commune addatur ipsum ex ΔΒ; ipsa igitur ex ΓΔ, ΔΒ æqualia sunt ipsis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. Sed ipsis quidem ex ΓΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΓΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsum ex ΑΒ; ergo ex ΓΒ quadratum æquale est ipsis ex ΓΑ, ΑΒ quadratis et ipsi bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo; quare ex ΓΒ quadratum quam ipsa ex ΓΑ, ΑΒ

Soit le triangle obtusangle ΑΒΓ, ayant l'angle ΒΑΓ obtus; du point Β conduisons ΒΔ perpendiculaire sur ΓΑ prolongé; je dis que le quarré de ΒΓ est plus grand que les quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ.

Car puisque la droite ΓΔ est coupée d'une manière quelconque au point Α, le quarré de ΓΔ est égal aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΔ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ (4. 2). Ajoutons le quarré commun de ΔΒ; les quarrés de ΓΔ, ΔΒ seront égaux aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ. Mais le quarré de ΓΒ est égal aux quarrés des droites ΓΔ, ΔΒ (47.), car l'angle en Δ est droit, et le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ;

δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένη ὀρθογωνία· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μίζον ἴστι· τῇ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένη ὀρθογωνία. Ἐν ἀραιοῖς ἀμβλυγωνίοις, καὶ τὰ ἰζῶς.

quadrata majus est, ipso bis sub ΓΑ, ΑΔ contento rectangulo. In obtusangulis igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

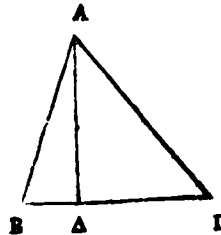
Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνου ἑλαττόν ἴστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξείαν γωνίαν περιχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῇ περιεχομένη δὲς ὑπὸ τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξείαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξείαν ἔχον τὴν πρὸς τῇ Β γωνίαν, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α ση-

PROPOSITIO XIII.

In acutangulis triangulis ex latere acutum angulum subtendente quadratum minus est quam quadrata ex lateribus acutum angulum continentibus contento bis sub uno ipsorum circa acutum angulum in quod perpendicularis cadit, et assumptâ intus a perpendiculari ad acutum angulum.

Sit acutangulum triangulum ΑΒΓ acutum habens ad Β angulum, et ducatur ab Α puncto



μίου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἑλαττόν ἴστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῇ δὲς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένη ὀρθογωνία.

ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ; dico ex ΒΓ quadratum minus esse quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo.

donc le quarré de ΓΒ est égal aux quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ, et à deux fois le rectangle compris sous ΓΑ, ΑΔ; donc le quarré de ΓΒ est plus grand que les quarrés des droites ΓΑ, ΑΒ de deux fois le rectangle sous ΓΑ, ΑΔ. Donc, etc.

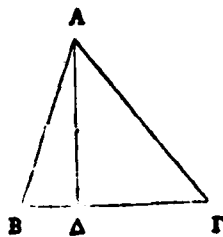
PROPOSITION XIII.

Dans les triangles acutangles, le quarré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les quarrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

Soit le triangle acutangle ΑΒΓ ayant l'angle aigu en Β; du point Α conduisons sur la droite ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΑΒ, de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ ΓΒ τέτμεται ὡς ἴτυχι κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθαι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ

Quoniam enim recta ΓΒ secta est utcumque in Δ; ergo ex ΓΒ, ΒΔ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsi ex ΔΓ quadrato. Communé addatur ex ΔΑ quadratum; ergo ex ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ quadrata æqualia sunt et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo et ipsis ex ΔΑ, ΔΓ quadratis. Sed



τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ³ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῇ Δγωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ⁴ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν⁵ ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον τὸ⁶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἑλαττόν ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις, καὶ τὰ ἰξής.

ipsis quidem ex ΒΔ, ΔΑ æquale est ex ΑΒ, rectus enim est ad Δ angulus; ipsis vero ex ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsum ex ΑΓ; ipsa igitur ex ΓΒ, ΒΑ æqualia sunt et ipsi ex ΑΓ, et ipsi bis sub ΓΒ, ΒΔ; quare solum ex ΑΓ minus est quam ex ΓΒ, ΒΑ quadrata, ipso bis sub ΓΒ, ΒΔ contento rectangulo. Ergo in acutangulis, etc.

Car, puisque la droite ΓΒ est coupée d'une manière quelconque au point Δ, les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ et au quarré de ΔΓ (7. 2). Ajoutons le quarré commun de ΔΑ; les quarrés des droites ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ seront égaux à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ, et aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ. Mais le quarré de ΑΒ est égal aux quarrés des droites ΒΔ, ΔΑ (47. 1), car l'angle en Δ est droit, et le quarré de ΑΓ est égal aux quarrés des droites ΑΔ, ΔΓ; donc les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ sont égaux au quarré de ΑΓ et à deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ; donc le seul quarré de ΑΓ est plus petit que les quarrés des droites ΓΒ, ΒΑ de deux fois le rectangle compris sous ΓΒ, ΒΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συ-
στάσασθαι.

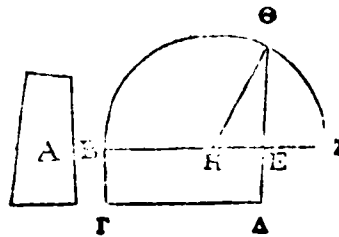
Ἐστω τὸ δοθέν εὐθύγραμμον τὸ Α· διττὸ δὲ τῷ
Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω γάρ τῳ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παρὰ
ἀλληλόγραμμοι ὀρθογώνιοι τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση
ἴσθιν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἀνεῖν τὸ ἐπιταχθῆναι. Συν-
ίσταται γὰρ τῳ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον

Dato rectilineo æquale quadratum consti-
tuere.

Sit datum rectilineum Α; oportet igitur ipsi
Α rectilineo æquale quadratum constituere.

Constituatur enim ipsi Α rectilineo æquale
parallelogrammum rectangulum ΒΔ. Si igitur
æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, factum erit proposi-
tum; constitutum est enim ipsi Α rectilineo



τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὐ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἴσθιν.
Ἐστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκτελέσθω ἐπὶ τὸ Ζ,
καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ
δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μείν² τῷ Η, δια-
στήματι δὲ ἰσὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω
τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκτελέσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ
ἰσχυθῶ ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία ἡ ΒΖ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ
τὸ Η, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,

æquale quadratum ΒΔ; si autem non, una ip-
sarum ΒΕ, ΕΔ major est. Sit major ΒΕ, et
producatur ad Ζ, et ponatur ipsi ΕΔ æqualis
ΕΖ, et secetur ΒΖ bifariam in Η, et centro
quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΒ,
ΗΖ semicirculus describatur ΒΘΖ, et produ-
catur ΔΕ in Θ, et jungatur ΗΘ.

Quoniam igitur ΒΖ secta est in æqualia qui-
dem in Η, in inæqualia vero in Ε; ergo sub

PROPOSITION XIV.

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.

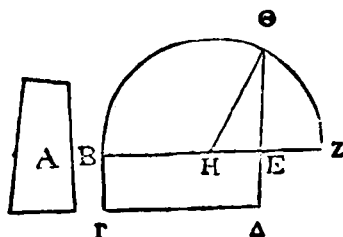
Soit Α la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette
figure rectiligne.

Construisons un parallélogramme rectangle ΒΔ égal à la figure rectiligne donnée
Α (45. 1). Si ΒΕ était égal à ΕΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré
ΒΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne Α. Si cela n'est point, l'un des
côtés ΒΕ, ΕΔ est plus grand que l'autre. Que ΒΕ soit le plus grand, prolongeons-le
vers Ζ, et faisons ΕΖ égal à ΕΔ (3. 1); coupons ΒΖ en deux parties égales au
point Η; du centre Η et d'un intervalle égal à l'une des droites ΗΒ, ΗΖ, décrivons
la demi-circonférence ΒΘΖ (dem. 3); prolongeons ΔΕ vers Θ, et joignons ΗΘ.

Puisque ΒΖ est partagé en deux parties égales au point Η, et en deux parties

ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ
τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ.
Ἰση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ
μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ.
Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ
τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ
ἀπὸ τῆς³ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ.
Κοινοῦν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοι-

BE, EZ contentum rectangulum cum ex HE quadrato æquale est ipsi ex HZ quadrato. Æqualis autem HZ ipsi HΘ; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsi ex HΘ. Ipsi autem ex HΘ æqualia sunt ex ΘE, EH quadrata; ipsum igitur sub BE, EZ cum ipso ex HE æquale est ipsis ex ΘE, EH. Commune auferatur ex HE quadratum; reliquum igitur sub



πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ περιεχόμενος ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ τὸ ὑπὸ τῶν BE, ED ἐστίν, ἴση γὰρ ZE τῇ ED· τὸ ἄρα BD παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘE τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ BD τῷ A εὐθυγράμμῳ· καὶ⁵ τὸ A ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ ἀναγραφόμενῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοδέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετρά-
γωνόν συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφέν-
των. Ὅπῃ ἴδιαι ποιῆσαι.

BE, EZ contentum rectangulum æquale est ipsi ex **EΘ** quadrato. Sed ipsum sub **BE, EZ** ipsum sub **BE, EA** est, æqualis enim est **EZ** ipsi **EA**; ergo **BA** parallelogrammum æquale est ipsi ex **ΘE** quadrato. **Æ**quale autem est **BA** ipsi **A** rectilineo; et **A** igitur rectilineum æquale est ipsi ex **EΘ** descripto quadrato.

Ergo dato rectilineo A æquale quadratum
constituitur ex $E\Theta$ descriptum. Quod oportebat
facere.

inégales au point E ; le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE, est égal au carré de HZ (5. 2). Mais HZ est égal à HΘ ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE est égal au carré de HΘ. Mais les carrés des droites ΘE, EH sont égaux au carré de HΘ, (47. 1) ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le carré de HE, est égal aux carrés de droites ΘE, EH. Retrançons le carré commun de HE ; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au carré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ ; donc le parallélogramme BΔ est égal au carré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A ; donc la figure rectiligne A est égale au carré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec $E\Theta$ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A ; ce qu'il fallait faire.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

ΟΡΟΙ.

DÉFINITIONES.

α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διαμέτροι ἴσαι εἰσὶν· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἰφάπτεσθαι λέγεται, ἥ τις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον ἐπὶ μηδένῃ μερὶ.

γ'. Κύκλοι ἰφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἳ τινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κἀθετοὶ ἀγόμεναι ἴσαι ᾖσι.

1. *Æquales circuli sunt, quorum diametri æquales sunt; vel quorum quæ ex centris æquales sunt.*

2. *Recta circulum tangere dicitur, quæ tangens circulum et producta secat circulum in neutrá parte.*

3. *Circuli tangere sese dicuntur, qui sese tangentes non sese secant.*

4. *In circulo æqualiter distare a centro rectæ dicuntur, quando ex centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt.*

LIVRE TROISIÈME DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux, ou ceux dont les droites menées des centres aux circonférences sont égales.

2. Une droite, qui touchant un cercle, et qui étant prolongée ne le coupe point, est dite tangente à ce cercle.

3. Les cercles qui se touchent, mais qui ne se coupent point, sont dits tangents entr'eux.

4. Dans un cercle, on dit que les droites sont également éloignées du centre, lorsque les perpendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales.

ι. Μῆζον δὲ ἀπέχαιν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων εὐθεία πίπτει.

ζ'. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὰ περιχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῆς εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιχομένη ὑπὸ τῆς εὐθείας καὶ κύκλου περιφέρειας.

η. Εν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ τμήματος λαβῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπὶ ζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Οταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιχόμενον σχῆμα ὑπὸ τῶν τὴν γωνίαν περιχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφέρειας.

ια. Ομοία τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ διχομνη γωνίας ἴσας· ὅ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam major perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est contenta figura et ab rectâ et circuli circumferentiâ.

7. Segmenti autem angulus est, qui continetur ab rectâ et circuli circumferentiâ.

8. In segmento autem angulus est, quando in circumferentiâ segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectæ quæ est basis segmenti conjunguntur rectæ, contentus angulus ab junctis rectis.

9. Quando autem continentes angulum rectæ assumunt aliquam circumferentiam, illi dicitur insistere angulus.

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli positus est angulus, contenta figura et ab angulum continentibus rectis et assumptâ ab ipsis circumferentiâ.

11. Similia segmenta circuli sunt, quæ capiunt æquales angulos; vel in quibus anguli æquales inter se sunt.

5. La droite sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire est dite la plus éloignée du centre.

6. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par une circonférence de cercle.

7. L'angle du segment est celui qui est compris par une droite et par une circonférence de cercle.

8. L'angle dans le segment est l'angle compris par les droites menées d'un point pris dans la circonférence du segment aux extrémités de la droite qui est la base du segment.

9. Mais lorsque les droites qui comprennent l'angle embrassent une portion de la circonférence, cet angle est dit appuyé à la circonférence.

10. Un secteur de cercle est une figure comprise entre deux rayons qui font un angle au centre et la portion de la circonférence qu'embrassent ces deux rayons.

11. Les segments des cercles sont semblables, lorsqu'ils reçoivent des angles égaux ou lorsque les angles qu'ils contiennent sont égaux entr'eux.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

PROPOSITIO I.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

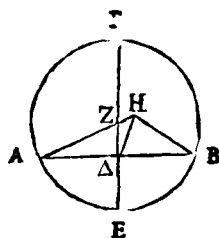
Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· διττὴ δὲ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἡχθω' τις εἰς αὐτὸν ᾧς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ΑΒΓ; oportet igitur ΑΒΓ circuli centrum invenire.

Ducatur aliqua in ipso utcumque recta ΑΒ, et secetur bifariam in Δ puncto, et a Δ ipsi ΑΒ ad rectos ducatur ΓΔ, et producat in Ε, et secetur ΓΕ bifariam in Ζ; dico Ζ centrum esse ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἴστω τὸ Η, καὶ ἐπιζεύχασαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὲ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση, ἡ κέντρον γὰρ τοῦ Η⁵· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνία

Non enim, sed si possibile sit Η, et jungantur ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem ΔΗ, duæ utique ΑΔ, ΔΗ duabus ΗΔ, ΔΒ æquales sunt, utraque utrique, et basis ΗΑ basi ΗΒ est æqualis, ex centro enim Η; angulus igitur ΑΔΗ

PROPOSITION PREMIÈRE.

Trouver le centre d'un cercle donné.

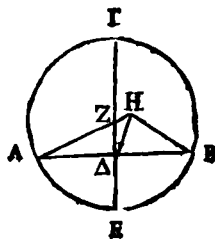
Soit ΑΒΓ le cercle donné; il faut trouver le centre du cercle ΑΒΓ.

Conduisons dans le cercle une droite quelconque ΑΒ, partageons-la en deux parties égales au point Δ (10. 1); du point Δ conduisons ΓΔ perpendiculaire à ΑΒ (11. 1), prolongeons ΓΔ en Ε, et partageons ΓΕ en deux parties égales en Ζ; je dis que le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Que Ζ ne le soit pas, et que Η le soit, si cela est possible. Joignons ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. Et puisque ΑΔ est égal à ΔΒ et que ΔΗ est commun, les deux droites ΑΔ, ΔΗ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΒ, chacune à chacune; mais la base ΗΑ est égale à la base ΗΒ; car ce sont deux rayons (déf. 15. 1); donc l'angle ΑΔΗ est égal à l'angle ΗΔΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur

τῇ ὑπὸ HAB ἴση ἰστίν⁶. Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐπιζῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ἴσων⁷ γωνιῶν ἰστίν· ὀρθὴ ἄρα ἰστίν ἡ ὑπὸ HAB . Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZAB ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ HAB , ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι⁸, ὅπερ ἰστίν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ H κέντρον ἰστί τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ομοίως δὲ δείζομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Z .

angulo HAB æqualis est. Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est HAB . Est autem et ZAB rectus; æqualis igitur est ZAB ipsi HAB , minor majori, quod est impossibile. Non igitur H centrum est $ABΓ$ circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam præter Z .



Τὸ Z ἄρα σημεῖον κέντρον ἰστί τοῦ $ABΓ$ κύκλου⁹. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι¹⁰.

Ergo Z punctum est centrum $ABΓ$ circuli. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰάν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις¹¹ εὐθεῖαν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἰστί τὸ κέντρον τοῦ κύκλου¹².

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in circulo recta quædam rectam quamdam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

une droite fait avec elle les angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10. 1); donc l'angle HAB est droit. Mais l'angle ZAB est droit; donc l'angle ZAB est égal à l'angle HAB ; le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point H n'est point le centre du cercle $ABΓ$. On démontrera semblablement que tout autre point, excepté Z , ne l'est pas.

Donc le point Z est le centre du cercle $ABΓ$. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si dans un cercle une droite en coupe une autre en deux parties égales, et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

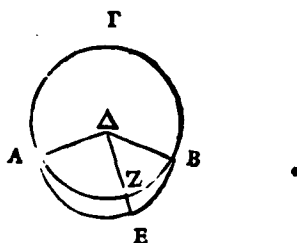
PROPOSITIO II.

Εὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφέρειας ληθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεισῖται τοῦ κύκλου.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφέρειας αὐτοῦ εἰλήθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β· λίγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζυγυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεισῖται τοῦ κύκλου.

Si in circuli circumferentiâ sumantur duo quælibet puncta, hæc puncta conjungens recta intra cadet circumulum.

Sit circulus ΑΒΓ, et in circumferentiâ ipsius sumantur duo quælibet puncta Α, Β; dico ab ipso Α ad Β conjunctam rectam intra cadere circumulum.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πίπτει ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἵστω τὸ Δ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ³.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσκίεσθαι ἡ ΑΕΒ,

Non enim, sed si possibile, cadat extra ut ΑΕΒ, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli, et sit Δ, et jungantur ΔΑ, ΔΒ, et ducatur ΔΖΕ.

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΒ, æqualis igitur et angulus ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; et quoniam trianguli ΔΑΕ unum latus ΑΕΒ producitur,

PROPOSITION II.

Si dans une circonférence de cercle, on prend deux points quelconques, la droite qui joindra ces deux points tombera dans le cercle.

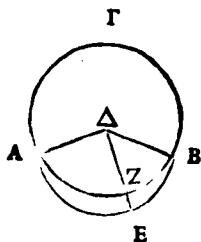
Soit le cercle ΑΒΓ; qu'on prenne deux points quelconques Α, Β, dans sa circonférence; je dis que la droite menée du point Α au point Β, tombera dans le cercle.

Car que cela ne soit point, et qu'elle tombe en dehors, si c'est possible, comme ΑΕΖ; prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Δ, joignons ΔΑ, ΔΒ, et menons ΔΖΕ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΒ, l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ (5. 1); et puisque l'on a prolongé un côté ΑΕΒ du triangle ΔΑΕ, l'angle ΔΕΒ est plus grand

μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἰση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ

major igitur est ΔΕΒ angulus ipso ΔΑΕ. Ἐqualis autem ΔΑΕ ipsi ΔΒΕ; major igitur est ΔΕΒ ipso ΔΒΕ. Majorem autem angulum majus latus subtendit; major igitur est ΔΒ ipsâ ΔΕ. Ἐqualis autem ΔΒ ipsi ΔΖ; major igitur est ΔΖ



τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς περὶταί τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα περὶταί. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsâ ΔΕ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur ab Α ad Β conjuncta recta extra cadet circumulum. Similiter utique ostendemus, neque in ipsam circumferentiam; intus igitur cadet. Si igitur circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ',

PROPOSITIO III.

Εὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ

Si in circulo recta aliqua per centrum rectam aliquam non per centrum bifariam secet,

que l'angle ΔΑΕ (16. 1). Mais l'angle ΔΑΕ est égal à l'angle ΔΒΕ; donc l'angle ΔΕΒ est plus grand que l'angle ΔΒΕ. Mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (18. 1); donc ΔΒ est plus grand que ΔΕ. Mais ΔΒ est égal à ΔΖ; donc ΔΖ est plus grand que ΔΕ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Α au point Β ne tombe pas hors du cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe pas dans la circonférence; donc elle tombe en dedans du cercle. Donc, etc.

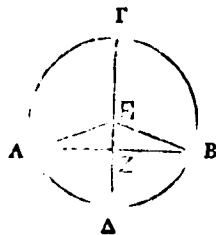
PROPOSITION III.

Si dans un cercle une droite menée par le centre coupe en deux parties égales une droite non menée par le centre, elle la coupera à angles

πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἰὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνίτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λίσσω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰληφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἴστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζυγῶσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἰστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ' δυοῖν ἴσαι εἰσὶ', καὶ βάσεις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα' ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἰστὶν. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθῇ, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἰστὶν· ὀρθὴ ἄρα ἰστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ'. Ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὔσα' τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

et ad rectos ipsam secat; et si eam ad rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus ΑΒΓ, et in ipso recta aliqua ΓΔ per centrum, rectam aliquam ΑΒ non per centrum bifariam secet in Ζ puncto; dico quod et ad rectos ipsam secat.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Ε, et jungantur ΕΑ, ΕΒ.

Et quoniam æqualis est ΑΖ ipsi ΖΒ, communis autem ΖΕ, duæ utique duabus æquales sunt, et basis ΕΑ basi ΕΒ æqualis; angulus igitur ΑΖΕ angulo ΒΖΒ æqualis est. Quando autem recta super rectam insistens deinceps angulos æquales inter se facit, rectus uterque æqualium angulorum est; rectus igitur est uterque ipsorum ΑΖΕ, ΕΖΕ. Ergo ΓΔ per centrum ducta ipsam ΑΒ non per centrum ductam bifariam secans, et ad rectos ipsam secat.

droits; et si elle la coupe à angles droits, elle la coupera en deux parties égales.

Soit le cercle ΑΒΓ; que dans ce cercle, la droite ΓΔ menée par le centre coupe en deux parties égales au point Ζ la droite ΑΒ non menée par le centre; je dis qu'elle la coupe à angles droits.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3); qu'il soit Ε, et joignons ΕΑ, ΕΒ.

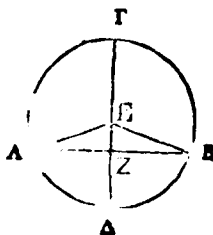
Puisque ΑΖ est égal à ΖΒ, et que la droite ΖΕ est commune, deux droites sont égales à deux droites; mais la base ΕΑ est égale à la base ΕΒ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΕΖΒ (8. 1). Mais lorsqu'une droite tombant sur une autre droite fait les angles de suite égaux entr'eux, chacun des angles égaux est droit; donc chacun des angles ΑΖΕ, ΒΖΕ est droit. Donc la droite ΓΔ, menée par le centre, et qui coupe en deux parties égales la droite ΑΒ non menée par le centre, coupe aussi cette droite à angles droits.

Αλλὰ δὲ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ῥέθας τιμ-
νέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ'
ἔστιν, ὅτι ἴση ἔστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἵπαι ἴση
ἔστιν ἡ⁸ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἔστι καὶ γωνία ἡ
ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ

Sed et ΓΔ ipsam ΑΒ ad rectos secet; dico et
bifarium ipsam secare, hoc est, æqualem esse
ΑΖ ipsi ΖΒ.

Eisdem enim constructis, quoniam æqualis
est ΕΑ ipsi ΕΒ, æqualis est et angulus ΕΑΖ ipsi
ΕΒΖ. Est autem et rectus ΑΖΕ recto ΒΖΕ æqua-



ΑΖΕ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα⁹ τρίγωνα ἴστι
τὰ ΕΑΖ, ΕΒΖ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις
ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ
ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτείνουσιν ὑπὸ
μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση
ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἔξῃς.

lis; duo igitur triangula sunt ΕΑΖ, ΕΒΖ duos
angulos duobus angulis æquales habentis, et
unum latus uni lateri æquale, commune ipsis
ΕΖ, subtendens unum æqualium angulorum;
et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia
habebunt; æqualis igitur est ΑΖ ipsi ΖΒ. Si igitur
in circulo, etc.

Mais que la droite ΓΔ coupe la droite ΑΒ à angles droits; je dis qu'elle la coupe
en deux parties égales, c'est-à-dire que ΑΖ est égal à ΖΒ.

Faisons la même construction; puisque ΕΑ est égal à ΕΒ, l'angle ΕΑΖ est égal
à l'angle ΕΒΖ (5. 1). Mais l'angle droit ΑΖΕ est égal à l'angle droit ΒΖΕ; donc
ΕΑΖ, ΕΒΖ sont deux triangles qui ont deux angles égaux à deux angles, et un
côté égal à un côté, c'est-à-dire leur côté commun ΕΖ, qui soutend un des angles
égaux; donc ces deux triangles auront les côtés restants égaux aux côtés restants
(26. 1); donc ΑΖ est égal à ΖΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

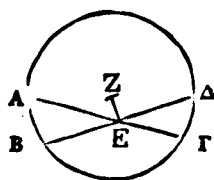
PROPOSITIO IV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε ση-
μειον· μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ
τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, non per
centrum ductæ, non sese secabunt bifariam.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso duæ rectæ ΑΓ,
ΒΔ sese secant in Ε puncto, non per centrum
ductæ; dico non eas sese secare bifariam.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα,
ὥστε ἴσῃν εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ
ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου,
καὶ ἕστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΕ.

Επεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐ-
θεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα
τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα

Si enim possibile, sese secant bifariam, ita ut
æqualis sit ΑΕ quidem ipsi ΕΓ, et ΒΕ ipsi ΕΔ;
et sumatur centrum ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et
jungatur ΖΕ.

Quoniam igitur recta aliqua ΖΕ per cen-
trum rectam aliquam ΑΓ non per centrum
bifariam secat, et ad rectos ipsam secat;

PROPOSITION IV.

Si dans un cercle deux droites non menées par le centre se coupent, elles ne se
coupent point en deux parties égales.

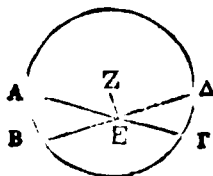
Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que dans ce cercle les deux droites ΑΓ, ΒΔ, non
menées par le centre, se coupent au point Ε; je dis qu'elles ne se coupent point
en deux parties égales.

Car si cela est possible, qu'elles se coupent en deux parties égales, de manière
que ΑΕ soit égal à ΕΓ, et ΒΕ égal à ΕΔ; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il
soit le point Ζ, et joignons ΖΕ.

Puisque la droite ΖΕ, menée par le centre, coupe en deux parties égales
la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupera à angles droits (3. 3);

ἔστιν ἡ ὑπὸ ZEA. Πάλιν, ἵπτι εὐθείᾳ τις ἡ ZE
εὐθείαν τινα τὴν ΒΔ μὲν διὰ τοῦ κέντρου δίχα
τίμνει, καὶ πρὸς ἑρθὰς αὐτὴν τίμνει· ὀρθὴ ἄρα⁵

rectus igitur est ZEA. Rursus, quoniam recta
aliqua ZE rectam aliquam ΒΔ non per centrum,
bifariam secat, et ad rectos ipsam secat; rectus



ἡ ὑπὸ ZEB. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEA ὀρθή· ἴση ἄρα
ἡ ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEB, ἥ⁶ ἐλάττω τῇ μείζονι,
ἐπεὶ ἴστί· ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τίμνουσιν
ἀλλήλας δίχα. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

igitur est ZEB. Ostensus est autem et ZEA rec-
tus; æqualis igitur ZEA ipsi ZEB, minor majori,
quod est impossibile. Non igitur ΑΓ, ΒΔ sese
secant bifariam. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO V.

Εὰν δύο κύκλοι τίμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si duo circuli sese secant, non erit ipsorum
idem centrum.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τιμνίτωσαν ἀλ-
λήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεία· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται
αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΗ sese secant in Β,
Γ punctis; dico non esse ipsorum idem cen-
trum.

Εἴ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω
ἡ ΕΓ, καὶ δύνῃθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχι.

Si enim possibile, sit Ε, et jungatur ΕΓ, et
ducatur ΕΖΗ utcumque.

donc l'angle ZEA est droit. De plus, puisque la droite ZE coupe en deux par-
ties égales la droite ΒΔ non menée par le centre, elle la coupera à angles
droits; donc l'angle ZEB est droit. Mais on a démontré que l'angle ZEA est
droit; donc l'angle ZEA est égal à l'angle ZEB, le plus petit au plus grand, ce
qui est impossible. Donc les droites ΑΓ, ΒΔ ne se coupent point en deux parties
égales. Donc, etc.

PROPOSITION V.

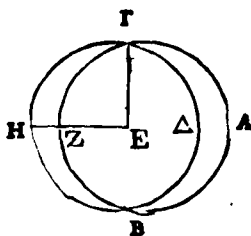
Si deux cercles se coupent, leur centre ne sera pas le même.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ se coupent aux deux points Β, Γ; je dis que
leur centre ne sera pas le même.

Car si cela est possible, que leur centre soit le point Ε; joignons ΕΓ, et me-
nons ΕΖΗ d'une manière quelconque.

Καὶ ἔπει τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἔπει τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ. Εδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ

Et quoniam E punctum centrum est ΑΒΓ circuli, æqualis est ΕΓ ipsi ΕΖ. Rursus, quoniam E punctum centrum est ΓΔΗ circuli, æqualis est ΓΕ ipsi ΕΗ. Ostensa est autem et ΕΓ



ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων. Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἰζήσιν.

ipsi ΕΖ æqualis; et ΖΕ igitur ipsi ΕΗ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur E punctum centrum est ΑΒΓ, ΓΔΗ circum-lorum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

PROPOSITIO VI.

Εάν δύο κύκλοι ἰσάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Si duo circuli sese intra tangent, non erit ipsorum idem centrum.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἰσάπτόμεθα· ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΕ sese tangent in Γ puncto; dico non esse ipsorum idem centrum.

Puisque le point E est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΕΓ est égale à ΕΖ (déf. 15. 1). De plus, puisque le point E est le centre du cercle ΓΔΗ, la droite ΓΕ est égale à ΕΗ. Mais on a démontré que ΕΓ est égal à ΕΖ; donc ΖΕ est égal à ΕΗ, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible. Donc le point E n'est pas le centre des cercles ΑΒΓ, ΓΔΗ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, leur centre n'est pas le même.

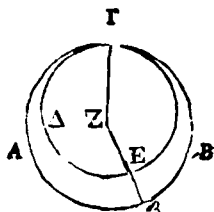
Que les deux cercles ΑΒΓ, ΓΔΕ se touchent au point Γ; je dis que leur centre n'est pas le même.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Z, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ZΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ZEB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZΓ τῇ BZ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν

Si enim possibile, sit Z, et jungatur ZΓ, et ducatur utcumque ZEB.

Quoniam igitur Z punctum centrum est ABΓ circuli, æqualis est ZΓ ipsi BZ. Rursus, quoniam Z punctum centrum est ΓΔΕ circuli, æ-



ZΓ τῇ ZE. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ ZB ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἐστὶν ἴση⁵, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν⁶ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ABΓ, ΓΔΕ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

qualis est ZΓ ipsi ZE. Ostensa est autem et ZΓ ipsi ZB æqualis; et ZE igitur ipsi ZB est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Z punctum centrum est ABΓ, ΓΔΕ circum-lorum. Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου λαβῇ τι σημεῖον ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι

Si in circuli diametro sumatur aliquod punctum quod non sit centrum circuli, ab ipso autem puncto in circumulum cadant rectæ quæ-

Car si cela est possible, que leur centre soit le point z; joignons zΓ, et menons zEB d'une manière quelconque.

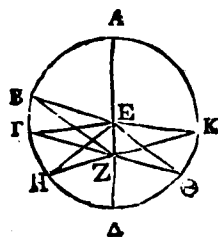
Puisque le point z est le centre du cercle ABΓ, la droite zΓ est égale à BZ. De plus, puisque le point z est le centre du cercle ΓΔΕ, la droite zΓ est égale à ZE. Mais on a démontré que zΓ est égal à ZB; donc ZE est égal à ZB, la plus petite à la plus grande, ce qui est impossible; donc le point z n'est point le centre des cercles ABΓ, ΓΔΕ. Donc, etc.

PROPOSITION VII.

Si dans le diamètre d'un cercle on prend un point qui ne soit pas le centre de ce cercle, et si de ce point on conduit des droites à la circon-

τινές¹ο μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ εἰς ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρον τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί· δύο δὲ μόνον² ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπισοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰληφθῶ τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαι τινες



αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λίγω ὅτι μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, αἱ ΕΒ, ΕΖ ἄρα³ τῆς ΒΖ μεί-

dam, maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major est; duæque solum æquales ab eodem puncto cadent in circulum, ex utrâque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, et in ipsâ ΑΔ sumatur aliquod punctum Ζ, quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit Ε, et a Ζ in ΑΒΓΔ circulum cadant rectæ quædam ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; dico ma-

ximam quidem esse ΖΑ, minimam vero ΖΔ; aliarum autem, ΖΒ quidem majorem ipsâ ΖΓ, et ΖΓ ipsâ ΖΗ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, ipsæ ΕΒ, ΕΖ igitur ipsâ ΒΖ

férence; la plus grande sera celle dans laquelle est le centre, et la plus petite la droite restante; quant aux autres droites, la droite qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui en est plus éloignée; et du même point on ne peut mener à la circonférence que deux droites égales de l'un et l'autre côté de la plus petite.

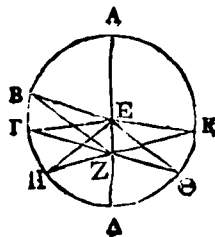
Soit le cercle ΑΒΓΔ, que ΑΔ soit son diamètre, prenons dans ΑΔ un point quelconque Ζ qui ne soit pas le centre de ce cercle, que le centre du cercle soit le point Ε, du point Ζ menons à la circonférence ΑΒΓΔ les droites ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ; je dis que ΖΑ est la plus grande, et ΖΔ la plus petite; et que parmi les autres, la droite ΖΒ est plus grande que ΖΓ, et la droite ΖΓ plus grande que ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Puisque deux côtés d'un triangle sont plus grands que le côté restant

ζόνες εἰσιν. ἴση δὲ ἡ AE τῇ BE , αἱ ἄρα BE , EZ ἴσαι εἰσὶ τῇ AZ · μείζων ἄρα ἡ AZ τῆς BZ . Πάλιν, ἵπαι ἴση εἶναι ἡ BE τῇ FE , κοινὴ δὲ ἡ ZE , δύο δὲ αἱ BE , EZ δυοὶ ταῖς FE , EZ ἴσαι εἰσιν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BEZ γωνίας τῆς ὑπὸ FEZ μείζων· βάσις ἄρα ἡ BZ βάσιως τῆς FZ μείζων ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ FZ τῆς μείζων ^{HZ} ἐστὶ⁵.

maiores sunt. Aequalis autem AE ipsi BE ; ergo BE , EZ æquales sunt ipsi AZ ; major igitur est AZ ipsâ BZ . Rursus, quoniam æqualis est BE ipsi FE , communis autem ZE , dæ utique BE , EZ duabus FE , EZ æquales sunt. Sed et angulus BEZ angulo FEZ major; basis igitur BZ basi FZ major est. Propter eadem utique et FZ ipsâ HZ major est.



Πάλιν, ἵπαι αἱ HZ , ZE τῆς EH μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ EH τῇ EA · αἱ ἄρα HZ , ZE τῆς EA μείζονες εἰσιν. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ EZ · λοιπὴ ἄρα ἡ HZ λοιπῆς τῆς ZA μείζων ἐστὶ. Μειώσθω μὲν ἄρα ἡ ZA , ἐλαχίστη δὲ ἡ ZA · μείζων δὲ ἡ μὲν ZB τῆς $ZΓ$, ἡ δὲ $ZΓ$ τῆς ZH .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου δύο μένον ἴσαι⁶ προσπεσύνται πρὸς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον,

Rursus, quoniam HZ , ZE ipsâ EH majores sunt, æqualis autem EH ipsi EA ; ergo HZ , ZE ipsâ EA majores sunt. Communis auferatur EZ ; reliqua igitur HZ reliquâ ZA major est. Maxima quidem igitur ZA , minima vero ZA ; major autem ZB quidem ipsâ $ZΓ$, et $ZΓ$ ipsâ ZH .

Dico et a Z puncto duas solum æquales cadere in $ABΓΔ$ circulum, ex utrâque parte ip-

(21. 1), les droites EB , EZ sont plus grandes que la droite BZ . Mais la droite AB est égale à la droite BE ; donc les droites BE , EZ sont égales à la droite AZ ; donc la droite AZ est plus grande que la droite BZ . De plus, puisque BE est égal à FE , et que la droite ZE est commune, les deux droites BE , EZ sont égales aux deux droites FE , EZ . Mais l'angle BEZ est plus grand que l'angle FEZ ; donc la base BZ est plus grande que la base FZ (24. 1). Par la même raison la droite FZ est plus grande que la droite HZ .

De plus, puisque les droites HZ , ZE sont plus grandes que la droite EH , et que EH est égal à EA , les droites HZ , ZE sont plus grandes que EA . Retranchons la droite commune EZ ; la droite restante HZ sera plus grande que la droite restante ZA . Donc la droite ZA est la plus grande, et la droite ZA la plus petite; donc la droite ZB est plus grande que la droite $ZΓ$, et la droite $ZΓ$ plus grande que la droite ZH .

Je dis que du point Z , on ne peut mener à la circonférence $ABΓΔ$ que deux

ἰσὶ ἐκάτερα τῆς ΖΔ ἡλαχίστης. Συνιστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπιζυχθῶ ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπισιῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἵπαι ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ⁸ καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ¹⁰ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Η καὶ οὕτως. Ἐπιζυχθῶ ἡ ΕΚ. Καὶ ἵπαι ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ¹¹ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν¹² ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπισιῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

sius ZD minimæ. Constituatur enim ad EZ rectam, et ad punctum in eâ B , ipsi HEZ angulo æqualis $ZEΘ$, et jungatur $ZΘ$. Quoniam igitur æqualis est HE ipsi $EΘ$, communis autem EZ , duæ utique HE , EZ duabus $ΘΕ$, EZ æquales sunt; et angulus HEZ angulo $ΘΕΖ$ æqualis; basis igitur ZH basi $ZΘ$ æqualis est. Dico autem ipsi ZH aliam æqualem non cadere in circulum a Z puncto. Si enim possibile, cadat ZK . Et quoniam ZK ipsi ZH est æqualis, sed quidem et $ZΘ$ ipsi ZH ; et ZK igitur ipsi $ΘΖ$ est æqualis, propinquior ei quæ per centrum remotiori æqualis, quod impossibile.

Vel et hoc modo. Jungatur $EΚ$. Et quoniam æqualis est HE ipsi $EΚ$, communis autem $EΖ$, et basis ZH basi $ZΚ$ æqualis; angulus igitur HEZ angulo $ΚΕΖ$ æqualis est. Sed HEZ ipsi $ZEΘ$ est æqualis; et $ZEΘ$ igitur ipsi $ΚΕΖ$ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur a Z puncto alia aliqua cadet in circulum æqualis ipsi HZ ; una igitur sola. Si igitur circuli, etc.

droites égales; de l'un et l'autre côté de la plus petite ZD . Car sur la droite EZ et au point B de cette droite, faisons l'angle $ZEΘ$ égal à l'angle HEZ (23. 1), et joignons $ZΘ$. Puisque la droite HE est égale à la droite $EΘ$, et que la droite EZ est commune, les deux droites HE , EZ sont égales aux deux droites $ΘΕ$, EZ ; mais l'angle HEZ est égal à l'angle $ΘΕΖ$; donc la base ZH est égale à la base $ZΘ$ (4. 1). Je dis que du point Z on ne peut mener à la circonférence une autre droite égale à ZH . Car si cela est possible, menons ZK . Puisque ZK est égal à ZH , et $ZΘ$ égal à ZH , la droite ZK est égale à la droite $ΘΖ$, une droite plus près de celle qui passe par le centre, égale à une droite qui en est plus éloignée, ce qui est impossible.

Ou de cette autre manière. Joignons $EΚ$. Et puisque HE est égal à $EΚ$, que la droite $EΖ$ est commune, et que la base ZH est égale à la base $ZΚ$, l'angle HEZ est égal à l'angle $ΚΕΖ$ (8. 1). Mais l'angle HEZ est égal à l'angle $ZEΘ$; donc l'angle $ZEΘ$ est égal à l'angle $ΚΕΖ$, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc du point Z , on ne peut pas mener à la circonférence une autre droite qui soit égale à HZ ; donc on n'en peut mener qu'une seule. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εάν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχον· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλῃ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἴστιν ἱλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἢ ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτός τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν

PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso autem puncto ad circulum ducantur rectæ quædam, quarum una per centrum, reliquæ autem utcunque; ipsarum quidem ad concavam circumferentiam cadentium rectarum maxima quidem est quæ per centrum; aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum remotiore major crit; ipsarum vero in convexam circumferentiam cadentium rectarum minima quidem est quæ inter et punctum et diametrum; aliarum autem, semper propinquior minimæ remotiore est minor. Duæ autem solum æquales a puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓ, et extra ipsum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et ab eo ducantur rectæ quædam ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, sit autem ΔΑ per centrum; dico earum quidem in ΑΕΖΓ concavæ

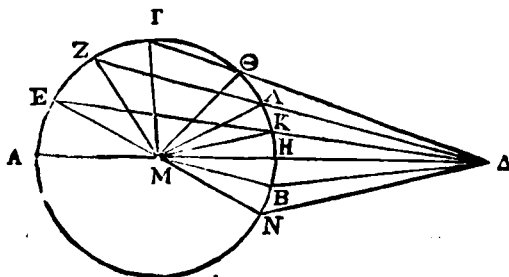
PROPOSITION VIII.

Si hors d'un cercle on prend un point quelconque, si de ce point on mène à ce cercle des droites, si une d'elles est menée par le centre, et les autres comme on voudra; parmi les droites menées à la circonférence concave, la plus grande est celle qui passe par le centre, et parmi les autres celle qui est plus près de celle qui passe par le centre est toujours plus grande que celle qui s'en éloigne davantage; mais parmi les droites menées à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est entre le point pris hors du cercle et le diamètre, et parmi les autres celle qui est plus près de la plus petite est toujours plus petite que celle qui s'en éloigne davantage; et du point pris hors du cercle, on ne peut mener à la circonférence de l'un et l'autre côté de la plus petite, que deux droites égales.

Soit le cercle ΑΒΓ, et hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ; de ce point menons à ce cercle les droites ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, et que ΔΑ passe

ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν
 μεγίστη μὲν ἴστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰ
 δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον
 μείζων ἴσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς
 ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν
 προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ
 μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΔΗ·
 αἰ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἴστι
 τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ
 τῆς ΔΘ'.

vam circumferentiam cadentium reclarum ma-
 ximam quidem esse ΔΑ quæ per centrum;
 semper autem propinquior ei quæ per centrum
 remotiore major erit, ΔΕ quidem ipsâ ΔΖ, et
 ΔΖ ipsâ ΔΓ; ipsarum autem in ΘΛΚΗ con-
 vexam circumferentiam cadentium reclarum,
 minima quidem ΔΗ, quæ inter et punctum Δ
 et diametrum ΔΗ; semper autem propinquior
 ipsi ΔΗ minimæ minor est remotiore, ΔΚ qui-
 dem ipsâ ΔΛ, et ΔΛ ipsâ ΔΘ.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ
 ἵστω τὸ Μ· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ,
 ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Sumatur enim centrum ΑΒΓ circuli, et sit Μ;
 et jungantur ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστιν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσ-
 κρίσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἴστι ταις ΕΜ, ΜΔ.
 Αἱ δὲ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονες εἰσιν· καὶ ἡ ΑΔ

Et quoniam æqualis est ΑΜ ipsi ΕΜ, com-
 munis addatur ΜΔ; ergo ΑΔ æqualis est ipsis
 ΕΜ, ΜΔ. Sed ΕΜ, ΜΔ ipsâ ΕΔ majores sunt;

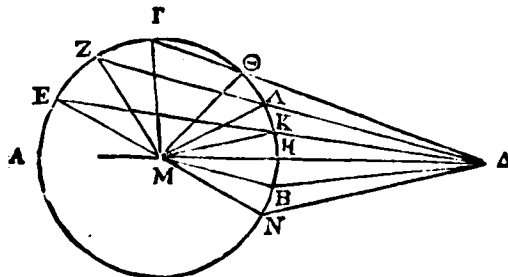
par le centre; je dis que de toutes les droites menées à la circonférence con-
 cave ΑΕΖΓ, la plus grande est la droite ΔΑ, menée par le centre, et que la droite
 qui est plus près de celle qui passe par le centre sera toujours plus grande que
 celle qui s'en éloigne davantage, la droite ΔΕ plus grande que ΔΖ, et la droite ΔΖ
 plus grande que ΔΓ; mais, parmi les droites menées à la circonférence con-
 vexa ΘΛΚΗ, la droite ΔΗ placée entre le point Δ et le diamètre ΔΗ est la plus
 petite, et la droite placée plus près de la plus petite ΔΗ est toujours plus petite
 que celle qui s'en éloigne davantage; la droite ΔΚ plus petite que ΔΛ, et la
 droite ΔΛ plus petite que la droite ΔΘ.

Prenons le centre du cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit le point Μ; et joignons
 ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Puisque la droite ΑΜ est égale à la droite ΕΜ, ajoutons la droite com-
 mune ΜΔ; la droite ΑΔ sera égale aux droites ΕΜ, ΜΔ. Mais les droites ΕΜ,

ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστὶ. Πάλιν, ἵπαι ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προσκείμεθα³ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστὶ. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσιως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶ· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

et $\Delta\Delta$ igitur ipsâ $\Sigma\Delta$ major est. Rursus, quoniam æqualis est $ΕΜ$ ipsi $ΖΜ$, communis addatur $ΜΔ$; ergo $ΕΜ$, $ΜΔ$ ipsis $ΖΜ$, $ΜΔ$ æquales sunt, et angulus $ΕΜΔ$ angulo $ΖΜΔ$ major est. Basis igitur $ΕΔ$ basi $ΖΔ$ major est. Similiter autem ostendemus, et $ΖΔ$ ipsâ $ΓΔ$ majorem esse; maxima quidem igitur est $ΔΑ$, major vero $ΔΚ$ ipsâ $ΔΖ$, et $ΔΖ$ ipsâ $ΔΓ$.



Καὶ ἵπαι αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάττω ἐστίν, ἐλάχιστη ἄρα ἐστὶ. Καὶ ἵπαι τριγώνου τοῦ ΜΔΔ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνιστάθησαν, αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα⁴ τῶν ΜΑ, ΔΔ ἐλάττωτες εἰσιν· ἴση δὲ⁵ ἡ ΜΚ τῇ ΜΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΑ ἐλάττω

Et quoniam $ΜΚ$, $ΚΔ$ ipsâ $ΜΔ$ majores sunt, æqualis autem $ΜΗ$ ipsi $ΜΚ$, reliqua igitur $ΚΔ$ reliquâ $ΗΔ$ major est; quare et $ΔΗ$ ipsâ $ΔΚ$ minor est; minima igitur est. Et quoniam trianguli $ΜΔΔ$ super uno laterum $ΜΔ$, duæ rectæ intus constituentur; $ΜΚ$, $ΚΔ$ igitur ipsis $ΜΑ$, $ΔΔ$ minores sunt; æqualis autem $ΜΚ$ ipsi $ΜΑ$; reliqua igitur $ΔΚ$ reliquâ $ΔΑ$ minor est. Similiter

$ΜΔ$ sont plus grandes que la droite $ΕΔ$ (20. 1); donc la droite $ΔΔ$ est plus grande que la droite $ΕΔ$. De plus, puisque la droite $ΕΜ$ est égale à la droite $ΖΜ$, ajoutons la droite commune $ΜΔ$, les droites $ΕΜ$, $ΜΔ$ seront égales aux droites $ΖΜ$, $ΜΔ$; mais l'angle $ΕΜΔ$ est plus grand que l'angle $ΖΜΔ$; donc la base $ΕΔ$ est plus grande que la base $ΖΔ$ (24. 1). Nous démontrerons semblablement que la droite $ΖΔ$ est plus grande que la droite $ΓΔ$; donc la droite $ΔΑ$ est la plus grande, la droite $ΔΕ$ plus grande que $ΔΖ$, et la droite $ΔΖ$ plus grande que $ΔΓ$.

De plus, puisque les droites $ΜΚ$, $ΚΔ$ sont plus grandes que la droite $ΜΔ$ (20. 1), et que la droite $ΜΗ$ est égale à la droite $ΜΚ$, la droite restante $ΚΔ$ est plus grande que la droite restante $ΗΔ$; donc la droite $ΔΗ$ est plus petite que la droite $ΔΚ$; donc elle est la plus petite. Et puisque sur un des côtés $ΜΔ$ du triangle $ΜΔΔ$ on a construit intérieurement deux droites, les droites $ΜΚ$, $ΚΔ$ sont plus petites que les droites $ΜΑ$, $ΔΔ$ (21. 1); mais $ΜΚ$ est égal à $ΜΑ$; donc la droite

ἴστί. Ὁμοίως δὲ δίδωμεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΑ τῆς
 ΔΘ ἱλάττων ἴστί· ἑλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ,
 ἱλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΘ.

Λίγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι^δ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου
 προσπισσοῦνται⁷ πρὸς τὸν κύκλον, ἢ ἑκάτερα
 τῆς ΔΗ ἑλαχίστης. Συριστάτω πρὸς τῇ ΜΔ ὑ-
 θία, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ Μ, τῇ ὑπὸ
 ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἰπι-
 ζεύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἰπὶ ἴση ἴστί ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ,
 κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὲ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς
 ΒΜ, ΜΔ ἴσαι ὄσιν, ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία
 ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση⁸ βάσις ἄρα ἡ
 ΔΚ βάσις τῇ ΔΒ ἴση ἴστί. Λίγω δὲ⁹ ὅτι τῇ ΔΚ ὑθεῖα
 ἄλλη ἴση οὐ προσπισσοῦται πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ
 τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτότω, καὶ
 ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἴστί ἴση, ἀλλ'
 ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἴστί ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ
 ἴστί ἴση¹⁰, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἑλαχίστης τῇ ἀπώ-
 τερον ἴστί ἴση, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη.

Ἡ καὶ ἄλλως. Ἐπιζεύχθω ἡ ΜΝ. Ἐπὶ¹¹ ἴση
 ἴστί ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ

autem ostendemus et ΔΑ ipsā ΔΘ minorem esse;
 minima quidem igitur est ΔΗ, minor vero ΔΚ
 ipsā ΔΑ, et ΔΑ ipsā ΔΘ.

Dico et duas solum æquales a Δ puncto ca-
 dere in circulum, ex utrâque parte ipsius ΔΗ
 minimæ. Constituatur ad ΜΔ rectam, et ad
 punctum in eâ Μ, ipsi ΚΜΔ angulo æqualis
 angulus ΔΜΒ, et jungatur ΔΒ. Et quoniam
 æqualis est ΜΚ ipsi ΜΒ, communis autem ΜΔ,
 duæ utique ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales
 sunt, utraque utrique, et angulus ΚΜΔ angulo
 ΒΜΔ æqualis; basis igitur ΔΚ basi ΔΒ æqualis
 est. Dico autem ipsi ΔΚ rectæ aliam æqualem
 non cadere in ΑΒΓ circulum a Δ puncto. Si
 enim possibile, cadat, et sit ΔΝ. Quoniam igitur
 ΔΚ ipsi ΔΝ est æqualis, sed ΔΚ ipsi ΔΒ est æ-
 qualis; et ΔΒ igitur ipsi ΔΝ est æqualis; pro-
 pinquior minimæ ipsius ΔΗ remotiori est æqua-
 lis, quod impossibile ostensum est.

Vel et aliter. Jungatur ΜΝ. Quoniam æqualis
 est ΚΜ ipsi ΜΝ, communis autem ΜΔ, et basis

restante ΔΚ est plus petite que la droite restante ΔΑ. Nous démontrerons sembla-
 blement que la droite ΔΑ est plus petite que la droite ΔΘ; donc la droite ΔΗ est la
 plus petite, et la droite ΔΚ est plus petite que la droite ΔΑ, et la droite ΔΑ plus
 petite que la droite ΔΘ.

Je dis aussi que du point Δ, on ne peut mener au cercle que deux droites
 égales, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ. Construisons sur la droite ΜΔ,
 et au point Μ de cette droite, un angle ΔΜΒ égal à l'angle ΚΜΔ (23. 1), et
 joignons ΔΒ. Puisque la droite ΜΚ est égale à ΜΒ, et que la droite ΜΔ est com-
 mune, les deux droites ΚΜ, ΜΔ sont égales aux deux droites ΒΜ, ΜΔ, chacune à
 chacune; mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc la base ΔΚ est égale à la
 base ΔΒ (4. 1). Je dis qu'on ne saurait mener du point Δ au cercle ΑΒΓ une autre
 droite égale à ΔΚ. Qu'elle soit menée, s'il est possible, et qu'elle soit ΔΝ. Puisque
 ΔΚ est égal à ΔΝ, et ΔΚ égal à ΔΒ, la droite ΔΒ est égale à ΔΝ: donc une droite plus
 près de la plus petite ΔΗ est égale à une droite qui s'en éloigne davantage, ce qui a
 été démontré impossible.

Ou autrement. Joignons ΜΝ. Puisque la droite ΚΜ est égale à ΜΝ, que la

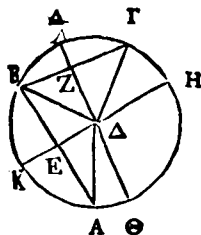
ΔΚ βάσις τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ ΚΜΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστίν ἴση¹⁰· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα¹¹ τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστίν ἴση¹², ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι¹³ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάστης τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προσπίπτουσιν. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΚ basi ΔΝ æqualis; angulus igitur ΚΜΔ angulo ΝΜΔ æqualis est. Sed ΚΜΔ ipsi ΒΜΔ est æqualis; et ΒΜΔ igitur ipsi ΝΜΔ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur plures quam duæ æquales in ΑΒΓ circulum a Δ puncto ex utraq̃ue parte ipsius ΔΗ minimæ cadent. Si igitur extra circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι¹, τὸ ληθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπίπτει-



τωςαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι², αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λήγῃ ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duæ æquales rectæ, sumptum punctum centrum est circuli.

Sit circulus ΑΒΓ, intra autem ipsum punctum Δ, et a Δ in ΑΒΓ circulum cadant plures

quam duæ æquales rectæ, ipsæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ dico Δ punctum centrum esse ΑΒΓ circuli.

droite ΔΑ est commune et que la base ΔΚ est égale à la base ΔΝ, l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ (8. 1). Mais l'angle ΚΜΔ est égal à l'angle ΒΜΔ; donc l'angle ΒΜΔ est égal à l'angle ΝΜΔ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc il est impossible de mener du point Δ au cercle ΑΒΓ, de l'un et l'autre côté de la plus petite ΔΗ, plus de deux droites égales. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Si dans un cercle, l'on prend un point quelconque, et si plus de deux droites menées de ce point à la circonférence sont égales entr'elles, le point qu'on aura pris sera le centre du cercle.

Soit le cercle ΑΒΓ, et le point intérieur Δ, et que plus de deux droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, menées du point Δ à la circonférence, soient égales entre elles, je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Επιζυχθωσαν γάρ αἱ AB, BG καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ E, Z σημεία, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ EA, ZA διήχθωσαν ἐπὶ τὰ K, H, Λ, Θ σημεία.

Επεὶ οὖν ἴσθιν ἴση³ ἡ AE τῇ EB, κοινὴ δὲ ἡ EA· δύο δὴ αἱ AE, EA δυοὶ ταῖς BE, EA ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσεις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση⁴· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AEA γωνία τῇ ὑπὸ BEA ἴση ἴσθιν· ὁρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AEA, BEA γωνιῶν· ἡ HK ἄρα τὴν AB τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς⁵. Καὶ ἰπεῖ, εἰάν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθείαν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἴσθι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἴσθι τὸ κέντρον τοῦ ABΓ⁶ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἴσθι τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου⁷. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ HK, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἴσθι τοῦ ABΓ κύκλου. Εἰάν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξ ἑς.

Jungantur enim AB, BG, et secentur bifariam in E, Z punctis, et junctæ EA, ZA producantur ad K, H, Λ, Θ puncta.

Quoniam igitur æqualis est AE ipsi EB, communis autem EA; duæ utique AE, EA duabus BE, EA æquales sunt; et basis ΔΑ ipsi ΔΒ æqualis; angulus igitur AEA angulo BEA æqualis est; rectus igitur uterque AEA, BEA angulorum; HK igitur ipsam AB secat bifariam et ad rectos. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos secet, in secante est centrum circuli; in HK igitur est centrum ipsius ABΓ circuli. Propter eadem utique et in ΘΛ est centrum ipsius ABΓ circuli. Et nullum aliud commune habent HK, ΘΛ rectæ quam Δ punctum; Δ igitur punctum centrum est ABΓ circuli. Si igitur circuli, etc.

Joignons les droites AB, BG, coupons-les en deux parties égales aux points E, Z (10. 1), et ayant joint les droites EA, ZA, prolongeons-les vers les points K, H, Λ, Θ.

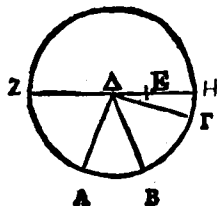
Puisque AE est égal à EB, et que la droite EA est commune, les deux droites AE, EA sont égales aux deux droites BE, EA; mais la base ΔΑ est égale à la base ΔΒ; donc l'angle AEA est égal à l'angle BEA (8. 1); donc chacun des angles AEA, BEA est droit; donc la droite HK coupe la droite AB en deux parties égales et à angles droits. Mais lorsque, dans un cercle, une droite coupe une autre droite en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle est dans la sécante (cor. 1. 3); donc le centre du cercle ABΓ est dans HK. Par la même raison, le centre du cercle ABΓ est dans ΘΛ. Mais les droites HK, ΘΛ n'ont d'autre point commun que le point Δ; donc le point Δ est le centre du cercle ABΓ. Donc, etc.

ΑΔΑΩΖΞ

ALITER.

Κύκλου γάρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τοῦ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλου περισπιττεύωμεν πλείους ἢ δύο ἴσας εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λίγω ὅτι τὸ λεγόμενον σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Intra enim circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, a Δ autem in ΑΒΓ circulum cadant plures quam duae aequales rectae, insae ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; dico sumptum punctum Δ centrum esse ipsius ΑΒΓ circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἴστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ΖΗ ἄρα⁸ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΖΗ διαμέτρου εἴληπται τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου⁹, μείσσει μὲν ἴσται ἡ ΔΗ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπῃ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

Non enim, sed si possibile, sit Ε, et juncta ΔΕ producat in Ζ, Η puncta; ergo ΖΗ diameter est ipsius ΑΒΓ circuli. Quoniam igitur circuli ΑΒΓ in ΖΗ diametro sumptum est aliquod punctum Δ, quod non est centrum circuli, maxima quidem erit ΔΗ, major vero ΔΓ ipsa ΔΒ, et ΔΒ ipsa ΔΑ. Sed et aequalis, quod est impossibile; non igitur Ε centrum est ipsius ΑΒΓ circuli. Similiter autem ostendemus, neque aliud

A U T R E M E N T.

Dans le cercle ΑΒΓ soit pris un point quelconque Δ, et que plus de deux droites égales tombent du point Δ dans le cercle ΑΒΓ, les droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ; je dis que le point Δ est le centre du cercle ΑΒΓ.

Qu'il ne le soit point, mais s'il est possible, que ce soit le point Ε; ayant joint ΔΕ, prolongeons cette droite vers les points Ζ, Η; la droite ΖΗ sera le diamètre du cercle ΑΒΓ. Puisque l'on a pris dans le diamètre ΖΗ du cercle ΑΒΓ un point Δ, qui n'est pas le centre de ce cercle, la droite ΔΗ sera la plus grande, la droite ΔΓ plus grande que la droite ΔΒ, et la droite ΔΒ plus grande que la droite ΔΑ (7. 3). Mais elle lui est égale, ce qui est impossible, donc le

οὐδ' ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέν-
τρον ἴστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου¹⁰.

præter Δ; ergo Δ punctum centrum est ipsius
ΑΒΓ circuli.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

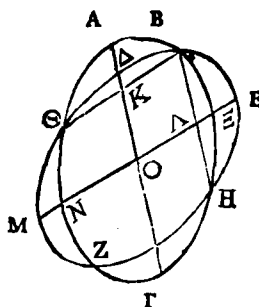
PROPOSITIO X.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα ση-
μεῖα ἢ δύο¹.

Circulus circulum non secat in pluribus punc-
tis quam duobus.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ
τεμνίτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,

Si enim possibile, circulus ΑΒΓ circulum
ΔΕΖ secet in pluribus punctis quam duobus, in



Ζ, Θ, καὶ ἰπιζυγθεῖσαι αἱ ΒΘ, ΒΗ δίχα τεμνί-
σθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ σημεία· καὶ ἀπὸ τῶν Κ,
Λ ταῖς ΒΘ, ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ
διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε σημεία².

ipsis Β, Η, Ζ, Θ, et junctæ ΒΘ, ΒΗ bifariam
secentur in Κ, Λ punctis; et ab ipsis Κ, Λ ipsis
ΒΘ, ΒΗ ad rectos ductæ ΚΓ, ΛΜ producantur
in Α, Ε puncta.

point E n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement
qu'aucun autre point, excepté Δ, ne peut l'être; donc le point Δ est le centre
du cercle ΑΒΓ.

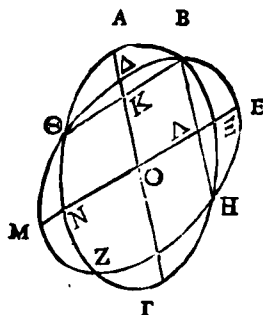
PROPOSITION X.

Un cercle ne coupe pas un cercle en plus de deux points.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΓ coupe le cercle ΔΕΖ en plus de deux
points, aux points Β, Η, Ζ, Θ; joignons les droites ΒΘ, ΒΗ; coupons-les en
deux parties égales aux points Κ, Λ, et par les points Κ, Λ, ayant conduit
les droites ΚΓ, ΛΜ perpendiculaires à ΒΘ, ΒΗ, prolongeons-les vers les
points Α, Ε.

Επειὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ $ΑΒΓ$ εὐθεῖα τις ἡ $ΑΓ$ εὐθεῖαν τινὰ τὴν $ΒΘ$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει³, ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ $ΑΒΓ$ εὐθεῖα τις ἡ $ΝΞ$ εὐθεῖαν τινὰ τὴν $ΒΗ$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $ΝΞ$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς

Quoniam igitur in circulo $ΑΒΓ$ recta aliqua $ΑΓ$ rectam aliquam $ΒΘ$ bifariam et ad rectos secat, in $ΑΓ$ igitur est centrum ipsius $ΑΒΓ$ circuli. Rursus, quoniam in circulo eodem $ΑΒΓ$ recta aliqua $ΝΞ$ rectam aliquam $ΒΗ$ bifariam et ad rectos secat, in $ΝΞ$ igitur centrum est ipsius $ΑΒΓ$ circuli. Ostensum autem ipsum esse et in $ΑΓ$, et



$ΑΓ$, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ $ΑΓ$, $ΝΞ$ εὐθεῖαι ἀλλήλαις⁴ ἢ κατὰ τὸ $Ο$. τὸ $Ο$ ἄρα σημειὸν κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ $Ο$. δύο ἄρα κύκλων τιμνόντων ἀλλήλους, τῶν $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ $Ο$ ⁵, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

in nullo puncto conveniunt $ΑΓ$, $ΝΞ$ rectæ inter se præterquam in $Ο$; ergo $Ο$ punctum centrum est ipsius $ΑΒΓ$ circuli. Similiter autem ostendemus, et ipsius $ΔΕΖ$ circuli centrum esse $Ο$; duorum igitur circulorum sese secantium $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, idem erit centrum $Ο$, quod est impossibile. Non igitur circulus, etc.

Puisque dans le cercle $ΑΒΓ$, la droite $ΑΓ$ coupe la droite $ΒΘ$ en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle $ΑΒΓ$ est dans la droite $ΑΓ$ (cor. 1. 3). De plus, puisque dans le même cercle $ΑΒΓ$ la droite $ΝΞ$ coupe la droite $ΒΗ$ en deux parties égales et à angles droits, le centre du cercle $ΑΒΓ$ est dans la droite $ΝΞ$. Mais on a démontré qu'il est dans la droite $ΑΓ$, et les deux droites $ΑΓ$, $ΝΞ$ ne se rencontrent qu'au point $Ο$; donc le point $Ο$ est le centre du cercle $ΑΒΓ$. Nous démontrerons semblablement que le point $Ο$ est le centre du cercle $ΔΕΖ$; donc le même point $Ο$ est le centre des deux cercles $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, qui se coupent mutuellement, ce qui est impossible (5. 3). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

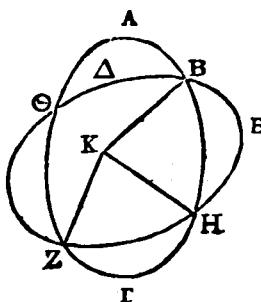
ALITER.

Κύκλος γάρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ
τεμνίτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Β, Η,
Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ
Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Επεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἰληπταί τι ση-
μείον ἑνὲς, τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν

Circulus enim rursus ΑΒΓ circumulum ΔΕΖ se-
cet in pluribus punctis quam duobus, in ipsis Β,
Η, Ζ, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓ circuli,
ipsum Κ, et jungantur ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Quoniam igitur intra circumulum ΔΕΖ sumptum
est aliquod punctum Κ, et a Κ in ΔΕΖ circu-



ΔΕΖ κύκλον προσπεπτώκασι πλείους ἢ δύο εὐ-
θείαις ἴσαις⁶, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημείον
κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ
ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τε-
μνόντων ἀλλήλους τὸ⁸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ,
ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

lum incidunt plures quam duæ rectæ æquales,
ipsæ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ; ergo Κ punctum centrum est
ipsius ΔΕΖ circuli. Est autem et ipsius ΑΒΓ circuli
centrum ipsum Κ; duorum igitur circulorum
sese secantium idem centrum est Κ, quod im-
possibile. Non igitur circulus, etc.

A U T R E M E N T.

Car que le cercle ΑΒΓ coupe encore le cercle ΔΕΖ en plus de deux points, aux
points Β, Η, Ζ; prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ, et joignons ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ.

Puisque dans le cercle ΔΕΖ, on a pris un point Κ, et que plus de deux droites
égales ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ tombent du point Κ dans le cercle ΔΕΖ, le point Κ est
le centre du cercle ΔΕΖ (9. 3). Mais le point Κ est le centre du cercle ΑΒΓ;
donc le même point Κ est le centre de deux cercles qui se coupent; ce qui
est impossible (5. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

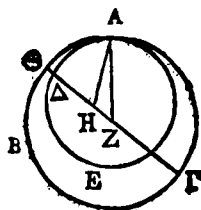
PROPOSITIO XI.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεισῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτίσθωσαν² ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου³ κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λήγω δτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α⁴ πεισῖται,

Si duo circuli sese contingant intus, et sumantur eorum centra, centra eorum conjungens recta producta in contactum cadet circumlorum.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant intus in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius autem ΑΔΕ ipsum Η; dico ab Η ad Ζ conjungentem rectam productam in Α cadere.



Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πίπτειτω ὡς; ἡ ΖΗΘ καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ τοῦτ' ἐστὶ τῆς ΖΘ⁵, μείζονες εἰσι, κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἔρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ· καὶ ἡ ΗΔ ἔρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν,

Non enim, sed si possibile, cadat ut ΖΗΘ, et jungantur ΑΖ, ΑΗ.

Quoniam igitur ΑΗ, ΗΖ ipsa ΖΑ, hoc est ipsa ΖΘ majores sunt, communis auferatur ΖΗ; reliqua igitur ΑΗ reliqua ΗΘ major est. Æqualis autem ΑΗ ipsi ΔΗ; et ΗΔ igitur ipsa ΗΘ

PROPOSITION XI.

Si deux cercles se touchent intérieurement, et si on prend leurs centres, la droite qui joint leurs centres étant prolongée tombera au contact de ces cercles.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent intérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Η au point Ζ, étant prolongée, tombera en Α.

Que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΗΘ; et joignons ΑΖ, ΑΗ.

Puisque les droites ΑΗ, ΗΖ sont plus grandes que ΖΑ (20. 1), c'est-à-dire que ΖΘ, retranchons la droite commune ΖΗ; la droite restante ΑΗ sera plus grande que la droite restante ΗΘ. Mais ΑΗ est égal à ΔΗ; donc ΗΔ est plus grand que ΘΗ,

ἡ ἑλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζυγυμένη
εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ A συναφῶς πεισῖται·
κατὰ τὸ A ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πείσεται. Βλὴν
ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

major est, minor majore, quod est impossibile.
Non igitur a Z ad H conjuncta recta extra con-
tactum ad A cadet. Ergo in contactum ad A
cadet. Si igitur duo circuli, etc.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Ἀλλὰ δὴ πειπτεύω ὡς ἡ HZΓ, καὶ ἐκτελέσθω⁸
ἐπ' εὐθείας ἡ HZΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπι-
ζεύχθωσαν αἱ AH, AZ.

Sed etiam cadat ut HZΓ, et producat in
directum ipsa HZΓ ad Θ punctum, et jungan-
tur AH, AZ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ AH, HZ μείζουσιν εἰς τῆς AZ,
ἀλλὰ ἡ ZA ἴση ἐστὶ τῇ ZΓ, τοῦτ' ἐστὶ τῇ ZΘ,
κοινὴ ἀφαιρέσθω ἡ ZH· λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς
τῆς HΘ μείζων ἐστίν, τοῦτ' ἐστὶν ἡ HA τῆς HΘ,
ἡ ἑλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
Ομοίως, καὶ ἐκτὸς ἡ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ
μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἀτοπον⁹.

Quoniam igitur AH, HZ majores sunt ipsâ AZ,
sed ZA æqualis est ipsi ZΓ, hoc est ipsi ZΘ,
communis auferatur ZH; reliqua igitur AH re-
liquâ HΘ major est, hoc est HA ipsâ HΘ, minor
majore, quod est impossibile. Similiter, et si
extra parvum sit centrum majoris circuli, osten-
demus hoc idem absurdum.

le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc la droite menée
du point Z au point H ne tombera pas hors du contact en A; donc elle tombera
dans le contact en A. Donc, etc.

AUTREMENT.

Mais qu'elle tombe comme HZΓ, prolongeons HZΓ directement vers le point
Θ, et joignons AH, AZ.

Puisque les droites AH, HZ sont plus grandes que AZ; et que ZA est égal à ZΓ,
c'est-à-dire à ZΘ, retranchons la droite commune ZH; la droite restante AH sera
plus grande que la droite restante HΘ, c'est-à-dire, HA plus grand que HΘ, le plus
petit que le plus grand, ce qui est impossible. Si le centre du grand cercle
était hors du petit cercle, nous démontrerions semblablement qu'il s'en suivrait
une absurdité.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

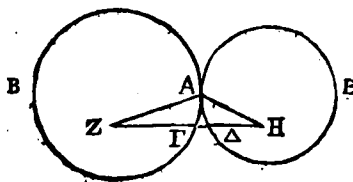
PROPOSITIO XII.

Εάν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἄλλήλων ἐκτός, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζυγμένη εὐθεῖα³ διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γάρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτόσθωσαν ἄλλήλων ἐκτός κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰληφθῶ τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου³ κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζυγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Si duo circuli sese contingant extra, centra ipsorum conjungens recta per contactum transibit.

Duo enim circuli ΑΒΓ, ΑΔΕ sese contingant extra in Α puncto, et sumatur quidem ipsius ΑΒΓ circuli centrum Ζ, ipsius vero ΑΔΕ ipsum Η; dico a Ζ ad Η conjungentem rectam per contactum ad Α transire.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχίσθω ὡς αἱ ΖΓ, ΔΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΑΗ.

Επεὶ οὖν τὸ Ζ σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ

Non enim, sed si possibile, eat ut ΖΓ, ΔΗ, et jungantur ΖΑ, ΑΗ.

Quoniam igitur Ζ punctum centrum est ipsius ΑΒΓ circuli, æqualis est ΖΑ ipsi ΖΓ. Rursus, quoniam Η punctum centrum est ipsius ΑΔΕ circuli, æqualis est ΑΗ ipsi ΗΔ. Ostensa est

PROPOSITION XII.

Si deux cercles se touchent extérieurement, la droite qui joint leurs centres, passera par le contact.

Que les deux cercles ΑΒΓ, ΑΔΕ se touchent extérieurement au point Α; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et le centre Η du cercle ΑΔΕ; je dis que la droite menée du point Ζ au point Η passera par le contact en Α.

Car que cela ne soit point, mais, s'il est possible, qu'elle tombe comme ΖΓ, ΔΗ, et joignons ΖΑ, ΑΗ.

Puisque le point Ζ est le centre du cercle ΑΒΓ, la droite ΖΑ est égale à ΖΓ. De plus, puisque le point Η est le centre du cercle ΑΔΕ, la droite ΑΗ est égale à ΗΔ. Mais on a démontré que ΖΑ est égal à la droite ΖΓ; donc les droites ΖΑ

ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ, ΑΗ ταῖς ΖΓ, ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ, ΑΗ μείζων ἐστίν. Αλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνύμενη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

est autem ΖΑ ipsi ΖΓ æqualis ; ipsæ igitur ΖΑ, ΑΗ ipsis ΖΓ, ΔΗ æquales sunt ; quare tota ΖΗ ipsis ΖΑ, ΑΗ major est. Sed et minor, quod impossibile. Non igitur a Ζ ad Η ducta recta per contactum ad Α non transibit ; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

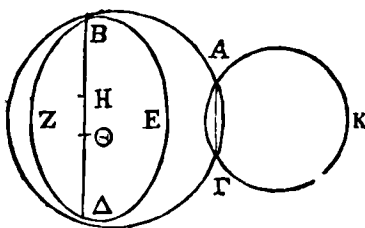
PROPOSITIO XIII.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς ἐφάπτηται εἴαν τε ἐκτός'.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

Εἰ γάρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΔΓ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτίσθω^ς πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἐν, τὰ Β, Δ.

Si enim possibile, circulus ΑΒΔΓ circulum ΕΒΖΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in Β, Δ.



Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ, τὸ Θ.

Et sumatur ipsius quidem ΑΒΔΓ circuli centrum Η ; ipsius autem ΕΒΖΔ, ipsum Θ.

ΑΗ sont égales aux droites ΖΓ, ΔΗ ; donc la droite entière ΖΗ est plus grande que les droites ΖΑ, ΑΗ. Mais au contraire, elle est plus petite (20. 1), ce qui est impossible. Donc la droite menée du point Ζ au point Η ne peut pas ne pas passer par le contact en Α ; donc elle y passe. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

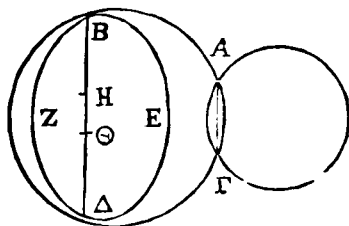
Un cercle ne touche point un cercle en plus d'un point, soit qu'il le touche intérieurement, ou extérieurement.

Car si cela est possible, que le cercle ΑΒΔΓ touche d'abord intérieurement le cercle ΕΒΖΔ en plus d'un point, aux points Β, Δ.

Prenons le centre Η du cercle ΑΒΔΓ, et le centre Θ du cercle ΕΒΖΔ.

Η ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζυγυμένη εὐ-
θεΐα³ ἐπὶ τὰ Β, Δ πεσεῖται. Πιπτεῖτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ.
Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ
κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ
ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλὰ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ.
Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ
ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ. Εδείχθη
δὲ αὐτῆς καὶ πολλὰ μείζων, ὅπερ ἄδύνατον·
οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντός κατὰ
πλείονα σημεία ἢ ἓν.

Ipsa igitur ab H ducta recta ad Θ in puncta
B, Δ cadet. Cadat ut ΒΗΘΔ. Et quoniam H punc-
tum centrum est ipsius ΑΒΔΓ circuli, æqualis est
BH ipsi ΗΔ; major igitur BH ipsa ΘΔ; ergo
multo major ΒΘ ipsa ΘΔ. Rursus, quoniam Θ
punctum centrum est ipsius ΕΒΖΔ circuli, æqua-
lis est ΒΘ ipsi ΘΔ. Ostensa est autem ipsa et
multo major, quod impossibile; non igitur
circulus circulum contingit intus in pluribus
punctis quam in uno.



Λέγω δὲ ὅτι οὐδε ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύ-
κλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΔΓ ἐφάπτεσθαι ἐκτός
κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ Α, Γ, καὶ ἐπι-
ζύχθω ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ, ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ
τῆς περιφέρειας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεία τὰ
Α, Γ, ἡ ἄρα⁶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεία ἐπιζυγυμένη

Dico etiam neque extra. Si enim possibile,
circulus ΑΓΚ circulum ΑΒΔΓ contingat extra
in pluribus punctis quam in uno, in Α, Γ, et
jungatur ΑΓ.

Quoniam igitur circulorum ΑΒΔΓ, ΑΓΚ sumpta
sunt in circumferentiis utriusque duo quælibet
puncta Α, Γ, hæc utique puncta conjungens recta

La droite menée du point H au point Θ passera par les points Β, Δ (11. 3).
Qu'elle tombe comme ΒΗΘΔ. Puisque le point H est le centre du cercle ΑΒΔΓ,
la droite ΒΗ est égale à ΗΔ; donc ΒΗ est plus grand que ΘΔ; donc ΒΘ est beaucoup
plus grand que ΘΔ. De plus, puisque le point Θ est le centre du cercle ΕΒΖΔ,
la droite ΒΘ est égale à ΘΔ. Mais on a démontré qu'elle est beaucoup plus grande,
ce qui est impossible; donc un cercle ne touche pas intérieurement un cercle en
plus d'un point.

Je dis aussi qu'il ne le touche pas extérieurement en plus d'un point. Car, s'il
est possible, que le cercle ΑΓΚ touche extérieurement le cercle ΑΒΔΓ en plus d'un
point, aux points Α, Γ; joignons ΑΓ.

Puisque dans la circonférence des cercles ΑΒΔΓ, ΑΓΚ, on a pris deux points
quelconques Α, Γ, la droite qui joindra ces deux points tombera dans

εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πιεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὴν ΑΒΔΓ ἐντὸς ἔπει, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτὸς, ὅπῃ ἀτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν. Εδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντὸς. Κύκλος ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

intra utrumque cadet. Sed quidem intra ipsum ΑΒΔΓ cadit, extra vero ipsum ΑΓΚ, quod absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur, etc,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

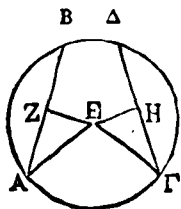
Εν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἦσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

PROPOSITIO XIY.

In circulo æquales rectæ æqualiter distant a centro, et quæ æqualiter distant a centro æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΔΓ, et in eo æquales rectæ sint ΑΒ, ΓΔ; dico ipsas ΑΒ, ΓΔ æqualiter distare a centro.



Εἰληφθῶ γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἔχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΓΕ.

Sumatur enim centrum ipsius ΑΒΔΓ circuli, et sit Ε, et ab Ε ad ΑΒ, ΓΔ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, et jungantur ΑΕ, ΓΕ.

l'un et l'autre cercle (2. 3). Mais elle tombe dans le cercle ΑΒΔΓ, et hors du cercle ΑΓΚ (déf. 3. 3), ce qui est absurde; donc un cercle ne touche pas extérieurement un cercle en plus d'un point. Mais on a démontré qu'il ne le touche pas intérieurement en plus d'un point. Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

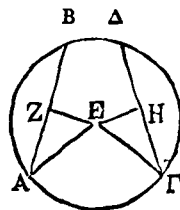
Dans un cercle les droites égales sont également éloignées du centre, et les droites également éloignées du centre sont égales entr'elles.

Soit le cercle ΑΒΔΓ, et que dans ce cercle les droites ΑΒ, ΓΔ soient égales; je dis que les droites ΑΒ, ΓΔ sont également éloignées du centre.

Prenons le centre du cercle ΑΒΔΓ, qu'il soit le point Ε, du point Ε menons les droites ΕΖ, ΕΗ perpendiculaires aux droites ΑΒ, ΓΔ, et joignons ΑΕ, ΓΕ.

Επειὶ οὖν εὐθείᾳ τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ EZ εὐθειᾶν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχῃ αὐτὴν τίμνει. Ἰση ἄρα ἡ AZ τῇ BZ· διπλῇ ὅρα ἡ AB τῆς AZ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῇ, καὶ ἴσιν ἡ² AB τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ AZ τῇ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EG, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς EG. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum rectam aliquam AB non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat. Æqualis igitur AZ ipsi BZ; dupla igitur AB ipsius AZ. Propter eadem utique et ΓΔ ipsius ΓΗ est dupla, et est æqualis AB ipsi ΓΔ; æqualis igitur et AZ ipsi ΓΗ. Et quoniam æqualis est AE ipsi EG, æquale et ipsum ex AE ipsi ex EG. Sed ipsi quidem



ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AZ, ZE, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς EG ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AZ, ZE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AZ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZE λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα³ ἡ ZE τῇ EH. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέν-

ex AE æqualia ipsa ex AZ, ZE, rectus enim ad Z angulus; ipsi vero ex EG æqualia ipsa ex EH, ΗΓ, rectus enim ad H angulus; ipsa igitur ex AZ, ZE æqualia sunt ipsis ex ΓΗ, ΗΕ, quorum ipsum ex AZ æquale est ipsi ex ΓΗ, æqualis enim est AZ ipsi ΓΗ; reliquum igitur ipsum ex ZE reliquo ex EH æquale est, æqualis igitur ZE ipsi EH. In circulo autem æqualiter distare a centro rectæ dicuntur, quando a cen-

Puisque la droite EZ menée par le centre, coupe à angles droits la droite AB, non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3 3.). Donc AZ est égal à BZ; donc AB est double de AZ. Par la même raison ΓΔ est double de ΓΗ; mais AB est égal à ΓΔ; donc AZ est égal à ΓΗ. Et puisque AE est égal à EG, le carré de AE est égal au carré de EG. Mais les carrés des droites AZ, ZE sont égaux au carré de AE (47. 1), car l'angle en Z est droit; et les carrés des droites EH, ΗΓ sont égaux au carré de EG, car l'angle en H est droit; donc les carrés des droites AZ, ZE sont égaux aux carrés des droites ΓΗ, ΗΕ; mais le carré de AZ est égal au carré de ΓΗ, car AZ est égal à ΓΗ; donc le carré restant de ZE est égal au carré restant de EH; donc ZE est égal à EH. Mais dans un cercle les droites sont dites également éloignées du centre, lorsque les per-

τρον ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα AB, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AB, ΓΔ εὐθείαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἐστίν, ἴση ἴστω ἡ EZ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλὴ ἐστὶν ἡ μὲν AB τῆς AZ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EZ, ZA, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ, ZA ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὥν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον⁵, ἴση γὰρ ἡ EZ τῇ ΕΗ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν⁶. ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ ΓΗ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AZ διπλὴ ἡ AB, τῆς δὲ ΓΗ διπλὴ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ AB τῇ ΓΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τα ἰζήσ.

tro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt; ergo AB, ΓΔ æqualiter distant a centro.

Sed demum æqualiter AB, ΓΔ rectæ distent a centro, hoc est, æqualis sit EZ ipsi ΕΗ; dico æqualem esse et AB ipsi ΓΔ.

Etenim iisdem constructis, similiter nunc ostendemus duplicem esse quidem AB ipsius AZ, et ΓΔ ipsius ΓΗ; et quoniam æqualis est AE ipsi ΓΕ, æquale est ipsum ex AE ipsi ex ΓΕ; sed ipsi quidem ex AE æqualia sunt ipsa ex EZ, ZA, ipsi vero ex ΓΕ ipsa ex ΕΗ, ΗΓ; ipsa igitur ex EZ, ZA æqualia sunt ipsis ex ΕΗ, ΗΓ, quorum ipsum ex EZ ipsi ex ΕΗ est æquale, æqualis enim EZ ipsi ΕΗ; reliquum igitur ex AZ reliquo ex ΓΗ est æquale; æqualis igitur AZ ipsi ΓΗ, et est ipsius quidem AZ dupla AB, ipsius vero ΓΗ dupla ΓΔ. Æqualis igitur AB ipsi ΓΔ. In circulo igitur, etc.

pendiculaires menées du centre sur ces droites sont égales (déf. 4. 3); donc les droites AB, ΓΔ sont également éloignées du centre.

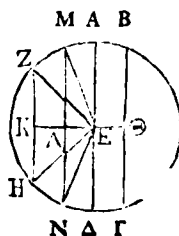
Mais que les droites AB, ΓΔ soient également éloignées du centre, c'est-à-dire, que ZE soit égal à ΕΗ; je dis que AB est égal à ΓΔ.

En effet, les mêmes constructions étant faites, nous démontrerons semblablement que AB est double de AZ, et ΓΔ double de ΓΗ. Et puisque AE est égal à ΓΕ, le carré de AE est égal au carré de ΓΕ. Mais les carrés des droites EZ, ZA sont égaux au carré de AE (47. 1), et les carrés des droites ΕΗ, ΗΓ égaux au carré de ΓΕ; donc les carrés des droites EZ, ZA sont égaux aux carrés des droites ΕΗ, ΗΓ; mais le carré de EZ est égal au carré de ΕΗ, car EZ est égal à ΕΗ; donc le carré restant de AZ est égal au carré restant de ΓΗ; donc AZ est égal à ΓΗ; mais AB est double de la droite AZ, et ΓΔ double de ΓΗ; donc AB est égal à ΓΔ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Εν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.



Ἠχθωσαν γάρ ἀπὸ τοῦ Ε³ κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. Καὶ ἐπὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΑΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquier centro remotiore major est.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit ΑΔ, centrum vero Ε, et propinquier quidem ipsi Ε centro sit ΒΓ, remotior vero ΖΗ; dico maximam esse ΑΔ, majorem vero ΒΓ ipsâ ΖΗ.

Ducantur enim ab Ε centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. Et quoniam propinquier quidem centro est ΒΓ, remotior vero ΖΗ, major igitur ΕΚ ipsâ ΕΘ. Ponatur ipsi ΕΘ æqualis ΕΛ, et per Α ipsi ΕΚ ad rectos ducta ΑΜ producat ad Ν, et jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

PROPOSITION XV.

Dans un cercle le diamètre est la plus grande de toutes les droites, et parmi les autres, celle qui est plus près du centre est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Soit le cercle ΑΒΓΔ; que ΑΔ en soit le diamètre, et Ε le centre, et que ΒΓ soit plus près du centre que ΖΗ; je dis que la droite ΑΔ est la plus grande, et que ΒΓ est plus grand que ΖΗ.

Menons du centre Ε les droites ΕΘ, ΕΚ perpendiculaires aux droites ΒΓ, ΖΗ. Et puisque ΒΓ est plus près du centre que ΖΗ, la droite ΕΚ est plus grande que ΕΘ (déf. 5. 3). Faisons la droite ΕΛ égale à ΕΘ, par le point Α menons la droite ΑΜ perpendiculaire à ΕΚ, prolongeons-la vers Ν, et joignons ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΕΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. Αλλ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονες εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὲρ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων⁵. Βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσιως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Αλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἰδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν⁶ ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam æqualis est ΕΘ ipsi ΕΛ, æqualis est et ΒΓ ipsi ΜΝ. Rursus, quoniam æqualis est quidem ΑΕ ipsi ΕΜ, et ΕΔ ipsi ΕΝ, ergo ΕΔ ipsis ΜΕ, ΕΝ æqualis est. Sed ΜΕ, ΕΝ ipsâ ΜΝ majores sunt, et ΑΔ ipsâ ΜΝ major est. Æqualis autem ΜΝ ipsi ΒΓ, ergo ΑΔ ipsâ ΒΓ major est. Et quoniam duæ ΜΕ, ΕΝ duabus ΖΕ, ΕΗ æquales sunt, et angulus ΜΕΝ angulo ΖΕΗ major; basis igitur ΜΝ basi ΖΗ major est. Sed ΜΝ ipsi ΒΓ ostensa est æqualis, et ΒΓ ipsâ ΖΗ major est. Maxima quidem igitur ΑΔ diameter, major vero ΒΓ ipsâ ΖΗ. In circulo igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

PROPOSITIO XVI.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ἑρβάς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ περιμπεσεῖται¹· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάτης γωνίας ἐξείας² ἐν-θυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Recta diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta extra cadet circumulum; et in locum inter et rectam et circumferentiam altera recta non cadet; et quidem semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus vero minor.

Puisque ΕΘ est égal à ΕΛ, la droite ΒΓ est égale à ΜΝ (14. 5). De plus, puisque ΑΕ est égal à ΕΜ, et ΕΔ égal à ΕΝ, la droite ΕΔ est égale aux droites ΜΕ, ΕΝ. Mais les droites ΜΕ, ΕΝ sont plus grandes que ΜΝ; donc ΑΔ est plus grand que ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΒΓ: donc ΑΔ est plus grand que ΒΓ. Et puisque les deux droites ΜΕ, ΕΝ sont égales aux deux droites ΖΕ, ΕΗ, et que l'angle ΜΕΝ est plus grand que l'angle ΖΕΗ, la base ΜΝ est plus grande que la base ΖΗ (24. 1). Mais on a démontré que ΜΝ est égal à ΒΓ; donc ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc le diamètre ΑΔ est la plus grande de toutes les droites, et ΒΓ est plus grand que ΖΗ. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

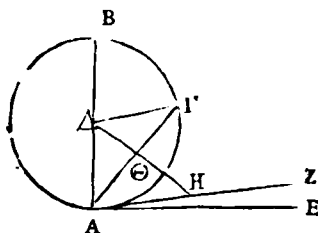
Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle et menée de l'une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite, et l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu.

Εστω κύκλος ο ΑΒΓ περιὲν κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ἑρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσιῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ.

Sit circulus ΑΒΓ circa centrum Δ et diameter ΑΒ; dico ipsam ab Α ad ΑΒ ad rectos ab extremitate ductam extra cadere circulum.

Non enim, sed si possibile, cadat intus, ut ΑΓ, et jungatur ΔΓ.



Επεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν³. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὲ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπῃ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ἑρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσιῖται τοῦ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφέρειας· ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ ΑΕ.

Λέγω δὲ⁵ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφέρειας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ περιμψιῖται.

Quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΔΓ, et angulus ΔΑΓ angulo ΑΓΔ æqualis est. Rectus autem ΔΑΓ, rectus igitur et ΑΓΔ; trianguli utique ΑΓΔ duo anguli ΔΑΓ, ΑΓΔ duobus rectis æquales sunt, quod est impossibile. Non igitur ab Α puncto, ipsi ΒΑ ad rectos ducta intra cadet circulum. Similiter utique ostendemus, neque in circumferentiam; extra igitur cadet, ut ΑΕ.

Dico etiam in locum inter ΑΕ rectam et ΓΘΑ circumferentiam alteram rectam non cadere.

Soit le cercle ΑΒΓ ayant pour centre le point Δ, et pour diamètre la droite ΑΒ; je dis que la perpendiculaire menée du point Α à la droite ΑΒ, tombe hors du cercle.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, qu'elle tombe en-dedans comme ΑΓ, et joignons ΔΓ.

Puisque ΔΑ est égal à ΔΓ, l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1); mais l'angle ΔΑΓ est droit; donc l'angle ΑΓΔ est droit aussi; donc les angles ΔΑΓ, ΑΓΔ du triangle ΑΓΔ sont égaux à deux angles droits, ce qui est impossible (17. 1); donc la perpendiculaire menée du point Α au diamètre ΑΒ, ne tombe point dans le cercle. Nous démontrerons semblablement qu'elle ne tombe point dans la circonférence; donc elle tombe en-dehors comme ΑΕ.

Je dis encore qu'aucune droite ne peut tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence ΓΘΑ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρὰ¹¹ πίπτειτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημεῖου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ. μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἰσὴ δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὴν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπίσεται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας⁶ εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ⁷ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστὶ τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὴν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα⁸ παρεμπίσεται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε

Si enim possibile, cadat ut ΖΑ, et ducatur a puncto Δ ad ΖΑ perpendicularis ΔΗ.

Et quoniam rectus est ΑΗΔ, minor autem recto ipse ΔΑΗ; major igitur ΑΔ ipsa ΔΗ. Æqualis autem ΑΔ ipsi ΔΘ; major igitur ΔΘ ipsa ΔΗ, minor majore, quod est impossibile. Non igitur in locum inter rectam et circumferentiam altera recta cadet.

Dico et quidem semicirculi angulum, comprehensum et a ΒΑ recta et ΓΘΑ circumferentiā, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero comprehensum et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ recta, quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, major quidem comprehenso et a ΒΑ recta et ΓΘΑ circumferentiā, minor vero comprehenso et a ΓΘΑ circumferentiā et ΑΕ recta, in locum inter et ΓΘΑ circumferentiam et ΑΕ rectam recta cadet, quæ faciet angulum a rectis comprehensum, majorem quidem comprehenso et a ΒΑ recta

Car si cela est possible, qu'elle tombe comme ΖΑ, et du point Δ menons ΔΗ perpendiculaire à ΖΑ.

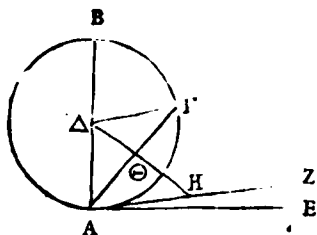
Puisque l'angle ΑΗΔ est droit, et que l'angle ΔΑΗ est plus petit qu'un droit, la droite ΑΔ est plus grande que ΔΗ. Mais ΑΔ est égal à ΔΘ; donc ΔΘ est plus grand que ΔΗ, le plus petit que le plus grand, ce qui est impossible. Donc une droite ne peut pas tomber dans l'espace qui est entre la droite ΑΕ et la circonférence.

Je dis enfin, que l'angle du demi-cercle compris par la droite ΒΑ et la circonférence ΓΘΑ est plus grand que tout angle rectiligne aigu, et que l'angle restant compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ est plus petit que tout angle rectiligne aigu.

Car s'il y a un angle rectiligne plus grand que l'angle compris par la droite ΒΑ et par la circonférence ΓΘΑ, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, dans l'espace compris entre la circonférence ΓΘΑ et la droite ΑΕ, il y aura une droite qui fera un angle plus grand

τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐ-
θειῶν περιεχομένην, ἐλάττωσα δὲ τῆς περιεχομέ-
νης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐ-
θείας. Οὐ παρεμπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιεχο-
μένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ
περιφερείας ἔσται μίζων ὀξεία ὑπὸ εὐθειῶν περι-
εχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης
ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας.
Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et $\Gamma O A$ circumferentiâ, minorem vero comprehenso et $\Gamma O A$ circumferentiâ et $A E$ rectâ. Non cadit autem; non igitur comprehenso angulo et a $B A$ rectâ et $\Gamma O A$ circumferentiâ erit major acutus a rectis comprehensus, neque quidem minor comprehenso et a $\Gamma O A$ circumferentiâ et $A E$ rectâ. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΨΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου¹⁰ φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ἑβας ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἰσάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ἵτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἰσάπτεται σημείῳ. Ἐπεὶ δὴ ὅτι καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβαλλούσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη¹¹.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est rectam diamet-
tro circuli ad rectos ab extremitate ductam con-
tingere circulum; et rectam circulum in unico
contingere puncto. Quoniam et recta in duobus
ipsi occurrens intra ipsum cadere ostensa est.

que l'angle compris par la droite BA et la circonférence $\Gamma\Theta A$, et un angle plus petit que l'angle compris par la circonférence $\Gamma\Theta A$ et la droite AE. Mais il n'y en a point; donc il n'y a point d'angle aigu, compris par les droites, plus grand que l'angle compris par la droite BA et la circonférence $\Gamma\Theta A$, ni d'angle plus petit que l'angle compris par la circonférence $\Gamma\Theta A$ et la droite AE. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que la droite perpendiculaire au diamètre, et menée d'une de ses extrémités, touche la circonférence, et que cette droite ne la touche qu'en un seul point. Puisqu'il a été démontré que la droite qui rencontre un cercle en deux points entre dans ce cercle (2. 3).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

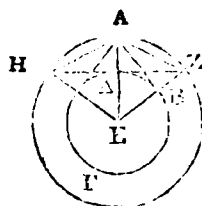
PROPOSITIO XVII.

Απὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἱφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθεὶς σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἱφαπτομένην εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ circulum datum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus vero circulus ΒΓΔ; oportet igitur ab A puncto rectam lineam ducere, quæ ΒΓΔ circulum contingat.



Εἰλήφθω γάρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος περιγέγραψθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἱφαπτομένη ἦται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ

Sumatur enim centrum circuli E; et jungatur AE, et centro quidem E, intervallo vero EA circulus describatur AZH, et a Δ ipsi EA ad rectos ducatur ΔΖ, et jungantur ΕΖ, ΑΒ; dico quod ab A puncto ipsum ΒΓΔ circulum contingens ducta est ipsa ΑΒ.

Quoniam enim E centrum est ΒΓΔ, ΑΖΗ circulorum, æqualis igitur est quidem ΕΑ ipsi ΕΖ,

PROPOSITION XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit A le point donné, et ΒΓΔ le cercle donné; il faut mener du point A une ligne droite qui touche le cercle ΒΓΔ

Prenons le centre E de ce cercle, joignons AE, du centre E et de l'intervalle EA, décrivons le cercle AZH (dém. 3); par le point Δ menons ΔΖ perpendiculaire à EA, et joignons ΕΖ, ΑΒ; je dis que la droite ΑΒ, menée du point A, touche le cercle ΒΓΔ.

Car puisque le point E est le centre des cercles ΒΓΔ, ΑΖΗ, la droite EA est

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

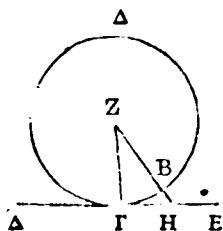
PROPOSITIO XVIII.

Εὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην¹.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω² τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΓ· λήγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετος ἔστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, conjungens perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et sumatur centrum ΑΒΓ circuli Ζ, et a Ζ ad Γ conjungatur ΖΓ; dico ΖΓ perpendicularē esse ad ΔΕ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΖΗ.

Επεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἔξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ. Ἰση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ³ ΖΒ τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ

Si enim non, ducatur a Ζ ad ΔΕ perpendicularis ΖΗ.

Quoniam igitur ΖΗΓ angulus est rectus, acutus igitur est ΖΓΗ; majorem autem angulum majus latus subtendit, major igitur ΖΓ ipsâ ΖΗ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; major igitur et ΖΒ ipsâ ΖΗ, minor majore, quod est impossibile.

PROPOSITION XVIII.

Si une droite touche un cercle, et si du centre on mène une droite au point de contact, cette droite sera perpendiculaire à la tangente.

Que la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ; prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓ, et du point Ζ au point Γ menons ΖΓ; je dis que la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ.

Car si elle ne l'est pas, du point Ζ menons ΖΗ perpendiculaire à ΔΕ (12. 1).

Puisque l'angle ΖΗΓ est droit, l'angle ΖΓΗ est aigu (17. 1); mais un plus grand côté soutend un plus grand angle (19. 1); donc ΖΓ est plus grand que ΖΗ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc la droite ΖΒ est plus grande que la droite ΖΗ,

ἰστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἰξῆς.

Non igitur ZH perpendicularis est ad ΔΕ. Similiter utique ostendemus neque aliam quampiam præter ipsam ΖΓ; ergo ΖΓ perpendicularis est ad ΔΕ. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

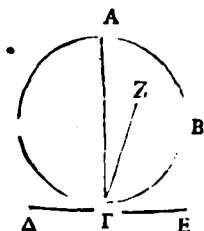
Εὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθάς· εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἴσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἀπτεύσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς· ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἴσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad rectos recta linea ducatur, in ductâ erit centrum circuli.

Circulum enim ΑΒΓ contingat aliqua recta ΔΕ in Γ puncto, et a Γ ipsi ΔΕ ad rectos ducatur ΓΑ; dico in ΑΓ esse centrum circuli.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΖ.

Non enim, sed si possibile, sit Ζ, et jungatur ΓΖ.

la plus petite que la plus grande, ce qui est impossible; donc ZH n'est pas une perpendiculaire à ΔΕ. Nous démontrerons semblablement qu'il n'y en a point d'autre, excepté ΖΓ; donc ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une ligne droite perpendiculaire à la tangente, le centre du cercle sera dans la droite qui aura été menée.

Car qu'une droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ au point Γ, et du point Γ menons ΓΑ perpendiculaire à ΔΕ; je dis que le centre du cercle est dans ΑΓ.

Car que cela ne soit point, mais s'il est possible, que le centre soit Ζ, et joignons ΓΖ.

Επειδ οὖν³ κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἰφάπτεται τις εὐθεία ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀρὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἰσὴ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἰξῆς.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΔΕ, a centro autem ad contactum ducta est ΖΓ, ΖΓ ergo perpendicularis est ad ΔΕ; rectus igitur est ΖΓΕ. Est autem et ΑΓΕ rectus; æqualis igitur est ΖΓΕ ipsi ΑΓΕ, minor majori, quod est impossibile. Non igitur Ζ centrum est ΑΒΓ circuli. Similiter utique ostendemus, neque aliud aliquod esse præterquam in ipsâ ΑΓ. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

PROPOSITIO XX.

Εν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερίᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

In circulo, ad centrum angulus duplus est ipsius ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερίᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίον ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Sit circulus ΑΒΓ, et ad centrum quidem ejus angulus sit ΒΕΓ, ad circumferentiam vero ipsi ΒΑΓ, habeant autem eandem circumferentiam pro basi ΒΓ; dico duplum esse ΒΕΓ angulum ipsius ΒΑΓ.

Puisque la droite ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΖΓ a été mené du centre au point de contact, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΔΕ (18. 3); donc l'angle ΖΓΕ est droit. Mais l'angle ΑΓΕ est droit aussi; donc l'angle ΖΓΕ est égal à l'angle ΑΓΕ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc le point Ζ n'est pas le centre du cercle ΑΒΓ. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre point ne peut l'être, à moins qu'il ne soit dans ΑΓ. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Dans un cercle, l'angle au centre est double de l'angle à la circonférence, quand ces angles ont pour base le même arc.

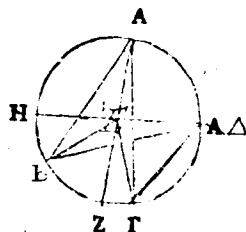
Soit le cercle ΑΒΓ, que l'angle ΒΕΓ soit au centre de ce cercle, que l'angle ΒΑΓ soit à la circonférence, et que ces angles aient pour base le même arc ΒΓ; je dis que l'angle ΒΕΓ est double de l'angle ΒΑΓ.

Επιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλαστικαὶ εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῇ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῇ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῇ.

Juncta enim AE producatur ad Z.

Quoniam igitur æqualis est EA ipsi EB, æqualis et angulus EAB ipsi EBA; anguli igitur EAB, EBA ipsius EAB dupli sunt. Æqualis autem BEZ ipsis EAB, EBA; et BEZ igitur ipsius EAB est duplus. Propter eadem utique et ZEG ipsius EAG est duplus; totus igitur BEG totius BAG est duplus.



Κεκλίσθω δὲ πάλιν, καὶ ἵστω τίς τε γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. Ομοίως δὲ δείξμεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὅν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Inclinetur autem rursus, et sit alter angulus BΔΓ, et juncta ΔΕ producatur ad Η. Similiter utique ostendemus duplum esse ΗΕΓ angulum ipsius ΗΔΓ, quorum ΗΕΒ duplus est ipsius ΗΔΒ; reliquus igitur ΒΕΓ duplus est ipsius ΒΔΓ. In circulo igitur, etc.

Joignons la droite AE, et prolongeons-la vers z.

Puisque EA est égal à EB, l'angle EAB est égal à l'angle EBA (5. 1); donc les angles EAB, EBA sont doubles de l'angle EAB. Mais l'angle BEZ est égal aux angles EAB, EBA (32. 1); donc l'angle BEZ est double de l'angle EAB. L'angle ZEG est double de l'angle EAG par la même raison; donc l'angle entier BEG est double de l'angle entier BAG.

Que l'angle BAG change de position, et qu'il soit un autre angle BAG; ayant joint la droite ΔE, prolongeons-la vers H. Nous démontrerons semblablement que l'angle HER est double de l'angle HΔΓ; mais l'angle HEB est double de l'angle HΔΒ; donc l'angle restant BEG est double de l'angle restant BAG. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

PROPOSITIO XXI.

Εν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

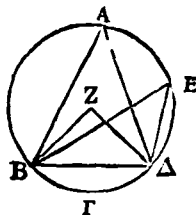
Εστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἴστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

In circulo in eodem segmento anguli æquales inter se sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in eodem segmento ΒΑΕΔ anguli sint ΒΑΔ, ΒΕΔ; dico ΒΑΔ, ΒΕΔ angulos æquales inter se esse.

Sumatur enim ΑΒΓΔ circuli centrum, et sit Ζ, et jungantur ΒΖ, ΖΔ.



Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερίᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίον· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Et quoniam quidem ΒΖΔ angulus ad centrum est, ipse vero ΒΑΔ ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam ΒΓΔ pro basi; ergo ΒΖΔ angulus duplus est ipsius ΒΑΔ. Propter eadem utique ΒΖΔ et ipsius ΒΕΔ est duplus; æqualis igitur ΒΑΔ ipsi ΒΕΔ. In circulo igitur, etc.

PROPOSITION XXI.

Dans un cercle, les angles placés dans le même segment sont égaux entr'eux.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ soient dans le même segment ΒΑΕΔ; je dis que les angles ΒΑΔ, ΒΕΔ sont égaux entr'eux.

Car prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit Ζ, et joignons ΒΖ, ΖΔ.

Puisque l'angle ΒΖΔ est au centre, que l'angle ΒΑΔ est à la circonférence, et que ces deux angles ont pour base le même arc ΒΓΔ, l'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΑΔ (20. 3). L'angle ΒΖΔ est double de l'angle ΒΕΔ, par la même raison; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΒΕΔ (not. 7). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αβ'.

PROPOSITIO XXII.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

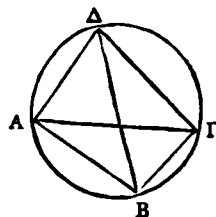
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἐπιζύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

In circulis quadrilaterorum oppositi anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus ΑΒΓΔ, et in ipso quadrilaterum sit ΑΒΓΔ; dico oppositos ipsius angulos duobus rectis æquales esse.

Jungantur ΑΓ, ΒΔ.



Ἐπὶ οὖν¹ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου² αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκίσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ,

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis æquales sunt, ipsius ΑΒΓ trianguli tres anguli ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus rectis æquales sunt. Æqualis autem quidem ΓΔΒ ipsi ΒΑΓ, etenim in eodem sunt segmento ΒΑΔΓ, et ΑΓΒ ipsi ΑΔΒ, etenim in eodem sunt segmento ΑΔΓΒ. Totus igitur ΑΔΓ ipsis ΒΑΓ, ΑΓΒ æqualis est. Communis addatur ΑΒΓ; ergo ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ

PROPOSITION XXII.

Les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, et que le quadrilatère ΑΒΓΔ lui soit inscrit; je dis que les angles opposés de ce quadrilatère sont égaux à deux droits.

Joignons ΑΓ, ΒΔ.

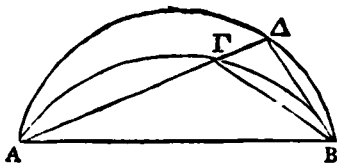
Puisque les trois angles de tout triangle sont égaux à deux droits (32. 1), les trois angles ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ du triangle ΑΒΓ sont égaux à deux droits. Mais l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΒΑΓ (21. 3), car ils sont dans le même segment ΒΑΔΓ; et l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, car ils sont dans le même segment ΑΔΓΒ; donc l'angle entier ΑΔΓ est égal aux angles ΒΑΓ, ΑΓΒ. Ajoutons l'angle

ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ; ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἄρα³ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται¹ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συστατάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.



Ἐπεὶ οὖν ὁμοίόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμήμα τῇ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δι-

ipsis ΑΒΓ, ΑΔΓ æquales sunt. Sed ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ duobus rectis æquales sunt; et ΑΒΓ, ΑΔΓ igitur duobus rectis æquales sunt. Similiter utique ostendemus, et ΒΑΔ, ΔΓΒ angulos duobus rectis esse. In circulis igitur, etc.

PROPOSITIO XXIII.

Super eadem rectâ duo segmenta circulorum similia et inæqualia non constituentur ex eadem parte.

Si enim possibile, ad eandem rectam ΑΒ duo segmenta circulorum similia et inæqualia constituentur ex eadem parte ΑΓΒ, ΑΔΒ, et ducatur ΑΓΔ, et jungantur ΓΒ, ΔΒ.

Quoniam igitur simile est ΑΓΒ segmentum ipsi ΑΔΒ segmento, similia autem segmenta

commun ΑΒΓ; les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ seront égaux aux angles ΑΒΓ, ΑΔΓ. Mais les angles ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ sont égaux à deux droits; donc les angles ΑΒΓ, ΑΔΓ sont égaux à deux angles droits. Nous démontrerons semblablement que les angles ΒΑΔ, ΔΓΒ sont aussi égaux à deux droits. Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Sur une même droite, on ne peut pas décrire du même côté deux segments de cercles semblables et inégaux.

Car si cela est possible, décrivons du même côté, sur la même droite ΑΒ les deux segments de cercles ΑΓΒ, ΑΔΒ semblables et inégaux; menons ΑΓΔ, et joignons ΓΒ, ΔΒ.

Puisque le segment ΑΓΒ est semblable au segment ΑΔΒ, et que les segments

164 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

χόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ
γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας,
καὶ τὰ ἰζήσ.

circularum sunt quæ capiunt angulos æquales;
æqualis igitur est ΑΓΒ angulus ipsi ΑΔΒ, exte-
rior interiori, quod est impossibile. Non igitur
super eadem rectâ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

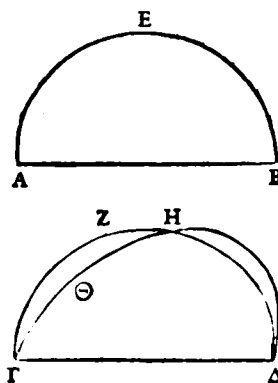
PROPOSITIO XXIV.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων
ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Super æqualibus rectis similia segmenta cir-
culorum æqualia inter se sunt.

Ἐστώσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς ΑΒ, ΓΔ
ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω

Sint enim super æqualibus rectis ΑΒ, ΓΔ
similia segmenta circularum ipsa ΑΕΒ, ΓΖΔ;



ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμήμα τῷ ΓΖΔ τμή-
ματι.

dico æquale esse ΑΕΒ segmentum ipsi ΓΖΔ seg-
mento.

de cercles semblables sont ceux qui recoivent des angles égaux (déf. 11. 3),
l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΑΔΒ, l'angle intérieur à l'angle extérieur; ce qui
est impossible (16. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Sur des droites égales, les segments de cercles semblables sont égaux
entr'eux.

Que sur les droites égales ΑΒ, ΓΔ soient décrits les segments de cercles
semblables ΑΕΒ, ΓΖΔ; je dis que le segment ΑΕΒ est égal au segment ΓΖΔ.

Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ AEB τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσιν εἶναι τὴν AB τῇ ΓΔ· τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης², ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΔ. Εἰ γὰρ ἡ AB εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἥτοι ἑνὸς αὐτοῦ πισεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ³, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ ΓΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Congruente enim AEB segmento ipsi ΓΔ, et posito quidem A puncto super Γ, rectā vero AB super ΓΔ, congruet et B punctum ipsi Δ puncto, propterea quod æqualis est AB ipsi ΓΔ; ipsā autem AB ipsi ΓΔ congruente, congruet et AEB segmentum ipsi ΓΔ. Si enim AB recta ipsi ΓΔ congruat, segmentum autem AEB ipsi ΓΔ non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel situm mutabit ut ΓΘΗΔ, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis Γ, Η, Δ, quod est impossibile. Non igitur congruente AB rectā ipsi ΓΔ non congruet et AEB segmentum ipsi ΓΔ. Congruet igitur, et æquale ipsi crit. Ergo super æqualibus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψει τὸν κύκλον οὗπὲρ ἔστι τμήμα.

Circuli segmento dato, describere circulum cujus est segmentum.

Car le segment AEB étant appliqué sur le segment ΓΔ, le point A étant posé sur le point Γ, et la droite AB sur la droite ΓΔ, le point B tombera sur le point Δ, parce que la droite AB est égale à la droite ΓΔ; mais la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB coïncidera avec le segment ΓΔ. Car si la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB ne coïncidait pas avec le segment ΓΔ, ou il tomberait en dedans, ou en dehors, ou bien prenant une position comme ΓΘΗΔ, un cercle couperait un cercle en plus de deux points, aux points Γ, Η, Δ, ce qui est impossible (10. 3). Donc la droite AB coïncidant avec la droite ΓΔ, le segment AEB ne peut pas ne pas coïncider avec le segment ΓΔ; donc il coïncide avec lui, et lui est par conséquent égal. Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

Un segment de cercle étant donné, décrire le cercle dont il est le segment.

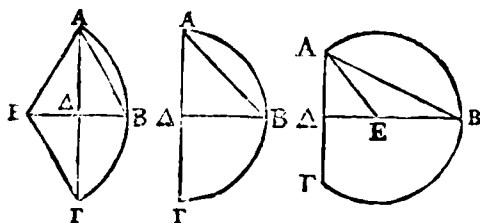
166 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τὸ δοθὲν τμήμα κύκλου, τὸ $AB\Gamma$ · δεῖ δὴ¹ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ Δ , καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔB , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ AB · ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία ἄρα² τῆς ὑπὸ $BA\Delta$ ἥτοι μείζων ἔστιν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττω.

Sit datum circuli segmentum $AB\Gamma$; oportet igitur describere circulum, cuius est $AB\Gamma$ segmentum.

Secetur enim $ΑΓ$ bifariam in Δ , et ducatur a Δ puncto ipsi $ΑΓ$ ad rectos ΔB , et jungatur AB . Ergo $AB\Delta$ angulus ipso $BA\Delta$ vel major est, vel æqualis, vel minor.



Εστω πρότερον μείζων, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAE , καὶ διήχθω ἡ ΔB ἐπὶ τὸ E^3 , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $ΕΓ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ BAE , ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἡ BE εὐθεῖα εὐθείᾳ τῇ EA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ ΔE , δύο δὲ αἱ $\Delta\Delta$, ΔE δυσὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, ΔE ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta E$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ ἔστιν ἴση⁵, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις⁶ ἄρα

Sit primum major, et constituatur ad BA rectam, et ad punctum in eâ A , ipsi $AB\Delta$ angulo æqualis ipse BAE , et producatur ΔB ad E , et jungatur $ΕΓ$. Et quoniam igitur æqualis est ABE angulus ipsi BAE , æqualis utique est et BE rectæ EA . Et quoniam æqualis est $\Delta\Delta$ ipsi $\Delta\Gamma$, communis autem ΔE , duæ utique $\Delta\Delta$, ΔE duabus $\Gamma\Delta$, ΔE æquales sunt, utraque utrique, et angulus $\Delta\Delta E$ angulo $\Gamma\Delta E$ est æqualis; rectus enim uterque; basis igitur AE basi GE est æqua-

Soit $AB\Gamma$ le segment de cercle donné; il faut décrire le cercle dont $AB\Gamma$ est le segment.

Coupons la droite $ΑΓ$ en deux parties égales au point Δ (10. 1), du point Δ menons ΔB perpendiculaire à $ΑΓ$, et joignons AB (11. 1); l'angle $AB\Delta$ sera ou plus grand que l'angle $BA\Delta$, ou il lui sera égal, ou il sera plus petit.

Qu'il soit d'abord plus grand; sur la droite donnée BA , et au point A de cette droite faisons l'angle BAE égal à l'angle $AB\Delta$ (23. 1); prolongeons ΔB vers E , et joignons $ΕΓ$. Puisque l'angle ABE est égal à l'angle BAE , la droite BE est égale à la droite EA (6. 1). Et puisque $\Delta\Delta$ est égal à $\Delta\Gamma$, et que la droite ΔE est commune, les deux droites $\Delta\Delta$, ΔE sont égales aux deux droites $\Gamma\Delta$, ΔE , chacune à chacune; mais l'angle $\Delta\Delta E$ est égal à l'angle $\Gamma\Delta E$, car ils sont droits l'un et l'autre

ἡ ΑΕ βάσις τῇ ΓΕ ἴσιν. ΑΛΛὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ εἰδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἴσιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ⁸ Ε, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος κύκλος⁹. Κύκλου ἄρα τμήματος δεθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμήμα ἑλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ¹⁰ τυγχάνειν.

Ομοίως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ¹¹ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γινομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Εὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστήσῃτο πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ¹² Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσιῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ ὡς τὸ Ε¹³, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

lis. Sed ΑΕ ipsi ΕΒ ostensa est æqualis; et ΒΕ igitur ipsi ΓΕ est æqualis; tres igitur ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ æquales inter se sunt; ergo centro Ε, intervallo autem unâ ipsarum ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est ΑΒΓ segmentum minus esse semicirculo, propterea quod Ε centrum extra ipsum cadit.

Similiter et si angulus ΑΒΔ æqualis sit ipsi ΒΑΔ, ipsâ ΑΔ æquali factâ alterutri ipsarum ΒΔ, ΔΓ, tres igitur ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ æquales inter se erunt, et erit autem Δ centrum completi circuli, et erit utique ΑΒΓ semicirculus.

Si autem ΑΒΔ minor sit ipso ΒΑΔ, et si constituamus ad ΒΑ rectam, et ad punctum in eâ Α, ipsi ΑΒΔ angulum æqualem, intra ΑΒΓ segmentum cadet centrum in ΔΒ, ut Ε, et erit utique ΑΒΓ segmentum majus semicirculo.

donc la base ΑΕ est égale à la base ΓΕ (4. 1). Mais ΑΕ a été démontré égal à ΕΒ; donc ΒΕ est égal à ΓΕ; donc les trois droites ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ sont égales entre elles; donc le cercle décrit du centre Ε et d'un intervalle égal à une des droites ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, passera par les autres points, et le cercle sera décrit. Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il est le segment (9. 3). Il est évident que le segment ΑΒΓ est plus petit qu'un demi-cercle; car le centre Ε tombe hors du segment.

Semblablement, si l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΒΑΔ, la droite ΑΔ étant égale à chacune des droites ΒΔ, ΔΓ, les trois droites ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ seront égales entre elles; donc le point Δ sera le centre du cercle entier (9. 3), et le segment ΑΒΓ sera évidemment un demi-cercle.

Mais si l'angle ΑΒΔ est plus petit que l'angle ΒΑΔ, et si sur la droite ΒΑ, et au point Α de cette droite, nous faisons l'angle ΒΑΕ égal à l'angle ΑΒΔ, le centre tombera en dedans du segment ΑΒΓ dans la droite ΔΒ, comme en Ε, et le segment sera évidemment plus grand qu'un demi-cercle.

168 LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγί-
γραπται ὁ κύκλος, οὗ πέρ ἐστι τὸ τμήμα¹⁴. Ὅπῃ
ἔδει ποιῆσαι.

Circuli igitur segmento dato, descriptus est
circulus cujus est segmentum. Quod oportebat
facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

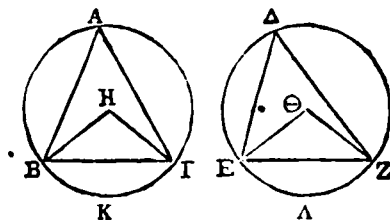
Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων
περιφερειῶν βεβῆκασιν, ἴαντε πρὸς τοῖς κέντροις
ἴαντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαι.

Εστώσαν γάρ ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ
ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι²

PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqua-
libus circumferentiis insistent, sive ad centra,
sive ad circumferentias sint insistentes.

Sint enim æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et
in ipsis quidem ad centra æquales anguli



ἴστωσαν, αὖ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς
περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση
ἴσθιν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΑΖ περιφερείᾳ.

Επιζυγῶσθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

sint ΒΗΓ, ΕΘΖ, et ad circumferentias ipsi
ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico æqualem esse ΒΚΓ circum-
ferentiam ipsi ΕΑΖ circumferentiæ.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.

Donc un segment de cercle ayant été donné, on a décrit le cercle dont il
est le segment ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Dans des cercles égaux, les angles égaux s'appuient sur des arcs égaux,
soit qu'ils soient placés aux centres, ou bien aux circonférences.

Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, que les angles égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ soient aux
centres, et que les angles égaux ΒΑΓ, ΕΔΖ soient aux circonférences ; je dis que
l'arc ΒΚΓ est égal à l'arc ΕΑΖ.

Joignons ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $ABΓ$, $ΔΕΖ$ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὲ αἱ BH , $HΓ$ δυσὶν ταῖς $ΕΘ$, $ΟΖ$ ἴσαι εἰσὶν³. καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ H γωνία τῇ πρὸς τῷ $Θ$ ἴση ἐστὶ⁴. βάσεις ἄρα ἡ $BΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἐστὶν ἴση⁵. Καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ A γωνία τῇ πρὸς τῷ $Δ$, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BAΓ$ τμήμα τῷ $ΕΔΖ$ τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν $BΓ$, $ΕΖ$ · τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὁμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν⁶. ἴσον ἄρα τὸ $BAΓ$ τμήμα τῷ $ΕΔΖ$ τμήματι⁷. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ $ABΓ$ κύκλος ὅλῳ τῷ $ΔΕΖ$ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα $BKΓ$ τμήμα λοιπῷ $ΕΔΖ$ ἴσον· ἡ ἄρα $BKΓ$ περιφέρειά ἐστιν ἴση τῇ $ΕΔΖ$ περιφερείᾳ⁸. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἴαν τι πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τι πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥς τι βεβηκυῖαι.

Puisque les cercles $ABΓ$, $ΔΕΖ$ sont égaux, leurs rayons sont égaux ; donc les deux droites BH , $HΓ$ sont égales aux deux droites $ΕΘ$, $ΟΖ$; mais l'angle en H est égal à l'angle en $Θ$; donc la base $BΓ$ est égale à la base $ΕΖ$ (4. 1). Mais l'angle en A est égal à l'angle en $Δ$; donc le segment $BAΓ$ est semblable au segment $ΕΔΖ$ (déf. 11. 3) ; mais ils sont placés sur les droites égales $BΓ$, $ΕΖ$, et les segments de cercles semblables, qui sont placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3) ; donc le segment $BAΓ$ est égal au segment $ΕΔΖ$. Mais le cercle entier $ABΓ$ est égal au cercle entier $ΔΕΖ$; donc le segment restant $BKΓ$ est égal au segment restant $ΕΔΖ$; donc l'arc $BKΓ$ est égal à l'arc $ΕΔΖ$. Donc, etc.

PROPOSITION XXVII.

Dans les cercles égaux, les angles qui comprennent des arcs égaux sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient aux centres, ou aux circonférences.

Et quoniam æquales sunt $ABΓ$, $ΔΕΖ$ circuli, æquales sunt ipsæ ex centris ; duæ igitur BH , $HΓ$ duabus $ΕΘ$, $ΟΖ$ æquales sunt ; et angulus ad H angulo ad $Θ$ æqualis est ; basis igitur $BΓ$ basi $ΕΖ$ est æqualis. Et quoniam æqualis est ad A angulus ipsi ad $Δ$, simile igitur est $BAΓ$ segmentum ipsi $ΕΔΖ$ segmento, et sunt super æquales rectas $BΓ$, $ΕΖ$; ipsa autem super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt ; æquale igitur $BAΓ$ segmentum ipsi $ΕΔΖ$ segmento. Est autem et totus $ABΓ$ circulus toti $ΔΕΖ$ circulo æqualis ; reliquum igitur $BKΓ$ segmentum reliquo $ΕΔΖ$ æquale ; ergo $BKΓ$ circumferentia æqualis est $ΕΔΖ$ circumferentiæ. Si igitur in æqualibus, etc.

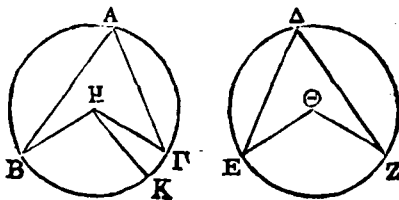
PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis ipsi æqualibus circumferentiis insistentes anguli æquales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes.

170 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκίωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερίαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λίγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία² τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἴστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴστιν ἴση³.

In æqualibus enim circulis ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualibus circumferentiis ΒΓ, ΕΖ, ad Η, Θ quidem centra anguli insistant ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ipsi ΒΑΓ, ΕΔΖ; dico ΒΗΓ quidem angulum ipsi ΕΘΖ esse æqualem, ipsum vero ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ.



Εἰ γὰρ ἀνίσος ἴστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται⁴. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾧσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερίᾳ. Αλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴστιν ἴση, καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἴστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἴστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνίσος ἴστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. Καὶ ἴστι τῆς

Si enim inæqualis sit ΒΗΓ ipsi ΕΘΖ, unus ipsorum major erit. Sit major ΒΗΓ, et constituatur ad ΒΗ rectam, et ad punctum in eâ Η, ipsi ΕΘΖ angulo æqualis ipse ΒΗΚ; æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistant, quando ad centra sunt; æqualis igitur ΒΚ circumferentia ipsi ΕΖ circumferentiæ. Sed ΕΖ ipsi ΒΓ æqualis est, et ΒΚ igitur ipsi ΒΓ est æqualis, minor majori, quod est impossibile. Non igitur inæqualis est ΒΗΓ angulus ipsi ΕΘΖ; æqualis igitur. Et est ipsius quidem ΒΗΓ

Que dans les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ placés aux centres Η, Θ, et les angles ΒΑΓ, ΕΔΖ placés aux arcs ΒΑΓ, ΕΔΖ comprennent les arcs égaux ΒΓ, ΕΖ; je dis que l'angle ΒΗΓ est égal à l'angle ΕΘΖ, et l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΕΔΖ.

Carsi les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ sont inégaux, l'un d'eux sera le plus grand. Que l'angle ΒΗΓ soit le plus grand; sur la droite ΒΗ, et au point Η de cette droite, faisons l'angle ΒΗΚ égal à l'angle ΕΘΖ (23. 1). Puisque les angles égaux comprennent des arcs égaux, lorsqu'ils sont aux centres (26. 3), l'arc ΒΚ est égal à l'arc ΕΖ. Mais l'arc ΕΖ est égal à l'arc ΒΓ; donc l'arc ΒΚ est égal à l'arc ΒΓ, le plus petit au plus grand, ce qui est impossible. Donc les angles ΒΗΓ, ΕΘΖ ne sont pas inégaux; donc ils sont

μὲν ὑπὸ BHΓ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ
ΕΘΖ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς
τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις,
καὶ τὰ ἐξῆς.

dimidius ipse ad Α, ipsius vero ΕΘΖ dimidius
ipse ad Δ; æqualis igitur et ad Α angulus ipsi
ad Δ. In æqualibus igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

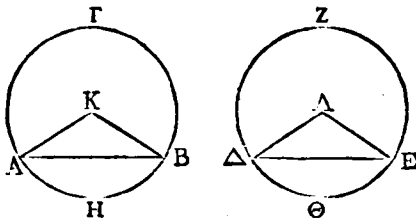
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας πε-
ριφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι,
τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττω.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν
αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἵστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ, τὰς
μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦ-

PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ æquales
circumferentias auferunt, majorem quidem ma-
jori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis
æquales rectæ sint ΑΒ, ΔΕ, ipsas quidem ΑΓΒ,
ΔΖΕ circumferentias majores auferentes, ipsas



σαι, τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττωνας· λέγω ὅτι
ἡ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ
μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέ-
ρεια τῇ ΔΘΕ ἐλάττω.

vero ΑΗΒ, ΔΘΕ minores; dico ipsam quidem
ΑΓΒ majorem circumferentiam æqualem esse
ipsi ΔΖΕ majori circumferentiæ, ipsam vero
ΑΗΒ minorem ip- i ΔΘΕ minori.

égaux. Mais l'angle en Α est la moitié de l'angle ΒΗΓ, et l'angle en Δ la moitié
de l'angle ΕΘΖ (20. 3); donc l'angle en Α est égal à l'angle en Δ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII.

Dans des cercles égaux, les droites égales soutendent des arcs égaux, le
plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit.

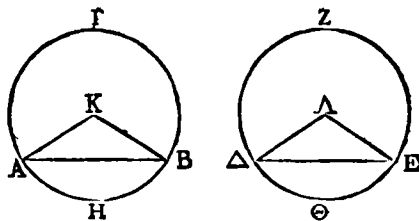
Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ, et que dans ces cercles, les droites
égales ΑΒ, ΔΕ soutendent les plus grands arcs ΑΓΒ, ΔΖΕ, et les plus petits arcs
ΑΗΒ, ΔΘΕ; je dis que le plus grand arc ΑΓΒ est égal au plus grand arc ΔΖΕ,
et que le plus petit arc ΑΗΒ est égal au plus petit arc ΔΘΕ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ ΒΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνία τῇ ὑπὸ

Sumantur enim centra circulorum, Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Et quoniam æquales circuli sunt, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur ΑΚ, ΚΒ duabus ΔΛ, ΛΕ æquales sunt, et basis ΑΒ basi ΔΕ æqualis; angulus igitur ΑΚΒ ipsi ΔΛΕ æqua-



ΔΛΕ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾤσιν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ περιφέρειᾳ³. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφέρειᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

lis est. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt; æqualis igitur ΑΗΒ circumferentia ipsi ΔΘΕ circumferentiæ. Est autem et totus ΑΒΓ circulus toti ΔΕΖ circulo æqualis; reliqua igitur et ΑΓΒ circumferentia reliquæ ΔΖΕ circumferentiæ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

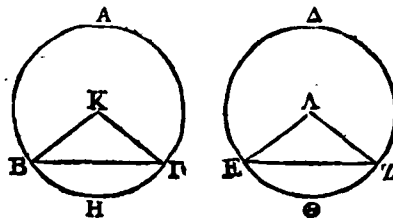
Prenons les centres Κ, Λ de ces cercles (1. 3), et joignons ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ. Puisque ces cercles sont égaux, leurs rayons sont égaux; donc les deux droites ΑΚ, ΚΒ sont égales aux deux droites ΔΛ, ΛΕ; mais la base ΑΒ est égale à la base ΔΕ; donc l'angle ΑΚΒ est égal à l'angle ΔΛΕ (8. 1). Mais des angles égaux comprennent des arcs égaux, quand ils sont aux centres (26. 3); donc l'arc ΑΗΒ est égal à l'arc ΔΘΕ. Mais la circonférence entière ΑΒΓ est égale à la circonférence entière ΔΕΖ; donc l'arc restant ΑΓΒ est égal à l'arc restant ΔΖΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφέρειας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτίνουσιν.

Εστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λίγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα² τῇ ΕΖ.

Εἰλήθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἕστω³ τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφέρειᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας ἐκπεριέχουσι βάσεις ἄρα ἡ ΒΓ βάσις τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξ ὧν.

PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectæ subtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, et in ipsis æquales circumferentiæ sumantur ΒΗΓ, ΕΘΖ, et jungantur ΒΓ, ΕΖ rectæ; dico æqualem esse ΒΓ rectam ipsi ΕΖ.

Sumantur enim centra circulorum, et sint Κ, Λ, et jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Et quoniam æqualis est ΒΗΓ circumferentia ipsi ΕΘΖ circumferentiæ, æqualis est et angulus ΒΚΓ ipsi ΕΛΖ. Et quoniam æquales sunt ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, æquales sunt et ipsæ ex centris; duæ igitur ΒΚ, ΚΓ duabus ΕΛ, ΛΖ æquales sunt, et angulos æquales continent; basis igitur ΒΓ basi ΕΖ æqualis est. In æqualibus igitur, etc.

PROPOSITION XXIX.

Dans des cercles égaux, les arcs égaux sont soutendus par des droites égales. Soient les cercles égaux ΑΒΓ, ΔΕΖ; dans ces cercles prenons les arcs égaux ΒΗΓ, ΕΘΖ, et joignons les droites ΒΓ, ΕΖ; je dis que la droite ΒΓ est égale à la droite ΕΖ.

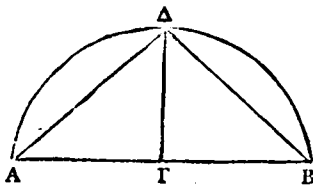
Prenons les centres de ces cercles, qu'ils soient Κ, Λ, et joignons ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ. Puisque l'arc ΒΗΓ est égal à l'arc ΕΘΖ, l'angle ΒΚΓ est égal à l'angle ΕΛΖ (27. 3). Mais les cercles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont égaux; donc leurs rayons seront égaux; donc les deux droites ΒΚ, ΚΓ sont égales aux deux droites ΕΛ, ΛΖ; mais ces droites comprennent des angles égaux; donc la base ΒΓ est égale à la base ΕΖ (4. 1). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν¹.

Εστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ $\Lambda\Delta\text{B}$ · δεῖ δὴ τὴν $\Lambda\Delta\text{B}$ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν².

Επεξέχθω ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ $\Lambda\Delta$, ΔB .



Καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ ΓB , κοινὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ · δύο δὲ αἱ AG , $\Gamma\Delta$ δυσὶ ταῖς BG , $\Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶ. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\text{AG}\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\text{BG}\Delta$ ἴση, ὀρθὴ γάρ ἑκατέρα· βάσεις ἄρα³ ἡ $\Lambda\Delta$ βάσει τῇ ΔB ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφέρειας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττω· καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $\Lambda\Delta$, ΔB περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ $\Lambda\Delta$ περιφέρεια τῇ ΔB περιφέρειᾳ.

PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia $\Lambda\Delta\text{B}$; oportet igitur $\Lambda\Delta\text{B}$ circumferentiam bifariam secare.

Jungatur AB , et secetur bifariam in Γ , et a Γ puncto ipsi AB rectæ ad rectos ducatur ΓB , et jungantur $\Lambda\Delta$, ΔB .

Et quoniam æqualis est AG ipsi ΓB , communis autem $\Gamma\Delta$; duæ igitur AG , $\Gamma\Delta$ duabus BG , $\Gamma\Delta$ æquales sunt. Et angulus $\text{AG}\Delta$ angulo $\text{BG}\Delta$ æqualis, rectus enim uterque; basis igitur $\Lambda\Delta$ basi ΔB æqualis est. Æquales autem rectæ æquales circumferentias auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; et est utraque ipsarum $\Lambda\Delta$, ΔB circumferentiarum minor semicirculo; æqualis igitur $\Lambda\Delta$ circumferentia ipsi ΔB circumferentiæ.

PROPOSITION XXX.

Couper un arc donné en deux parties égales.

Soit $\Lambda\Delta\text{B}$ l'arc donné; il faut couper l'arc $\Lambda\Delta\text{B}$ en deux parties égales.

Joignons la droite AB , et coupons-la en deux parties égales en Γ (10. 1); du point Γ menons $\Gamma\Delta$ perpendiculaire à la droite AB (11. 1), et joignons $\Lambda\Delta$, ΔB .

Puisque AG est égal à ΓB , et que la droite $\Gamma\Delta$ est commune, les deux droites AG , $\Gamma\Delta$ sont égales aux deux droites BG , $\Gamma\Delta$. Mais l'angle $\text{AG}\Delta$ est égal à l'angle $\text{BG}\Delta$; car ils sont droits l'un et l'autre; donc la base $\Lambda\Delta$ est égale à la base ΔB (4. 1). Mais des droites égales soutendent des arcs égaux, le plus grand étant égal au plus grand, et le plus petit égal au plus petit (28. 3), et l'un et l'autre des arcs $\Lambda\Delta$, ΔB est plus petit que la demi-circonférence; donc l'arc $\Lambda\Delta$ est égal à l'arc ΔB .

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 175

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δ' ἔχει τέμνηται
κατὰ τὸ Δ σημείον⁴. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ergo data circumferentia bifariam secta est
in Δ puncto. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

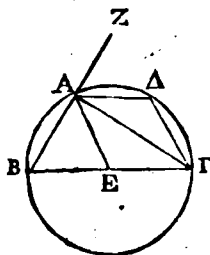
Εν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή
ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττω ὀρθῆς·
ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ
ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων
ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία
ἐλάττω ὀρθῆς².

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθωσαν

PROPOSITIO XXXI.

In circulo, ipse quidem in semicirculo angulus
rectus est; ipse vero in majore segmento
minor recto; ipse autem in minore segmento
major recto. Et insuper ipse quidem majoris
segmenti angulus major est recto; ipse vero mi-
noris segmenti angulus minor recto.

Sit circulus ΑΒΓΔ, diameter autem ipsius sit
ΒΓ, centrum vero Ε, et jungantur ΒΑ, ΑΓ,



αὶ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ
ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ ΒΑΓ³ ὀρθὴ ἐστίν· ἡ δὲ

ΑΔ, ΔΓ; dico ipsum quidem in ΒΑΓ semicir-
culo angulum ΒΑΓ rectum esse; ipsum autem in

Donc l'arc donné a été coupé en deux parties égales au point Δ. Ce qu'il
fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans un cercle, l'angle placé dans le demi-cercle est droit ; l'angle placé
dans un segment plus grand est plus petit qu'un droit ; l'angle placé dans
un segment plus petit est plus grand qu'un droit ; l'angle du plus grand seg-
ment est plus grand qu'un droit , et l'angle du plus petit segment est plus
petit qu'un droit.

Soit le cercle ΑΒΓΔ, dont le diamètre est ΒΓ et le centre le point Ε ; joignons
ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ ; je dis que l'angle ΒΑΓ placé dans le demi-cercle ΒΑΓ est droit ;

176 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐν τῷ $AB\Gamma$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ $\Delta\Delta\Gamma$ ἐλάττωνι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta\Delta\Gamma$ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

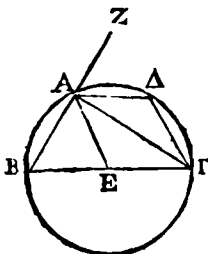
Επιζεύχθω ἡ AE , καὶ διήχθω ἡ BA ἐπὶ τὸ Z .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ BAE . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ GE τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ AGE τῇ ὑπὸ

$AB\Gamma$ majore semicirculo segmento angulum $AB\Gamma$ minorem recto; ipsum vero in $\Delta\Delta\Gamma$ minorem semicirculo segmento angulum $\Delta\Delta\Gamma$ majorem esse recto.

Jungatur AE , et producaturs BA ad Z .

Et quoniam æqualis est BE ipsi EA , æqualis est et angulus ABE , ipsi BAE . Rursus, quoniam æqualis est GE ipsi EA , æqualis est et AGE ipsi



ΓAE . Ἐλὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAG δυοὶ ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, AGB ἴση ἐστίν. Εστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZAG ἐκτὸς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου δυοὶ ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, AGB γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ ZAG , ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ BAG ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ BAG ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, BAG δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ

ΓAE ; totus igitur BAG duobus $AB\Gamma$, AGB æqualis est. Est autem et ipse ZAG , extra $AB\Gamma$ triangulum, duobus $AB\Gamma$, AGB angulis æqualis; æqualis igitur et BAG angulus ipsi ZAG ; recus igitur uterque; ipse igitur in BAG semicirculo angulus BAG rectus est.

Et quoniam $AB\Gamma$ trianguli duo anguli $AB\Gamma$, BAG duobus rectis minores sunt, rectus autem

que l'angle $AB\Gamma$ placé dans le segment $AB\Gamma$ plus grand que le demi-cercle $AB\Gamma$ est plus petit qu'un droit, et que l'angle $\Delta\Delta\Gamma$ placé dans le segment $\Delta\Delta\Gamma$ plus petit que le demi-cercle, est plus grand qu'un droit.

Joignons AE , et prolongeons BA vers Z .

Puisque BE est égal à EA , l'angle ABE est égal à l'angle BAE (5. 1). De plus, puisque GE est égal à EA , l'angle AGE est égal à l'angle GAE ; donc l'angle entier BAG est égal aux deux angles $AB\Gamma$, AGB . Mais l'angle ZAG placé hors du triangle $AB\Gamma$ est égal aux deux angles $AB\Gamma$, AGB (32. 1); donc l'angle BAG est égal à l'angle ZAG ; donc chacun de ces angles est droit (déf. 10. 1); donc l'angle BAG , placé dans le demi-cercle BAG , est droit.

Puisque les deux angles $AB\Gamma$, BAG du triangle $AB\Gamma$ sont plus petits que deux

LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 177

δὲ ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ ⁶· ἐλάττω ἀρα ὀρθῆς ἐστὶν ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ $AB\Gamma$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ $AB\Gamma\Delta$, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ὑπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$, $\Delta A\Gamma$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ. Καὶ ἐστὶν ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἐλάττω ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ $\Delta A\Gamma$ ἐλάττωι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω⁸ ὅτι καὶ ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τῆς $AB\Gamma$ περιφέρειας καὶ τῆς $A\Gamma$ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἢ δὲ τοῦ ἐλάττωτος τμήματος γωνία, ἢ περιεχομένη ὑπὸ τοῦ τῆς $\Delta A\Gamma$ περιφέρειας καὶ τῆς $A\Gamma$ εὐθείας, ἐλάττω ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἢ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία¹¹ ἐστὶν, ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς $AB\Gamma$ περιφέρειας καὶ τῆς $A\Gamma$ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἢ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, AZ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν· ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓA εὐθείας καὶ τῆς $A\Gamma\Delta$ περιφέρειας περιεχομένη¹² ἐλάττω ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

$BA\Gamma$; minor igitur recto est $AB\Gamma$ angulus, et in $AB\Gamma$ segmento semicirculo majore.

Et quoniam in circulo quadrilatum est $AB\Gamma\Delta$, in circulis autem quadrilatorum oppositi duobus rectis æquales sunt; ipsi igitur $AB\Gamma$, $\Delta A\Gamma$ duobus rectis æquales sunt. Et est $AB\Gamma$ minor recto; reliquus igitur $\Delta A\Gamma$ angulus major recto est, et est in $\Delta A\Gamma$ segmento semicirculo minore.

Dico autem et majoris quidem segmenti angulum comprehensum et ab $AB\Gamma$ circumferentiâ et $A\Gamma$ rectâ, majorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum et ab $\Delta A\Gamma$ circumferentiâ et $A\Gamma$ rectâ, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quoniam enim ipse a BA , $A\Gamma$ rectis comprehensus rectus angulus est, ergo ab $AB\Gamma$ circumferentiâ et $A\Gamma$ rectâ comprehensus major est recto. Rursus, quoniam ipse ab $A\Gamma$, AZ rectis comprehensus rectus est, ergo a ΓA rectâ, et $A\Gamma\Delta$ circumferentiâ comprehensus minor est recto. In circulo igitur, etc.

droits (17. 1), et que l'angle $BA\Gamma$ est droit, l'angle $AB\Gamma$ est plus petit qu'un droit, et cet angle est dans le segment $AB\Gamma$ plus grand que le demi-cercle.

Puisque le quadrilatère $AB\Gamma\Delta$ est dans un cercle, et que les angles opposés des quadrilatères inscrits dans des cercles sont égaux à deux droits (22. 3), les angles $AB\Gamma$, $\Delta A\Gamma$ sont égaux à deux droits. Mais l'angle $AB\Gamma$ est plus petit qu'un droit; donc l'angle restant $\Delta A\Gamma$ est plus grand qu'un droit, et cet angle est dans le segment $\Delta A\Gamma$ plus petit que le demi-cercle.

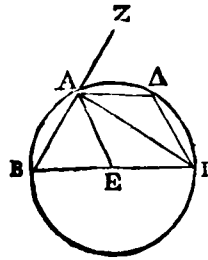
Je dis aussi que l'angle du plus grand segment, compris par l'arc $AB\Gamma$ et la droite $A\Gamma$, est plus grand qu'un droit, et que l'angle du plus petit segment, compris par l'arc $\Delta A\Gamma$ et la droite $A\Gamma$, est plus petit qu'un droit, ce qui est évident; car puisque l'angle compris par les droites BA , $A\Gamma$ est droit, l'angle compris par l'arc $AB\Gamma$ et la droite $A\Gamma$ est plus grand qu'un droit. De plus, puisque l'angle compris par les droites $A\Gamma$, AZ est droit, l'angle compris par la droite ΓA et l'arc $A\Gamma\Delta$ est plus petit qu'un droit. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Η¹³ ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. Ἐπεὶ διπλῇ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῇ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστίν. Ὅπρι ἔδει δειξαι.

Demonstratur rectum esse ΒΑΓ. Quoniam duplus est ΑΕΓ ipsius ΒΑΕ, æqualis enim duobus interioribus et oppositis; est autem et ΑΕΒ duplus ipsius ΕΑΓ; ipsi igitur ΑΕΒ, ΑΕΓ dupli sunt ipsius ΒΑΓ. Sed ipsi ΑΕΒ, ΑΕΓ duobus rectis æquales sunt; ergo ΒΑΓ rectus est. Quod oportebat ostendere.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι εἰ ἂν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾗ, ὀρθή ἐστίν ἡ γωνία.

Ex hoc utique manifestum, si unus angulus trianguli duobus æqualis sit, rectum esse angu-

AUTREMENT.

On démontre autrement que l'angle ΒΑΓ est droit. En effet, puisque l'angle ΑΕΓ est double de l'angle ΒΑΕ, car il est égal aux deux angles intérieurs et opposés (32. 1), et que l'angle ΑΕΒ est double de l'angle ΕΑΓ, les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont doubles de l'angle ΒΑΓ. Mais les angles ΑΕΒ, ΑΕΓ, sont égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle ΒΑΓ est droit. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit, parce que son angle extérieur est égal à ces

LE TROISIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 179

διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ ἰφισζῆς ἴσαι ᾖσιν, ὀρθαί εἰσιν¹⁴.

lum, propterea quod et ejus angulus exterior iisdem est æqualis. Quando autem ipsi deinceps sunt æquales, recti sunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

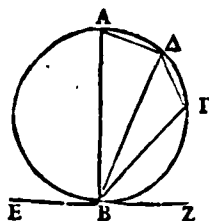
PROPOSITIO XXXII.

Εὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς αὐτῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένη ἴσαι ἴσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γάρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτίσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem in circulum ducatur aliqua recta secans circulum, quos facit angulos ad contingentem ipsi æquales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Circulum enim ΑΒΓΔ contingat aliqua recta ΕΖ in Β puncto, et a Β puncto ducatur aliqua



διέχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιῇ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἴσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις.

recta ΒΔ in ΑΒΓΔ circulum secans ipsum; dico quos facit angulos ΒΔ cum ΕΖ contingente eos æquales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est ΖΒΔ quidem angulum æ-

mêmes angles, et que quand deux angles de suite sont égaux, ils sont droits (déf. 10. 1).

PROPOSITION XXXII.

Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle.

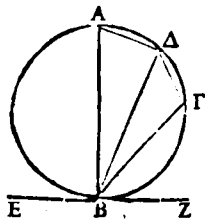
Qu'une droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et du point Β menons une droite ΒΔ qui coupe le cercle ΑΒΓΔ; je dis que les angles que fait ΒΔ avec la tangente ΕΖ sont égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle;

νίαις, τούτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένη γωνίᾳ³.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

qualem esse angulo in ΒΑΔ segmento constituto, ΔΒΕ vero angulum æqualem esse in ΑΓΒ segmento constituto.

Ducatur enim a Β ipsi ΕΖ ad rectos ΒΑ, et sumatur in ΒΔ circumferentiâ quodlibet punctum Γ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.



Καὶ ἐπὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ΕΖ κατὰ τὸ Β, ἀπὸ δὲ τῆς⁴ ἀφ᾽ ἧς ἤκται τῇ ἐφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα⁵ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ εὔσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μὲν ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. Κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ

Et quoniam circulum ΑΒΓΔ contingit aliqua recta ΕΖ in Β, a contactu autem ducta est tangenti ad rectas ΒΑ, in ΒΑ igitur centrum est ΑΒΓΔ circuli. ΒΑ igitur diameter est ΑΒΓΔ circuli; ergo ΑΔΒ angulus in semicirculo constitutus rectus est; reliqui igitur ΒΑΔ, ΑΒΔ uni recto æquales sunt. Est autem et ΑΒΖ rectus; ergo ΑΒΖ æqualis est ipsis ΒΑΔ, ΑΒΔ. Communis auferatur ΑΒΔ; reliquus igitur ΔΒΖ angulus æqualis est angulo ΒΑΔ in alterno

c'est-à-dire, que l'angle ΖΒΔ est égal à l'angle placé dans le segment ΒΑΔ, et que l'angle ΑΒΕ est égal à l'angle placé dans le segment ΑΓΒ.

D'un point Β menons la droite ΒΑ perpendiculaire à ΕΖ (11. 1), et dans l'arc ΒΔ, prenons un point quelconque Γ, et joignons ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓΔ au point Β, et que la droite ΒΑ, menée du point de contact Β, est perpendiculaire à la tangente ΕΖ, le centre du cercle ΑΒΓΔ est dans la droite ΒΑ (19. 3). Donc ΒΑ est le diamètre du cercle ΑΒΓΔ; donc l'angle ΑΔΒ, placé dans le demi-cercle, est droit (31. 3). Donc les angles restants ΒΑΔ, ΑΒΔ sont égaux à un droit. Mais l'angle ΑΒΖ est droit; donc l'angle ΑΒΖ est égal aux angles ΒΑΔ, ΑΒΔ (not. 10). Retranchons l'angle commun ΑΒΔ; l'angle restant ΔΒΖ sera égal à l'angle ΒΑΔ

τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνία, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

segmento circuli. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ΑΒΓΔ, oppositi ejus anguli duobus rectis æquales sunt. Sunt autem et ipsi ΔΒΖ, ΔΒΕ duobus rectis æquales; ipsi igitur ΔΒΖ, ΔΒΕ ipsis ΒΑΔ, ΒΓΔ æquales sunt, quorum ΒΑΔ ipsi ΔΒΖ ostensus est æqualis; reliquus igitur ΔΒΕ angulo ΔΓΒ in alterno circuli segmento ΔΓΒ æqualis est. Si igitur circulum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

PROPOSITIO XXXIII.

Επὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Super datâ rectâ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ. Δείδειν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία ἢ τοι ὀξεία ἐστίν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεία.

Sit data recta ΑΒ, datus autem angulus rectilineus ad Γ; oportet igitur super datâ rectâ ΑΒ describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ. Ipse autem ad Γ angulus vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

placé dans le segment alterne du cercle. Et puisque le quadrilatère ΑΒΓΔ est inscrit dans le cercle, ses angles opposés sont égaux à deux droits (22. 3). Mais les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux à deux droits; donc les angles ΔΒΖ, ΔΒΕ sont égaux aux angles ΒΑΔ, ΒΓΔ (13. 1); mais on a démontré que l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΔΒΖ; donc l'angle restant ΔΒΕ est égal à l'angle ΑΓΒ placé dans le segment alterne du cercle ΑΓΒ; donc, etc.

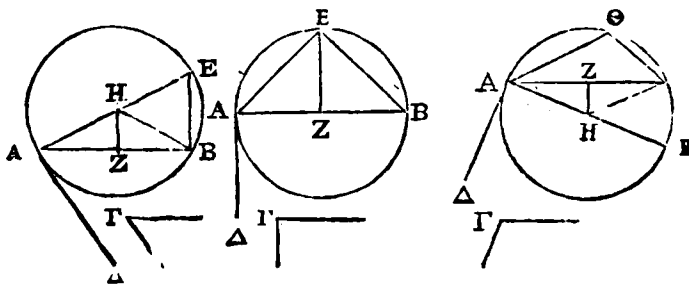
PROPOSITION XXXIII.

Sur une droite donnée, décrire un segment de cercle, qui recoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ΑΒ la droite donnée et Γ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite donnée ΑΒ décrire un segment de cercle qui recoive un angle égal à l'angle donné Γ. L'angle Γ est aigu, ou droit, ou obtus.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς³ ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ⁴ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ BAA· ὀξεῖα ἄρα ἴστί καὶ ἡ ὑπὸ BAA. Καὶ⁵ ἤχθω τῇ AA ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τεμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστί τιν ἡ AZ τῇ ZB,

Sit primum acutus, ut in primâ figurâ, et constitutur ad AB rectam et ad punctum in A, ipsi ad Γ angulo æqualis ipse BAA; acutus igitur est et BAA. Ducatur ipsi AA ab A puncto ad rectos ipsa AE, et secetur AB bifariam in Z, et ducatur a Z puncto ipsi AB ad rectos ipsa ZH, et jungatur HB. Et quoniam æqualis est AZ ipsi ZB, communis autem ZH, duæ utique



κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὲ αἱ AZ, ZH δυσὶ ταῖς ZB, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία⁶ τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσεις ἄρα ἡ AH βάσις τῇ HB ἴση ἴστί. Ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ HA, κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τοῦ B. Γεγράφθω, καὶ ἴστω ὁ ABE, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ BE. Ἐπεὶ οὖν, ἀπ' ἄκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A, τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἴστί τιν ἡ AA, ἡ AA ἄρα ἐφίπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ

AZ, ZH duabus ZB, ZH æquales sunt, et angulus AZH ipsi angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi HB æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Describatur, et sit ABE, et jungatur BE. Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos est AA, ipsa utique AA contingit circulum. Quoniam igitur circulum ABE tangit aliqua recta AA, et a

Premièrement qu'il soit aigu, comme dans la première figure; sur la droite AB et au point A construisons un angle BAA égal à l'angle Γ (25. 1); l'angle BAA sera aigu. Du point A menons AE perpendiculaire à AA (11. 1); coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1), et du point Z menons ZH perpendiculaire à AB, et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites ZB, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base HB (4. 1). Donc le cercle décrit du centre H, et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il soit décrit, et qu'il soit ABE, et joignons EB. Puisque la droite AA menée de l'extrémité A du diamètre AE est perpendiculaire à AE, la droite AA touchera le cercle (16. 3). Puisque la droite AA touche le cercle ABE,

εὖν κύκλου τοῦ ABE ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΑΔΓ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἀφῆς εἰς⁸ τὸ ABE κύκλον διήκται τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ κύκλου⁹ τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ AEB. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB, διέχονον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Αλλὰ δὴ ὁρθὴ ἴστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δεόν ἴστω πάλιν¹⁰ ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμήμα κύκλου διέχονον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὁρθῇ γωνίᾳ¹¹. Συνιστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὁρθῇ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ BΔΔ, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθαι ἡ AB δίχως κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ὅποτέρῳ τῶν ZA, ZB, κύκλος γιγρῶσθω ὁ AEB. Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὁρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BΔΔ γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι¹², ὅρ' ἡ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίᾳ ὄσσι. Αλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ BΔΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ¹³. Καὶ ἡ ἐν

contactu ad A in ABE circumulum ducta est aliqua AB, angulus utique ΔAB æqualis est angulo AEB in alterno circuli segmento. Sed ΔAB ipsi ad Γ est æqualis; et ad Γ igitur angulus æqualis est ipsi AEB. Super datâ igitur rectâ AB segmentum circuli descriptum est AEB, capiens angulum AEB æqualem dato ad Γ.

Sed et rectus sit ipse ad Γ; et oporteat rursus super AB describere segmentum circuli, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ recto angulo. Constituatur enim rursus ipsi ad Γ recto angulus æqualis BΔΔ, ut se habet in secundâ figurâ, et secetur AB bifariam in Z, et centro quidem Z, intervallo vero alterutrâ ipsarum AZ, ZB, circulus describatur AEB; contingit igitur ΑΔ recta ABE circumulum, propterea quod rectus est ad Α angulus. Et æqualis est quidem BΔΔ angulus ipsi in AEB segmento, rectus enim et ipse est in semicirculo consistens. Sed BΔΔ ipsi ad Γ æqualis est; et ipse

et que du point de contact en A on a méné une droite AB dans le cercle ABE, l'angle ΔAB est égal à l'angle AEB placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle AAB est égal à l'angle Γ; donc l'angle Γ est égal à l'angle AEB. Donc sur la droite donnée AB, on a décrit un segment de cercle AEB qui reçoit un angle AEB égal à l'angle donné Γ:

Mais que l'angle Γ soit droit, et qu'il faille encore décrire sur la droite AB un segment de cercle qui reçoive un angle égal à l'angle droit Γ. Construisons un angle BΔΔ égal à l'angle droit Γ (23. 1), comme dans la seconde figure; coupons AB en deux parties égales en Z (10. 1); du centre Z, et d'un intervalle égal à l'une ou à l'autre des droites ZA, ZB, décrivons le cercle AEB. La droite ΑΔ sera tangente au cercle ABE (16. 3), parce que l'angle est droit en A. Mais l'angle BΔΔ est égal à l'angle qui est placé dans le segment AEB, car cet angle est droit, puisqu'il est placé dans un demi-cercle (31. 3). Mais l'angle BΔΔ est égal à l'angle Γ; donc l'angle placé dans le segment est égal à l'angle Γ,

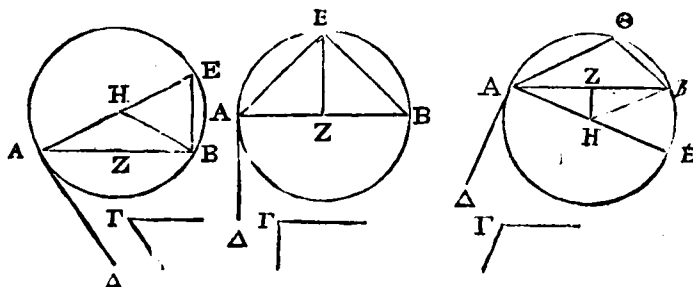
184 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ¹⁴. γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς AB τμήμα κύκλου τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεία ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ ἡ ὑπὸ BΔΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ

in AEB segmento igitur æqualis est ipsi ad Γ. Descriptum est igitur rursus super AB segmentum circuli AEB, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ.

Sed etiam ad Γ obtusus sit, et constituatur ipsi æqualis ad AB rectam et ad A punctum ipse BΔΔ, ut se habet in tertiâ figurâ, et ipsi ΑΔ ad rectos ducatur ΑΕ, et secetur rur-



ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ZH, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ZB, καὶ κοινὴ ἡ ZH, δύο δὲ αἱ ΑΖ, ZH δυσὶ ταῖς BZ, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ¹⁵ ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ, κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τοῦ Β. Ερχέσθω ὡς ὁ AEB¹⁶. Καὶ

sus AB bifariam in Z, et ipsi AB ad rectos ducatur ZH, et jungatur HB. Et quoniam rursus æqualis est AZ ipsi ZB, et communis ZH, duæ utique AZ, ZH duabus BZ, ZH æquales sunt, et angulus AZH angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi BH æqualis est. Ergo centro quidem H, intervallo vero HA, circulus descriptus transibit et per B. Transeat ut AEB. Et Quoniam ipsi AB diametro ab extremitate ad rec-

donec on a décrit sur la droite AB un segment de cercle AEB qui reçoit un angle égal à l'angle droit r.

Mais enfin que l'angle r soit obtus. Sur la droite AB et au point A construisons un angle BAA égal à l'angle r (23. 1), et menons AE perpendiculaire à AA (11. 1); coupons la droite AB en deux parties égales en Z (10. 1); menons ZH perpendiculaire à AB (11. 1), et joignons HB. Puisque AZ est égal à ZB, et que la droite ZH est commune, les deux droites AZ, ZH sont égales aux deux droites BZ, ZH; mais l'angle AZH est égal à l'angle BZH; donc la base AH est égale à la base BH (4. 1). Donc le cercle décrit du point H et de l'intervalle HA passera par le point B. Qu'il y passe comme AEB, puisqu'on a mené de l'extrémité du

ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἁκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται²⁰ ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένη γωνία. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶ· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας²¹ τῆς ΑΒ γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, διχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ'.

diamètre AE, la droite AD perpendiculaire à ce diamètre, la droite AD touchera le cercle AEB (16. 3). Et puisque la droite AB a été menée du point de contact A, l'angle BAA est égal à l'angle placé dans le segment alterne AOB du cercle. Mais l'angle BAA est égal à l'angle Γ ; donc l'angle placé dans le segment AOB est égal à l'angle Γ . Donc on a décrit sur la droite donnée AB un segment de cercle AOB, qui reçoit un angle égal à l'angle Γ . Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXIV.

D'un cercle donné, retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit ABΓ le cercle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut du cercle ABΓ retrancher un segment, qui reçoive un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ.

tos ducta est AD, ipsa AD igitur contingit AEB circumulum. Et a contactu ad A ducta est AB; ergo BAA angulus æqualis est angulo constituto in alterno circuli segmento AOB. Sed BAA angulus ipsi ad Γ æqualis est. Et ipse in AOB igitur segmento angulus æqualis est ipsi ad Γ . Ergo super datam rectam AB descriptum est segmentum circuli AOB, capiens angulum æqualem ipsi ad Γ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

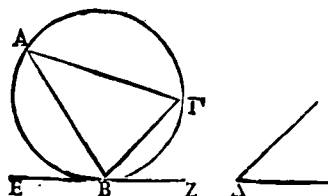
Sit datus circulus ABΓ, datus vero angulus rectilineus ad Δ; oportet igitur ab ABΓ circulo segmentum auferre, capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo ad Δ.

Ἡχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου² ἑφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνιστᾶται πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ὅ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ

Ducatur ipsum ΑΒΓ circulum contingens ΕΖ ad Β punctum, et constituatur ad ΕΖ rectam et ad punctum in eà Β ipsi ad Δ angulo æqualis ΖΒΓ.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit aliqua recta ΕΖ, et a contactu ad Β ducta est ΒΓ; ipse ΖΒΓ igitur æqualis est angulo constituto



ΒΑΓ ἐναλλάξ τμημάτων συνισταμένη γωνία. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμημάτων ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία³.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμήμα ἀφίρηται τὸ ΒΑΓ, διχομένον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Οὔτις εἶδει ποιῆσαι.

in ΒΑΓ alterno segmento. Sed ΖΒΓ ipsi ad Δ æqualis est; et ipse in ΒΑΓ igitur segmento æqualis est ipsi ad Δ angulo.

A dato igitur circulo ΑΒΓ segmentum ablatum est ΒΑΓ, capiens angulum æqualem ipsi dato angulo rectilineo ad Δ. Quod oportebat facere.

Menons une droite ΕΖ qui touche le cercle ΑΒΓ au point Β (17. 3), et sur la droite ΕΖ, et au point Β de cette droite, faisons l'angle ΖΒΓ égal à l'angle Δ (23. 1).

Puisque la droite ΕΖ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΒΓ a été menée du point de contact Β, l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle placé dans le segment alterne ΒΑΓ du cercle (32. 3). Mais l'angle ΖΒΓ est égal à l'angle Δ; donc l'angle placé dans le segment ΒΑΓ est égal à l'angle Δ.

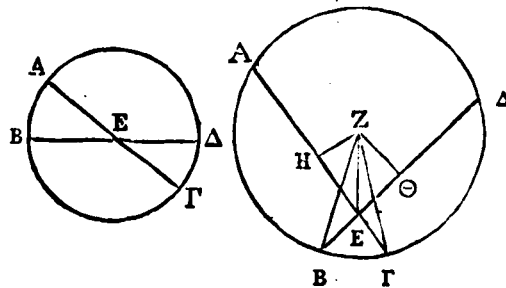
Donc du cercle donné ΑΒΓ on a retranché un segment ΒΑΓ, qui reçoit un angle égal à l'angle rectiligne donné Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΙ΄.

PROPOSITIO XXXV.

Εάν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνεταισαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερόν ὅτι, ἴσων οὖσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ.

Si in circulo duæ rectæ sese secant, ipsum sub unius segmentis contentum rectangulum æquale est ipsi sub alterius segmentis contento rectangulo.

In circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ ΑΓ, ΒΔ sese secant in Ε puncto; dico ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.

Si igitur ipsæ quidem ΑΓ, ΒΔ per centrum sunt, ita ut Ε centrum sit ipsius ΑΒΓΔ circuli; manifestum est æqualibus existentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, et ipsum sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo.

PROPOSITION XXXV.

Si dans un cercle, deux droites se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

Que dans le cercle ΑΒΓΔ les deux droites ΑΓ, ΒΔ se coupent mutuellement au point Ε; je dis que le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

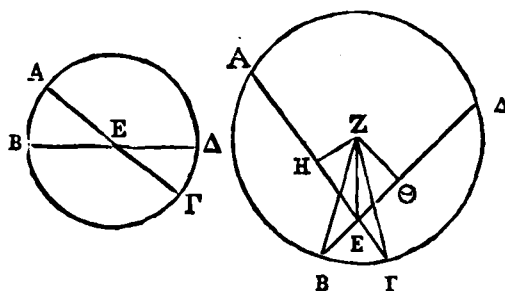
Si les droites ΑΓ, ΒΔ passent par le centre, de manière que le point Ε soit le centre du cercle ΑΒΓΔ, il est évident que les droites ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ étant égales, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ est égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ.

Μὴ² ἴστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου³, καὶ ἴστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθειτοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει⁴· ἴση

Non sint autem ΑΓ, ΔΒ per centrum, et sumatur centrum ipsius ΑΒΓΔ circuli, et sit Ζ, et a Ζ ad ΑΓ, ΔΒ rectas perpendiculares ducantur ΖΗ, ΖΘ, et jungantur ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Et quoniam recta aliqua ΖΗ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secat, et bifariam ipsam secat; æqualis igitur



ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τίτμνται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἀνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Προσκέισθω κοινὸν⁵ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ⁵ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἴσον⁶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. Αλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ

ΑΗ ἰπσι ΗΓ. Quoniam igitur ΑΓ secta est in æqualia quidem in Η, in inæqualia vero in Ε, ipsum utique sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum cum ipso ex ΗΕ quadrato æquale est ipsi ex ΗΓ. Commune addatur ipsum ex ΗΖ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ eum ipsis ex ΖΗ, ΗΕ æquale est ipsis ex ΓΗ, ΗΖ. Sed ipsis quidem ex ΕΗ, ΗΖ est æquale ipsum ex ΖΕ, ipsis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale est ipsi ex ΖΓ; ipsum igitur

Mais que les droites ΑΓ, ΔΒ ne passent pas par le centre; prenons le centre du cercle ΑΒΓΔ (1. 3), qu'il soit le point Ζ; du point Ζ menons les droites ΖΗ, ΖΘ perpendiculaires à ΑΓ, ΔΒ (12. 1), et joignons ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.

Puisque la droite ΖΗ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, elle la coupe en deux parties égales (3. 3); donc ΑΗ est égal à ΗΓ. Puisque ΑΓ est coupé en deux parties égales en Η, et en deux parties inégales en Ε, le rectangle compris sous ΑΕ, ΕΓ, avec le carré de ΗΕ, est égal au carré de ΗΓ (5. 2). Ajoutons le carré commun de ΗΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec les carrés des droites ΖΗ, ΗΕ sera égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ. Mais le carré de ΖΕ est égal aux carrés des droites ΕΗ, ΗΖ (47. 1), et le carré de ΖΓ égal aux carrés des droites ΓΗ, ΗΖ.

τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἰση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Εδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ· Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχόμενῳ ὀρθογώνιῳ. Εὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ, æquale est ipsi ΖΓ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ, ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΕΖ æquale est ipsi ex ΖΒ. Propter eadem utique et ipsum sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi ex ΖΒ. Ostensum est autem et ipsum sub ΑΕ ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale esse ipsi ex ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΕ, ΕΓ cum ipso ex ΖΕ æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ cum ipso ex ΖΕ. Commune auferatur ipsum ex ΖΕ; reliquum igitur sub ΑΕ, ΕΓ contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΔΕ, ΕΒ contento rectangulo. Si igitur in circulo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ'.

PROPOSITIO XXXVI.

Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται· ἴσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνουσῆς καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit ipsum sub totâ secante et ipsâ exterius sumptâ inter et punctum et convexam

HZ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΓ. Mais ΖΓ est égal à ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΕΖ, est égal au quarré de ΖΒ. Par la même raison, le rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΒ. Mais on a démontré que le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ, est égal au quarré de ΖΒ; donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΓ, avec le quarré de ΖΕ est égal au rectangle sous ΔΕ, ΕΒ, avec le quarré de ΖΕ. Retranchons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle restant compris sous ΑΕ, ΕΓ sera égal au rectangle compris sous ΔΕ, ΕΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI.

Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise exté-

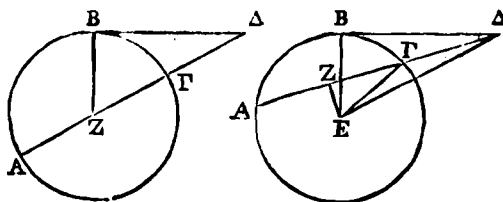
190 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἑφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἑφαπτάσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα ΔΓΑ² ἢτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἢ οὐ.

circumferentiam contentum rectangulum æquale ipsi ex contingente quadrato.

Extra circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, et a Δ ad ΑΒΓ circulum cadant duæ rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidem ΔΓΑ secet ΑΒΓ circulum, ipsa vero ΔΒ contingat; dico ipsum sub ΑΔ, ΔΓ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex ΔΒ quadrato. Ipsa igitur ΔΓΑ vel per centrum est, vel non.



Ἐστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ³ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἴση δὲ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ

Sit primum per centrum, et sit Z centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et jungatur ΖΒ; rectus igitur est ΖΒΔ. Et quoniam recta ΑΓ bifariam secta est in Ζ, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΓ æquale est ipsi ex ΖΔ. Æqualis autem ΖΓ ipsi ΖΒ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΖΒ æquale est ipsi

rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au quarré de la tangente.

Hors du cercle ΑΒΓ, prenons un point quelconque Δ, et de ce point menons les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ; que la droite ΔΓΑ coupe le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΔΒ lui soit tangente; je dis que le rectangle compris sous ΑΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΔΒ, soit que la droite ΔΓΑ passe par le centre, ou non.

Qu'elle passe premièrement par le centre du cercle, et que Ζ soit le centre du cercle ΑΒΓ, joignons ΖΒ; l'angle ΖΒΔ sera droit (18. 3). Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΓ, est égal au quarré de ΖΔ (6. 2). Mais la droite ΖΓ est égale à la droite ΖΒ; donc le rectangle

τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ⁵. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. Κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἴστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἦχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθείαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖν ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεία ἡ ΑΓ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον⁶, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον⁷ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ

ex ZA. Ipsi vero ex ZA æqualia sunt ipsa ex ZB, BA, rectus enim ipse ZBA; ipsum igitur sub AA, ΔΓ cum ipso ex ZB æquale est ipsis ex ZB, BA. Commune auferatur ipsum ex ZB; reliquum igitur sub AA, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔB contingente.

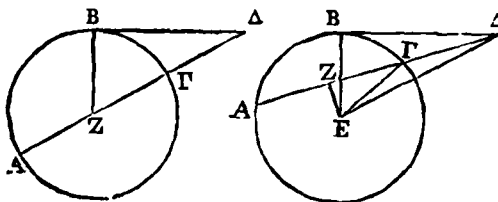
Sed et ΔΓΑ non sit per centrum ipsius ΑΒΓ circuli, et sumatur centrum Ε, et ex Ε ad ΑΓ perpendicularis ducatur ΕΖ, et jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; rectus igitur est ΕΖΔ. Et quoniam recta aliqua ΕΖ per centrum rectam aliquam ΑΓ non per centrum ad rectos secatur, et bifariam ipsam secabit; ΑΖ igitur ipsi ΖΓ est æqualis. Et quoniam recta ΑΓ secatur bifariam in Ζ puncto, adjicitur vero ipsi ipsa ΓΔ; ipsum igitur sub AA, ΔΓ cum ipso ΖΓ æquale est ipsi ex ZA. Commune addatur ex ZE; ipsum igitur sub AA, ΔΓ cum ipsis ex ΓΖ, ZE æquale est ipsis ex ΔΖ, ZE. Sed ipsis ex ΓΖ, ZE æquale est ipsum ex ΕΓ, rectus enim ΕΖΓ angulus; ip-

sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal au quarré de ΖΔ. Mais les quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΖΔ (47. 1), car l'angle ΖΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΒ, est égal aux quarrés des droites ΖΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΖΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de la tangente ΔΒ.

Mais que la droite ΔΓΑ ne passe pas par le centre du cercle ΑΒΓ; prenons le centre Ε, et du point Ε menons ΕΖ perpendiculaire à ΑΓ (12. 1), et joignons ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ; l'angle ΕΖΔ sera droit. Et puisque la droite ΕΖ menée par le centre coupe à angles droits la droite ΑΓ non menée par le centre, la droite ΕΖ coupe la droite ΑΓ en deux parties égales (3. 3); donc la droite ΑΖ est égale à la droite ΖΓ. Et puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales au point Ζ, et que la droite ΓΔ lui est ajoutée, le rectangle sous les droites ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΖΓ, est égal au quarré de ΖΔ (6. 2). Ajoutons le quarré commun de ΖΕ; le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec les quarrés des droites ΓΖ, ΖΕ, sera égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ. Mais le quarré de ΕΓ est égal aux quarrés de ΓΖ, ΖΕ (47. 1), car l'angle ΕΖΓ

ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ⁸. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ

sis autem ex ΔΖ, ΖΕ æquale est ipsum ex ΕΔ. Ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΓ æquale est ipsi ex ΕΔ. Æqualis autem ΕΓ ipsi ΕΒ; ipsum igitur ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsi ex ΕΔ. Ipsi autem ex ΕΔ æqua-



ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. Εὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

lia sunt ipsa ex ΕΒ, ΒΔ, rectus enim ΕΒΔ angulus; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ cum ipso ex ΕΒ æquale est ipsis ex ΕΒ, ΒΔ. Comune auferatur ipsum ex ΕΒ; reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ æquale est ipsi ex ΔΒ. Si igitur extra circum, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ'

PROPOSITIO XXXVII.

Εὰν κύκλου ληθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ

Si extra circum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circum cadant duæ rectæ, et una quidem earum secet circum altera, vero

est droit, et le quarré de ΕΔ est égal aux quarrés des droites ΔΖ, ΖΕ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΕΓ, est égal au quarré de ΕΔ. Mais ΕΓ est égal à ΕΒ; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré de ΕΒ est égal au quarré de ΕΔ. Mais les quarrés des droites ΕΒ, ΒΔ sont égaux au quarré de ΕΔ (47. 1), car l'angle ΕΒΔ est droit; donc le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ, avec le quarré ΕΒ, est égal aux quarrés des droites ΕΒ, ΒΔ. Retranchons le quarré commun de ΕΒ, le rectangle restant sous ΑΔ, ΔΓ sera égal au quarré de ΔΒ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVII.

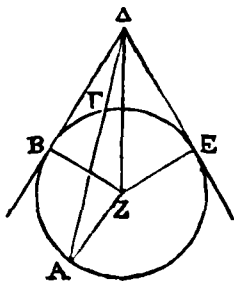
Si l'on prend un point quelconque hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'angle tombe sur

προσπίπτῃ, ἥ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς¹ τεμνοῦ-
σης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ
τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφέρειας ἴσον
τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα
ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς
τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσ-
πιπτίτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν

in eum cadat, sit autem ipsum sub totà secante
et ipsà exterius sumptà inter et punctum et con-
vexam circumferentiam æquale ipsi ex incidente;
incidens continget circulum.

Extra circulum ΑΒΓ sumatur aliquod punc-
tum Δ, et ex Δ in ΑΒΓ circulum incidenti duæ
rectæ ΔΓΑ, ΔΒ, et ipsa quidam ΔΓΑ secet



ΔΓΑ τεμνίτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτίτω,
ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ² ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς
ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ
εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω
τὸ Ζ³, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα
ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου,
τίμναι δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον

circulum, ipsa vero ΔΒ in eum incidat, sit
autem ipsum sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ;
dico ipsam ΔΒ contingere ΑΒΓ circulum.

Ducatur enim ipsum ΑΒΓ contingens ipsa
ΔΕ, et sumatur centrum circuli ΑΒΓ, et sit
Ζ, et jungantur ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; ipse igitur ΖΕΔ
rectus est.

Et quoniam ΔΕ contingit ΑΒΓ circulum, se-
cat autem ipsa ΔΓΑ; ipsum igitur sub ΑΔ, ΔΓ

ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise exté-
rieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au quarré de
la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur le cercle sera tan-
gente à ce cercle.

Hors du cercle ΑΒΓ prenons un point quelconque Δ, et menons de ce point
les deux droites ΔΓΑ, ΔΒ, que la droite ΔΓΑ coupe le cercle, et que la droite
ΔΒ tombe sur le cercle; que le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ soit égal au quarré de
ΔΒ; je dis que la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ.

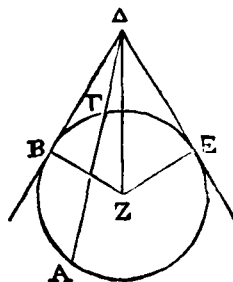
Menons la droite ΔΕ tangente au cercle ΑΒΓ (17. 3), prenons le centre du
cercle ΑΒΓ (1. 3), qu'il soit Ζ; joignons ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ; l'angle ΖΕΔ sera droit (18. 3).

Puisque ΔΕ touche le cercle ΑΒΓ, et que ΔΓΑ le coupe, le rectangle sous ΑΔ,

194 LE TROISIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὲ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυοὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ. Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία

æquale est ipsi ex ΔΕ. Erat autem et ipsum sub ΑΔ, ΔΓ æquale ipsi ex ΔΒ; ipsum igitur ex ΔΕ æquale est ipsi ex ΔΒ; æqualis igitur ΔΕ ipsi ΔΒ. Est autem et ΖΕ ipsi ΖΒ æqualis, duæ igitur ΔΕ, ΕΖ duabus ΔΒ, ΒΖ æquales sunt, et basis ipsarum communis ΖΔ; angulus igitur



τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἴστιν ἴση. Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καὶ ἴστιν ἡ ΒΖ ἑκαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΔΕΖ angulo ΔΒΖ est æqualis. Rectus autem ΔΕΖ; rectus igitur et ΔΒΖ. Et est ΒΖ producta diameter, ipsa vero diametro circuli ab extremitate ducta contingit et circulum; ipsa ΔΒ igitur contingit ΑΒΓ circulum. Similiter autem ostendemus, et si centrum in ΑΓ sit. Si igitur extra circulum, etc.

ΔΓ est égal au quarré de ΔΕ (36. 3). Mais le rectangle sous ΑΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΔΒ; donc le quarré de ΔΕ est égal au quarré de ΔΒ; donc ΔΕ est égal à ΔΒ. Mais ΖΕ est égal à ΖΒ; donc les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΔΒ, ΒΖ; mais la base ΖΔ est commune; donc l'angle ΔΕΖ est égal à l'angle ΔΒΖ (8. 1). Mais l'angle ΔΕΖ est droit; donc l'angle ΔΒΖ est droit aussi. Mais la droite ΒΖ prolongée est un diamètre, et une droite perpendiculaire au diamètre et menée d'une de ses extrémités est tangente au cercle (16. 3). Donc la droite ΔΒ est tangente au cercle ΑΒΓ. La démonstration serait la même si le centre était dans ΑΓ. Donc, etc.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R Q U A R T U S.

ΟΡΟΙ.

α. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἄπτηται.

β. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἄπτηται.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulorum unumquodque latus ipsius in quâ inscribitur contingit.

2. Figura autem similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ unumquemque angulum ipsius circa quam circumscribitur contingit.

LIVRE QUATRIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une figure rectiligne est dite inscrite dans une figure rectiligne, lorsque chacun des angles de la figure inscrite touche chaque côté de celle dans laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement une figure est dite circonscrite à une figure, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche chaque angle de la figure à laquelle elle est circonscrite.

γ'. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφισθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἀπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

δ'. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγρῆσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας.

ὁ κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως λέγεται ἐγγράφισθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἀπτηται.

ε'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγρῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἀπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφέρειας ᾗ τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῇ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

3. Une figure rectiligne est dite inscrite dans un cercle, lorsque chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence de ce cercle.

4. Une figure rectiligne est dite circonscrite à un cercle, lorsque chaque côté de la figure circonscrite touche la circonférence de ce cercle.

5. Semblablement un cercle est dit inscrit dans une figure rectiligne, lorsque la circonférence du cercle touche chaque côté de la figure dans laquelle il est inscrit.

6. Un cercle est dit circonscrit à une figure, lorsque la circonférence du cercle touche chaque angle de la figure à laquelle il est circonscrit.

7. Une droite est dite adaptée dans un cercle, lorsque ses extrémités sont dans la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Dans un cercle donné, adapter une droite égale à une droite donnée, qui n'est pas plus grande que le diamètre.

3. Figura vero rectilinea in circulo inscribitur, quando unusquisque angulus circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

4. Figura autem rectilinea circa circumscriptur, quando unumquodque latius circumscriptæ contingit circuli circumferentiam.

5. Circulus vero in figurâ similiter dicitur inscribi, quando circuli circumferentia unumquodque latius ipsius in quâ inscribitur contingit.

6. Circulus autem circa figuram circumscriptur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ipsius circa quam circumscriptur contingit.

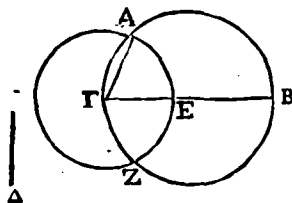
7. Recta in circulo aptari dicitur, quando termini ejus in circumferentiâ sunt circuli.

PROPOSITIO I.

In dato circulo datæ rectæ, non majori existenti circuli diametro, æqualem rectam aptare.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐ-
θεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ.
Δι' δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐ-
θεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ
μὲν οὖν ἴση ἴσθιν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη
τὸ ἐπιταχθῆναι. ἐνῆρμυσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύ-
κλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ μείζων ἴσθιν
ἡ ΒΓ τῆς Δ, κείσθω² τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κεί-



τρω μὲν³ τῇ Γ, διαστήματι δὲ τῇ ΓΕ κύκλος
γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΑ.

Επεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύ-
κλου, ἴση ἴσθιν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓΕ⁴
ἴσθιν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἴσθιν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δο-
θείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ⁵, ἴση ἐνῆρμυσται ἡ ΓΑ. Ὅπερ
ἔδει ποιῆσαι.

Sit datus circulus ΑΒΓ, data autem recta
Δ non major circuli diametro; oportet igitur in
ΑΒΓ circulo ipsi Δ rectæ æqualem rectam
aptare.

Ducatur ΑΒΓ circuli diameter ΒΓ. Si qui-
dem igitur æqualis est ΒΓ ipsi Δ, factum erit
propositum. Aptata est enim in ΑΒΓ circulo ipsi
Δ rectæ æqualis ΒΓ. Si vero major est ΒΓ ipsa
Δ, ponatur ipsi Δ æqualis ΓΕ, et centro

quidem Γ, intervallo vero ΓΕ, circulus descri-
batur ΑΕΖ, et jungatur ΓΑ.

Quoniam igitur Γ punctum centrum est ipsius
ΑΕΖ circuli, æqualis est ΓΑ ipsi ΓΕ. Sed ipsi Δ
ipsa ΓΕ est æqualis; et Δ igitur ipsi ΓΑ est æqualis.

In dato igitur circulo ΑΒΓ, datæ rectæ Δ,
æqualis aptata est ΓΑ. Quod oportebat facere.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et Δ la droite donnée, qui n'est pas plus grande
que le diamètre de ce cercle; il faut dans le cercle ΑΒΓ adapter une droite
égale à la droite Δ.

Menons le diamètre ΒΓ du cercle ΑΒΓ. Si la droite ΒΓ est égale à la droite
Δ, on aura fait ce qui était proposé. Car on aura adapté dans le cercle ΑΒΓ,
une droite ΒΓ égale à la droite Δ. Mais si la droite ΒΓ est plus grande que la
droite Δ, faisons ΓΕ égal à Δ (3. 1), du centre Γ et de l'intervalle ΓΕ décrivons
le cercle ΑΕΖ, et joignons ΓΑ.

Puisque le point Γ est le centre du cercle ΑΕΖ, la droite ΓΑ est égale à la
droite ΓΕ; mais Δ est égal à ΓΕ; donc Δ est égal à ΓΑ.

Donc dans le cercle donné ΑΒΓ on a adapté une droite ΓΑ égale à la droite
donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

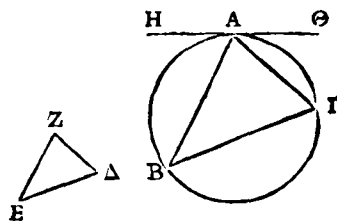
PROPOSITIO II.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθεὶν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

In dato circulo dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum vero triangulum ΔΕΖ; oportet igitur in ΑΒΓ circulo ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum inscribere.



Ἡχθῶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἢ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ducatur ΑΒΓ circulum contingens ipsa ΗΘ in Α, et constituatur ad ΑΘ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΘΑΓ; rursus, ad ΗΑ rectam et ad punctum in eâ Α ipsi ΖΔΕ æqualis ΗΑΒ, et jungatur ΒΓ.

PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut dans le cercle ΑΒΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔΕΖ.

Menons la droite ΗΘ, de manière qu'elle touche le cercle ΑΒΓ en un point Α, et sur la droite ΑΘ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΘΑΓ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1). De plus sur la droite ΗΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΗΑΒ égal à l'angle ΖΔΕ, et joignons ΒΓ.

Επειὶ οὖν κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τις εὐ-
θεΐα ἢ ΘA , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς εἰς
τὸν κύκλον διῆκται εὐθεΐα ἢ AG . ἢ ἄρα ὑπὸ
 $\Theta A\Gamma$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου
τμήματι γωνία, τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. ἀλλ' ἢ ὑπὸ $\Theta A\Gamma$
τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση· καὶ ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἄρα γω-
νία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ
ἢ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῇ ὑπὸ $Z\Delta E$ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα
ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐστὶν ἴση· ἰσο-
γώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τρι-
γώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον⁵.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τρι-
γώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. Ὅπρι εἶδει
ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ
ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Puisque la droite ΘA touche le cercle $AB\Gamma$, et que la droite AG a été menée dans le cercle du point de contact A , l'angle $\Theta A\Gamma$ est égal à l'angle $AB\Gamma$ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle $\Theta A\Gamma$ est égal à l'angle ΔEZ ; donc l'angle $AB\Gamma$ est égal à l'angle ΔEZ . Par la même raison l'angle $A\Gamma B$ est égal à l'angle $Z\Delta E$; donc l'angle restant $BA\Gamma$ est égal à l'angle restant $E\Delta Z$ (32. 1); donc le triangle $AB\Gamma$ est équiangle avec le triangle ΔEZ , et il est inscrit dans le cercle $AB\Gamma$ (déf. 3. 4).

Donc dans le cercle donné, on a inscrit un triangle équiangle avec un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III.

Aun cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

Quoniam igitur $AB\Gamma$ circumulum contingit ali-
qua recta ΘA , a contactu autem ad A in cir-
culo ducta est recta AG , ipse utique $\Theta A\Gamma$ æqua-
lis est ipsi in alterno circuli segmento angulo
 $AB\Gamma$. Sed ipse $\Theta A\Gamma$ ipsi ΔEZ est æqualis; et
 $AB\Gamma$ igitur angulus ipsi ΔEZ est æqualis. Prop-
ter eadem utique et ipse $A\Gamma B$ ipsi $Z\Delta E$ est æ-
qualis, et reliquus igitur $BA\Gamma$ reliquo $E\Delta Z$ est
æqualis. Æquiangulum igitur est $AB\Gamma$ triangu-
lum ipsi ΔEZ triangulo, et inscriptum est in $AB\Gamma$
circulo.

In dato igitur circulo dato triangulo æquian-
gulum triangulum descriptum est. Quod oport-
tebat facere.

PROPOSITIO III.

Circa datum circumulum dato triangulo æqui-
angulum triangulum circumscribere.

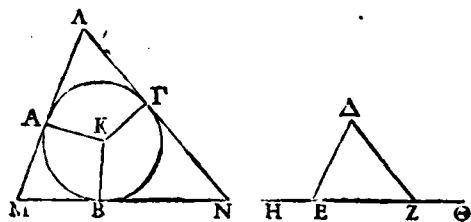
200 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· διτ' δὲ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Εκτελέσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ Η, Θ σημεία, καὶ εἰληφθῶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνιστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς

Sit datus circulus ΑΒΓ, datum autem triangulum ΔΕΖ; oportet igitur circa ΑΒΓ circulum ipsi ΔΕΖ triangulo æquiangulum triangulum circumscribere.

Producatur ΕΖ ex utrâque parte ad Η, Θ puncta, et sumatur ΑΒΓ circuli centrum Κ, et ducatur utcumque recta ΚΒ, et constituatur ad ΚΒ rectam et ad punctum in εἰ Κ ipsi qui-



αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΑΜ, ΜΝ, ΝΑ κατὰ τὰ Α, Β, Γ σημεία, καὶ ἐπιζυγνύμεναι εἰσιν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὁρβαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι

dem ΔΕΗ angulo æqualis ΒΚΑ, ipsi vero ΔΖΘ æqualis ΒΚΓ, et per Α, Β, Γ puncta ducantur tangentēs ipsum ΑΒΓ circulum ipsæ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ.

Et quoniam contingunt ΑΒΓ circulum ipsæ ΑΜ, ΜΝ, ΝΑ in Α, Β, Γ punctis, et junctæ sunt ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ; recti utique sunt ipsi ad Α, Β, Γ puncta anguli. Et quoniam ΑΜΒΚ quadrilateri quatuor anguli quatuor rectis æquales sunt, quandoqui-

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut au cercle ΑΒΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔΕΖ.

Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΑΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΑ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΑΜ, ΜΝ, ΝΑ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont

τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἐπεὶ δὴ περ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ $AMBK$, καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK , KBM γωνίαι³. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB , AMB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔEH , ΔEZ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ AKB , AMB ταῖς ὑπὸ ΔEH , ΔEZ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔEH ἴσιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴσιν ἴση. Ομοίως δὲ διειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛNM τῇ ὑπὸ ΔZE ἴσιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛMN λοιπῇ⁴ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴσιν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛMN τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ περιγύραπται περὶ τὸν $AB\Gamma$ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγύραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

dem et in duo triangula dividitur $AMBK$, et sunt recti MAK , KBM anguli; reliqui igitur AKB , AMB duobus rectis æquales sunt; sunt autem et ΔEH , ΔEZ duobus rectis æquales; ipsi igitur AKB , AMB ipsis ΔEH , ΔEZ æquales sunt, quorum AKB ipsi ΔEH est æqualis; reliquus igitur AMB reliquo ΔEZ est æqualis. Similiter utique ostendetur et ipsum ΛNM ipsi ΔZE esse æqualem; et reliquus igitur ΛMN reliquo ΔEZ est æqualis. Æquiangulum igitur est ΛMN triangulum ipsi ΔEZ triangulo, et circumscribitur circum $AB\Gamma$ circumlum.

Circa datum igitur circumlum dato triangulo æquiangulum triangulum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère $AMBK$ peut se diviser en deux triangles; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles MAK , KBM sont droits; donc les angles restants AKB , AMB sont égaux à deux droits. Mais les angles ΔEH , ΔEZ sont égaux à deux droits (13. 1); donc les angles AKB , AMB sont égaux aux angles ΔEH , ΔEZ ; mais l'angle AKB est égal à l'angle ΔEH ; donc l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ΔEZ . Nous démontrerons semblablement que l'angle ΛNM est égal à l'angle ΔZE ; donc l'angle restant ΛMN est égal à l'angle restant ΔEZ (32. 1). Donc le triangle ΛMN est équiangle avec le triangle ΔEZ , et il est circonscrit au cercle $AB\Gamma$ (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

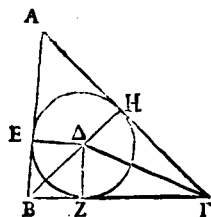
Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum ΑΓΒ; oportet igitur in ΑΒΓ triangulo circulum inscribere.

Secentur ΑΒΓ, ΑΓΒ anguli bifariam ab ipsis ΒΔ, ΓΔ rectis, et convenient inter se in Δ puncto, et ducantur a Δ ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas perpendiculares ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΓ', ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὲ τρίγωνα ἐστί τὰ ΕΒΔ, ΖΒΔ, τὰς δύο γωνίας ταῖς² δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν³ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ,

Et quoniam æqualis est ΑΒΔ angelus ipsi ΔΒΓ, est autem et rectus ΒΕΔ recto ΒΖΔ æqualis; duo igitur triangula sunt ΕΒΔ, ΖΒΔ, duos angulos duobus angelis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, sustendens unum æqualem angulorum, commune iis ipsum ΒΔ. Et

PROPOSITION IV.

Inscrire un cercle dans un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné; il faut dans le triangle ΑΒΓ inscrire un cercle.

Partageons en deux parties égales les angles ΑΒΓ, ΑΓΒ par les droites ΒΔ, ΓΔ; que ces droites se rencontrent au point Δ, et du point Δ menons aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ les perpendiculaires ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ (12. 1).

Puisque l'angle ΑΒΔ est égal à l'angle ΔΒΓ, et que l'angle droit ΒΕΔ est égal à l'angle droit ΒΖΔ, les deux triangles ΕΒΔ, ΖΒΔ ont deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΒΔ qui soutend un des

καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς τὰς λοιπαῖς πλευ-
ραῖς ἴσας ἔξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς
ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν·
ὁ ἄρα κέντρον τῷ Δ, καὶ⁵ διαστήματι ἐνὶ τῶν
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ
τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ,
ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὁρθὰς εἶναι τὰς πρὸς
τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμνῇ
αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς
ὁρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ
κύκλου, ὅπερ ἄτοπον εἰδείχθη⁶. οὐκ ἄρα ὁ κέν-
τρον Δ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γρα-
φόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας·
ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμ-
μένος εἰς⁸ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Εγγεγράφω ὡς
ΖΗΘ⁹.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος
ἐγγέγραπται ὁ¹⁰ ΕΖΗ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia
habebunt; æqualis igitur ΔΕ ipsi ΔΖ. Propter
eadem utique et ΔΗ ipsi ΔΖ est æqualis. Tres igitur
rectæ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ æquales inter se sunt; ergo
centro Δ, et intervallo unâ ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ
circulus descriptus transibit et per reliqua puncta,
et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ rectas, propterea
quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η puncta anguli. Si
enim secet ipsas, erit ipsa diametro circuli ad
rectos ab extremitate ducta intra ipsum cadens
circulum, quod absurdum ostensum est; non
igitur centro Δ, intervallo autem unâ ipsarum
ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ descriptus circulus secat ΑΒ, ΒΓ,
ΓΑ rectas; contingit igitur ipsas, et erit cir-
culus descriptus in ΑΒΓ triangulo. Inscribatur
ut ΖΗΕ.

In dato igitur triangulo ΑΒΓ circulus ins-
criptus est ΕΖΗ. Quod oportebat facere.

angles égaux; ils ont donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1);
donc ΔΕ est égal à ΔΖ. Par la même raison ΔΗ est égal à ΔΖ. Donc les trois
droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ sont égales entr'elles; donc le cercle décrit du point Δ
et d'un intervalle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ passera par les autres
points, et touchera les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, les angles étant droits en Ε, Ζ, Η.
Car si le cercle coupait ces droites, une perpendiculaire au diamètre d'un
cercle et menée d'une de ses extrémités tomberait dans ce cercle, ce qui a
été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du point Δ et d'un inter-
valle égal à une des droites ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ ne coupera point les droites ΑΒ, ΒΓ,
ΓΑ; donc elle les touchera, et ce cercle sera inscrit dans le triangle ΑΒΓ (déf. 5. 4).
Qu'il soit inscrit comme ΖΗΕ.

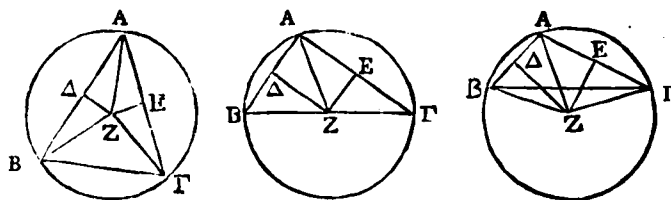
Donc dans le triangle donné ΑΒΓ, on a inscrit le cercle ΕΖΗ. Ce qu'il fallait
faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ · διττὴ δὲ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $ABΓ$ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ AB , $ΑΓ$ εὐθεῖαι¹ δίχα κατὰ τὰ Δ , E σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν Δ , E σημείων ταῖς AB , $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔZ , ZE · συμπίπτουσι δὲ ἥτοι ἐντὸς τοῦ $ABΓ$ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς $BΓ$ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς $BΓ$.



Συμπίπτωσαν οὖν² ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB , $ZΓ$, ZA . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $AΔ$ τῇ $BΔ$, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ · βάσεις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση³.

PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum $ABΓ$; oportet igitur circa datum triangulum $ABΓ$ circulum circumscribere.

Secentur AB , $ΑΓ$ rectæ bifariam in Δ , E punctis, et ab ipsis Δ , E punctis ipsis AB , $ΑΓ$ ad rectos ducantur ΔZ , ZE . Convenient autem vel intra $ABΓ$ triangulum, vel in $BΓ$ rectâ, vel extra $BΓ$.

Convenient igitur intus primum in Z , et jungantur ZB , $ZΓ$, ZA . Et quoniam æqualis est $AΔ$ ipsi $BΔ$, communis autem et ad rectos ipsa ΔZ ; basis igitur AZ ipsi ZB est æqualis. Simi-

PROPOSITION V.

Circonscrire un cercle à un triangle donné.

Soit $ABΓ$ le triangle donné; il faut au triangle donné $ABΓ$ circonscrire un cercle.

Coupons les droites AB , $ΑΓ$ en deux parties égales aux points Δ , E (10. 1), et des points Δ , E menons aux droites AB , $ΑΓ$ les perpendiculaires ΔZ , ZE (11. 1); ces perpendiculaires se rencontreront ou dans le triangle $ABΓ$, ou dans la droite $BΓ$, ou hors de la droite $BΓ$.

Premièrement que ces perpendiculaires se rencontrent dans le triangle, au point Z ; joignons ZB , $ZΓ$, ZA . Puisque $AΔ$ est égal à $BΔ$, et que la perpendiculaire ΔZ est commune et à angles droits, la base AZ est égale à la base ZB (4. 1). Nous

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο ἄρα κέντρον τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἴσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφείσθω⁵ ὡς ὁ ΑΒΓ.

Αλλὰ δὲ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπίπτουσιν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΑΖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.

Αλλὰ δὲ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπίπτουσιν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν⁶ ἴση· ὁ ἄρα πάλιν⁷ κέντρον τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος

liter utique ostendemus et ipsam ΓΖ ipsi ΑΖ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ æquales inter se sunt. Ergo centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit circumscriptus circulus circa ΑΒΓ triangulum. Circumscribatur ut ΑΒΓ.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient in ΒΓ rectâ in Ζ, ut se habet in secundâ figurâ, et jungatur ΑΖ. Similiter utique ostendemus Ζ punctum centrum esse ipsius circa ΑΒΓ triangulum circumscripti circuli.

Sed et ΔΖ, ΕΖ convenient extra ΑΒΓ triangulum, in Ζ rursus, ut se habet in tertiâ figurâ, et jungantur ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Et quoniam rursus æqualis est ΑΔ ipsi ΔΒ, communis autem et ad rectos ipsa ΔΖ; basis igitur ΑΖ ipsi ΖΒ est æqualis. Similiter utique ostendemus et ΖΓ ipsi ΖΑ esse æqualem, quare et ΖΒ ipsi ΖΓ est æqualis; ergo rursus centro Ζ, intervallo autem unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus transibit et per

démontrerons semblablement que ΓΖ est égal à ΑΖ ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ ; donc les trois droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ sont égales entr'elles. Donc si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce cercle passera par les autres points, et ce cercle sera circonscrit au triangle ΑΒΓ (déf. 6. 4). Qu'il soit circonscrit comme ΑΒΓ.

Mais que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent dans la droite ΒΓ, au point Ζ, comme dans la seconde figure ; joignons ΑΖ. Nous démontrerons semblablement que le point Ζ est le centre du cercle circonscrit au triangle ΑΒΓ.

Mais enfin, que les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontrent hors du triangle ΑΒΓ, au point Ζ, comme dans la troisième figure, et joignons ΑΖ, ΒΖ, ΓΖ. Puisque ΑΔ est encore égal à ΔΒ, et que la perpendiculaire ΔΖ est commun et à angles droits, la base ΑΖ est égale à la base ΖΒ (4. 1). Nous démontrerons semblablement que ΖΓ est égal à ΖΑ ; donc ΖΒ est égal à ΖΓ ; donc encore si du centre Ζ, et d'un intervalle égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, on décrit un cercle, ce

206 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ABΓ τρίγωνον. Καὶ γεγράφηω ὡς ABΓ⁸.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

reliqua puncta, et erit circumscriptus circa ABΓ triangulum. Et describatur ut ABΓ.

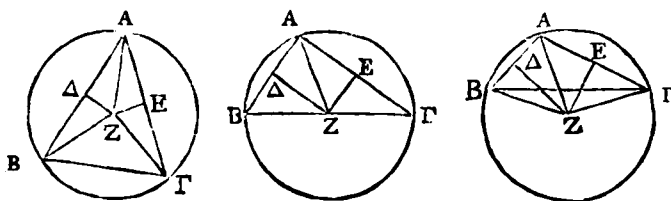
Circa datum igitur triangulum circulus circumscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γω-

COROLLARIUM.

Et manifestum est, quando quidem intra triangulum cadit centrum circuli, ipsum ΒΑΓ angu-



νία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τριγώνου πίπτει, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ¹⁰ ἡμικυκλίου

lum, in segmento majore quam semicirculo existentem, minorem esse recto; quando autem in ΒΓ rectam centrum cadit, ipsum ΒΑΓ angulum, in semicirculo existentem, rectum esse; quando vero centrum circuli extra triangulum cadit, ipsum ΒΑΓ, in segmento minore quam semicir-

cercle passera par les points restants, et il sera circonscrit au triangle ABΓ. Qu'il soit circonscrit comme ABΓ.

Donc un cercle a été circonscrit dans un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il est évident que si le centre du cercle tombe dans le triangle, l'angle ΒΑΓ compris dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est plus petit qu'un angle droit; que si le centre du cercle tombe dans la droite ΒΓ, l'angle ΒΑΓ compris dans un demi-cercle, est droit; que si enfin le centre du cercle tombe hors du triangle ΒΑΓ, l'angle ΒΑΓ compris dans un segment plus petit qu'un demi-

τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ἰσθῆς. Ὡστε καὶ ἔταν
ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἢ διδομένη γωνία, ἐντὸς
τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται¹¹ αἱ ΔΖ, ΕΖ· ἔταν δὲ
ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ἔταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐντὸς τῆς
ΒΓ¹².

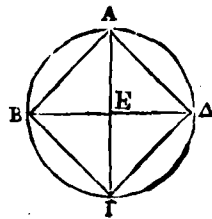
culo, majorem esse recto. Quare et quando minor
recto est datus angulus, intra triangulum conve-
nient ΔΖ, ΕΖ; quando autem rectus, in ΒΓ;
quando vero major recto, extra ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.
Εστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὲ εἰς τὸν¹
ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum inscribere.
Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in
ΑΒΓΔ circulo quadratum inscribere.



Ἦχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο² διάμετροι
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ· καὶ ἐπιζεύχθα-
ι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γάρ
τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ἰσθὰς ἡ ΕΑ· βάσεις ἄρα
ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστί. Διὰ³ τὰ αὐτὰ

Ducantur ipsius ΑΒΓΔ circuli duæ diametri
ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se, et jungantur ΑΒ,
ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Et quoniam æqualis est ΒΕ ipsi ΕΔ, centrum
enim Ε, communis autem et ad rectos ipsa ΕΑ;
basis igitur ΑΒ basi ΑΔ æqualis est. Propter

cercle, est plus grand qu'un angle droit. C'est pourquoi si l'angle donné est
plus petit qu'un droit, les droites ΔΖ, ΕΖ se rencontreront dans le triangle;
s'il est droit, elles se rencontreront dans ΒΓ, et s'il est plus grand qu'un droit,
elles se rencontreront hors de la droite ΒΓ.

PROPOSITION VI.

Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un quarré dans le cercle ΑΒΓΔ.

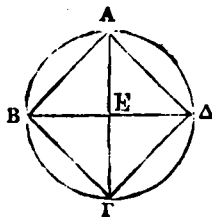
Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre
(II. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite
ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1).

208 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρα τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴση ἴστί· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία¹. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθογώ-

eadem utique et utraque ipsarum ΒΓ, ΓΔ utri- que ipsarum ΒΑ, ΑΔ æqualis est ; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Dico autem et rectangulum. Quoniam enim ΒΔ recta diame- ter est ipsius ΑΒΓΔ circuli, semicirculum igitur est ΒΑΔ ; rectus igitur ΒΑΔ angulus. Prop- ter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ,



νιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον⁵.

Εἰς ἄρα δοθέντα⁶ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγω- νον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus est ; rectangulum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. Ostensum est autem et æquilaterum ; quadratum igitur est. Et inscrip- tum est in dato ΑΒΓΔ circulo.

In dato igitur circulo ΑΒΓΔ quadratum ins- criptum est ΑΒΓΔ. Quod oportebat facere.

Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (31. 1). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral ; donc ce quadrilatère est un carré. Et ce carré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

Donc on a inscrit le carré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fal- lait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

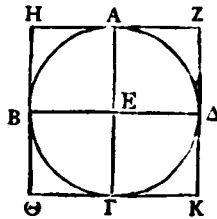
Εστω δοθεὶς κύκλος ὁ· $ΑΒΓΔ$ · δεῖ δὴ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἡχθωσαν τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$, καὶ διὰ τῶν $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$ σημείων ἡχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου αἱ $ΖΗ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, $ΚΖ$.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus $ΑΒΓΔ$; oportet igitur circa $ΑΒΓΔ$ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur $ΑΒΓΔ$ circuli duæ diametri $ΑΓ$, $ΒΔ$ ad rectos inter se, et per $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$ puncta ducantur contingentes $ΑΒΓΔ$ circulum ipsæ $ΖΗ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, $ΚΖ$.



Επεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ $ΖΗ$ τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ $Ε$ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ $Α$ ἵσχυον ἐπεξεύχεται ἡ $ΕΑ$ · αἱ ἄρα πρὸς τῷ $Α$ γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς $Β$, $Γ$, $Δ$ σημείοις γωνίαι ὀρθαὶ εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἐρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$ γωνία, ἐστι δὲ ὀρθὴ καὶ

Quoniam igitur contingit $ΖΗ$ ipsum $ΑΒΓΔ$ circulum, ab $Ε$ autem centro ad contactum $Α$ ducitur $ΕΑ$; ipsi igitur ad $Α$ anguli recti sunt. Propter eadem utique et ad $Β$, $Γ$, $Δ$ puncta anguli recti sunt. Et quoniam rectus est $ΑΕΒ$ angulus, est autem rectus et $ΕΒΗ$; parallela

PROPOSITION VII.

Circonscrire un quarré à un cercle donné.

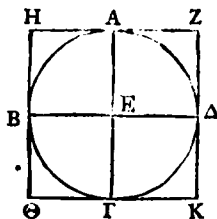
Soit $ΑΒΓΔ$ le cercle donné; il faut circonscrire un quarré au cercle $ΑΒΓΔ$.

Menons dans le cercle $ΑΒΓΔ$, les deux diamètres $ΑΓ$, $ΒΔ$ perpendiculaires l'un à l'autre, et par les points $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$ menons les droites $ΖΗ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, $ΚΖ$ tangentes au cercle $ΑΒΓΔ$ (17. 5).

Puisque la droite $ΖΗ$ est tangente au cercle $ΑΒΓΔ$, et que la droite $ΕΑ$ a été menée du centre $Ε$ au point de contact $Α$, les angles sont droits en $Α$ (28. 3). Par la même rasion, les angles sont droits aux points $Β$, $Γ$, $Δ$. Et puisque l'angle $ΑΕΒ$ est droit, et que l'angle $ΕΒΗ$ est droit aussi, la droite $ΗΘ$ est paral-

ἡ ὑπὸ EBH· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ τῇ AG. Ἐκ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ AG τῇ ZK ἐστὶ παράλληλος⁵. Ὅμοιως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν HZ, ΘK τῇ BEΔ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλόγραμμα ἐστὶ τὰ HK, ΗΓ, AK, ZB, BK· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν HZ τῇ ΘK, ἡ δὲ HΘ τῇ ZK. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ⁶ ἡ μὲν AG ἑκατέρα τῶν HΘ, ZK⁷, ἡ δὲ ΕΔ ἑκα-

igitur est HΘ ipsi AG. Propter eadem utique et AG ipsi ZK est parallela; quare et HΘ ipsi ZK est parallela. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum HZ, ΘK ipsi BEΔ esse parallelam. Parallelograma igitur sunt HK, ΗΓ, AK, ZB, BK; æqualis igitur est HZ quidem ipsi ΘK, ipsa vero HΘ ipsi ZK. Et quoniam æqualis est AG ipsi ΒΔ, sed et ipsa quidem AG utrique ipsarum HΘ, ZK, ipsa vero ΕΔ utrique ipsarum



τέρα τῶν HZ, ΘK ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν HΘ, ZK ἑκατέρα τῶν HZ, ΘK ἐστὶν ἴση⁸. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ZHΘK τετράπλευρον. Λίγω δὲ⁹ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ HBEA, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AEB· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ AHB. Ὅμοιως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, K, Z γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ZHΘK τετράπλευρον¹⁰.

HZ, ΘK est æqualis; et uterque igitur ipsarum HΘ, ZK utrique ipsarum HZ, ΘK est æqualis. Æquilaterum igitur est ZHΘK quadrilaterum. Dico et rectangulum. Quoniam enim parallelogrammum est HBEA, et est rectus AEB; rectus igitur et AHB. Similiter utique ostendemus et ipsos ad Θ, K, Z angulos rectos esse; rectangulum igitur est ZHΘK quadrilaterum. Os-

lèle à la droite AG (28. 1). Par la même raison, la droite AG est parallèle à la droite ZK. Donc HΘ est parallèle à ZK. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites HZ, ΘK est parallèle à la droite BEΔ. Donc les figures HK, ΗΓ, AK, ZB, BK sont des parallélogrammes; donc HZ est égal à ΘK (34. 1), et HΘ égal à ZK; et puisque AG est égal à ΒΔ, que AG est égal à l'une et à l'autre des droites HΘ, ZK, et que ΒΔ est égal à l'une et à l'autre des droites HZ, ΘK, les droites HΘ, ZK sont égales aux droites HZ, ΘK. Donc le quadrilatère ZHΘK est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle, car puisque HBEA est un parallélogramme, et que l'angle AEB est droit, l'angle AHB est droit aussi (34. 1). Nous démontrerons semblablement que les angles sont droits en Θ, K, Z; donc le quadrilatère ZHΘK est rectangle; mais on

LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 211

Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἴστί.
Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

tensum est autem et æquilaterum; quadratum igitur est. Et circumscriptum est circa ΑΒΓΔ circumulum.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Circa datum igitur circumulum quadratum circumscriptum est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

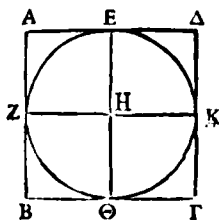
PROPOSITIO VIII.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἑγγράφαι.

In dato quadrato circumulum inscribere.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἑγγράφαι.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ quadrato circumulum inscribere.



Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ, δίχα κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεία, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἴστί· ἑκαστον τῶν ΑΚ,

Secetur utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam in Ε, Ζ punctis, et per Ε quidem alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallela ducatur ΕΘ; per Ζ vero alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ducatur ΖΚ; parallelogramum igitur est unumquodque ipso-

a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔ.

On a donc circonscrit un quarré à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION VIII.

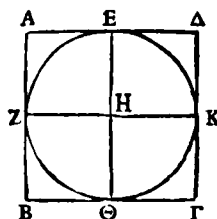
Inscrire un cercle dans un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut incire un cercle dans le quarré ΑΒΓΔ.

Coupons en deux parties égales l'une et l'autre des droites ΑΒ, ΑΔ aux points Ζ, Ε (10. 1), et par le point Ε menons ΕΘ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΓΔ (31. 1), et par le point Ζ menons aussi la droite ΖΚ parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ; donc chacune des figures ΑΚ,

KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσίν¹. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν², ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ομοίως δὲ διζόμεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρα τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν³. Ὁ ἄρα κέν-

rum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ, et opposita ipsorum latera utique æqualia sunt. Et quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΒ, et est ipsius quidem ΑΔ dimidia ΑΕ, ipsius vero ΑΒ dimidia ΑΖ, æqualis igitur et ΑΕ ipsi ΑΖ; quare et opposita æqualia sunt, æqualis igitur et ΖΗ ipsi ΗΕ. Similiter utique ostendemus et utramque ipsarum ΗΘ, ΗΚ utrique ipsarum ΖΗ, ΗΕ esse æqualem. Quatuor igitur ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ æquales



τρω μὲν τῇ Η, διαστήματι δι' ἐνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάπτεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὁρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας· εἰ γὰρ τιμῇ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὁρθὰς ἀπ' ἑκρὰς ἀγομένη ἐντὸς πιεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἄτοπον εἰδείχθη⁴. Οὐκ ἄρα ὁ

inter sesunt. Ipse igitur centro quidem Η, intervallo vero unâ ipsarum ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta; et continget ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ rectas, propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Θ, Κ anguli; si enim secat circulus ipsas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta intra cadet circulum, quod absurdum ostend-

KB, AΘ, ΘΔ, AH, ΗΓ, BH, ΗΔ est un parallélogramme, et leurs côtés opposés sont égaux (34. 1). Et puisque ΑΔ est égal à ΑΒ, que ΑΕ est la moitié de ΑΔ, et ΑΖ la moitié de ΑΒ, la droite ΑΕ est égale à ΑΖ; donc les côtés opposés sont égaux; donc ΖΗ est égal à ΗΕ. Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΗΘ, ΗΚ est égale à l'une et à l'autre des droites ΖΗ, ΗΕ. Donc les quatre droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Η, et d'un intervalle égal à une des droites ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ passera par les autres points, et sera tangent aux droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, parce que les angles sont droits en Ε, Ζ, Θ, Κ; car si ce cercle coupait les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, la perpendiculaire au diamètre du cercle, et menée de l'une de ses extrémités tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3). Donc le cercle décrit du centre Η, et

κέντρο μὲν^δ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. Εφάπτεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἵσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθέν^δ τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

sum est. Non igitur centro quidem H, intervallo vero unâ ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus secat AB, BG, ΓΔ, ΔΑ rectas. Continget igitur ipsas et erit inscriptus in ABΓΔ quadrato.

In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

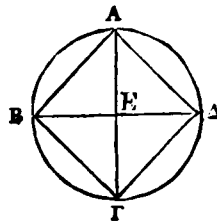
Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράφαι.

Εστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

Sit datum quadratum ΑΒΓΔ; oportet igitur circa ΑΒΓΔ quadratum circulum circumscribere.



Επιζυχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τιμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Junctæ enim ΑΓ, ΒΔ, sese secant in E.

d'un intervalle égal à des droites HE, HZ, HΘ, HK ne coupe point les droites AB, BG, ΓΔ, ΔΑ. Donc il sera tangent à ces droites, et il sera inscrit dans le quarré ΑΒΓΔ (déf. 5. 4).

Donc on a inscrit un cercle dans un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION IX.

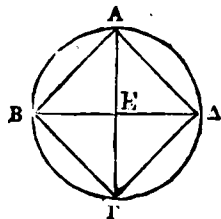
Circonscrire un cercle à un quarré donné.

Soit ΑΒΓΔ le quarré donné; il faut circonscrire un cercle au quarré ΑΒΓΔ.

Joignons ΑΓ, ΒΔ, et que ces droites se coupent au point E.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὲ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση¹. γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ². ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμεται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμεται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ

Et quoniam æqualis est ΔΑ ipsi ΑΒ, communis autem ΑΓ, duæ utique ΔΑ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt, et basis ΔΓ basi ΒΓ æqualis; angulus igitur æqualis est ΔΑΓ ipsi ΒΑΓ; ipse igitur ΔΑΒ angulus bifariam sectus est ab ΑΓ. Similiter utique ostendemus et unumquemque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ bifariam sectum esse ab ΑΓ, ΔΒ rectis. Et quoniam æqualis est ΔΑΒ angulus ipsi ΑΒΓ, et est ipsius quidem ΔΑΒ di-



ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκατέρω τῶν ΕΑ, ΕΒ εὐθειῶν ἐκατέρω τῶν ΕΓ, ΕΔ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ο ἄρα κέντρω τῷ Ε, καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος

medius ipse ΕΑΒ, et ipsius ΑΒΓ dimidius ipse ΕΒΑ; et ΕΑΒ igitur ipsi ΕΒΑ est æqualis. Quare et latus ΕΑ lateri ΕΒ est æquale. Similiter utique ostendemus, et utramque ΕΑ, ΕΒ rectarum utrique ipsarum ΕΓ, ΕΔ æqualem esse; quatuor igitur ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ε, et intervallo unâ ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus tran-

Puisque ΔΑ est égal à ΑΒ, et que la droite ΑΓ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΓ sont égales aux deux droites ΒΑ, ΑΓ; mais la base ΔΓ est égale à la base ΒΓ; donc l'angle ΔΑΓ est égal à l'angle ΒΑΓ (8. 1); donc l'angle ΔΑΒ est coupé en deux parties égales par la droite ΑΓ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est coupé en deux parties égales par les droites ΑΓ, ΔΒ. Et puisque l'angle ΔΑΒ est égal à l'angle ΑΒΓ, que l'angle ΕΑΒ est la moitié de l'angle ΔΑΒ, et l'angle ΕΒΑ la moitié de l'angle ΑΒΓ, l'angle ΕΑΒ est égal à l'angle ΕΒΑ; donc le côté ΕΑ est égal au côté ΕΒ (6. 1). Nous démontrerons semblablement que l'une et l'autre des droites ΕΓ, ΕΒ est égale à l'une et à l'autre des droites ΕΓ, ΕΔ; donc les quatre droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Ε, et d'un intervalle égal à une des droites ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ passera par les autres points,

γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων,
καὶ ἔσται περιγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετρά-
γωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγί-
γραπται. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

sibit et per reliqua puncta , et erit circumscrip-
tus circa $AB\Gamma\Delta$ quadratum. Circumscribatur
ut $AB\Gamma\Delta$.

Circa datum igitur quadratum circulus circumscribitur est. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

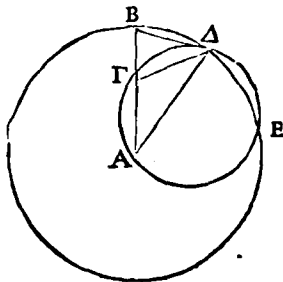
Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκά-
τεραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διττάπλασίονα
τῆς λοιπῆς.

Εκείσθω τριεὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ
τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιχό-

PROPOSITIO X.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque ipsorum ad basim angulorum duplum reliqui.

Exponatur aliqua recta AB , et secetur in Γ puncto, ita ut ipsum sub AB , $B\Gamma$ contentum



μινον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ ΓΑ τε-
τραγώνῳ· καὶ κέντρῳ τῷ Α, καὶ διαστήματι τῷ
ΑΒ' κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμώσθω εἰς τὸν

rectangulum æquale sit ipsi ex ΓA quadrato;
et centro A , et intervallo AB circulus descri-
batur $B\Delta E$, et aptetur in $B\Delta E$ circulo ipsi AF

et il sera circonscrit au quarré $AB\Gamma\Delta$. Qu'il soit circonscrit comme $AB\Gamma\Delta$.

Donc on a circonscrit un cercle à un quarré donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.

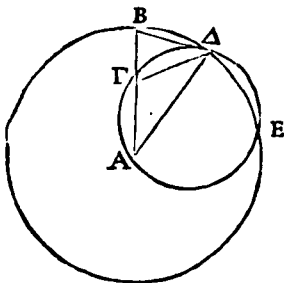
Soit une droite AB ; que cette droite soit coupée en un point Γ , de manière que le rectangle compris sous AB , BR soit égal au carré de ΓA (11. 2) ; du centre A et de l'intervalle AB décrivons le cercle $B\Delta E$ (dém. 3) ; dans le cercle

ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὐσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθείᾳ ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεξέχρωσαν αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ περιγεγραφθῶ περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ
ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ
τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ
κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἰληφταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ

rectæ, non majori existenti ipsâ $\Delta\Gamma$ circuli diametro, æqualis recta $\Delta\delta$; et jungantur $\Delta\Delta$, $\Gamma\Delta$, et circumscribatur circa $\Delta\Gamma\Delta$ triangulum circulus $\Delta\Gamma\Delta$.

Et quoniam ipsum sub AB, BF æquale est quadrato ex AF , æqualis autem AF ipsi BD ; ipsum igitur sub AB, BF æquale est ipsi ex BD . Et quoniam extra circulum $AF\Delta$ sumptum est



Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπιπτάσκει δύο εὐθείαι αἱ ΒΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἰστὶ τὸ ὑπὸ τῶν² ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ³, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῃκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἰστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ

aliquod punctum B , et a B in $\Lambda\Gamma\Delta$ circulum cadunt duæ rectæ BA , BD , et altera quidem ipsarum secat, altera vero incidit; et est ipsum sub AB , BF æquale ipsi ex BD ; ipsa BD igitur contingit $\Lambda\Gamma\Delta$. Et quoniam contingit quidem ipsa BD , a contactu vero ad Δ ducta est $\Delta\Gamma$; ipse igitur $BD\Gamma$ angulus æqualis est ipsi in alterno circuli segmento angulo $\Delta\Gamma\Lambda$. Quoniam igitur æ-

BAE adaptons une droite BA égale à la droite AF, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle BAE (1. 4); joignons AA, TA, et circonscrivons le cercle ATA au triangle ATA (5. 4).

Puisque le rectangle sous AB , BR est égal au carré AR , et que AR est égal à BA , le rectangle sous AB , BR est égal au carré de BA . Et puisque le point B a été pris hors du cercle $A\Gamma\Delta$, que les droites BA , BR vont du point B au cercle $A\Gamma\Delta$, que l'une d'elles le coupe, et que l'autre ne le coupe point, et que le rectangle sous AB , BR est égal au carré de BA , la droite BR est tangente au cercle $A\Gamma\Delta$ (37. 3). Donc, puisque la droite BR est tangente, et que la droite AR a été menée du point de contact A , l'angle BAR est égal à

ΔΑΓ. Επεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ διὸς ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπέκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνία⁵ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ εἰσὶ διπλασίους⁶. Ἰση δὲ καὶ⁷ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ⁸. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

qualis est ΒΔΓ ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ. Totus igitur ΒΔΑ æqualis est duobus ΓΔΑ, ΔΑΓ. Sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ æqualis est exterior ΒΓΔ; ipse igitur ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. Sed ΒΔΑ ipsi ΓΒΔ est æqualis, quoniam et latus ΔΑ ipsi ΑΒ est æquale; quare et ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ est æqualis. Tres igitur ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ æquales inter se sunt. Et quoniam æqualis est ΔΒΓ angulus ipsi ΒΓΔ, æquale est et latus ΒΔ lateri ΔΓ, Sed ΒΔ ipsi ΓΑ ponitur æqualis; et ΑΓ igitur ipsi ΓΔ est æqualis; quare et angulus ΓΔΑ angulo ΔΑΓ est æqualis; ipsi igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ ipsius ΔΑΓ sunt dupli. Æqualis autem et ΒΓΔ ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ; et ΒΓΔ igitur ipsius ΔΑΓ est duplus. Æqualis autem et ΒΓΔ utrique ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ; et uterque igitur ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΒΑΔ est duplus.

Isosceles igitur triangulum constitutum est ΑΔΒ habens utrumque ipsorum ad ΑΒ basim angulorum duplum reliqui. Quod oportebat facere.

l'angle ΔΑΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle ΒΔΓ est égal à l'angle ΔΑΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔΑ, l'angle entier ΒΔΑ sera égal aux deux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ. Mais l'angle extérieur ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Mais l'angle ΒΔΑ est égal à l'angle ΓΒΔ (5. 1), puisque le côté ΔΑ est égal au côté ΑΒ; donc l'angle ΔΒΑ est égal à l'angle ΒΓΔ. Donc les trois angles ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔΒΓ est égal à l'angle ΒΓΔ, le côté ΒΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté ΒΔ est supposé égal au côté ΓΑ; donc le côté ΑΓ est égal au côté ΓΔ; donc l'angle ΓΔΑ est égal à l'angle ΔΑΓ (5. 1); donc les angles ΓΔΑ, ΔΑΓ sont doubles de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal aux angles ΓΔΑ, ΔΑΓ (32. 1); donc l'angle ΒΓΔ est double de l'angle ΔΑΓ. Mais l'angle ΒΓΔ est égal à chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ; donc chacun des angles ΒΔΑ, ΔΒΑ est double de l'angle ΒΑΔ.

Donc on a construit un triangle isocèle ΑΔΒ, ayant chacun des angles de la base ΒΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

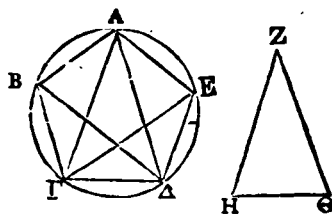
PROPOSITIO XI.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· διττὸν δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

In dato circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Εκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλα-
σίονα ἔχον ἑκατέραν τῶ πρὸς τοῖς Η, Θ γω-
νιῶν² τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν
ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρί-
γωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ
ἴσῃ εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς
τοῖς Η, Θ ἴσῃ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ·
καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ

Exponatur triangulum isosceles ΖΗΘ, duplum
habens utrumque ipsorum ad Η, Θ angularum
ipsius ad Ζ, et inscribatur in ΑΒΓΔΕ circulo,
ipsi ΖΗΘ triangulo æquiangulum triangulum
ΑΓΔ, ita ut ipsi quidem Ζ angulo æqualis sit
ipse ΓΑΔ, uterque vero ipsorum ad Η, Θ æqua-
lis utrique ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ; et uterque igitur
ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ ipsius ΓΑΔ est duplus. Sece-

PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné; il faut inscrire dans le cercle ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ΖΗΘ, ayant chacun des angles en Η, Θ double de l'angle Ζ (10. 4); inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le triangle ΑΓΔ équiangle avec le triangle ΖΗΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓΑΔ soit égal à l'angle Ζ, et que chacun des angles Η, Θ soit égal à chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ; chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ sera double de l'angle ΓΑΔ. Coupons chacun des angles ΑΓΔ

ΓΑΔ ἐστὶ διπλῇ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας³ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ⁴.

Επεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίον ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Επεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφέρειᾳ ἐστὶν ἴση⁵, κοινὴ προσκείμεναι ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΔΓΒ περιφέρειᾳ ἐστὶν ἴση⁶. Καὶ βεβήκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία⁷ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση⁸. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκα-

tur autem uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam ab utràque ipsarum ΓΕ, ΔΒ rectarum, et jungantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Quoniam igitur uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ angulorum duplus est ipsius ΓΑΔ; et secti sunt bifariam à ΓΕ, ΔΒ rectis; quinque igitur anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent; quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; quinque igitur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. Dico et æquiangulum. Quoniam enim ΑΒ circumferentia ipsi ΔΕ circumferentiæ est æqualis, communis addatur ΒΓΔ; tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti ΕΔΓΒ circumferentiæ est æqualis. Et insistent ipsi quidem ΑΒΓΔ circumferentiæ angulus ΑΕΔ, ipsi vero ΕΔΓΒ circumferentiæ angulus ΒΑΕ, et ΒΑΕ igitur angulus ipsi ΑΕΔ est æqualis. Propter eadem utique et unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ angulo-

ΓΔΑ en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ (9. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Puisque chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ est double de l'angle ΓΑΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ, les cinq angles ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3); donc les cinq arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc les cinq droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égales entr'elles; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΑΒ est égal à l'arc ΔΕ, ajoutons l'arc commun ΒΓΔ; l'arc entier ΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒ. Mais l'angle ΑΕΔ est appuyé sur l'arc ΑΒΓΔ, et l'angle ΒΑΕ sur l'arc ΕΔΓΒ; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΑΕΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ est égal à chacun des angles ΒΑΕ,

220 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τέρᾳ τῶν ὑπὸ BAE, AED ἴσθι· ἰσογώνιον ἄρα ἴσθι τὸ ABΓΔΕ πεντάγωνον. Εδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον·

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψεται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ABΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ABΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.



Νοησθῶ τοῦ ἐγγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ A, B, Γ, Δ, E, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA περιφερείας·

rum utrique ipsorum BAE, AED est æqualis; æquiangulum igitur est ABΓΔΕ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum;

In dato igitur circulo pentagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII.

Circa datum circumlulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABΓΔΕ; oportet igitur circa ABΓΔΕ circumlulum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum circumscribere.

Intelligentur inscripti pentagoni angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E, ita ut æquales sint AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA circumferentiæ; et per A,

AEΔ; donc le pentagone ABΓΔΕ est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XII.

Circonscrire à un cercle donné un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ABΓΔΕ le cercle donné; il faut au cercle ABΓΔΕ circonscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Concevons que A, B, Γ, Δ, E soient les sommets des angles du pentagone inscrit (11. 4), de manière que les arcs AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA soient égaux;

καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύ-
κλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ·
καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ,
καὶ ἐπιζύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἵππει ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ
ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου
ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ
ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὁρθὴ ἄρα
ἐστίν· ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι
ὁρθαί εἰσι. Καὶ ἐπὶ ὁρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γω-
νία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ,
ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ². ὥστε τὰ³ ἀπὸ τῶν
ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν
τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον·
λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπὸν τῷ ἀπὸ
τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΒΚ⁵. Καὶ
ἵππει ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο
δὲ αἱ ΒΖ, ΖΚ δύοσι ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ
βάσεις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα
ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ

Β, Γ, Δ, Ε ducantur circulum contingentes
ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ; et sumatur ΑΒΓΔΕ
circuli centrum Ζ, et jungantur ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ,
ΖΛ, ΖΔ.

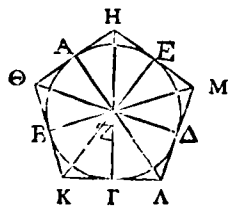
Et quoniam recta quidem ΚΛ contingit
ΑΒΓΔΕ circulum in Γ, ab ipso vero Ζ centro
in contactum ad Γ ducta est ΖΓ; ergo ΖΓ per-
pendicularis est ad ΚΛ; rectus igitur est uterque
ipsorum ad Γ angulorum. Propter eadem uti-
que et ipsi ad Β, Δ puncta anguli recti sunt.
Et quoniam rectus est ΖΓΚ angulus, ipsum igitur
ex ΖΚ æquale est ipsis ex ΖΓ, ΓΚ. Propter
eadem utique et ipsis ex ΖΒ, ΒΚ æquale est ip-
sum ex ΖΚ; quare ipsa ex ΖΓ, ΓΚ ipsis ex ΖΒ,
ΒΚ æqualia sunt, quorum ipsum ex ΖΓ ipsi ΖΒ
est æquale; reliquum igitur ex ΓΚ reliquo
ex ΒΚ est æquale; æqualis igitur ΓΚ ipsi ΒΚ.
Et quoniam æqualis est ΖΒ ipsi ΖΓ, et communis
ΖΚ, duæ utique ΒΖ, ΖΚ duabus ΓΖ, ΖΚ æquales
sunt, et basis ΒΚ basi ΓΚ est æqualis; angulus
igitur quidem ΒΖΚ angulo ΚΖΓ est æqualis,
ipse vero ΒΚΖ ipsi ΖΚΓ est æqualis; duplus igitur

par les points Α, Β, Γ, Δ, Ε, menons au cercle les tangentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ (17. 3); prenons le centre Ζ du cercle ΑΒΓΔΕ, et joignons ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Puisque la droite ΚΛ touche le cercle ΑΒΓΔΕ au point Γ, et que la droite ΖΓ est menée du centre Ζ au point de contact Γ, la droite ΖΓ est perpendiculaire à ΚΛ (18. 3); donc chacun des angles en Γ est droit. Chacun des angles aux points Β, Δ est droit, par la même raison. Et puisque l'angle ΖΓΚ est droit, le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΓ, ΓΚ (47. 1). Le carré de la droite ΖΚ est égal aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ, par la même raison; donc les carrés des droites ΖΓ, ΓΚ sont égaux aux carrés des droites ΖΒ, ΒΚ; mais le carré de ΖΓ est égal au carré de ΖΒ; donc le carré restant de ΓΚ est égal au carré restant de ΒΚ; donc ΓΚ est égal à ΒΚ. Et puisque ΖΒ est égal à ΖΓ, et que la droite ΖΚ est commune, les deux droites ΒΖ, ΖΚ sont égales aux deux droites ΓΖ, ΖΚ; mais la base ΒΚ est égale à la base ΓΚ; donc l'angle ΒΖΚ

δὲ ὑπὸ BKZ τῇ ὑπὸ ZKΓ ἴσθ⁶. διπλῇ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ BZΓ τῆς ὑπὸ KZΓ, ἡ δὲ ὑπὸ BKΓ τῆς ὑπὸ ZKΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓZA τῆς ΓZΛ ἴσθι διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓAZ. Καὶ ἵπεί ἴσθι ἡ BG περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴσθι ἴσθι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BZΓ τῇ ὑπὸ ΓZΔ. Καὶ ἴσθι ἡ μὲν ὑπὸ BZΓ τῆς ὑπὸ KZΓ διπλῇ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔZΓ διπλῇ⁷ τῆς ὑπὸ ΛZΓ· ἴσθι ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ KZΓ τῇ ὑπὸ ΛZΓ· ἴσθι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZΓK

tur ipse quidem BZΓ ipsius KZΓ, ipse vero BKΓ ipsius ZKΓ. Propter eadem utique et ipse quidem ΓZA ipsius ΓZΛ est duplus, ipse vero ΓΛΔ ipsius ΓAZ. Et quoniam æqualis est BG circumferentia ipsi ΓΔ, æqualis est et angulus BZΓ ipsi ΓZΔ. Et est ipse quidem BZΓ ipsius KZΓ duplus, ipse vero ΔZΓ duplus ipsius ΛZΓ; æqualis igitur et KZΓ ipsi ΛZΓ; est autem et ZΓK angulus ipsi ZΓΛ æqualis. Duo utique triacula sunt ZKΓ, ZΛΓ duos an-



γωνία τῇ ὑπὸ ZΓΛ ἴσθ⁸. Δύο δὲ τρίγωνα ἴσθι⁹ τὰ ZKΓ, ZΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ¹⁰, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσθιν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ZΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴσθι ἄρα ἡ μὲν KΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ZKΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZΛΓ. Καὶ ἵπεί ἴσθι ἡ

gulos duobus angulis æquales habentia utrumque utriusque, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsis ipsum ZΓ, et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo; æqualis igitur ipsa quidem KΓ recta ipsi ΓΛ, ipse vero ZKΓ angulus ipsi ZΛΓ. Et quoniam æqualis est KΓ ipsi ΓΛ, dupla igitur KΛ ipsius KΓ. Propter eadem

est égal à l'angle KZΓ, et l'angle BKZ à l'angle ZKΓ (8. 1); donc l'angle BZΓ est double de l'angle KZΓ, et l'angle BKΓ double de l'angle ZKΓ. Par la même raison, l'angle ZΓΔ est double de l'angle ΓZΛ, et l'angle ΓΛΔ double de l'angle ΓAZ. Et puisque l'arc BG est égal à l'arc ΓΔ, l'angle BZΓ est égal à l'angle ΓZΔ (27. 3). Mais l'angle BZΓ est double de l'angle KZΓ, et l'angle ΔZΓ double de l'angle ΛZΓ; donc l'angle KZΓ est égal à l'angle ΛZΓ; mais l'angle ZΓK est égal à l'angle ZΓΛ; donc les triangles ZKΓ, ZΛΓ ont deux angles égaux à deux angles, chacun à chacun, et un côté égal à un côté, le côté ZΓ, qui leur est commun; donc ces deux triangles ont les côtés restants égaux aux côtés restants, et l'angle restant égal à l'angle restant (26. 1); donc la droite KΓ est égale à la droite ΓΛ, et l'angle ZKΓ est égal à l'angle ZΛΓ. Mais KΓ est égal à ΓΛ; donc

ἡ ΚΓ τῇ ΓΑ, διπλὴ ἄρα ὁ ΚΑ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλὴ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση¹¹. καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΑ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ ἐκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΑ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἰσώγωνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, καὶ ἰδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλὴ ἢ ὑπὸ ΘΚΑ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΑΓ διπλὴ ὁ ὑπὸ ΚΑΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΑΜ ἐστὶν ἴση. Ομοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΚΑΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσώγωνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΑΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

utique ostendetur, et ΘΚ ipsius ΒΚ dupla. Et est ΒΚ ipsi ΚΓ æqualis; et ΘΚ igitur ipsi ΚΑ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unaquæque ipsarum ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ utrique ipsarum ΘΚ, ΚΑ æqualis; æquilaterum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Dico autem et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΚΓ angulus ipsi ΖΑΓ, et ostensus est ipsius quidem ΖΚΓ duplus ipse ΘΚΑ, ipsius vero ΖΑΓ duplus ipse ΚΑΜ; et ΘΚΑ igitur ipsi ΚΑΜ est æqualis. Similiter utique ostendetur et unusquisque ipsorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ utrique ipsorum ΘΚΑ, ΚΑΜ æqualis; quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ æquales inter se sunt. Æquiangulum igitur est ΗΘΚΑΜ pentagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et circumscriptum est circa ΑΒΓΔΕ circumulum. Quod oportebat facere.

ΚΑ est double de ΚΓ. On démontrera de la même manière que ΘΚ est double de ΒΚ. Mais ΒΚ est égal à ΚΓ; donc ΘΚ est égal à ΚΑ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΘΗ, ΗΜ, ΜΑ est égale à l'une et à l'autre des droites ΘΚ, ΚΑ; donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle; car puisque l'angle ΖΚΓ est égal à l'angle ΖΑΓ, et qu'on a démontré que l'angle ΘΚΑ est double de l'angle ΖΚΓ, et l'angle ΚΑΜ double de l'angle ΖΑΓ, l'angle ΘΚΑ est égal à l'angle ΚΑΜ. On démontrera semblablement que chacun des angles ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΑ est égal à l'un et à l'autre des angles ΘΚΑ, ΚΑΜ; donc les cinq angles ΗΘΚ, ΘΚΑ, ΚΑΜ, ΑΜΗ, ΜΗΘ sont égaux entr'eux. Donc le pentagone ΗΘΚΑΜ est équiangle. Mais nous avons démontré qu'il est équilatéral, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓΔΕ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

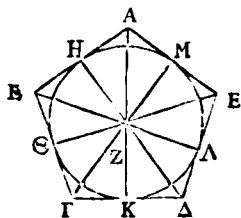
Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum inscribere.

Sit datum pentagonum æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inscribere.



Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ² ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπιζεύχωσταν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστὶ³. βάσις ἄρα ἡ ΒΖ τῇ βάσει ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἐστὶ ἰσόνι,

Secetur enim uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utràque ipsarum ΓΖ, ΔΖ rectarum; et a Ζ puncto, in quo conveniunt inter se ΓΖ, ΔΖ rectæ, ducantur ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectæ. Et quoniam æqualis est ΒΓ ipsi ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ utique ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ æquales sunt, et angulus ΒΓΖ angulo ΔΓΖ æqualis est; basis igitur ΒΖ basi ΔΖ est æqualis, et ΒΖΓ triangulum ipsi ΔΖΓ triangulo est æquale,

PROPOSITION XIII.

Dans un pentagone équilatéral et équiangle donné, inscrire un cercle.

Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut inscrire un cercle dans le pentagone ΑΒΓΔΕ.

Coupons chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ en deux parties égales par les droites ΓΖ, ΔΖ (9. 1); et du point Ζ où les deux droites ΓΖ, ΔΖ se rencontrent, menons les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque ΒΓ est égal à ΓΔ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΒΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΔΓ, ΓΖ; mais l'angle ΒΓΖ est égal à l'angle ΔΓΖ; donc la base ΒΖ est égale à la base ΔΖ (4. 1), et le triangle ΒΖΓ est égal au triangle ΔΓΖ, et les angles restants

καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται⁵, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ⁶, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλὴ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Ηχθωσαν δὲ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΟΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἴσθι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΟΓ ὀρθὴ⁷ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΟΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς⁸ δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν ΖΓ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστὶν· αἱ πέντε

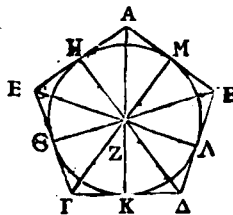
et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur ΓΒΖ angulus ipsi ΓΔΖ. Et quoniam duplus est ΓΔΕ ipsius ΓΔΖ, æqualis autem ipse quidem ΓΔΕ ipsi ΑΒΓ, ipse vero ΓΔΖ ipsi ΓΒΖ, et ΓΒΑ igitur ipsius ΓΒΖ est duplus; æqualis igitur ΑΒΖ angulus ipsi ΖΒΓ. Ergo ΑΒΓ angulus bifariam secatur à ΒΖ rectâ. Similiter utique ostendetur et utrumque ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ bifariam secari ab utrâque ipsarum ΖΑ, ΖΕ rectarum. Ducantur autem à Ζ puncto ad ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ rectas perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Et quoniam æqualis est ΟΓΖ angulus ipsi ΚΓΖ, est autem et rectus ΖΟΓ recto ΖΚΓ æqualis, duo utique triangula sunt ΖΟΓ, ΖΚΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, et unum latus uni lateri æquale, commune ipsorum ΖΓ, subtendens unum æqualium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt; æqualis igitur ΖΘ perpendicularis ipsi ΖΚ perpendiculari. Similiter utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΑ, ΖΜ, ΖΗ, utrique ipsarum ΖΘ,

égaux aux angles restants, ceux qui soutendent des côtés égaux (4. 1); donc l'angle ΓΒΖ est égal à l'angle ΓΔΖ. Et puisque l'angle ΓΔΕ est double de l'angle ΓΔΖ, que ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΓ, et que ΓΔΖ est égal à ΓΒΖ, l'angle ΓΒΑ est double de l'angle ΓΒΖ; donc l'angle ΑΒΖ est égal à l'angle ΖΒΓ; donc l'angle ΑΒΓ est coupé en deux parties égales par la droite ΒΖ. Nous démontrerons semblablement que chacun des angles ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΑ, ΖΕ. Du point Ζ menons sur les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ les perpendiculaires ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. Puisque l'angle ΟΓΖ est égal à l'angle ΚΓΖ, et que l'angle droit ΖΟΓ est égal à l'angle droit ΖΚΓ, les deux triangles ΖΟΓ, ΖΚΓ auront deux angles égaux à deux angles, et un côté égal à un côté, le côté commun ΖΓ qui soutend un des angles égaux; ils auront donc les côtés restants égaux aux côtés restants (26. 1); donc la perpendiculaire ΖΘ est égale à la perpendiculaire ΖΚ. On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΑ, ΖΜ, ΖΗ est égale à l'une et à l'autre

226 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα εὐθείαι αἱ $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάπτεται τῶν $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H, Θ, K, Λ, M σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπτεται αὐτῶν, ἀλλὰ τέμνῃ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀκρας ἀγομένην ἐντὸς

ZK æqualem esse; quinque igitur rectæ $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ æquales inter se sunt. Ergo centro Z , intervallo vero unâ ipsarum $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ circulus descriptus transibit et per reliqua puncta, et continget $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ rectas; propterea quod recti sunt ad H, Θ, K, Λ, M puncta anguli. Si enim non contingit ipsas, sed secat ipsas, eveniet ut ipsa diametro circuli ad rectos ab extremitate ducta



πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἀτοπον εἰδήχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῷ Z , διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος, τέμνῃ τὰς $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ εὐθείας. Εφαπτεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφηται ὡς ὁ $H\Theta K\Lambda M$.

intra cadat circulum, quod absurdum ostensum est. Non igitur centro Z , intervallo vero unâ ipsarum $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ rectarum descriptus circulus secabit ipsas $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ rectas; continget igitur ipsas. Describatur ut $H\Theta K\Lambda M$.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσogώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

In dato igitur pentagono, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulus inscriptus est. Quod oportebat facere.

des droites $Z\Theta, ZK$; donc les cinq droites $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du centre Z , et d'un intervalle égal à une des droites $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$, passera par les autres points, et touchera les droites $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$, parce que les angles sont droits en H, Θ, K, Λ, M . Car s'il ne les touchait pas, et s'il les coupait, la perpendiculaire menée d'une de ses extrémités au diamètre, tomberait dans le cercle; ce qui a été démontré absurde (16. 3); donc le cercle décrit du centre Z , et d'un intervalle égal à une des droites $ZH, Z\Theta, ZK, Z\Lambda, ZM$, ne coupera point les droites $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$; donc il les touchera. Décrivons le cercle $H\Theta K\Lambda M$.

Donc on a inscrit un cercle dans un pentagone équilatéral et équiangle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

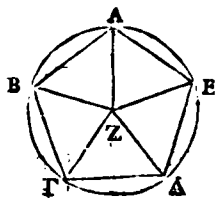
PROPOSITIO XIV.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Circa datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum, circulum circumscribere.

Sit datum pentagonum, quod est æquilaterumque et æquiangulum ΑΒΓΔΕ; oportet igitur circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulum circumscribere,



Τετμήσθω δὴ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεία ἐπιζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Ομοίως δὲ τὸ πρὸς τούτου διεχθῆσιν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία

Secetur quidem uterque ipsorum ΒΓΔ, ΓΔΕ angulorum bifariam ab utraque ipsarum ΓΖ, ΖΔ, et a Ζ puncto, in quo conveniunt rectæ, ad Β, Α, Ε puncta ducantur rectæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Similiter utique ut antea ostendetur et unumquemque ipsorum ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ angulorum bifariam secari ab unaquaque ipsarum ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ rectarum. Et quoniam æqualis est

PROPOSITION XIV.

Circonscrire un cercle à un pentagone équilatéral et équiangle donné.

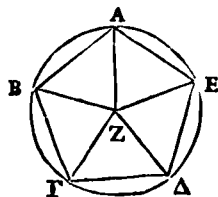
Soit ΑΒΓΔΕ le pentagone équilatéral et équiangle donné; il faut au pentagone ΑΒΓΔΕ circonscrire un cercle.

Coupons en deux parties égales chacun des angles ΒΓΔ, ΓΔΕ par les droites ΓΖ, ΖΔ (9. 1), et du point Ζ où ces droites se rencontrent, menons aux points Β, Α, Ε les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Nous démontrerons, comme auparavant, que chacun des angles ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ est coupé en deux parties égales par les droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. Et puisque l'angle ΒΓΔ est égal à l'angle ΓΔΕ, et

228 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἴσσι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμί-
 σια ἢ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ
 ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἴσθιν ἴση·
 ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἴσθιν ἴση.
 Ομοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ,
 ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἴσθιν ἴση· αἱ πέντε
 ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλή-

ΒΓΔ angulus ipsi ΓΔΕ, et est ipsius quidem
 ΒΓΔ dimidius ipse ΖΓΔ, ipsius vero ΓΔΕ di-
 midius ΓΔΖ, et ΖΓΔ igitur ipsi ΖΔΓ est æqualis;
 quare et latus ΖΓ lateri ΖΔ est æquale. Similiter
 utique ostendetur et unamquamque ipsarum ΖΒ,
 ΖΑ, ΖΕ utrique ipsarum ΖΓ, ΖΔ esse æqua-
 lem; quinque igitur rectæ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ



λαις εἰσίν. Ο ἄρα κέντρον τῷ Ζ, καὶ διάστημα³
 ἐνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμε-
 νος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἴσται
 περιγγραφομένος⁴. Περιγυράφθω, καὶ ἴστω ὁ
 ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν⁵ πεντάγωνον, ὃ ἴσθιν ἰσό-
 πλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται.
 Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

æquales inter se sunt. Ipse igitur centro Ζ et in-
 tervallo unâ ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ cir-
 culus descriptus transibit et per reliqua puncta,
 et erit circumscriptus. Circumscribatur, et sit
 ΑΒΓΔΕ.

Circa datum igitur pentagonum, quod est
 æquilaterumque et æquiangulum, circulus cir-
 cumscribitur est. Quod oportebat facere.

que l'angle ΖΓΔ est la moitié de l'angle ΒΓΔ, et l'angle ΓΔΖ la moitié de l'angle
 ΓΔΕ, l'angle ΖΓΔ est égal à l'angle ΖΔΓ; donc le côté ΖΓ est égal au côté ΖΔ
 (6. 1). On démontrera semblablement que chacune des droites ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ
 est égale à chacune des droites ΖΓ, ΖΔ; donc les cinq droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ,
 ΖΕ sont égales entr'elles. Donc le cercle décrit du point Ζ et d'un intervalle
 égal à une des droites ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ passera par les autres points, et sera
 circonscrit. Qu'il soit circonscrit, et qu'il soit ΑΒΓΔΕ.

Donc un cercle a été circonscrit à un pentagone équilatéral et équiangle
 donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

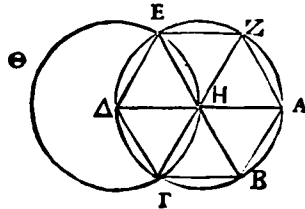
PROPOSITIO XV.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· διττὴ δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

In dato circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔΕΖ ; oportet igitur in ΑΒΓΔΕΖ circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.



Ἦχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰληφθῶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κείτρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Επεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ

Ducatur ΑΒΓΔΕΖ circuli diameter ΑΔ, et sumatur centrum circuli Η, et centro quidem Δ, intervallo vero ΔΗ circulus describatur ΕΗΓΘ, et junctæ ΕΗ, ΓΗ producantur ad Β, Ζ puncta, et jangantur ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ; dico ΑΒΓΔΕΖ hexagonum æquilaterumque esse et æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum est ΑΒΓΔΕΖ circuli, æqualis est ΗΕ ipsi ΗΔ. Rur-

PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné ; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

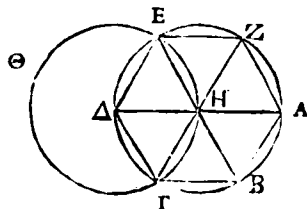
Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à

230 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δ σημείον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ΑΛΛ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἰσούσθῃ ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐπειδὴ περ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν.

sus, quoniam Δ punctum centrum est ΕΗΓΘ circuli, æqualis est ΔΕ ipsi ΔΗ. Sed ΗΕ ipsi ΗΔ ostensa est æqualis, ΗΕ igitur ipsi ΕΔ æqualis est; æquilaterum igitur est ΕΗΔ triangulum, et tres igitur ipsius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ æquales inter se sunt, quia isoscelium triangulorum ad basim anguli æquales inter se sunt. Et sunt tres trianguli anguli duobus rectis æquales; ipse igitur ΕΗΔ angulus tertia pars



Ὁμοίως δὲ διειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κερυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἑξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ

est duorum rectorum. Similiter utique ostendetur et ΔΗΓ tertia pars duorum rectorum. Et quoniam ΓΗ recta super ΕΒ insistens deinceps angulos ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales facit, et reliquis igitur ΓΗΒ tertia pars est duorum rectorum; ipsi igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ anguli æquales inter se sunt; quare et ad verticem ipsi ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales sunt ipsis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ; sex igitur anguli ΕΗΔ,

ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits; donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ

ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἐξ ἄρα περιφέρειαι αἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειάς αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτίνουσιν· αἱ ἐξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λίγω δὲ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείμεν ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ³ ὅλη τῇ ΕΔΓΒΑ⁴ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφέρειας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφέρειας⁵ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ομοίως δὲ⁶ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἰγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα ^{δοθέν} δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἰγγέγραπται. Ὅπερ εἶδει ποιεῖσθαι.

ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales inter se sunt. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistent; sex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ æquales inter se sunt. Æquales autem circumferentias æquales rectæ subtendunt; sex igitur rectæ æquales inter se sunt; æquilaterum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum; dico etiam et æquiangulum. Quoniam enim æqualis est ΖΑ circumferentia ipsi ΕΔ circumferentiæ, communis addatur ΑΒΓΔ circumferentia; tota igitur ΖΑΒΓΔ toti ΕΔΓΒΑ est æqualis, et insistent quidem ipsi ΖΑΒΓΔ circumferentiæ ipse ΖΕΔ angulus, ipsi vero ΕΔΓΒΑ circumferentiæ ipse ΑΖΕ angulus. Æqualis igitur ΑΖΕ angulus ipsi ΖΕΔ. Similiter utique ostendetur et reliquos angulos ipsius ΑΒΓΔΕΖ hexagoni secundum unum æquales esse alterutri ipsorum ΑΖΕ, ΖΕΔ angulorum. Æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. Ostensum est autem et æquilaterum, et inscriptum est in ΑΒΓΔΕΖ circulo.

In dato igitur circulo hexagonum æquilaterumque et æquiangulum inscriptum est. Quod oportebat facere.

ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ τούτου φανερόν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἂν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων⁸ ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφῆσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξαγώνος ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένους. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξαγώνον κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν⁹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· διὲ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum hexagoni latus æquale esse ipsi ex circuli centro.

Et si per Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ puncta contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum hexagonum æquilaterumque et æquiangulum, congruenter eis de pentagono dictis. Et etiam congruenter eis de pentagono dictis, in dato hexagono circulum inscribemusque et circumscribemus.

PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

Sit datus circulus ΑΒΓΔ; oportet igitur in ΑΒΓΔ circulo quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum inscribere.

COROLLAIRE.

De là il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

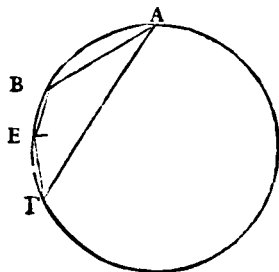
Semblablement si par les points Α, Β, Δ, Γ, Ε, Ζ nous menons des tangentes au cercle, on circonscrira à ce cercle un hexagone équilatéral et équiangle, conformément à ce qui a été dit pour le pentagone. C'est aussi conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, que nous inscrirons, et que nous circonscribons un cercle à un hexagone donné.

PROPOSITION XVI.

Inscrire dans un cercle donné un quindecagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindecagone équilatéral et équiangle.

Εγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἷων ἄρα ἴστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε. ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πεμπτὸν οὔσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω



Inscribatur in ΑΒΓΔ circulo trianguli quidem æquilateri in ipso inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri ipsum ΑΒ; qualium igitur est ΑΒΓΔ circulus æqualium segmentorum quindecim, talium ΑΒΓ quidem circumferentia tertia pars existens circuli erit quinque; ΑΒ vero circumferentia, quinta existens circuli, erit trium; reliqua igitur ΒΓ æqualium duarum. Secetur

ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαίδεκατον ἔσται² τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Εὰν ἄρα ἐπιζυῡξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας³, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἑναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαίδεγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΒΓ bifariam in Ε, utraque igitur ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima erit ΑΒΓΔ circuli. Si igitur jungentes ipsas ΒΕ, ΕΓ rectas, æquales ipsis in continuum rectas aptemus in ΑΒΓΔ circulo, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Quod oportebat facere.

Inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔ le côté ΑΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté ΑΒ d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ΑΒΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ΑΒΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc ΑΒ qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant ΒΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant ΒΓ en deux parties égales au point Ε (30. 3), chacun des arcs ΒΕ, ΕΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle ΑΒΓΔ. Donc, si ayant joint les droites ΒΕ, ΕΓ, nous adaptons dans le cercle ΑΒΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindecagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

234 LE QUATRIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ομοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἰὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφῆσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἐτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένους⁴, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαίδεκάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον⁵, κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν⁶.

Congruenter autem eis quæ de pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circumscribetur circa circulum quindecagonum æquilaterumque et æquiangulum. Et insuper congruenter eis de pentagono dictis, et in dato quindecagono circulum inscribemus et circumscribemus.

Conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, si par les points de divisions d'un cercle, on mène des tangentes à ce cercle, on circonscrira à ce cercle un quindecagone équilatéral et équiangle. De plus, conformément à ce qui a été dit pour les démonstrations du pentagone, nous inscrirons et nous circonscrirons une circonférence de cercle à un quindecagone équilatéral et équiangle donné.

FIN DU QUATRIÈME LIVRE.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R Q U I N T U S.

ΟΡΟΙ.

α. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρήῃ τὸ μείζον.

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηῇται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις¹.

DEFINITIONES.

1. Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando mensurat majorem.

2. Multiplex autem major minoris, quando mensuratur a minore.

3. Ratio est duorum magnitudinum homogenearum secundum quantitatem inter se quædam habitudo.

LIVRE CINQUIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

δ'. Αναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης².

ε'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερίχειν.

ς'. Εν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δεύτερου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμοῦν, ἑκατέρων ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερίχη, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἰλλείπη ληφθέντα κατάλληλα³.

ζ'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη, ἀνάλογον καλεῖσθω.

η'. Όταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερίχη τοῦ τοῦ δεύτερου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερίχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τό τε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

θ'. Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη⁵ ἐστίν.

4. Proportio autem, rationum identitas.

5. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese superare.

6. In eâdem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primæ et tertiæ æque multiples, secundæ et quartæ æque multiples, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt comparatæ inter se.

7. Ipsæ autem eandem rationem habentes magnitudines proportionales vocentur.

8. Quando verò æque multiplicium, primæ quidem multiplex superat secundæ multiplicem, tertiæ vero multiplex non superat quartæ multiplicem, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur, quam tertia ad quartam.

9. Proportio autem in tribus terminis minima est.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

ι. Όταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια. Όταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δὲ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἥπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ αὖτις ἔξῃς ὁμοίως ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ. Ομόλογα μεγέθη λέγεται⁸, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.

ιγ. Εναλλάξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.

ιδ. Ανάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἐπομένου ὡς ἡγούμενου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.

ιε. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἐπομένου ὡς ἐνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

ισ. Διάρσεις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

10. Si autem tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur, ejus quam ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines proportionales sint, prima ad quartam triplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; et semper deinceps similiter quamdiu proportio exstiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem.

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio rationis est sumptio excessûs, quo superat antecedens consequentem, ad ipsam consequentem.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

11. Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la quatrième une raison triple de celle qu'elle a avec la seconde, et ainsi de suite, tant que la proportion subsiste.

12. Les antécédents sont dits des grandeurs homologues aux antécédents; et les conséquents, des grandeurs homologues aux conséquents.

13. La raison est alterne, quand on compare l'antécédent à l'antécédent, et le conséquent au conséquent.

14. La raison est inverse, quand on compare le conséquent comme antécédent à l'antécédent comme conséquent.

15. Il y a composition de raison, quand on compare au conséquent l'antécédent avec le conséquent.

16. Il y a division de raison, quand on compare au conséquent l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

238 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

15. Αναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἥ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου.

16. Διῆσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων¹⁰ τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἢ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἴσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἴσχατον. Ἡ ἄλλως. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

17. Τεταρτμίνη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ἢ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὡς ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι¹¹.

18. Τεταρτμίνη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων¹² τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο

17. *Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens consequentem.*

18. *Ex æqualitate ratio est, pluribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, binis sumptis et in eadem ratione, quando est ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. Vel aliter. Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.*

19. *Ordinata proportio est, quando est ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; est autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.*

20. *Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus et aliis ipsis æqualibus numero, fit, ut quidem in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem; ut vero in primis magnitudinibus*

17. Il y a conversion de raison, quand on compare l'antécédent à l'excès de l'antécédent sur le conséquent.

18. Il y a raison par égalité, lorsqu'ayant plusieurs grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, la première grandeur des premières est à la dernière, comme la première grandeur des secondes est à la dernière; ou bien, lorsque l'on compare les grandeurs extrêmes, les moyennes étant retranchées.

19. La proportion est ordonnée, lorsque l'antécédent est au conséquent comme l'antécédent est au conséquent, et que le conséquent est à un autre conséquent quelconque, comme le conséquent est à un autre conséquent quelconque.

20. La proportion est troublée, lorsqu'ayant trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, il arrive que dans les premières grandeurs l'antécédent est au conséquent, comme dans les secondes grandeurs l'antécédent est au conséquent, et que dans les premières gran-

τι, οὕτως ἐν τοῖς διυτίροις μεγέθεσιν¹³ ἄλλό τι
πρὸς ἡγούμενον.

consequens ad aliam quampiam, ita in secundis
magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

Εάν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγέθων ἴσων
τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκεις πολλαπλά-
σιον ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγέθων ἐνός, το-
σαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ παντὰ τῶν πάντων.

Εστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ ὅποσωνοῦν
μεγέθων τῶν Ε, Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάσ-
του ἰσάκεις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὅσαπλάσιόν
ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ
ΑΒ, ΓΔ τῶν Ε, Ζ.

$$\begin{array}{r} \text{A} \quad \text{H} \quad \text{B} \\ \hline \text{E} \\ \hline \text{Γ} \quad \Theta \quad \Delta \\ \hline \text{Z} \end{array}$$

Επεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ
τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἴσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque
magnitudinum æqualium multitudine, singulæ
singularum æque multiplices, quam multiplex
est una magnitudinum unius, tam multiplices
erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines ΑΒ, ΓΔ quot
cunque magnitudinum Ε, Ζ æqualium multitu-
dine, singulæ singularum æque multiplices; dico
quam multiplex est ΑΒ ipsius Ε, tam multipli-
ces esse et ΑΒ, ΓΔ ipsarum Ε, Ζ.

Quoniam enim æque est multiplex ΑΒ ipsius Ε
ac ΓΔ ipsius Ζ; quot igitur sunt in ΑΒ magni-

deurs le conséquent est à une grandeur quelconque, comme dans les secondes
grandeurs une grandeur quelconque est à un antécédent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres
grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des
secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des
secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

Soient ΑΒ, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à
d'autres grandeurs Ε, Ζ, chacune étant le même multiple de chacune; je dis
que ΑΒ est le même multiple de Ε, que la somme de ΑΒ et de ΓΔ l'est de la
somme de Ε et de Ζ.

Puisque ΑΒ est multiple de Ε, que ΓΔ l'est de Ζ, il y aura dans ΑΒ autant

240 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μεγέθη² ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. Διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ². Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ

tudines æquales ipsi E, tot sunt et in ΓΔ æquales ipsi Z. Dividatur AB quidem in magnitudines AH, HB æquales ipsi E, ipsa vero ΓΔ in ipsas ΓΘ, ΘΔ æquales ipsi Z; erit utique æqualis multitudo ipsarum AH, HB multitudini ipsarum ΓΘ, ΘΔ. Et quoniam æqualis est AH quidem ipsi E, ipsa vero ΓΘ ipsi Z; æqualis igitur et AH, ΓΘ

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{H} \quad \text{B} \\ \hline \text{E} \\ \hline \text{Γ} \quad \text{Θ} \quad \Delta \\ \hline \text{Z} \end{array}$$

ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z³. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα τοῖς E, Z· ὁσαπλᾶσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z. Εἰάν ἄρα ἡ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis E, Z; propter eadem utique æqualis est HB ipsi E, et ΘΔ ipsi Z; æquales igitur et HB, ΘΔ ipsis E, Z; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt et in AB, ΓΔ æquales ipsis E, Z; quam multiplex igitur est AB ipsius E, tam multiplices erunt et AB, ΓΔ ipsarum E, Z. Si igitur quotcunque etc.

de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

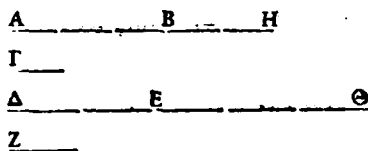
PROPOSITIO II.

Εάν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γάρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sit autem et quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; et simul sumptæ prima et quinta secundæ æque erunt multiplices ac tertia et sexta quartæ.

Prima enim AB secundæ Γ æque sit multiplex ac tertia ΔΕ quartæ Ζ, sit autem et quinta ΒΗ



Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

secundæ Γ æque multiplex ac sexta ΕΘ quartæ Ζ; dico et simul sumptas primam et quintam ΑΗ secundæ Γ æque fore multiplices ac tertiam et sextam ΔΘ ipsius Ζ.

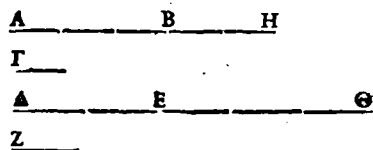
PROPOSITION II.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième, et si la cinquième est le même multiple de la seconde que la sixième l'est de la quatrième, la somme de la première et de la cinquième sera le même multiple de la seconde que la somme de la troisième et de la sixième l'est de la quatrième.

Que la première AB soit le même multiple de la seconde Γ que la troisième ΔΕ l'est de la quatrième Ζ, et que la cinquième ΒΗ soit le même multiple de la seconde Γ que la sixième ΕΘ l'est de la quatrième Ζ; je dis que la somme de la première et de la cinquième ΑΗ sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθει ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ

Quoniam enim æque est multiplex AB ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB magnitudines æquales ipsi Γ, tot et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Propter eadem utique et quot sunt in BH æquales ipsi Γ, tot et in ΕΘ æquales ipsi Ζ; quot igitur sunt in totâ AH æquales ipsi Γ, tot et in



ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ἰσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἴσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα² πρῶτον καὶ πέμπτου τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάνεις ἴσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἑξῆς.

totâ ΔΘ æquales ipsi Ζ; quam multiplex igitur est AH ipsius Γ, tam multiplex erit et ΔΘ ipsius Ζ; et simul sumptæ igitur prima et quinta AH secundæ Γ æque erunt multiplices ac tertia et sexta ΔΘ quartæ Ζ. Si igitur prima, etc.

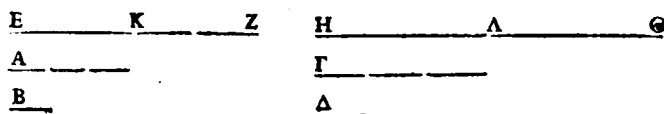
Puisque AB est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Par la même raison, il y a dans BH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΕΘ de grandeurs égales à Ζ. Il y a donc dans la grandeur entière AH autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans la grandeur entière ΔΘ de grandeurs égales à Ζ. Donc AH est le même multiple de Γ que ΔΘ l'est de Ζ; donc la somme de la première et de la cinquième AH sera le même multiple de la seconde Γ que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ l'est de la quatrième Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληθῇ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ διῖσου τῶν ληθόντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γάρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ἔστί πολλαπλάσιον¹ τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.



Επὶ γὰρ ἰσάκεις ἔστί πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα² καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διηρήσθω τὸ μὲν³ ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη

Si prima secundæ æque sit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem æque multiples primæ et tertiæ ; et ex æquo sumptarum utraque utriusque æque erit multiplex , altera quidem secundæ , altera vero quartæ.

Prima enim Α secundæ Β æque sit multiplex ac tertia Γ quartæ Δ , et sumantur ipsarum Α , Γ æque multiples ΕΖ , ΗΘ ; dico æque esse multiplicem ΕΖ ipsius Β ac ΗΘ ipsius Δ.

Quoniam enim æque est multiplex ΕΖ ipsius Α ac ΗΘ ipsius Γ ; quot igitur sunt in ΕΖ æquales ipsi Α , tot et in ΗΘ æquales ipsi Γ. Dividatur ΕΖ quidem in magnitudines ipsi Α æqua-

PROPOSITION III.

Si la première est le même multiple de la seconde que la troisième l'est de la quatrième , et si l'on prend des équimultiples de la première et de la troisième , le multiple de la première sera , par égalité , le même multiple de la seconde que le multiple de la troisième l'est de la quatrième.

Que la première Α soit le même multiple de la seconde Β que la troisième Γ l'est de la quatrième Δ ; prenons les équimultiples ΕΖ , ΗΘ de Α et de Γ ; je dis que ΕΖ est le même multiple de Β que ΗΘ l'est de Δ.

Puisque ΕΖ est le même multiple de Α que ΗΘ l'est de Γ , il y a dans ΕΖ autant de grandeurs égales à Α qu'il y a dans ΗΘ de grandeurs égales à Γ. Di-

244 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλῆθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ.

les ΕΚ, ΚΖ, ipsa vero ΗΘ in magnitudines ipsi Γ æquales ΗΛ, ΛΘ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΕΚ, ΚΖ multitudini ipsarum ΗΛ, ΛΘ. Et quoniam æque est multiplex Α ipsius Β ac Γ ipsius Δ; æqualis autem ΕΚ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΛ ipsi Γ; æque igitur est multiplex ΕΚ ipsius Β ac ΗΛ ipsius Δ. Propter eadem utique æque est multiplex ΚΖ ipsius Β ac ΛΘ ipsius Δ. Quoniam

$$\begin{array}{c} \text{E} \quad \quad \quad \text{K} \quad \quad \quad \text{Z} \\ \hline \text{A} \quad \quad \quad \text{---} \\ \hline \text{B} \quad \quad \quad \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{H} \quad \quad \quad \text{Λ} \quad \quad \quad \text{Θ} \\ \hline \text{Γ} \quad \quad \quad \text{---} \\ \hline \text{Δ} \quad \quad \quad \text{---} \end{array}$$

Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἰξῆς.

igitur prima ΕΚ secundæ Β æque est multiplex ac tertia ΗΛ quartæ Δ; est autem et quinta ΚΖ secundæ Β æque multiplex ac sexta ΛΘ quartæ Δ; et simul sumptæ igitur prima et quinta ΕΖ secundæ Β æque sunt multiplices ac tertia et sexta ΗΘ quartæ Δ. Si igitur prima, etc.

visons ΕΖ en grandeurs égales à Α, et que ces grandeurs soient ΕΚ, ΚΖ; divisons ΗΘ en grandeurs égales à Γ, et que ces grandeurs soient ΗΛ, ΛΘ. Le nombre des parties ΕΚ, ΚΖ sera égal au nombre des parties ΗΛ, ΛΘ. Et puisque Α est le même multiple de Β que Γ l'est de Δ, que ΕΚ est égal à Α, et ΗΛ égal à Γ, la grandeur ΕΚ est le même multiple de Β que ΗΛ l'est de Δ. Par la même raison, ΚΖ est le même multiple de Β que ΛΘ l'est de Δ. Et puisque la première ΕΚ est le même multiple de la seconde Β que la troisième ΗΛ l'est de la quatrième Δ, et que la cinquième ΚΖ est le même multiple de la seconde Β que la sixième ΛΘ l'est de la quatrième Δ, la somme de la première et de la cinquième, qui est ΕΖ, sera le même multiple de la seconde Β, que la somme de la troisième et de la sixième, qui est ΗΘ, l'est de la quatrième Δ (2. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

K _____
E _____
A _____
B _____
H _____
M _____

τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Α, τῶν δὲ Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam; et æque multiples primæque et tertiæ ad æque multiples secundæ et quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eamdem habebunt rationem inter se comparatæ.

Prima enim Α ad secundam Β eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, et su-

Λ _____
Ζ _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____
Ν _____

mantur ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Η, Θ; dico esse ut Ε ad Η, ita Ζ ad Θ.

Sumantur enim ipsarum quidem Ε, Ζ æque multiples Κ, Α, ipsarum vero Η, Θ aliæ utcunque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION IV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième comparés à des équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième, auront entre eux la même raison.

Car que la première Α ait avec la seconde Β la même raison que Γ avec Δ, prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de Β et de Δ; je dis que Ε est à Η comme Ζ est à Θ.

Prenons des équi-multiples quelconques Κ, Α de Ε et de Ζ, et d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Η et de Θ.

246 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν

Et quoniam æque est multiplex E quidem ipsius A, ipsa vero Z ipsius Γ, et sumptæ sunt ipsarum E, Z æque multiplices Κ, Λ; æque igitur est multiplex Κ ipsius Α ac Λ ipsius Γ. Propter eadem utique æque est multiplex Μ ipsius Β ac Ν ipsius Δ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiplices Κ, Λ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcun-

Κ _____
Ε _____
Α _____
Β _____
Η _____
Μ _____

Λ _____
Ζ _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____
Ν _____

δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκεις πολλαπλάσια³, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ. Εὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

que æque multiplices Μ, Ν; si igitur superat Κ ipsam Μ, superat et Λ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Κ, Λ quidem ipsarum Ε, Ζ æque multiplices, ipsæ vero Μ, Ν ipsarum Η, Θ aliæ utcunque multiplices; est igitur ut Ε ad Η, ita Ζ ad Θ. Si igitur prima, etc.

Puisque E est le même multiple de A que Z l'est de Γ, et que l'on a pris des équi-multiples Κ, Λ de E et de Z, la grandeur Κ est le même multiple de Α que Λ l'est de Γ (3. 5). Par la même raison, Μ est le même multiple de Β que Ν l'est de Δ. Et puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, que l'on a pris des équi-multiples quelconques Κ, Λ de Α et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Μ, Ν de Β et de Δ, si Κ surpasse Μ, Λ surpasse Ν; si Κ est égal à Μ, Λ est égal à Ν, et si Κ est plus petit que Μ, Λ est plus petit que Ν (déf. 5. *). Mais Κ, Λ sont des équi-multiples quelconques de Ε et de Ζ, et Μ, Ν d'autres équi-multiples quelconques de Η et de Θ; donc Ε est à Η comme Ζ est à Θ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Επεὶ οὖν ἰδείχθη, ὅτι⁴, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Α τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Α· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἴσται καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἂν τίσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἴσται.

Quoniam igitur ostensum est, si superat K ipsam M , superare et A ipsam N ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; manifestum est et si M superat K , superare et N ipsam A ; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; et propter hoc erit et ut H est ad E , ita Θ ad Z . Ex hoc utique manifestum est, si quatuor magnitudines proportionales sunt, et inversione proportionales fore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO V.

Εὰν μίγεθος μεγέθους ἰσάκεις ᾦ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρῆν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τῷ λοιποῦ ἰσάκεις ἴσται πολλαπλάσιον, ὅσα πλάτιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Si magnitudo magnitudinis æque sit multiplex ac ablata ablatæ, et reliqua reliquæ æque erit multiplex ac multiplex est tota totius.

COROLLAIRE.

Puisqu'il a été démontré que si K surpasse M , A surpasse N ; que si K est égal à M , A est égal à N , et que si K est plus petit que M , A est plus petit que N , il est évident que si M surpasse K , N surpasse A ; que si M est égal à K , N est égal à A , et que si M est plus petit que K , N est plus petit que A ; par conséquent H est à E comme Θ est à Z . De là il est évident que si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par inversion.

PROPOSITION V.

Si une grandeur est le même multiple d'une grandeur que la grandeur retranchée l'est de la grandeur retranchée, le reste sera le même multiple du reste que le tout l'est du tout.

Μέγεθος γὰρ τὸ AB μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρθεὶν τὸ ΑΕ ἀφαιρέθιντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

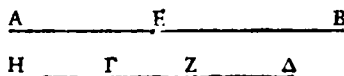
Οσαπλάσιον γὰρ ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γιγνέτω καὶ τὸ EB τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ· καὶ τὸ EB τοῦ ΗΓ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ AB τοῦ ΗΖ· κίτται δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλά-

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓΔ æque sit multiplex ac ablata ΑΕ ablata ΓΖ; dico et reliquam EB reliquæ ΖΔ æque fore multiplicem ac multiplex est tota AB totius ΓΔ.

Quam multiplex enim est ΑΕ ipsius ΓΖ, tam multiplex fiat et EB ipsius ΓΗ.

Et quoniam æque multiplex est ΑΕ ipsius ΓΖ ac EB ipsius ΗΓ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac AB ipsius ΗΖ; ponitur autem æque multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac AB ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex AB utriusque



σιον τὸ AB ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ EB τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ EB τοῦ ΖΔ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλα-

ipsarum ΗΖ, ΓΔ; æqualis igitur ΗΕ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΖ; reliqua igitur ΗΓ reliquæ ΔΖ est æqualis. Et quoniam æque est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac EB ipsius ΗΓ, æqualis autem ipsi ΗΓ ipsa ΔΖ; æque igitur est multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac EB ipsius ΖΔ. Æque autem ponitur multiplex ΑΕ ipsius ΓΖ ac AB ipsius ΓΔ; æque igitur est multiplex EB ipsius

Que la grandeur AB soit le même multiple de la grandeur ΓΔ que la grandeur retranchée ΑΕ l'est de la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ΖΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ.

Que ΑΕ soit le même multiple de ΓΖ que EB l'est de ΓΗ.

Puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que EB l'est de ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que AB l'est de ΗΖ (1. 5). Mais l'on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que AB l'est de ΓΔ; donc AB est le même multiple de ΗΖ et de ΓΔ; donc ΗΖ est égal à ΓΔ. Retrauchons la partie commune ΓΖ; le reste ΗΓ sera égal au reste ΔΖ. Et puisque ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que EB l'est de ΗΓ, et que ΖΔ est égal à ΗΓ, ΑΕ est le même multiple de ΓΖ que EB l'est de ΖΔ. Mais on a supposé que ΑΕ est le même multiple de ΓΖ

πλάσιον τὸ EB τοῦ ZΔ καὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ ἰσάκεις ἔσται² πολλαπλάσιον, ἵσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Εὰν ἄρα μέγεθος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ZΔ ac AB ipsius ΓΔ; et reliqua igitur EB reliquæ ZΔ æque erit multiplex ac multiplex est tota AB totius ΓΔ. Si igitur magnitudo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

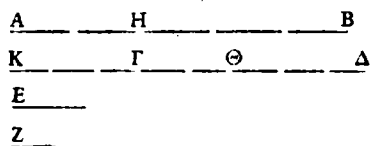
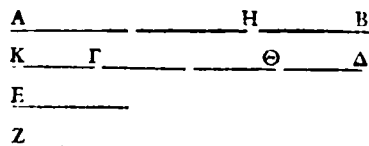
Εὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τίνα τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἦτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ AB, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρε-

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque sint multiplices, et ablatæ quædam earumdem æque sint multiplices; et reliquæ iisdem vel æquales sunt, vel æque earum multiplices.

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ duarum magnitudinum E, Z æque sint multiplices, et



θέντα τὰ AH, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν E, Z ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z ἦτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

ablatæ AH, ΓΘ earumdem E, Z æque sint multiplices; dico et reliquas HB, ΘΔ ipsis E, Z vel æquales esse, vel æque earum multiplices.

que AB l'est de ΓΔ; donc EB est le même multiple de ZΔ que AB l'est de ΓΔ; donc la grandeur restante EB sera le même multiple de la grandeur restante ZΔ que la grandeur entière AB l'est de la grandeur entière ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

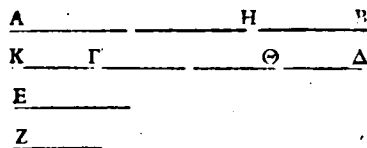
Si deux grandeurs sont des équi-multiples de deux grandeurs, et si certaines grandeurs retranchées sont des équi-multiples des dernières, les grandeurs restantes seront égales à ces dernières, ou des équi-multiples de ces dernières.

Que les deux grandeurs AB, ΓΔ soient des équi-multiples des deux grandeurs E, Z, et que les grandeurs retranchées AH, ΓΘ soient des équi-multiples de E et de Z; je dis que les grandeurs restantes HB, ΘΔ sont égales aux grandeurs E, Z, ou des équi-multiples de ces grandeurs.

250 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ' ἴσον ἐστί. Κείσθω γάρ τῳ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Καὶ ἐπὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ

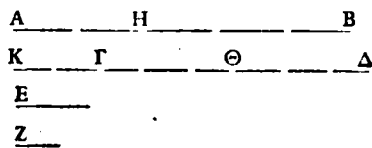


τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἐκάτερον τῆς ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ Ζ τὸ ΚΓ³ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν¹. Ὡστε εἰς τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ.

Ὀμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ πολλαπλάσιον ἢ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, ποσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μὴ εἴη, καὶ τὰ ἐξ ἑῶς.

Sit enim primum ΗΒ ipsi Ε æqualis; dico et ΘΔ ipsi Ζ æqualem esse. Ponatur enim ipsi Ζ æqualis ΓΚ.

Et quoniam æque est multiplex ΑΗ ipsius Ε ac ΓΘ ipsius Ζ, æqualis autem ΗΒ quidem ipsi Ε, ipsa vero ΚΓ ipsi Ζ; æque igitur est multiplex ΑΒ ipsius Ε ac ΚΘ ipsius Ζ. Æque autem ponitur multiplex ΑΒ ipsius Ε ac ΓΔ ip-



sus Ζ; æque igitur est multiplex ΚΘ ipsius Ζ ac ΓΔ ipsius Ζ. Et quoniam utraque ipsarum ΚΘ, ΓΔ ipsius Ζ æque est multiplex; æqualis igitur est ΚΘ ipsi ΓΔ. Communis auferatur ΓΘ; reliqua igitur ΚΓ reliquæ ΘΔ æqualis est. Sed ipsi Ζ ipsa ΚΓ est æqualis; et ΘΔ igitur ipsi Ζ æqualis est. Quare si ΗΒ ipsi Ε æqualis est, et ΘΔ æqualis erit ipsi Ζ.

Similiter utique ostendemus et si multiplex est ΗΒ ipsius Ε, multiplicem fore et magnitudinem ΘΔ ipsius Ζ. Si igitur duæ, etc.

Premièrement, que ΗΒ soit égal à Ε; je dis que ΘΔ est égal à Ζ. Faisons ΓΚ égal à Ζ.

Puisque ΑΗ est le même multiple de Ε que ΓΘ l'est de Ζ, que ΗΒ est égal à Ε, et ΚΓ égal à Ζ, ΑΒ est le même multiple de Ε que ΚΘ l'est de Ζ (2. 5). Mais on a supposé que ΑΒ est le même multiple de Ε que ΓΔ l'est de Ζ; donc ΚΘ est le même multiple de Ζ que ΓΔ l'est de Ζ. Et puisque les grandeurs ΚΘ, ΓΔ sont chacune le même multiple de Ζ, ΚΘ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΘ; la grandeur restante ΚΓ sera égale à la grandeur restante ΘΔ. Mais ΚΓ est égal à Ζ; donc ΘΔ est égal à Ζ; donc si ΗΒ est égal à Ε, ΘΔ sera égal à Ζ.

Nous démontrerons semblablement, que si ΗΒ est un multiple de Ε, la grandeur ΘΔ sera le même multiple de Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον,
καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἐστω ἴσα μείρη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι ὁ
ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α,
Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς
ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν² Α, Β ἰσάκεις πολλα-
πλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὁ ἔτυχε πολ-
λαπλάσιον τὸ Ζ.

Æquales ad eandem eandem habent ra-
tionem, et eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines Α, Β, alia autem
quælibet magnitudo Γ; dico utramque ipsarum
Α, Β ad Γ habere eandem rationem, et Γ ad
utramque ipsarum Α, Β.

Sumantur enim ipsarum Α, Β quidem æque
multiplices Δ, Ε, ipsius vero Γ alia utcunque
multiplex Ζ.

Α _____
Β _____
Γ _____

Δ _____
Ε _____
Ζ _____

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ
Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα
καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἄλλο δὲ ὁ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ
πολλαπλάσιον³. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ,
ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον·

Quoniam igitur æque est multiplex Δ ipsius
Α ac Ε ipsius Β, æqualis autem Α ipsi Β; æ-
qualis igitur et Δ ipsi Ε. Alia vero Ζ ipsius Γ
utcunque multiplex; si igitur superat Δ ipsam
Ζ, superat et Ε ipsam Ζ; et si æqualis, æqua-

PROPOSITION VII.

Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales Α, Β, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs Α, Β a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β.

Prenons des équimultiples quelcônques Δ, Ε de Α et de Β, et un autre multiple quelconque Ζ de Γ.

Puisque Δ est le même multiple de Α que Ε l'est de Β, et que Α est égal à Β, Δ est égal à Ε. Mais Ζ est un autre multiple quelconque de Γ; donc, si Δ surpasse Ζ, Ε surpasse Ζ; si Δ est égal à Ζ, Ε est égal à Ζ; et si Δ est plus petit

252 LE CINQUIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ εἰ ἕλαττον, ἕλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάνεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχεν πολλαπλάσιον ἔστιν⁴. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω δὴ⁵ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

lis; et si minor, minor. Et sunt quidem Δ, Ε ipsarum Α, Β æque multiples, ipsa vero Ζ ipsius Γ alia utcunque multiplex est; est igitur ut Α ad Γ, ita Β ad Γ.

Dico autem et Γ ad utramque ipsarum Α, Β eandem habere rationem.

A _____
B _____
Γ _____

Δ _____
Ε _____
Ζ _____

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἰμοίως δὴ⁶ δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει τὸ Ζ7 καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἕλαττον, ἕλαττον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Τὰ ἴσα ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς⁸.

Iisdem enim constructis, similiter utique ostendemus æqualem esse Δ ipsi Ε; alia vero quædam Ζ; si igitur superat Ζ ipsam Δ, superat Ζ et ipsam Ε; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et est Ζ quidem ipsius Γ multiplex; ipsæ autem Δ, Ε ipsarum Α, Β aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut Γ ad Α, ita Γ ad Β. Æquales igitur, etc.

que Ζ, Ε est plus petit que Ζ. Mais Δ, Ε sont des équimultiples quelconques de Α et de Β, et Ζ est un autre multiple quelconque de Γ; donc Α est à Γ comme Β est à Γ (déf. 6. 5).

Je dis aussi que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β.

La même construction étant faite, nous démontrerons semblablement que Δ est égal à Ε; mais Ζ est un autre multiple quelconque; donc si Ζ surpasse Δ, Ζ surpasse Ε; si Ζ est égal à Δ, Ζ est égal à Ε, et si Ζ est plus petit que Γ, Ζ est plus petit que Ε. Mais Ζ est un multiple de Γ, et Δ, Ε sont d'autres équimultiples quelconques de Α et de Β; donc Γ est à Α comme Γ est à Β (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Τῶν ἀνίσων μεγέθων, τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ μείζον.

Ἐστω ἀνισα μεγέθη τὰ AB, Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ AB', ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ AB.

Inæqualium magnitudinum, major ad eandem majorem rationem habet quam minor; et eadem ad minorem majorem rationem habet quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines AB, Γ, et sit major AB, alia vero utcunque Δ; dico AB ad Δ majorem rationem habere quam Γ ad Δ, et Δ ad Γ majorem rationem habere quam ad AB.

A E B
Γ
Δ

Z H Θ
K
Λ
M
N

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ Γ, κείσθω τῇ Γ ἴσον τὸ BE, τὸ δὲ ἔλαττον τῶν AE, EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὶ τοῦ Δ μείζον. Ἐστὼ πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB, καὶ τιπολλαπλασιάσθω τὸ AE, καὶ ἔστω² αὐτοῦ πολλαπλάσιον

Quoniam enim major est AB ipsâ Γ, ponatur ipsi Γ æqualis BE, minor utique ipsarum AE, EB multiplicata, erit aliquando ipsâ Δ major. Sit primum AE minor ipsâ EB, et multiplicetur AE, et sit ipsius multiplex ZH major

PROPOSITION VIII.

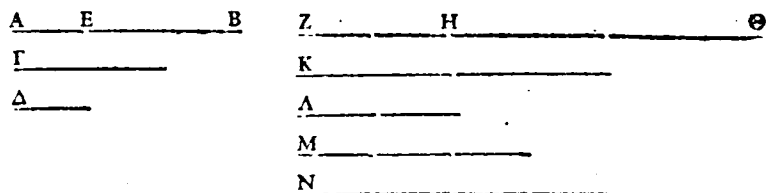
Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande.

Soient les grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande, et que Δ soit une autre grandeur quelconque; je dis que AB a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Δ, et que Δ a avec Γ une plus grande raison qu'avec AB.

Car puisque AB est plus grand que Γ, faisons BE égal à Γ; la plus petite des grandeurs AE, EB étant multipliée, deviendra enfin plus grande que Δ (déf. 5. 5). Que AE soit d'abord plus petit que EB; multiplions AE, que son multiple

τὸ ΖΗ μείζον ἐν τοῦ Δ, καὶ ὅσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γιγνέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον ἕως οὗ³ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρῶτως δὲ μείζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρῶτως δὲ μείζον τοῦ Κ.

ipsa Δ, et quam multiplex est ΖΗ ipsius ΑΕ, tam multiplex fiat et ΗΘ quidem ipsius ΕΒ, ipsa vero Κ ipsius Γ; et sumatur ipsius Δ dupla quidem ipsa Δ, tripla vero Μ, et deinceps unā major quoad sumpta multiplex quidem fiat ipsius Δ, primum vero major ipsa Κ. Sumatur, et sit Ν quadrupla quidem ipsius Δ, primum vero major ipsa Κ.



Επεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρῶτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἐστὶν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ. Ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολ-

Quoniam igitur Κ ipsa Ν primum est minor, ipsa Κ igitur ipsa Μ non est minor. Et quoniam æque est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΗΘ ipsius ΕΒ, æque igitur est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac ΖΘ ipsius ΑΒ. Æque autem est multiplex ΖΗ ipsius ΑΕ ac Κ ipsius Γ; æque igitur est multiplex ΖΘ ipsius ΑΒ ac Κ ipsius Γ; ipsæ ΖΘ, Κ igitur ipsarum ΑΒ, Γ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque est multiplex ΗΘ ipsius

ΖΗ soit plus grand que Δ, et que ΗΘ soit le même multiple de ΕΒ, et Κ le même multiple de Γ, que ΖΗ l'est de ΑΕ. Prenons la grandeur Λ double de Δ, la grandeur Μ triple de Δ, et ainsi de suite, une fois de plus, jusqu'à ce que le multiple de Δ devienne pour la première fois plus grand que Κ. Prenons ce multiple; que Ν, quadruple de Δ, soit plus grand que Κ, pour la première fois.

Puisque Κ est pour la première fois plus petit que Ν, la grandeur Κ n'est pas plus petite que Μ. Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΗΘ l'est de ΕΒ; donc ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que ΖΘ l'est de ΑΒ (r. 5). Mais ΖΗ est le même multiple de ΑΕ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ est le même multiple de ΑΒ que Κ l'est de Γ; donc ΖΘ, Κ sont des équi-multiples de ΑΒ et de Γ. De plus, puis-

λαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Κ τῷ ΗΘ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἑλαττόν· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἑλαττόν ἐστι. Μείζον δὲ τὸ Ἰ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν. Ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστίν ἴσα· ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μείζον ἐστίν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

EB ac K ipsius Γ, æqualis autem EB ipsius Γ; æqualis igitur et K ipsi ΗΘ. Ipsa vero K ipsà Μ non est minor; non igitur ΗΘ ipsà Μ minor est. Major autem ΖΗ ipsà Δ; tota igitur ΖΘ utrisque simul Δ, Μ major est. Sed utræque simul Δ, Μ ipsi Ν sunt æquales, quandoquidem Μ ipsius Δ est tripla, utræque autem simul Δ, Μ ipsius Δ sunt quadruplæ, est vero et Ν ipsius Δ quadrupla, utræque simul igitur Μ, Δ ipsi Ν æquales sunt. Sed ΖΘ ipsis Δ, Μ major est; ΖΘ igitur ipsam Μ superat. Κ vero ipsam Ν non superat. Et sunt ipsæ quidem ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ æque multiplicæ, ipsa vero Ν ipsius Δ alia utcunque multiplex; ΑΒ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico autem et Δ ad Γ majorem rationem habere, quam Δ ad ΑΒ.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, Ν quidem ipsam Κ superare, Ν vero ipsam ΖΘ non superare. Et est Ν quidem ipsius Δ multiplex, et ipsæ ΖΘ, Κ ipsarum ΑΒ, Γ aliæ utcunque æque multiplicæ; Δ igitur ad Γ majorem rationem habet quam Δ ad ΑΒ.

que ΗΘ est le même multiple de ΕΒ que Κ l'est de Γ, et que ΕΒ est égal à Γ, ΗΘ est égal à Κ. Mais Κ n'est pas plus petit que Μ; donc ΗΘ n'est pas plus petit que Μ. Mais ΖΗ est plus grand que Δ; donc la grandeur entière ΖΘ est plus grande que Δ et Μ pris ensemble. Mais Δ, Μ pris ensemble sont égaux à Ν, puisque Μ est triple de Δ, que Δ, Μ pris ensemble sont quadruples de Δ, et que Ν est quadruple de Δ, les grandeurs Μ, Δ prises ensemble sont égales à Ν. Mais ΖΘ est plus grand que Δ, Μ; donc ΖΘ surpasse Ν. Mais Κ ne surpasse pas Ν, et ΖΘ, Κ sont des équimultiples de ΑΒ et de Γ, et Ν est un autre multiple quelconque de Δ; donc ΑΒ a une plus grande raison avec Δ, que Γ avec Δ (déf. 8. 5).

Je dis de plus que Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que Ν surpasse Κ, et que Ν ne surpasse pas ΖΘ. Mais Ν est un multiple de Δ, et ΖΘ, Κ sont d'autres équimultiples quelconques de ΑΒ et de Γ; donc Δ a une plus grande raison avec Γ que Δ avec ΑΒ (déf. 8. 5).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ᾧ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκείνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν'.

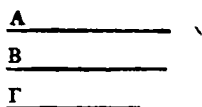
Εχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Quæ ad eandem eandem habent rationem, æquales inter se sunt; et ad quas eadem eandem habet rationem, illæ æquales inter se sunt.

Habeat enim utraque ipsarum Α, Β ad Γ eandem rationem; dico æqualem esse Α ipsi Β.

Si enim non, non utraque ipsarum Α, Β ad Γ eandem haberet rationem, habet autem; æqualis igitur est Α ipsi Β.



Εχέτω δὲ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Habeat autem rursus Γ ad utramque Α, Β eandem rationem; dico æqualem esse Α ipsi Β.

Si enim non, non Γ ad utramque ipsarum Α, Β eandem haberet rationem; habet autem; æqualis igitur est Α ipsi Β. Quæ igitur ad eandem, etc.

PROPOSITION IX.

Les grandeurs qui ont une même raison avec une même grandeur sont égales entr'elles, et les grandeurs avec lesquelles une même grandeur a une même raison sont aussi égales entr'elles.

Que chacune des grandeurs Α, Β ait avec Γ la même raison; je dis que Α est égal à Β.

Car, si cela n'était point, chacune des grandeurs Α, Β n'aurait pas avec Γ la même raison (8. 5); mais elle l'a; donc Α est égal à Β.

Que Γ ait la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β; je dis que Α est égal à Β.

Car, si cela n'était point, la grandeur Γ n'aurait pas la même raison avec chacune des grandeurs Α, Β (8. 5). Mais elle l'a; donc Α est égal à Β. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκείνο μείζον ἔστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἔστιν.

Εἰχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἥπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Β.

Ipsarum ad eandem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est; ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Habeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ; dico majorem esse A ipsā B.

A _____
B _____
Γ _____

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἢ ἑλάσσον. Ἰσον μὲν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἐκεί-
τερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε
λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἔστι τὸ Α τῷ
Β. Οὐδὲ μὲν ἑλασσόν ἔστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α
γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ τὸν ἐλάσσονα εἶχε λόγον ἥπερ

Si enim non, vel æqualis est A ipsi B, vel minor. Æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad Γ eandem haberet rationem. Non habet vero; non igitur æqualis est A ipsi B. Neque tamen minor est A ipsā B, nam A ad Γ minorem haberet rationem quam

PROPOSITION X.

Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite.

Que A ait avec Γ une plus grande raison que B avec Γ; je dis que A est plus grand que B.

Car, si cela n'est pas, A est égal à B, ou plus petit. A n'est pas égal à B, car chacune des grandeurs A, B aurait la même raison avec Γ (7. 5). Mais chacune de ces grandeurs n'a pas la même raison avec Γ; donc A n'est pas égal à B. A n'est pas cependant plus petit que B; car A aurait avec Γ une plus petite raison que B avec Γ (8. 5). Mais A n'a pas avec Γ une plus petite raison que

τὸ B πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ A τοῦ B. Εδείχθη δὲ ὅτι³ οὐδὲ ἴσον, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ A τοῦ B.

Ἐχέτω δὲ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ A· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ B τοῦ A.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μείζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ B τῷ A, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B. Οὐ δὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ A, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ B ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἢ πρὸς τὸ A. Οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ B τοῦ A. Εδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ B τοῦ A. Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

B ad Γ. Non habet autem, non igitur minor est A ipsâ B. Ostensa autem est neque æqualis, major igitur est A ipsâ B.

Habeat autem rursus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A; dico minorem esse B ipsâ A.

Si enim non, vel æqualis est, vel major. Æqualis quidem non est B ipsi A, nam Γ ad utramque ipsarum A, B eandem haberet rationem. Non habet vero, non igitur æqualis est A ipsi B. Non autem tamen major est B ipsâ A, nam Γ ad B minorem rationem haberet quam ad A. Non habet vero, non igitur major est B ipsâ A. Ostensa autem est neque æqualis, minor igitur est B ipsâ A. Ipsarum igitur ad eandem, etc.

B avec Γ; donc A n'est pas plus petit que B. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc A est plus grand que B.

De plus, que Γ ait avec B une raison plus grande que Γ avec A; je dis que B est plus petit que A.

Car, si cela n'est pas, il lui est égal, ou il est plus grand. Mais la grandeur B n'est pas égale à A; car alors la grandeur Γ aurait la même raison avec chacune des grandeurs A, B (7. 5). Mais elle ne l'a pas; donc A n'est pas égal à B. La grandeur B n'est pas cependant plus grande que A; car alors Γ aurait avec B une raison plus petite qu'avec A (8. 5). Mais Γ n'a pas avec B une raison plus petite qu'avec A; donc B n'est pas plus grand que A. Mais on a démontré qu'il ne lui est pas égal; donc B est plus petit que A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

PROPOSTIO XI.

Οἱ τῶ αὐτῷ λόγοι οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἐστωσαν γάρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως² τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὥς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν¹ Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Β, Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Eidem rationes eadem, et inter se sunt eadem.

Sint enim ut Α quidem ad Β ita Γ ad Δ, ut Γ vero ad Δ, ita Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.

Sumantur enim ipsarum Α, Γ, Ε quidem æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

Η _____
Α _____
Β _____
Λ _____

Θ _____
Γ _____
Δ _____
Μ _____

Κ _____
Ε _____
Ζ _____
Ν _____

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἰληπτὰς τῶν μὲν² Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ³. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque multiples Λ, Μ; si igitur Η superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ; et si æqualis, æqualis; et

PROPOSITION XI.

Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles.

Que Α soit à Β comme Γ est à Δ, et que Γ soit à Δ comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme Ε est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Γ; et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ de Β et de Δ; si Η surpasse Λ, Θ surpasse Μ; si Η est égal à Λ, Θ est égal à Μ;

καὶ εἰ ἴσον, ἴσον⁴· καὶ εἰ ἑλάττων, ἑλάττων⁵.
 Πάλιν, ἐπεὶ ἴστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ
 Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἰληπται τῶν μιν⁶ Γ, Ε ἰσά-
 κεις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα
 ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα
 ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν·
 καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττων, ἑλάττων.
 Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ
 τὸ Η τοῦ Α· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλα-
 ττων, ἑλάττων· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α,
 ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ
 εἰ ἑλάττων, ἑλάττων. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ
 τῶν Α, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν
 τῶν Β, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια·
 ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς
 τὸ Ζ. Οἱ ἄρα τῶν αὐτῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

si minor, minor. Rursus, quoniam est ut Γ ad
 Δ ita Ε ad Ζ, et sumptæ ipsarum quidem Γ, Ε
 æque multiples Θ, Κ, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ
 utcunque æque multiples Μ, Ν; si igitur su-
 perat Θ ipsam Μ, superat et Κ ipsam Ν; et si
 æqualis, æqualis; et si minor, minor. Sed si su-
 perat Θ ipsam Μ, superat et Η ipsam Α; et si
 æqualis, æqualis; et si minor, minor; quare et
 si superat Η ipsam Α, superat et Κ ipsam Ν; et
 si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt
 Η, Κ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples,
 ipsæ vero Α, Ν ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque
 multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ.
 Ergo eadem, etc.

et si Η est plus petit que Α, Θ est plus petit que Μ (déf. 6. 5). De plus,
 puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, et qu'on a pris des équimultiples quel-
 conques Θ, Κ de Γ et de Ε, et d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de
 Δ et de Ζ; si Θ surpasse Μ, Κ surpasse Ν; si Θ est égal à Μ, Κ est égal à Ν,
 et si Θ est plus petit que Μ, Κ est plus petit que Ν. Mais si Θ surpasse Μ,
 Η surpasse Α; si Θ est égal à Μ, Η est égal à Α, et si Θ est plus petit que Μ,
 Η est plus petit que Α; donc, si Η surpasse Α, Κ surpasse Ν; si Η est égal à
 Α, Κ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Α, Κ est plus petit que Ν. Mais
 Η, Κ sont des équimultiples quelconques de Α et de Ε, et Α, Ν d'autres équi-
 multiples quelconques de Β et de Ζ; donc Α est à Β comme Ε est à Ζ (déf. 6. 5).
 Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Εάν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον ᾖ ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Εστωσαν ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

H _____
Θ _____
Κ _____
Α _____
Γ _____
Ε _____

Si sint quotcunque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Ε ad Ζ; dico esse ut Α ad Β ita Α, Γ, Ε ad ipsas Β, Δ, Ζ.

Λ _____
Μ _____
Ν _____
Β _____
Δ _____
Ζ _____

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἄετις ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἰληπται

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

Et quoniam est Α ad Β ita Γ ad Δ et Ε ad Ζ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ, Ε æque

PROPOSITION XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que Α soit à Β comme Γ est à Δ et comme Ε est à Ζ; je dis que Α est à Β comme la somme des antécédents Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et comme Ε est à Ζ; que l'on a pris

τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερίχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὡστε καὶ εἰ ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερίχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν¹· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον². Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἐπειδὴ περ ἂν³ ἢ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσαοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκεις πολλαπλάσια⁴, ὅσα πλάσιόν ἐστι ἐν τῶν μεγεθῶν ἐνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Α, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ⁵ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ. Εὰν ἄρα ἢ ὅποσαοῦν, καὶ τὰ ἐξῆς.

multiplices Η, Θ, Κ, ipsarum vero Β, Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Α, Μ, Ν; si igitur Η superat ipsam Α, superat et Θ ipsam Μ, et Κ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Quare et si superat Η ipsam Α, superant et Η, Θ, Κ ipsas Α, Μ, Ν; et si æqualis, æquales; et si minor, minores. Et est Η quidem et Η, Θ, Κ ipsius Α et ipsarum Α, Γ, Ε æque multiples; quoniam si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium multitudine, singulæ singularum æque multiples, quam multiplex est una magnitudinum unius, tam multiples erunt et omnes omnium. Propter eadem utique et Α et Α, Μ, Ν ipsius Β et ipsarum Β, Δ, Ζ æque sunt multiples; est igitur ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ. Si igitur sint quotcunque, etc.

des équi-multiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Γ, Ε, et d'autres équi-multiples quelconques Α, Μ, Ν des grandeurs Β, Δ, Ζ; si Η surpasse Α, Θ surpasse Μ, et Κ surpasse Ν; si Η est égal à Α, Θ est égal à Μ, et Κ égal à Ν; et si Η est plus petit que Α, Θ est plus petit que Μ, et Κ plus petit que Ν (déf. 6. 5). Donc, si Η surpasse Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ surpasse la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; si Η est égal à Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est égale à la somme des grandeurs Α, Μ, Ν; et si Η est plus petit que Α, la somme des grandeurs Η, Θ, Κ est plus petite que la somme des grandeurs Α, Μ, Ν. Mais la grandeur Η et la somme des grandeurs Η, Θ, Κ sont des équi-multiples de la grandeur Α et des grandeurs Α, Γ, Ε, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (1. 5). Par la même raison, la grandeur Α et la somme des grandeurs Α, Μ, Ν sont des équi-multiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ περὶ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ περὶ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον μὲν³ γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima ad secundam majorem rationem habebit quam quinta ad sextam.

Prima quidem enim Α ad secundam Β eandem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, tertia vero Γ ad quartam Δ majorem rationem

M _____	H _____	Θ _____
A _____	Γ _____	E _____
B _____	Δ _____	Z _____
N _____	K _____	Λ _____

μείζονα λόγον ἔχεται ἢ περὶ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἔξει ἢ περὶ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ⁵.

Επεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ⁶, ἔστι τιὰ τῶν μὲν Γ, Ε

habeat quam quinta Ε ad sextam Ζ; dico et primam Α ad secundam Β majorem rationem habituram esse quam quintam Ε ad sextam Ζ.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem rationem habet quam Ε ad Ζ, sunt quædam ipsarum

PROPOSITION XIII.

Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième.

Que la première Α ait avec la seconde Β la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que la troisième Γ ait avec la quatrième Δ une raison plus grande que la cinquième Ε avec la sixième Ζ; je dis que la première Α aura avec la seconde Β une raison plus grande que la cinquième Ε avec la sixième Ζ.

Puisque Γ a avec Δ une raison plus grande que Ε avec Ζ, parmi des équi-

ισάκεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ισάκεις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλάσιου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλάσιου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μὲν ἐστὶ τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ισάκεις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ισάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἂ ἔτυχεν

quidem Γ, Ε æque multiples, ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples; et ipsius quidem Γ multiplex ipsius Δ multiplicem superat, ipsius vero Ε multiplex ipsius Ζ multiplicem non superat. Sumantur, et sint ipsarum quidem Γ, Ε æque multiples Η, Θ; ipsarum vero Δ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ; ita ut Η quidem ipsam Κ superet, ipsa vero Θ ipsam Λ non superet; et quam multiplex quidem est Η ipsius Γ, tam multiplex sit et Μ ipsius Α; quam vero multiplex Κ ipsius Δ, tam multiplex sit et Ν ipsius Β.

Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Γ æque multiples Μ, Η, ipsarum vero Β, Δ aliæ utcunque æque multiples Ν, Κ; si igitur superat Μ ipsam Ν, superat et Η ipsam Κ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superat autem Η ipsam Κ, superat igitur et Μ ipsam Ν. Ipsa vero Θ ipsam Λ non superat; et sunt Μ, Θ quidem ipsarum Α, Ε æque multiples, ipsæ vero Ν, Λ ipsarum Β, Ζ aliæ utcunque æque multiples; ergo Α

multiples quelconques de Γ et de Ε, et parmi d'autres équi-multiples quelconques de Δ et de Ζ, un multiple de Γ surpasse un multiple de Δ, et un multiple de Ε ne surpasse pas un multiple de Ζ (déf. 8. 5). Prenons ces équi-multiples, et que Η, Θ soient des équi-multiples de Γ et de Ε, et que Κ, Λ soient d'autres équi-multiples quelconques de Δ et de Ζ, de manière que Η surpasse Κ, et que Θ ne surpasse pas Λ; et que Μ soit le même multiple de Α que Η l'est de Γ, et que Ν soit le même multiple de Β que Κ l'est de Δ.

Puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et qu'on a pris des équi-multiples quelconques Μ, Η de Α et de Γ, et d'autres équi-multiples quelconques Ν, Κ de Β et de Δ; si Μ surpasse Ν, Η surpasse Κ; si Μ est égal à Ν, Η est égal à Κ; et si Μ est plus petit que Ν, Η est plus petit que Κ (déf. 6. 5). Mais Η surpasse Κ; donc Μ surpasse Ν. Mais Θ ne surpasse pas Λ; et Μ, Θ sont des équi-multiples quelconques de Α et de Ε; et Ν, Λ sont d'autres équi-multiples quelconques de Β

266 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ισάκεις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Z. Εἰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ad B majorem rationem habet quam E ad Z. Si igitur prima, etc.

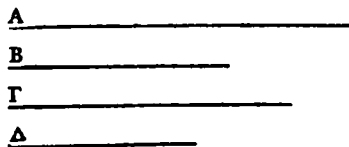
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Εἰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἴσται· καὶ ἴσον· καὶ ἴσασον, ἴσασον

Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον

Si prima ad secundam eamdem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima vero tertia major sit, et secunda tertia major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eamdem habeat rationem quam tertia Γ ad quartam Δ, major



τὸ Δ, μείζον δὲ ἴστω τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μείζον ἴσται.

Επεὶ γὰρ μείζον ἴσται τὸ A τοῦ Γ¹, ἄλλο δὲ ὁ ἴσχυι μέγεθος² τὸ B· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα

autem sit A ipsâ Γ; dico et B ipsâ Δ majorem esse.

Quoniam enim major est A ipsâ Γ, alia autem utcunque magnitudo B; ergo A ad B majorem

et de z; donc A a avec B une raison plus grande que E avec z (déf. 8. 5).
Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième.

Que la première A ait avec la seconde B la même raison que la troisième Γ avec la quatrième Δ, et que A soit plus grand que Γ; je dis que B est plus grand que Δ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur quelconque,

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 267

λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλαττόν ἐστιν· ἑλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· καὶ ἑλασσον ἢ τὸ Α τοῦ Γ, ἑλασσον ἔσται, καὶ³ τὸ Β τοῦ Δ. Ἐάν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γάρ ἰσάκεις πολλαπλασίον τὸ ΑΒ τοῦ

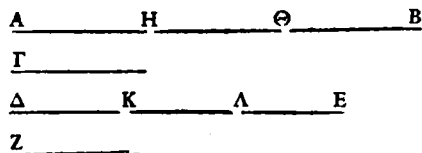
rationem habet quam Γ ad Β. Ut autem Α ad Β, ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Β. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur Δ ipsa Β; quare major est Β ipsa Δ.

Similiter utique ostendemus et si æqualis sit Α ipsi Γ, æqualem fore et Β ipsi Δ; et si minor sit Α ipsa Γ, minorem fore et Β ipsa Δ. Si igitur prima, etc.

PROPOSITIO XV.

Partes inter se comparatæ eamdem habent rationem quam æque multiples.

Sit enim æque multiplex ΑΒ ipsius Γ ac



Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

ΔΕ ipsius Ζ; dico esse ut Γ ad Ζ ita ΑΒ ad ΔΕ.

A a avec B une plus grande raison que Γ avec Β (8. 5). Mais A est à Β comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ une plus grande raison que Γ avec Β (13. 5). Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a la plus grande raison est la plus petite (10. 5); donc Δ est plus petit que Β, et par conséquent Β plus grand que Δ.

Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Β sera égal à Δ, et que si A est plus-petit que Γ, Β sera plus petit que Δ. Donc, etc.

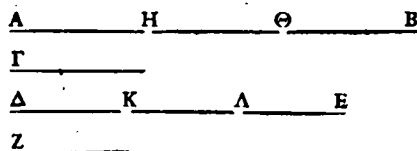
PROPOSITION XV.

Les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équimultiples. Que ΑΒ soit le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ; je dis que Γ est à Ζ comme ΑΒ est à ΔΕ.

268 LE CINQUIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διηγήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἴσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλῆθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Καὶ ἐπει ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἴσται δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλή-

Quoniam enim æque est multiplex ΑΒ ipsius Γ ac ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in ΑΒ magnitudines æquales ipsi Γ, tot sunt et in ΔΕ æquales ipsi Ζ. Dividatur ΑΒ quidem in magnitudines ipsi Γ æquales ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ipsa vero ΔΕ in ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ipsi Ζ æquales; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ multitudini ipsarum ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et quoniam æquales sunt ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ inter se, sunt autem



λοις· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἴσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Τὰ ἄρα μέρη, καὶ τὰ ἑξῆς.

et ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ æquales inter se; est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, et ΘΒ ad ΛΕ; erit igitur et ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΑΒ ad ΔΕ. Æqualis autem ΑΗ quidem ipsi Γ, ipsa vero ΔΚ ipsi Ζ; est igitur ut Γ ad Ζ ita ΑΒ ad ΔΕ. Ergo partes, etc.

Puisque ΑΒ est le même multiple de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans ΑΒ autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a dans ΔΕ de grandeurs égales à Ζ. Divisons ΑΒ en parties égales à Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ; divisons aussi ΔΕ en parties égales à Ζ, et que ces parties soient ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Le nombre des parties ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ sera égal au nombre des parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. Et puisque les parties ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ sont égales entr'elles, et que les parties ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ sont aussi égales entr'elles, ΑΗ est à ΔΚ comme ΗΘ est à ΚΛ, et comme ΘΒ est à ΛΕ (7. 5); donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5); donc ΑΗ est à ΔΚ comme ΑΒ est à ΔΕ. Mais ΑΗ est égal à Γ, et ΔΚ égal à Ζ; donc Γ est à Ζ comme ΑΒ est à ΔΕ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εάν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσται.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἴσθιν', ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

E _____
A _____
B _____
Z _____

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἴσθι πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατὰλληλα? ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales esse, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.

H _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Β æque multiples Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ ut-
cunque æque multiples Η, Θ.

Et quoniam æque est multiplex Ε ipsius Α ac Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, quam earum æque multiples; est igitur ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. Ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ; et ut igitur

PROPOSITION XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Prenons des équi-multiples quelconques Ε, Ζ de Α et de Β, et d'autres équi-multiples quelconques Η, Θ de Γ et de Δ.

Puisque Ε est le même multiple de Α que Ζ l'est de Β, et que les parties comparées entr'elles ont la même raison que leurs équi-multiples (15. 5), la grandeur Α est à Β comme Ε est à Ζ. Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc

270 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὥς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκεις ἵστί πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὥς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Εὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾦ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου

Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Rursus, quoniam Η, Θ ipsarum Γ, Δ æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. Ut autem Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; et ut igitur Ε ad Ζ ita Η ad Θ. Si autem quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem tertiâ major sit, et vero secunda quartâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Si igitur superat Ε ipsam Η,

E _____
A _____
B _____
Z _____

H _____
Γ _____
Δ _____
Θ _____

μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἑλάσσον, ἑλάσσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττον, ἑλάττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἂ ἔτυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ. Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

superat et Ζ ipsam Θ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt ipsæ quidem Ε, Ζ ipsarum Α, Β æque multiples, ipsæ vero Η, Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcumque æque multiples; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Si igitur quatuor, etc.

Γ est à Δ comme Ε est à Ζ (11. 5). De plus, puisque Η, Θ sont des équi-multiples de Γ et de Δ; Γ est à Δ comme Η est à Θ. Mais Γ est à Δ comme Ε est à Ζ; donc Ε est à Ζ comme Η est à Θ (11. 5). Mais si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde est égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde est plus petite que la quatrième (14. 5). Donc si Ε surpasse Η, Ζ surpasse Θ; si Ε est égal à Η, Ζ est égal à Θ; et si Ε est plus petit que Η, Ζ est plus petit que Θ. Mais Ε, Ζ sont des équi-multiples quelconques de Α et de Β, et Η, Θ sont d'autres équi-multiples quelconques de Γ et de Δ; donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

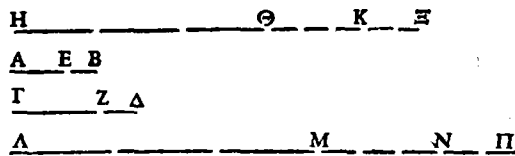
PROPOSITIO XVII.

Εὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ διαι-
ρεθέντα ἀνάλογον ἴσται.

Εστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ AB,
BE, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ
ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνά-
λογον ἴσται, ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΓΖ
πρὸς τὸ ΖΔ.

Si compositæ magnitudines proportionales
sint, et divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales
AB, BE, ΓΔ, ΔΖ, ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔΖ;
dico et divisas proportionales fore, ut AE ad
EB ita ΓΖ ad ΖΔ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AE, EB, ΓΖ, ΖΔ ἰσάνεις
πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ
EB, ΖΔ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια,
τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάνεις ἰστί πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ
τοῦ AE καὶ τὸ ΘΚ τοῦ EB· ἰσάνεις ἄρα ἰστί
πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ AE καὶ τὸ ΗΚ τοῦ AB.

Sumentur enim ipsarum quidem AE, EB, ΓΖ,
ΖΔ æque multiples ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ip-
sarum vero EB, ΖΔ aliæ utcumque æque multi-
plices ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque est multiplex ΗΘ ip-
sius AE ac ΘΚ ipsius EB; æque igitur est
multiplex ΗΘ ipsius AE ac ΗΚ ipsius AB.

PROPOSITION XVII.

Si des grandeurs étant composées sont proportionnelles, ces grandeurs étant
divisées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs composées AB, BE, ΓΔ, ΔΖ soient proportionnelles, c'est-
à-dire que AB soit à BE comme ΓΔ est à ΔΖ; je dis que ces grandeurs étant
divisées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que AE sera à EB comme
ΓΖ est à ΖΔ.

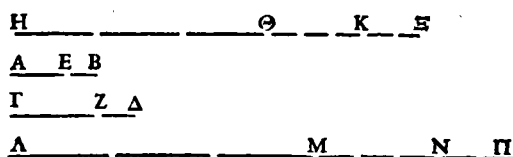
Prenons des équi-multiples quelconques ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ des grandeurs AE,
EB, ΓΖ, ΖΔ, et d'autres équi-multiples quelconques ΚΞ, ΝΠ de EB et de ΖΔ.

Puisque ΗΘ est le même multiple de AE que ΘΚ l'est de EB, ΗΘ est le même
multiple de AE que ΗΚ l'est de AB (1. 5). Mais ΗΘ est le même multiple de

272 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ισάκεις δὲ ἐστὶ¹ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ². Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκεις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΑΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ

Æque autem est multiplex ΗΘ ipsius ΑΕ ac ΑΜ ipsius ΓΖ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΜ ipsius ΓΖ. Rursus, quoniam æque est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; æque igitur est multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΑΝ ipsius ΓΔ. Æque autem erat multiplex ΑΜ ipsius ΓΖ ac ΗΚ ipsius ΑΒ; æque igitur est multiplex ΗΚ ipsius ΑΒ ac ΑΝ ipsius ΓΔ; ipsæ ΗΚ, ΑΝ igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ æque sunt multiplices. Rursus, quoniam æque



πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθέν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΑΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἂ ἔτυχεν³ ἰσάκεις πολλαπλά-

est multiplex ΘΚ ipsius ΕΒ ac ΜΝ ipsius ΖΔ; est autem et ΚΞ ipsius ΕΒ æque multiplex ac ΝΠ ipsius ΖΔ; et composita ΘΞ ipsius ΕΒ æque est multiplex ac ΜΠ ipsius ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, et sumptæ sunt ipsarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΑΝ, ipsarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ, ΜΠ;

ΑΕ que ΑΜ l'est de ΓΖ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΜ l'est de ΓΖ. De plus, puisque ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΜΝ l'est de ΖΔ, ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΑΝ l'est de ΓΔ. Mais ΑΜ est le même multiple de ΓΖ que ΗΚ l'est de ΑΒ; donc ΗΚ est le même multiple de ΑΒ que ΑΝ l'est de ΓΔ; donc ΗΚ, ΑΝ sont des équimultiples de ΑΒ et de ΓΔ. De plus, puisque ΘΚ est le même multiple de ΕΒ que ΜΝ l'est de ΖΔ, et que ΚΞ est le même multiple de ΕΒ que ΝΠ l'est de ΖΔ, la grandeur composée ΘΞ est le même multiple de ΕΒ que ΜΠ l'est de ΖΔ (2. 5). Et puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΖ; que ΗΚ, ΑΝ sont des équimultiples quelconques de ΑΒ et de ΓΔ, et que ΘΞ et ΜΠ sont d'autres équimultiples quelconques de ΕΒ et de ΖΔ; si ΗΚ surpasse ΘΞ, ΑΝ sur-

σια τὰ $\Theta\Xi$, $ΜΠ$ · εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ $ΗΚ$ τοῦ $\Theta\Xi$, ὑπερέχει καὶ τὸ $ΑΝ$ τοῦ $ΜΠ$ · καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερχέτω δὴ τὸ $ΗΚ$ τοῦ $\Theta\Xi$, καὶ κοινοῦ ἀφαιρέθεντος τοῦ $\ThetaΚ$, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ $ΗΘ$ τοῦ $ΚΞ$. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ $ΗΚ$ τοῦ $\Theta\Xi$, ὑπερέχει καὶ τὸ $ΑΝ$ τοῦ $ΜΠ$ · ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ $ΑΝ$ τοῦ $ΜΠ$, καὶ κοινοῦ ἀφαιρέθεντος τοῦ $ΜΝ$ ὑπερέχει καὶ τὸ $ΑΜ$ τοῦ $ΝΠ$ · ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ $ΗΘ$ τοῦ $ΚΞ$, ὑπερέχει καὶ τὸ $ΑΜ$ τοῦ $ΝΠ$. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ $ΗΘ$ τῷ $ΚΞ$, ἴσον ἔσται καὶ τὸ $ΑΜ$ τῷ $ΝΠ$ · καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν $ΗΘ$, $ΑΜ$ τῶν $ΑΕ$, $ΓΖ$ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ $ΚΞ$, $ΝΠ$ τῶν $ΕΒ$, $ΖΔ$ ἄλλα ἂ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΑΕ$ πρὸς τὸ $ΕΒ$ οὕτως τὸ $ΓΖ$ πρὸς τὸ $ΖΔ$. Εὰν ἄρα συγκείμενα, καὶ τὰ ἐξῆς.

si igitur superat $ΗΚ$ ipsam $\Theta\Xi$, superat et $ΑΝ$ ipsam $ΜΠ$; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Superet autem $ΗΚ$ ipsam $\Theta\Xi$, et communi ablatâ $\ThetaΚ$, superat igitur et $ΗΘ$ ipsam $ΚΞ$. Sed si superat $ΗΚ$ ipsam $\Theta\Xi$, superat et $ΑΝ$ ipsam $ΜΠ$; superat igitur et $ΑΝ$ ipsam $ΜΠ$; et communi $ΜΝ$ ablatâ, superat et $ΑΜ$ ipsam $ΝΠ$; quare si superat $ΗΘ$ ipsam $ΚΞ$, superat et $ΑΜ$ ipsam $ΝΠ$. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit $ΗΘ$ ipsi $ΚΞ$, æqualem fore et $ΑΜ$ ipsi $ΝΠ$; et si minor, minorem. Et sunt $ΗΘ$, $ΑΜ$ quidem ipsarum $ΑΕ$, $ΓΖ$ æque multiples, ipsæ vero $ΚΞ$, $ΝΠ$ ipsarum $ΕΒ$, $ΖΔ$ aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut $ΑΕ$ ad $ΕΒ$ ita $ΓΖ$ ad $ΖΔ$. Si igitur compositæ, etc.

passé $ΜΠ$; si $ΗΚ$ est égal à $\Theta\Xi$, $ΑΝ$ est égal à $ΜΠ$, et si $ΗΚ$ est plus petit que $\Theta\Xi$, $ΑΝ$ est plus petit que $ΜΠ$ (déf. 6. 5). Que $ΗΚ$ surpassé $\Theta\Xi$; ayant retranché la partie commune $\ThetaΚ$, $ΗΘ$ surpassera encore $ΚΞ$. Mais si $ΗΚ$ surpassé $\Theta\Xi$, $ΑΝ$ surpassera $ΜΠ$. Donc $ΑΝ$ surpassé $ΜΠ$; retranchons la partie commune $ΜΝ$; la grandeur $ΑΜ$ surpassera $ΝΠ$. Donc, si $ΗΘ$ surpassé $ΚΞ$, $ΑΜ$ surpassera $ΝΠ$. Nous démontrerons semblablement que si $ΗΘ$ est égal à $ΚΞ$, $ΑΜ$ sera égal à $ΝΠ$, et que si $ΗΘ$ est plus petit que $ΚΞ$, $ΑΜ$ sera plus petit que $ΝΠ$. Mais $ΗΘ$, $ΑΜ$ sont des équimultiples quelconques de $ΑΕ$ et de $ΓΖ$, et $ΚΞ$ et $ΝΠ$ d'autres équimultiples quelconques de $ΕΒ$ et de $ΖΔ$; donc $ΑΕ$ est à $ΕΒ$ comme $ΓΖ$ est à $ΖΔ$ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

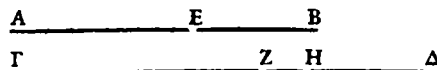
PROPOSITIO XVIII.

Εὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, καὶ συντε-
θίντα ἀνάλογον ἔσται.

Εστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ,
ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ
πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον
ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς
τὸ ΖΔ.

Si divisæ magnitudines proportionales sint,
et compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales ΑΕ,
ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ;
dico et compositas proportionales fore, ut ΑΒ
ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ.



Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως
τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ
οὕτως τὸ ΓΔ, ἢτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ
πρὸς μείζον.

Εστω πρῶτον πρὸς ἑλασσον τὸ ΔΗ. Καὶ
ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ
πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν·
ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα

Si enim non est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ;
erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ, vel ad minorem ipsâ
ΔΖ, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem ΔΗ. Et quoniam est
ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΗ, compositis magni-
tudinibus proportionales sunt; quare et divisæ
proportionales erunt; est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ

PROPOSITION XVIII.

Si des grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles.

Que les grandeurs ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, étant divisées, soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΕ soit à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ; je dis que ces grandeurs étant composées seront encore proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ.

Car, si ΑΒ n'est pas à ΒΕ comme ΓΔ est à ΖΔ, ΑΒ sera à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΔΖ ou à une grandeur plus grande.

Que ΑΒ soit premièrement à ΒΕ comme ΓΔ est à une grandeur plus petite que ΖΔ, savoir à ΔΗ. Puisque ΑΒ est à ΒΕ comme ΓΔ est à ΔΗ, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles; donc ces grandeurs étant divisées seront

ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μείζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλαττον τοῦ ΖΔ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα. Ἐὰν ἄρα διηρημένα, καὶ πᾶ ἐξῆς.

ita ΓH ad $H\Delta$. Ponitur autem et ut AE ad EB ita ΓZ ad $Z\Delta$; et ut igitur ΓH ad $H\Delta$ ita ΓZ ad $Z\Delta$. Major autem prima ΓH tertiâ ΓZ ; major igitur et secunda $H\Delta$ quartâ $Z\Delta$. Sed, et minor, quod est impossibile; non igitur est ut AB ad BE ita $\Gamma\Delta$ ad minorem ipsâ $Z\Delta$. Similiter utique ostendemus neque ad majorem; ad ipsam igitur. Si igitur divisæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

PROPOSITIO XIX.

Ἐάν ᾗ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἕσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Si sit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam, et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Ἐστὼ γάρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως

Sit enim ut tota AB ad totam $\Gamma\Delta$ ita ablata

encore proportionnelles (17. 5). Donc AE est à EB comme ΓH est à $H\Delta$. Mais on a supposé que AE est à EB comme ΓZ est à $Z\Delta$; donc ΓH est à $H\Delta$ comme ΓZ est à $Z\Delta$ (11. 5). Mais la première ΓH est plus grande que la troisième ΓZ ; donc la seconde $H\Delta$ est plus grande que la quatrième $Z\Delta$ (14. 5). Mais elle est plus petite, ce qui est impossible; donc AB n'est pas à BE comme $\Gamma\Delta$ est à une grandeur plus petite que $Z\Delta$. Nous démontrerons semblablement que AB n'est pas à BE comme $\Gamma\Delta$ est à une grandeur plus grande que $Z\Delta$; donc AB est à BE , comme $\Gamma\Delta$ est à $Z\Delta$. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si une grandeur entière est à une autre grandeur entière comme la grandeur retranchée de la première est à la grandeur retranchée de la seconde, la grandeur restante sera à la grandeur restante comme la première grandeur entière est à la seconde grandeur entière.

Que la grandeur entière AB soit à la grandeur entière $\Gamma\Delta$ comme la grandeur

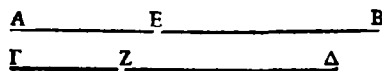
276 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ ὡς τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα

ΑΕ ad ablatam ΓΖ; dico et reliquam ΕΒ ad reliquam ΖΔ fore ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; et alterne ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΓ ad ΓΖ. Et quoniam compositæ magnitudines proportionales sunt, et divisæ proportionales



ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα² τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἐναλλάξ³, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν ΔΖ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Ἐάν ἄρα ᾗ, καὶ τὰ ἐξῆς.

erunt; ut igitur ΒΕ ad ΕΑ ita ΔΖ ad ΖΓ; et alterne, ut ΒΕ ad ΔΖ ita ΕΑ ad ΖΓ. Ut autem ΑΕ ad ΓΖ ita posita est tota ΑΒ ad totam ΓΔ; et reliqua igitur ΕΒ ad reliquam ΔΖ erit ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ. Si igitur sit, etc.

retranchée ΑΕ est à la grandeur retranchée ΓΖ; je dis que la grandeur restante ΕΒ sera à la grandeur restante ΖΔ comme la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ.

Car puisque la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ, par permutation, ΒΑ est à ΑΕ comme ΔΓ est à ΓΖ (16. 5). Et puisque les grandeurs composées sont proportionnelles, les grandeurs divisées seront encore proportionnelles (17. 5); donc ΒΕ est à ΕΑ comme ΔΖ est à ΖΓ; donc, par permutation, ΒΕ est à ΔΖ comme ΕΑ est à ΖΓ. Mais, par supposition, ΑΕ est à ΓΖ comme la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ; donc la grandeur restante ΕΒ sera à la grandeur restante ΔΖ comme la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ (11. 5). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Εδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι⁴. Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέφαντι ἀνάλογον ἴσται. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

COROLLARIUM.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et alterne ut AB ad AE ita ΓΔ ad ΓΖ; compositæ igitur magnitudines proportionales sunt. Ostensum autem est ut AB ad EB ita ΔΓ ad ΖΔ, et est per conversionem. Ex hoc utique manifestum est si compositæ magnitudines proportionales sint, et per conversionem proportionales fore. Quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ.'

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ' ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διῖσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτου μείζον ἴσται· καὶ ἐὰν² ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν³ ἑλάσσον, ἑλάσσον.

PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione, ex æquo autem prima tertiâ major sit; et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

COROLLAIRE.

Puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, par permutation (16. 5), AB est à AE comme ΓΔ est à ΓΖ; donc ces grandeurs étant composées sont proportionnelles. Mais on a démontré que AB est à EB comme ΔΓ est à ΖΔ; ce qui est par conversion. De là il est évident que si des grandeurs composées sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par conversion. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si l'on a trois grandeurs et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs, étant prises deux à deux, et en même raison; si, par égalité, la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

278 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλὰ αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, διῆσου δὲ μείζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον· καὶ ἑλαττον· ἑλαττον.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eadem ratione, ut quidem Α ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Β ad Γ ita Ε ad Ζ, ex æquo autem major sit Α ipsâ Γ; dico et Δ ipsâ Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

<u>Α</u>	<u>Δ</u>
<u>Β</u>	<u>Ε</u>
<u>Γ</u>	<u>Ζ</u>

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τί ἐστὶ τὸ Β, τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ ἑλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως⁵ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον

Quoniam enim major est Α ipsâ Γ, alia autem quædam Β, et major vero ad eandem majorem rationem habet quam minor; ipsa igitur Α ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut vero Γ ad Β per inversionem ita Ζ ad Ε; et Δ igitur ad Ε majorem habet rationem quam Ζ ad Ε. Ipsarum autem ad eandem rationem habentium, majorem rationem habens major est; major

Soient Α, Β, Γ trois grandeurs, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; que, par égalité, Α soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera aussi plus grand que Ζ; que si Α est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque la grandeur Α est plus grande que la grandeur Γ, et que Β est une autre grandeur quelconque, la plus grande grandeur aura avec celle-ci une plus grande raison que la plus petite (8. 5); donc Α a avec Β une raison plus grande que Γ avec Β. Mais Α est à Β comme Δ est à Ε, et, par inversion, Γ est à Β comme Ζ est à Ε; donc Δ a avec Ε une plus grande raison que Ζ avec Ε. Mais, parmi les grandeurs qui ont une raison avec une même grandeur, celle-là est la plus grande qui a une plus grande raison (10. 5); donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si Α est égal à Γ,

LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 279

μῖζον ἴσται· μῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. Εὰν ἄρα ἢ, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur est Δ ipsâ Z. Similiter ostendemus, et si A æqualis sit ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Z; et si minor, minorem. Si igitur sint, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν ἢ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, διῖσται δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μῖζον ἢ καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἑκτου μῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Εστω τρία μεγέθη¹ τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμ-

PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, et aliae ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ex æquo autem prima tertiâ major sit, et quarta sextâ major erit; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliae ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ et

A _____
B _____
Γ _____

Δ _____
Ε _____
Ζ _____

βανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὥς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ

in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut vero Β ad Γ ita Δ ad Ε, ex æquo autem

Δ sera égal à Ζ, et que si Α est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison, si leur proportion est troublée, et si par égalité la première est plus grande que la troisième, la quatrième sera plus grande que la sixième; et si la première est égale à la troisième, la quatrième sera égale à la sixième; et si la première est plus petite que la troisième, la quatrième sera plus petite que la sixième.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales aux premières, ces grandeurs étant prises deux à deux, et en même raison; que leur raison soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ,

280 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δίσσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μείζον ἔσται· καὶ ἴσον, καὶ ἴσον· καὶ ἑλάττω, ἑλάττω.

Επὶ γὰρ μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Αλλ' ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὥς δὲ τὸ Γ πρὸς

A ipsa Γ major sit; dico et Δ ipsa Ζ majorem fore; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A ipsa Γ, alia vero quædam Β; ergo A ad Β majorem rationem habet quam Γ ad Β. Sed ut A quidem ad Β ita E ad Ζ, ut vero Γ ad Β per inversionem ita

A	Δ
B	E
Γ	Z

τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἑλασσόν ἐστιν· ἑλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μείζον ἔστι² ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ομοίως δὲ δειξόμεν ὅτι καὶ ἴσον³ ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἑλάττω, ἑλάττω. Εὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἐξῆς.

E ad Δ; et E igitur ad Ζ majorem rationem habet quam E ad Δ. Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est; minor igitur est Ζ ipsa Δ; major est igitur Δ ipsa Ζ. Similiter utique ostendemus et si æqualis sit A ipsi Γ, æqualem fore et Δ ipsi Ζ; et si minor, minorem. Si igitur tres, etc.

que B soit à Γ comme Δ est à Ε, et que par égalité A soit plus grand que Γ; je dis que Δ sera plus grand que Ζ; que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ.

Puisque A est plus grand que Γ, et que B est une autre grandeur, A aura avec B une plus grande raison que Γ avec B (8. 5). Mais A est à B comme E est à Ζ, et par inversion, Γ est à B comme E est à Δ; donc E a avec Ζ une plus grande raison que E avec Δ. Mais la grandeur avec laquelle une même grandeur a une raison plus grande est la plus petite (10, 5); donc Ζ est plus petit que Δ; donc Δ est plus grand que Ζ. Nous démontrerons semblablement que si A est égal à Γ, Δ sera égal à Ζ, et que si A est plus petit que Γ, Δ sera plus petit que Ζ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εάν ἡ ὅποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Εστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Si sint quotcunque magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ et in eadem ratione; et ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint quotcunque magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine Δ, Ε, Ζ, binæ sumptæ in eadem ratione, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo in eadem ratione fore, ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

A	H
B	K
Γ	M
Δ	Θ
E	Λ
Z	N

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sumantur enim ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ utcunque æque multiples Κ, Λ, et insuper ipsarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiples Μ, Ν.

PROPOSITION XXII.

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières, et si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, elles auront la même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de grandeurs que l'on voudra, et Δ, Ε, Ζ d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que ces grandeurs auront la même raison par égalité, c'est-à-dire que Α sera à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ; prenons d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε, et enfin d'autres équimultiples quelconques Μ, Ν de Γ et de Ζ.

282 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἵληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἄετι-
χιν ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς
τὸ Η πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ οὕτως τὸ Λ

Et quoniam est ut Α ad Β ita Δ ad Ε, et sumptæ sunt ipsarum quidem Α, Δ æque multiples Η, Θ, ipsarum vero Β, Ε aliæ ut-
cunque æque multiples Κ, Λ; est igitur ut Η ad Κ ita Θ ad Λ. Propter eadem utique et ut Κ ad Μ ita Λ ad Ν. Et quoniam tres magnitudi-

A	H
B	K
Γ	M
Δ	Θ
E	Λ
Z	N

πρὸς τὸ Ν. Επεὶ οὖν τρία μεγέθη ἰσὶ τὰ Η, Κ, Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πληθὺς Θ, Λ, Ν σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ διῖσου ἄρα εἰ ὑπερίχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερίχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἴσιν τὰ μὲν Η, Θ τῶν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἄετι-
τυχιν ἰσάκεις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα ἧ ὁποσαῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

nes sunt Η, Κ, Μ, et aliæ ipsis æquales mul-
titudine Θ, Λ, Ν binæ sumptæ et in eadem ra-
tione; ex æquo igitur si superat Η ipsam Μ, superat et Θ ipsam Ν; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt Η, Θ quidem ipsarum Α, Δ æque multiples, ipsæ vero Μ, Ν ipsarum Γ, Ζ aliæ utcunque æque multiples; est igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. Si igitur quot-
cunque, etc.

Puisque Α est à Β comme Δ est à Ε, que l'on a pris des équimultiples quelconques Η, Θ de Α et de Δ, et d'autres équimultiples quelconques Κ, Λ de Β et de Ε; Η est à Κ comme Θ est à Λ (4. 5). Par la même raison, Κ est à Μ comme Λ est à Ν. Donc, puisque l'on a trois grandeurs Η, Κ, Μ, et d'autres grandeurs Θ, Λ, Ν égales en nombre aux premières, et que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison; si, par égalité, Η surpasse Μ, Θ surpasse Ν; si Η est égal à Μ, Θ est égal à Ν, et si Η est plus petit que Μ, Θ est plus petit que Ν (20. 5). Mais Η, Θ sont des équimultiples quelconques de Α et de Δ, et Μ, Ν d'autres équimultiples quelconques de Γ et de Ζ; donc Α est à Γ comme Δ est à Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσται.

Εἰσὼ τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

1

αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὥς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὥς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἴσται ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Β, Δ ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε, Ζ ἄλλα ἂν τυχεν ἰσάνεις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

PROPOSITIO XXIII.

Si sint tres magnitudines, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem ratione, sit autem perturbata earum proportio; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres magnitudines Α, Β, Γ, et aliæ ipsis æquales multitudine, binæ sumptæ in eâdem

H _____
Θ _____
Λ _____
Κ _____
Μ _____
Ν _____

ratione Δ, Ε, Ζ, sit autem perturbata earum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

Sumantur ipsarum quidem Α, Β, Δ æque multiples Η, Θ, Κ, ipsarum vero Γ, Ε, Ζ aliæ utcunque æque multiples Λ, Μ, Ν.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on a trois grandeurs, et d'autres grandeurs égales en nombre aux premières; si ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et si leur proportion est troublée, ces grandeurs auront la même raison par égalité.

Soient les trois grandeurs Α, Β, Γ, et d'autres grandeurs Δ, Ε, Ζ égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, aient la même raison, et que leur proportion soit troublée, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Prenons des équimultiples quelconques Η, Θ, Κ des grandeurs Α, Β, Δ, et d'autres équimultiples quelconques Λ, Μ, Ν des grandeurs Γ, Ε, Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H , Θ τῶν A , B , τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλάσις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N · καὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z · καὶ ὡς ἄρα τὸ H πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E , καὶ ἐναλλάξ

A _____	H _____
B _____	Θ _____
Γ _____	Λ _____
Δ _____	K _____
E _____	M _____
Z _____	N _____

ὡς τὸ B πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ E . Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ , K τῶν B , Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλάσις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ B πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ K · ἀλλ' ὡς τὸ B πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ E · καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ K οὕτως τὰ Γ πρὸς τὸ E . Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ , M τῶν Γ , E ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ E οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ M .

Et quoniam æque sunt multiples H , Θ ipsarum A , B , partes vero eandem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut A ad B ita H ad Θ . Propter eadem utique ut E ad Z ita M ad N ; et est ut A ad B ita E ad Z ; et ut igitur H ad Θ ita M ad N . Et quoniam est ut B ad Γ ita Δ ad E , et alterne ut B ad Δ ita Γ ad E . Et quoniam Θ , K ipsarum B , Δ æque sunt multiples; partes autem eam-

dem habent rationem quam æque multiples; est igitur ut B ad Δ ita Θ ad K ; sed ut B ad Δ ita Γ ad E ; et ut igitur Θ ad K ita Γ ad E . Rursus quoniam Λ , M ipsarum Γ , E æque sunt multiples; est igitur ut Γ ad E ita Λ ad M . Sed ut Γ ad E ita Θ ad K ; et ut igitur Θ ad K ita Λ ad M , et alterne ut Θ ad Λ ita K ad M . Ostensum autem est et ut H ad Θ ita M ad N ; et quoniam tres magnitudines sunt

Puisque H , Θ sont des équimultiples de A et de B , et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples (15. 5); A est à B comme H est à Θ . Par la même raison, E est à Z comme M est à N ; mais A est à B comme E est à Z ; donc H est à Θ comme M est à N (11. 5). Et puisque B est à Γ comme Δ est à E , B est à Δ par permutation, comme Γ est à E . Et puisque Θ , K sont des équimultiples de B et de Δ , et que les parties ont la même raison que leurs équimultiples, B est à Δ comme Θ est à K . Mais B est à Δ comme Γ est à E ; donc Θ est à K comme Γ est à E . De plus, puisque Λ , M sont des équimultiples de Γ et de E , Γ est à E comme Λ est à M . Mais Γ est à E comme Θ est à K ; donc Θ est à K comme Λ est à M , et par permutation, Θ est à Λ

Αλλ' ὥς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὥς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὥς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. Εδείχθη δὴ καὶ ὥς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρεῖς μεγέθη ἐστὶ, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἐστὶν αὐτῶν τιταραγμένη ἢ ἀνελογία· διότου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Μ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἐστὶν ἄρα ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. Εὰν ἄρα ἢ τρία, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὴν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθεὶν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

comme K est à M . Mais on a démontré que H est à Θ comme M est à N ; donc, puisque l'on a trois grandeurs H , Θ , Λ , et d'autres grandeurs K , M , N égales en nombre aux premières; que ces grandeurs, prises deux à deux, ont la même raison, et que leur proportion est troublée; si, par égalité, H surpasse Λ , K surpasse N ; si H est égal à Λ , K est égal à N ; et si H est plus petit que Λ , K est plus petit que N (21. 5). Mais H , K sont des équimultiples de A et de Δ , et Λ , N des équimultiples de Γ et de Z ; donc A est à Γ comme Δ est à Z (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la cinquième a avec la seconde la même raison que la sixième avec la quatrième, la somme de la première et de la cinquième aura la même raison avec la seconde que la somme de la troisième et de la sixième avec la quatrième.

H , Θ , Λ , et aliæ ipsis æquales multitudine, ipsæ K , M , N , binæ sumptæ in eadem ratione, et est earum perturbata proportio; ex æquo igitur si superat H ipsam Λ , superat et K ipsam N ; et si æqualis, æqualis; et si minor, minor. Et sunt H , K quidem ipsarum A , Δ æque multiples, ipsæ vero Λ , N ipsarum Γ , Z ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z . Si igitur sint tres, etc.

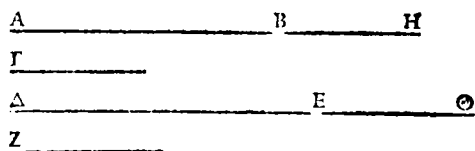
PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam; et simul sumptæ prima et quinta ad secundam eandem rationem habebunt quam tertia et sexta ad quartam.

286 LE CINQUIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχεται λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἔχεται δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέν³ πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.

Prima quidem enim AB ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔΕ ad quartam Ζ; habeat vero et quinta BH ad secundam Γ eandem rationem quam sexta ΕΘ ad quartam Ζ; dico et simul sumptas primam et quintam AH ad secundam Γ eandem habituras esse rationem quam tertia et sexta ΔΘ ad quartam Ζ.



Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Επεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ BH οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AH πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ. Ἐὰν ἄρα πρῶτον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim est ut BH ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; per inversionem igitur ut Γ ad BH ita Ζ ad ΕΘ. Et quoniam est ut AB ad Γ ita ΔΕ ad Ζ, ut autem Γ ad BH ita Ζ ad ΕΘ; ex æquo igitur est ut AB ad BH ita ΔΕ ad ΕΘ. Et quoniam divisæ magnitudines proportionales sunt, et compositæ proportionales erunt; ut igitur AH ad BH ita ΔΘ ad ΕΘ. Est autem et ut BH ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; ex æquo igitur est ut AH ad Γ ita ΔΘ ad Ζ. Si igitur prima, etc.

Que la première AB ait avec la seconde Γ la même raison que la troisième ΔΕ a avec la quatrième Ζ, et que la cinquième BH ait avec la seconde Γ la même raison que la sixième ΕΘ avec la quatrième Ζ; je dis que la somme de la première et de la cinquième AH aura avec la seconde Γ la même raison que la somme de la troisième et de la sixième ΔΘ a avec la quatrième Ζ.

Puisque BH est à Γ comme ΕΘ est à Ζ, par inversion, Γ est à BH comme Ζ est à ΕΘ (cor. 4. 5). Mais AB est à Γ comme ΔΕ est à Ζ, et Γ est à BH comme Ζ est à ΕΘ; donc, par égalité, AB est à BH comme ΔΕ est à ΕΘ (22. 5); donc, puisque ces grandeurs étant divisées sont proportionnelles, ces grandeurs étant composées seront proportionnelles (18. 5); donc AH est à BH comme ΔΘ est à ΕΘ. Mais BH est à Γ comme ΕΘ est à Ζ; donc, par égalité, AH est à Γ comme ΔΘ est à Ζ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

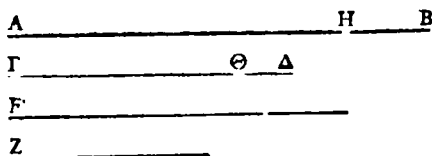
PROPOSITIO XXV.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον ἑξ ἑκτῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Εστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴστω δὲ μέγιστον μὲν² αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστι.

Si quatuor magnitudines proportionales sint, maxima et minima duabus reliquis majores sunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ut ΑΒ ad ΓΔ ita Ε ad Ζ; sit autem maxima quidem ipsarum ΑΒ, minima vero Ζ; dico ΑΒ, Ζ ipsis ΓΔ, Ε majores esse.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Επὶ οὖν³ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς

Ponatur enim ipsi quidem Ε æqualis ΑΗ, ipsi vero Ζ æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut ΑΒ ad ΓΔ ita Ε ad Ζ, æqualis autem ipsa quidem Ε ipsi ΑΗ, ipsa vero Ζ ipsi ΓΘ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΗ ad ΓΘ. Et quoniam est ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ ita ablata ΑΗ ad ablatam ΓΘ; et reliqua

PROPOSITION XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres.

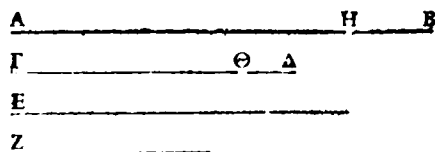
Que les quatre grandeurs ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ soient proportionnelles, c'est-à-dire que ΑΒ soit à ΓΔ comme Ε est à Ζ; que ΑΒ soit la plus grande, et Ζ la plus petite; je dis que les grandeurs ΑΒ, Ζ sont plus grandes que les grandeurs ΓΔ, Ε.

Faisons ΑΗ égal à Ε, et ΓΘ égal à Ζ.

Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme Ε est à Ζ, et que ΑΗ est égal à Ε, et ΓΘ égal à Ζ, ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΗ est à ΓΘ, et puisque la grandeur entière ΑΒ est à la grandeur entière ΓΔ comme la grandeur retranchée ΑΗ est à la grandeur

ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἔρα τὸ HB πρὸς
λοιπὸν τὸ ΘΔ ἴσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον
τὸ ΓΔ. Μείζον δὲ τὸ AB τοῦ ΓΔ· μείζον ἄρα καὶ
τὸ HB τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH
τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· τὰ ἄρα AH, Z ἴσα ἐστὶ
τοῖς ΓΘ, E. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίστοις ἴσα προστεθῇ,

igitur HB ad reliquam ΘΔ erit ut tota AB ad
totam ΓΔ. Major autem AB ipsā ΓΔ; ma-
jor igitur et HB ipsā ΘΔ. Et quoniam æqualis
est AH quidem ipsi E, ΓΘ vero ipsi Z; ipsæ
igitur AH, Z æquales sunt ipsis ΓΘ, E. Et quo-
niam si inæqualibus æqualia addantur, tota



τὰ ὅλα ἀνίστα ἐστίν· ἐὰν ἄρα τῶν HB, ΘΔ ἀνί-
σων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ HB, τῷ μὲν HB
προσθεθῇ τὰ AH, Z, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ
ΓΘ, E, συνάγεται τὰ AB, Z μείζονα τῶν ΓΔ,
E. Εἰ ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

inæqualia sunt; si igitur ipsis HB, ΘΔ inæqua-
libus existentibus, et majore ipsā HB, ipsi
quidem HB addantur AH, Z, ipsi vero ΘΔ
addantur ΓΘ, E, fient AB, Z majores ipsis
ΓΔ, E. Si igitur quatuor, etc.

retranchée ΓΘ, la grandeur restante HB sera à la grandeur restante ΘΔ comme la grandeur entière AB est à la grandeur entière ΓΔ (19. 5). Mais AB est plus grand que ΓΔ; donc HB est plus grand que ΘΔ. Mais AH est égal à E, et ΓΘ à Z; donc les grandeurs AH, Z sont égales aux grandeurs ΓΘ, E. Mais si on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales, les grandeurs entières sont inégales; donc, puisque les grandeurs HB, ΘΔ sont inégales, et que HB est la plus grande, si l'on ajoute à HB les grandeurs AH, Z, et à ΘΔ les grandeurs ΓΘ, E, les grandeurs AB, Z seront plus grandes que les grandeurs ΓΔ, E. Donc, etc.

E U C L I D I S,

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E X T U S.

ΟΡΟΙ.

α. Ομοία σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχῃ κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β. Ἀντιπαραπρόθετα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῃ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἐπόμενοι λόγων ᾗσιν.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ et angulos æquales habent singulos singulis, et circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocarum autem figuræ sunt, quando in utràque figurarum antecedentesque et consequentes rationum sunt.

LIVRE SIXIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

γ'. Ακρον καὶ μίσον λόγον εὐθείᾳ τιτμηῖσθαι
 λήγεται, ὅταν ἢ ὡς ἡ² ὅλη πρὸς τὸ μείζον
 τμήμα οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὑψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς
 κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη³.

3. Secundum extremam et mediam ratio-
 nem recta secta esse dicitur, quando est ut
 tota ad majus segmentum ita majus ad minus.

4. Altitudo est omnis figuræ a vertice ad
 basim perpendicularis ducta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

PROPOSITIO I.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ
 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς
 αἱ βάσεις.

Ἐστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλλη-
 λόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
 ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγο-
 μένην¹. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν
 ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ
 τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ
 ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη,
 ἐπὶ τὰ Θ, Α σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ

Triangula et parallelogramma, sub eadem
 altitudine existentia, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, paralle-
 logramma vero ΕΓ, ΓΖ, sub eadem altitudine
 existentia, ipsâ ab Α ad ΒΔ perpendiculari
 ductâ; dico esse ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita
 ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum, et ΕΓ
 parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum.

Producatur enim ΒΔ ex utràque parte ad
 Θ, Α puncta, et ponantur ipsi quidem ΒΓ basi

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la
 droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est
 au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur
 la base.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux
 comme leurs bases.

Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même
 hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la
 base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme
 le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

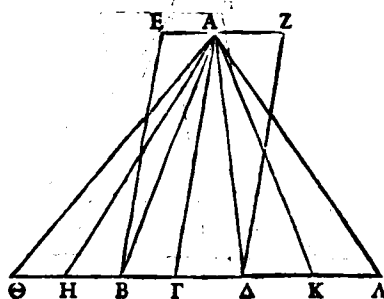
Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Α; prenons tant

βάσει ἴσαι ὁσαυδήποτοῦν² αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ
ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαυδήποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ
ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλή-
λαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρί-
γωνα ἀλλήλοις· ὁσαυτάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ
βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ
τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ

æquales quotcunque ΒΗ, ΗΘ, ipsi vero ΓΔ
basi æquales quotcunque ΔΚ, ΚΛ, et jungan-
tur ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Et quoniam æquales sunt ipsæ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ
inter se, æquales sunt et ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ trian-
gula inter se; quam multiplex igitur est ΘΓ basis
ipsius ΒΓ basis, tam multiplex est et ΑΘΓ trian-
gulum ipsius ΑΒΓ trianguli. Propter eadem uti-



αὐτὰ δὲ ὁσαυτάσιον ἐστὶν ἡ ΓΛ βάσις τῆς ΓΔ
βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρί-
γωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ
βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον
τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς
ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ
ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Τεσσα-
ρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ,

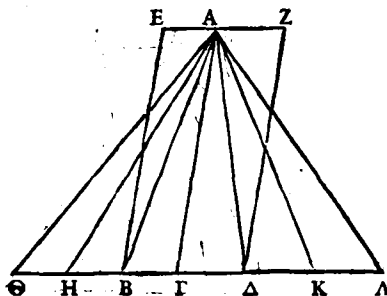
que quam multiplex est ΓΛ basis ipsius ΓΔ
basis, tam multiplex est et ΑΛΓ triangulum
ipsius ΑΓΔ trianguli; et si æqualis est ΘΓ basis
ipsi ΓΛ basi, æquale est et ΑΘΓ triangulum
ipsi ΑΛΓ triangulo; et si superat, ΘΓ basis ip-
sam ΓΛ basim, superat et ΑΘΓ triangulum
ipsum ΑΛΓ triangulum; et si minor, minus.
Quatuor igitur existentibus magnitudinibus,

de droites qu'on voudra ΒΗ, ΗΘ, égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites
qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ,
ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. 1); donc le triangle ΑΘΓ est le
même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même
raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base
ΓΛ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle
ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle
ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. 1); et si la base ΘΓ est plus petite que la
base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre

ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἂ ἐτυχεν ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τριγώνον· καὶ δίδικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ

duabus quidem basibus ΒΓ, ΓΔ, duobus vero triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem ΒΓ et ΑΒΓ trianguli, ipsa ΘΓ basis et ΑΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ et trianguli ΑΓΔ alia utcumque æque multiplicia, ipsaque ΓΛ basis et ΑΛΓ triangulum. Et ostensum est si superat ΘΓ basis ipsam ΓΔ basim, superare et ΑΘΓ triangulum ipsum ΑΛΓ triangulum;



ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον³. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὥς τὸ ΑΒΓ

et si æqualis, æquale; et si minor, minus; est igitur ut ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ quidem duplum est ΕΓ parallelogrammum, ipsius vero ΑΓΔ trianguli duplum est ΖΓ parallelogrammum, partes autem eandem habent rationem quam earum æque multiples; est igitur ut ΑΒΓ triangulum ad

grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équi-multiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équi-multiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a démontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5).

Puisque le parallélogramme ΕΓ est double du triangle ΑΒΓ, que le parallélogramme ΖΓ est double aussi du triangle ΑΓΔ (prop. 41. 1), et que les parties

τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἰδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον⁵, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον⁶ οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸν ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον⁷. Τὰ ἄρα τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis quidem ΒΓ ad ΓΔ basim ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum; ut autem ΑΒΓ triangulum ad ΑΓΔ triangulum ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum; et ut igitur ΒΓ basis ad ΓΔ basim ita ΕΓ parallelogrammum ad ΖΓ parallelogrammum. Ergo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Εὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα¹, ἀνάλογον τεμιῇ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἰὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἴσται τοῦ τριγώνου πλευράν².

Si trianguli juxta unum laterum ducatur quædam recta, illa proportionaliter secabit trianguli latera; et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, ipsa sectiones conjungens recta juxta reliquum erit trianguli latus.

ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5)., le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ. Puisqu'on a démontré que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et puisque le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ, la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΖΓ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

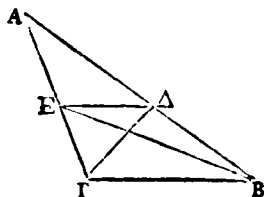
Επιζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἰσον δὲ³ ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. Ἄλλο δὲ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα

Trianguli enim ΑΒΓ parallela uni laterum ΒΓ ducatur ΔΕ; dico esse ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΔ.

Æquale utique est ΒΔΕ triangulum ipsi ΓΔΕ triangulo, in eadem enim basi sunt ΔΕ et intra easdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. Aliud autem quoddam ΑΔΕ triangulum; æqualia vero ad idem eandem habent rationem; est igitur ut



ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἀλλήλα εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ⁵ ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

ΒΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum, ita ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ triangulum. Sed ut ΒΔΕ quidem triangulum ad ΑΔΕ ita ΒΔ ad ΔΑ; nam cum sub eadem altitudine sint, sub ipsâ ab Ε ad ΑΒ perpendiculari ductâ, inter se sunt ut bases. Propter eadem utique ut ΓΔΕ triangulum ad ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ; et ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ.

Menons ΔΕ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ; je dis que ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ.

Joignons ΒΕ, ΓΔ.

Le triangle ΒΔΕ sera égal au triangle ΓΔΕ (37. 1), parce qu'ils ont la même base ΔΕ, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔΕ, ΒΓ. Mais ΑΔΕ est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ. Mais le triangle ΒΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΒΔ est à ΔΑ; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Ε sur la droite ΑΒ, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle ΓΔΕ est au triangle ΑΔΕ comme ΓΕ est à ΕΑ; donc ΒΔ est à ΔΑ comme ΓΕ est à ΕΑ (11. 5).

Αλλὰ δὴ αἱ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου πλευραὶ αἱ AB , $ΑΓ$ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ , E σημεία, ὥς ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἢ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $ΔΕ$. λέγω ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΒΓ$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἢ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$, ἀλλ' ὥς μὲν ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον⁶, ὥς δὲ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $ΕΑ$ οὕτως τὸ $ΓΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον⁷, καὶ ὥς ἄρα τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον⁸ οὕτως τὸ $ΓΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον⁹. Ἐκατέρον ἄρα τῶν $ΒΔΕ$, $ΓΔΕ$ τριγώνων πρὸς τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον¹⁰ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΒΔΕ$ τρίγωνον τῷ $ΓΔΕ$ τριγώνῳ, καὶ εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $ΔΕ$. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ¹¹ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΕ$ τῇ $ΒΓ$. Ἐὰν ἄρα τριγώνου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Sed et $ABΓ$ trianguli latera AB , $ΑΓ$ proportionaliter secta sint in Δ , E punctis, ut $ΒΔ$ ad $ΔΑ$ ita $ΓΕ$ ad $ΕΑ$, et jungatur $ΔΕ$; dico parallelam esse $ΔΕ$ ipsi $ΒΓ$.

Isdem enim constructis, quoniam est ut $ΒΔ$ ad $ΔΑ$ ita $ΓΕ$ ad $ΕΑ$, sed ut $ΒΔ$ quidem ad $ΔΑ$ ita $ΒΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ triangulum, ut $ΓΕ$ vero ad $ΕΑ$ ita $ΓΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ triangulum; et ut igitur $ΒΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ triangulum ita $ΓΔΕ$ triangulum ad $ΑΔΕ$ triangulum. Utrumque igitur $ΒΔΕ$, $ΓΔΕ$ triangulorum ad $ΑΔΕ$ triangulum eandem habet rationem. $\mathcal{A}$ equale igitur est $ΒΔΕ$ triangulum ipsi $ΓΔΕ$ triangulo; et sunt super eadem basi $ΔΕ$. $\mathcal{A}$ equalia autem triangula et super eadem basi constituta et intra easdem parallelas sunt. Parallela igitur est $ΔΕ$ ipsi $ΒΓ$. Si igitur trianguli, etc.

Mais que les côtés AB , $ΑΓ$ du triangle $ABΓ$ soient coupés proportionnellement aux points Δ , E , c'est-à-dire que $ΒΔ$ soit à $ΔΑ$ comme $ΓΕ$ est à $ΕΑ$, et joignons $ΔΕ$; je dis que $ΔΕ$ est parallèle à $ΒΓ$.

Faisons la même construction. Puisque $ΒΔ$ est à $ΔΑ$ comme $ΓΕ$ est à $ΕΑ$, que $ΒΔ$ est à $ΔΑ$ comme le triangle $ΒΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$ (1. 6), et que $ΓΕ$ est à $ΕΑ$ comme le triangle $ΓΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$, le triangle $ΒΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$ comme le triangle $ΓΔΕ$ est au triangle $ΑΔΕ$ (11. 5). Donc chacun des triangles $ΒΔΕ$, $ΓΔΕ$ a la même raison avec le triangle $ΑΔΕ$. Donc le triangle $ΒΔΕ$ est égal au triangle $ΓΔΕ$ (9. 5); et ils sont sur la même base $ΔΕ$. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39. 1). Donc $ΔΕ$ est parallèle à $ΒΓ$. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

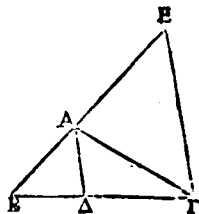
PROPOSITIO III.

Εὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιξυγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

Εστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς AD εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BD πρὸς τὴν $ΔΓ$ οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $ΑΓ$.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta secet et basim; basis segmenta eamdem habebunt rationem quam reliqua trianguli latera; et si basis segmenta eamdem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, ipsa a vertice ad sectionem ducta recta bifariam secat trianguli angulum.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et secetur $BA\Gamma$ angulus bifariam ab ipsâ AD rectâ; dico esse ut BD ad $ΔΓ$ ita BA ad $ΑΓ$.



Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ $ΔA$ παραλλήλος ἡ $ΓΕ$, καὶ διαχθῆσα ἡ BA συμπίπτει αὐτῇ κατὰ τὸ E .

Ducatur enim per Γ ipsi $ΔA$ parallela $ΓΕ$, et producta BA conveniat cum ipsâ in E .

PROPOSITION III.

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Soit le triangle $AB\Gamma$, que l'angle $BA\Gamma$ soit partagé en deux parties égales par la droite AD ; je dis que BD est à $ΔΓ$ comme BA est à $ΑΓ$.

Par le point Γ menons $ΓΕ$ parallèle à $ΔA$ (31. 1), et que BA prolongé rencontre $ΓΕ$ au point E .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐ-
θεία ἐνέπυσιν³ ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία
ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Αλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ
ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ
ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλή-
λους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεία ἐνέπυσιν ἡ ΒΑΕ, ἡ
ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ
ὑπὸ ΑΕΓ. Εδίδχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ
ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ
ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ
ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν
τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα
ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς
τὴν ΑΕ. Ἰση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα⁵ ἡ ΒΔ πρὸς
τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Αλλὰ δὴ ἴστω ὡς⁶ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως
ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπιζεύχτω ἡ ΑΔ· λέγω
ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς
ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν
ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ,
ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἐστὶν⁷ ἡ

Et quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidi-
t ΑΓ; ergo ΑΓΕ angulus æqualis est ipsi ΓΑΔ.
Sed ΓΑΔ ipsi ΒΑΔ ponitur æqualis; et ΒΑΔ
igitur ipsi ΑΓΕ est æqualis. Rursus quoniam in
parallelas ΑΔ, ΕΓ recta incidit ΒΑΕ, exterior
angulus ΒΑΔ æqualis est interiori ΑΕΓ. Ostensus
autem est et ΑΓΕ ipsi ΒΑΔ æqualis; et ΑΓΕ
igitur angulus ipsi ΑΕΓ est æqualis; quare et
latus ΑΕ lateri ΑΓ est æquale. Et quoniam
trianguli ΒΓΕ juxta unum laterum ΕΓ ducta
est ipsa ΑΔ; proportionaliter igitur est ut ΒΔ
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ. Æqualis autem est ΑΕ
ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Sed et sit ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; et
jungatur ΑΔ; dico bifariam sectum esse ΒΑΓ
angulum ab ΑΔ rectâ.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ
ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ, sed et ut ΒΔ ad ΔΓ ita
est ΒΑ ad ΑΕ; trianguli enim ΒΓΕ juxta unum

Puisque la droite ΑΓ tombe sur les parallèles ΑΔ, ΕΓ, l'angle ΑΓΕ est égal à
l'angle ΓΑΔ (29. 1). Mais l'angle ΓΑΔ est supposé égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle
ΒΑΔ est égal à l'angle ΑΓΕ. De plus, puisque la droite ΒΑΕ tombe sur les parallèles
ΑΔ, ΕΓ, l'angle extérieur ΒΑΔ est égal à l'angle intérieur ΑΕΓ (29. 1). Mais on
a démontré que l'angle ΑΓΕ est égal à l'angle ΒΑΔ; donc l'angle ΑΓΕ est égal
à l'angle ΑΕΓ; donc le côté ΑΕ sera égal au côté ΑΓ (6. 1). Et puisqu'on a mené
la droite ΑΔ parallèle à un des côtés ΕΓ du triangle ΒΓΕ, la droite ΒΔ est à ΔΓ
comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6). Mais ΑΕ est égal à ΑΓ; donc ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ
est à ΑΓ (7. 5).

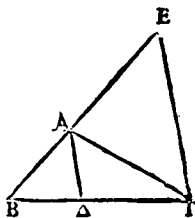
Mais que ΒΔ soit à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ; joignons ΑΔ; je dis que l'angle
ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΔ.

Faisons la même construction. Puisque ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΓ, et
que ΒΔ est à ΔΓ comme ΒΑ est à ΑΕ (2. 6), car la droite ΑΔ est parallèle à un

298 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

BA πρὸς τὴν AE· τριγώνου γὰρ τοῦ BΓE παρὰ
μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἥκται⁸ ἡ ΑΔ· καὶ
ὥς ἄρα ἡ BA πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ BA πρὸς
τὴν AE· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ AE, ὥστε καὶ γω-
νία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἴσιν ἴση.

laterum ΕΓ ducta est ipsa ΑΔ; et ut igitur BA
ad ΑΓ ita BA ad AE; æqualis igitur ΑΓ ipsi
AE; quare et angulus ΑΕΓ angulo ΑΓΕ est
æqualis. Sed ΑΕΓ quidem exteriori ΒΑΔ æqua-
lis, ipse vero et ΑΓΕ alterno ΓΑΔ est æqualis;



Αλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἑκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση,
ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλαξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ
ἴσιν ἴση⁹· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ
ἴσιν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα¹⁰ τέτμη-
ται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας. Εὰν ἄρα τριγώνου, καὶ
τὰ ἑξῆς.

et ΒΑΔ igitur ipsi ΓΑΔ est æqualis. Ipse ΒΑΓ
igitur angulus bifariam sectus est ab ΑΔ rectâ.
Si igitur trianguli, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ
πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι
αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί'.

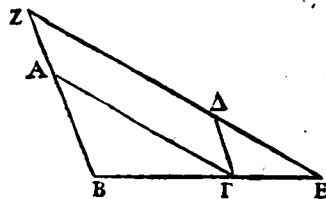
Æquiangulorum triangulorum proportionalia
sunt latera circa æquales angulos; et homo-
loga æquales angulos subtendunt latera.

des côtés ΕΓ du triangle BΓE, la droite BA est à ΑΓ comme BA est à AE; donc
ΑΓ est égal à AE (9. 5); donc l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle ΑΓΕ (5. 1). Mais
l'angle ΑΕΓ est égal à l'angle extérieur ΒΑΔ (29. 1), et l'angle ΑΓΕ égal à l'angle
alterne ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΔ est égal à l'angle ΓΑΔ; donc l'angle ΒΑΓ est partagé
en deux parties égales par la droite ΑΔ. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont
proportionnels; et les côtés qui soutendent les angles égaux, sont homo-
logues.

Εστω² ἰσογώνια τρίγωνα τὰ $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$, ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ , τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ , καὶ ἴτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ³. λέγω ὅτι τῶν $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ.



Κείσθω γάρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ . Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ , ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ , αἱ ἄρα ὑπὸ⁵ ΑΒΓ , ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν· αἱ ΒΑ , ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσούνται. Ἐκτελέσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ⁶ ΑΒΓ , παραλλήλος ἄρα⁷ ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ . Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ , παραλλήλος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ . ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ

Sint æquiangula triangula $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$, æqualem habentia ΒΑΓ quidem angulum ipsi ΓΔΕ , ipsum vero ΑΓΒ ipsi ΔΕΓ , et præterea ipsum ΑΒΓ ipsi ΔΓΕ ; dico $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$ triangulorum proportionalia esse latera circa æquales angulos; et homologa æquales angulos subtendere latera.

Ponatur enim in directum ipsa ΒΓ ipsi ΓΕ . Et quoniam $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$ anguli duobus rectis minores sunt, æqualis autem ΑΓΒ ipsi ΔΕΓ , ipsi igitur $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$ duobus rectis minores sunt; ipsæ ΒΑ , ΕΔ igitur productæ convenient. Producantur, et convenient in Ζ .

Et quoniam æqualis est $\triangle ΓΕ$ angulus ipsi $\triangle AB\Gamma$, parallela igitur est ΒΖ ipsi ΓΔ . Rursus, quoniam æqualis est ΑΓΒ ipsi ΔΕΓ , parallela est ΑΓ ipsi ΖΕ ; parallelogrammum igitur est ΖΑΓΔ ; æqualis igitur ΖΑ quidem ipsi ΔΓ , ipsa

Soient les triangles équiangles $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$, ayant l'angle ΒΑΓ égal à l'angle ΓΔΕ , l'angle ΑΓΒ égal à l'angle ΔΕΓ , et l'angle ΑΒΓ égal à l'angle ΔΓΕ ; je dis que dans les triangles $\triangle AB\Gamma$, $\triangle ΓΕ$, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

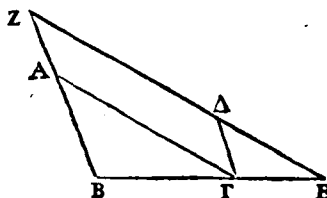
Plaçons la droite ΒΓ dans la direction de ΓΕ . Et puisque les angles ΑΒΓ , ΑΓΒ sont plus petits que deux droits (17. 1), et que l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΕΓ , les angles ΑΒΓ , ΔΕΓ sont plus petits que deux droits; donc les droites ΒΑ , ΕΔ , étant prolongées, se rencontreront (not. com. 11); qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en Ζ .

Et puisque l'angle ΔΓΕ est égal à l'angle ΑΒΓ , la droite ΒΖ est parallèle à la droite ΓΔ (28. 1). De plus, puisque l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΕΓ , la droite ΑΓ est parallèle à ΖΕ ; donc la figure ΖΑΓΔ est un parallélo-

300 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἰσὴ δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ

vero ΑΓ ipsi ΖΔ. Et quoniam trianguli ΖΒΕ juxta unum laterum ΖΕ ducta est ΑΓ, est igitur ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. Æqualis autem ΑΖ ipsi ΓΔ; ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita ΒΓ ad ΓΕ, et alterne ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. Rursus, quoniam parallela est ΓΔ ipsi ΒΖ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. Æqualis autem ΖΔ ipsi ΑΓ; ut igitur ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad



πρὸς τὴν ΔΕ. Ἰσὴ δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ¹⁰ εἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ¹¹ δέισου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ. Τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΕΔ, alterne igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. Et quoniam ostensum est, ut ΑΒ quidem ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ; ut vero ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; et ex æquo igitur ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ. Æquiangulorum igitur, etc.

gramme; donc ΖΑ est égal à ΔΓ, et ΑΓ égal à ΖΔ (34. 1). Et puisqu'un des côtés ΑΓ du triangle ΖΒΕ, est parallèle au côté ΖΕ, ΒΑ est à ΑΖ comme ΒΓ est à ΓΕ (2. 6). Mais ΑΖ est égal à ΓΔ; donc ΒΑ est à ΓΔ comme ΒΓ est à ΓΕ (7. 5), et, par permutation (16. 5), ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ (16. 5). De plus, puisque ΓΔ est parallèle à ΒΖ, ΒΓ est à ΓΕ comme ΖΔ est à ΔΕ. Mais ΖΔ est égal à ΑΓ; donc ΒΓ est à ΓΕ comme ΑΓ est à ΕΔ, et, par permutation, ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ. Et puisqu'on a démontré que ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΓ est à ΓΕ, et que ΒΓ est à ΓΑ comme ΓΕ est à ΕΔ, ΒΑ sera à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ (22. 5). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

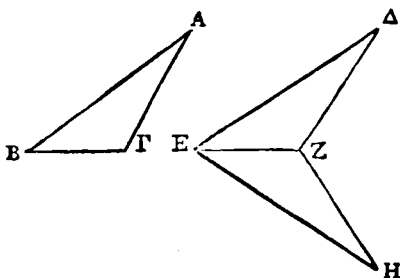
PROPOSITIO V.

Εάν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν AB πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, ὡς δὲ τὴν $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως τὴν $ΕΖ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$, καὶ ἔτι ὡς ἡ

Si duo triacula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triacula; et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Sint duo triacula $ABΓ$, $ΔΕΖ$ latera proportionalia habentia, ut AB quidem ad $ΒΓ$ ita $ΔΕ$ ad $ΕΖ$, ut $ΒΓ$ vero ad $ΓΑ$ ita $ΕΖ$ ad $ΖΔ$; et adhuc ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΕΔ$ ad $ΔΖ$;



BA πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τρίγῳ, καὶ ἴσας ἔξουσιν τὰς γωνίας, ὅφ' αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΕΖΔ$, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$.

dico æquiangulum esse $ABΓ$ triangulum ipsi $ΔΕΖ$ triangulo, et æquales illa habitura esse angulos, quos homologa latera subtendunt, ipsum quidem $ABΓ$ ipsi $ΔΕΖ$, ipsum vero $ΒΓΑ$ ipsi $ΕΖΔ$; et insuper ipsum $ΒΑΓ$ ipsi $ΕΔΖ$.

PROPOSITION V.

Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entr'eux.

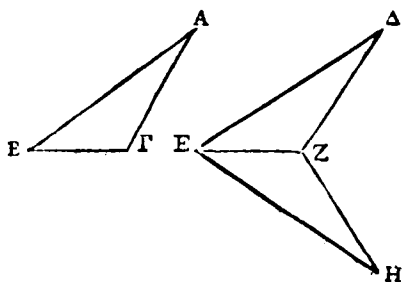
Soient deux triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$, ayant les côtés proportionnels, que AB soit à $ΒΓ$ comme $ΔΕ$ est à $ΕΖ$, que $ΒΓ$ soit à $ΓΑ$ comme $ΕΖ$ est à $ΖΔ$, et que BA soit à $ΑΓ$ comme $ΕΔ$ est à $ΔΖ$; je dis que les triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$ sont équiangles, et que les angles soutendus par les côtés homologues seront égaux, l'angle $ABΓ$ égal à l'angle $ΔΕΖ$, l'angle $ΒΓΑ$ égal à l'angle $ΕΖΔ$, et enfin l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΕΔΖ$.

Συνεσάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ZEH, τῇ δὲ ὑπὸ BΓA ἴση ἢ ὑπὸ EZH· λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ Δ λοιπὴ πρὸς τῷ H ἴσθιν ἴση.

Ἰσχυόνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ EHZ². τῶν ἄρα ABΓ, EHZ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμολογοὶ αἱ

Constituatur enim ad EZ rectam, et ad puncta in eâ E, Z, ipsi quidem ABΓ angulo æqualis ZEH, ipsi vero æqualis BΓA ipse EZH; reliquus igitur ad Δ reliquo ad H est æqualis.

Æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi EHZ; ipsorum igitur ABΓ, EHZ triangulorum proportionalia sunt latera, circum æquales an-



ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴσθιν ἄρα ὡς ἢ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως³ ἢ HE πρὸς τὴν EZ. Αλλ' ὡς ἢ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ὑπόκειται ἢ ΔE πρὸς τὴν EZ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΔE πρὸς τὴν EZ οὕτως ἢ HE πρὸς τὴν EZ· ἐκάτερα ἄρα τῶν ΔE, HE πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ΔE τῇ HE. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἢ ΔZ τῇ HZ ἴσθιν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ ΔE τῇ EH, κοινὴ δὲ ἢ EZ, δύο δὲ αἱ ΔE,

gulos, et homologa æquales angulos latera subtendunt; est igitur ut AB ad BΓ ita HE ad EZ. Sed ut AB ad BΓ ita ponitur ΔE ad EZ; et ut igitur ΔE ad EZ ita HE ad EZ; utraque igitur ipsarum ΔE, HE ad EZ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΔE ipsi HE. Propter eadem utique et ΔZ ipsi HZ æqualis est. Et quoniam æqualis est ΔE ipsi EH, communis autem EZ; duæ utique ΔE, EZ duabus HE, EZ

Construisons sur EZ et aux points E, Z l'angle ZEH égal à l'angle ABΓ et l'angle EZH égal à l'angle BΓA (23. 1); l'angle restant Δ sera égal à l'angle restant H (32. 1).

Les triangles ABΓ, EHZ seront équiangles; donc dans les triangles ABΓ, EHZ, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues (4. 6); donc AB est à BΓ comme HE est à EZ. Mais AB est supposé être à BΓ comme ΔE est à EZ; donc ΔE est à EZ comme HE est à EZ (11. 5); donc chacune des droites ΔE, HE a la même raison avec EZ; donc ΔE est égal à HE (9. 5). La droite ΔZ est égale à HZ, par la même raison. Donc, puisque ΔE est égal à EH, et que la droite EZ est

ΕΖ δὲ τὰ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ
βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση⁵. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ
γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. Καὶ τὸ ΔΕΖ τρί-
γωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' αἱ αἱ
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ
ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ
τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ
ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση⁶. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία
τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ
μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι
ἡ πρὸς τῷ Α πρὸς τῷ Δ⁸ ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ
τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εἰν ἄρα
δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Εἰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην
ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνά-
λογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας
ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' αἱ ἀλόγοι πλευραὶ
ὑποτείνουσιν.

commune, les deux droites ΔΕ, ΕΖ sont égales aux deux droites ΗΕ, ΕΖ; mais la base ΖΔ est égale à la base ΖΗ; donc l'angle ΔΕΖ est égal à l'angle ΗΕΖ (8. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΗΕΖ, et les autres angles que soutendent des côtés égaux sont égaux; donc l'angle ΔΖΕ est égal à l'angle ΗΖΕ, et l'angle ΕΔΖ égal à l'angle ΕΗΖ. Et puisque ΖΕΔ est égal à l'angle ΖΕΗ, et que l'angle ΗΕΖ est égal à l'angle ΑΒΓ, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ. Par la même raison, l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle en Α égal à l'angle en Δ; donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

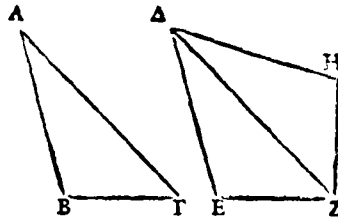
Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles seront équiangles, et les angles soutendus par des côtés homologues seront égaux.

æquales sunt, et basis ΖΔ basi ΖΗ est æqualis; angulus igitur ΔΕΖ angulo ΗΕΖ est æqualis. Et ΔΕΖ triangulum ipsi ΗΕΖ triangulo æquale, et reliqui anguli reliquis angulis æquales, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est et ΔΖΕ quidem angulus ipsi ΗΖΕ, ipse vero ΕΔΖ ipsi ΕΗΖ. Et quoniam ipse quidem ΖΕΔ ipsi ΖΕΗ est æqualis, sed ΗΕΖ ipsi ΑΒΓ est æqualis, et ΑΒΓ igitur angulus ipsi ΔΕΖ est æqualis. Propter eadem utique ipse quidem ΑΒΓ ipsi ΔΖΕ est æqualis, et insuper ipse ad Α ipsi ad Δ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo, etc.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, et æquales habebunt angulos, quos homologa latera subtendunt.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ μὲν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰ ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὥς τὴν $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως τὴν $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ · λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἔξει τὴν μὲν ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$, τὴν δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$.



Συνιστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ $ΔΖ$ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς $Δ$, $Ζ$, ὅποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ ἴση ἢ ὑπὸ $ΖΔΗ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἢ ὑπὸ $ΔΖΗ$.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ $Β$ γωνία^α λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ $Η$ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΗΖ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΗΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$. Ὑποκείται δὲ καὶ ὥς ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$ οὕτως ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν $ΔΖ$ · καὶ ὥς ἄρα ἡ $ΕΔ$ πρὸς τὴν

Sint duo triangu-
la $ABΓ$, $ΔΕΖ$, unum angu-
lum $ΒΑΓ$ uni angulo $ΕΔΖ$ æqualem habentia,
circa æquales autem angulos latera propor-
tionalia, ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΕΔ$ ad $ΔΖ$; dico
æquiangulum esse $ΑΒΓ$ triangulum ipsi $ΔΕΖ$
triangulo, et æqualem habiturum esse $ΑΒΓ$ quidem
angulum ipsi $ΔΕΖ$, ipsum vero $ΑΓΒ$ ipsi $ΔΖΕ$.

Constituatur enim ad $ΔΖ$ quidem rectam, et
ad puncta in ipsâ $Δ$, $Ζ$, alterutri ipsorum
quidem $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ æqualis angulus $ΖΔΗ$, ipsi
vero $ΑΓΒ$ æqualis ipse $ΔΖΗ$.

Reliquis igitur ad $Β$ angulus reliquo ad $Η$
æqualis est; æquiangulum igitur est $ΑΒΓ$ trian-
gulum ipsi $ΔΗΖ$ triangulo; proportionaliter
igitur est ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΗΔ$ ad $ΔΖ$.
Ponitur autem et ut $ΒΑ$ ad $ΑΓ$ ita $ΕΔ$ ad
 $ΔΖ$; et ut igitur $ΕΔ$ ad $ΔΖ$ ita $ΗΔ$ ad $ΔΖ$;

Soient les deux triangles $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, ayant l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΕΔΖ$, et les côtés autour des angles égaux proportionnels, de manière que $ΒΑ$ soit à $ΑΓ$ comme $ΕΔ$ est à $ΔΖ$; je dis que les triangles $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ sont équiangles, et que l'angle $ΑΒΓ$ est égal à l'angle $ΔΕΖ$, et l'angle $ΑΓΒ$ égal à l'angle $ΔΖΕ$.

Sur la droite $ΔΖ$, et aux points $Δ$, $Ζ$ de cette droite, construisons l'angle $ΖΔΗ$ égal à l'un ou à l'autre des angles $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$, et l'angle $ΔΖΗ$ égal à l'angle $ΑΓΒ$ (25. 1).

L'angle restant en $Β$ sera égal à l'angle restant en $Η$ (32. 1); donc les triangles $ΑΒΓ$, $ΔΗΖ$ sont équiangles; donc $ΒΑ$ est à $ΑΓ$ comme $ΗΔ$ est à $ΔΖ$ (4. 6). Mais on suppose que $ΒΑ$ est à $ΑΓ$ comme $ΕΔ$ est à $ΔΖ$; donc $ΕΔ$ est à $ΔΖ$ comme $ΗΔ$

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 305

ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυοὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση³. βάσεις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται⁴, ὅφ' αἱ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ⁵. ΑΛΛ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστὶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

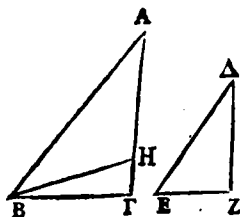
æqualis igitur ΕΔ ipsi ΔΗ, et communis ΔΖ; duæ igitur ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ æquales sunt, et angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ æqualis; basis igitur ΕΖ basi ΖΗ est æqualis, et ΔΕΖ triangulum ipsi ΔΗΖ triangulo æquale est, et reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt; æqualis igitur est ΔΖΗ quidem ipsi ΔΖΕ, ipse vero ΔΗΖ ipsi ΔΕΖ. Sed ipse ΔΖΗ ipsi ΑΓΒ est æqualis, et ΑΓΒ igitur ipsi ΔΖΕ est æqualis. Ponitur autem et ΒΑΓ ipsi ΕΔΖ æqualis; et reliquus igitur ad Β reliquo ad Ε æqualis est; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triacula, etc.

est à ΔΖ (11. 5); donc ΕΔ est égal à ΔΗ (9. 5); mais ΔΖ est commun; donc les deux droites ΕΔ, ΔΖ sont égales aux deux droites ΗΔ, ΔΖ; mais l'angle ΕΔΖ est égal à l'angle ΗΔΖ; donc la base ΕΖ est égale à la base ΖΗ (4. 1); donc le triangle ΔΕΖ est égal au triangle ΔΗΖ, et les autres angles seront égaux aux autres angles, savoir, ceux qui sont soutendus par des côtés égaux; donc l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΔΗΖ égal à l'angle ΔΕΖ. Mais l'angle ΔΖΗ est égal à l'angle ΑΓΒ; donc l'angle ΑΓΒ est égal à ΔΖΕ. Mais l'angle ΒΑΓ est supposé égal à l'angle ΕΔΖ; donc l'angle restant en Β est égal à l'angle restant en Ε (32. 1); donc les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

Εάν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μίαν γωνίαν ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἢ τοὶ ἰλάσσονα, ἢ μὴ ἰλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἔξῃ τὰς γωνίας, περὶ αἷς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, μίαν γωνίαν μίαν γωνίαν ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ



ὑπὸ $ΕΔΖ$, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$ οὕτως τὴν $ΔΕ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς $Γ$, $Ζ$ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἰλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $ΑΒΓ$

Si duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triacula, et æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Sint duo triacula $ABΓ$, $ΔΕΖ$, unum angulum uni angulo æqualem habentia, ipsum $ΒΑΓ$

ipsi $ΕΔΖ$, circa alios autem angulos $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, latera proportionalia, ut $ΑΒ$ ad $ΒΓ$ ita $ΔΕ$ ad $ΕΖ$, reliquorum vero ad $Γ$, $Ζ$ primum utrumque simul minorem recto; dico æquiangulum esse $ΑΒΓ$ triangulum ipsi $ΔΕΖ$

PROPOSITION VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restants sont en même temps ou plus petits ou non plus petits qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Soient les deux triangles $ABΓ$, $ΔΕΖ$, ayant un angle égal à un angle, savoir, l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΕΔΖ$, et les côtés autour des autres angles $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ proportionnels entr'eux, de manière que $ΑΒ$ soit à $ΒΓ$ comme $ΔΕ$ est à $ΕΖ$, et que chacun des autres angles en $Γ$, $Ζ$ soit d'abord plus petit qu'un angle droit;

τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνίσος ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔστιν. Εστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία³ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἔστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἔστί τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ ὑπόκειται οὕτως⁴ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ⁵, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ, ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ⁶. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἔστιν ἴση⁷. Ελάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ⁸ Γ· ἐλάττων ἄρα ἔστιν ὀρθῆς⁹ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἔστιν ὀρθῆς. Καὶ εἰδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα

triangulo, et æqualem fore ΑΒΓ angulum ipsi ΔΕΖ, et reliquum videlicet ad Γ reliquo ad Ζ æqualem.

Si enim inæqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΔΕΖ, unus ipsorum major est. Sit major ΑΒΓ; et constituatur ad ΑΒ rectam et ad punctum in eâ Β, ipsi ΔΕΖ angulo æqualis ipse ΑΒΗ.

Et quoniam æqualis est Α quidem angulus ipsi Δ, ipse vero ΑΒΗ angulus ipsi ΔΕΖ, reliquus igitur ΑΗΒ reliquo ΔΖΕ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo; est igitur ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΖ. Ut autem ΔΕ ad ΕΖ ponitur ita ΑΒ ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΗ, ipsa igitur ΑΒ ad utramque ipsarum ΒΓ, ΒΗ eandem habet rationem; æqualis igitur est ΒΓ ipsi ΒΗ; quare et angulus ad Γ angulo ΒΗΓ est æqualis. Minor autem recto ponitur ipse ad Γ; minor igitur est recto ipse ΒΗΓ, quare ipse ei deinceps angulus ΑΗΒ major est recto. Et ostensus est æqualis esse ipsi ad Ζ, et ipse ad Ζ igitur major est recto. Ponitur autem

je dis que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles, que l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ, et l'angle restant en Γ égal à l'angle restant en Ζ.

Car si l'angle ΑΒΓ n'est pas égal à l'angle ΔΕΖ, l'un des deux sera plus grand. Que l'angle ΑΒΓ soit le plus grand; et construisons sur la droite ΑΒ et au point Β de cette droite, l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1).

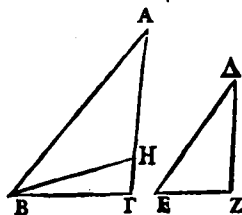
Et puisque l'angle Α est égal à l'angle Δ, et l'angle ΑΒΗ égal à l'angle ΔΕΖ l'angle restant ΑΗΒ est égal à l'angle restant ΔΖΕ (32. 1); donc les triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ sont équiangles; donc ΑΒ est à ΒΗ comme ΔΕ est à ΕΖ (4. 6). Mais ΔΕ est supposé être à ΕΖ comme ΑΒ est à ΒΓ (11. 5); donc ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΗ; donc la droite ΑΒ a la même raison avec chacune des droites ΒΓ, ΒΗ; donc ΒΓ est égal à ΒΗ; donc l'angle en Γ est égal à l'angle ΒΗΓ (5. 1). Mais l'angle en Γ est supposé plus petit qu'un droit; donc l'angle ΒΗΓ est plus petit qu'un droit; donc l'angle de suite ΑΗΒ est plus grand qu'un droit (13. 1). Mais on a démontré qu'il est égal à l'angle Ζ; donc l'angle Ζ est plus grand qu'un

μείζων ἔστιν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάττωσαν ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Z μὴ ἐλάττωσαν ὀρθῆς· λίγω πάλιν ὅτῃ καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ¹⁰ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

minor recto, quod absurdum; non igitur inæqualis est ABΓ angulus ipsi ΔEZ, æqualis igitur. Est autem et ipse ad A æqualis ei ad Δ, et reliquus igitur ad Γ reliquo ad Z æqualis est; æquiangulum igitur est ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.

Sed et rursus ponatur uterque ipsorum ad Γ, Z non minor recto; dico rursus et sic æquiangulum esse ABΓ triangulum ipsi ΔEZ triangulo.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BH· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ BHΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττωσαν δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ BHΓ. Τριγώνου δὴ¹¹ τοῦ BHΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἀνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. Ἔστι

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus æqualem esse BΓ ipsi BH; quare et angulus ad Γ ipsi BHΓ æqualis est. Non minor autem recto ad Γ; non minor igitur recto neque ipse BHΓ. Trianguli igitur BHΓ duo anguli duobus rectis non sunt minores, quod est impossibile; non igitur rursus inæqualis est ABΓ angulus ipsi ΔEZ; æqualis igitur.

droit. Mais on a supposé qu'il était plus petit qu'un droit, ce qui est absurde; donc les angles ABΓ, ΔEZ ne sont pas inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en A est égal à l'angle en Δ; donc l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Z; donc les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles.

Mais que chacun des angles Γ, Z ne soit pas plus petit qu'un droit; je dis encore que les triangles ABΓ, ΔEZ sont équiangles.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que BΓ est égal à BH; donc l'angle en Γ est égal à l'angle BHΓ. Mais l'angle Γ n'est pas plus petit qu'un droit; donc l'angle BHΓ n'est pas plus petit qu'un droit. Donc deux angles du triangle BHΓ ne sont pas plus petits que deux droits, ce qui est impossible (17. 1), donc les angles ABΓ, ΔEZ ne sont pas encore

δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ
ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν·
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τρι-
γώνῳ. Εάν ἄρα δύο τρίγωνα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Est autem et ipse ad Α ipsi ad Δ æqualis, re-
liquus igitur ad Γ reliquo ad Ζ æqualis est;
æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi
ΔΕΖ triangulo. Si igitur duo triangula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

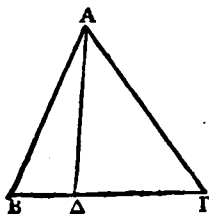
Εάν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γω-
νίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ
καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλή-
λοις.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον
τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ

PROPOSITIO VIII.

Si in rectangulo triangulo ab recto angulo ad
basim perpendicularis ducatur; ipsa ad per-
pendicularẽ triangula similia sunt et toti et
inter se.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum
habens ΒΑΓ angulum, et ducatur ab Α ad ΒΓ



τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὁμοίων ἐστὶν ἑκά-
τερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ
ἐτι ἀλλήλοις.

perpendicularis ΑΔ; dico simile esse utrum-
que ipsorum ΑΒΔ', ΑΔΓ triangulorum toti ΑΒΓ
et insuper, inter se.

inégaux; donc ils sont égaux. Mais l'angle en Α est égal à l'angle en Δ; donc
l'angle restant en Γ est égal à l'angle restant en Ζ (32. 1); donc les triangles
ΑΒΓ, ΔΕΖ sont équiangles. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

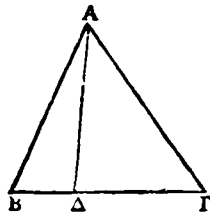
Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit
sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au
triangle entier et semblables entr'eux.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; du point Α menons sur la
base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ; je dis que les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables
au triangle entier ΑΒΓ et semblables entr'eux.

310 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γάρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία¹ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐρθῇ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦτε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἐπὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ

Quoniam enim æqualis est ΒΑΓ angulus ipsi ΑΔΒ, rectus enim uterque, et communis duobus triangulis et ΑΒΓ et ΑΒΔ ipse ad Β; reliquus igitur ΑΓΒ reliquo ΒΑΔ est æqualis; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo. Est igitur ut ΒΓ subtendens rectum ipsius ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum rectum ipsius ΑΒΔ trianguli, ita eadem ΑΒ subtendens ipsum ad Γ angulum ipsius



ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ², τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου· καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιον τὲ ἐστὶ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ³ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

ΑΒΓ trianguli ad ΒΑ subtendentem angulum æqualem ipsi ad Γ, ipsum ΒΑΔ ipsius ΑΒΔ trianguli; et etiam ΑΓ ad ΑΔ subtendentem ipsum ad Β angulum, communem duobus triangulis; ipsum ΑΒΓ igitur triangulum ipsi ΑΒΔ triangulo et æquiangulum est, et ipsa circa æquales angulos latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΑΒΔ trian-

Car puisque l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΑΔΒ, étant droits l'un et l'autre, et que l'angle en Β est commun aux deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ, l'angle restant ΑΓΒ est égal à l'angle restant ΒΑΔ (32. 1); donc les deux triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles. Donc le côté ΒΓ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΑ qui soutend l'angle droit du triangle ΑΒΔ, comme le côté ΑΒ qui soutend l'angle en Γ du triangle ΑΒΓ, est au côté ΒΔ qui soutend un angle égal à l'angle Γ, c'est-à-dire l'angle ΒΑΔ du triangle ΑΒΔ, et comme le côté ΑΓ est au côté ΑΔ qui soutend l'angle Β, commun aux deux triangles; donc les triangles ΑΒΓ, ΑΒΔ sont équiangles, et ils ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (4. 6); donc le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ (déf. 1. 6). Nous démontrerons semblablement que le triangle ΑΔΓ est

καὶ τῷ $\triangle A\Delta\Gamma$ τριγώνῳ ὁμοιον ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν $\triangle ABA$, $\triangle A\Delta\Gamma$ τριγώνων ὁμοίων ἐστὶν ὅλῳ τῷ $\triangle AB\Gamma$ τριγώνῳ⁵.

Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὁμοία τὰ $\triangle ABA$, $\triangle A\Delta\Gamma$ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\angle BAA$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $\angle A\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ $\angle BAA$ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ B λοιπῇ τῇ ὑπὸ $\angle A\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle ABA$ τρίγωνον τῷ $\triangle A\Delta\Gamma$ τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BA τοῦ $\triangle ABA$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ $\angle BAA$, πρὸς τὴν ΔA τοῦ $\triangle A\Delta\Gamma$ τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν⁶, ἴσην τῇ ὑπὸ $\angle BAA$, οὕτως αὐτὴ ἡ AD τοῦ $\triangle ABA$ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ $\angle A\Delta\Gamma$ τοῦ $\triangle A\Delta\Gamma$ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ B · καὶ ἔτι ἡ BA ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $\angle AAB$, πρὸς τὴν $A\Gamma$ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ $\angle A\Delta\Gamma$ ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\triangle ABA$ τρίγωνον τῷ $\triangle A\Delta\Gamma$ τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογώνῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

gulo. Similiter utique ostendemus et ipsi $\triangle A\Delta\Gamma$ triangulo simile esse $\triangle AB\Gamma$ triangulum; utrumque igitur ipsorum $\triangle ABA$, $\triangle A\Delta\Gamma$ triangulorum simile est toti $\triangle AB\Gamma$ triangulo.

Dico etiam et inter se esse similia $\triangle ABA$, $\triangle A\Delta\Gamma$ triangula.

Quoniam enim rectus $\angle BAA$ recto $\angle A\Delta\Gamma$ est æqualis, sed quidem et ipse $\angle BAA$ ipsi ad Γ ostensus est æqualis, et reliquus igitur ad B reliquo $\angle A\Delta\Gamma$ est æqualis; æquiangulum igitur est $\triangle ABA$ triangulum ipsi $\triangle A\Delta\Gamma$ triangulo. Est igitur ut BA ipsius $\triangle ABA$ trianguli, subtendens ipsum $\angle BAA$, ad ΔA ipsius $\triangle A\Delta\Gamma$ trianguli, subtendentem ipsum ad Γ angulum, æqualem ipsi $\angle BAA$, ita eadem AD ipsius $\triangle ABA$ trianguli, subtendens ipsum ad B angulum, ad $\Delta\Gamma$ subtendentem $\angle A\Delta\Gamma$ angulum ipsius $\triangle A\Delta\Gamma$ trianguli, æqualem ipsi ad B , et etiam BA subtendens rectum $\angle AAB$, ad $A\Gamma$ subtendentem rectum $\angle A\Delta\Gamma$; simile igitur est $\triangle ABA$ triangulum ipsi $\triangle A\Delta\Gamma$ triangulo. Si igitur in rectangulo, etc.

semblable au triangle $AB\Gamma$; donc chacun des triangles ABA , $A\Delta\Gamma$ est semblable au triangle entier $AB\Gamma$.

Je dis aussi que les triangles ABA , $A\Delta\Gamma$ sont semblables entr'eux.

Car puisque l'angle droit BAA est égal à l'angle droit $A\Delta\Gamma$, et qu'on a démontré que l'angle BAA est égal à l'angle en Γ , l'angle restant en B est égal à l'angle restant $A\Delta\Gamma$ (32. 1); donc les deux triangles ABA , $A\Delta\Gamma$ sont équiangles. Donc le côté BA du triangle ABA , qui soutend l'angle BAA , est au côté ΔA du triangle $A\Delta\Gamma$, qui soutend l'angle Γ , égal à l'angle BAA , comme le côté AD du triangle ABA , qui soutend l'angle en B , est au côté $\Delta\Gamma$, qui soutend l'angle $A\Delta\Gamma$ du triangle $A\Delta\Gamma$, égal à l'angle en B ; et comme le côté BA , qui soutend l'angle droit AAB , est au côté $A\Gamma$ qui soutend l'angle droit $A\Delta\Gamma$ (4. 6); donc le triangle ABA est semblable au triangle $A\Delta\Gamma$ (déf. 1. 6). Donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν^β καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποτέρου τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique evidens est, si in rectangulo triangulo a recto angulo ad basim perpendicularis ducta fuerit, ductam inter basis segmenta mediam proportionalem esse; et etiam inter basim et unum utriuslibet segmentorum, ipsum ad segmentum latus, medium proportionale esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφαιεῖν.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφαιεῖν.

Επιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μὲτα τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ

PROPOSITIO IX.

Ab datâ rectâ imperatam partem auferre.

Sit data recta ΑΒ; oportet igitur ab ipsâ ΑΒ imperatam partem auferre.

Imperetur et tertia; et ducatur quædam recta ΑΓ ab Α, quemlibet angulum continens cum ipsâ ΑΒ; et sumatur quodlibet punctum Δ in ΑΓ, et ponantur ipsi ΑΔ æquales ΔΕ, ΕΓ;

COROLLAIRE.

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base, et que chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre la base et le segment contigu.

PROPOSITION IX.

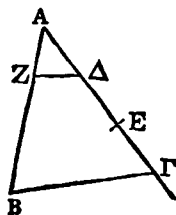
D'une droite donnée retrancher la partie demandée.

Soit ΑΒ la droite donnée; il faut de la droite ΑΒ retrancher la partie demandée.

Soit demandé le tiers; du point Α menons une droite quelconque ΑΓ qui fasse un angle quelconque avec la droite ΑΒ; prenons dans ΑΓ un point quel-

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 313

ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ et jungatur ΒΓ, et per Δ parallela huic ductur ΔΖ.
διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.



Επεὶ οὖν σριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἤκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἴστί·ν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῇ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῇ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῆρηται τὸ ΑΖ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Et quoniam trianguli ΑΒΓ juxta unum laterum ΒΓ ducta est ipsa ΖΔ; proportionaliter igitur est ut ΓΔ ad ΔΑ ita ΒΖ ad ΖΑ. Dupla autem ΓΔ ipsius ΔΑ; dupla igitur et ΒΖ ipsius ΖΑ; tripla igitur ΒΑ ipsius ΑΖ.

Ab ipsâ igitur datâ rectâ ΑΒ imperata tertia pars ablata est ipsa ΑΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμῃτον τῇ δοθείσῃ τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

PROPOSITIO X.

Datam rectam insectam datæ sectæ similiter secare.

conque Δ, et faisons les droites ΔΕ, ΕΓ égales à ΑΔ (3. 1); joignons ΒΓ, et par le point Δ menons ΔΖ parallèle à ΓΒ (31. 1).

Puisqu'on a mené ΖΔ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite ΓΔ est à ΔΑ comme ΒΖ est à ΖΑ (2. 6). Mais ΓΔ est double de ΔΑ; donc ΒΖ est double de ΖΑ; donc ΒΑ est triple de ΑΖ.

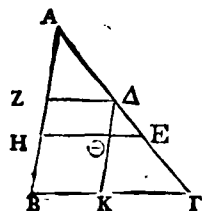
On a donc retranché de la droite donnée ΑΒ la troisième partie demandée ΑΖ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée, qui n'est point partagée de la même manière qu'une droite donnée est partagée.

314 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἡ μὲν διθεῖσα εὐθεῖα ἄτμπος ἡ AB , ἡ δὲ τετμημένη ἡ $ΑΓ$, κατὰ τὰ Δ , E σημεία, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχούσαν περιέχειν, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $ΓB$, καὶ διὰ τῶν Δ , E τῇ $ΒΓ$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔZ , EH , διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $\Delta\Theta K$.



Sit data quidem recta insecta AB , ipsa vero secta $ΑΓ$ in Δ , E punctis, et ponantur ita ut angulum quemlibet contineant, et jungatur $ΓB$, et per Δ , E ipsi $ΒΓ$ parallelæ ducantur ΔZ , EH , per Δ autem ipsi AB parallela ducatur $\Delta\Theta K$.

Παράλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $Z\Theta$, ΘB . Ἰση ἄρα ἡ μὲν $\Delta\Theta$ τῇ ZH , ἡ δὲ ΘK τῇ HB . Καὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ $\Delta KΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $KΓ$ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΘE . ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΓE$ πρὸς τὴν $E\Delta$ οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν $\Theta\Delta$. Ἰση δὲ ἡ μὲν $K\Theta$ τῇ BH , ἡ δὲ $\Theta\Delta$ τῇ HZ . Ἰσὺν ἄρα ὡς ἡ $ΓE$ πρὸς τὴν $E\Delta$ οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ . Πάλιν, ἐπὶ τριγώνου τοῦ AHE παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EH ἤκται ἡ $Z\Delta$. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔA οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA . Εδείχθη δὲ καὶ

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $Z\Theta$, ΘB ; æqualis igitur ipsa quidem $\Delta\Theta$ ipsi ZH , ipsa vero ΘK ipsi HB . Et quoniam trianguli $\Delta KΓ$ juxta unum laterum $KΓ$ recta ducta est ΘE ; proportionaliter igitur est ut $ΓE$ ad $E\Delta$ ita $K\Theta$ ad $\Theta\Delta$. Æqualis autem ipsa quidem $K\Theta$ ipsi BH , ipsa vero $\Theta\Delta$ ipsi HZ ; est igitur ut $ΓE$ ad $E\Delta$ ita BH ad HZ . Rursus, quoniam trianguli AHE juxta unum laterum EH ducta est $Z\Delta$; proportionaliter igitur est ut $E\Delta$ ad ΔA ita HZ ad ZA . De-

Soit AB la droite donnée qui n'est point partagée, et $ΑΓ$ une droite partagée aux points Δ , E ; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle quelconque; joignons $ΒΓ$, et par les points Δ , E , menons les droites ΔZ , EH parallèles à $ΒΓ$ (31. 1), et par le point Δ menons $\Delta\Theta K$ parallèle à AB .

Les figures $Z\Theta$, ΘB seront des parallélogrammes; donc $\Delta\Theta$ est égal à ZH , et ΘK égal à HB (34. 1). Et puisqu'on a mené la droite ΘE parallèle à un des côtés $KΓ$ du triangle $\Delta KΓ$, la droite $ΓE$ est à $E\Delta$ comme $K\Theta$ est à $\Theta\Delta$ (2. 6). Mais $K\Theta$ est égal à BH , et $\Theta\Delta$ est égal à HZ ; donc $ΓE$ est à $E\Delta$ comme BH est à HZ . De plus, puisqu'on a mené la droite $Z\Delta$ parallèle à un des côtés EH du triangle AHE , la droite $E\Delta$ est à ΔA comme

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

ὥς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ·
ἐστὶν ἄρα ὥς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ
πρὸς τὴν ΗΖ, ὥς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ
ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμήτος ἡ ΑΒ τῇ δο-
θείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ ΑΓ ἰμοίως τέτμηται.
Ὅπερ ἴδιαι ποιεῖσαι.

monstratum autem est et ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΒΗ
ad ΗΖ; est igitur ut ΓΕ quidem ad ΕΔ ita
ΒΗ ad ΗΖ, ut vero ΕΔ ad ΔΑ ita ΗΖ ad ΖΑ.

Data igitur recta insecta ΑΒ datæ rectæ
sectæ ΑΓ similiter secta est. Quod oportebat
facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

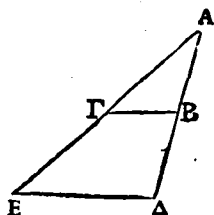
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προ-
σευρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθω-

PROPOSTIO XI.

Duabus datis rectis, tertiam proportionalem
invenire.

Sint datæ ΑΒ, ΑΓ, et ponantur ita ut an-



σαν γωνίαν περιέχουσαι τυχούσαν· δεῖ δὲ τῶν
ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν².

gulum quemlibet contineant; oportet igitur
ipsis ΑΒ, ΑΓ tertiam proportionalem invenire.

ΗΖ est à ΖΑ. Mais on a démontré que ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ; donc
ΓΕ est à ΕΔ comme ΒΗ est à ΗΖ, et ΕΔ est à ΔΑ comme ΗΖ est à ΖΑ.

Donc la droite donnée ΑΒ, qui n'est pas partagée, a été partagée de la même
manière que la droite donnée ΑΓ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XI.

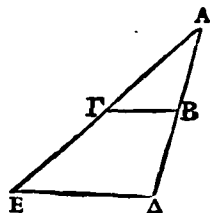
Deux droites étant données, trouver une troisième proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΑΓ les deux droites données; posons-les de manière qu'elles
comprènent un angle quelconque; il faut trouver une troisième propor-
tionnelle aux droites ΑΒ, ΑΓ.

316 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτελέσωσαν γὰρ αἱ AB , AG ἐπὶ τὰ Δ ,
 E σημεία, καὶ κείσθω τῇ AG ἴση ἡ BA , καὶ
 ἐπεζεύχθω ἡ BG , καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος
 αὐτῇ³ ἤχθω ἡ ΔE .

Producantur enim AB , AG ad Δ , E puncta,
 et ponatur ipsi AG æqualis BA , et jungatur
 BG , et per Δ parallela huic ducatur ΔE .



Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔDE , παρὰ μίαν τῶν
 πλευρῶν τὴν ΔE ἦκται ἡ BG , ἀνάλογόν ἐστιν
 ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE .
 Ἴση δὲ ἡ BA τῇ AG , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν
 AG οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GE .

Quoniam igitur trianguli ΔDE , juxta unum
 laterum ΔE ducta est BG , proportionaliter est
 ut AB ad BA ita AG ad GE . Æqualis autem
 BA ipsi AG , est igitur ut AB ad AG ita AG
 ad GE .

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB , AG , τρίτη
 ἀνάλογον αὐταῖς προσιύρεται ἡ GE . Ὅπερ εἶδει
 ποιῆσαι.

Duabus igitur datis rectis AB , AG , tertia
 proportionalis inventa est GE . Quod oportebat
 facere.

Prolongeons les droites AB , AG vers les points Δ , E ; faisons BA égal à AG ; joignons BG , et par le point Δ menons ΔE parallèle à BG (31. 1).

Puisque la droite BG est parallèle à un des côtés ΔE du triangle ΔDE , la droite AB est à BA comme AG est à GE (2. 6). Mais BA est égal à AG ; donc AB est à AG comme AG est à GE .

Donc les deux droites AB , AG étant données, on a trouvé une troisième proportionnelle GE . Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

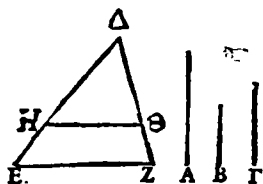
PROPOSITIO XII.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσυρεῖν.

Εστώσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δι' δὲ τῶν Α, Β, Γ τετάρτην ἀνάλογον προσυρεῖν.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ Α, Β, Γ; oportet igitur ipsis Α, Β, Γ quartam proportionalem invenire.



Εκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἦχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΕΖ.

Exponentur duæ rectæ ΔΕ, ΔΖ, angulum continentes quemlibet ΕΔΖ; et ponatur ipsi quidem Α æqualis ΔΗ, ipsi vero Β æqualis ΗΕ, et insuper ipsi Γ æqualis ΔΘ; et junctâ ΗΘ, parallela illi ducatur per Ε ipsa ΕΖ.

Et quoniam trianguli ΔΕΖ juxta unum laterum ΕΖ ducta est ΗΘ, est igitur ut ΔΗ ad ΗΕ ita ΔΘ ad ΕΖ. Æqualis autem ΔΗ quidem ipsi Α, ipsa vero ΗΕ ipsi Β, ipsa autem ΔΘ ipsi Γ; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad ΕΖ.

PROPOSITION XII.

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient Α, Β, Γ les trois droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites Α, Β, Γ.

Soient les deux droites ΔΕ, ΔΖ, comprenant un angle quelconque ΕΔΖ; faisons la droite ΔΗ égale à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint ΗΘ, par le point Ε menons ΕΖ parallèle à ΗΘ.

Puisque la droite ΗΘ est parallèle à un des côtés ΕΖ du triangle ΔΕΖ, la droite ΔΗ est à ΗΕ comme ΔΘ est à ΕΖ (2. 6). Mais ΔΗ est égal à Α, la droite ΗΕ égale à Β, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc Α est à Β comme Γ est à ΕΖ.

318 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Τριῶν ἄρα δοθειῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρεται ἡ ΘΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Tribus igitur datis rectis Α, Β, Γ, quarta proportionalis inventa est ΘΖ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

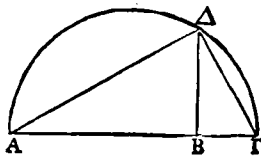
PROPOSITIO XIII.

Δύο δοθειῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Sint datae duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; oportet igitur ipsis ΑΒ, ΒΓ mediam proportionalem invenire.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

Ponantur in directum, et describatur super ipsâ ΑΓ semicirculus ΑΔΓ, et ducatur a puncto ipsi ΑΓ rectæ ad rectos ΒΔ, et jungantur ΑΔ, ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν

Et quoniam in semicirculo angulus est ΑΔΓ, rectus est. Et quoniam in rectangulo triangulo ΑΔΓ a recto angulo ad basim per-

Donc trois droites Α, Β, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘΖ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient ΑΒ, ΒΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre ΑΒ, ΒΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite ΑΓ décrivons le demi-cercle ΑΔΓ; du point Β menons ΒΔ perpendiculaire à ΑΓ, et joignons ΑΔ, ΔΓ (11. 1).

Puisque l'angle ΑΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle ΑΔΓ on a mené de l'angle droit la droite

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

βάσειν κάθετος ἥκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσύρεται ἡ ΒΔ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

perpendicularis ducta est ΔΒ; ipsa ΔΒ igitur inter basis segmenta ΑΒ, ΒΓ media proportionalis est.

Duabus igitur datis rectis ΑΒ, ΒΓ, media proportionalis iuventa est ΒΔ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

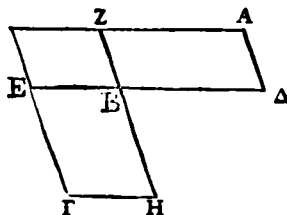
Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων¹ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων², ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια³ παραλληλόγραμ-

PROPOSITIO XIV.

Æqualiumque et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

Sint æqualiaque et æquiangula parallelo-



μα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῇ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ,

gramma ΑΒ, ΒΓ, æquales habentia ipsos ad Β angulos, et ponantur in directum ΑΒ, ΒΕ,

ΔΒ perpendiculaire à la base, la droite ΔΒ est moyenne proportionnelle entre les segments ΑΒ, ΒΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites ΑΒ, ΒΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle ΒΔ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIV.

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient ΑΒ, ΒΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles

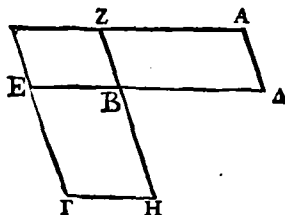
320 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτίστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμ-
μον.

in directum igitur sunt et ΖΒ, ΒΗ; dico ipsorum ΑΒ, ΒΓ reciproca esse latera circa æquales angulos, hoc est esse ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ.

Complicatur enim ΖΕ parallelogrammum.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΔΒ, ΒΓ ἄρα⁴ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονήτευσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ⁵ ἴστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς

Et quoniam æquale est ΑΒ parallelogrammum ipsi ΒΓ parallelogrammo, aliud autem quoddam ΖΕ; est igitur ut ΑΒ ad ΖΕ ita ΒΓ ad ΖΕ. Sed ut ΑΒ quidem ad ΖΕ ita ΔΒ ad ΒΕ, ut vero ΒΓ ad ΖΕ ita ΗΒ ad ΒΖ; et ut igitur ΔΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ. Ipsorum ΔΒ, ΒΓ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos.

Sed et reciproca sint latera circa æquales angulos, et sit ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΗΒ ad ΒΖ; dico

égaux en B, plaçons BE dans la direction de ΔΒ, la droite ΒΗ sera dans la direction de ΖΒ (14. 1); je dis que les côtés des parallélogrammes ΑΒ, ΒΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΔΒ est à ΒΕ comme ΗΒ est à ΒΖ.

Achevons le parallélogramme ΖΕ.

Puisque le parallélogramme ΑΒ est égal au parallélogramme ΒΓ, et que ΖΕ est un autre parallélogramme, ΑΒ est à ΖΕ comme ΒΓ est à ΖΕ (7. 5). Mais ΑΒ est à ΖΕ comme ΔΒ est à ΒΕ (1. 6); et ΒΓ est à ΖΕ comme ΗΒ est à ΒΖ; donc ΔΒ est à ΒΕ comme ΗΒ est à ΒΖ (11. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΑΒ, ΒΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

Mais que les côtés adjacents aux angles égaux soient réciproquement pro-

τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ· λέγω ὅτι ἴσον ἔστί τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BG παραλληλόγραμμῳ.

Επεὶ γὰρ ἴστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν BE οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν BE οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HB πρὸς τὴν BZ οὕτως τὸ BG παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον^δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE οὕτως τὸ BG πρὸς τὸ ZE· ἴσον ἄρα ἔστί τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ BG παραλληλόγραμμῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

æquale esse AB parallelogrammum ipsi BG parallelogrammo.

Quoniam enim est ut ΔΒ ad BE ita HB ad BZ, sed ut ΔΒ quidem ad BE ita AB parallelogrammum ad ZE parallelogrammum, ut HB vero ad BZ ita BG parallelogrammum ad ZE parallelogrammum; et ut igitur AB ad ZE ita BG ad ZE; æquale igitur est AB parallelogrammum ipsi BG parallelogrammo. Ergo æqualium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὢν, μίαν μιᾷ ἴσῃ ἔχόντων γωνίαν τριγώνων¹, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἔστιν ἑκάστη.

PROPOSITIO XV.

Æqualium et unum uni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, circa æquales angulos; et quorum, unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa.

portionnels, c'est-à-dire que ΔΒ soit à BE comme HB est à BZ; je dis que le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BG.

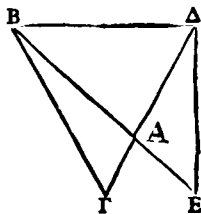
Puisque ΔΒ est à BE comme HB est à BZ, que ΔΒ est à BE comme le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE (1. 6), et que HB est à BZ comme le parallélogramme BG est au parallélogramme ZE, AB est à ZE comme BG est à ZE (11. 5); donc le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BG (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles sont égaux.

Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΑΔΕ$, μίαν μὲν ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔΑΕ$. λέγω ὅτι τῶν $ABΓ$, $ΑΔΕ$ τριγώνων ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτο ἐστὶν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν $ΓΑ$ τῇ $ΑΔ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΕΑ$ τῇ $ΑΒ$. Καὶ ἐπιεύχθω ἡ $ΒΔ$.



Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΔΕ$ τριγώνῳ, ἄλλο δὲ τὸ $ΑΒΔ$ ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ $ΓΑΒ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον οὕτως τὸ $ΑΔΕ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ τρίγωνον³. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $ΓΑΒ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$, ὡς δὲ τὸ $ΕΑΔ$ πρὸς τὸ $ΒΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν $ΑΔ$ οὕτως ἡ $ΕΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$. τῶν $ABΓ$, $ΑΔΕ$ ἄρα τριγώνων⁵ ἀντιπεπόμεναι αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Sint æqualia triangula $ABΓ$, $ΑΔΕ$, unum uni æqualem habentia angulum $ΒΑΓ$ ipsi $ΔΑΕ$; dico $ABΓ$, $ΑΔΕ$ triangulorum reciproca esse latera, circa æquales angulos, hoc est esse ut $ΓΑ$ ad $ΑΔ$ ita $ΕΑ$ ad $ΑΒ$.

Ponantur enim ita ut in directum sit $ΓΑ$ ipsi $ΑΔ$; in directum igitur est et $ΕΑ$ ipsi $ΑΒ$. Et jungatur $ΒΔ$.

Et quoniam æquale est $ABΓ$ triangulum ipsi $ΑΔΕ$ triangulo, aliud autem $ΑΒΔ$; est igitur ut $ΓΑΒ$ triangulum ad $ΒΑΔ$ triangulum ita $ΑΔΕ$ triangulum ad $ΒΑΔ$ triangulum. Sed ut $ΓΑΒ$ quidem ad $ΒΑΔ$ ita $ΓΑ$ ad $ΑΔ$, ut $ΕΑΔ$ vero ad $ΒΑΔ$ ita $ΕΑ$ ad $ΑΒ$; et ut igitur $ΓΑ$ ad $ΑΔ$ ita $ΕΑ$ ad $ΑΒ$; ipsorum $ABΓ$, $ΑΔΕ$ igitur triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos.

Soient les triangles égaux $ABΓ$, $ΑΔΕ$, ayant un angle égal à un angle, l'angle $ΒΑΓ$ égal à l'angle $ΔΑΕ$; je dis que les côtés des triangles $ABΓ$, $ΑΔΕ$, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que $ΓΑ$ est à $ΑΔ$ comme $ΕΑ$ est à $ΑΒ$.

Plaçons ces triangles de manière que $ΓΑ$ soit dans la direction de $ΑΔ$; la droite $ΕΑ$ sera dans la direction de $ΑΒ$ (14. 1). Joignons $ΒΔ$.

Puisque le triangle $ABΓ$ est égal au triangle $ΑΔΕ$, et que $ΑΒΔ$ est un autre triangle, le triangle $ΓΑΒ$ est au triangle $ΒΑΔ$ comme le triangle $ΑΔΕ$ est au triangle $ΒΑΔ$ (7. 5). Mais le triangle $ΓΑΒ$ est au triangle $ΒΑΔ$ comme $ΓΑ$ est à $ΑΔ$ (1. 6), et le triangle $ΕΑΔ$ est au triangle $ΒΑΔ$ comme $ΕΑ$ est à $ΑΒ$; donc $ΓΑ$ est à $ΑΔ$ comme $ΕΑ$ est à $ΑΒ$ (11. 5); donc les côtés des triangles $ABΓ$, $ΑΔΕ$, qui sont autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels.

Αλλὰ δὴ ἀντιπιπονήτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν
ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἴστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν
ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ
τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Επιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεὶ ἐστὶν
ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ,
ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ
τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς
τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ
τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ
οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἐκάτερον
ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει
λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ
τριγώνῳ. Τῶν ἄρα ἴσων, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Sed utique reciproca sint latera ipsorum
ΑΒΓ, ΑΔΕ triangulorum, et sit ut ΓΑ ad ΑΔ ita
ΕΑ ad ΑΒ; dico æquale esse ΑΒΓ triangulum
ipsi ΑΔΕ triangulo.

Junctâ enim rursus ΒΔ, quoniam est ut ΓΑ
ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΒ, sed ut ΓΑ quidem ad ΑΔ
ita ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ triangulum, ut ΕΑ
vero ad ΑΒ ita ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ trian-
gulum; ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΒΑΔ ita
ΕΑΔ triangulum ad ΒΑΔ; utrumque igitur ip-
sorum ΑΒΓ, ΑΔΕ ad ΒΑΔ eandem habet ra-
tionem; æquale igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi
ΕΑΔ triangulo. Æqualium igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΣ'.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ
τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ
ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνίῳ· καὶ

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor rectæ proportionales sint, sub
extremis contentum rectangulum æquale est
ipsi sub mediis contento rectangulo; et si sub

Mais que les côtés des triangles ΑΒΓ, ΑΔΕ soient réciproquement propor-
tionnels, c'est-à-dire que ΓΑ soit à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ; je dis que le triangle
ΑΒΓ est égal au triangle ΑΔΕ.

Joignons encore ΒΔ. Puisque ΓΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΒ, que ΓΑ est
à ΑΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ (I. 6), et que ΕΑ est à ΑΒ
comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ, le triangle ΑΒΓ est au triangle ΒΑΔ
comme le triangle ΕΑΔ est au triangle ΒΑΔ (II. 5); donc chacun des triangles
ΑΒΓ, ΑΔΕ a la même raison avec le triangle ΒΑΔ; donc le triangle ΑΒΓ est égal
au triangle ΕΑΔ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les
deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes; et si le

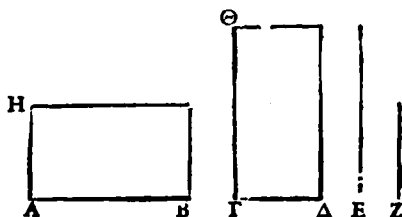
324 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῇ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἴσονται.

Ἐστῶσαν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, E, Z, ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

extremis contentum rectangulum æquale est ipsi sub extremis contento rectangulo, quatuor rectæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; dico sub AB, Z contentum rectangulum æquale esse ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.



Ἡχθῶσαν γὰρ³ ἀπὸ τῆς A, Γ σημείων ταῖς AB, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ AH, τῇ δὲ E ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπληρώσθωσαν τὰ BH, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Z τῇ AH· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν AH· τῶν BH, ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων⁴ ἀντιτεπρόνθασιν αἱ πλευραὶ,

Ducantur enim ab ipsis A, Γ punctis ipsis AB, ΓΔ rectis ad rectos ipsæ AH, ΓΘ, et ponatur ipsi quidem Z æqualis AH, ipsi vero E æqualis ΓΘ, et compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, æqualis autem E quidem ipsi ΓΘ, ipsa vero Z ipsi AH; est igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH; ipsorum BH, ΔΘ igitur parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa æquales an-

rectangle compris sous les extrêmes et égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

Soient AB, ΓΔ, E, Z quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à ΓΔ comme E est à Z; je dis que le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Des points A, Γ, et sur les droites AB, ΓΔ, menons les perpendiculaires AH, ΓΘ (11. 1); faisons AH égal à Z, et ΓΘ égal à E; et achevons les parallélogrammes BH, ΔΘ.

Puisque AB est à ΓΔ comme E est à Z, et que E est égal à ΓΘ, et Z égal à AH, AB est à ΓΔ comme ΓΘ est à AH (7. 5); donc les côtés des parallélogrammes BH, ΔΘ, placés autour des angles égaux, sont réciproquement propor-

αι⁵ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἑκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z, ἴση γὰρ ἡ AH τῇ Z· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E⁶. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ AB, Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, Z τὸ BH, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AH τῇ Z⁸. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, E τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ E· τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ⁹. καὶ ἐστὶν¹⁰ ἰσογώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα

gulos. Quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est BH parallelogrammum ipsi ΔΘ parallelogrammo. Et est BH quidem sub AB, Z, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero ΔΘ ipsum sub ΓΔ, E, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur sub AB, Z contentum rectangulum æquale est ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo.

Sed utique ipsum sub AB, Z contentum rectangulum æquale sit ipsi sub ΓΔ, E contento rectangulo; dico quatuor rectas proportionales fore, ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum sub AB, Z æquale est ipsi sub ΓΔ, E, et est ipsum quidem sub AB, Z ipsum BH, æqualis enim AH ipsi Z; ipsum vero sub ΓΔ, E ipsum ΔΘ, æqualis enim ΓΘ ipsi E; ipsum igitur BH æquale est ipsi ΔΘ; et sunt æquiangula. Æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circa

tionnels. Mais lorsque les côtés des parallélogrammes équiangles, placés autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels, ces parallélogrammes sont égaux (14. 6); donc le parallélograme BH est égal au parallélogramme ΔΘ. Mais le parallélogramme BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z; et le parallélogramme ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc le rectangle compris sous AB, Z est égal au rectangle compris sous ΓΔ, E.

Mais que le rectangle compris sous AB, Z soit égal au rectangle compris sous les droites ΓΔ, E; je dis que ces quatre droites sont proportionnelles, c'est-à-dire que AB est à ΓΔ comme E est à Z.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous AB, Z est égal au rectangle sous ΓΔ, E, que le rectangle BH est sous AB, Z, car AH est égal à Z, et que le rectangle ΔΘ est sous ΓΔ, E, car ΓΘ est égal à E; donc BH est égal à ΔΘ; et ils sont équiangles. Mais les côtés des parallélogrammes égaux et équiangles, placés autour des angles sont égaux, sont réciproquement propor-

326 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἢ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὴν AH . ἴση δὲ ἢ μὲν $\Gamma\Theta$ τῇ E , ἢ δὲ AH τῇ Z . ἔστιν ἄρα ὥς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἢ E πρὸς τὴν Z . Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

α quales angulos; est igitur ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita $\Gamma\Theta$ ad AH . $\mathcal{A}$ qualis autem $\Gamma\Theta$ quidem ipsi E , ipsa vero AH ipsi Z ; est igitur ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita E ad Z . Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὥς ἢ A πρὸς τὴν B οὕτως ἢ B πρὸς τὴν Γ . λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ B ἴση ἢ Δ .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἢ A πρὸς τὴν B οὕτως ἢ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἢ B τῇ Δ . ἔστιν ἄρα ὥς ἢ A πρὸς τὴν B οὕτως ἢ Δ πρὸς τὴν Γ . Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale est ipsi ex mediâ quadrato; et si sub extremis contentum rectangulum æquale sit ipsi ex mediâ quadrato, tres rectæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ proportionales A, B, Γ , ut A ad B ita B ad Γ ; dico sub A, Γ contentum rectangulum æquale esse ipsi ex B quadrato.

Ponatur ipsi B æqualis Δ .

Et quoniam est ut A ad B ita B ad Γ , æqualis autem B ipsi Δ ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ . Si autem quatuor rectæ proportionales sint, sub extremis contentum rectangulum æquale

tionnels (14. 6); donc AB est à $\Gamma\Delta$ comme $\Gamma\Theta$ est à AH ; mais $\Gamma\Theta$ est égal à E , et AH à Z ; donc AB est à $\Gamma\Delta$ comme E est à Z . Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne, ces trois droites seront proportionnelles.

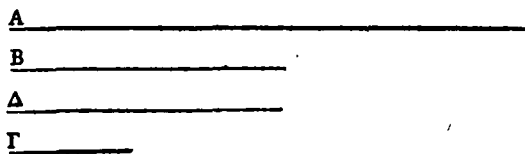
Soient A, B, Γ trois droites proportionnelles, de manière que A soit à B comme B est à Γ ; je dis que le rectangle compris sous A, Γ est égal au carré de B .

Faisons Δ égal à B .

Puisque A est à B comme B est à Γ , et que B égal à Δ , A est à B comme Δ est à Γ . Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous

περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν
μίσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν
Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ
τῶν Β, Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστίν⁴, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ
Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώ-
νιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἴστω τῷ ἀπὸ
τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως
ἡ Β πρὸς τὴν Γ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ
ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ
τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἐστίν⁵, ἴση γὰρ
ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ
ὑπὸ Β, Δ. Εὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσων ἢ τῷ
ὑπὸ τῶν μίσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν
εἰσιν· ἴσταιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ
πρὸς τὴν Γ. Ἰση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς
τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ. Εὰν ἄρα τρεῖς, καὶ
τὰ ἐξῆς.

est ipsi sub mediis contento rectangulo; ip-
sum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub Β,
Δ. Sed ipsum sub Β, Δ ipsum ex Β est, æ-
qualis enim Β ipsi Δ; ipsum igitur sub Α, Γ
contentum rectangulum æquale est ipsi ex Β
quadrato.

Sed et ipsum sub Α, Γ æquale sit ipsi ex
Β; dico esse ut Α ad Β ita Β ad Γ.

Iisdem enim constructis, quoniam ipsum
sub Α, Γ æquale est ipsi ex Β, sed ipsum ex
Β ipsum sub Β, Δ est, æqualis enim Β ipsi
Δ; ipsum igitur sub Α, Γ æquale est ipsi sub
Β, Δ. Si autem ipsum sub extremis æquale est ipsi
sub mediis, quatuor rectæ proportionales sunt;
est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Æqualis au-
tem Β ipsi Δ; ut igitur Α ad Β ita Β ad Γ.
Si igitur tres, etc.

les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes (16. 6); donc
le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Β, Δ. Mais le rectangle
sous Β, Δ est égal au carré de Β, car Β est égal à Δ; donc le rectangle
compris sous Α, Γ est égal au carré de Β.

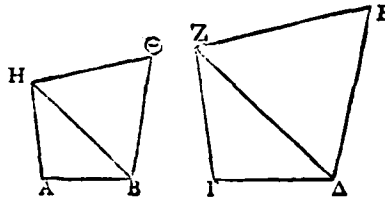
Mais que le rectangle sous Α, Γ soit égal au carré de Β; je dis que Α est
à Β comme Β est à Γ.

Faisons la même construction. Puisque le rectangle sous Α, Γ est égal au
carré de Β, et que le carré de Β est le rectangle sous Β, Δ, car Β est égal
à Δ, le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous les droites Β, Δ. Mais
si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous
les moyennes, les quatre droites sont proportionnelles (16. 6); donc Α est à Β
comme Δ est à Γ. Mais Β est égal à Δ; donc Α est à Β comme Β est à Γ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Απὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ $ΓΕ$ · δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τῷ $ΓΕ$ εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



Ἐπιζεύξω ἡ $ΔΖ$, καὶ συνστήτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς A , B τῇ μὲν πρὸς τῷ $Γ$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ HAB , τῇ δὲ ὑπὸ $ΓΔΖ$ ἴση ἡ ὑπὸ ABH · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΖΔ$ λοιπῇ³ τῇ ὑπὸ AHB ἴστί· ἰσogώνιον ἄρα ἴστί τὸ $ΖΓΔ$ τρίγωνον τῷ HAB τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἴστί· ὡς ἡ $ΖΔ$ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ

Ex datā rectā ipsi dato rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Sit data quidem recta AB , datum autem rectilineum $ΓΕ$; oportet igitur ex AB rectā ipsi $ΓΕ$ rectilineo simileque et similiter positum rectilineum describere.

Jungatur $ΔΖ$, et constituatur ad AB rectam et ad puncta in eā A , B ipsi quidem ad $Γ$ angulo æqualis ipsi sub HAB , ipsi vero sub $ΓΔΖ$ æqualis ipse sub ABH ; reliquus igitur sub $ΓΖΔ$ reliquo sub AHB est æqualis; æquiangulum igitur est $ΖΓΔ$ triangulum ipsi HAB triangulo; proportionaliter igitur est ut $ΖΔ$ ad HB ita

PROPOSITION XVIII.

Sur une droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Soit AB la droite donnée, et $ΓΕ$ la figure rectiligne donnée; il faut sur la droite AB décrire une figure rectiligne semblable à la figure rectiligne $ΓΕ$, et semblablement placée.

Joignons $ΔΖ$, et sur la droite AB et aux points A , B de cette droite, faisons l'angle HAB égal à l'angle en $Γ$, et l'angle ABH égal à l'angle $ΓΔΖ$ (23. 1); l'angle restant $ΓΖΔ$ sera égal à l'angle restant AHB (32. 1); donc les triangles $ΖΓΔ$, HAB sont équiangles; donc $ΖΔ$ est à HB comme $ΖΓ$ est à HA , et comme

ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν, συνιστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὸν ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἔστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ τε ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἔστιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἔστιν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὁμοιον ἄρα ἔστι τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

ZG ad HA et GD ad AB. Rursus, constituatur ad BH rectam et ad puncta in eâ B, H ipsi quidem ΔZE angulo æqualis BHΘ, ipsi vero ΖΔΕ æqualis ΗΒΘ; reliquus igitur ad E reliquo ad Θ est æqualis; æquiangulum igitur est ΖΔΕ triangulum ipsi ΗΒΘ triangulo; proportionaliter igitur est ut ΔΖ ad ΗΒ ita ΖΕ ad ΗΘ, et ΕΔ ad ΘΒ. Ostensum est autem et ut ΖΔ ad ΗΒ et ita ΖΓ ad ΗΑ et ΓΔ ad ΑΒ; et ut igitur ΖΓ ad ΑΗ ita et ΓΔ ad ΑΒ et ΖΕ ad ΗΘ, et adhuc ΕΔ ad ΘΒ. Et quoniam æqualis est ipse quidem ΓΖΔ angulus ipsi ΑΗΒ, ipse vero ΔΖΕ ipsi ΒΗΘ; totus igitur ΓΖΕ toti ΑΗΘ est æqualis. Propter eadem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΒΘ est æqualis, est autem et ipse quidem ad Γ ipsi ad Α æqualis, ipse vero ad Ε ipsi ad Θ; æquiangulum igitur est ΑΘ ipsi ΓΕ, et circa æquales angulos cum ipso latera proportionalia habet; simile igitur est ΑΘ rectilincum ipsi ΓΕ rectilineo.

ΓΔ est à ΑΒ (4. 6). De plus, construisons sur la droite ΒΗ, et aux points Β, Η de cette droite, l'angle ΒΗΘ égal à l'angle ΔΖΕ, et l'angle ΗΒΘ égal à l'angle ΖΔΕ; l'angle restant en Ε sera égal à l'angle restant en Θ; donc les triangles ΖΔΕ, ΗΒΘ sont équiangles; donc ΔΖ est à ΗΒ comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (4. 6). Mais on a démontré que ΖΔ est à ΗΒ comme ΖΓ est à ΗΑ, et comme ΓΔ est à ΑΒ; donc ΖΓ est à ΑΗ comme ΓΔ est à ΑΒ, comme ΖΕ est à ΗΘ, et comme ΕΔ est à ΘΒ (11. 5). Mais l'angle ΓΖΔ est égal à l'angle ΑΗΒ, et l'angle ΔΖΕ égal à l'angle ΒΗΘ; donc l'angle entier ΓΖΕ est égal à l'angle entier ΑΗΘ. Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΒΘ, l'angle en Γ égal à l'angle en Α, et l'angle en Ε égal à l'angle en Θ; donc les figures ΑΘ, ΓΕ sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels entr'eux; donc les deux figures ΑΘ, ΓΕ sont semblables (déf. 1. 6).

330 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Απὸ τῆς δεθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράφεται τὸ ΑΘ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

A datâ igitur rectâ AB dato rectilineo ΓΕ simileque et similiter positum rectilineum descriptum est ΑΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

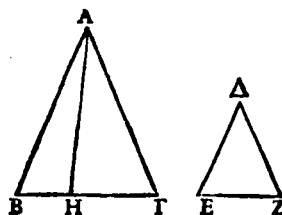
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἴστί τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Εστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσων ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε,

PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se in duplâ ratione sunt homologorum laterum.

Sint similia triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, æqualem habentia ipsum ad Β angulum ipsi ad Ε, ut



ὥς δὲ τὴν AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λόγῳ ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΕΖ.

autem AB ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, ita ut homologum sit ΒΓ ipsi ΕΖ; dico ΑΒΓ triangulum ad ΔΕΖ triangulum duplam rationem habere ejus quam ΒΓ ad ΕΖ.

Donc, sur la droite donnée AB, on a décrit la figure rectiligne ΑΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΓΕ, et semblablement placée. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIX.

Les triangles semblables sont entr'eux en raison double des côtés homologues.

Soient les triangles semblables ΑΒΓ, ΔΕΖ, ayant l'angle en Β égal à l'angle en Ε, et que AB soit à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, de manière que le côté ΒΓ soit l'homologue du côté ΕΖ; je dis que le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΔΕΖ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ.

Είλιφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων² ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὡν δὲ, μίαν μὲν ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων³, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται⁴ ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ

Sumatur enim ipsis ΒΓ, ΕΖ tertia proportionalis ΒΗ, ita ut sit ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; et jungatur ΗΑ.

Et quoniam est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; alterne igitur est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. Sed ut ΒΓ ad ΕΖ ita est ΕΖ ad ΒΗ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΕ ita ΕΖ ad ΒΗ; ipsorum igitur ΑΒΗ, ΔΕΖ triangulorum reciproca sunt latera circa æquales angulos. Quorum autem unum uni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos, æqualia sunt illa; æquale igitur est ΑΒΗ triangulum ipsi ΔΕΖ triangulo. Et quoniam est ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; si autem tres rectæ proportionales sint, prima ad tertiam duplam rationem habere dicitur ejus quam ad secundam; ΒΓ igitur ad ΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad ΑΒΗ triangulum; et ΑΒΓ igitur triangulum ad ΑΒΗ duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. Æquale autem ΑΒΗ

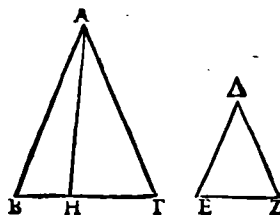
Prenons une troisième proportionnelle ΒΗ aux droites ΒΓ, ΕΖ, de manière que ΒΓ soit à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; et joignons ΗΑ (11. 6).

Puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΔΕ est à ΕΖ, par permutation, ΑΒ est à ΔΕ comme ΒΓ est à ΕΖ (16. 6). Mais ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ; donc ΑΒ est à ΔΕ comme ΕΖ est à ΒΗ (11. 5); donc les côtés des triangles ΑΒΗ, ΔΕΖ, autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels. Mais deux triangles sont égaux entr'eux lorsqu'ils ont un angle égal à un angle, et les côtés autour des angles égaux, réciproquement proportionnels (15. 6); donc le triangle ΑΒΗ est égal au triangle ΔΕΖ. Et puisque ΒΓ est à ΕΖ comme ΕΖ est à ΒΗ, et que lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle que la première a avec la seconde (10. 5), la droite ΒΓ a avec la droite ΒΗ une raison double de celle que ΒΓ a avec ΕΖ. Mais ΒΓ est à ΒΗ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΒΗ (déf. 1. 6); donc le triangle ΑΒΓ a avec le triangle ΑΒΗ une raison double

332 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ABH διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν EZ. Ἰσὸν δὲ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ⁶. καὶ τὸ ABΓ ἕξα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν EZ. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἰζῆς.

triangulum ipsi ΔEZ triangulo; et ABΓ igitur triangulum ad ΔEZ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΓ ad EZ. Ergo similia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Ex δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσιν, ἴστιν ἅς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον⁸ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπεὶ περὶ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν BH οὕτως τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ABH τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔEZ⁹.

Ex hoc utique manifestum est, si tres rectæ proportionales sint, esse ut prima ad tertiam ita ipsum ex primâ triangulum ad ipsum ex secundâ simile et similiter descriptum; quia ostensum est, ut ΓΒ ad BH ita ABΓ triangulum ad ABH triangulum, hoc est ΔEZ.

de celle que ΒΓ a avec EZ. Mais le triangle ABH est égal au triangle ΔEZ; donc le triangle ABΓ a avec le triangle ΔEZ une raison double de celle que ΒΓ a avec EZ (7. 5). Donc, etc.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme le triangle décrit sur la première est au triangle semblable décrit semblablement sur la seconde; puisqu'il a été démontré que ΓΒ est à BH comme le triangle ABΓ est au triangle ABH, c'est-à-dire ΔEZ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

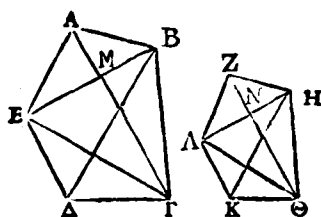
PROPOSITIO XX.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαι-
ρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς
ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον δι-
πλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ
πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ,
ὁμόλογος δὲ ἴστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ

Similia polygona in similia triangula divi-
duntur, et in æqualia multitudine et homo-
loga totis; et polygonum ad polygonum duplam
rationem habet ejus quam homologum latus ad
homologum latus.

Sint similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ho-
mologum vero sit ΑΒ ipsi ΖΗ; dico ΑΒΓΔΕ,



ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρί-
γωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμό-
λογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς
τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει
ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπιζεύχωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

ΖΗΘΚΛ polygona et in similia triangula dividi
et in æqualia multitudine et homologa totis,
et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΛ polygonum
duplam rationem habere ejus quam ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

PROPOSITION XX.

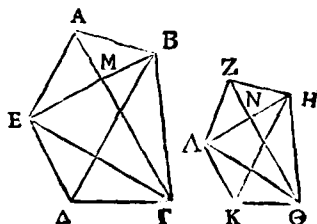
Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables,
égaux en nombre, et homologues aux polygones; et le polygone a avec le
polygone une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté
homologue.

Soient les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et que ΑΒ soit l'homologue de
ΖΗ; je dis que les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ peuvent être divisés en triangles
semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones, et que le po-
lygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que ΑΒ
a avec ΖΗ.

Joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολυγώνον
τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ
γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ
οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά
ἐστὶ τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην
ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς
ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον
τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν
ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη

Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum
ipsi ΖΗΘΚΛ polygono, æqualis est ΒΑΕ an-
gulus ipsi ΗΖΛ; et est ut ΒΑ ad ΑΕ ita
ΖΗ ad ΖΛ. Et quoniam duo triangula sunt
ΑΒΕ, ΖΗΛ unum angulum uni angulo æqua-
lem habentia, circa æquales autem angulos
latera proportionalia; æquiangulum igitur est
ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΛ triangulo, quare et
simile; æqualis igitur est ΑΒΕ angulus ipsi



ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλη τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν
ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ
ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ
ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώ-
νων, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς
ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πο-
λυγώνων, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ
πρὸς ΗΘ· δίσσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ
οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γω-

ΖΗΛ. Est autem et totus ΑΒΓ toti ΖΗΘ æqua-
lis, propter similitudinem polygonorum; re-
liquus igitur ΕΒΓ angulus reliquo ΑΗΘ est
æqualis. Et quoniam propter similitudinem
ipsorum ΑΒΕ, ΖΗΛ triangulorum, est ut ΕΒ
ad ΒΑ ita ΑΗ ad ΗΖ, sed utique et propter si-
militudinem polygonorum, est ut ΑΒ ad ΒΓ, ita
ΖΗ ad ΗΘ; ex æquo igitur est ut ΕΒ ad ΒΓ ita
ΑΗ ad ΗΘ, et circa æquales angulos ΕΒΓ,

Puisque le polygone ΑΒΓΔΕ est semblable au polygone ΖΗΘΚΛ, l'angle
ΒΑΕ est égal à l'angle ΗΖΛ; et ΒΑ est à ΑΕ comme ΖΗ est à ΖΛ. Mais
les deux triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ ont un angle égal à un angle, et les côtés autour
des angles égaux proportionnels; donc les triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ sont équiangles
(6. 6), et par conséquent semblables (4. 6); donc l'angle ΑΒΕ est égal à
l'angle ΖΗΛ. Mais l'angle entier ΑΒΓ est égal à l'angle entier ΖΗΘ, à cause de
la similitude des polygones; donc l'angle restant ΕΒΓ est égal à l'angle res-
tant ΑΗΘ. Mais à cause de la similitude des triangles ΑΒΕ, ΖΗΛ, ΕΒ est à ΒΑ
comme ΑΗ est à ΗΖ, et à cause de la similitude des polygones, ΑΒ est à ΒΓ
comme ΖΗ est à ΗΘ; donc, par égalité, ΕΒ est à ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΘ (22. 5);

νίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΑΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν³. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὁμοιον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὁμοιον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὁμοία πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ εἰς τε ὁμοία τρίγωνα διήρτηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ταυτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἐπίμεινα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΑ, ΑΗΘ, ΑΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ὁμόλογον πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, ταυτέστιν ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπιζεύχθωσαν γάρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ· ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία⁵ τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἢ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ,

ΑΗΘ latera proportionalia sunt; æquiangulum igitur est ΕΒΓ triangulum ipsi ΑΗΘ triangulo, quare et simile adhuc ΕΒΓ triangulum ipsi ΑΗΘ triangulo. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum simile est ipsi ΑΘΚ triangulo; ergo similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ et in similia triacula dividuntur et in æqualia multitudine.

Dico et homologa totis, hoc est, ut proportionalia sint triacula, et antecedentia quidem sint ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, consequentia vero eorum ipsa ΖΗΑ, ΑΗΘ, ΑΘΚ, et ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est, ΑΒ ad ΖΗ.

Junquantur enim ΑΓ, ΖΘ.

Et quoniam propter similitudinem polygonorum æqualis est ΑΒΓ angulus ipsi ΖΗΘ, et est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; æquiangulum est ΑΒΓ triangulum ipsi ΖΗΘ triangulo; æqualis igitur est quidem ΒΑΓ angulus ipsi ΗΖΘ, ipse vero ΒΓΑ ipsi ΗΘΖ. Et quoniam æqualis est ΒΑΜ angulus ipsi ΗΖΝ, ostensum autem est et ΑΒΜ

donc les côtés autour des angles égaux ΕΒΓ, ΑΗΘ sont proportionnels; donc les triangles ΕΒΓ, ΑΗΘ sont équiangles (6. 6); donc le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΑΗΘ. Le triangle ΕΓΔ est semblable au triangle ΑΘΚ, par la même raison (4. 6); donc les polygones semblables ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ sont divisés en triangles semblables et égaux en nombre.

Je dis de plus que ces triangles sont homologues aux polygones, c'est-à-dire que ces triangles sont proportionnels, que les antécédents sont ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, et que leurs conséquents sont ΖΗΑ, ΑΗΘ, ΑΘΚ; et que de plus le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le polygone ΖΗΘΚΑ une raison double de celle qu'un côté a avec un côté, c'est-à-dire de celle que ΑΒ a avec ΖΗ.

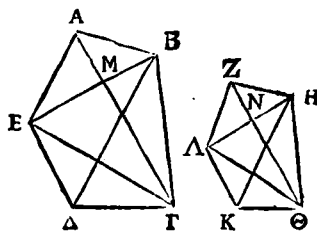
Joignons ΑΓ, ΖΘ.

Puisqu'à cause de la similitude des polygones, l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΖΗΘ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΘ, les triangles ΑΒΓ, ΖΗΘ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΗΖΘ, et l'angle ΒΓΑ égal à l'angle ΗΘΖ. Et puisque l'angle ΒΑΜ est égal à l'angle ΗΖΝ, et qu'il a été

336 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ιδίχθη⁶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABM τῇ ὑπὸ ZHN ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ZNH ἴση ἐστίν⁷. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABM τρίγωνον τῷ ZHN τριγώνῳ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ BMΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ HNΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὥς μὲν ἡ AM πρὸς MB οὕτως ἡ ZN πρὸς NH, ὥς δὲ ἡ BM πρὸς MΓ οὕτως ἡ HN πρὸς NΘ· ὥστε καὶ δίσσου, ὥς ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως ἡ ZN πρὸς NΘ. ΑΛΛ'

ipsi ZHN æqualis; et reliquus igitur **AMB** reliquo ZNH æqualis est; æquiangulum igitur est **ABM** triangulum ipsi **ZHN** triangulo. Similiter utique ostendemus et **BMΓ** triangulum æquiangulum esse ipsi **HNΘ** triangulo; proportionaliter igitur est ut **AM** quidem ad **MB** ita **ZN** ad **NH**, ut vero **BM** ad **MΓ** ita **HN** ad **NΘ**; quare et ex æquo ut **AM** ad **MΓ** ita **ZN** ad **NΘ**. Sed ut **AM** ad **MΓ** ita **ABM** triangulum ad



ὥς μὲν⁸ ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως τὸ ABM τρίγωνον πρὸς MBΓ, καὶ τὸ AME πρὸς EMΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὥς αἱ βάσεις· καὶ ὥς ἄρα⁹ ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ὑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ὑπομένα· ὥς ἄρα τὸ **AMB** τρίγωνον πρὸς τὸ **BMΓ** οὕτως τὸ **ABE** πρὸς τὸ **ΓBE**. ΑΛΛ' ὥς τὸ **AMB** πρὸς τὸ **BMΓ** οὕτως ἡ AM πρὸς MΓ· καὶ ὥς ἄρα ἡ AM πρὸς MΓ οὕτως τὸ **ABE** τρίγωνον πρὸς τὸ

MBΓ, et **AME** ad **EMΓ**, inter se enim sunt ut bases; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut igitur **AMB** triangulum ad **BMΓ** ita **ABE** ad **ΓBE**. Sed ut **AMB** ad **BMΓ** ita **AM** ad **MΓ**; et ut igitur **AM** ad **MΓ** ita **ABE** triangulum ad **EBΓ** triangulum. Propter eadem utique et ut **ZN** ad **NΘ** ita **ZHA** triangulum ad **HAΘ** triangulum. Et est

démontré que l'angle ABM est égal à l'angle ZHN, l'angle restant AMB est égal à l'angle restant ZNH (52. 1); donc les deux triangles ABM, ZHN sont équiangles. Nous démontrerons semblablement que les deux triangles BMΓ, HNΘ sont équiangles; donc AM est à MB comme ZN est à NH, et BM est à MΓ comme HN est à NΘ (4. 6); donc, par égalité, AM est à MΓ comme ZN est à NΘ (22. 5). Mais AM est à MΓ comme le triangle ABM est au triangle MBΓ, et comme le triangle AME est au triangle EMΓ, car ils sont entr'eux comme leurs bases (1. 6), et un des antécédents est à un des conséquents comme tous les antécédents sont à tous les conséquents (12. 5); donc le triangle AMB est au triangle BMΓ comme le triangle ABE est au triangle ΓBE. Mais AMB est à BMΓ comme AM est à MΓ; donc AM est à MΓ comme le triangle ABE est au triangle EBF (11. 5).

ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ¹⁰ ΗΛΘ τρίγωνον. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΑ τρίγωνον, καὶ ἑναλλάξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον¹¹. Ομοίως δὴ διεξομεν, ἐπιειχυθεῖσιν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον¹² πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον¹³ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΑ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον¹⁴ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς

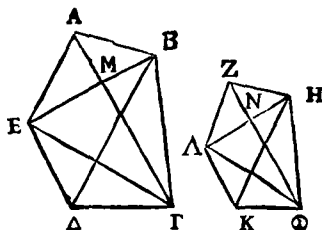
ut AM ad MG ita ZN ad NΘ; et ut igitur ΑΒΕ triangulum ad ΒΕΓ triangulum ita ΖΗΑ triangulum ad ΗΘΑ triangulum, et alterne ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΒΕΓ triangulum ad ΗΛΘ triangulum. Similiter utique ostendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, et ut ΒΕΓ triangulum ad ΗΛΘ triangulum ita ΕΓΔ triangulum ad ΛΘΚ triangulum. Et quoniam est ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ ita ΕΒΓ ad ΛΗΘ, et insuper ΕΓΔ ad ΛΘΚ; et ut igitur unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΑΒΓΔΕ polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum. Sed ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΑΒ homologum latus ad ΖΗ homologum latus; Similia enim triangula in duplâ ratione sunt homologorum laterum; et ΑΒΓΔΕ igitur polygonum ad ΖΗΘΚΑ polygonum duplam ra-

Par la même raison, ΖΝ est à ΝΘ comme le triangle ΖΗΑ est au triangle ΗΛΘ. Mais ΑΜ est à ΜΓ comme ΖΝ est à ΝΘ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΒΕΓ comme le triangle ΖΗΑ est au triangle ΗΘΑ (11. 5), et par permutation, le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΛΘ (16. 5). Nous démontrerons semblablement, après avoir joint ΒΔ, ΗΚ, que le triangle ΒΕΓ est au triangle ΗΛΘ comme le triangle ΕΓΔ est au triangle ΛΘΚ. Et puisque le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΛΗΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ, un des antécédents est à un des conséquents (12. 5); donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le polygone ΑΒΓΔΕ est au polygone ΖΗΘΚΑ. Mais le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que le côté homologue ΑΒ a avec le côté homologue ΖΗ; car les triangles semblables sont en raison double des côtés homologues; donc le polygone ΑΒΓΔΕ a avec le

338 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει
ἢ περ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμό-
λογον πλευράν. Τὰ ἄρα ὅμοια, καὶ τὰ ἑξῆς.

tionem habet ejus quam ΑΒ homologum la-
tus ad ΖΗ homologum latus. Ergo simi-
lia, etc.



ΠΟΡΙΣΜΑ α.

Ὡσαύτως δὴ¹⁵ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύ-
ρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ
τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Εδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν
τριγώνων· ὥστε καὶ¹⁶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύ-
γραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι
λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ὅπερ ἔδει
δείξαι¹⁷.

COROLLARIUM. I.

Similiter utique et in similibus quadrilateris
ostendetur, ea in duplâ ratione esse homo-
logorum laterum. Ostensum autem est et in
triangulis; quare et universe similes rectilineæ
figuræ inter se in duplâ ratione sunt homo-
logorum laterum. Quod oportebat ostendere.

polygone ΖΗΘΚΛ une raison double de celle que le côté homologue ΑΒ a avec
le côté homologue ΖΗ. Donc, etc.

COROLLAIRE I.

On démontrera de la même manière que les quadrilatères sont en raison
double des côtés homologues; mais cela a été démontré pour les triangles
semblables (cor. 19. 6); donc généralement les figures rectilignes semblables
sont entr'elles en raison double des côtés homologues. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.

COROLLARIUM II.

Καὶ ἰὰν τῶν AB, ZH τρίτην ἀνάλογον λάβω-
μεν τὴν Ξ , ἡ AB πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον
ἔχει ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ZH . Ἐχει δὲ καὶ τὸ
πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ¹⁸ τὸ τετρά-
πλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον
ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλε-
υράν¹⁹, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH . ἰδείχθη δὲ
τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καὶ καθό-
λου φανερόν, ὅτι ἰὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον
ᾖσιν, ἴσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως
τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δε-
υτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem Ξ
sumamus, AB ad Ξ duplam rationem habet ejus
quam AB ad ZH . Habet autem et polygonum
ad polygonum, et quadrilaterum ad quadrilate-
rum duplam rationem ejus quam homologum
latus ad homologum latus, hoc est AB ad
 ZH ; ostensum est autem hoc et in triangulis;
quare et universe manifestum est, si tres
rectæ proportionales sint, ut prima ad tertiam
ita futuram esse ipsam a primâ figuram ad ip-
sam a secundâ, similem et similiter descriptam.

ΑΛΛΩΣ.

ALITER.

Δείξομεν δὲ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα
τὰ τρίγωνα.

Ostendemus utique et aliter expeditius ho-
mologa triangula.

COROLLAIRE II.

Si nous prenons une troisième proportionnelle Ξ aux droites AB, ZH , la droite AB aura avec Ξ une raison double de celle que AB a avec ZH (déf. 10. 5). Mais le polygone a avec le polygone, et le quadrilatère avec le quadrilatère une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire, de celle que AB a avec ZH ; et cela a été démontré pour les triangles; il est donc généralement évident que si trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et décrite semblablement sur la seconde.

AUTREMENT.

Nous démontrerons autrement et plus brièvement que les triangles sont homologues.

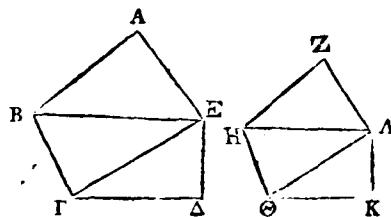
340 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ πολύγωνα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΑ.

Επεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΑ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς

Exponantur enim rursus ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ polygona, et jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ; dico esse ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ et ΓΔΕ ad ΘΚΑ.

Quoniam enim simile est ΑΒΕ triangulum ipsi ΖΗΑ triangulo, ΑΒΕ igitur triangulum ad ΖΗΑ duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΑ. Propter eadem utique et ΕΒΓ triangulum ad ΑΗΘ



τὸ ΗΑΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΑ τρίγωνον²⁰ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΑΗΘ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ, τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΑ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΑ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

triangulum duplam rationem habet ejus quam ΒΕ ad ΗΑ; est igitur ut ΑΒΕ triangulum ad ΖΗΑ triangulum ita ΕΒΓ ad ΑΗΘ. Rursus, quoniam simile est ΕΒΓ triangulum ipsi ΑΗΘ triangulo; ΕΒΓ igitur ad ΑΗΘ duplam rationem habet ejus quam ΓΕ recta ad ΘΑ. Propter eadem utique et ΕΓΔ triangulum ad ΑΘΚ triangulum duplam rationem habet ejus quam ΓΕ ad ΘΑ; est igitur ut ΕΒΓ triangulum ad ΑΗΘ ita ΕΓΔ ad

Soient les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΑ, et joignons ΒΕ, ΕΓ, ΗΑ, ΑΘ; je dis que le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme ΕΒΓ est à ΑΗΘ, et comme ΓΔΕ est à ΘΚΑ.

Puisque les triangles ΑΒΕ, ΖΗΑ sont semblables, le triangle ΑΒΕ a avec le triangle ΖΗΑ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΑ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΒΕΓ a avec le triangle ΗΑΘ une raison double de celle que ΒΕ a avec ΗΑ; donc le triangle ΑΒΕ est au triangle ΖΗΑ comme le triangle ΕΒΓ est au triangle ΑΗΘ (11. 5). De plus, puisque le triangle ΕΒΓ est semblable au triangle ΑΗΘ, le triangle ΕΒΓ a avec le triangle ΑΗΘ une raison double de celle que la droite ΓΕ a avec ΘΑ (19. 6). Par la même raison, le triangle ΕΓΔ a avec le triangle ΑΘΚ une raison double de celle que ΓΕ a avec ΘΑ; donc le

LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 341

πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Εδεί-
χθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ
ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς
τὸ ΖΗΑ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ
πρὸς τὸ ΛΘΚ²¹. Οπιρ ἔδει δείξαι.

ΛΘΚ. Ostensum est autem et ut ΕΒΓ ad ΛΗΘ
ita ΑΒΕ ad ΖΗΑ; et ut igitur ΑΒΕ ad ΖΗΑ ita
ΒΕΓ ad ΗΛΘ et ΕΓΔ ad ΛΘΚ. Quod oportebat
ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

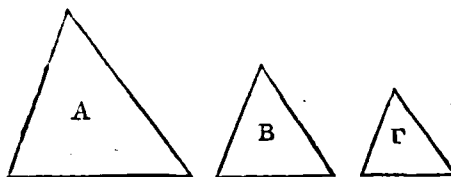
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις
ἰστὶν ὅμοια.

Εστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων
τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἰστὶν
ὅμοιον.

PROPOSITIO XXI.

Ipsa eidem rectilineo similia, et inter se
sunt similia.

Sit enim utrumque ipsorum Α, Β rectili-
neorum ipsi Γ simile; dico et Α ipsi Β esse
simile.



Επιὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι¹ τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιον
τὶ ἰστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας
πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὁμοίόν ἐστι

Quoniam enim est simile Α ipsi Γ, et
æquiangulum est ipsi, et circa æquales an-
gulos latera proportionalia habet. Rursus, quo-

triangle ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ (11. 5). Mais on a démontré que
ΕΒΓ est à ΛΗΘ comme ΑΒΕ est à ΖΗΑ; donc ΑΒΕ est à ΖΗΑ comme ΒΕΓ est à
ΗΛΘ, et comme ΕΓΔ est à ΛΘΚ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Les figures rectilignes semblables à une même figure sont semblables
entr'elles.

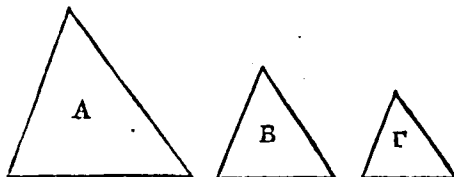
Que chacune des figures rectilignes Α, Β soit semblable à la figure Γ; je
dis que la figure Α est semblable à la figure Β.

Car, puisque la figure Α est semblable à la figure Γ, ces deux figures sont
équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels (déf. 1. 6).

342 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιον τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς
περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει·
ἐκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιον τε ἐστὶ

niam simile est B ipsi Γ, et æquiangulum est
ipsi, et circa æquales angulos latera propor-
tionalia habet; utrumque igitur ipsorum Α,



καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον
ἔχει². Ομοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οπερ εἶδει
διῆξαι.

B ipsi Γ et æquiangulum est et circa æquales
angulos latera proportionalia habet. Simile igitur
est Α ipsi Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εάν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, καὶ τὰ ἀπ'
αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀνα-
γεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· καὶ τὰ ἀπ' αὐ-
τῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγε-
γραμμένα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὗται αἱ εὐθεῖαι
ἀνάλογον ἔσονται.

Si quatuor rectæ proportionales sint, et ab
ipsis rectilinea, similiaque et similiter descripta,
proportionalia erunt; et si ab ipsis rectilinea
similiaque et similiter descripta proportionalia
sint, et ipsæ rectæ proportionales erunt.

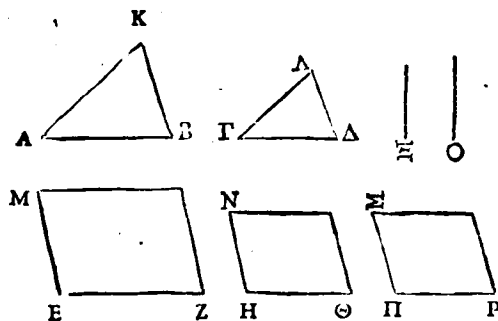
De plus, puisque la figure Β est semblable à la figure Γ, ces deux figures
sont équiangles, et elles ont les côtés autour des angles égaux proportionnels;
donc chacune des figures Α, Β est équiangle avec la figure Γ, et elles ont
les côtés autour des angles égaux proportionnels. Donc la figure Α est sem-
blable à la figure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et
semblablement construites sur ces droites, seront proportionnelles; et si des
figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont
proportionnelles, ces mêmes droites seront proportionnelles.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ KAB , $\Lambda\Gamma\Delta$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ MZ , $N\Theta$. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.

Sint quatuor rectæ proportionales AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, ut AB ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$, et describantur ab ipsis quidem AB , $\Gamma\Delta$ similiaque et similiter posita rectilinea KAB , $\Lambda\Gamma\Delta$, ab ipsis vero EZ , $H\Theta$ similiaque et similiter posita rectilinea MZ , $N\Theta$; dico esse ut KAB ad $\Lambda\Gamma\Delta$ ita MZ ad $N\Theta$.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AB , $\Gamma\Delta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ , τῶν δὲ EZ , $H\Theta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ O . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ὡς δὲ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ $H\Theta$ πρὸς τὴν O . διῶσου ἀρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν O . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB

Sumatur enim ipsis quidem AB , $\Gamma\Delta$ tertia proportionalis Ξ , ipsis vero EZ , $H\Theta$ tertia proportionalis O . Et quoniam est ut AB quidem ad $\Gamma\Delta$ ita EZ ad $H\Theta$, ut $\Gamma\Delta$ vero ad Ξ ita $H\Theta$ ad O ; ex æquo igitur est ut AB ad Ξ ita EZ ad O . Sed ut AB quidem ad Ξ ita KAB ad

Soient AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ quatre droites proportionnelles, de manière que AB soit à $\Gamma\Delta$ comme EZ est à $H\Theta$; soient décrites sur les droites AB , $\Gamma\Delta$ les figures rectilignes semblables et semblablement placées KAB , $\Lambda\Gamma\Delta$, et sur les droites EZ , $H\Theta$, les figures semblables et semblablement placées MZ , $N\Theta$; je dis que KAB est à $\Lambda\Gamma\Delta$ comme MZ est à $N\Theta$.

Prenons une troisième proportionnelle Ξ aux droites AB , $\Gamma\Delta$, et une troisième proportionnelle O aux droites EZ , $H\Theta$ (11. 6). Puisque AB est à $\Gamma\Delta$ comme EZ est à $H\Theta$, [et que $\Gamma\Delta$ est à Ξ comme $H\Theta$ est à O], par égalité, AB est à Ξ comme EZ est à O (22. 5). Mais AB est à Ξ comme KAB est

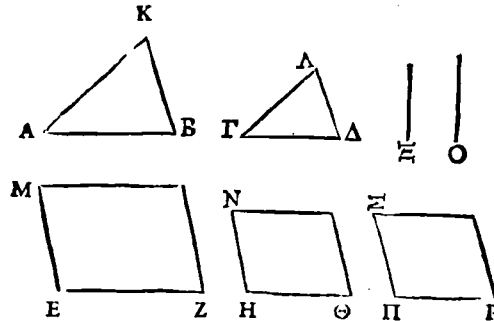
344 LE SIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὴν Ξ οὕτως τὸ KAB πρὸς τὰ ΛΓΔ , ὥς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ · καὶ³ ὥς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ .

ΛΓΔ , ut EZ vero ad Ο ita MZ ad ΝΘ ; et ut igitur KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad ΝΘ .

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὥς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΝΘ · λέγω ὅτι ἔστι καὶ ὥς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΗΘ .

Sed et sit ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad ΝΘ ; dico esse et ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ .



Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὥς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως EZ πρὸς τὴν ΗΘ , ἔστω⁵ ὥς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁπετέρω τῶν MZ , ΝΘ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ .

Si enim non est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΗΘ , sit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ , et describatur a ΠΡ alterutri ipsorum MZ , ΝΘ simileque et similiter positum rectilineum ΣΡ .

Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὥς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΠΡ , καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν AB , ΓΔ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB , ΛΓΔ , ἀπὸ δὲ τῶν EZ , ΠΡ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως

Et quoniam est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠΡ , et descripta sunt ab ipsis quidem AB , ΓΔ , similiaque et similiter posita KAB , ΛΓΔ , ab ipsis vero EZ , ΠΡ , similiaque et similiter posita

ἀ ΛΓΔ (cor. 2. prop. 20. 6), et EZ est ἀ Ο comme MZ est ἀ ΝΘ ; donc KAB est ἀ ΛΓΔ comme MZ est ἀ ΝΘ (11. 5).

Mais que KAB soit ἀ ΛΓΔ comme MZ est ἀ ΝΘ ; je dis que AB est ἀ ΓΔ comme EZ est ἀ ΗΘ .

Car si AB n'est pas ἀ ΓΔ comme EZ est ἀ ΗΘ , que AB soit ἀ ΓΔ comme EZ est ἀ ΠΡ (12. 6), et sur ΠΡ décrivons la figure rectiligne ΠΡ de manière qu'elle soit semblable à chacune des figures MZ , ΝΘ , et semblablement placée (18. 6).

Puisque AB est ἀ ΓΔ comme EZ est ἀ ΠΡ , que les figures KAB , ΛΓΔ décrites sur AB , ΓΔ sont semblables et semblablement placées, et que les figures

κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΠΡ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΘΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΘΗ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς,

ΜΣ, ΣΡ; est igitur ut ΚΑΒ ad ΑΓΔ ita ΜΖ ad ΣΡ. Ponitur autem et ut ΚΑΒ ad ΑΓΔ ita ΜΖ ad ΝΘ; et ut igitur ΜΖ ad ΣΡ ita ΜΖ ad ΝΘ; ergo ΜΖ ad utrumque ipsorum ΝΘ, ΣΡ eandem habet rationem; æquale igitur est ΝΘ ipsi ΣΡ. Est autem ipsi simile et similiter positum; æqualis igitur ΘΗ ipsi ΠΡ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΠΡ, æqualis autem ΠΡ ipsi ΘΗ; est igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΕΖ ad ΘΗ. Si igitur quatuor, etc.

Λ Η Μ Μ Α.

LEMMA.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ἢ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείζομεν οὕτως.

Ἐστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Si autem rectilinea æqualia sint et similia, homologa ipsorum latera æqualia inter se esse, sic ostendemus.

Sint æqualia et similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ, et sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ; dico æqualem esse ΡΠ ipsi ΘΗ.

ΜΖ, ΣΡ décrites sur les droites ΕΖ, ΠΡ sont semblables et semblablement placées, la figure ΚΑΒ est à la figure ΑΓΔ comme ΜΖ est à ΣΡ. Mais on a supposé que ΚΑΒ es: à ΑΓΔ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc ΜΖ est à ΣΡ comme ΜΖ est à ΝΘ; donc la figure ΜΖ a la même raison avec chacune des figures ΝΘ, ΣΡ (11. 5); donc la figure ΝΘ est égale à la figure ΣΡ (9. 5). Mais elle lui est semblable, et elle est semblablement placée; donc ΘΗ est égal à ΠΡ (lem. suiv.). Et puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΠΡ, et que ΠΡ est égal à ΘΗ, ΑΒ est à ΓΔ comme ΕΖ est à ΘΗ (7. 5). Donc, etc.

LEMME.

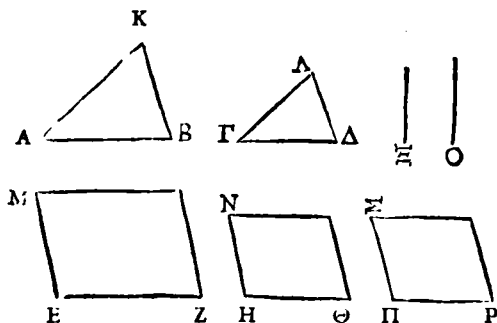
Si des figures rectilignes sont égales et semblables, nous démontrerons de cette manière que leurs côtés homologues sont égaux entr'eux.

Que les figures rectilignes ΝΘ, ΣΡ soient égales et semblables, et que ΘΗ soit à ΗΝ comme ΡΠ est à ΠΣ; je dis que ΡΠ est égal à ΘΗ.

346 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ ἀνισοὶ εἴσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων,

Si enim inæquales sint, una ipsarum major est. Sit major ΡΠ ipsâ ΘΗ. Et quoniam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ, et alterne ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. Major autem ΠΡ ipsâ ΘΗ; major igitur et ΠΣ ipsâ



ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ἔπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἀνισοὶ ἐστὶν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

HN; quare et ΡΣ majus est ipso ΘΝ; sed et æquale, quod est impossibile; non igitur inæqualis est ΠΡ ipsi ΗΘ, æqualis igitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent compositam ex lateribus.

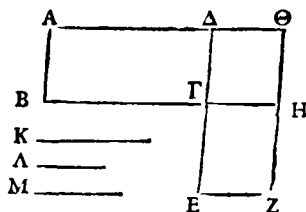
Car si ces droites sont inégales, une d'elles est plus grande. Que ΡΠ soit plus grand que ΘΗ. Puisque ΡΠ est à ΠΣ comme ΘΗ est à ΗΝ, par permutation, ΡΠ est à ΘΗ comme ΠΣ est à ΗΝ (16. 5). Mais ΠΡ est plus grand que ΘΗ; donc ΠΣ est plus grand que ΗΝ; donc la figure ΡΣ est plus grande que la figure ΘΝ (20. 6); mais elle lui est égale, ce qui est impossible; donc les droites ΠΡ, ΗΘ ne sont pas inégales; donc elles sont égales. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Εστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσῃ ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγχείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ'.

Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum ipsi ΕΓΗ; dico ΑΓ parallelogrammum ad ΓΖ parallelogrammum rationem habere compositam ex lateribus, ex eâ quam habet ΒΓ ad ΓΗ et ex eâ quam habet ΔΓ ad ΓΕ.



Κεῖσθω γάρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπληρωσθὼ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκεῖσθω τὴς εὐθείας ἡ Κ, καὶ γηγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Α, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Α καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοὶ εἰσὶ τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Αλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Α λόγου καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς

Ponantur enim ita ut in directum sit ΒΓ ipsi ΓΗ; in directum igitur est et ΔΓ ipsi ΓΕ; et compleatur ΔΗ parallelogrammum, et exponatur quædam recta Κ, et fiat ut ΒΓ quidem ad ΓΗ ita Κ ad Α, ut ΔΓ vero ad ΓΕ ita Α ad Μ.

Rationes igitur et ipsius Κ ad Α et ipsius Α ad Μ eadem sunt quæ rationes laterum, et ipsius ΒΓ ad ΓΗ et ipsius ΔΓ ad ΓΕ. Sed ipsius Κ ad Μ ratio componitur et ex ratione ipsius Κ ad Α et ex ratione ipsius Α ad Μ;

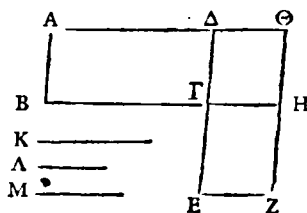
Soient les parallélogrammes équiangles ΑΓ, ΓΖ, ayant l'angle ΒΓΔ égal à l'angle ΕΓΗ; je dis que le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés, c'est-à-dire de celle que ΒΓ a avec ΓΗ, et de celle que ΔΓ a avec ΓΕ.

Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite ΒΓ soit dans la direction de la droite ΓΗ; la droite ΔΓ sera dans la direction de ΓΕ (14. 1). Achévon le parallélogramme ΔΗ; prenons une droite quelconque Κ; faisons en sorte que ΒΓ soit à ΓΗ comme Κ est à Α, et que ΔΓ soit à ΓΕ comme Α est à Μ (12. 6).

Les raisons de Κ à Α et de Α à Μ seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est-à-dire que celle de ΒΓ à ΓΗ et que celle de ΔΓ à ΓΕ. Mais la raison de Κ à Μ est composée de celle de Κ à Α, et de celle de Α à

τὴν M^2 . ἄστε καὶ ἡ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τὸν συγχείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$. ἀλλ' ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΗ$ οὕτως ἡ K πρὸς τὴν $Λ$ καὶ ὡς ἄρα ἡ K πρὸς τὴν $Λ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΘ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$ οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$. ἀλλ' ὡς ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$

quare et K ad M rationem habet compositam ex lateribus. Et quoniam est ut $BΓ$ ad $ΓΗ$ ita $ΑΓ$ parallelogrammum ad $ΓΘ$; sed ut $BΓ$ ad $ΓΗ$ ita K ad $Λ$; et ut igitur K ad $Λ$ ita $ΑΓ$ ad $ΓΘ$. Rursus, quoniam est ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita $ΓΘ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$; sed ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita $Λ$ ad M ; et ut igitur $Λ$ ad M ita $ΓΘ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$ parallelogrammum.



οὕτως ἡ $Λ$ πρὸς τὴν M καὶ ὡς ἄρα ἡ $Λ$ πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἰδείχθη, ὡς μὲν ἡ K πρὸς τὴν $Λ$ οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ $Λ$ πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΓΘ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον³. διῆτου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ K πρὸς τὴν M οὕτως τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $ΓΖ$ παραλληλόγραμμον⁴. Ἡ δὲ K πρὸς τὴν M

Quoniam igitur ostensum est ut K quidem ad $Λ$ ita $ΑΓ$ parallelogrammum ad $ΓΘ$ parallelogrammum, ut $Λ$ vero ad M ita $ΓΘ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$ parallelogrammum; ex æquo igitur est ut K ad M ita $ΑΓ$ parallelogrammum ad $ΓΖ$ parallelogrammum. At vero K ad M rationem habet compositam ex lateribus; et $ΑΓ$ igitur ad $ΓΖ$ rationem ha-

M ; donc la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés. Et puisque $BΓ$ est à $ΓΗ$ comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΘ$ (1. 6), et que $BΓ$ est à $ΓΗ$ comme K est à $Λ$, K est à $Λ$ comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΘ$ (11. 5). De plus, puisque $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme le parallélogramme $ΓΘ$ est au parallélogramme $ΓΖ$, et que $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme $Λ$ est à M (1. 6), $Λ$ est à M comme le parallélogramme $ΓΘ$ est au parallélogramme $ΓΖ$ (11. 5). Mais on a démontré que K est à $Λ$ comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΘ$, et $Λ$ est à M comme le parallélogramme $ΓΘ$ est au parallélogramme $ΓΖ$; donc, par égalité, K est à M comme le parallélogramme $ΑΓ$ est au parallélogramme $ΓΖ$ (22. 5). Mais la

λόγον ἔχει τὴν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ
ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ
τῶν πλευρῶν. Τὰ ἄρα ἰσογώνια, καὶ τὰ ἑξῆς.

bet compositam ex lateribus. Ergo æquian-
gula, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

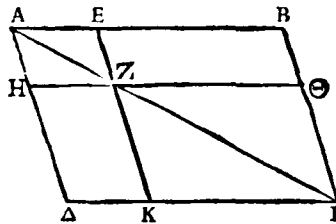
PROPOSITIO XXIV.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διά-
μετρον παραλληλόγραμμα ὁμοιά ἐστι τῷ τε
ἑλῶ καὶ ἀλλήλοις.

Omnis parallelogrammi circa diametrum pa-
rallelogramma similia sunt et toti et inter se.

Εστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμε-
τρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλλη-
λόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον
τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὁμοιόν ἐστιν
ἑλῶ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Sit parallelogrammum ΑΒΓΔ, diameter au-
tem ejus ipsa ΑΓ, circa ΑΓ autem parallelo-
gramma sicut ΕΗ, ΘΚ; dico utrumque ipsorum
ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum simile esse toti
ΑΒΓΔ et inter se.



Επεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν
πλευρῶν τὴν ΒΓ ἤκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς

Quoniam enim trianguli ΑΒΓ juxta unum
laterum ΒΓ ducta est ΕΖ, proportionaliter est

droite κ a avec la droite m une raison composée des côtés; donc le parallé-
gramme αΓ a avec le parallélogramme ρζ une raison composée des côtés.
Donc, etc.

PROPOSITION XXIV.

Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes autour de la diagonale
sont semblables au parallélogramme entier et semblables entr'eux.

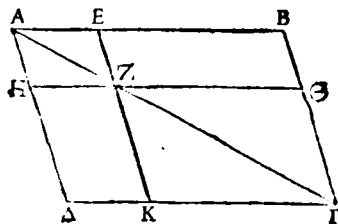
Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de la
diagonale ΑΓ, soient les parallélogrammes ΕΗ, ΘΚ; je dis que les parallélogrammes
ΕΗ, ΘΚ sont semblables au parallélogramme entier ΑΒΓΔ, et semblables entr'eux.

Puisqu'on a mené ΕΖ parallèle à un des côtés ΒΓ du triangle ΑΒΓ, la droite

350 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς BE πρὸς τὴν EA οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν² τὴν ΓΔ ἤκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα³ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ΑΛΛ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως εἰδείχθη καὶ ἡ BE πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντιθέντι⁵ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν⁶ ΑΗ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς

ut BE ad EA ita ΓΖ ad ΖΑ. Rursus, quoniam trianguli ΑΓΔ juxta unum laterum ΓΔ ducta est ΖΗ, proportionaliter igitur est ut ΓΖ ad ΖΑ ita ΔΗ ad ΗΑ. Sed ut ΓΖ ad ΖΑ ita ostensa est et BE ad ΕΑ; et ut igitur BE ad ΕΑ ita ΔΗ ad ΗΑ, et per compositionem, ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΑ ad ΑΗ, et alterne ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΕΑ ad ΑΗ; ipsorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ parallelogrammorum proportionalia sunt latera



τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ⁷ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ⁸, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ΑΓΒ

circa communem angulum ΒΑΔ. Et quoniam parallela est ΗΖ ipsi ΔΓ, æqualis est ipse quidem ΑΗΖ angulus ipsi ΑΔΓ, ipse vero ΗΖΑ ipsi ΔΓΑ, et communis duobus triangulis ΑΔΓ, ΑΗΖ ipse ΔΑΓ angulus; æquiangulum igitur est ΑΔΓ triangulum ipsi ΑΗΖ triangulo. Propter eadem utique et ΑΓΒ triangulum æquiangulum est ipsi ΑΖΕ triangulo; et totum igitur ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsi ΕΗ parallelo-

BE est à EA comme ΓΖ est à ΖΑ (2. 6). De plus, puisqu'on a mené ΖΗ parallèle à un des côtés ΓΔ du triangle ΑΓΔ, la droite ΓΖ est à ΖΑ comme ΔΗ est à ΗΑ. Mais on a démontré que ΓΖ est à ΖΑ comme BE est à ΕΑ; donc BE est à ΕΑ comme ΔΗ est à ΗΑ (11. 5); et par composition, ΒΑ est à ΑΕ comme ΔΑ est à ΑΗ (18. 5), et par permutation, ΒΑ est à ΑΔ comme ΕΑ est à ΑΗ (16. 5); donc les côtés des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ autour de l'angle commun ΒΑΔ sont proportionnels. Et puisque ΗΖ est parallèle à ΔΓ, l'angle ΑΗΖ est égal à l'angle ΑΔΓ (29. 1), et l'angle ΗΖΑ égal à l'angle ΔΓΑ; mais l'angle ΔΑΓ est commun aux deux triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ; donc les triangles ΑΔΓ, ΑΗΖ sont équi-

τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ AZE τρίγωνον· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἐστίν⁹. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ἡ¹⁰ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἰδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· διῆσθαι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ABΓΔ, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν ἐσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ¹¹ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστίν· ἐκείτηρον ἄρα τῶν EH, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ABΓΔ παραλληλογράμμῳ¹² ὁμοίον ἐστὶ. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ EH ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὁμοίον ἐστὶ. Παντὸς ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

grammo æquiangulum est; proportionaliter igitur est ut ΑΔ ad ΔΓ ita ΑΗ ad ΗΖ. Ut autem ΔΓ ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, ut ΑΓ vero ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ, et insuper ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΖΕ ad ΕΑ; et quoniam ostensum est ut ΔΓ quidem ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, ut ΑΓ vero ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ; ex æquo igitur est ut ΔΓ ad ΒΓ ita ΗΖ ad ΖΕ. Ipsorum igitur ABΓΔ, EH parallelogrammorum proportionalia sunt latera circa æquales angulos; simile igitur est ABΓΔ parallelogrammum ipsi EH parallelogrammo. Propter eadem utique et ABΓΔ parallelogrammum et ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est; utrumque igitur ipsorum EH, ΘΚ parallelogrammorum ipsi ABΓΔ parallelogrammo simile est. Ipsa autem eidem rectilineo similia, et inter se sunt similia; et EH igitur parallelogrammum ipsi ΘΚ parallelogrammo simile est. Omnis igitur, etc.

angles. Les triangles AΓB, AZE sont équiangles, par la même raison; donc le parallélogramme entier ABΓΔ, et le parallélogramme EH sont équiangles; donc ΑΔ est à ΔΓ comme ΑΗ est à ΗΖ (4. 6). Mais ΔΓ est à ΓΑ comme ΗΖ est à ΖΑ, et ΑΓ est à ΓΒ comme ΑΖ est à ΖΕ, de plus, ΓΒ est à ΒΑ comme ΖΕ est à ΕΑ, et l'on a démontré que ΔΓ est à ΓΑ comme ΗΖ est à ΖΑ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme ΑΖ est à ΖΕ; donc, par égalité, ΔΓ est à ΒΓ comme ΗΖ est à ΖΕ (22. 5); donc les côtés des parallélogrammes ABΓΔ, EH, autour des angles égaux, sont proportionnels; donc le parallélogramme ABΓΔ est semblable au parallélogramme EH (déf. 1. 6). Le parallélogramme ABΓΔ est semblable au parallélogramme ΘΚ, par la même raison; donc chacun des parallélogrammes EH, ΘΚ est semblable au parallélogramme ABΓΔ. Mais les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont semblables entr'elles (21. 6); donc le parallélogramme EH est semblable au parallélogramme ΘΚ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

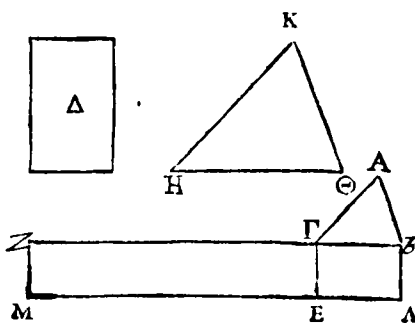
PROPOSITIO XXV.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον, καὶ ἄλλῃ τῷ
δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Εστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὁμοιον
σύστησασθαι, τὸ $ABΓ$, ᾧ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ . δεῖ
δὲ τῷ μὲν $ABΓ$ ὁμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ
σύστησασθαι.

Dato rectilineo simile, et alteri dato æquale
idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet
simile constituere, ipsum $ABΓ$, cui vero oportet
æquale ipsum Δ ; oportet igitur ipsi quidem
 $ABΓ$ simile, ipsi vero Δ æquale idem consti-
tuere.



Παραβελήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν $BΓ$ τῷ $ABΓ$
τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ BE , παρὰ
δὲ τὴν $ΓE$ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ΓM$
ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ZΓE$, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ $ΓBA$.
ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $BΓ$ τῇ $ΓZ$, ἡ δὲ AE

Applicetur enim ad ipsam quidem $BΓ$ ipsi
 $ABΓ$ triangulo æquale parallelogrammum BE ,
ad ipsam vero $ΓE$ ipsi Δ æquale parallelo-
grammum $ΓM$ in angulo $ZΓE$, qui est æqualis
ipsi $ΓBA$; in directum igitur est $BΓ$ quidem

PROPOSITION XXV.

Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée
et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Soit $ABΓ$ la figure rectiligne donnée, à laquelle il faut construire une figure
semblable, et Δ la figure rectiligne à laquelle il faut la faire égale; il faut
construire une figure qui soit semblable à la figure $ABΓ$ et égale à la figure Δ .

Construisons sur $BΓ$ un parallélogramme BE qui soit égal au triangle $ABΓ$
(44 et 45. 1), et sur $ΓE$ et dans l'angle $ZΓE$ qui est égal à l'angle $ΓBA$,
construisons un parallélogramme $ΓM$ qui soit égal à la figure Δ ; la droite $BΓ$
sera dans la direction de $ΓZ$, et AE dans la direction de EM (14. 1). Prenons

τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μίση ἀνάλογον ἢ ΗΘ, καὶ ἀναγινράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὁμοίον τε² καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἰὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἔστιν³ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διυτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον⁴. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἰσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ

ipsi ΓΖ, ipsa vero ΑΕ ipsi ΕΜ. Et sumatur inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, et describatur ex ΗΘ ipsi ΑΒΓ simileque et similiter positum ipsum ΚΗΘ.

Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ proportionales sint, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figura ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; est igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum. Sed et ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; et ut igitur ΑΒΓ triangulum ad ΚΗΘ triangulum ita ΒΕ parallelogrammum ad ΕΖ parallelogrammum; alterne igitur ut ΑΒΓ triangulum ad ΒΕ parallelogrammum ita ΚΗΘ triangulum ad ΕΖ parallelogrammum. Æquale autem ΑΒΓ triangulum ipsi ΒΕ parallelogrammo; æquale igitur et ΚΗΘ triangulum ipsi ΕΖ parallelogrammo. Sed ΕΖ parallelogrammum ipsi Δ est æquale; et ΚΗΘ igitur ipsi Δ est æquale. Est autem ΚΗΘ et ipsi ΑΒΓ simile; ipsi igitur dato

une moyenne proportionnelle ΗΘ entre les droites ΒΓ, ΓΖ (15. 6), et sur ΗΘ construisons une figure ΚΗΘ semblable à la figure ΑΒΓ et semblablement placée (18. 6).

Puisque ΒΓ est à ΗΘ comme ΗΘ est à ΓΖ, et puisque, lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable construite sur la seconde, et semblablement placée (cor. 2. prop. 20. 6), la droite ΒΓ est à la droite ΓΖ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ. Mais ΒΓ est à ΓΖ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ (1. 6); donc le triangle ΑΒΓ est au triangle ΚΗΘ comme le parallélogramme ΒΕ est au parallélogramme ΕΖ; donc, par permutation, le triangle ΑΒΓ est au parallélogramme ΒΕ comme le triangle ΚΗΘ est au parallélogramme ΕΖ (16. 5). Mais le triangle ΑΒΓ est égal au parallélogramme ΒΕ; donc le triangle ΚΗΘ est égal au parallélogramme ΕΖ. Mais le parallélogramme ΕΖ est égal à la figure Δ; donc le triangle ΚΗΘ est égal à la figure Δ.

354 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἴστί· ἔστιν ἴσον. Ἐστὶ δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον· τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ⁵ ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.

rectilineo ΑΒΓ simile, et alteri dato Δ æquale idem constitutum est ΚΗΘ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

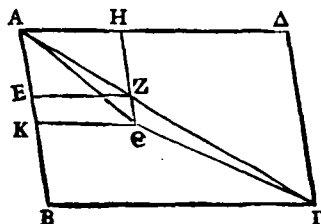
Εὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὁμοίον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἴστί τῷ ὅλῳ.

Απὸ παραλληλογράμμου γάρ¹ τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφηρήσθω² τὸ ΑΕΖΗ, ὁμοίον

PROPOSITIO XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur, et simile toti et similiter positum, communem angulum habens cum ipso, circa eandem diametrum est circa quam totum.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum auferatur ΑΕΖΗ, simile ipsi ΑΒΓΔ



τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἴστί τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

et similiter positum, communem angulum habens ΔΑΒ cum ipso; dico circa eandem diametrum esse ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΑΕΖΗ.

Mais le triangle ΚΗΘ est semblable au triangle ΑΒΓ; on a donc construit la figure ΚΗΘ semblable à la figure rectiligne donnée ΑΒΓ, et égale à une autre figure donnée Δ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.

Que du parallélogramme ΑΒΓΔ on retranche le parallélogramme ΑΕΖΗ, semblable au parallélogramme ΑΒΓΔ et semblablement placé, et ayant avec lui l'angle commun ΔΑΒ; je dis que le parallélogramme ΑΒΓΔ est autour de la même diagonale que le parallélogramme ΑΕΖΗ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διά-
μετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ
τὸ Θ³, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ
παράλληλος ἡ ΟΚ.

Επεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τὸ
ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ⁵.
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ
πρὸς τὴν ΑΚ. Ἐπτι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα
τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ, καὶ⁶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕ-
τως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς
τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα⁷
πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·
ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι,
ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ⁸ ἔστι περὶ τὴν
αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐ-
τὴν ἄρα ἔστι διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλό-
γραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ἄρα
ἀπὸ παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἐξῆς.

Non enim, sed si possibile, sit ipsius
diameter ΑΘΓ, et ejecta ΗΖ producat ad Θ,
et ducatur per Θ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ
parallela ΟΚ.

Quoniam igitur circa eandem diametram
est ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ, si-
mile est ΑΒΓΔ ipsi ΚΗ; est igitur ut ΔΑ ad
ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. Est autem et propter simi-
litudinem ipsorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, et ut ΔΑ ad ΑΒ
ita ΗΑ ad ΑΕ; et ut igitur ΗΑ ad ΑΚ ita ΗΑ ad
ΑΕ; ipsa ΗΑ igitur ad utramque ipsarum ΑΚ,
ΑΕ eandem habet rationem; æqualis igitur est
ΑΕ ipsi ΑΚ, minor majori, quod est impossi-
bile; non igitur non est circa eandem diame-
trum ipsum ΑΒΓΔ circa quam ipsum ΚΗ; circa
eamdem igitur est diametrum ipsum ΑΒΓΔ
parallelogrammum quam ΑΕΖΗ parallelogram-
mum. Si igitur a parallelogrammo, etc.

Que cela ne soit point, mais, si cela est possible, que ΑΘΓ soit sa diagonale;
prolongeons ΗΖ vers Θ, et par le point Θ menons ΟΚ parallèle à l'une ou
à l'autre des droites ΑΔ, ΒΓ.

Puisque les parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΚΗ sont autour de la même diagonale,
le parallélogramme ΑΒΓΔ est semblable au parallélogramme ΚΗ (24. 6); donc
ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΚ (déf. 1. 6). Mais à cause de la similitude
des parallélogrammes ΑΒΓΔ, ΕΗ, la droite ΔΑ est à ΑΒ comme ΗΑ est à ΑΕ;
donc ΗΑ est à ΑΚ comme ΗΑ est à ΑΕ (11. 5); donc ΗΑ a la même raison
avec chacune des droites ΑΚ, ΑΕ; donc ΑΕ est égal à ΑΚ (9. 5), le plus
petit au plus grand, ce qui est impossible; donc les parallélogrammes ΑΒΓΔ,
ΚΗ ne peuvent point ne pas être autour de la même diagonale; donc les pa-
rallélogrammes ΑΒΓΔ, ΑΕΖΗ sont autour de la même diagonale. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

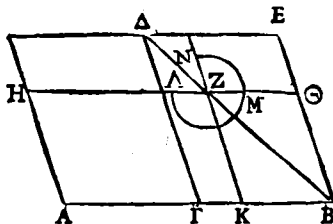
PROPOSITIO XXVII.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν παρα-
βαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόν-
των ἰδίᾳ παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ
ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγρα-
φομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας
παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὃν
τῷ ἑλλείμματι.

Εστω εὐθεΐα ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ
τὸ Γ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αὐτὴν AB
εὐθεΐαν τὸ AD παραλληλόγραμμον ἑλλειπὸν ἰδίᾳ

Omnium ad eandem rectam applicatorum
parallelogammorum et deficientium figuris
parallelogammis, similibusque et similiter
positis ipsi ex dimidiâ descripto, maximum
est ipsum ad dimidiam applicatum parallelo-
grammum, simile existens defectui.

Sit recta AB , et secetur bifariam in Γ , et
applicetur ad eandem AB rectam ipsum AD
parallelogammum deficientis figurâ parallelo-



παραλληλογράμμῳ τῷ GE , ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως
κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς
 AB^2 , τουτίστι τῆς GB · λέγω ὅτι πάντων τῶν

grammâ GE , similique et similiter positâ ei ex
dimidiâ AB descriptâ, hoc est ex ipsâ GB ; dico
omnium ad AB applicatorum parallelogam-

PROPOSITION XXVII.

De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite, et qui sont défailants de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite, et semblablement placés, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut.

Soit la droite AB ; que cette droite soit coupée en deux parties égales au point Γ , et qu'à la droite AB soit appliqué le parallélogramme AD , défailant du parallélogramme GE , semblable à celui qui est décrit sur la moitié de la droite AB , c'est-à-dire sur GB , et semblablement placé; je dis que de tous les parallélo-

παρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἑλλειπόντων εἶδισι παραλληλογράμμοις³ ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ $ΓΕ$, μίγιστόν ἐστι τὸ $ΑΔ$. Παραβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν AB εὐθεῖαν τὸ AZ παραλληλόγραμμον, ἑλλειπόντων εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ $ΚΘ$, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ $ΓΕ$. λέγω ὅτι μείζον ἐστι τὸ $ΑΔ$ τοῦ AZ .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίόν ἐστι τὸ $ΓΕ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΚΘ$ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἶσι διάμετρον. Ἡχθῶ αὐτῶν διάμετρος ἡ $ΔΒ$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓΖ$ τῷ $ΖΕ$, κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΚΘ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΘ$ ὅλῳ τῷ $ΚΕ$ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ $ΓΘ$ τῷ $ΓΗ$ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ ἴση ἐστίν⁵. καὶ τὸ $ΗΓ$ ἄρα τῷ $ΕΚ$ ἐστὶν ἴσον⁶. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΓΖ$. ὅλον ἄρα τὸ AZ τῷ $ΑΜΝ$ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ὥστε⁷ τὸ $ΓΕ$ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ $ΑΔ$, τοῦ AZ παραλληλογράμμου μείζον ἐστίν.

morum, et deficientium figuris parallelogrammis similibusque et similiter positis ipsi $ΓΕ$, maximum esse $ΑΔ$. Applicetur enim ad AB rectam ipsum AZ parallelogrammum, deficient figurâ parallelogrammâ $ΚΘ$, similique et similiter positâ ipsi $ΓΕ$; dico majus esse $ΑΔ$ ipso AZ .

Quoniam simile enim est $ΓΕ$ parallelogrammum ipsi $ΚΘ$ parallelogrammo, circa eandem sunt diametrum. Ducatur eorum diameter $ΔΒ$, det escribatur figura.

Quoniam igitur æquale est $ΓΖ$ ipsi $ΖΕ$, commune addatur $ΚΘ$; totum igitur $ΓΘ$ toti $ΚΕ$ est æquale. Sed $ΓΘ$ ipsi $ΓΗ$ est æquale, quoniam et ipsa $ΑΓ$ ipsi $ΓΒ$ æqualis est; et $ΗΓ$ igitur ipsi $ΕΚ$ est æquale. Commune addatur $ΓΖ$; totum igitur AZ ipsi $ΑΜΝ$ gnomoni est æquale; quare et $ΓΕ$ parallelogrammum, hoc est $ΑΔ$, ipso AZ parallelogrammo majus est.

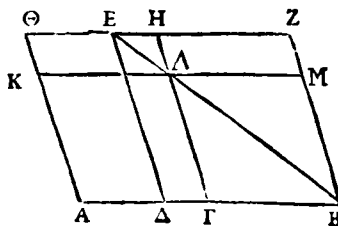
grammes qui sont appliqués à la droite AB , et qui sont défailants de parallélogrammes semblables au parallélogramme $ΓΕ$, et semblablement placés, le plus grand est le parallélogramme $ΑΔ$. Car appliquons à la droite AB le parallélogramme AZ , défailant du parallélogramme $ΚΘ$ semblable au parallélogramme $ΓΕ$, et semblablement placé; je dis que le parallélogramme $ΑΔ$ est plus grand que le parallélogramme AZ .

Car puisque le parallélogramme $ΓΕ$ est semblable au parallélogramme $ΚΘ$, ces deux parallélogrammes sont placés autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale $ΔΒ$, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme $ΓΖ$ est égal au parallélogramme $ΖΕ$ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun $ΚΘ$; le parallélogramme entier $ΓΘ$ sera égal au parallélogramme entier $ΚΕ$. Mais $ΓΘ$ est égal à $ΓΗ$ (36. 1), parce que la droite $ΑΓ$ est égale à la droite $ΓΒ$; donc $ΗΓ$ est égal à $ΕΚ$. Ajoutons le parallélogramme commun $ΓΖ$, le parallélogramme entier AZ sera égal au gnomon $ΑΜΝ$; donc le parallélogramme $ΓΕ$, c'est-à-dire le parallélogramme $ΑΔ$, est plus grand que le parallélogramme AZ (36. 1).

Εστω γάρ πάλιν ἡ AB τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβληθὲν τὸ AA ἐλλείπον εἶδει τῷ ΓM , καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἐλλείπον τῷ ΔZ , ὁμοίω τε καὶ ὁμοίως κειμένω τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB , τῷ ΓM · λήγω ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς⁸ ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AA τοῦ AE .

Sit enim rursus AB secta bifariam in Γ , et applicatum ipsum AA , deficiens figurâ ΓM , et applicetur rursus ad AB ipsum AE parallelogrammum, deficiens ipso ΔZ , similique et similiter posito ipsi ΓM ex dimidiâ AB ; dico majus esse ipsum ad dimidiam applicatum AA ipso AE .



Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΔZ τῷ ΓM , περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AZ τῷ $A\Theta$, ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τῇ $H\Theta$ · μείζον ἄρα τὸ AZ τοῦ KE . Ἰσον δὲ τὸ AZ τῷ ΔA · μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔA τοῦ EK . Κοινὸν προσκείσθω τὸ $K\Delta$ · ὅλον ἄρα τὸ AA ὅλου τοῦ AE μείζον ἐστίν. Πάντων ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim simile est ΔZ ipsi ΓM , circa eandem sunt diametrum; sit eorum diameter EB , et describatur figura.

Et quoniam æquale est AZ ipsi $A\Theta$, quoniam et ipsa ZH ipsi $H\Theta$; majus igitur AZ ipso KE . Æquale autem AZ ipsi ΔA ; majus igitur et ΔA ipso EK . Commune addatur $K\Delta$; totum igitur AA toto AE majus est. Omnium igitur, etc.

Coupons de nouveau la droite AB en deux parties égales au point Γ , et appliquons à cette droite le parallélogramme AA , défaillant du parallélogramme ΓM , et de plus appliquons à la droite AB le parallélogramme AE défaillant du parallélogramme ΔZ , semblable au parallélogramme décrit sur la moitié de AB , et semblablement placé; je dis que le parallélogramme AA qui est appliqué à la moitié de cette droite est plus grand que le parallélogramme AE .

Car, puisque les parallélogrammes ΔZ , ΓM sont semblables, ces deux parallélogrammes sont autour de la même diagonale (26. 6); soit EB leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque AZ est égal à $A\Theta$ (36. 1), car ZH est égal à $H\Theta$, AZ est plus grand que KE . Mais AZ est égal à ΔA (45. 1); donc ΔA est plus grand que EK . Ajoutons le parallélogramme commun $K\Delta$; le parallélogramme entier AA sera plus grand que le parallélogramme entier AE . Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ.

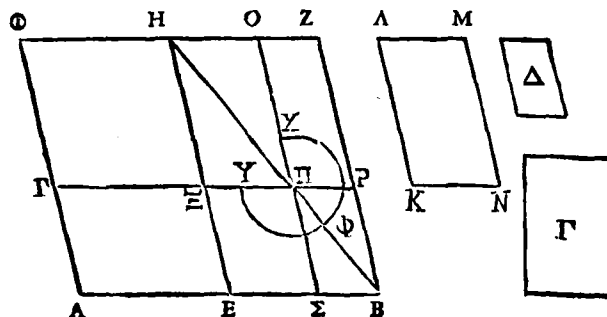
PROPOSITIO XXVIII.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῇ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἑλλειμμάτων τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὁμοίον ἑλλείπειν².

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθέν

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figurâ parallelogrammâ simili ipsi dato; oportet utique datum rectilineum cui oportet æquale applicare, non majus esse ipso ad dimidiam applicato, similibus existentibus defectibus et ipso ad dimidiam et ipso cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta AB, datum vero Γ



εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μείζον ὅν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

rectilineum, cui oportet æquale ad AB applicare, non majus existens eo ad dimidiam

PROPOSITION XXVIII.

A une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défailant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défailant d'un parallélogramme semblable étant semblables entr'eux.

Soit AB la droite donnée, et Γ la figure rectiligne à laquelle doit être égal le parallélogramme qu'il faut appliquer à la droite AB; que la figure recti-

εἶδει παραλληλογράμῳ τῷ ΕΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Εἰ δὲ οὐ, μείζον ἐστὶ τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἰσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὡς δὴ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνιστάτω τὸ ΚΑΜΝ. ΑΛΛὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν ὁμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὁμοιον. Ἐστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΑ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ, ΚΜ, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ· μείζον ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΑΚ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΑΜ. Κεῖσθω τῇ μὲν ΚΑ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΑΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοιον ἐστὶ τῷ ΚΜ τὸ ΗΠ. ΑΛΛὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὁμοιον ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὁμοιον ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ, ΚΜ, ὡς τὸ

EZ simili existenti ipsi Δ. Si autem non, majus est ΘΕ ipso Γ. Æquale autem ΘΕ ipsi ΗΒ; majus igitur et ΗΒ ipso Γ. Quo utique majus est ΗΒ ipso Γ, ei excessui æquale, ipsi autem Δ simile et similiter positum idem constitutatur ΚΑΜΝ. Sed Δ ipsi ΗΒ est simile; et ΚΜ igitur ipsi ΗΒ est simile. Sit igitur homologa quidem ΚΑ ipsi ΗΕ, ipsa vero ΑΜ ipsi ΗΖ. Et quoniam æquale est ΗΒ ipsis Γ, ΚΜ, majus igitur est ΗΒ ipso ΚΜ; major igitur est et ipsa quidem ΗΕ ipsâ ΑΚ, ipsa vero ΗΖ ipsâ ΑΜ. Ponatur ipsi quidem ΚΑ æqualis ΗΞ, ipsi vero ΑΜ æqualis ΗΟ, et compleatur ΞΗΟΠ parallelogrammum; æquale igitur et simile est ipsi ΚΜ ipsum ΗΠ. Sed ΚΜ ipsi ΗΒ simile est; et ΗΠ igitur ipsi ΗΒ simile est; circa eandem igitur diametrum est ΗΠ circa quam ΗΒ. Sit eorum diameter ΗΠΒ, et describatur figura.

Et quoniam æquale est ΒΗ ipsis Γ, ΚΜ,

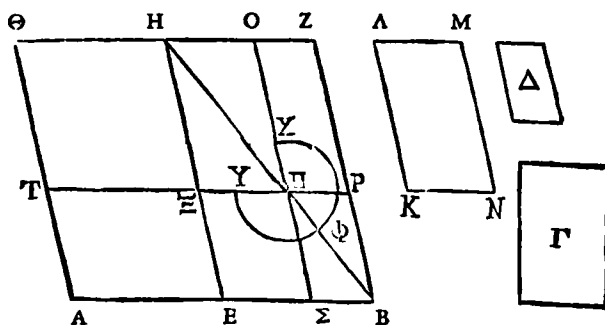
donnée Γ, et défailant d'un parallélogramme ΕΖ semblable au parallélogramme Δ. Mais si cela n'est point, ΘΕ est plus grand que Γ. Mais ΘΕ est égal à ΗΒ; donc ΗΒ est plus grand que Γ. Construisons le parallélogramme ΚΑΜΝ égal à l'excès du parallélogramme ΗΒ sur la figure Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6). Mais le parallélogramme Δ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ. Que la droite ΚΑ soit l'homologue de la droite ΗΕ, et la droite ΑΜ l'homologue de la droite ΗΖ. Puisque le parallélogramme ΗΒ est égal aux deux figures Γ, ΚΜ, le parallélogramme ΗΒ est plus grand que le parallélogramme ΚΜ; donc ΗΕ est plus grand que ΑΚ, et ΗΖ plus grand que ΑΜ (20. 6). Faisons ΗΞ égal à ΚΑ, et ΗΟ égal à ΑΜ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΞΗΟΠ (31. 1); le parallélogramme ΗΠ sera égal et semblable au parallélogramme ΚΜ (24. 6). Mais le parallélogramme ΚΜ est semblable au parallélogramme ΗΒ; donc le parallélogramme ΗΠ est semblable au parallélogramme ΗΒ (21. 6); donc les parallélogrammes ΗΠ, ΗΒ sont autour de la même diagonale (26. 6). Soit ΗΠΒ leur diagonale, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΒΗ est égal aux deux figures Γ, ΚΜ, et que

362 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΗΠ τῷ ΚΜ ἴστί· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἴστί· ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἴστί· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἴστί· ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΥΦΧ γνώμονι ἴστί· ἴσον. Ἀλλὰ ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἰδείχθη ἴσος· καὶ ΑΠ ἄρα τῷ Γ ἴστί· ἴσον.

quorum ΗΠ ipsi ΚΜ est æquale; reliquus igitur ΥΦΧ gnomon reliquo Γ est æqualis. Et quoniam æquale est ΟΡ ipsi ΞΣ, commune apponatur ΠΒ; totum igitur ΟΒ toti ΞΒ æquale est. Sed ΞΒ ipsi ΤΕ est æquale, quoniam et latus ΑΕ lateri ΕΒ est æquale; et ΤΕ igitur ipsi ΟΒ est æquale. Commune apponatur ΞΣ; totum igitur ΤΣ toti ΥΦΧ gnomoni est æquale. Sed ΥΦΧ gnomon ipsi Γ ostensus est æqualis; et ΑΠ igitur ipsi Γ est æquale.



Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ, ἡλλεύτον εἶδει παραλληλόγραμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδὴ περ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὁμοίόν ἐστιν. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΣΤ, dificiens figurā parallelogrammā ΠΒ simili existenti ipsi Δ, quandoquidem ΠΒ ipsi ΗΠ simile est. Quod oportebat facere.

ΗΠ est égal à ΚΜ, le gnomon restant ΥΦΧ est égal à la figure restante Γ. Et puisque ΟΡ est égal à ΞΣ (43. 1), ajoutons le parallélogramme commun ΠΒ; le parallélogramme entier ΟΒ sera égal au parallélogramme entier ΞΒ. Mais ΞΒ est égal à ΤΕ (36. 1), parce que le côté ΑΕ est égal au côté ΕΒ; donc ΤΕ est égal à ΟΒ. Ajoutons le parallélogramme commun ΞΣ; le parallélogramme entier ΤΣ sera égal au gnomon entier ΥΦΧ. Mais on a démontré que le gnomon ΥΦΧ est égal à Γ; donc ΑΠ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite ΑΒ un parallélogramme ΣΤ, égal à la figure rectiligne donnée Γ, et défailant d'un parallélogramme ΠΒ semblable à Δ, puisque ΠΒ est semblable à ΗΠ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

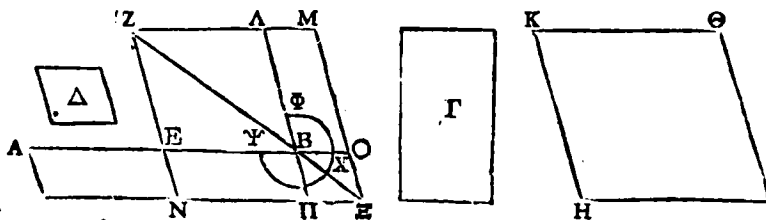
PROPOSITIO XXIX.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερέαλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρά τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρά τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερέαλλον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili datæ.

Sit data quidem recta ΑΒ, datum vero rectilineum Γ, cui oportet æquale ad ΑΒ applicare, Δ autem cui oportet simile applicare; oportet igitur ad ΑΒ rectam ipsi Γ rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figurâ parallelogrammâ simili ipsi Δ.



Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφο-

Secetur ΑΒ bifariam in Ε, et describatur ex ΕΒ ipsi Δ simile et similiter positum parallelogrammum ΒΖ, et utrisque simul quidem ΒΖ,

PROPOSITION XXIX.

Appliquer à une droite donnée, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

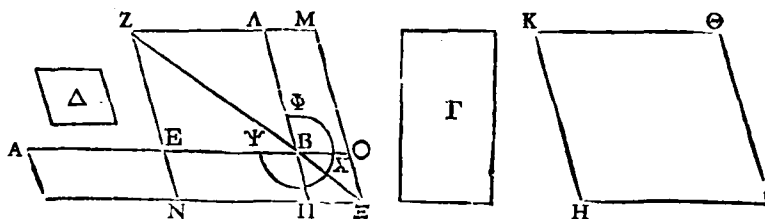
Soit ΑΒ la droite donnée, à laquelle il faut appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée Γ, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme Δ; il faut à la droite ΑΒ appliquer un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne Γ, et qui soit excédent d'un parallélogramme semblable au parallélogramme Δ.

Coupons ΑΒ en deux parties égales au point Ε (g. 1), sur la droite ΕΒ décrivons le parallélogramme ΒΖ semblable au parallélogramme Δ et semblable-

364 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τέροις μὲν τοῖς BZ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνιστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ'. Ομολογος δὲ ἴστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἰτεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Ἐκβέ-
 βληθῶσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἴστω ἡ ΖΑΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπιπλη-

Γ æquale, ipsi vero Δ simile et similiter posi-
 tum idem constituatur ΗΘ; simile igitur est
 ΗΘ ipsi ΕΛ. Homologa autem sit ΚΘ quidem
 ipsi ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsi ΖΕ. Et quoniam
 majus est ΗΘ ipso ΖΒ, major igitur est et ipsa
 quidem ΚΘ ipsâ ΖΛ, ipsa vero ΚΗ ipsâ ΖΕ.
 Producantur ipsæ ΖΛ, ΖΕ, et ipsi quidem ΚΘ
 æqualis sit ΖΑΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ



ρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τί ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἰστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιον ἐστὶ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ἡχθῶ αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ

et compleatur ΜΝ; ipsum ΜΝ igitur ipsi ΗΘ
 æqualeque est et simile. Sed ΗΘ ipsi ΕΛ est
 simile; et ΜΝ igitur ipsi ΕΛ simile est; circa
 eandem igitur diametrum est ipsum ΕΛ circa
 quam ΜΝ. Ducatur eorum diameter ΖΞ, et
 describatur figura.

Et quoniam æquale est ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ,

ment placé (18. 6), et construisons le parallélogramme ΗΘ égal aux deux figures ΕΛ, Γ, et semblable au parallélogramme Δ, et semblablement placé (25. 6); le parallélogramme ΗΘ sera semblable au parallélogramme ΕΛ. Que ΚΘ soit l'homologue de ΖΛ, et ΚΗ l'homologue de ΖΕ. Puisque ΗΘ est plus grand que ΖΒ, la droite ΚΘ est plus grande que ΖΛ, et la droite ΚΗ plus grande que ΖΕ. Prolongeons ΖΛ, ΖΕ, que ΖΑΜ soit égal à ΚΘ, et ΖΕΝ égal à ΚΗ (3. 1), et achevons le parallélogramme ΜΝ. Le parallélogramme ΜΝ sera égal et semblable au parallélogramme ΗΘ. Mais le parallélogramme ΗΘ est semblable au parallélogramme ΕΛ; donc le parallélogramme ΜΝ est semblable au parallélogramme ΕΛ (21. 6); donc les deux parallélogrammes ΕΛ, ΜΝ sont autour de la même diagonale (26. 6). Menons leur diagonale ΖΞ, et décrivons la figure.

Puisque le parallélogramme ΗΘ est égal aux figures ΕΛ, Γ, et que

τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστὶ. Κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τοῦτίστι τῷ ΛΟ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τὸ Γ ἴσος ἐστὶ καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστὶν.

Παρά τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγρήμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερέχον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὁμοιον τὸ ΟΠ⁵. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΗΘ est égal à ΜΝ, le parallélogramme ΜΝ est égal aux figures ΕΛ, Γ. Retrançons le parallélogramme commun ΕΛ; le gnomon restant ΨΧΦ sera égal à Γ. Et puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, le parallélogramme ΑΝ est égal au parallélogramme ΝΒ (36. 1), c'est-à-dire au parallélogramme ΛΟ (43. 1). Ajoutons le parallélogramme commun ΕΞ, le parallélogramme entier ΑΞ sera égal au gnomon entier ΦΧΨ. Mais le gnomon ΦΧΨ est égal à Γ; donc le parallélogramme ΑΞ est égal à Γ.

On a donc appliqué à la droite donnée ΑΒ un parallélogramme ΑΞ qui est égal à la figure rectiligne donnée Γ, et qui est excédent d'un parallélogramme ΠΟ semblable au parallélogramme Δ, parce le parallélogramme ΕΛ est semblable au parallélogramme ΟΠ. Ce qu'il fallait faire.

sed ΗΘ ipsi ΜΝ æquale est; et ΜΝ igitur ipsis ΕΛ, Γ æquale est. Commune auferatur ΕΛ; reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. Et quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΒ, æquale est et ΑΝ ipsi ΝΒ, hoc est ipsi ΛΟ. Commune apponatur ΕΞ; totum igitur ΑΞ æquale est ipsi ΦΧΨ gnomoni. Sed ΦΧΨ gnomon ipsi Γ æqualis est; et ΑΞ igitur ipsi Γ æquale est.

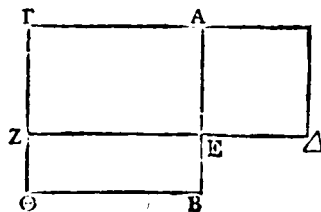
Ad datam igitur rectam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figurâ parallelogrammâ ΠΟ simili existenti ipsi Δ, quoniam et ipsi ΕΛ est simile ΟΠ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB · διὲ δὴ τὴν AB εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Αναγεγράφω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $BΓ$, καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν $ΑΓ$ τῷ $BΓ$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ΓΔ$, ὑπερέαλλον εἶδει τὸ $ΑΔ$ ὁμοίω τῷ $BΓ$.



Τετράγωνον δὲ ἐστὶ τὸ $BΓ$ · τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $BΓ$ τῷ $ΓΔ$, κοινὸν ἀφαιρήσθω τὸ $ΓΕ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $BΖ$ λοιπῷ τῷ $ΑΔ$ ἐστὶν ἴσον. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν $BΖ$, $ΑΔ$ ἄρα ἀντιπεπόμενα αἱ πλευραὶ

Datam rectam terminatam secundum extremam et mediam rationem secare.

Sit data recta terminata AB ; oportet igitur AB rectam secundum extremam et mediam rationem secare.

Describatur enim ex AB quadratum $BΓ$, et applicetur ad $ΑΓ$ ipsi $BΓ$ æquale parallelogrammum $ΓΔ$, excedens figurâ $ΑΔ$ simili ipsi $BΓ$.

Quadratum autem est $BΓ$; quadratum igitur est et $ΑΔ$. Et quoniam æquale est $BΓ$ ipsi $ΓΔ$, commune auferatur $ΓΕ$; reliquum igitur $BΖ$ reliquo $ΑΔ$ est æquale. Est autem ei et æquiangulum; ipsorum $BΖ$, $ΑΔ$ igitur reciproca

PROPOSITION XXX.

Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison.

Soit donnée la droite finie AB ; il faut couper la droite AB en moyenne et extrême raison.

Sur la droite AB construisons le carré $BΓ$ (46. 1), et à la droite $ΑΓ$ appliquons un parallélogramme $ΓΔ$, qui soit égal au carré $BΓ$, et qui soit excédent d'un parallélogramme $ΑΔ$ semblable à $BΓ$ (29. 6).

Puisque $BΓ$ est un carré, $ΑΔ$ est un carré. Et puisque $BΓ$ est égal à $ΓΔ$, retranchons la partie commune $ΓΕ$; le reste $BΖ$ sera égal au reste $ΑΔ$. Mais ces deux figures sont équiangles; donc les côtés des parallélogrammes $BΖ$, $ΑΔ$,

αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EA οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB. Ἰση δὲ ἡ μὲν ZE τῇ AG, τουτέστι τε AB^2 , ἡ δὲ EA τῇ AE· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB. Μείζων δὲ ἡ AB τῆς AE· μείζων ἄρα καὶ ἡ AE τῆς EB.

Ἡ ἄρα AB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ E, καὶ τὸ³ μείζον αὐτῆς τμήμα ἔστι τὸ AE. Οὕτως ἔδει ποιῆσαι.

sunt latera circa æquales angulos; est igitur ut ZE ad EA ita AE ad EB. Æqualis autem ipsa quidem ZE ipsi AG, hoc est ipsi AB, ipsa vero EA ipsi AE; est igitur ut BA ad AE ita AE ad EB. Major autem AB ipsa AE; major igitur et AE ipsa EB.

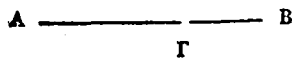
Ipsa igitur AB recta secundum extremam et mediam rationem secta est in E, et majus ejus segmentum est AE. Quod oportebat facere.

ΑΛΛΩΣ.

Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὲ τὴν AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμῆναι.

ALITER.

Sit data recta AB; oportet igitur AB secundum extremam et mediam rationem secare.



Τετμήσθω γὰρ ἡ AB κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς GA· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ

Secetur enim AB in Γ, ita ut ipsum sub AB, BΓ æquale sit ipsi ex ipsa AG quadrato.

Et quoniam ipsum sub AB, BΓ æquale est ipsi ex GA; est igitur ut AB ad AG ita AG ad GB;

autour des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ZE est à EA comme AE est à EB. Mais ZE est égal à AG (34. 1), c'est-à-dire à AB, et EA est égal à AE; donc BA est à AE comme AE est à EB. Mais AB est plus grand que AE; donc AE est plus grand que EB.

Donc la droite AB a été coupée au point E en moyenne et extrême raison, et AE est son plus grand segment. Ce qu'il fallait faire.

AUTREMENT.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB en moyenne et extrême raison. Coupons AB au point Γ, de manière que le rectangle sous AB, BΓ soit égal au carré de AG (11. 2).

Puisque le rectangle sous AB, BΓ est égal au carré de GA, AB est à AG

368 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τίτμνται κατὰ τὸ Γ. Οπὲρ εἶδει ποιῆσαι.

ipsa igitur AB secundum extremam et mediam
rationem secta est in Γ. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

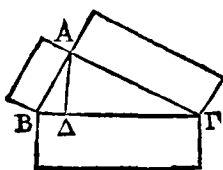
PROPOSITIO XXXI.

Εν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν
ὀρθῆς γωνίας ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον
ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθῆς γωνίαν περιεχο-
σῶν πλευρῶν εἶδει, τοῖς ὁμοίοις τε¹ καὶ ὁμοίως
ἀναγραφόμενοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς

In rectangulis triangulis, figura ex latere
rectangulum angulum subtendente æqualis est
figuris ex lateribus rectum angulum subten-
dentibus, similibusque et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum
habens ΒΑΓ angulum; dico figuram ex ΒΓ



ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδει,
τοῖς ὁμοίοις τε² καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἡχθῶ κάθετος ἡ ΑΔ.

æqualem esse figuris ex ΒΑ, ΑΓ, similibusque
et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis ΑΔ.

comme ΑΓ est à ΓΒ (17. 6); donc la droite ΑΒ a été coupée en moyenne et
extrême raison au point Γ (déf. 3. 6). Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXXI.

Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend
l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur
les côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, ayant l'angle droit ΒΑΓ; je dis que la figure
construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur
les côtés ΒΑ, ΑΓ.

Menons la perpendiculaire ΑΔ.

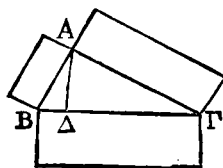
Επειὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα³ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθείαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὁμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἰση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΑΓ· ἵτον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν ἄρα τοῖς, καὶ τὰ ἐξῆς.

Et quoniam in recto triangulo ΑΒΓ, ab ipso ad Α recto angulo super ΒΓ basim perpendicularis ducta est ΑΔ; ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur ad perpendicularem triangula similia sunt et toti ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. Et quoniam tres rectæ proportionales sunt, est ut prima ad tertiam ita ipsa ex primâ figurâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam; ut igitur ΓΒ ad ΒΑ ita ex ipsâ ΓΒ figura ad ipsam ex ΒΑ, similem et similiter descriptam. Propter eadem utique et ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ipsâ ΒΓ figura, ad ipsam ex ΓΑ; quare et ut ΒΓ ad ipsas ΒΔ, ΑΓ ita ex ipsâ ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ, similes et similiter descriptas. Æqualis autem ΒΓ ipsis ΒΔ, ΑΓ; æquale igitur et ex ipsâ ΒΓ figura ipsis ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter descriptis. Ergo in rectangulis, etc.

Puisque dans le triangle rectangle ΑΒΓ, on a mené de l'angle droit Α sur la base ΒΓ la perpendiculaire ΑΔ, les triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ, autour de la perpendiculaire, sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΑΒ est à ΒΔ. Mais lorsque trois droites sont proportionnelles, la première est à la troisième comme la figure construite sur la première est à la figure semblable, et semblablement construite sur la seconde (2. cor. 20. 6); donc ΓΒ est à ΒΔ comme la figure construite sur ΓΒ est à la figure semblable, et semblablement construite sur ΒΑ. Par la même raison, ΒΓ est à ΓΔ comme la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ; donc ΒΓ est à ΒΔ, ΑΓ comme la figure ΒΓ est aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ (24. 5). Mais la droite ΒΓ est égale aux droites ΒΔ, ΑΓ; donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables, et semblablement décrites sur ΒΑ, ΑΓ. Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Επειδὴ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ⁵ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος⁶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἐχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἢ περὶ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος⁷ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἶδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα.

Quoniam similes figuræ in duplâ ratione sunt homologorum laterum, ipsa ex ΒΓ igitur figura ad ipsam ex ΒΑ figuram duplam rationem habet ejus quam ΓΒ ad ΒΑ. Habet autem et ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum duplam rationem ejus quam ΓΒ ad ΒΑ; et ut igitur ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΒΑ figuram ita ex ΓΒ quadratum ad ipsum ex ΒΑ quadratum.

Propter eadem utique et ut ex ΒΓ figura ad ipsam ex ΓΑ figuram ita ex ΒΓ quadratum ad ipsum ex ΓΑ quadratum; quare et ut ex ΒΓ figura ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ figuras ita ex ΒΓ quadratum ad ipsas ex ΒΑ, ΑΓ quadrata. Æquale autem ex ΒΓ quadratum ipsis ex ΒΑ, ΑΓ qua-

AUTREMENT.

Puisque les figures semblables sont entr'elles en raison double des côtés homologues (23. 6), la figure construite sur ΒΓ a avec la figure construite sur ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ. Mais le quarré de ΒΓ a avec le quarré de ΒΑ une raison double de celle que ΓΒ a avec ΒΑ (1. cor. 20. 6); donc la figure construite sur ΓΒ est à celle qui est construite sur ΒΑ comme le quarré de ΓΒ est au quarré de ΒΑ (11. 5). Par la même raison, la figure construite sur ΒΓ est à la figure construite sur ΓΑ comme le quarré de ΒΓ est au quarré de ΓΑ; donc la figure construite sur ΒΓ est aux figures construites sur ΒΑ, ΑΓ comme le quarré de ΒΓ est aux quarrés des droites ΒΑ,

Ἰσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου τοῖς ἀπὸ τῶν
ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ
εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΑ, ΑΓ εἶδεσι, τοῖς⁸ ὁμοίοις
τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι⁹.

dratis; æqualis igitur et ex ΒΓ figura ipsis
ex ΒΑ, ΑΓ figuris, similibusque et similiter
descriptis. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

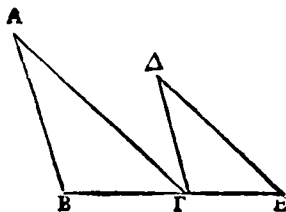
PROPOSITIO XXXII.

Εάν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν,
τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον
ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ
παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων
πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Si duo triacula componentur secundum
unum angulum, duo latera duobus lateribus
proportionalia habentia, ita ut homologa eorum
latera et parallela sint; reliqua triangulorum
latera in directum erunt.

Εστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο

Sint duo triacula ΑΒΓ, ΔΓΕ, duo latera



πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς
ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὥς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς

ΒΑ, ΑΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔΕ proportio-
nalia habentia, ut ΑΒ quidem ad ΑΓ ita ΔΓ

ΑΓ (24. 5). Mais le carré de ΒΓ est égal aux carrés des droites ΒΑ, ΑΓ
(47. 1); donc la figure construite sur ΒΓ est égale aux figures semblables et
semblablement décrites sur les droites ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent
par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les
côtés restants des triangles seront dans la même direction.

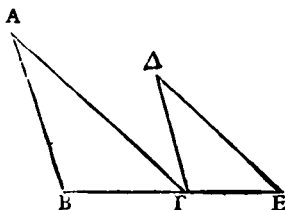
Soient les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ, ayant les deux côtés ΒΑ, ΑΓ propor-
tionnels aux deux côtés ΓΔ, ΔΕ, de manière que ΑΒ soit à ΑΓ comme ΔΓ

τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Επεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτάς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν

ad ΔΕ, parallela vero ΑΒ quidem ipsi ΔΓ, ipsa vero ΑΓ ipsi ΔΕ; dico in directum esse ipsam ΒΓ ipsi ΓΕ.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΔΓ, et in ipsas incidit recta ΑΓ, et alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΔ æquales inter se sunt. Propter eandem utique et ΓΔΕ ipsi ΑΓΔ est æqualis; quare et ΒΑΓ ipsi ΓΔΕ est æqualis. Et quoniam duo



ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾶ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Εδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ

triangula sunt ΑΒΓ, ΔΓΕ unum angulum ad Α uni angulo ad Δ æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; æquiangulum igitur est ΑΒΓ triangulum ipsi ΔΓΕ triangulo; æqualis igitur ΑΒΓ angulus ipsi ΔΓΕ. Ostensus autem est et ΑΓΔ ipsi ΒΑΓ æqualis; totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ æqualis est. Communis

est à ΔΕ; et que ΑΒ soit parallèle à ΔΓ, et ΑΓ parallèle à ΔΕ; je dis que ΒΓ est dans la direction de ΓΕ.

Puisque ΑΒ est parallèle à ΔΓ, et que ΑΓ tombe sur ces deux droites, les angles alternes ΒΑΓ, ΑΓΔ sont égaux entr'eux (29. 1.). Par la même raison, l'angle ΓΔΕ est égal à l'angle ΑΓΔ; donc l'angle ΒΑΓ est égal à l'angle ΓΔΕ. Et puisque les deux triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ ont un angle en Α égal à un angle en Δ, et que les côtés qui comprennent ces angles égaux sont proportionnels, c'est-à-dire que ΒΑ est à ΑΓ comme ΓΔ est à ΔΕ, les triangles ΑΒΓ, ΔΓΕ sont équiangles (6. 6); donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΓΕ. Mais on a démontré que l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΑΓ; donc l'angle entier ΑΓΕ est égal aux deux

ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, $BA\Gamma$ ἴση ἴστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ AGB . αἱ ἄρα ὑπὸ AGE , AGB ταῖς ὑπὸ $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, AGB ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, AGB δυσὶν ὀρθαῖς ἔσται εἰσὶ³. καὶ αἱ ὑπὸ AGE , AGB ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δὲ τινι εὐθείᾳ τῇ AG , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ , δύο εὐθεῖαι αἱ $B\Gamma$, GE , μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ AGE , AGB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ GE . Εὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

opponatur AGB ; ipsi igitur AGE , AGB ipsis $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, AGB æquales sunt. Sed ipsi $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, AGB duobus rectis æquales sunt; et ipsi AGE , AGB igitur duobus rectis æquales sunt. Ad quamdam utique rectam AG , et ad punctum in eâ Γ , duæ rectæ $B\Gamma$, GE , non ad easdem partes positæ, ipsos deinceps angulos AGE , AGB duobus rectis æquales faciunt; in directum igitur est $B\Gamma$ ipsi GE . Si igitur duo, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

PROPOSITIO XXXIII.

Εν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερίαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, εἴαν τε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴαν τε πρὸς ταῖς περιφερίαις ὥςτις βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι¹.

Ἐστῶσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, ΔEZ , καὶ πρὸς

In æqualibus circulis anguli eamdem rationem habent quam circumferentiæ in quas insistent, sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes; adhuc etiam et sectores quippe ad centra constituti.

Sint æquales circuli $AB\Gamma$, ΔEZ , et ad centra

angles $AB\Gamma$, $BA\Gamma$. Ajoutons l'angle commun AGB ; les angles AGE , AGB seront égaux aux angles $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, AGB . Mais les angles $BA\Gamma$, $AB\Gamma$, AGB sont égaux à deux angles droits (32. 1); donc les angles AGE , AGB sont égaux à deux angles droits. Donc avec une droite quelconque AG , et au point Γ de cette droite, les deux droites $B\Gamma$, GE , placées de différents côtés, font les angles de suite AGE , AGB égaux à deux angles droits; donc la droite $B\Gamma$ est dans la direction de GE (14. 1). Donc, etc.

PROPOSITION XXXIII.

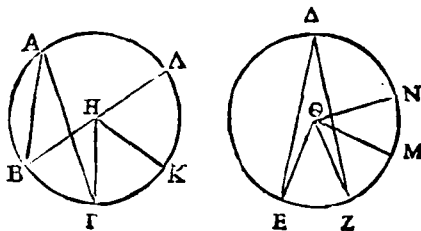
Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

Soient les cercles égaux $AB\Gamma$, ΔEZ ; que les angles BHG , EOZ soient placés à

374 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς H, Θ γωνίας ἴστωσαν αἱ ὑπὸ $BHG, E\Theta Z$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερίαις αἱ ὑπὸ $BAG, E\Delta Z$. λέγω ὅτι ἴσθιν ὡς ἡ $B\Gamma$ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν οὕτως ἢτε ὑπὸ BHG γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $E\Theta Z$, καὶ ἡ ὑπὸ BAG πρὸς τὴν ὑπὸ $E\Delta Z$. καὶ ἔτι ὁ HBG τομὴς πρὸς τὸν ΘEZ τομεία².

quidem ipsorum H, Θ anguli sint $BHG, E\Theta Z$, ad circumferentias vero ipsi $BAG, E\Delta Z$; dico esse ut $B\Gamma$ circumferentia ad EZ circumferentiam ita BHG angulum ad $E\Theta Z$, et ipsum BAG ad $E\Delta Z$; et adhuc HBG sectorem ad ΘEZ sectorem.



Κτίσθωσαν γὰρ τῇ μὲν $B\Gamma$ περιφερίᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἕξῃς ὁσαιδηποτοῦν³ αἱ $ΓΚ, ΚΛ$, τῇ δὲ EZ περιφερίᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν⁴ αἱ ZM, MN , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ $ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ$.

Επεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ $B\Gamma, ΓΚ, ΚΛ$ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $BHG, ΓΗΚ, ΚΗΛ$ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίον ἄρα ἴσθιν ἡ $ΒΛ$ περιφέρεια τῇ $B\Gamma$, τοσαυταπλασίον ἴσθι καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῇ ὑπὸ BHG . Διὰ τὰ

Ponantur enim ipsi $B\Gamma$ quidem circumferentiæ æquales deinceps quotcumque $ΓΚ, ΚΛ$, ipsi vero EZ circumferentiæ æquales quotcumque ZM, MN , et jungantur $ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ$.

Et quoniam igitur æquales sunt $B\Gamma, ΓΚ, ΚΛ$ circumferentiæ inter se, æquales sunt et $BHG, ΓΗΚ, ΚΗΛ$ anguli inter se. Quam multiplex igitur est $ΒΛ$ circumferentia ipsius $B\Gamma$, tam multiplex et est BHA angulus ipsius BHG . Propter

leurs centres H, Θ , et que les angles $BAG, E\Delta Z$ soient placés à leurs circonferences; je dis que l'arc $B\Gamma$ est à l'arc EZ comme l'angle BHG est à l'angle $E\Theta Z$, comme l'angle BAG est à l'angle $E\Delta Z$, et comme le secteur HBG est au secteur ΘEZ .

Faisons tant d'arcs de suite $ΓΚ, ΚΛ$, qu'on voudra égaux chacun à l'arc $B\Gamma$, et tant d'arcs qu'on voudra ZM, MN , égaux chacun à l'arc EZ , et joignons $ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ$.

Puisque les arcs $B\Gamma, ΓΚ, ΚΛ$ sont égaux entr'eux, les angles $BHG, ΓΗΚ, ΚΗΛ$ sont aussi égaux entr'eux (27. 3); donc l'angle BHA est le même multiple de BHG , que l'arc $ΒΛ$ l'est de l'arc $B\Gamma$. Par la même raison, l'angle $E\Theta N$ est

αὐτὰ δὲ καὶ ὁσαυπλάσιον ἔστιν ἡ EN περιφέρεια τῆς EZ, τοσαυπλάσιον ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ EON γωνία τῆς ὑπὸ EOL. Εἰ ἄρα⁵ ἴση ἔστιν ἡ BA περιφέρεια τῇ EN περιφέρειᾳ, ἴση ἔστι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BHA τῇ ὑπὸ EON· καὶ εἰ μείζων ἔστιν ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, μείζων ἔστι καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῆς ὑπὸ EON γωνίας⁶· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τῶν δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν BG, EZ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ BHΓ, EOL, εἴληπται τῆς μὲν BG περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ BHΓ γωνίας ἰσάκεις πολλαπλασίον, ἢ τε BA περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία, τῆς δὲ EZ περιφέρειας καὶ τῆς ὑπὸ EOL γωνίας, ἢ τε EN περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ EON γωνία· καὶ διδύκται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ BA περιφέρεια τῆς EN περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ BHA γωνία τῆς ὑπὸ EON· καὶ εἰ ἴση, ἴση καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς BG περιφέρεια πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EOL. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ EOL οὕτως ἡ ὑπὸ BAG πρὸς τὴν ὑπὸ EOL, διπλα-

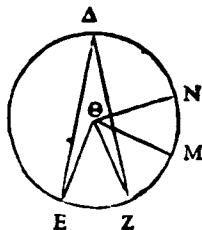
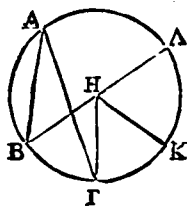
eadem utique. et quam multiplex est EN circumferentia ipsius EZ, tam multiplex est et EON angulus ipsius EOL. Si igitur æqualis est BA circumferentia ipsi EN circumferentiæ, æqualis est et angulus BHA ipsi EON; et si major est BA circumferentia ipsâ EN circumferentiâ, major est et BHA angulus ipso EON angulo; et si minor, minor; quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis BG, EZ, duobus vero angulis BHΓ, EOL, sumpta sunt ipsius quidem BG circumferentiæ, et ipsius BHΓ anguli æque multiplicia, et BA circumferentia et BHA angulus, ipsius vero EZ circumferentiæ et ipsius EOL anguli, et EN circumferentia et EON angulus; et ostensum est si superat BA circumferentia ipsam EN circumferentiam, superare et BHA angulum ipsum EON; et si æqualis, æqualem; et si minor, minorem; est igitur ut BG circumferentia ad ipsam EZ ita BHΓ angulus ad ipsum EOL. Sed ut BHΓ angulus ad ipsum EOL ita ipse BAG ad ipsum EOL; duplus

le même multiple de EOL, que l'arc EN l'est de l'arc EZ. Donc si l'arc BA est égal à l'arc EN, l'angle BHA est égal à l'angle EON (27. 3); si l'arc BA est plus grand que l'arc EN, l'angle BHA est plus grand que l'angle EON; et si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, l'angle BHA est plus petit que l'angle EON. Ayant donc quatre grandeurs, deux arcs BG, EZ, et deux angles BHΓ, EOL, on a pris des équi-multiples de l'arc BG et de l'angle BHΓ, savoir, l'arc BA et l'angle BHA; on a pris aussi des équi-multiples de l'arc EZ et de l'angle EOL, savoir, l'arc EN et l'angle EON; et l'on a démontré que si l'arc BA surpasse l'arc EN, l'angle BHA surpasse l'angle EON; que si l'arc BA est égal à l'arc EN, l'angle BHA est égal à l'angle EON; que si l'arc BA est plus petit que l'arc EN, l'angle BHA est plus petit que l'angle EON; donc l'arc BG est à l'arc EZ comme l'angle BHΓ est à l'angle EOL (déf. 6. 5). Mais l'angle BHΓ est à l'angle EOL comme l'angle BAG est à l'angle EOL (15. 5), car ils sont

376 LE SIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σίαν⁷ γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἦτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ⁸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

enim uterque utriusque; et ut igitur ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita et ΒΗΓ angulus ad ipsum ΕΘΖ, et ipse ΒΑΓ ad ipsum ΕΔΖ.



Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερίαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερίαις ὥς τι βεβηκυῖαι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

In æqualibus igitur circulis anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ in quas insistent; sive ad centra, sive ad circumferentias sint insistentes. Quod oportebat ostendere.

Λέγω ὅτι καὶ ὥς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομὴς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομῆα.

Dico et ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ circumferentiam ita ΗΒΓ sectorem ad ΘΕΖ sectorem.

Επιζεύχωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληθόντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπιζεύχωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, et sumptis in ΒΓ, ΓΚ circumferentiis punctis Ξ, Ο, jungantur et ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ,

Et quoniam duo ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ

doubles les uns des autres (2 o. 3); donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme l'angle ΒΗΓ est à l'angle ΕΘΖ, et comme l'angle ΒΑΓ est à l'angle ΕΔΖ.

Donc, dans des cercles égaux, les angles sont proportionnels aux arcs, soit que ces angles soient placés aux centres ou bien aux circonférences. Ce qu'il fallait démontrer.

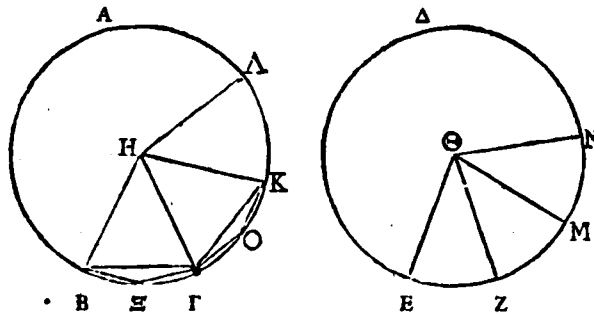
Je dis de plus que l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ.

Joignons ΒΓ, ΓΚ, et ayant pris sur les arcs ΒΓ, ΓΚ, les points Ξ, Ο, joignons ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Puisque les deux droites ΒΗ, ΗΓ sont égales aux deux droites ΓΗ, ΗΚ,

ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσεις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἴσθιν ἴση· ἴσον ἄρα ἴσθι⁹ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἴσθιν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφέρειᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἴσθι τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρειᾳ¹⁰. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΓ¹¹

æquales sunt, et angulos æquales comprehendunt, et basis BG ipsi GK est æqualis; æquale igitur est et BHG triangulum ipsi HGK triangulo. Et quoniam æqualis est BG circumferentia ipsi GK circumferentiæ, et reliqua totius circuli circumferentiæ æqualis est reliquæ totius circuli circumferentiæ; quare et



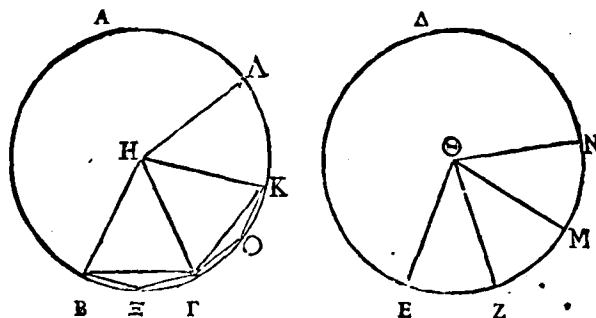
τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἴσθιν ἴση· ὁμοίον ἄρα ἴσθι τὸ ΒΗΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καὶ εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὁμοία τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἴσθιν· ἴσον ἄρα ἴσθι τὸ ΒΗΓ τμήμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομὴς

angulus BZΓ angulo ΓΟΚ est æqualis; simile igitur est BZΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento; et sunt super æquales rectas ΒΓ, ΓΚ. Sed super æquales rectas similia segmenta circulorum æqualia inter se sunt; æquale igitur est BZΓ segmentum ipsi ΓΟΚ segmento. Est autem et BHG triangulum ipsi ΗΓΚ triangulo æquale;

et qu'elles comprennent des angles égaux, la base BG est égale à la base GK; donc le triangle BHG est égal au triangle HGK (4. 1). Mais l'arc BG est égal à l'arc GK; donc le reste de la circonférence du cercle entier est égal au reste de la circonférence du cercle entier (ax. 3); donc l'angle BZΓ est égal à l'angle ΓΟΚ (27. 3); donc le segment BZΓ est semblable au segment ΓΟΚ (déf. 11. 3), et ces deux segments sont sur les droites égales BG, GK. Mais les segments de cercles semblables placés sur des droites égales, sont égaux entr'eux (24. 3); donc le segment BZΓ est égal au segment ΓΟΚ. Mais le triangle BHG est égal au triangle HGK; donc le secteur entier HBG est égal

ἔλῳ τῶ ΗΓΚ τομῆϊ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομῆς ἑκατέρῳ τῶν ΗΓΚ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομῆς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομῆς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν¹². ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων

et totus igitur ΗΒΓ sector toti ΗΓΚ sectori æqualis est. Propter eadem utique et ΗΚΛ sector utrique ipsorum ΗΓΚ, ΗΓΒ æqualis est; tres igitur sectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ æquales inter se sunt. Propter eadem utique et ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sectores æquales inter se sunt; quam multiplex igitur est ΒΑ circumferentia



ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομῆς τοῦ ΗΒΓ τομῆως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομῆς τοῦ ΘΕΖ τομῆως. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ¹³, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΑ τομῆς τῶ ΘΕΝ τομῆϊ καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια

ipsius ΒΓ circumferentiæ, tam multiplex est et ΗΒΑ sector ipsius ΗΒΓ sectoris. Propter eadem utique et quam multiplex est ΕΝ circumferentia ipsius ΕΖ circumferentiæ, tam multiplex est et ΘΕΝ sector ipsius ΘΕΖ sectoris; si igitur æqualis est ΒΑ circumferentia ipsi ΕΝ circumferentiæ, æqualis est et ΗΒΑ sector ipsi

au secteur entier ΗΓΚ (ax. 2). Par la même raison, le secteur ΗΚΛ est égal à l'un et l'autre des secteurs ΗΓΚ, ΗΓΒ; donc les trois secteurs ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ sont égaux entr'eux. Les secteurs ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ sont égaux entr'eux, par la même raison; donc le secteur ΗΒΑ est le même multiple du secteur ΗΒΓ que l'arc ΒΑ l'est de l'arc ΒΓ. Par la même raison, le secteur ΘΕΝ est le même multiple du secteur ΘΕΖ que l'arc ΕΝ l'est de l'arc ΕΖ. Donc si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ; si l'arc ΒΑ surpasse l'arc

τῆς EN περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ὁ HBA τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομείως· καὶ εἰ ἑλλείπει, ἑλλείπει¹⁴. Τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομίων, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφέρειας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομείως, ἥτε ΒΑ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΑ τομεὺς, τῆς δὲ ΕΖ περιφέρειας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομείως ἰσάκεις πολλαπλάσια, ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς. Καὶ δίδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΑ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφέρειας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομείως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἑλλείπει, ἑλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

ΘΕΝ sectori ; et si superat ΒΑ circumferentia ipsam ΕΝ circumferentiam, superat et ΗΒΑ sector ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si deficit, deficit. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duobus quidem ΒΓ, ΕΖ circumferentiis, duobus vero ΗΒΓ, ΘΕΖ sectoribus, sumpta sunt æque multiplicia ipsius ΒΓ quidem circumferentiæ et ipsius ΗΒΓ sectoris, ipsa et ΒΑ circumferentia et ΗΒΑ sector, ipsius vero ΕΖ circumferentiæ et ipsius ΘΕΖ sectoris æque multiplicia, ipsa et ΕΝ circumferentia et ipse ΘΕΝ sector. Et ostensum est si superat ΒΑ circumferentia ipsam ΕΝ circumferentiam, superare et ΗΒΑ sectorem ipsum ΘΕΝ sectorem ; et si æqualis, æqualem ; et si deficit, deficere ; est igitur ut ΒΓ circumferentia ad ΕΖ ita ΗΒΓ sector ad ΘΕΖ sectorem.

ΕΝ, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, et si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux arcs ΒΓ, ΕΖ, et les deux secteurs ΗΒΓ, ΘΕΖ, on a pris des équi-multiples de l'arc ΒΓ et du secteur ΗΒΓ, savoir, l'arc ΒΑ et le secteur ΗΒΑ ; on a pris aussi des équi-multiples de l'arc ΕΖ et du secteur ΘΕΖ, savoir, l'arc ΕΝ et le secteur ΘΕΝ. Et on a démontré que si l'arc ΒΑ surpasse l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ surpasse le secteur ΘΕΝ, que si l'arc ΒΑ est égal à l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est égal au secteur ΘΕΝ, et que si l'arc ΒΑ est plus petit que l'arc ΕΝ, le secteur ΗΒΑ est plus petit que le secteur ΘΕΝ ; donc l'arc ΒΓ est à l'arc ΕΖ comme le secteur ΗΒΓ est au secteur ΘΕΖ (déf. 6. 5).

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

. Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομὴς πρὸς τὸν τομὴν οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Et manifestum est et ut sector ad sectorem ita et angulum ad angulum.

COROLLAIRE.

Il est évident que le secteur est au secteur comme l'angle est à l'angle (II. 5).

FIN DU SIXIÈME LIVRE.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E P T I M U S.

ΟΡΟΙ.

α. Μονάς ἐστὶ, καθ' ἣν ἑκάστην τῶν ὄντων
ἐν λέγεται.

β'. Αριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον
πλῆθος.

γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἱλάσσων
τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρήῃ τὸν μείζονα.

DEFINITIONES.

1. Unitas est secundum quam unumquodque
existentium unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus composita
multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris,
quando metitur majorem.

* LIVRE SEPTIEME

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.
3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρήῃ.

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττω-
ρος, ὅταν καταμετρήται ὑπὸ τοῦ ἐλάττωτος.

ς'. Ἀρτίος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρού-
μινος.

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμινος δίχα· ἢ
ὁ² μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

η'. Ἀρτιάκις ἀρτίος ἀριθμὸς ἐστιν, ὁ ὑπὸ
ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ ἄρτιον ἀριθ-
μόν.

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός³ ἐστιν, ὁ
ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ περισσὸν
ἀριθμόν.

ι'. Περιστάκις δὲ ἀρτίος ἐστιν, ὁ ὑπὸ περισ-
σοῦ ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν⁴.

ια'. Περιστάκις δὲ περισσὸς ἀριθμὸς ἐστιν⁵, ὁ
ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμινος κατὰ περισσὸν
ἀριθμόν.

ιβ'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνη
μετρούμινος.

4. Parties autem, quando non metitur.

5. Multiplex autem, major minoris, quando
mensuratur a minore.

6. Par autem numerus est ipse bifariam di-
visus.

7. Impar vero, ipse non divisus bifariam ;
vel ipse unitate differens a pari numero.

8. Pariter par numerus est, ipse a pari nu-
mero mensuratus per parem numerum.

9. Pariter autem impar numerus est, ipse a
pari numero mensuratus per imparem nume-
rum.

10. Impariter vero par est, ipse ab impari
numero mensuratus per parem numerum.

11. Impariter vero impar numerus est, ipse
ab impari numero mensuratus per imparem
numerum.

12. Primus numerus est, ipse ab unitate
solâ mensuratus.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.

5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand
il est mesuré par le plus petit.

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.

7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties
égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

8. Le nombre parement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair
multiplié par un nombre pair.

9. Le nombre parement impair est celui qui est mesuré par un nombre
pair multiplié par un nombre impair.

10. Le nombre impairement pair est celui qui est mesuré par un nombre
impair, multiplié par un nombre pair.

11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre
impair multiplié par un nombre impair.

12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

ιγ'. Πρῶτοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιδ'. Σύνθετος ἀριθμὸς ἐστίν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιε'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ισ'. Αριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γίνονται τις.

ιζ'. Οταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιη'. Οταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος στερεὸς καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

13. Primi autem inter se numeri sunt, ipsi ab unitate solâ mensurati communi mensurâ.

14. Compositus numerus est, ipse a numero aliquo mensuratus.

15. Compositi vero inter se numeri sunt, ipsi a numero aliquo mensurati communi mensurâ.

16. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in eo unitates toties additur multiplicatus, et gignitur aliquis.

17. Quando autem duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus planus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

18. Quando autem tres numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factus solidus appellatur; latera vero ipsius, multiplicantes sese numeri.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.

384 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ιβ'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστὶν ὁ ἰσάκεις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κ'. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκεις ἴσος ἰσάκεις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἀριθμῶν ἴσων¹¹ περιεχόμενος.

κα'. Αριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖσιν.

κβ'. Ομοιοὶ ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγ'. Τέλεις ἀριθμός ἐστὶν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ᾖν.

19. Quadratus numerus est ipse æqualiter æqualis, vel ipse sub duobus æqualibus numeris contentus.

20. Cubus autem, ipse æqualiter æqualis æqualiter; vel ipse sub tribus numeris æqualibus contentus.

21. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi et tertius quarti æque est multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes sunt.

22. Similes plani et solidi numeri sunt, ipsi proportionalia habentes latera.

23. Perfectus numerus est, ipse suis ipsius partibus æqualis existens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

PROPOSITIO I.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίστων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρούμενου δὲ αὐτὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,

Duobus numeris inæqualibus expositis, deducto autem semper minore de maiore, si

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

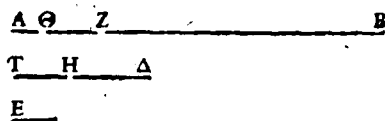
23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché

ἂν ὁ λειπόμινος μηδέποτε καταμετρή τὸν πρὸς αὐτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἴσονται.

Δύο γὰρ ἀρίστων ἀριθμῶν τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμινος μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸς αὐτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ· τουτίστιν, ὅτι τοὺς AB, ΓΔ μονάς μόνη μετρεῖ³.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ E, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν AB μετρῶν λιπέτω αὐτοῦ ἐλάσσονα τὸν ZA, ὁ δὲ ZA τὸν ΔΓ μετρῶν λιπέτω αὐτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ, τὸν ZA μετρῶν λιπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Επεὶ οὖν ὁ E τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ZB μετρεῖ καὶ ὁ E ἄρα τὸν ZB μετρεῖ. Μετρεῖ

relictus nunquam metiatur ipsum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; a principio numeri primi inter se erunt.

Duobus enim inæqualibus numeris AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relictus nunquam metiatur eum præ se ipso quoad assumpta fuerit unitas; dico ipsos AB, ΓΔ primos inter se esse, hoc est, ipsos AB, ΓΔ unitatē solā mensurari.

Si enim non sunt AB, ΓΔ primi inter se, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit E, et ΓΔ quidem ipsum AB metiens relinquat se ipso minorem ZA, ipse vero ZA ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΗΓ, ipse ΗΓ autem ipsum ZA metiens relinquat unitatem ΘΑ.

Quoniam et E ipsum ΓΔ metitur, ipse autem ΓΔ ipsum ZB metitur; et ipse igitur E ipsum ZB

du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

Soient les deux nombres inégaux AB, ΓΔ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité; je dis que les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

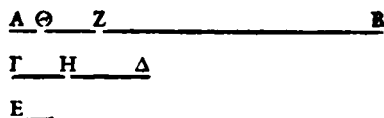
Car si les nombres AB, ΓΔ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E; que ΓΔ mesurant AB laisse ZA plus petit que lui-même; que ZA mesurant ΔΓ laisse ΗΓ plus petit que lui-même; et qu'enfin ΗΓ mesurant ZA laisse l'unité ΘΑ.

Puisque E mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ZB, le nombre E mesure ZP. Mais

386 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δι καὶ ὅλον τὸν AB καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ μετρήσει⁴. Ο δὲ AZ τὸν ΔΗ μετρεῖ καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει⁵. Ο δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει⁶. Με-

metitur. Metitur autem et totum AB; et reliquum igitur AZ metietur. Ipse autem AZ ipsum ΔΗ metitur; et Ε igitur ipsum ΔΗ metietur. Metitur autem et totum ΓΔ; et reliquum igitur ΓΗ metietur. Ipse autem ΓΗ ipsum ΖΘ metitur;



τρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμὸς· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et Ε igitur ipsum ΖΘ metietur. Metitur autem et totum ΖΑ; et reliquam igitur ΑΘ unitatem metietur, numerus existens, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros metietur aliquis numerus; ipsi AB, ΓΔ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

PROPOSITIO II.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

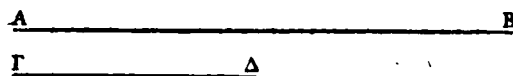
il mesure AB tout entier; donc il mesurera le reste AZ. Mais AZ mesure ΔΗ; donc Ε mesurera ΔΗ. Mais il mesure ΓΔ tout entier; donc il mesurera le reste ΓΗ. Mais ΓΗ mesure ΖΘ; donc Ε mesurera ΖΘ. Mais il mesure ΖΑ tout entier; donc un nombre mesurera l'unité restante ΑΘ, ce qui est impossible (déf. 3. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, ΓΔ. Donc les nombres AB, ΓΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Εστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ· διὸ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint dati duo numeri non primi inter se ΑΒ, ΓΔ, et sit minor ΓΔ; oportet igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

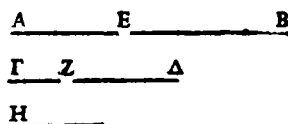


Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ² κοινὸν μέτρον ἔστι. Καὶ φανερόν ἐστι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Si ΓΔ quidem ipsum ΑΒ metitur, metitur vero et se ipsum; ipse ΓΔ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Et manifestum est et maximam; nullus enim major ipso ΓΔ ipsum ΓΔ metietur.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ληφθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει

Si autem non metitur ΓΔ ipsum ΑΒ, ipsorum ΑΒ, ΓΔ detracto semper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui me-



τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Μορὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται. Εἰ δὲ μὴ, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ληφθήσεται ἄρα τις

tietur eum præ se ipso. Unitas quidem non enim relinquetur. Si autem non, erunt ΑΒ, ΓΔ primi inter se, quod non ponitur; relin-

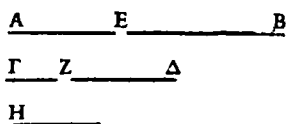
Soient donnés les deux nombres ΑΒ, ΓΔ non premiers entr'eux, et que ΓΔ soit le plus petit; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ.

Si ΓΔ mesure ΑΒ, le nombre ΓΔ sera une commune mesure des nombres ΓΔ, ΑΒ, parce que ΓΔ se mesure lui-même; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que ΓΔ ne peut mesurer ΓΔ.

Mais si ΓΔ ne mesure pas ΑΒ, et si on retranche toujours le plus petit des nombres ΑΒ, ΓΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste; car si cela était, les nombres ΑΒ, ΓΔ seraient premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé;

ἀριθμὸς, ἵς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ, ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΕΑ μετρεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. Ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ

quetur igitur aliquis numerus, qui metietur eum præ se ipso. Et ipse quidem ΓΔ ipsum ΑΒ metiens relinquat se ipso minorem ΕΑ, ipse vero ΕΑ ipsum ΔΓ metiens relinquat se ipso minorem ΖΓ, ipse autem ΓΖ ipsum ΕΑ metiatur. Et quoniam ΓΖ ipsum ΑΕ metitur, ipse autem ΑΕ ipsum ΔΖ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΔΖ metietur. Metitur autem et se ipsum; et totum igitur ΓΔ metietur. Ipse



μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστος. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστος κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν

autem ΓΔ ipsum ΒΕ metitur; et ΓΖ igitur ipsum ΒΕ metitur. Metitur autem et ipsum ΕΑ; et totum igitur ΒΑ metietur. Metitur autem et ipsum ΓΔ; ipse ΓΖ igitur ipsos ΑΒ, ΓΔ metitur; ΓΖ igitur ipsorum ΑΒ, ΓΔ communis mensura est. Dico utique et maximam. Si enim non est ΓΖ ipsorum ΑΒ, ΓΔ maxima communis mensura, metietur aliquis ΑΒ, ΓΔ numeros numerus major existens ipso ΓΖ. Me-

il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que ΓΔ mesurant ΑΒ laisse ΕΑ plus petit que lui-même; que ΕΑ mesurant ΔΓ laisse ΖΓ plus petit que lui-même; et enfin que ΓΖ mesure ΕΑ. Puisque ΓΖ mesure ΑΕ, et que ΑΕ mesure ΔΖ, le nombre ΓΖ mesurera ΔΖ. Mais il se mesure lui-même; donc il mesurera ΓΔ tout entier. Mais ΓΔ mesure ΒΕ; donc ΓΖ mesure ΒΕ. Mais il mesure ΕΑ; donc il mesurera ΒΑ tout entier. Mais il mesure ΓΔ; donc ΓΖ mesure ΑΒ et ΓΔ; donc ΓΖ est une commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si ΓΖ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres ΑΒ, ΓΔ, quelque nombre plus grand que ΓΖ mesurera les nombres ΑΒ, ΓΔ. Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit Η. Puisque Η mesure ΓΔ, et que ΓΔ mesure ΒΕ, le nombre Η mesurera ΒΕ. Mais il mesure ΒΑ tout entier; donc il mesurera le reste

BA· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει. Ο δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμούς ἀριθμὸς τις μετρήσει, μείζων ὧν τοῦ ΓZ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ μέγιστός ἐστι κοινὸν μέτρον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tiatur, et sit H. Et quoniam H ipsum ΓΔ metitur, ipse vero ΓΔ ipsum BE metitur; et ipse H igitur ipsum BE metietur. Metitur autem et totum BA; et reliquum igitur ipsum AE metietur. Ipse autem AE ipsum ΔZ metitur; et H igitur ipsum ΔZ metitur. Metitur autem et totum ΔΓ; et reliquum igitur ΓZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur AB, ΓΔ numeros numerus aliquis metietur, major existens ipso ΓZ; ipse ΓZ igitur ipsorum AB, ΓΔ maxima est communis mensura. Quod oportebat ostendere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ δύο ἀριθμούς μετρή, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει⁴.

Ex hoc utique manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

AE. Mais AE mesure ΔZ; donc H mesure ΔZ. Mais il mesure ΔΓ tout entier; donc il mesurera le reste ΓZ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc quelque nombre plus grand que ΓZ ne mesurera pas les nombres AB, ΓΔ; donc ΓZ est la plus grande commune mesure des nombres AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là, que si un nombre en mesure deux autres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ A, B, Γ . δεῖ δὲ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se A, B, Γ ; oportet igitur ipsorum A, B, Γ maximam communem mensuram invenire.

A _____
 B _____
 Γ _____
 Δ _____
 E _____

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν A, B τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ . ὁ δὲ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρίτω πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς A, B . ὁ Δ ἄρα τοὺς A, B, Γ μετρεῖ. ὁ Δ ἄρα τῶν A, B, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ Δ τῶν A, B, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τοὺς A, B, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ . Με-

Sumatur enim duorum A, B maxima communis mensura Δ ; ipse utique Δ ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum, metitur autem et ipsos A, B ; ipse Δ igitur ipsos A, B, Γ metitur; ipse Δ igitur ipsorum A, B, Γ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non est Δ ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura, metietur $A,$

PROPOSITION III.

Trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnés les trois nombres A, B, Γ non premiers entr'eux; il faut trouver leur plus grande commune mesure.

Prenons la plus grande commune mesure Δ des deux nombres A, B ; le nombre Δ mesure, ou ne mesure pas le nombre Γ . Premièrement, qu'il le mesure; mais il mesure aussi les nombres A, B ; donc il mesure les nombres A, B, Γ ; donc Δ est une commune mesure des nombres A, B, Γ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si Δ n'est pas la plus grande commune mesure des nombres A, B, Γ , un nombre plus grand que Δ mesurera les nombres A, B, Γ .

τρίτω, καὶ ἴστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρίῃ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει², καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἴσθιν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρίῃ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μετρήσει μίζων τοῦ Δ³. ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρίτω δὲ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὲ τοὺς Α, Β, Γ με-

Β, Γ numeros numerus major existens ipso Δ. Metiatur, et sit E. Et quoniam E ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β igitur metietur, et ipsorum igitur Α, Β maximam communem mensuram metietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis mensura est Δ; ipse igitur E ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numeros numerus aliquis metietur major ipso Δ; ipse Δ igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Non metiatur autem Δ ipsum Γ; dico primum numeros Δ, Γ non esse primos inter se. Quoniam enim Α, Β, Γ non sunt primi inter se, metietur aliquis cos numerus; qui autem

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

τρῶν, καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρίῃ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρη-

ipsos Α, Β, Γ metitur, et ipsos Α, Β metietur, et ipsorum Α, Β maximam mensuram Δ metietur. Metiatur autem et ipsum Γ; ipsos Δ, Γ igitur

Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit E. Puisque E mesure les nombres Α, Β, Γ, il mesurera les nombres Α, Β, et par conséquent leur plus grande commune mesure (cor. 2. 7). Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β; donc E mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Δ ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Que Δ ne mesure pas Γ; je dis premièrement que les nombres Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Car puisque les nombres Α, Β, Γ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, et celui qui mesure les nombres Α, Β, Γ, mesurera les nombres Α, Β, et mesurera aussi leur plus grande commune mesure Δ (cor. 2. 7). Mais il mesure aussi Γ; donc quelque nombre mesurera

392 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοι οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν
μέτρον, ὃ Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὃ
δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α,
Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὃ Ε ἄρα τοὺς
Α, Β, Γ μετρεῖ· ὃ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν
ἔστι μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ
γὰρ μὴ ἔστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον

numerus aliquis metietur; ipsi Δ, Γ igitur non
sunt primi inter se. Sumatur igitur eorum
maxima communis mensura Ε. Et quoniam Ε
ipsum Δ metitur, ipse autem Δ ipsos Α, Β
metitur; et Ε igitur ipsos Α, Β, metitur. Me-
titur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Α,
Β, Γ metitur; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ
communis est mensura. Dico autem et maximam.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ
ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. Μετρεῖται,
καὶ ἔστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ
μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β
ἄρα⁵ μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ
τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἔστιν ὁ Δ· ὁ
Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ
Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα
μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει⁶. Τὸ δὲ τῶν Γ,

Si enim non est Ε ipsorum Α, Β, Γ maxima
communis mensura, metietur aliquis ipsos Α,
Β, Γ numeros numerus major existens ipso Ε;
metiatur, et sit Ζ. Et quoniam Ζ ipsos Α, Β, Γ
metitur, et ipsos Α, Β metitur, et ipsorum Α, Β
igitur maximam communem mensuram me-
tietur. Ipsorum autem Α, Β maxima communis
mensura est Δ; ipse Ζ igitur ipsum Δ metitur.
Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ζ igitur ipsos Δ, Γ

les nombres Δ, Γ; donc Δ, Γ ne sont pas premiers entr'eux. Prenons leur plus grande commune mesure Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure les nombres Α, Β, le nombre Ε mesure Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des nombres Α, Β, Γ. Je dis qu'il en est la plus grande. Car si Ε n'est pas la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ, un nombre plus grand que Ε mesurera les nombres Α, Β, Γ. Qu'il les mesure, et que ce soit Ζ. Puisque Ζ mesure les nombres Α, Β, Γ, il mesure Α et Β, et il mesurera par conséquent leur plus grande commune mesure. Mais Δ est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β; donc Ζ mesure Δ. Mais il mesure aussi Γ; donc Ζ mesure Δ et Γ; donc il mesure la plus grande commune mesure des nombres Δ, Γ. Mais Ε est la plus grande

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστιν κοινὸν μέτρον.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὑρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῶς τρεῖς μέτρῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσῃ.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλείονων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρήσομεν^δ.

metitur; et ipsorum Δ, Γ igitur maximam communem mensuram metitur. Ipsorum autem Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ipse Ζ igitur ipsum Ε metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β, Γ numerus aliquis metietur major existens ipso Ε; ipse Ε igitur ipsorum Α, Β, Γ maxima est communis mensura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, inventa est maxima communis mensura. Quod oportebat facere.

COROLLARIUM.

Ex his utique manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, et maximam eorum communem mensuram mensurum esse.

Eodem modo et pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

commune mesure des nombres Γ, Δ; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc un nombre plus grand que Ε ne mesurera pas les nombres Α, Β, Γ; donc Ε est la plus grande commune mesure des nombres Α, Β, Γ.

Donc, trois nombres non premiers entr'eux étant donnés, on a trouvé leur plus grande commune mesure. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

Il suit évidemment de là que si un nombre en mesure trois autres, il mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

Plusieurs nombres étant donnés, on trouvera de la même manière leur plus grande commune mesure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

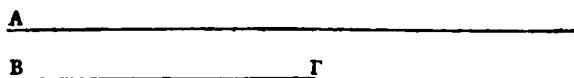
PROPOSITIO IV.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὃ ἱλάσων τοῦ μείζονος, ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρος.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α, ΒΓ, καὶ ἴστω ἱλάσων ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ ΒΓ τοῦ Α ἥτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρος.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri Α, ΒΓ, et sit minor ΒΓ; dico ΒΓ ipsius Α vel partem esse vel partes.



Οἱ Α, ΒΓ¹ γὰρ ἥτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Ἐστώσαν πρῶτερον οἱ Α, ΒΓ² πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρεθέντες δὴ τοῦ ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἴσται ἐκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ ΒΓ μέρος τι τοῦ Α· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Μὴ ἴστωσαν δὴ οἱ Α, ΒΓ³ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὲ ΒΓ τὸν Α ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Εἰ μὲν οὖν ὁ ΒΓ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Ipsi Α, ΒΓ enim vel primi inter se sunt, vel non; sint primum Α, ΒΓ primi inter se, et diviso ΒΓ in unitates quæ in ipso, erit quæque unitas earum quæ in ΒΓ pars aliqua ipsius Α; quare partes est ΒΓ ipsius Α.

Non sint autem Α, ΒΓ primi inter se; ipse utique ΒΓ ipsum Α vel metitur, vel non metitur. Si autem ΒΓ ipsum Α metitur, pars est ΒΓ ipsius Α.

PROPOSITION IV.

Tout nombre est ou une partie ou plusieurs parties de tout autre nombre, le plus petit du plus grand.

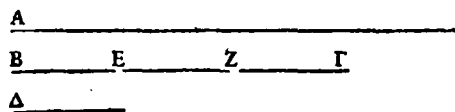
Soient deux nombres Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit le plus petit; je dis que ΒΓ est ou une partie ou plusieurs parties de Α.

Car les nombres Α, ΒΓ sont premiers entr'eux, ou non; qu'ils soient d'abord premiers entr'eux; ayant divisé le nombre ΒΓ en ses unités, chacune des unités de ΒΓ sera quelque partie de Α (déf. 1 et 2. 7); donc ΒΓ sera plusieurs parties de Α.

Que les nombres Α, ΒΓ ne soient pas premiers entr'eux; le nombre ΒΓ mesure Α ou ne le mesure pas. Si ΒΓ mesure Α, le nombre ΒΓ est une partie de Α.

Εἰ δὲ οὐ. Εἰλήφθω τῶν Α, ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διηρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Καὶ ἵπαι ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α. Ἴσος δὲ ἕκαστος

Si autem non. Sumatur ipsorum Α, ΒΓ maxima communis mensura Δ, et dividatur ΒΓ in numeros ipsi Δ æquales ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ. Et quoniam Δ ipsum Α metitur, pars est Α ipsius Α.



τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. Ἀπας ἄρα ἀριθμὸς, καὶ τὰ ἴξῃς.

Æqualis igitur unicuique ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; et unusquisque igitur ipsorum ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ ipsius Α pars est; quare partes est ΒΓ ipsius Α. Omnis igitur numerus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO V.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφοτέρως συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται, ἥπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars; et uterque simul utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ' τοῦ ΒΓ μέρος ἴστω,

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter

Si'il ne le mesure pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, ΒΓ (2. 7), et partageons ΒΓ en parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ égales à Δ. Puisque Δ mesure Α, le nombre Δ est une partie de Α. Mais Δ est égal à chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ; donc chacune des parties ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ est une partie de Α; donc ΒΓ est plusieurs parties de Α. Donc, etc.

PROPOSITION V.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, leur somme sera aussi la même partie de leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre

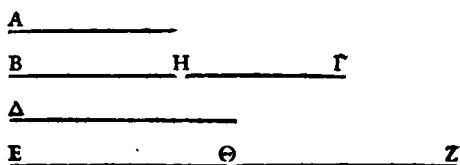
396 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρως ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ.

Επεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διηγήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ· ὁ δὲ ΕΖ

Δ alterius ΕΖ eadem pars, quæ ipse Α ipsius ΒΓ; dico et utrumque simul Α, Δ utriusque simul ΒΓ, ΕΖ eandem partem esse quæ ipse Α ipsius ΒΓ.

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt et in ΕΖ numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem in numeros ipsi Α æquales ΒΗ, ΗΓ; ipse



εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ· ἴσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστὶν, ὁ δὲ ΘΖ τῷ Δ· καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶν³. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΓ, ΕΖ ἴσοι τοῖς Α, Δ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ⁴ Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ, καὶ συναμφοτέρος ὁ ΒΓ, ΕΖ

vero ΕΖ in numeros ipsi Δ æquales ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ. Et quoniam æqualis est ΒΗ quidem ipsi Α, ipse vero ΕΘ ipsi Δ; et ΒΗ, ΕΘ igitur ipsis Α, Δ æquales. Propter eadem utique et ΗΓ ipsi Α æqualis est, ipse autem ΘΖ ipsi Δ; et ΗΓ, ΘΖ igitur ipsis Α, Δ æquales sunt; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt et in ipsis ΒΓ, ΕΖ æquales ipsis Α, Δ; quam multiplex igitur est ΒΓ ipsius Α, tam mul-

Α soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ; je dis que la somme de Α et de Δ est la même partie de la somme de ΒΓ et de ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ.

Car puisque Α est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y aura dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ. Partageons ΒΓ en nombres ΒΗ, ΗΓ égaux à Α, et ΕΖ en nombres ΕΘ, ΘΖ égaux à Δ, la quantité des nombres ΒΗ, ΗΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΘ, ΘΖ. Mais ΒΗ est égal à Α, et ΕΘ égal à Δ; donc la somme de ΒΗ et de ΕΘ est égale à la somme de Α et de Δ. Par la même raison, ΗΓ est égal à Α, et ΘΖ égal à Δ; donc la somme de ΗΓ et de ΘΖ est égale à la somme de Α et de Δ; il y a donc dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΒΓ, ΕΖ de

συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέ-
ρος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. Ὅπρι ἴδι
διξας.

tipler est et uterque simul ΒΓ, ΕΖ utriusque
simul Α, Δ; quæ igitur pars est Α ipsius ΒΓ,
eadem pars est et uterque simul Α, Δ utrius-
que simul ΒΓ, ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

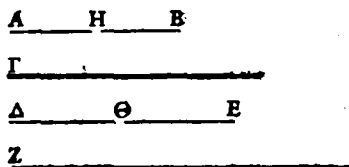
Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἐτί-
ρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ· καὶ συναμφοτέρος συναμ-
φοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἴσται, ἅπρι ὁ εἰς τοῦ
ἐνός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἴσται,
καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη
ἅπρι ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρος
ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη
ἐστίν, ἅπρι ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

PROPOSITIO VI.

Si numerus numeri partes est, et alter alte-
rius eadem partes est; et uterque simul utriusque
simul eadem partes erit quæ unus unius.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes sit, et
alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes quæ ΑΒ ip-
sius Γ; dico et utrumque simul ΑΒ, ΔΕ utrius-
que simul Γ, Ζ eadem partes esse, quæ ΑΒ
ipsius Γ.



Επεὶ γὰρ ἂ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ
μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν

Quoniam enim quæ partes est ΑΒ ipsius Γ
eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur

nombres égaux aux nombres Α, Δ; donc ΒΓ est le même multiple de Α, que la
somme de ΒΓ et de ΕΖ l'est de la somme de Α et de Δ; donc Α est la même partie
de ΒΓ que la somme de Α et de Δ, l'est de la somme de ΒΓ et de ΕΖ. Ce qu'il fallait
démontrer.

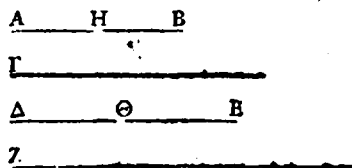
PROPOSITION VI.

Si un nombre est plusieurs parties d'un nombre, et si un autre nombre est
les mêmes parties d'un autre nombre, leur somme sera les mêmes parties de
leur somme, qu'un seul l'est d'un seul.

Que le nombre ΑΒ soit plusieurs parties du nombre Γ, et qu'un autre nombre
ΔΕ soit les mêmes parties d'un autre nombre Ζ, que ΑΒ l'est de Γ; je dis que la
somme de ΑΒ et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ que ΑΒ l'est de Γ.

τῶ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηρησθῶ ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in ipsius Γ partes ΑΗ, ΗΒ, ipse vero ΔΕ in ipsius Ζ partes ΔΘ, ΘΕ.



Εσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῶ πλῆθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ³ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ, καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ⁴ καὶ συναμφοτέρος ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ὁ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ AB, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Erit utique æqualis multitudo ipsorum ΑΗ, ΗΒ multitudini ipsorum ΔΘ, ΘΕ. Et quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ; quæ igitur pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et uterque simul ΑΗ, ΔΘ utriusque simul Γ, Ζ. Propter eadem utique et quæ pars est ΗΒ ipsius Γ, et ipse ΘΕ ipsius Ζ; ipse igitur pars est ΗΒ ipsius Γ et uterque simul ΗΒ, ΘΕ utriusque simul Γ, Ζ; quæ igitur partes est AB ipsius Γ, eadem partes est et uterque simul AB, ΔΕ utriusque simul Γ, Ζ. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Partageons AB en parties de Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΒ; partageons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ.

Le nombre des parties ΑΗ, ΗΒ sera égal au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque ΑΗ est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Ζ, ΑΗ est la même partie de Γ, que la somme de ΑΗ et de ΔΘ l'est de la somme de Γ et de Ζ (5. 7). Par la même raison, ΗΒ est la même partie de Γ, que ΘΕ l'est de Ζ; donc ΗΒ est la même partie de Γ, que la somme de ΗΒ et de ΘΕ l'est de la somme de Γ et de Ζ; donc la somme de AB et de ΔΕ est les mêmes parties de la somme de Γ et de Ζ, que AB l'est de Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ

PROPOSITIO VII.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, ἔπερ ἀφαιρέθῃς ἀφαιρέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἴσται, ὅπερ ἀφαιρέθῃς ὁ ΑΕ ἀφαιρέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri pars est, quæ ablatuſ ablati; et reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ pars sit, quæ ablatuſ ΑΕ ablati ΓΖ; dico et reliquum EB reliqui ΖΔ eandem partem esse, quæ totus AB totius ΓΔ.



Ο γὰρ μέρος ἴσται ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἴσται ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται καὶ ὁ EB τοῦ ΓΗ· ὁ ἄρα μέρος ἴσται ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἴσται καὶ ὁ AB τοῦ ΗΖ, ὁ δὲ μέρος ἴσται ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑποκίται καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἴσται καὶ

Quæ enim pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars sit et EB ipsius ΓΗ. Et quoniam quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est EB ipsius ΓΗ; quæ igitur pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et AB ipsius ΗΖ; quæ autem pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars ponitur et AB ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est et AB ipsius

PROPOSITION VII.

Si un nombre est la même partie d'un nombre, que le nombre retranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera la même partie du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit la même partie du nombre ΓΔ, que le nombre retranché ΑΕ l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier AB l'est du nombre entier ΓΔ.

Que EB soit la même partie de ΓΗ, que ΑΕ l'est de ΓΖ. Puisque ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que EB l'est de ΓΗ; le nombre ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΗΖ (5. 7); mais on a supposé que ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de ΗΖ, que

400 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ AB τοῦ HZ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ². ὁ AB ὅρα ἑκατέρου τῶν HZ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ HZ τῷ ΓΔ. Κοινὸς ἀφῆρσθαι ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσος³. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ

HZ, eadem pars est et AB ipsius ΓΔ; ipse AB igitur utriusque ipsorum HZ, ΓΔ eadem pars est; æqualis igitur est HZ ipsi ΓΔ. Communis aufertur ΓΖ; reliquus igitur ΗΓ reliquo ΖΔ est æqualis. Et quoniam quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΗΓ, æqualis autem ΗΓ ipsi ΖΔ; quæ igitur pars est ΑΕ ipsius



ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ⁶. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΓΖ, eadem pars est et ΕΒ ipsius ΖΔ. Sed quæ pars est ΑΕ ipsius ΓΖ, eadem pars est et ΑΒ ipsius ΓΔ; quæ igitur pars est ΕΒ ipsius ΖΔ, eadem pars est et ΑΒ ipsius ΓΔ; et reliquus igitur ΕΒ reliqui ΖΔ eadem pars est quæ totus ΑΒ totius ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

AB l'est de ΓΔ; donc AB est la même partie de HZ et de ΓΔ; donc HZ est égal à ΓΔ. Retranchons la partie commune ΓΖ; la partie restante ΗΓ sera égale à la partie restante ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΗΓ, et ΗΓ est égal à ΖΔ; donc ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΕΒ l'est de ΖΔ. Mais ΑΕ est la même partie de ΓΖ, que ΑΒ l'est de ΓΔ; donc ΕΒ est la même partie de ΖΔ, que ΑΒ l'est de ΓΔ; donc le nombre restant ΕΒ est la même partie du nombre restant ΖΔ, que le nombre entier ΑΒ l'est du nombre entier ΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

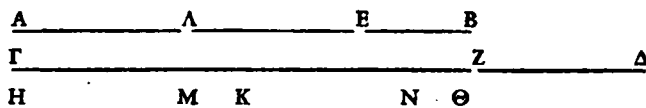
PROPOSITIO VIII.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, ἅπερ ἀφαιρέ-
θεις ἀφαιρέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ
αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω,
ἅπερ ἀφαιρέθεις ὁ AE ἀφαιρέντος τοῦ ΓΖ·
λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ
αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

Si numerus numeri partes est, quæ ablatas
ablati; et reliquus reliqui eadem partes erit,
quæ totus totius.

Numerus enim AB numeri ΓΔ partes sit,
quæ ablatas AE ablati ΓΖ; dico et reliquum
EB reliqui ΖΔ easdem partes esse, quæ totus
AB totius ΓΔ.



Κείσθω γὰρ τῷ AB ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἐστίν
ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ
ΓΖ. Διηρέσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ
ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ AE εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ·
ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλῆθει
τῶν ΑΛ, ΛΕ. Καὶ ἵπεται ὁ μίρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,
τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ· μείζων δὲ ὁ
ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. Κείσθω
τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὁ ἄρα μίρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ,

Ponatur enim ipsi AB æqualis ΗΘ; quæ
igitur partes est ΗΘ ipsius ΓΔ, eadem partes
est et AE ipsius ΓΖ. Dividatur ΗΘ quidem in
ipsius ΓΔ partes ΗΚ, ΚΘ, ipse vero AE in
ipsius ΓΖ partes ΑΛ, ΛΕ; erit igitur æqualis
multitudo ΗΚ, ΚΘ ipsi multitudini ΑΛ, ΛΕ.
Et quoniam quæ pars est ΗΚ ipsius ΓΔ, ea-
dem pars est et ΑΛ ipsius ΓΖ; major autem
ΓΔ ipso ΓΖ; major igitur et ΗΚ ipso ΑΛ. Po-

PROPOSITION VIII.

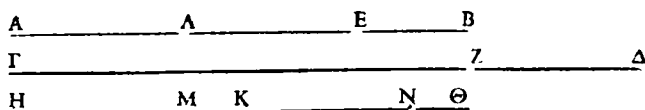
Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, que le nombre re-
tranché l'est du nombre retranché, le nombre restant sera aussi les mêmes parties
du nombre restant, que le tout l'est du tout.

Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre ΓΔ, que le nombre
retranché AE l'est du nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB
est les mêmes parties du nombre restant ΖΔ, que le tout AB l'est du tout ΓΔ.

Faisons ΗΘ égal à AB; le nombre ΗΘ sera les mêmes parties de ΓΔ, que AE
l'est de ΓΖ. Divisons ΗΘ en parties de ΓΔ, et que ces parties soient ΗΚ, ΚΘ;
divisons ΔE en parties de ΓΖ, et que ces parties soient ΑΛ, ΛΕ; le nombre
des parties ΗΚ, ΚΘ sera égal au nombre des parties ΑΛ, ΛΕ. Et puisque
ΗΚ est la même partie de ΓΔ, que ΑΛ l'est de ΓΖ, et que ΓΔ est plus grand que
ΓΖ, ΗΚ est plus grand que ΑΛ. Faisons ΗΜ égal à ΑΛ; ΗΚ sera la même partie

τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ HM τοῦ ΓZ · καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ MK λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ HK ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ $K\Theta$ τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛE τοῦ ΓZ , μείζων δὲ ὁ $\Gamma\Delta$ τοῦ ΓZ · μείζων ἄρα καὶ ὁ $K\Theta$ τοῦ ΛE . Κείσθω τῷ ΛE ἴσος ὁ KN · ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ $K\Theta$ τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ KN τοῦ ΓZ · καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $N\Theta$ λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ

natur ipsi $\Lambda\Lambda$ æqualis ipse HM ; quæ igitur pars est HK ipsius $\Gamma\Delta$, eadem pars est et HM ipsius ΓZ ; et reliquus igitur MK reliqui $Z\Delta$ eadem pars est quæ totus HK totius $\Gamma\Delta$. Rursus, quoniam quæ pars est $K\Theta$ ipsius $\Gamma\Delta$, eadem pars est et ΛE ipsius ΓZ , major autem $\Gamma\Delta$ ipso ΓZ ; major igitur et $K\Theta$ ipso ΛE . Ponatur ipsi ΛE æqualis ipse KN ; quæ igitur pars est $K\Theta$ ipsius $\Gamma\Delta$, eadem pars est et KN ipsius ΓZ ; et re-



ὅλος ὁ $K\Theta$ ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ MK λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν ὅπερ ὅλος ὁ KH ὅλου τοῦ $\Delta\Gamma$ · καὶ συναμφοτέρος ἄρα ὁ MK , $N\Theta$ τοῦ ΔZ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΘH ὅλου τοῦ $\Delta\Gamma$. Ἰσος δὲ συναμφοτέρος μὲν ὁ MK , $N\Theta$ τῷ EB , ὁ δὲ ΘH τῷ BA · καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

liquis igitur $N\Theta$ reliqui $Z\Delta$ eadem pars est, quæ totus $K\Theta$ totius $\Gamma\Delta$. Ostensum autem est et reliquum MK reliqui $Z\Delta$ eandem partem esse quæ totus KH totius $\Delta\Gamma$; et uterque simul igitur MK , $N\Theta$ ipsius ΔZ eadem partes est quæ totus ΘH totius $\Delta\Gamma$. Æqualis autem uterque simul MK , $N\Theta$ quidem ipsi EB , ipse vero ΘH ipsi BA ; et reliquus igitur EB reliqui $Z\Delta$ eadem partes est quæ totus AB totius $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

de $\Gamma\Delta$, que HM l'est de ΓZ ; donc le reste MK est la même partie du reste $Z\Delta$, que le tout HK l'est du tout $\Gamma\Delta$. De plus, puisque $K\Theta$ est la même partie de $\Gamma\Delta$, que ΛE l'est de ΓZ , et que $\Gamma\Delta$ est plus grand que ΓZ , $K\Theta$ est plus grand que ΛE . Faisons KN égal à ΛE ; $K\Theta$ sera la même partie de $\Gamma\Delta$, que KN l'est de ΓZ ; donc le reste $N\Theta$ est la même partie du reste $Z\Delta$, que le tout $K\Theta$ l'est du tout $\Gamma\Delta$. Mais on a démontré que le reste MK est la même partie du reste $Z\Delta$, que le tout KH l'est du tout $\Delta\Gamma$; donc la somme de MK et de $N\Theta$, est les mêmes parties de ΔZ , que le tout ΘH l'est du tout $\Delta\Gamma$. Mais la somme de MK et de $N\Theta$ est égale à EB , et ΘH égal à BA ; donc le reste EB est les mêmes parties du reste $Z\Delta$, que le tout AB l'est du tout $\Gamma\Delta$. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

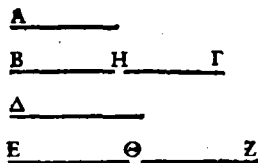
PROPOSITIO IX.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἦ¹· καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ἡ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἡ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ, ἐλάσσω δὲ ἔστω ὁ Α τοῦ Δ²· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἡ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἡ μέρη.

Si numerus numeri pars est, et alter alterius eadem pars est; et alterne quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem pars erit vel eadem partes et secundus quarti.

Numerus enim Α numeri ΒΓ pars sit, et alter Δ alterius ΕΖ eadem pars quæ Α ipsius ΒΓ, minor autem sit Α ipso Δ; dico et alterne quæ pars est Α ipsius Δ vel partes, eadem partem esse et ΒΓ ipsius ΕΖ vel partes.



Επὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ³ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ, eadem pars est et Δ ipsius ΕΖ; quot igitur sunt in ΒΓ numeri æquales ipsi Α, tot sunt

PROPOSITION IX.

Si un nombre est une partie d'un nombre, et si un autre nombre est la même partie d'un autre nombre, le premier est, par permutation, la même partie ou les mêmes parties du troisième, que le second l'est du quatrième.

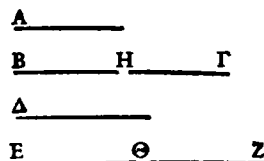
Que le nombre Α soit une partie du nombre ΒΓ, et qu'un autre nombre Δ soit la même partie d'un autre nombre ΕΖ, que Α l'est de ΒΓ, et que Α soit plus petit que Δ; je dis que, par permutation, Α est la même partie ou les mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ.

Puisque Α est la même partie de ΒΓ, que Δ l'est de ΕΖ, il y a dans ΒΓ autant de nombres égaux à Α, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux

404 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ EZ ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς
τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ EZ εἰς τοὺς
τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΟΖ· ἴσον ἔσται δὴ τὸ
πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ.

et in EZ æquales ipsi Δ. Dividatur BG qui-
dem in ipsos ipsi Α æquales ΒΗ, ΗΓ, ipse
vero EZ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΘ, ΟΖ; æ-
qualis erit utique multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΓ
multitudini ipsorum ΕΘ, ΟΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλή-
λοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΟΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλ-
λήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ
τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ· ὁ ἄρα μέρους ἐστὶν ὁ
ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ
ὁ ΗΓ τοῦ ΟΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ
μέρους ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ
μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ ΒΓ συναμφοτέ-
ρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴσος δὴ ὁ μὲν ΒΗ
τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὁ ἄρα μέρους ἐστὶν ὁ Α
τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ
τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam æquales sunt ΒΗ, ΗΓ numeri
inter se, sunt autem et ΕΘ, ΟΖ numeri æ-
quales inter se, et est æqualis multitudo ipso-
rum ΒΗ, ΗΓ multitudini ipsorum ΕΘ, ΟΖ;
quæ igitur pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes,
eadem pars est et ΗΓ ipsius ΟΖ vel eadem
partes; quare et quæ pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel
partes, eadem pars est et uterque simul ΒΓ,
utriusque simul ΕΖ vel eadem partes; æqua-
lis utique ΒΗ quidem ipsi Α, ipse vero ΕΘ
ipsi Δ; quæ igitur pars est et Α ipsius Δ
vel partes, eadem pars est et ΒΓ ipsius ΕΖ vel
eadem partes. Quod oportebat ostendere.

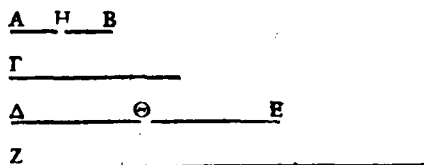
à Δ. Partageons ΒΓ en parties égales à Α, et que ces parties soient ΒΗ, ΗΓ;
partageons aussi ΕΖ en parties égales à Δ, et que ces parties soient ΕΘ, ΟΖ; le
nombre des parties ΒΗ, ΗΓ sera égal au nombre des parties ΕΘ, ΟΖ.

Puisque les nombres ΒΗ, ΗΓ sont égaux entr'eux, que les nombres ΕΘ,
ΟΖ sont aussi égaux entr'eux, et que la quantité des nombres ΒΗ, ΗΓ est égale
à la quantité des nombres ΕΘ, ΟΖ, le nombre ΒΗ est la même partie ou les
mêmes parties de ΕΘ, que ΗΓ l'est de ΟΖ; donc ΒΗ est la même partie ou
les mêmes parties de ΕΘ, que la somme ΒΓ l'est de la somme ΕΖ (5 et 6. 7).
Mais ΒΗ est égal à Α, et ΕΘ égal à Δ; donc Α est la même partie ou les
mêmes parties de Δ, que ΒΓ l'est de ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾗ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλάξ ἃ μέρη ἔστιν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτό¹ μέρος.

Αριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ AB τοῦ ΔΕ ἐλάσσων². λέγω καὶ ἐναλλάξ ἃ μέρη ἔστιν ὁ AB τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστι καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτό³ μέρος.



Επεὶ γὰρ ἃ μέρη ἔστιν ὁ AB τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστι καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ,

Si numerus numeri partes est, et alter alterius eadem partes; et alterne, quæ partes est primus tertii vel pars, eadem partes erit et secundus quarti vel eadem pars.

Numerus enim AB numeri Γ partes sit, et alter ΔΕ alterius Ζ eadem partes, sit autem AB ipso ΔΕ minor; dico et alterne quæ partes est AB ipsius ΔΕ vel pars, easdem partes esse et Γ ipsius Ζ vel eadem partem.

Quoniam enim quæ partes est AB ipsius Γ, eadem partes est et ΔΕ ipsius Ζ; quot igitur sunt in AB partes ipsius Γ, tot sunt et in ΔΕ partes ipsius Ζ. Dividatur AB quidem in partes ΑΗ, ΗΒ ipsius Γ, ipse vero ΔΕ in partes ΔΘ, ΘΕ ipsius Ζ; erit utique æqualis multi-

PROPOSITION X.

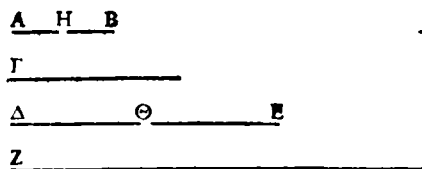
Si un nombre est les mêmes parties d'un nombre, qu'un autre l'est d'un autre, le premier sera aussi, par permutation, les mêmes parties ou la même partie du troisième, que le second l'est du quatrième.

Que le nombre AB soit les mêmes parties du nombre Γ, qu'un autre nombre ΔΕ l'est d'un autre nombre Ζ, et que AB soit plus petit que ΔΕ; je dis que, par permutation, AB est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ.

Puisque AB est les mêmes parties de Γ, que ΔΕ l'est de Ζ, il y a dans AB autant de parties de Γ, qu'il y a dans ΔΕ de parties de Ζ. Divisons AB en parties de Γ, et que ces parties soient ΑΗ, ΗΒ; divisons aussi ΔΕ en parties de Ζ, et que ces parties soient ΔΘ, ΘΕ; le nombre des parties ΑΗ, ΗΒ sera égal

HB τῷ πληθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ⁴ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλάξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ⁵ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ

tudo ipsarum ΑΗ, ΗΒ multitudini ipsarum ΔΘ, ΘΕ. Et quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ, eadem pars est et ΔΘ ipsius Ζ, et alterne quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes. Propter eadem utique et quæ pars est ΗΒ ipsius ΘΕ vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes; quare et quæ pars est ΑΗ ip-



μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη⁶. ἀλλ' ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ὁ ἄρα⁸ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. Οὕτως ἴδιαι δεικνύται.

sius ΔΘ vel partes, eadem pars est et ΗΒ ipsius ΘΕ vel eadem partes; et quæ igitur pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est et ΑΒ ipsius ΔΕ vel eadem partes; sed quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars ostensa est et Γ ipsius Ζ vel eadem partes, et quæ igitur partes est ΑΒ ipsius ΔΕ vel partes, eadem partes est et Γ ipsius Ζ vel eadem pars. Quod oportebat ostendere.

au nombre des parties ΔΘ, ΘΕ. Et puisque ΑΗ est la même partie de Γ, que ΔΘ l'est de Ζ; par permutation, ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ (9. 7). Par la même raison, ΗΒ est la même partie ou les mêmes parties de ΘΕ, que Γ l'est de Ζ; donc ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que ΗΒ l'est de ΘΕ (5 et 6. 7); donc ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que ΑΒ l'est de ΔΕ; mais on a démontré que ΑΗ est la même partie ou les mêmes parties de ΔΘ, que Γ l'est de Ζ; donc ΑΒ est les mêmes parties ou la même partie de ΔΕ, que Γ l'est de Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια.

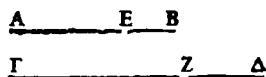
PROPOSITIO XI.

Εάν ἡ ὥς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὥς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἐστω ὥς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ AE πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἔστιν ὥς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Si est ut totus ad totum ita ablatum ad ablatum; et reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

Sit ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatum AE ad ablatum ΓΖ; dico et reliquum EB ad reliquum ΖΔ esse ut totus AB ad totum ΓΔ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὥς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ AE πρὸς τὸν ΓΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὰ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ὥστε AB τοῦ ΓΔ ἔστιν ἄρα ὥς EB πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; quæ igitur pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars est et AE ipsius ΓΖ vel eadem partes; et reliquus igitur EB reliqui ΖΔ eadem pars est vel partes, quæ AB ipsius ΓΔ; est igitur ut EB ad ΖΔ ita AB ad ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XI.

Si le tout est au tout comme le nombre retranché est au nombre retranché, le nombre restant sera aussi au nombre restant comme le tout est au tout.

Que le tout AB soit au tout ΓΔ comme le nombre retranché AE est au nombre retranché ΓΖ; je dis que le nombre restant EB est au nombre restant ΖΔ comme le tout AB est au tout ΓΔ.

Car, puisque AB est à ΓΔ comme AE est à ΓΖ, AB est la même partie ou les mêmes parties de ΓΔ que AE l'est de ΓΖ; donc le reste EB est la même partie ou les mêmes parties du reste ΖΔ que AB l'est de ΓΔ (7 et 8. 7); donc EB est à ΖΔ comme AB est à ΓΔ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Εάν ὅσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσται
ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἱπομένων,
οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγουμένοι πρὸς ἅπαντάς τοὺς
ἱπομένους.

Εστωσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ , ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως οἱ A, Γ πρὸς τοὺς B, Δ .

$$\frac{A}{\Gamma} = \frac{B}{\Delta}$$

Ἐπὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ . ὁ ἄρα μέρους ἐστὶν ὁ A τοῦ B ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη· καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ A, Γ συναμφοτέρου τοῦ B, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ A τοῦ B · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως οἱ A, Γ πρὸς τοὺς B, Δ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XII.

Si sunt quotcunque numeri proportionales, erit ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, Γ, Δ , ut A ad B ita Γ ad Δ ; dico esse ut A ad B ita ipsos A, Γ ad ipsos B, Δ .

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ ; quæ igitur pars est A ipsius B vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel partes; et uterque simul igitur A, Γ utriusque simul B, Δ eadem pars est vel eadem partes, quæ A ipsius B ; est igitur ut A ad B ita ipsi A, Γ ad ipsos B, Δ . Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient A, B, Γ, Δ tant de nombres proportionnels qu'on voudra; que A soit à B comme Γ est à Δ ; je dis que A est à B comme la somme des nombres A, Γ est à la somme des nombres B, Δ .

Car, puisque A est à B comme Γ est à Δ , A est la même partie ou les mêmes parties de B , que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc A est la même partie ou les mêmes parties de B que Γ l'est de Δ ; donc la somme des nombres A, Γ est la même partie ou les mêmes parties de la somme des nombres B, Δ , que A l'est de B (5 et 6. 7); donc A est à B comme la somme des nombres A, Γ est à la somme des nombres B, Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾤσι· καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται, ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Si quatuor numeri proportionales sunt; et alterne proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ; dico et alterne proportionales fore, ut Α ad Γ ita Β ad Δ.



Ἐπὶ γάρ ἐστιν ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλάξ ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐστὶν ἄρα ὥς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ; quæ igitur pars est Α ipsius Β vel partes, eadem pars est et Γ ipsius Δ vel eadem partes; alterne igitur quæ pars est Α ipsius Γ vel partes, eadem pars est et Β ipsius Δ vel eadem partes; est igitur ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XIII.

Si quatre nombres sont proportionnels; ils seront encore proportionnels par permutation.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres proportionnels, et que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis qu'ils seront encore proportionnels, par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

Car, puisque Α est à Β comme Γ est à Δ; Α est la même partie ou les mêmes parties de Β, que Γ l'est de Δ (déf. 20. 7); donc, par permutation, Α est la même ou les mêmes parties de Γ, que Β l'est de Δ (9 et 10. 7); donc Α est à Γ comme Β est à Δ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13'.

Εάν ὧσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διήσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται.

Εστωσαν γάρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ διήσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____
Ζ _____

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ

Si sunt quotcunque numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint enim quotcunque numeri Α, Β, Γ, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione Δ, Ε, Ζ, ut Α quidem ad Β ita Δ ad Ε, ut Β vero ad Γ ita Ε ad Ζ; dico et ex æquo esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur est ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Rursus, quoniam est ut Β ad Γ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Β ad Ε ita Γ ad Ζ. Ut autem Β ad

PROPOSITION XIV.

Si l'on a tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres égaux en quantité aux premiers, et si ces nombres étant pris deux à deux sont en même raison, ils seront aussi en même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres qu'on voudra, et d'autres nombres Δ, Ε, Ζ égaux en quantité à ceux-ci, que ces nombres soient pris deux à deux et en même raison, c'est-à-dire que Α soit à Β comme Δ est à Ε, et que Β soit à Γ comme Ε est à Ζ; je dis que, par égalité, Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Car, puisque Α est à Β comme Δ est à Ε, par permutation, Α est à Δ comme Β est à Ε (13. 7). De plus, puisque Β est à Γ comme Ε est à Ζ; par permu-

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 411

ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

E ita A ad Δ; et ut igitur A ad Δ ita Γ ad Z; alterne igitur est ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

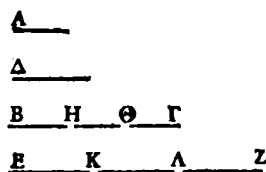
Εὰν μονὰς ἀριθμὸν τινα μετρήῃ, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινα ἀριθμὸν μετρήῃ· καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσῃ καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἢ Α ἀριθμὸν τινα τὸν ΒΓ μετρίτω, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινα ἀριθμὸν μετρίτω.

PROPOSITIO XV.

Si unitas numerum aliquem metitur, æqualiter autem alter numerus alium aliquem numerum metitur; et alterne æqualiter unitas tertium numerum metietur ac secundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem ΒΓ metiatur, æqualiter autem alter numerus Δ alium



μὲν τὸν ΕΖ μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

aliquem numerum EZ metiatur; dico et alterne æqualiter A unitatem ipsum Δ numerum metiri ac ΒΓ ipsum EZ.

tation, B est à E comme Γ est à Z. Mais B est à E comme A est à Δ; donc A est à Δ comme Γ est à Z; donc, par permutation, A est à Γ comme Δ est à Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XV.

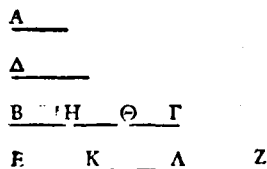
Si l'unité mesure un nombre autant de fois qu'un autre nombre mesure un autre nombre; par permutation, l'unité mesurera autant de fois le troisième nombre que le second mesure le quatrième.

Que l'unité A mesure un nombre ΒΓ autant de fois qu'un autre nombre Δ mesure un autre nombre ΕΖ; je dis que, par permutation, l'unité A mesure le nombre Δ autant de fois que ΒΓ mesure ΕΖ.

412 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ γὰρ ἰσάκεις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν
μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ
ΒΓ μονάδες τοσοῦτοί· εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ
ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ
μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ
Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ
πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ,
ΚΛ, ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ
μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ² καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ

Quoniam enim æqualiter Α unitas ipsum
ΒΓ numerum metitur ac Δ ipsum ΕΖ; quot
igitur sunt in ΒΓ unitates tot sunt et in ΕΖ
numeri æquales ipsi Δ. Dividatur ΒΓ quidem
in ipsas in eo unitates ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ipse
vero ΕΖ in ipsos ipsi Δ æquales ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ;
erit igitur æqualis multitudo ipsorum ΒΗ, ΗΘ,
ΘΓ multitudini ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Et quo-
niam æquales sunt ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitates inter



ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος
τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ,
ΚΛ, ΑΖ ἀριθμῶν· ἔσται³ ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς
τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν
ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΑΖ
ἀριθμὸν. Ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων
πρὸς ἓνα τῶν ἱπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγου-
μένοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἱπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς
ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν⁴ οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς

se, sunt autem et ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ numeri æ-
quales inter se, et est æqualis multitudo ip-
sarum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitatum multitudini
ipsorum ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ numerorum; erit igitur
ut ΒΗ unitas ad ΕΚ numerum ita ΗΘ unitas
ad ΚΛ numerum, et ΘΓ unitas ad ΑΖ nume-
rum. Erit igitur et ut unus antecedentium ad
unum consequentium ita omnes anteceden-
tes ad omnes consequentes; est igitur ut ΒΗ

Puisque l'unité Α mesure le nombre ΒΓ autant de fois que Δ mesure ΕΖ,
il y aura dans ΒΓ autant d'unités, qu'il y a dans ΕΖ de nombres égaux à Δ.
Partageons ΒΓ en ses unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, et partageons ΕΖ en nombres égaux
à Δ, et que ces nombres soient ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ; la quantité des unités ΒΗ,
ΗΘ, ΘΓ sera égale à la quantité des nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ. Puisque les unités
ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ sont égales entr'elles, que les nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ sont égaux
entr'eux, et que la quantité des unités ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ est égale à la quantité des
nombres ΕΚ, ΚΛ, ΑΖ, l'unité ΒΗ sera au nombre ΕΚ comme l'unité ΗΘ est au
nombre ΚΛ, et comme l'unité ΘΓ est au nombre ΑΖ. Donc un antécédent
sera à son conséquent comme la somme des antécédents est à la somme
des conséquents (12. 7); donc l'unité ΒΗ est au nombre ΕΚ comme ΒΓ est

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 413

τὸν ΕΖ. Ἰση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ· ἰσάκεις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν⁵ μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

unitas ad ΕΚ numerum ita ΒΓ ad ΕΖ. Æqualis autem ΒΗ unitas ipsi Α unitati, ipse vero ΕΚ numerus ipsi Δ numero; est igitur ut Α unitas ad Δ numerum ita ΒΓ ad ΕΖ; æqualiter igitur Α unitas ipsum Δ numerum metitur ac ΒΓ ipsum ΕΖ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ αἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β

PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri multiplicantes sese faciunt aliquos; facti ex ipsis æquales inter se erunt.

Sint duo numeri Α, Β, et Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat, ipse vero Β

Ε _____
 Α _____
 Β _____
 Γ _____
 Δ _____

τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λίγω· ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

ipsum Α multiplicans ipsum Δ faciat; dico æqualem esse Γ ipsi Δ.

à ΕΖ. Mais l'unité ΒΗ est égale à l'unité Α, et le nombre ΕΚ au nombre Δ; donc l'unité Α est au nombre Δ comme ΒΓ est à ΕΖ; donc l'unité Α mesure le nombre Δ autant de fois que ΒΓ mesure ΕΖ (déf. 20. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres se multipliant l'un et l'autre en produisent d'autres; les nombres produits seront égaux entr'eux.

Soient les deux nombres Α, Β; que Α multipliant Β produise Γ, et que Β multipliant Α produise Δ; je dis que Γ est égal à Δ.

414 LE SEPTIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πιποῖνκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν¹ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποῖνκεν· ὁ Α ἄρα τὸν

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit ; B igitur ipsum Γ metitur per ipsas in A unitates. Metitur autem et E unitas ipsum A numerum per ipsas in eo unitates ; æqualiter igitur E unitas ipsum A numerum metitur ac B ipsum Γ ; alterne igitur æqualiter E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Rursus , quoniam B ipsum A multiplicans

E _____
A _____
B _____
Γ _____
Δ _____

Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἰσάκεις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Α ἐκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Δ fecit; ipse A igitur ipsum Δ metitur per ipsas in B unitates. Metitur autem et E unitas ipsum B per ipsas in eo unitates ; æqualiter igitur E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Δ. Æqualiter autem E unitas ipsum B numerum metitur ac A ipsum Γ. Æqualiter igitur A utrumque ipsorum Γ, Δ metitur; æqualis igitur est Γ ipsi Δ. Quod oportebat ostendere.

Car, puisque A multipliant B a produit Γ ; B mesure Γ par les unités qui sont en A (déf. 15. 7). Mais l'unité E mesure le nombre A par les unités qu'il contient ; donc l'unité E mesure le nombre A autant de fois que B mesure Γ ; donc , par permutation , l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ (15. 7). De plus , puisque B multipliant A a produit Δ , A mesure Δ par les unités qui sont en B. Mais l'unité E mesure le nombre B par les unités qu'il contient ; donc l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Δ. Mais l'unité E mesure le nombre B autant de fois que A mesure Γ ; donc A mesure également Γ et Δ ; donc Γ est égal à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

PROPOSITIO XVII.

Εάν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινὰς· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσιν ἰλόγον πολλαπλασιασθεῖσιν.

Αριθμὸς γάρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Si numerus duos numeros multiplicans facit aliquos, facti ex ipsis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

Numerus enim Α duos numeros Β, Γ multiplicans ipsos Δ, Ε faciat; dico esse ut Β ad Γ ita Δ ad Ε.

Ζ	
Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	

Επεὶ γάρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν² οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ

Quoniam enim Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; Β igitur ipsum Δ metitur per ipsas in Α unitates. Metitur autem et Ζ unitas ipsum Α numerum per ipsas in eo unitates; æqualiter igitur Ζ unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Δ; est igitur ut Ζ unitas ad Α numerum ita Β ad Δ. Propter eadem uti-

PROPOSITION XVII.

Si un nombre multipliant deux nombres en produit d'autres; les nombres produits auront la même raison que les nombres multipliés.

Que le nombre Α multipliant les nombres Β, Γ produise les nombres Δ, Ε; je dis que Β est à Γ comme Δ est à Ε.

Car, puisque Α multipliant Β a produit Δ; Β mesure Δ par les unités qui sont en Α (déf. 15. 7). Mais l'unité Ζ mesure le nombre Α par les unités qu'il contient; donc l'unité Ζ mesure le nombre Α autant de fois que Β mesure Δ; donc l'unité Ζ est au nombre Α comme Β est à Δ. Par la même raison,

416 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ζ μονάς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε³. ἑναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

que et ut Z unitas ad A numerum ita Γ ad E; et ut igitur B ad Δ ita Γ ad E; alterne igitur est ut B ad Γ ita Δ ad E. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

PROPOSITIO XVIII.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινὰ πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινας· οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἔχουσι τὸν λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes faciunt aliquos; facti ex ipsis et eadem habebunt rationem quam multiplicantes.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινὰ τὸν

Duo enim numeri Α, Β numerum aliquem Γ

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____

Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

multiplicantes ipsos Δ, Ε faciant; dico esse ut Α ad Β ita Δ ad Ε.

l'unité z est au nombre A comme Γ est à E; donc B est à Δ comme Γ est à E; donc, par permutation, B est à Γ comme Δ est à E (13. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Si deux nombres multipliant un autre nombre en produisent d'autres; les nombres produits auront la même raison que les multiplicateurs.

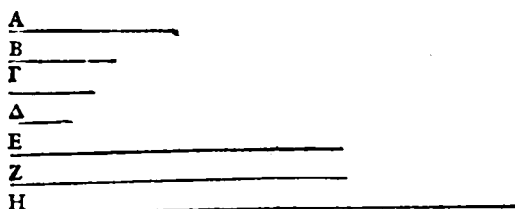
Que les deux nombres Α, Β multipliant un nombre Γ produisent Δ, Ε; je dis que Α est à Β comme Δ est à Ε.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἰὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β,



Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε

Quoniam enim A ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit ; et Γ igitur ipsum Α multiplicans ipsum Δ fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum Β multiplicans ipsum Ε fecit ; numerus utique Γ duos numeros Α, Β multiplicans ipsos Δ, Ε fecit ; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Ε. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XIX.

Si quatuor numeri proportionales sunt, ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis erit ipsi ex secundo et tertio facto numero ; et si ipse ex primo et quarto factus numerus æqualis est ipsi ex secundo et tertio , quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales Α, Β,

Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, et Α quidem ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse vero Β

Puisque Α multipliant Γ produit Δ, Γ multipliant Α produit Δ (16. 7). Par la même raison Γ multipliant Β produit Ε ; donc Γ multipliant les deux nombres Α, Β produit les nombres Δ, Ε ; donc Α est à Β, comme Δ est à Ε (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Si quatre nombres sont proportionnels, le nombre produit par le premier et par le quatrième sera égal au nombre produit par le second et par le troisième ; et si le nombre produit par le premier et par le quatrième est égal au nombre produit par le second et par le troisième, les quatre nombres seront proportionnels.

Soient les quatre nombres proportionnels Α, Β, Γ, Δ ; que Α soit à Β comme Γ

418 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ποιεῖτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ
ποιεῖτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

ipsum Γ multiplicans faciat ipsum Ζ ; dico æqua-
lem esse Ε ipsi Ζ.

A	_____
B	_____
Γ	_____
Δ	_____
E	_____
Z	_____
H	_____

Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω.
Ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πε-
ποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πε-
ποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ
πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν
ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε.
Ἀλλ' ὡς² ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β·
καὶ ὡς ἄρα³ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε.
Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η
πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλα-
σιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β
ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς
Η, Ζ πεποίηκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν
Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α
πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα
ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα
πρὸς ἑκάτερον τῶν⁴ Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον·
ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ipsè enim Α ipsum Γ multiplicans ipsum Η
faciat. Et quoniam Α ipsum Γ multiplicans ipsum
Η fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ε fecit ;
numerus utique Α duos numeros Γ, Δ multi-
plicans ipsos Η, Ε fecit ; est igitur ut Γ ad Δ
ita Η ad Ε. Sed ut Γ ad Δ ita Α ad Β ; et ut
igitur Α ad Β ita Η ad Ε. Rursus, quoniam Α ipsum
Γ multiplicans ipsum Η fecit, sed et Β ipsum Γ
multiplicans ipsum Ζ fecit ; duo utique numeri
Α, Β numerum aliquem Γ multiplicantes ipsos
Η, Ζ fecerunt ; est igitur ut Α ad Β ita Η ad Ζ.
Sed et ut Α ad Β ita Η ad Ε ; et ut igitur Η ad Ε
ita Η ad Ζ ; ipse Η igitur ad utrumque ipsorum
Ε, Ζ eandem habet rationem ; æqualis igitur
est Ε ipsi Ζ.

est à Δ ; que Α multipliant Δ produise Ε, et que Β multipliant Γ produise Ζ ; je
dis que Ε est égal à Ζ.

Que Α multipliant Γ produise Η. Puisque Α multipliant Γ produit Η, et que
Α multipliant Δ produit Ε, le nombre Α multipliant les deux nombres Γ, Δ pro-
duit Η, Ε ; donc Γ est à Δ comme Η est à Ε (17. 7). Mais Γ est à Δ comme Α est
à Β ; donc Α est à Β comme Η est à Ε. De plus, puisque Α multipliant Γ produit Η,
et que Β multipliant Γ produit Ζ ; les deux nombres Α, Β multipliant un nom-
bre Γ produisent Η, Ζ (18. 7). Donc Α est à Β comme Η est à Ζ. Mais Α est à Β
comme Η est à Ε ; donc Η est Ε comme Η est Ζ ; donc Η a la même raison avec
chacun des nombres Ε, Ζ ; donc Ε est égal à Ζ.

Εστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε ποιήκεν· ἴσος ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἴσος ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Αλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου²· ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ³ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται⁴.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Sit autem rursus æqualis E ipsi Z; dico esse ut A ad B ita Γ ad Δ.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Η, Ε fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. Æqualis autem E ipsi Z; est igitur ut Η ad Ε ita Η ad Ζ. Sed ut Η quidem ad Ε ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Η ad Ζ. Ut autem Η ad Ζ ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XX.

Si tres numeri proportionales sunt, ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio; si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ; dico ipsum ex Α, Γ æqualem esse ipsi ex Β.

De plus, que Ε soit égal à Ζ; je dis que Α est à Β comme Γ est à Δ.

Faisons la même construction. Puisque Α multipliant les nombres Γ, Δ produit Η, Ε, le nombre Γ est à Δ comme Η est à Ε. Mais Ε est égal à Ζ; donc Η est à Ε comme Η est à Ζ. Mais Η est à Ε comme Γ est à Δ (18. 7); donc Γ est à Δ comme Η est à Ζ. Mais Η est à Ζ comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Γ est à Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

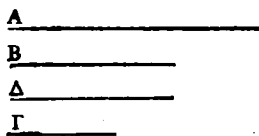
Si trois nombres sont proportionnels, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen; et si le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, les trois nombres seront proportionnels.

Soient Α, Β, Γ trois nombres proportionnels; que Α soit à Β comme Β est à Γ; je dis que le produit des nombres Α, Γ est égal au carré de Β.

420 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Κείσθω γὰρ τῷ B ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Δ. Ο δὲ ἐκ τῶν B, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B· ἴσος γὰρ ὁ B τῷ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, Δ. Ipse autem ex B, Δ æqualis est ipsi ex B; æqualis enim B ipsi Δ; ipse igitur ex A, Γ æqualis est ipsi ex B.



Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ B· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ.

Sed et ipse ex A, Γ æqualis sit ipsi ex B; dico esse ut A ad B ita B ad Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἴσος τῷ ὑπὸ⁵ τῶν B, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ἰσος δὲ ὁ B τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipse ex A, Γ æqualis est ipsi ex B, ipse autem ex B æqualis ipsi ex B, Δ; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Æqualis autem B ipsi Δ; est igitur ut A ad B ita B ad Γ. Quod oportebat ostendere.

Que Δ soit égal à B; A sera à B comme Δ est à Γ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au produit des nombres B, Δ (19. 7). Mais le produit des nombres B, Δ est égal au carré de B; parce que B est égal à Δ; donc le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B.

Mais que le produit des nombres A, Γ soit égal au carré de B; je dis que A est à B comme B est à Γ.

Car puisque le produit des nombres A, Γ est égal au carré de B, et que le carré de B est égal au produit des nombres B, Δ; le nombre A est à B comme Δ est à Γ (19. 7). Mais B est égal à Δ; donc A est à B comme B est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κά.

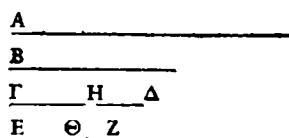
PROPOSITIO XXI.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετρεῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα.

Ἐστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκεις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Minimi numeri ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter eos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem.

Sint enim minimi numeri ΓΔ, ΕΖ ipsorum eamdem rationem habentium cum Α, Β; dico æqualiter ΓΔ ipsum Α metiri ac ΕΖ ipsum Β.



Ο ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρη. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἔστιν ἅπτερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἔστιν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. Διηρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ

Ipse ΓΔ enim ipsius Α non est partes. Si enim possibile, sit; et ΕΖ igitur ipsius Β eadem partes est quæ ΓΔ ipsius Α; quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius Α, tot sunt et in ΕΖ partes ipsius Β. Dividatur ΓΔ quidem in ipsas ipsius Α partes ΓΗ, ΗΔ, ipse vero ΕΖ in ipsas ipsius Β partes ΕΘ, ΘΖ; erit utique æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ.

PROPOSITION XXI.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit.

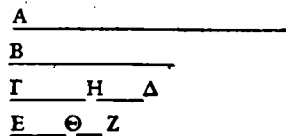
Que ΓΔ, ΕΖ soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Β; je dis que ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β.

Le nombre ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α; car, que cela soit, s'il est possible; ΕΖ sera les mêmes parties de Β que ΓΔ l'est de Α (déf. 20. 7). Il y aura donc dans ΓΔ autant de parties de Α qu'il y a dans ΕΖ de parties de Β. Partageons ΓΔ en parties de Α, et que ces parties soient ΓΗ, ΗΔ; et ΕΖ en parties de Β, et que ces parties soient ΕΘ, ΘΖ. Le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ sera égal au nombre

422 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

εἰσὶν ἀλλήλοισι², εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΟΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοισι³, καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΟΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΟΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς

Et quoniam æquales ΓΗ, ΗΔ sunt inter se, sunt autem et ΕΘ, ΟΖ numeri inter se æquales, et est æqualis multitudo ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudini ipsarum ΕΘ, ΟΖ; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΟΖ; erit igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes



ἐπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδυνάτον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΓΔ ad ΕΖ; ipsi ΓΗ, ΕΘ igitur cum ipsis ΓΔ, ΕΖ in eadem ratione sunt, minores existentes ipsis, quod est impossibile; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur partes est ΓΔ ipsius Α; pars igitur; et ΕΖ ipsius Β eadem pars est quæ ΓΔ ipsius Α; æqualiter igitur ΓΔ ipsum Α metitur ac ΕΖ ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

des parties ΕΘ, ΟΖ; et puisque les parties ΓΗ, ΗΔ sont égales entr'elles, que les parties ΕΘ, ΟΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties ΓΗ, ΗΔ est égal au nombre des parties ΕΘ, ΟΖ; la partie ΓΗ est à la partie ΕΘ comme ΗΔ est à ΟΖ; donc un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents (12. 7); donc ΓΗ est à ΕΘ comme ΓΔ est à ΕΖ; donc les nombres ΓΗ, ΕΘ sont en même raison que les nombres ΓΔ, ΕΖ qui sont plus petits que ces derniers, ce qui est impossible; car on a supposé que ΓΔ, ΕΖ sont les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; donc ΓΔ n'est pas plusieurs parties de Α. Donc il en est une partie; mais ΕΖ est la même partie de Β que ΓΔ l'est de Α; donc ΓΔ mesure Α autant de fois que ΕΖ mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'¹.

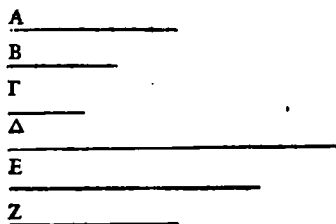
PROPOSITIO XXII.

Εάν ὡς τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἥ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δίσσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἴσονται.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ², ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ δίσσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Si sunt tres numeri, et alii ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione, sit autem perturbata eorum proportio; et ex æquo in eâdem ratione erunt.

Sint tres numeri Α, Β, Γ, et alii Δ, Ε, Ζ, ipsis æquales multitudine bini sumpti et in eâdem ratione, sit autem perturbata eorum proportio, ut Α quidem ad Β ita Ε ad Ζ, ut Β vero ad Γ ita Δ ad Ε; dico et ex æquo esse ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος

Quoniam enim est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; ipse igitur ex Α, Ζ æqualis est ipsi ex Β, Ε. Rursus, quoniam ut Β ad Γ ita Δ ad Ε; ipse igitur ex Γ, Δ æqualis est ipsi ex Β, Ε. Os-

PROPOSITION XXII.

Si l'on a trois nombres et autant d'autres nombres, si ces nombres pris deux à deux sont en même raison, et si leur proportion est troublée, ces nombres seront en même raison par égalité.

Soient Α, Β, Γ trois nombres, et autant d'autres nombres Δ, Ε, Ζ; que ces nombres pris deux à deux soient en même raison, et que leur proportion soit troublée; c'est-à-dire que Α soit à Β comme Ε est à Ζ, et que Β soit à Γ comme Δ est à Ε; je dis que par égalité Α est à Γ comme Δ est à Ζ.

Car puisque Α est à Β comme Ε est à Ζ, le produit des nombres Α, Ζ est égal au produit des nombres Β, Ε (19. 7). De plus, puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε; le produit des nombres Γ, Δ est égal au produit des nombres Β, Ε. Mais

424 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τῷ ἐξ τῶν B, E. Εδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Z ἴσος τῷ ἐκ τῶν B, E· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Z ἄρα ἴσος τῷ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tensus est autem et ipse A, Z æqualis ipsi ex B, E; et ipse ex A, Z igitur æqualis ipsi ex Γ, Δ; est igitur ut A ad Γ ita Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Primi inter se numeri minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Εστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ A, B· λέγω ὅτι οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Sint primi inter se numeri A, B; dico ipsos A, B minimos esse eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
E _____

Εἰ γὰρ μὴ, ἔσονται τινες τῶν A, B ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B. Εστωσαν οἱ Γ, Δ.

Si enim non, erunt aliqui ipsis A, B minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis A, B. Sint Γ, Δ.

on a démontré que le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres B, E; donc le produit des nombres A, Z est égal au produit des nombres Γ, Δ; donc A est à Γ comme Δ est à Z (19. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Que A, B soient des nombres premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

Car s'ils ne le sont pas, il y aura des nombres plus petits que A, B qui auront la même raison avec A, B. Que ce soient Γ, Δ.

Επὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα, τουτίστιν, ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον ἰσάκεις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. Οσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Ε· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β· οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam minimi numeri eorum eandem rationem habentium metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Γ ipsum Α metitur ac Δ ipsum Β. Quoties autem Γ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ε; et Δ igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in Ε. Et quoniam Γ ipsum Α metitur per unitates quæ in Ε; et Ε igitur ipsum Α metitur per unitates quæ in Γ. Propter eadem utique et Ε ipsum Β metitur per unitates quæ in Δ; ipse Ε igitur ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Α, Β minores numeri in eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β; ipsi Α, Β igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Puisque les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; le nombre Γ mesurera le nombre Α autant de fois que Δ mesurera Β. Qu'il y ait dans Ε autant d'unités que Γ mesure de fois Α; le nombre Δ mesurera Β par les unités qui sont en Ε. Mais Γ mesure Α par les unités qui sont en Ε; donc le nombre Ε mesure Α par les unités qui sont en Γ. Par la même raison, Ε mesure Β par les unités qui sont en Δ; donc Ε mesure les nombres Α, Β qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc il n'y a point de nombres plus petits que Α, Β qui ayent la même raison avec les nombres Α, Β; donc les nombres Α, Β sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἴστω ὁ Γ. Καὶ ὅσας μὲν ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Δ, ὅσας δὲ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ε.

Minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt.

Sint minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Β; dico Α, Β primos inter se esse.

Si enim non sunt primi inter se Α, Β, metietur aliquis ipsos numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoties Γ quidem ipsum Α metitur, tot unitates sint in Δ, quoties vero Γ ipsum Β metitur, tot unitates sint in Ε.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____

Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκεν· ἀριθμὸς δὲ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς

Et quoniam Γ ipsum Α metitur per unitates quæ in Δ; ipse Γ igitur ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Γ ipsum Ε multiplicans ipsum Β fecit; numerus igitur Γ duos numeros Δ, Ε multiplicans ipsos Α, Β

PROPOSITION XXIV.

Les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, sont premiers entr'eux.

Que Α, Β soient les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que les nombres Α, Β sont premiers entr'eux.

Car si les nombres Α, Β ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Qu'un quelque nombre les mesure, et que ce soit γ. Qu'il y ait dans Δ autant d'unités que γ mesure de fois Α, et qu'il y ait dans Ε autant d'unités que γ mesure de fois Β.

Puisque γ mesure Α par les unités qui sont dans Δ, le nombre γ multipliant Δ produira Α. Par la même raison, γ multipliant Ε produit Β; donc le nombre γ multipliant les deux nombres Δ, Ε produira Α, Β; donc Δ est à Ε comme Α est

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 427

Α, Β πεποιήκειν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῇ αὐτῇ λόγῃ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

fecit; est igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Β; ipsi Δ, Ε igitur cum ipsis Α, Β in eadem ratione sunt, minores existentes ipsi, quod est impossibile; non igitur ipsos Α, Β numeros numerus aliquis metietur; ipsi Α, Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ τὸν ἓνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρίτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri primi inter se sunt, numerus unum eorum metiens ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, ipsum autem Α metiatur aliquis numerus Γ; dico et ipsos Β, Γ primos inter se esse.

$\frac{A}{B}$
 $\frac{\Gamma}{\Delta}$

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἵππει ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ

Si enim non sint Β, Γ primi inter se, metietur aliquis ipsos numeros. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ ipsum Γ metitur, ipse autem Γ

à Β (17. 7); donc les nombres Δ, Ε ont la même raison que les nombres Α, Β, qui sont plus petits qu'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres Α, Β; donc Α, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le nombre qui mesure l'un d'eux sera premier avec l'autre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux; et que quelque nombre γ mesure Α; je dis que Β, γ sont premiers entr'eux.

Car que Β, γ ne soient pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera; que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure γ, et que

428 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ.
Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ,
πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἴσθιν ἀδύ-
νατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις
μετρήσει· οἱ Γ, Β ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους
εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρώτοι
ᾶσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν
πρώτος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς τινὰ ἀριθμὸν
τὸν Γ πρώτοι ἴστανται, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλα-
πλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ
πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A
B
Γ
Δ
Ε
Ζ

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ, Δ πρώτοι πρὸς ἀλλή-
λους, μετρήσει τις τοὺς Γ, Δ ἀριθμὸς. Με-
τρίτω, καὶ ἴστω ὁ Ε. Καὶ ἵπῃ οἱ Γ, Α πρώτοι

Γ mesure Α, le nombre Δ mesurera Α. Mais il mesure Β ; donc Δ mesure Α, Β qui
sont premiers entr'eux, ce qui est impossible (déf. 12. 7) ; donc quelque nombre ne
mesurera pas Α, Β ; donc Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si deux nombres sont premiers avec quelque nombre, le produit de ces deux
nombres sera un nombre premier avec ce nombre.

Que les deux nombres Α, Β soient deux nombres premiers avec quelque
nombre Γ, et que Α multipliant Β fasse Δ ; je dis que Γ, Δ sont premiers entr'eux.

Car si Γ, Δ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera Γ, Δ. Que
quelque nombre les mesure, et que ce soit Ε. Puisque Γ, Α sont premiers entr'eux,

ipsum Α metitur ; et Δ igitur ipsum Α metitur.
Metitur autem et ipsum Β ; ipse Δ igitur ipsos
Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod
est impossibile ; non igitur ipsos Α, Β numeros
numerus aliquis metietur ; ipsi Γ, Β igitur primi
inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi
sunt, et ipse ex ipsis factus ad eum primus
erit.

Duo enim numeri Α, Β ad aliquem numerum
Γ primi sint, et Α ipsum Β multiplicans ipsum
Δ faciat ; dico Γ, Δ primos inter se esse.

Si enim non sint Γ, Δ primi inter se, metietur
aliquis ipsos Γ, Δ numerus. Metiatur, et sit Ε.
Et quoniam Γ, Α primi inter se sunt, ipsum

πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οσαῖς δὲ³ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάζας τὸν Δ πιποίηκιν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Δ πιποίηκιν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. Εὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστιν, ὃ τε⁴ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

autem Γ metitur aliquis numerus Ε; ipsi Ε, Α igitur primi inter se sunt. Quoties autem Ε ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Ζ; et Ζ igitur ipsum Δ metitur per unitates quæ in Ε; ipse Ε igitur ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed et Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex Ε, Ζ ipsi ex Α, Β. Si autem ipse ex extremis æqualis est ipsi ex mediis, quatuor numeri proportionales sunt; est igitur ut Ε ad Α ita Β ad Ζ. Ipsi autem Α, Ε primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Ε igitur ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Γ; ipse Ε igitur ipsos Β, Γ metitur primos existentes inter se, quod est impossibile. Non igitur ipsos Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

et qu'un nombre Ε mesure Γ, les nombres Ε, Α seront premiers entr'eux (25. 7). Qu'il y ait dans Ζ autant d'unités que Ε mesure de fois Α; le nombre Ζ mesurera Α par les unités qui sont dans Ε; donc Ε multipliant Ζ produira Α. Mais Α multipliant Β produit Δ; donc le produit de Ε par Ζ est égal au produit de Α par Β. Mais lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre nombres sont proportionnels (19. 7); donc Ε est à Α comme Β est à Ζ. Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux; et les nombres premiers entr'eux sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, mesurent également ceux qui ont la même raison (21. 7), le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent; donc Ε mesure Β; mais il mesure Γ; donc Ε mesure les nombres Β, Γ qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible. Donc quelque nombre ne mesurera pas Γ, Δ; donc Γ, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

PROPOSITIO XXVII.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν ,
ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν
πρῶτος ἔσται.

Εστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ
ποιήτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
εἰσὶ.

Si duo numeri primi inter se sunt , ipse ex
uno ipsorum factus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, et Α
se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat ; dico Γ, Β
primos inter se esse.

$$\begin{array}{r} \underline{Α} \\ \underline{Β} \\ \hline Γ \\ \hline Δ \end{array}$$

Κτίσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν , ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ·
καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν·
ἐκάτερος ἄρα τῶν Δ, Α πρὸς τὸν Β πρῶτος ἐστὶ
καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, Α ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Β
πρῶτος ἔσται. Ο δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γινόμενος ἀριθ-
μὸς ἐστὶν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ponatur enim ipsi Α æqualis Δ. Et quoniam
Α, Β primi inter se sunt , æqualis autem Α ipsi
Δ ; et Δ, Β igitur primi inter se sunt ; uterque
igitur ipsorum Δ, Α ad Β primus est ; et ipse
ex Δ, Α igitur factus ad ipsum Β primus erit. Ipse
autem ex Α, Δ factus numerus est Γ ; ipsi Γ,
Β igitur primi inter se sunt. Quod oportebat
ostendere.

PROPOSITION XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux , le quarré de l'un d'eux est premier
avec l'autre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux , et que Α multiplié par
lui-même produise Γ ; je dis que Γ, Β sont premiers entr'eux.

Que Δ soit égal à Α. Puisque Α, Β sont premiers entr'eux , et que Α est égal à
Δ , les nombres Δ, Β sont premiers entr'eux ; donc chacun des nombres Δ, Α est
premier avec Β ; donc le produit de Δ par Α sera premier avec Β (26. 7). Mais
le produit de Α par Δ est Γ ; donc les nombres Γ, Β sont premiers entr'eux. Ce
qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμούς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ᾧσι καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἴσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμούς τοὺς Γ, Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἴστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A _____
B _____
E _____
Γ _____
Δ _____
Z _____

Επεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸ ν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γινόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστι καὶ ὁ ἐκ τῶν

PROPOSITIO XXVIII.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi sunt; et ipsi ex ipsis facti primi inter se erunt.

Duo enim numeri Α, Β ad duos numeros Γ, Δ, uterque ad utrumque, primi sint, et Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Ε faciat, ipse vero Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; dico Ε, Ζ primos inter se esse.

Quoniam enim uterque ipsorum Α, Β ad Γ primus est, et ipse ex Α, Β igitur factus ad Γ primus erit. Ipse autem ex Α, Β factus est Ε; ipsi Ε, Γ igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique Ε, Δ primi inter se sunt; uterque igitur ipsorum Γ, Δ ad Ε primus est; et ipse ex Γ, Δ igitur factus ad Ε primus erit.

PROPOSITION XXVIII.

Si deux nombres sont premiers avec deux autres, l'un et l'autre avec l'un et l'autre, leurs produits seront premiers entr'eux.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers avec les deux nombres Γ, Δ, l'un et l'autre avec l'un et l'autre; que Α multipliant Β produise Ε, et que Γ multipliant Δ produise Ζ; je dis que les nombres Ε, Ζ sont premiers entr'eux.

Puisque chacun des nombres Α, Β est premier avec Γ, le produit de Α par Β sera premier avec Γ (26. 7). Mais le produit de Α par Β est Ε; donc les nombres Ε, Γ sont premiers entr'eux. Par la même raison Ε, Δ sont premiers entr'eux; donc chacun des nombres Γ, Δ est premier avec Ε; donc le produit de Γ par Δ

Γ, Δ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται.
Ο δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γινόμενος ἐστὶν ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipsæ autem ex Γ, Δ factus est Ζ; ipsi Ε, Ζ
igitur primi inter se sunt. Quod oportebat os-
tendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι,
καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τι-
νας¹, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλή-
λους ἔσονται· καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινόμενους
πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινὰς, καμῖνοι πρῶ-
τοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ αὐτὸ περὶ τοὺς
ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἐστωσαν ἀριθμοὶ δύο² πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	
Ζ	

Γ ποιῶ, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε
ποιῶ, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν μὲν³ πολλαπλασιάσας
τὸν Δ ποιῶ, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ
ποιῶ· λέγω ὅτι οἱ τε Γ, Ε καὶ οἱ Δ, Ζ πρῶτοι
πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Si duo numeri primi inter se sint, et
multiplicans uterque se ipsum faciat aliquos,
facti ex ipsis primi inter se erunt; et si ipsi a
principio factos multiplicantes faciant aliquos,
et illi primi inter se erunt; et semper circa
extremos hoc continget.

Sint duo numeri Α, Β primi inter se, et Α
se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat, ipsum

autem Γ multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem
Β quidem se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat,
ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; dico
et ipsos Γ, Ε et ipsos Δ, Ζ primos inter se esse.

sera premier avec Ε (26. 7). Mais le produit de Γ par Δ est Ζ; donc les nombres Ε, Ζ
sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et si ces nombres étant multipliés
par eux-mêmes font des nombres, les produits de ces nombres seront premiers
entr'eux; et si les nombres proposés multipliant les produits font d'autres nom-
bres, ces derniers seront aussi premiers entr'eux, et il en sera toujours ainsi
pour les derniers nombres qui auront été produits.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux, que Α étant multiplié par
lui-même fasse Γ, que Α multipliant Γ fasse Ε, que Β étant multiplié par lui-même
fasse Δ, que Β multipliant Δ fasse Ζ; je dis que Γ, Ε et Δ, Ζ sont premiers entr'eux.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 433

Επεὶ γὰρ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Επεὶ οὖν οἱ Γ, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν, οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, Γ πρὸς δύο ἀριθμούς τοὺς B, Δ ἀμφοτέροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν B, Δ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν A, Γ ὁ E , ὁ δὲ ἐκ τῶν B, Δ ὁ Z · οἱ E, Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι, καὶ συναμφοτέροι πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφοτέροι πρὸς ἑνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Puisque les nombres A, B sont premiers entr'eux, et que A étant multiplié par lui-même fait Γ , les nombres Γ, B sont premiers entr'eux (27. 7); et puisque Γ, B sont premiers entr'eux, et que B multiplié par lui-même fait Δ , les nombres Γ, Δ sont premiers entr'eux. De plus, puisque A, B sont premiers entr'eux, et que B multiplié par lui-même a fait Δ , les nombres A, Δ sont premiers entr'eux. Mais les deux nombres A, Γ sont premiers avec les deux nombres B, Δ , l'un et l'autre avec l'un et l'autre; donc le produit de A par Γ est premier avec le produit de B par Δ (28. 7.) Mais le produit de A par Γ est E , et le produit de B par Δ est Z . Donc les nombres E, Z sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme sera un nombre premier avec chacun d'eux; et si leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux, les deux nombres proposés seront premiers entr'eux.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt, et A se ipsum multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi Γ, B igitur primi inter se sunt. Et quoniam Γ, B primi inter se sunt, et B se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit, ipsi Γ, Δ igitur primi inter se sunt. Rursus, quoniam A, B primi inter se sunt, et B se ipsum multiplicans ipsum Δ fecit; ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt; et quoniam duo numeri A, Γ ad duos numeros B, Δ uterque ad utrumque primi sunt; et ipse ex ipsis A, Γ igitur factus ad ipsum ex ipsis B, Δ primus est. Et est ipse quidem ex A, Γ ipse E , ipse vero ex B, Δ ipse Z ; ipsi E, Z igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

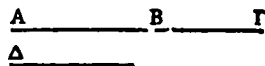
PROPOSITIO XXX.

Si duo numeri primi inter se sunt, et uterque simul ad utrumque eorum primus erit; et si uterque simul ad unum aliquem eorum primus est, et ipsi a principio numeri primi inter se erunt.

434 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Συγκείμεσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφοτέρως ὁ ΑΓ πρὸς ἐκάτερον τῶν AB, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Componantur duo numeri primi inter se AB, ΒΓ; dico et utrumque simul ΑΓ ad utrumque eorum AB, ΒΓ primum esse.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ ΓΑ, AB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΓΑ, AB ἀριθμὸς. Μετρίτω, καὶ ἴστω ὁ Δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ, AB μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα τοὺς AB, ΒΓ μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ, AB ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει· οἱ ΓΑ, AB ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν³. ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν AB, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Si enim non sint ΓΑ, AB primi inter se, metietur aliquis ipsos ΓΑ, AB numerus. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ ipsos ΓΑ, AB metitur; et reliquum igitur ΒΓ metietur. Metitur autem et ipsum ΒΑ; ipse Δ igitur ipsos AB, ΒΓ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ΓΑ, AB numeros numerus aliquis metietur; ipsi ΓΑ, AB igitur primi inter se sunt. Propter eadem utique et ΑΓ, ΓΒ primi inter se sunt; ipse ΓΑ igitur ad utrumque ipsorum AB, ΒΓ primus est.

Ἐστωσαν δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, AB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους⁴. λέγω ὅτι καὶ οἱ AB, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Sint et ΓΑ, AB primi inter se; dico et AB, ΒΓ primos inter se esse.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρῶτοι οἱ AB, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους⁵, μετρήσει τις τοὺς AB, ΒΓ⁶ ἀριθμὸς. Μετρίτω, καὶ ἴστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον

Si enim non sint primi AB, ΒΓ inter se, metietur aliquis ipsos AB, ΒΓ numerus. Metiatur, et sit Δ. Et quoniam Δ utrumque eorum AB, ΒΓ

Ajoutons les deux nombres premiers entr'eux AB, ΒΓ; je dis que leur somme ΑΓ est un nombre premier avec chacun des nombres AB, ΒΓ.

Car si les nombres ΓΑ, AB ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre mesurera ΓΑ, AB. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΓΑ, AB, il mesurera le reste ΒΓ; mais il mesure ΒΑ; donc Δ mesure AB, ΒΓ qui sont deux nombres premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres ΓΑ, AB; donc ΓΑ, AB sont premiers entr'eux. Par la même raison ΑΓ, ΓΒ sont premiers entr'eux; donc le nombre ΓΑ est premier avec chacun des nombres AB, ΒΓ.

De plus, que ΓΑ, AB soient premiers entr'eux; je dis que AB, ΒΓ sont premiers entr'eux.

Car si AB, ΒΓ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure chacun

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 435

τῶν AB , $BΓ$ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν $ΓΑ$ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν AB · ὁ δὲ ἄρα τοὺς $ΓΑ$, AB μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB , $BΓ$ ἀριθμούς· ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ AB , $BΓ$ ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

$BΓ$ metitur; et totum igitur $ΓΑ$ metietur. Metitur autem et ipsum AB ; ipse $Δ$ igitur ipsos $ΓΑ$, AB metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur ipsos AB , $BΓ$ numeros numerus aliquis metietur; ipsi AB , $BΓ$ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Ἀπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ A , καὶ τὸν B μὴ μετρίτω· λέγω ὅτι οἱ B , A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

Sit primus numerus A , et ipsum B non metiatur; dico B , A primos inter se esse.

A

B

$Γ$

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ B , A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ $Γ$. Καὶ ἐπεὶ ὁ $Γ$ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ A τὸν B οὐ μετρεῖ· ὁ $Γ$ ἄρα τῷ A οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ $Γ$ τοὺς B , A μετρεῖ· καὶ τὸν A ἄρα

Si enim non sint B , A primi inter se, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit $Γ$. Et quoniam $Γ$ ipsum B metitur, ipse autem A ipsum B non metitur; ipse $Γ$ igitur cum ipso A non est idem. Et quoniam $Γ$ ipsos B , A metitur;

des nombres AB , $BΓ$, il mesurera leur somme $ΓΑ$. Mais il mesure AB ; donc $Δ$ mesure $ΓΑ$, AB , qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera pas les nombres AB , $BΓ$; donc AB , $BΓ$ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXI.

Tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas.

Soit le nombre premier A , et que A ne mesure pas B ; je dis que B , A sont premiers entr'eux.

Car si B , A ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit $Γ$. Puisque $Γ$ mesure B , et que A ne mesure pas B , le nombre $Γ$ n'est pas le même nombre que A . Et puisque $Γ$

436 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὧν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς B, A μετρήσιν τις
ἀριθμός· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et ipsum A igitur metitur primum existentem,
non existens cum ipso idem, quod est impossi-
bile; non igitur ipsos B, A metietur aliquis nu-
merus; ipsi A, B igitur primi inter se sunt.
Quod oportebat ostendere.

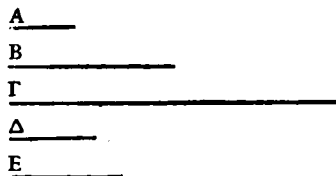
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους
ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γεόμενον ἐξ αὐτῶν μετρή-
σιν πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς με-
τρήσιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πολλαπλασιάσαντες
ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρεῖτω
τις πρῶτος ἀριθμός ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἓνα τῶν
A, B μετρεῖ.

Si duo numeri sese multiplicantes faciant ali-
quem, cum vero factum ex ipsis metiatur aliquis
primus numerus; et unum eorum qui a prin-
cipio metietur.

Duo enim numeri A, B sese multiplicantes
ipsum Γ faciant, ipsum autem Γ metiatur aliquis
primus numerus Δ; dico Δ unum eorum A, B
metiri.



Τὸν γὰρ A μὴ μετρεῖτω, καὶ ἐστὶ πρῶτος ὁ Δ·
οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· καὶ
ὅσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἐσ-

Ipsum enim A non metiatur, et est primus Δ;
ipsi A, Δ igitur primi inter se sunt. Et quoties Δ
ipsum Γ metitur, tot unitates sint in E. Et

mesure B, A, il mesure A qui est un nombre premier, quoique Γ ne soit pas
le même que A, ce qui est impossible; donc quelque nombre ne mesurera
pas B, A; donc A, B sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXII.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et si quelque
nombre premier mesure leur produit, il mesurera un des nombres proposés.

Car que les deux nombres A, B se multipliant l'un l'autre fassent Γ, et que
quelque nombre premier Δ mesure Γ; je dis que Δ mesure un des nombres A, B.

Qu'il ne mesure pas A; puisque Δ est un nombre premier, les nombres A, Δ
seront premiers entr'eux (31. 7). Qu'il y ait autant d'unités dans E que Δ mesure

τῶσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποιήκειν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Ομοίως δὲ διίξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ² τὸν Β μὴ μετρήῃ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἓνα τῶν Α, Β μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει διίξαι.

quoniam Δ ipsum Γ metitur per ipsas quæ in Ε unitates, ipse Δ igitur ipsum Ε multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; æqualis igitur est ipse ex Δ, Ε, ipsi ex Α, Β; est igitur ut Δ ad Α ita Β ad Ε. Ipsi autem Δ, Α primi, ipsi vero primi et minimi, ipsi autem minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens autecedentem, et consequens consequentem; ipse Δ igitur ipsum Β metitur. Similiter utique ostendemus et si Δ ipsum Β non metitur, ipsum Α mensurum esse; ipse Δ igitur unum eorum Α, Β metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἀπας σύθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω σύθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur.

Sit compositus numerus Α; dico ipsum Α a primo aliquo numero mensurari.

de fois Γ. Puisque Δ mesure Γ par les unités qui sont en Ε, le nombre Δ multipliant Ε fera Γ. Mais Α multipliant Β fait Γ; donc le produit de Δ par Ε est égal au produit de Α par Β; donc Δ est à Α comme Β est à Ε (19. 7). Mais Δ, Α sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont avec eux la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Δ mesure Β. Nous démontrerons de la même manière que si Δ ne mesure pas Β, il mesurera Α; donc Δ mesure un des nombres Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Que Α soit un nombre composé; je dis que Α est mesuré par quelque nombre premier.

438 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν¹· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ,

Quoniam enim compositus est A, metietur aliquis ipsum numerus. Metiatur, et sit B. Et si quidem primus est B, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum numerus. Metiatur, et sit Γ. Et quoniam Γ ipsum B metitur, ipse autem B ipsum A metitur; et Γ igitur ipsum A metitur. Et si quidem primus

$$\begin{array}{r} \text{A} \\ \hline \text{B} \\ \hline \text{Γ} \\ \hline \end{array}$$

γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν²· εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Τοιαύτης δὴ θεωμένης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ³ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅτι ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός⁴, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς⁵.

est Γ, factum erit propositum; si vero compositus, metietur aliquis ipsum numerus. Tali utique factâ consideratione, relinquetur aliquis primus numerus, qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum A metietur. Si enim non relinquitur, metientur ipsum A numerum infiniti numeri quorum alter altero minor est, quod est impossibile in numeris. Relinquetur aliquis igitur primus qui metietur eum qui præ se ipso, et qui ipsum A metietur. Omnis igitur, etc.

Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13. 7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2. 7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἀπας ἀριθμὸς ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστὼ ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ἢτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι. Εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός. Ἀπας ἄρα, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν, εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὴν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐπώσων οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus vel primus est, vel a primo aliquo numero mensuratur.

Sit numerus Α; dico Α vel primum esse, vel a primo aliquo mensurari.

Si quidem igitur primus est Α, factum erit propositum. Si vero compositus, metietur aliquis eum primus numerus. Omnis igitur, etc.

PROPOSITIO XXXV.

Numeris datis quocumque, invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum eis.

Sint dati quocumque numeri Α, Β, Γ; oportet igitur invenire minimos eorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ.

Ipsi Α, Β, Γ enim vel primi inter se sunt, vel non. Si quidem igitur Α, Β, Γ primi inter

PROPOSITION XXXIV.

Tout nombre est premier, ou il est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre Α; je dis que Α est un nombre premier, ou qu'il est mesuré par quelque nombre premier.

Si Α est un nombre premier, on aura ce qui est proposé; s'il est composé, quelque nombre premier le mesurera (33. 7). Donc, etc.

PROPOSITION XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étant donnés, trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux.

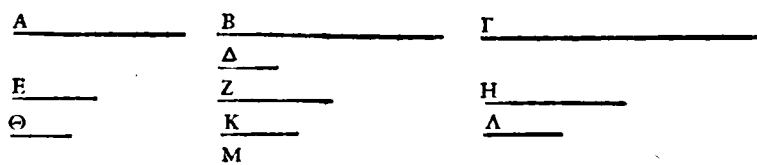
Soient Α, Β, Γ tant de nombres donnés qu'on voudra; il faut trouver les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Β, Γ.

Les nombres Α, Β, Γ sont ou premiers entr'eux, ou ne le sont pas. S'il sont

440 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀλλήλους εἶσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν
λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

se sunt, minimi sunt eorum eandem rationem
habentium cum ipsis.



Εἰ δὲ οὐ· εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον
κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὅσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν
Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν
ἐκαστῷ τῶν Ε, Ζ, Η· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε,
Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν
τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῦς Α, Β, Γ
ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ
ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι.
Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν
αὐτὸν λόγον ἔχόντων² τοῖς Α, Β, Γ, ἴσονται
τινὲς³ τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ
αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. Εἰσὼσαν οἱ Θ,
Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἐκάτερος
τῶν Κ, Λ ἐκάτερον τῶν Β, Γ. Ὅσάκις δὲ ὁ Θ τὸν
Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ·
καὶ ἐκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἐκάτερον τῶν Β, Γ

Si autem non; sumatur ipsorum Α, Β, Γ
maxima communis mensura Δ, et quoties Δ
unumquemque eorum Α, Β, Γ metitur, tot
unitates sint in unoquoque eorum Ε, Ζ, Η; et
unusquisque igitur Ε, Ζ, Η unumquemque co-
rum Α, Β, Γ metitur per unitates quæ in Δ;
ipsi Ε, Ζ, Η igitur ipsos Α, Β, Γ æqualiter me-
tuntur; ipsi Ε, Ζ, Η igitur cum ipsis Α, Β, Γ
in eadem ratione sunt. Dico utique et minimos.
Si enim non sunt Ε, Ζ, Η minimi eorum eam-
dem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ,
erunt aliqui ipsis Ε, Ζ, Η minores numeri in
eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ.
Sint Θ, Κ, Λ; æqualiter igitur Θ ipsum Α me-
titur ac uterque eorum Κ, Λ utrumque eorum
Β, Γ. Quoties autem Θ ipsum Α metitur, tot
unitates sint in Μ; et uterque igitur eorum Κ, Λ

premiers entr'eux, ils seront les plus petits de ceux qui ont la même raison
avec eux (25. 7).

S'ils ne le sont pas, prenons la plus grande commune mesure Δ des nombres Α, Β, Γ (3. 7), et qu'il y ait dans chacun des nombres Ε, Ζ, Η autant d'unités que Δ mesure de fois chacun des nombres Α, Β, Γ. Chacun des nombres Ε, Ζ, Η mesurera chacun des nombres Α, Β, Γ par les unités qui sont dans Δ; donc les nombres Ε, Ζ, Η mesurent également les nombres Α, Β, Γ; donc les nombres Ε, Ζ, Η sont en même raison que les nombres Α, Β, Γ (18. 7). Je dis de plus qu'ils sont les plus petits. Car si Ε, Ζ, Η ne sont pas les plus petits de ceux qui ont avec Α, Β, Γ la même raison, il y aura quelques nombres plus petits que Ε, Ζ, Η qui auront la même raison avec Α, Β, Γ; que ce soient Θ, Κ, Λ; le nombre Θ mesurera Α autant de fois que chacun des nombres Κ, Λ mesure chacun des nombres Β, Γ (21. 7). Qu'il y ait dans

μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας· καὶ ὁ M ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ M ἑκάτερον τῶν B, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν K, Λ μονάδας· ὁ M ἄρα τοὺς A, B, Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν M πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν E, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, M · ἴστος ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ M πρὸς τὸν Δ . Μείζων δὲ ὁ E τοῦ Θ · μείζων ἄρα καὶ ὁ M τοῦ Δ , καὶ μετρεῖ τοὺς A, B, Γ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν E, Z, H ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B, Γ · οἱ E, Z, H ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

utrumque eorum B, Γ metitur per unitates quæ in M . Et quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ in M ; et M igitur ipsum A metitur per unitates quæ in Θ . Propter eadem utique et M utrumque eorum B, Γ metitur per unitates quæ in ipsis K, Λ ; ipse M igitur ipsos A, B, Γ metitur; et quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ in M ; ipse Θ igitur ipsum M multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et E ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit; æqualis igitur est ipse ex E, Δ ipsi ex Θ, M ; est igitur ut E ad Θ ita M ad Δ . Major autem E ipso Θ ; major igitur et M ipso Δ , et metitur ipsos A, B, Γ , quod est impossibile; ponitur enim Δ eorum A, B, Γ maxima communis mensura; non igitur erunt aliqui ipsis E, Z, H minores numeri in eadem ratione in quâ A, B, Γ ; ipsi E, Z, H igitur minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ . Quod oportebat ostendere.

M autant d'unités que Θ mesure de fois A ; chacun des nombres K, Λ mesurera chacun des nombres B, Γ par les unités qui sont en M . Et puisque Θ mesure A par les unités qui sont en M , le nombre M mesurera A par les unités qui sont en Θ . Par la même raison, M mesurera chacun des nombres B, Γ par les unités qui sont dans chacun des nombres K, Λ ; donc M mesure A, B, Γ . Mais Θ mesure A par les unités qui sont en M ; donc Θ multipliant M fait A . Par la même raison, E multipliant Δ fait A ; donc le produit de E par Δ est égal au produit de Θ par M ; donc E est à Θ comme M est à Δ (19.7). Mais E est plus grand que Θ ; donc M est plus grand que Δ , et M mesure A, B, Γ , ce qui est impossible; car on a supposé que Δ est la plus grande commune mesure des nombres A, B, Γ ; donc il n'y a pas de nombres plus petits que E, Z, H qui aient la même raison que A, B, Γ ; donc E, Z, H sont les plus petits nombres qui aient la même raison avec A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'

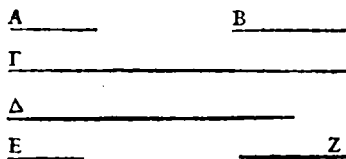
PROPOSITIO XXXVI.

Δύο ἀριθμῶν δεθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εστώσαν οἱ δεθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A , B · δεῖ δὲ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Duobus numeris datis, invenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri A , B ; oportet igitur invenire quem minimum metiantur numerum.



Οἱ A , B γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν, ἢ οὐ. Εστώσαν πρότερον οἱ A , B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω· καὶ ὁ B ἄρα τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν· οἱ A , B ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμόν οἱ A , B ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ . Μετρίτωσαν τὸν Δ . Καὶ ὅσάκις ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ E · ὅσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Z · ὁ μὲν A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν

Ipsi A , B enim vel primi inter se sunt, vel non. Sint primum A , B primi inter se, et A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum A multiplicans ipsum Γ fecit; ipsi A , B igitur ipsum Γ metiuntur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi A , B minorem existentem ipso Γ . Metiantur Δ . Et quoties A ipsum Δ metitur, tot unitates sint in E ; quoties autem B ipsum Δ metitur, tot unitates sint in Z ; ipse quidem A igitur ipsum E multiplicans ipsum Δ fecit, ipse

PROPOSITION XXXVI.

Deux nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient A , B les deux nombres donnés; il faut trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Car les nombres A , B sont premiers entr'eux, ou ne le sont pas. Que les nombres A , B soient d'abord premiers entr'eux, et que A multipliant B produise Γ ; le nombre B multipliant A produira Γ (16. 7); donc les nombres A , B mesureront Γ ; je dis que Γ est le plus petit. Car si cela n'est pas, les nombres A , B mesureront quelque nombre plus petit que Γ . Qu'ils mesurent Δ . Qu'il y ait dans E autant d'unités que A mesure de fois Δ ; et qu'il y ait dans Z autant d'unités que B mesure de fois Δ ; donc A multipliant E produira Δ , et B multipliant Z pro-

Δ πεποιήκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἴσακις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἰλάσσων τὸν ἰλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἐπόμενος ἐπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποιήκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἰλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσι τινὰ ἀριθμὸν ἰλάσσονα ὄντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν³. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μη ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφτωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. Καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν·

vero B ipsum Z multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis igitur est ipse ex A, E ipsi ex B, Z; est igitur ut A ad B ita Z ad E. Ipsi autem A, B primi, ipsi vero primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse B igitur ipsum E metitur, ut consequens consequentem. Et quoniam A ipsos B, E multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut B ad E ita Γ ad Δ; metitur autem B ipsum E; metitur igitur et Γ ipsum Δ, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem existentem ipso Γ, quoniam A, B primi inter se sunt; ipse Γ igitur minimus existens ab ipsis A, B mensuratur.

Non sint autem A, B primi inter se, et sumantur minimi numeri Z, E eorum eandem rationem habentium quam ipsi A, B; æqualis igitur est ex A, E ipsi ex B, Z. Et A ipsum E multiplicans ipsum Γ faciat; et B igitur ipsum Z multiplicans ipsum Γ fecit. Ipsi A, B igitur ipsum Γ metiun-

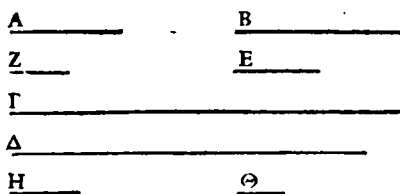
duira Δ; donc le produit de A par E est égal au produit de B par Z; donc A est à B comme Z est à E (19. 7). Mais les nombres A, B sont premiers entr'eux; les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont une même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc le nombre B mesure E, c'est-à-dire le conséquent le conséquent. Mais A multipliant B, E a fait Γ, Δ; donc B est à E comme Γ est à Δ (18. 7); mais B mesure E; donc Γ mesure Δ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B ne mesureront pas quelque nombre plus petit que Γ, puisque A, B sont premiers entr'eux; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B.

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux. Prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec A, B (35. 7), et que ces nombres soient Z, E; le produit de A par E sera égal au produit de B par Z (19. 7). Que A multipliant E fasse Γ; donc B multipliant Z fera Γ; donc A, B mesurent Γ; je dis que Γ est le

444 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ A, B ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A, B , ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ . Μετρίτωσαν τὸν Δ . Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ H , ὅσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ

tur. Dico utique et minimum. Si enim non, metientur aliquem numerum ipsi A, B , minorem existentem ipso Γ . Metiantur ipsum Δ . Et quoties A quidem ipsum Δ metitur, tot unitates sint in H , quoties vero B ipsum Δ metitur, tot



μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν τῷ Θ . ὁ μὲν A ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, H τῷ ἐκ τῶν B, Θ ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν E . ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Οἱ δὲ Z, E ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα. ὁ E ἄρα τὸν H μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς E, H πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

unitates sint in Θ ; ipse quidem A igitur ipsum H multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero B ipsum Θ multiplicans ipsum Δ fecit; æqualis est ipse ex A, H ipsi ex B, Θ ; est igitur ut A ad B ita Θ ad H . Ut autem A ad B ita Z ad E ; sed ut A ad B ita Θ ad H ; et ut igitur Z ad E ita Θ ad H . Ipsi autem Z, E minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem; ipse E igitur ipsum H metitur. Et quoniam A ipsos E, H multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut E ad H ita Γ ad Δ . Ipse autem E ipsum H metitur; et Γ

plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres A, B mesureront quelque nombre plus petit que Γ . Qu'ils mesurent Δ , et qu'il y ait dans H autant d'unités, que A mesure de fois Δ , et dans Θ autant d'unités que B mesure de fois Δ . Le nombre A multipliant H fera Δ , et B multipliant Θ fera Δ ; donc le produit de A par H est égal au produit de B par Θ ; donc A est à B comme Θ est à H (19. 7). Mais A est à B comme Z est à E ; et A est à B comme Θ est à H ; donc Z est à E comme Θ est à H . Mais Z, E sont les plus petits nombres, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit (21. 7); donc E mesure H . Mais A multipliant E, H fait Γ, Δ ; donc E est à H comme Γ est à Δ (17. 7). Mais E mesure H ;

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 445

Ο δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μίζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρέσουσι τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει διζῆσαι.

igitur ipsum Δ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur Α, Β metientur aliquem numerum minorem ipso Γ; ipse Γ igitur minimus existens ab Α, Β mensuratur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

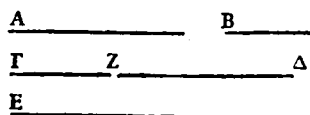
PROPOSITIO XXXVII.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Si duo numeri numerum aliquem metiantur, et minimus ab illis mensuratus eundem mensurabit.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινα τὸν ΓΔ μετρεῖωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.

Duo enim numeri Α, Β numerum aliquem ΓΔ metiantur, minimum autem ipsum Ε; dico et Ε ipsum ΓΔ metiri.



Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετροῦσι'. Μετροῦσι δὲ

Si enim non metitur Ε ipsum ΓΔ, Ε metiens ΖΔ relinquat se ipso minorem ΓΖ. Et quoniam Α, Β ipsum Ε metiuntur, ipse autem Ε ipsum ΔΖ metitur; et Α, Β igitur ipsum ΔΖ metiuntur.

donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7), le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Α, Β ne mesurent pas quelque nombre plus petit que Γ; donc Γ est le plus petit nombre qui soit mesuré par Α, Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVII.

Si deux nombres mesurent quelque nombre, le plus petit qu'ils mesurent mesurera ce même nombre.

Que les deux nombres Α, Β mesurent quelque nombre ΓΔ, et que Ε soit le plus petit nombre qu'ils mesurent; je dis que Ε mesure ΓΔ.

Car si Ε ne mesure pas ΓΔ, que Ε mesurant ΖΔ laisse ΓΖ plus petit que lui-même. Puisque les nombres Α, Β mesurent Ε, que Ε mesure ΔΖ, les nombres

446 LE SEPTIÈME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρή-
σουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνα-
τον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, μετρεῖ ἄρα.
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tur. Metiantur autem et totum ΓΔ; et reliquum
igitur ΓΖ metientur, minorem existentem ipso Ε,
quod est impossibile; non igitur non metitur Ε ip-
sum ΓΔ, metitur igitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον
μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Εστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· διὸ
δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετρήσουσιν ἀριθμὸν.

PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis, invenire quem mini-
mum metiantur numerum.

Sint dati numeri Α, Β, Γ; oportet igitur inve-
nire quem minimum metientur numerum.

Α _____ Β _____ Γ _____
Δ _____
Ε _____

Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος
μετρούμενος ὁ Δ. Ο δὲ Γ τὸν Δ ἥτοι μετρεῖ, ἢ
οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ
οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετρή-
σουσι³. Λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, με-
τρήσουσιν τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα
ὄντα τοῦ Δ. Μετρεῖτωσαν τὸν Ε. Επεὶ οὖν οἱ Α,
Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε

Sumatur enim a duobus Α, Β minimus men-
suratus ipse Δ. Ipse utique Γ ipsum Δ vel meti-
tur, vel non metitur. Metiatur primum. Metian-
tur autem et Α, Β ipsum Δ; ipsi Α, Β, Γ igitur
ipsum Δ metientur. Dico et minimum. Si enim
non, metientur aliquem numerum ipsi Α, Β, Γ,
minorem existentem ipso Δ. Metiantur ipsum Ε.
Et quoniam Α, Β, Γ ipsum Ε metiantur, et Α, Β

Α, Β mesureront ΔΖ; mais ils mesurent ΓΔ tout entier; donc ils mesureront le
reste ΓΖ plus petit que Ε, ce qui est impossible; donc Ε ne peut pas ne point
mesurer ΓΔ; donc il le mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXVIII.

Trois nombres étant donnés, trouver le plus petit qu'ils mesurent.

Soient Α, Β, Γ les nombres donnés; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils
mesurent.

Prenons le plus petit nombre Δ mesuré par les deux nombres Α, Β (36. 7). Le
nombre Γ mesurera Δ, ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure. Puisque
les nombres Α, Β mesurent Δ, les nombres Α, Β, Γ mesureront Δ. Je dis aussi
que Δ est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres Α, Β, Γ mesureront quelque
nombre plus petit que Δ. Qu'ils mesurent Ε. Puisque les nombres Α, Β, Γ me-

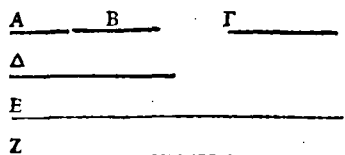
LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 447

μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενος τὸν E^5 μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ · ὁ Δ ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττωον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσι⁶ τινὰ ἀριθμὸν ἐλάττωον ὄντα τοῦ Δ · οἱ A, B, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετρήσουσι⁷.

Μὴ μετρεῖτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ , καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ E . Ἐπεὶ οὖν οἱ A, B τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν E μετρεῖ· καὶ οἱ A, B ἄρα τὸν E μετρή-

igitur ipsum E metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensuratus ipsum E metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ ; ipse Δ igitur ipsum E metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso Δ ; ipsi A, B, Γ igitur minimum Δ metiuntur.

Non metiatur autem rursus Γ ipsum Δ , et sumatur a Γ, Δ minimus mensuratus numerus E . Et quoniam A, B ipsum Δ metiuntur, ipse autem Δ ipsum E metitur; et A, B igitur ipsum E me-



σουσι⁸. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ^9 καὶ οἱ A, B, Γ ἄρα τὸν E μετρήσουσι¹⁰. Λέγω δὴ¹¹ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσι τινὰ οἱ A, B, Γ , ἐλάττωον ὄντα τοῦ E . Μετρεῖτωσαν τὸν Z . Καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ τὸν Z μετροῦσι· καὶ οἱ A, B ἄρα τὸν Z μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν A, B με-

tientur. Metitur autem et ipse Γ ; et A, B, Γ igitur ipsum E metientur. Dico et minimus. Si enim non, metientur aliquem ipsi A, B, Γ , minorem existentem ipso E . Metiantur Z . Et quoniam A, B, Γ ipsum Z metiuntur; et A, B igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur ab A, B mensu-

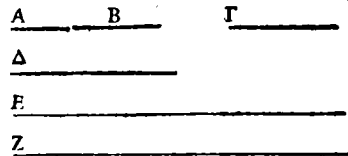
surent E , les nombres A, B mesureront E , et le plus petit nombre mesuré par A, B mesurera E (57. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par A, B est Δ ; donc Δ mesure E , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres A, B, Γ ne mesurent pas un nombre plus petit que Δ ; donc Δ est le plus petit nombre mesuré par les nombres A, B, Γ .

Que Γ ne mesure pas Δ . Prenons le plus petit nombre E mesuré par Γ, Δ (36. 7). Puisque A, B mesurent Δ , et que Δ mesure E , les nombres A, B mesureront E . Mais Γ mesure E ; donc les nombres A, B, Γ mesureront E . Je dis que E est le plus petit. Car s'il ne l'est pas, les nombres A, B, Γ mesureront quelque nombre plus petit que E . Qu'ils mesurent Z . Puisque les nombres A, B, Γ mesurent Z , les nombres A, B mesureront Z , et le plus petit nombre mesuré par AB me-

448 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τρούμενος τὸν Z μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν A, B μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ . ὁ Δ ἄρα τὸν Z μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Z . οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Z μετροῦσιν· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα¹² ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Z μετρήσει¹³. Ὁ δὲ ἐλά-

ratus ipsum Z metietur. Minimus autem ab A, B mensuratus est Δ ; ipse Δ igitur ipsum Z metitur. Metitur autem et Γ ipsum Z ; ipsi Δ, Γ igitur ipsum Z metiuntur; et minimus igitur a Δ, Γ mensuratus ipsum Z metietur. Ipse autem mini-



χιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ E . ὁ E ἄρα τὸν Z μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ἕπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B, Γ μετρήσουσι¹⁴ τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ E . ὁ E ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B, Γ μετρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mus a Δ, Γ mensuratus est E ; E igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur A, B, Γ metientur aliquem numerum minorem existentem ipso E ; ipse E igitur minimus existens ab A, B, Γ mensuratur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Εάν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι.

PROPOSITIO XXXIX.

Si numerus ab aliquo numero mensuratur, mensuratus denominatam partem habebit a metiente.

surera z . Mais le plus petit mesuré par A, B est Δ ; donc Δ mesure z . Mais Γ mesure z ; donc Δ, Γ mesurent z . Donc le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ mesurera z (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Δ, Γ est E ; donc E mesure z , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc les nombres A, B, Γ ne mesureront pas quelque nombre plus petit que E ; donc E est le plus petit nombre qui soit mesuré par A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

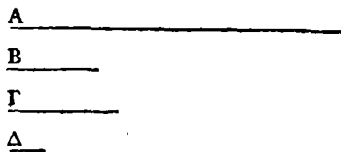
PROPOSITION XXXIX.

Si un nombre est mesuré par quelque nombre, le nombre mesuré aura une partie dénommée par le nombre qui le mesure.

LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 449

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπὸ τίνος ἀριθμοῦ τοῦ Β
μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει
τῷ Β.

Numerus enim A ab aliquo numero B mensu-
retur; dico A denominatam partem habere ab
ipso B.



Οσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μο-
νάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α με-
τρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ
Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονά-
δας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ
καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς
τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ ἄρα μέρος
ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος
ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ
μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α
μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β· ὥστε ὁ Α μέρος
ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β. Οπερ εἶδει
δειξαι.

Quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates
sint in Γ; et quoniam B ipsum A metitur per
unitates quæ in Γ, metitur autem et Δ unitas
ipsum Γ numerum per unitates quæ in ipso;
æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum me-
titur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ
unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A;
quæ igitur pars est Δ unitas ipsius B numeri,
eadem pars est et Γ ipsius A. Ipsa autem Δ uni-
tas ipsius B numeri pars est denominata ab eo;
et Γ igitur ipsius A pars est denominata ab ipso
B; quare A partem habet Γ denominatam ab
ipso B. Quod oportebat ostendere.

Que le nombre A soit mesuré par le nombre B; je dis que A a une partie
dénommée par B.

Qu'il y ait dans Γ autant d'unités que B mesure de fois A. Puisque B mesure
A par les unités qui sont en Γ, et que l'unité Δ mesure Γ par les unités qui sont
en lui, l'unité Δ mesurera Γ autant de fois que B mesure A; donc, par permuta-
tion, l'unité Δ mesurera B autant de fois que Γ mesure A (15. 7); donc Γ est
la même partie de A que l'unité Δ l'est de B. Mais l'unité Δ est une partie
de B dénommée par lui; donc Γ est une partie de A dénommée par B; donc A
a une partie Γ dénommée par B. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

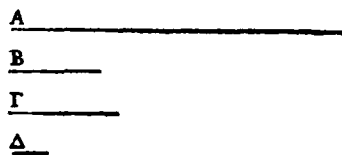
PROPOSITIO XL.

Εάν ἀριθμὸς μέρος ἔχη ὅτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἔχεται ὅτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρος ὁμωνύμος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Si numerus partem habeat quamcumque, mensurabitur a denominato a parte numero.

Numerus enim A partem habeat quamcumque B, et a B parte denominatus sit Γ; dico Γ ipsum A metiri.



Επεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμωνύμων τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ· ὁ μέρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

Quoniam enim B ipsius A pars est et denominata ab ipso Γ, est autem Δ unitas ipsius Γ pars denominata ab eo; quæ igitur pars est Δ unitas ipsius Γ numeri eadem pars est et B ipsius A; æqualiter igitur Δ unitas ipsum Γ numerum metitur ac B ipsum A; alterne igitur æqualiter Δ unitas ipsum B numerum metitur ac Γ ipsum A; ipse Γ igitur ipsum A metitur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XL.

Si un nombre a une partie quelconque, ce nombre sera mesuré par le nombre dénommé par cette partie.

Que le nombre A ait une partie quelconque B, et que le nombre r soit dénommé par B; je dis que r mesure A.

Puisque B est une partie de A dénommée par r, et que l'unité Δ est une partie de r dénommée par lui, l'unité Δ est la même partie du nombre r que B l'est de A; donc l'unité Δ mesure le nombre r autant de fois que B mesure A; donc par permutation l'unité Δ mesure le nombre B autant de fois que r mesure A (15. 7); donc r mesure A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

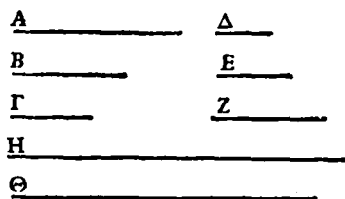
PROPOSITIO XLI.

Ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὅς ἐλάχιστος ὢν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὐρεῖν, ὅς ἐλάχιστος ὢν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ'.

Numerum invenire, qui minimus existens, habeat datas partes.

Sint datæ partes Α, Β, Γ; oportet igitur numerum invenire, qui minimus existens habeat datas partes Α, Β, Γ.



Ἐστωσαν τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί², οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ³ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η· ὁ Η ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. Τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. Λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὢν. Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὅς ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ⁵. Ἐπὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων

Sint ab ipsis Α, Β, Γ partibus denominati numeri, Δ, Ε, Ζ, et sumatur ab ipsis Δ, Ε, Ζ minimus mensuratus numerus Η; ipse Η igitur denominatas partes habet ab ipsis Δ, Ε, Ζ. Ab ipsis autem Δ, Ε, Ζ denominatæ partes sunt Α, Β, Γ. Ipse Η igitur habet Α, Β, Γ partes. Dico et minimum esse. Si enim non, sit aliquis Θ ipso Η minor numerus qui habeat Α, Β, Γ partes. Quoniam Θ habet Α, Β, Γ partes; ipse Θ igitur a

PROPOSITION XLI.

Trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait des parties données.

Soient Α, Β, Γ les parties données; il faut trouver un nombre, qui étant le plus petit, ait les parties données Α, Β, Γ.

Que les nombres Δ, Ε, Ζ soient dénommés par les parties Α, Β, Γ; prenons le plus petit nombre Η qui est mesuré par Δ, Ε, Ζ (38. 7); le nombre Η aura des parties dénommées par Δ, Ε, Ζ (39. 7). Mais les parties dénommées par Δ, Ε, Ζ sont Α, Β, Γ; donc Η a les parties Α, Β, Γ. Je dis que Η est le plus petit. Car si cela n'est pas, soit un nombre Θ plus petit que Η qui ait les parties Α, Β, Γ. Puisque Θ a les parties Α, Β, Γ, le nombre Θ sera mesuré par les nombres dénommés par les parties Α, Β, Γ (40. 7). Mais les nombres dénommés

452 LE SEPTIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς A, B, Γ μέρει. Τοῖς δὲ A, B, Γ μέρεισιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ Δ, E, Z · ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, E, Z μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ H , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἔξει τὰ A, B, Γ μέρη. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

denominatis numeris ab A, B, Γ partibus mensurabitur. Ab ipsis autem A, B, Γ partibus denominati numeri sunt Δ, E, Z ; ipse Θ igitur ab ipsis Δ, E, Z mensuratur, et est minor ipso H , quod est impossibile; non igitur erit aliquis ipso H minor numerus, qui habeat A, B, Γ partes. Quod oportebat ostendere.

par les parties A, B, Γ sont Δ, E, Z ; donc Θ plus petit que H sera mesuré par Δ, E, Z , ce qui est impossible; il n'y a donc pas quelque nombre plus petit que H qui ait les parties A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME LIVRE.

COLLATIO

CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

IMPERIALIS,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI
SUNT MOMENTI.

Litterâ *a* antecedente designatur codex 190; litterâ *b*, editio Oxoniæ; litterâ *c*, codex 1038; litterâ *d*, codex 2466; litterâ *e*, codex 2344; litterâ *f*, codex 2345; litterâ *g*, codex 2342; litterâ *h*, codex 2546; litterâ *k*, codex 2481; litterâ *l*, codex 2531; litterâ *m*, codex 2547; litterâ *n*, codex 2343 (*).

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
θ' (1) εἰρημένην	<i>Idem. a</i>	deest. <i>b, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>
ι' (2) ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν	<i>Id. a, d, m.</i>	ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν <i>b, e, f, h, k, n.</i>
ιέ (3) πρὸς τὴν τοῦ κύκλου πε- ριφέρειαν	<i>Id. a, d, e, h, k, l, m.</i>	desunt. <i>b, f, n.</i>
ιη (4) τῆς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, n.</i>	deest. <i>b.</i>
(5) αὐτῆς	<i>Id. a, d, e, h, m.</i>	αὐτῆς τῆς <i>b, h.</i>
ιθ' (6) σχῆμα	<i>Id. a, d, e, f, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
(7) ἡ μείζωνος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου.	<i>Id. a, d, e, h, k,</i> <i>l, m, n.</i>	desunt. <i>b, f.</i>
κ' (8) Σχήματα εὐθύγραμμά . .	<i>Id. a, d, m.</i>	Εὐθύγραμμα σχήματά <i>b, e, f, h,</i> <i>k, l, m, n.</i>

(*) Initium codicis 1038 deest usque ad propositionem octavam secundi libri elementorum, et initium codicis 2542 usque ad propositionem trigesimam secundam primi libri.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

κδ' (9) τὰς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
κε' (10) ἀνίσους	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m.</i>	ἀνίσας <i>b, n.</i>
κζ' (11) τε	<i>Id. a.</i>	τὲ <i>b, d, e, f, k, l.</i>
κθ' (12) τὰς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
λε' (13) εἰς	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	ἐπ' <i>b.</i>

POSTULATA.

β' (1) ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχίς	<i>Id. a, d.</i>	κατὰ τὸ συνεχίς ἐπ' εὐθείας <i>b, e, f, h, k.</i>
δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
ε'. Καὶ ἂν εἰς δύο εὐθείας εὐθειᾶ τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἰλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπέπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἰλάσσοι γωνίαι.	<i>Id. a, d, e, f, h, k, l, m, n.</i>	deest. <i>b.</i>
<i>Nota.</i> Verbum <i>τις</i> primæ lineæ, quod adest in codice 190, deest in omnibus aliis codicibus. Ultimum verbum <i>γωνίας</i> adest in omnibus codicibus; in codice 190, verbum <i>αὐταὶ</i> vicem verbi <i>γωνίας</i> implet.		
ς'. Καὶ δύο εὐθείας μὴ περιέχειν.	<i>Id. a, e, h, k.</i>	deest. <i>b, d, f, h, l, m, n.</i>

Hoc postulatam in codice *e* exaratur eadem manu in postulatis, et alienâ in not. com.; in codice *f* alienâ in postulatis, et eadem in not. com.; in codicibus *h, k* in post. et in com. not. eadem manu exaratur.

NOTIONES COMMUNES.

θ'. (1) ἴσσι.	εἶναι.	ἴστι.
ι'. deest.	<i>Id. a, d, f, h, k, l, m, n.</i>	ι'. καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. <i>b.</i>
ια'. deest. <i>a.</i>	<i>Id. b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>	ια'. Καὶ ἂν εἰς δύο εὐθείας εὐθειᾶ ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἰλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

αἱ δύο αὐται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον
συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ
μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν
ἐλάσσονες γωνίαι. *b.*

ιβ'. deest. deest. *a.* ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ πι-
ρίχουσιν. *b, d, f, h, k, l, m, n.*

PROPOSITIO I.

1. Εκθέσις.	<i>Id. a, d, e.</i>	deest. <i>b, f, h, k, l, m, n.</i>
2. Εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.
3. Προσδιορισμὸς.	<i>Id. a, d, e.</i>	deest. <i>b, f, h, k, m, n.</i>
4. πεπερασμένης	<i>Id.</i>	deest.
5. Κατασκευή.	<i>Id. a, d, e.</i>	deest. <i>b, f, h, k, m, n.</i>
6. Αποδείξις. Καὶ ἐπεὶ	<i>Id. a, d, e.</i>	Επεὶ οὖν <i>b, f, h, k, m, n.</i>
7. ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση.
8. Σύμπερασμα.	<i>Id. a, d, e.</i>	deest. <i>b, f, h, k, m, n.</i>
9. συνίσταται	<i>Id.</i>	συνίσταται

PROPOSITIO II.

1. τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ . .	<i>Id.</i>	τῇ ΒΓ εὐθείᾳ
2. ὁ	<i>Id.</i>	deest.
3. τῷ Δ, καὶ διαστήματι	<i>Id.</i>	μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ
4. Πάλιν, ...	<i>Id.</i>	Καὶ πάλιν,

PROPOSITIO III.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IV.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. σημείων	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX IGO.	EDITIO OXONIÆ.
1. AB πλευρᾷ τῇ ΑΓ	<i>Id.</i>	ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ
2. ΑΒ τῇ ΑΓ, μία	<i>Id.</i>	ΑΓ τῇ ΑΒ ἑτέρα
3. ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ . . .	<i>Id.</i>	ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ
4. τὸ ἑλασσον τῷ μείζονι . .	<i>Id.</i>	τῷ ἑλάσσονι τὸ μείζον

PROPOSITIO VII.

1. αἱ	deest.	αἱ
2. τὰ Α, Β	<i>Id.</i>	τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις
3. Καὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἐκβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπ' τὰ Ε, Ζ.	Desunt in omnibus codicibus et in omnibus editionibus.	

PROPOSITIO VIII.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. αἱ	deest.	αἱ

PROPOSITIO IX.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἴστιν ἴση.

PROPOSITIO X.

1. εὐθεῖαν πεπεραμένην . . .	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἴστιν ἴση.
3. ἴση ἐστίν	<i>Id.</i>	ἴστιν ἴση

PROPOSITIO XI.

1. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἴστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν
2. εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται . . .	<i>Id.</i>	γραμμὴ ἥκται εὐθεῖα

PROPOSITIO XII.

1. εὐθεῖα	<i>Id.</i>	deest.
2. εὐθεῖαι	<i>Id.</i>	deest.
3. ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἴστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. Εὰν	<i>Id.</i>	Ως ἄν
2. ἥτοι	<i>Id.</i>	ἢ
3. εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.
4. ἴσαι εἰσί.	<i>Id.</i>	εἰσὶν ἴσαι.
5. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα γωνίαι αἱ
6. Εὰν	<i>Id.</i>	Ως ἄν

PROPOSITIO XV.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.

 deest. *a, h, i, k, n.*

In codicibus *d, e, f*
hoccorollarium exa-
ratum est in margine
vel inter lineas.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ
ὅσαι δὴ ποτ' αὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν
ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ
γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας
ποιήσουσι. *b, m.*

PROPOSITIO XVI.

1. προσεβληθείσης, ...	<i>Id.</i>	ἐκβληθείσης,
2. γωνιῶν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐπ' εὐθείας	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVIII.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XX.

1. desunt.	desunt.	ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μῆζων ἐστὶ·
2. ΔΑ τῇ ΑΓ·	<i>Id.</i>	ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ·

PROPOSITIO XXI.

1. πλευραὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. πλευραὶ	deest.	πλευραὶ
3. ταῦτα τοίνυν	<i>Id.</i>	τὰ αὐτὰ ἄρα

PROPOSITIO XXII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. εὐθείαις, ...	deest.	εὐθείαις,
2. διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μετα- λαβανομένης.	<i>Id.</i>	desunt.
3. καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ	πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, καὶ διαστήματι	καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ
4. συνίσταται	<i>Id.</i>	συνίστηκε
5. οὖν	<i>Id.</i>	γὰρ

PROPOSITIO XXIII.

1. δύο	<i>Id.</i>	αἱ δύο

PROPOSITIO XXIV.

1. γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ	ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας	γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ ΕΔΖ
2. ἴσθιν	deest.	ἴσθιν
3. αὐτῇ	αὐτῷ	αὐτῇ
4. ἴστί	deest.	ἴστί
5. ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία	<i>Id.</i>	γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXV.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. δὲ βάσιν	<i>Id.</i>	βάσιν δὲ
3. ἥχη	deest.	ἥχη
4. ΒΑΓ	<i>Id.</i>	ΒΑΓ γωνία
5. αὖ ἢν	<i>Id.</i>	ἢ
6. γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ	<i>Id.</i>	ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία
7. οὐδὲ μὴν ἰλάσσαν ἴσθιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ,	<i>Id.</i>	ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἰλάσσαν,

1. ποιῆ*	deest.	ποιῆ*
2. ἀπεναντίον	Id.	ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη

PROPOSITIO XXIX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . .	desunt.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
2. τε	deest.	τε
3. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη . .	desunt.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
4. ἢ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ. .	Id.	ἢ ὑπὸ ΑΗΘ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ.
5. ἀλλὰ	Id.	ἀλλὰ καὶ
6. αἱ	Id.	καὶ αἱ

PROPOSITIO XXX.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. εὐθείας	δύο εὐθείας	εὐθείας
3. αἱ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς . . .	conclusio deest . .	conclusio adest.

PROPOSITIO XXXI.

1. σημείου, ...	σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ αὐτῆς,	σημείου,
2. ἑμπίπτουσα	Id.	ἑμπεσοῦσα

PROPOSITIO XXXII.

1. ταῖς	deest.	ταῖς
2. ἐκτὸς	deest.	ἐκτὸς

PROPOSITIO XXXIII.

1. τε	Id.	deest.
1. γὰρ	deest.	γὰρ
3. ἐστίν·	deest.	ἐστίν·
4. τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ . . .	deest.	τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ

PROPOSITIO XXXIV.

1. χωρίον	Id.	deest.
2. πλευρὰν	Id.	πλευρὰν τῇ

3. καὶ ἐπὶ ἴση ἰστὶν	<i>Id.</i>	desunt.
4. ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἰστὶν ἴση. .	<i>Id.</i>	ὅλη τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἰστὶν.
5. δὲ	deest.	δὲ
6. ἴση ἰστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἰστί·	ἴση· καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ ἴση.	ἴση ἰστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἰστί.

PROPOSITIO XXXV.

1. ὄντα	deest.	ὄντα
2. ΕΒΓΖ.	ΕΒΓΖ παραλληλογράμμω.	ΕΒΓΖ.
3. ἴση ἰστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.	<i>Id.</i>	τῇ ΒΓ ἴση ἰστὶν ἡ ΑΔ.
4. ἰστὶν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἰστὶν.
5. ἰστὶν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἰστί.
6. ἰστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἰστὶν,
7. ἴσται.	<i>Id.</i>	ἰστί.
8. ἰστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἰστί.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. ὅιτα	deest.	ὄντα
3. ἀλλὰ	<i>Id.</i>	ἀλλὰ καὶ
4. τι	deest.	τι
5. ἰστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἰστί.

PROPOSITIO XXXVII.

1. ὄντα	deest.	ὄντα
2. Ε, Ζ, ...	<i>Id.</i>	Ε, Ζ σημειῖα,
3. εἰσιν ἴσα·	<i>Id.</i>	ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ,
4. εἰσι	<i>Id.</i>	ἴστι

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἰστὶν.	<i>Id.</i>	εἰσίν.
2. τὰ	<i>Id.</i>	deest.

3. ὄντα	deest.	ὄντα
4. ἐπὶ	κατὰ	ἐπὶ
5. αὐτὸ δίχα	Id.	δίχα αὐτὸ
6. αὐτὸ δίχα	Id.	δίχα αὐτὸ

PROPOSITIO XXXIX.

1. καὶ	Id.	deest.
2. ἴσα τρίγωνα	Id.	τρίγωνα ἴσα
3. μέρη	μέρη τῆς ΒΓ	μέρη
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἄρα	δὴ	ἄρα
6. ταῖς ΒΓ, ΑΕ.	deest.	ταῖς ΒΓ, ΑΕ.
7. τριγώνον	Id.	deest.
8. ἐστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO XL.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. καὶ	Id.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη,
3. ἴσα τρίγωνα	Id.	τρίγωνα ἴσα
4. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη	deest.	καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
5. ἄρα	δὴ	ἄρα
6. τριγώνω	deest.	τριγώνω
7. τριγώνον	deest.	τριγώνον
8. ἐστὶν	Id.	deest.
9. ἐστὶν	Id.	ἐστὶν
10. ἐστὶ παράλληλος.	Id.	παράλληλός ἐστι.

PROPOSITIO XLI.

1. ἐστὶ	Id.	ἔσται
2. τε	deest.	τε
3. παραλλήλοις ἔστω	Id.	ἔστω παραλλήλοις
3. τρίγωνον	Id.	deest.

PROPOSITIO XLII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. γωνία εὐθυγράμμω	<i>Id.</i>	εὐθυγράμμω γωνία.
2. γωνία εὐθυγράμμος ἢ Δ°	<i>Id.</i>	εὐθύγραμμος γωνία Δ°
3. ἴση	deest.	ἴση
4. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
5. συνίσταται	<i>Id.</i>	συνιστάθη
6. ἢ τις	<i>Id.</i>	ἢ

PROPOSITIO XLIII.

1. παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΑΚ, ἴσον ἄρα ἐστὶ	<i>Id.</i>	τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ
2. τριγώνω	<i>Id.</i>	deest.
3. λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῶ τῷ ΗΔ παραπλήρωματι ἐστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	λοιπῶ ἄρα τῷ ΚΔ παραπλήρωματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.

PROPOSITIO XLIV.

1. ὥστε	<i>Id.</i>	ὥσπερ
2. ἐνέπεισιν	<i>Id.</i>	ἐμπεπτωκεν
3. ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ
4. εἰσὶν ἴσαι	<i>Id.</i>	ἴσαι εἰσὶν
5. τὴν	<i>Id.</i>	deest.
6. τὰ	<i>Id.</i>	deest.
7. Ἀλλὰ	<i>Id.</i>	Ἀλλὰ καὶ
8. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XLV.

1. γωνία εὐθυγράμμω	<i>Id.</i>	εὐθυγράμμω γωνία.
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. τῇ δοθείσῃ	<i>Id.</i>	ἴση
4. ἴση ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση
5. ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ

6. ἴστί· ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἴστί·.
7. εὐθεία	εὐθείας	εὐθεία
8. ἴστί·	ἴστί· καὶ	ἴστί·
9. ἴστί· ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἴστί·.
10. τῇ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XLVI.

1. ἀλλὰ	<i>Id.</i>	ἀλλὰ καὶ

PROPOSITIO XLVII.

1. γωνίαν·	<i>Id.</i>	deest.
2. εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ ἐπεὶ ἴση ἴστί· ἢ μὲν ΔΒ τῇ ΕΓ, ἢ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ δύο.
4. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἴστί·
5. ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴστί· ἴση,
6. ἴστί·	deest.	ἴστί·
7. εἰσι παραλλήλοις	<i>Id.</i>	παραλλήλοις εἰσὶ
8. τετράγωνον	<i>Id.</i>	τετράγωνον ΒΕ

PROPOSITIO XLVIII.

1. εὐθεία πρὸς ὀρθᾷς	<i>Id.</i>	πρὸς ὀρθᾷς εὐθεία
2. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴστί· ἴση·
3. ἴση.	<i>Id.</i>	ἴστί· ἴση.

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

β' (1) παραλληλογράμμοι ἐν . *Id.* ἐν παραλληλόγραμμοι

PROPOSITIO I.

1. τε ὑπὸ	<i>Id.</i>	ὑπὸ τε
2. τε ὑπὸ	<i>Id.</i>	ὑπὸ τε
3. ἔτι	deest.	ἔτι
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
5. τῶν	<i>Id.</i>	deest.
6. τὸ	τῶ	τὸ
7. τὸ	τῶ	τὸ
8. τὸ	τῶ	τὸ

PROPOSITIO II.

1. τὰ	τὸ	τὰ
2. περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα	περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον	περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα
3. τῆς	<i>Id.</i>	τῶν
4. τῶν	deest.	τῶν
5. ἔστι	deest.	ἔστι

PROPOSITIO III.

1. τμηθῇ ὡς ἔτυχι, ...	<i>Id.</i>	ὡς ἔτυχι τμηθῇ,
2. Γ	<i>Id.</i>	Γ σημεῖον
3. τῆς	τοῦ	τῆς
4. διήχθω	<i>Id.</i>	ἡχθω
5. τὸ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν	deest.	τῶν
3. ἀλλὰ ἡ μὲν	Id.	ἀλλὰ καὶ ἡ
3. καὶ εἰς αὐτάς ἐπέπισεν ἡ ΓΒ.	verba in margine re- centi manu exarata.	καὶ εἰς αὐτάς ἐπέπισεν ἡ ΓΒ.
4. εἰσὶν ἴσαι.	Id.	ἴσαι εἰσίν.
5. ἀπὸ	deest.	ἀπὸ
6. τῶν	deest.	τῶν
7. τεσσάρᾳ	Id.	deest.
8. τὸ	deest.	τὸ

A L I T E R.

Hæc altera demonstratio exarata est in chartâ paginæ contiguâ.

1. καὶ ἄλλως.	Id.	Ετέρα δειξις.
2. ἐντὸς καὶ	desunt.	ἐντὸς καὶ
3. τῷ	Id.	τὸ
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἐστί.	deest.	ἐστί.
6. ἐστὶν ἴσον	Id.	ἴσον ἐστὶ
7. ἴση ἐστὶ	Id.	ἴση
8. ἄρα	deest.	ἄρα

C O R O L L A R I U M.

9. ἐστίν	deest.	ἐστίν

PROPOSITIO V.

1. ἤχθω ΚΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ἵποτέρα τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.	Id.	ἤχθω πάλιν ἡ ΚΑΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ἵποτέρα τῶν ΓΑ, ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.
2. ἐστὶν ἴση.	Id.	ἴση ἐστί
3. ΝΞΟ γινώμενι	Id.	ΔΖ καὶ ΔΑ
4. μὲν	deest.	μὲν

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

5. γὰρ ἡ	ἡ γὰρ	γὰρ ἡ
6. ΔΒ.	<i>Id.</i>	ΔΒ· τὸ δὲ ΖΔ, ΔΑ ἔστιν ὁ ΝΞΟ γνώμων·
7. τῆς	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VI.

1. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι .	Hæc verba manu re- centi inter lineas exarata sunt.	ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι
2. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
3. Αλλὰ	<i>Id.</i>	Αλλὰ καὶ
4. ὀρθογωνίῳ.	deest.	ὀρθογωνίῳ.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ
2. ἴσον ἔστιν·	<i>Id.</i>	ἔστιν ἴσον·
3. τῷ	<i>Id.</i>	τῷ τε

PROPOSITIO VIII.

1. ἀπὸ τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴση τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ, ...	<i>Id.</i>	τῇ ΓΒ ἴση ἢ ΒΔ,
3. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
4. μὲν	deest.	μὲν
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. μὲν	deest.	μὲν
7. ἔστιν ἴσον, ...	ἴσον ἔστί, ...	ἔστιν ἴσον,
8. ἴσον ἔστί·	<i>Id.</i>	ἔστιν ἴσον·
9. ἔστιν	deest.	ἔστιν
10. ἔστιν ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἔστί·
11. ἴση ἔστί.	<i>Id.</i>	ἔστιν ἴση.
12. μὲν	deest.	μὲν
13. τετραπλάσιά ἐστιν.	<i>Id.</i>	ἐστὶ τετραπλάσια.

468 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

14. ἐστὶ τοῦ AK.	<i>Id.</i>	τοῦ AK ἐστί.
15. γάρ	<i>Id.</i>	γάρ καὶ
16. τῆς	deest.	τῆς
17. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BD μετὰ τεῦ ἀπὸ τῆς AG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AD τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ BD τῇ BG.	<i>Id.</i> in codice a legitur ἀπὸ AG, ἀπὸ AD.	desunt.

PROPOSITIO IX.

1. παράλληλος ἤχθω	desunt.	adsunt.
2. καὶ εἰσὶν ἴσαι	<i>Id.</i>	desunt.
3. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
4. πλευρᾷ	deest.	πλευρᾷ
5. ἐστὶ πάλιν	<i>Id.</i>	πάλιν ἐστὶ
6. τῆς	deest.	τῆς
7. τῆς	deest.	τῆς
8. τῆς	deest.	τῆς
9. τῆς	deest.	τῆς
10. ἴσον ἐστὶ	ἐστὶν ἴσον	ἴσον ἐστὶ
11. EZ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ.	<i>Id.</i>	EZ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ τετρά- γώνον.
12. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ.	<i>Id.</i>	ἴση δὲ ἡ HZ τῇ ΓΔ.
13. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO X.

1. ἀναγραφέντος τετραγώνου. .	ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.	concordat cum edit. Paris.
2. πάλιν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
4. ὀρθῆς ἐστὶν	<i>Id.</i>	ὀρθῆς ἐστὶν
5. ΔHB	<i>Id.</i>	ΔHB ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔHB

6. ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΕΓ . concordat cum edit. Paris.
ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ

7. ΗΖ	Id.	ΔΖ τετράγωνον
8. ΖΕ	Id.	ΖΕ τετραγώνω.
9. ΕΗ	Id.	ΕΗ τετράγωνον.
10. ΑΗ	Id.	ΑΗ τετράγωνον.
11. ΓΔ	Id.	ΓΔ τετραγώνων.

PROPOSITIO XI.

1. ποιεῖν	Id.	εἶναι
2. τῆς ΕΒ τετραγώνω	ΕΒ	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	deest.	τῆς
4. ὀρθογώνιον	deest.	ὀρθογώνιον
5. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ δὲ ΘΔ τὸ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΘ·	Id.	Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΘΔ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ.
6. τῆς	deest.	τῆς
linea decima.		
7. ποιεῖν	Id.	εἶναι

PROPOSITIO XII.

1. ἐκβληθεῖσαν	deest.	ἐκβληθεῖσαν
2. γωνίαν, ...	deest.	γωνίαν,
3. περιεχομένω ὀρθογωνίω.	desunt.	περιεχομένω ὀρθογωνίω.
4. τῶ.	Id.	τὸ.
5. ἴσον	Id.	ἴσον ἐστὶ
6. τετραγώνον	Id.	deest.

PROPOSITIO XIII.

1. τοῦ	Id.	τῆς
2. τῆς	deest.	τῆς

470 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. ἴστί		deest.		ἴστί
4. ἴστί		deest.		ἴστί
5. τῶν		deest.		τῶν
6. τὸ		<i>Id.</i>		deest.

PROPOSITIO XIV.

1. γὰρ		<i>Id.</i>		deest.
2. μὲν		deest.		μὲν
3. τῆς HE ἴσον		HE ἴσον		τῆς HE ἴσα
4. τὸ ὑπὸ τῶν BE, EA ἴστί,		<i>Id.</i>		τὸ BA ἴστί,
5. καὶ		<i>Id.</i>		deest.

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
α. (1) ἴσαι εἰσίν.	<i>Id.</i>	εἰσὶν ἴσαι.
β. (2) ἐπὶ μὴδέτερα μερή. . .	<i>Id.</i>	deest.
δ. (3) ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
ή. (4) τις	deest.	τις
ί. (5) τοῦ κύκλου συσταθῆ . . .	<i>Id.</i>	αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῆ

PROPOSITIO I.

1. Ηχθω	<i>Id.</i>	Διήχθω.
2. κύκλου.	deest.	κύκλου.
3. linea 12 paginæ 119 δύο δὲ	<i>Id.</i>	δύο δὲ
4. ἐστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν,
5. τοῦ Η.	deest.	τοῦ Η.
6. ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση.
7. ἴσων	deest.	ἴσων
8. ἐλάττων τῇ μείζονι, . . .	<i>Id.</i>	μείζων τῇ ἐλάττωνι
9. κύκλου.	deest.	κύκλου.
10. ὅπερ εἶδει ποιῆσαι. . . .	desunt.	Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

COROLLARIUM.

11. εὐθεῖα τις	<i>Id.</i>	τις εὐθεῖα
12. κύκλου.	κύκλου. Ὅπερ εἶδει ποιῆ- σαι.	κύκλου.

PROPOSITIO II.

1. αὐτὰ	deest.	αὐτὰ
2. δύο τυχόντα	<i>Id.</i>	τυχόντα δύο
3. ΔΖΕ.	<i>Id.</i>	ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε.
4. linea 10 paginæ 122 πει- σῶνται.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
linea 1 paginæ 123 τέμνει .	<i>Id.</i>	τεμνῖ
linea 2 paginæ 123 τέμνει .	<i>Id.</i>	τεμνῖ.
1. δὴ	deest.	δὴ
2. εἰσι , ...	deest.	εἰσι.
3. γωνία ἄρα	<i>Id.</i>	καὶ γωνία
4. ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἔστιν· ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE.	<i>Id.</i>	ὀρθὴ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθὴ ἔστιν.
5. οὕσα	<i>Id.</i>	deest.
6. αὐτὴν	deest.	αὐτὴν
7. καὶ	deest.	καὶ
8. ἡ EA	<i>Id.</i>	ἡ ἐκ τοῦ κέντρου EA
9. ἄρα	deest.	ἄρα

PROPOSITIO IV.

1. σημεῖον , ...	<i>Id.</i>	deest.
2. κέντρου	<i>Id.</i>	κέντρου ἡγμένην
3. τέμνει·	<i>Id.</i>	τεμνῖ
4. ἄρα ἔστιν	<i>Id.</i>	ἔστιν ἄρα
5. τέμνει·	<i>Id.</i>	τεμνῖ
6. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἔστιν.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἡ EG καὶ , ...	<i>Id.</i>	καὶ ἡ EG ,
2. ἔστιν ἴση , ...	<i>Id.</i>	ἴση ἔστιν ,
3. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO VI.

1. ἐντός , ...	deest.	ἐντός ,
2. ἐφαπτίσθωσαν	ἀπτίσθωσαν	ἐφαπτίσθωσαν

3. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
4. καὶ	<i>deest.</i>	καὶ
5. ἴσται ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἴσται
6. ἴσται	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>

PROPOSITIO VII.

1. πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες	<i>Id.</i>	προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον
2. μόνον	<i>Id.</i>	μόνον εὐθεῖαι
3. EB, EZ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα EB, EZ
4. δὲ	<i>deest.</i>	δὲ
5. ἴσται	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>
6. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται εὐθεῖαι
7. ἴσται ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσται,
8. μὲν καὶ ἡ ZO τῇ ZH	<i>Id.</i>	ἡ ZO τῇ ZH ἴση ἴσται
9. ἴσται ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσται,
10. τῇ	τῇς	τῇ
11. HEZ	<i>Id.</i>	HEZ γωνία
12. ἴσται	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>

PROPOSITIO VIII.

1. Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν- τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι- φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἴσται ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἑγγιον τῆς διὰ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν	Εὰν κύκλου ληφθῇ τι ση- μεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύ- κλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοι- παὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι- φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἴσται ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ	Εὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκ- τὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαι τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέν- τρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περι- φέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἱ ἢ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἴσται· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπ-

EDITIO PARISIENSIS.

προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

CODEX 190.

τοῦ τε σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου προσπίπτουσα· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστί· ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπισσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

EDITIO OXONIÆ.

τουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἔστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰὲν ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπισσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλῃν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὲν δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἐλαχίστη

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλῃν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἐλαχίστη δὲ ἡ μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαι τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλῃν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰὲν δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὸν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐ-

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

διαμέτρου ἡ ΑΗ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΑΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

θειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

2. Αἰ δὲ	<i>Id.</i>	ἀλλ' αἰ
3. προσκείσθω	<i>Id.</i>	δε
4. αἱ ΜΚ, ΚΔ ἄρα	<i>Id.</i>	αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ
5. ἴση δὲ	<i>Id.</i>	ὧν ἐστὶν ἴση
6. ἴσαι	<i>Id.</i>	ἴσαι εὐθεῖαι
7. προσπεσοῦνται	<i>Id.</i>	συμπεσοῦνται
8. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ·
9. δὴ	deest.	δὴ
10. ἐστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν,
11. Ἐπεὶ	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ
12. ἐστὶν ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν·
13. ἄρα	deest.	ἄρα
14. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
15. ἴσαι	<i>Id.</i>	εὐθεῖαι

PROPOSITIO IX.

1. ἴσαι εὐθεῖαι, ...	<i>Id.</i>	εὐθεῖαι ἴσαι,
2. ἴσαι εὐθεῖαι, ...	<i>d.</i>	εὐθεῖαι ἴσαι,
3. ἐστὶν ἴση	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶν
4. ἴση·	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ
5. τέμνει δίχρα καὶ πρὸς ὀρθὰς.	<i>Id.</i>	δίχρα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.
6. ΑΒΓ	deest.	ΑΒΓ
7. κύκλου.	<i>Id.</i>	deest.

A L I T E R.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

8. ἡ ΖΗ ἄρα *Id.* ἡ δὲ ΖΗ
 9. τὸ Δ, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, *Id.* ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ,
 10. κύκλου. κύκλου. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι. κύκλου.

PROPOSITIO X.

1. Κύκλος κύκλον αὐτὸν τέμνει . . . *Id.* Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον
 2. διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α, Ε . . . *Id.* ἐπὶ τὰ ΑΕ διήχθωσαν
 3. καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, . . . *Id.* τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς,
 4. ἀλλήλαις deest. ἀλλήλαις
 5. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλ-
 λήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ
 αὐτό ἔστι κέντρον τὸ Ο,

A L I T E R.

6. εὐθεῖαι ἴσαι, ... *Id.* ἴσαι εὐθεῖαι,
 7. κέντρον ἰστί *Id.* ἰστί κέντρον
 8. ἀλλήλους ἀλλήλων ἀλλήλους

PROPOSITIO XI.

1. Καὶ *Id.* deest.
 2. ἐφαπτίθωσαν *Id.* ἀπτίθωσαν
 3. κύκλου κύκλου τὸ κύκλου
 4. τὸ Α *Id.* τὸ Α συμμεῖον
 5. τῆς ΖΘ, ... *Id.* τῆς ΖΘ, ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ
 ἀπὸ κέντρου γὰρ ἁμῶν
 6. ἰστὶν *Id.* deest.
 7. κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τῆς συνα-
 φῆς πιεῖται. *Id.* ἐπ' αὐτὴν ἄρα.

A L I T E R.

8. ἐκβεβλήσθω *Id.* προσεκβεβλήσθω
 9. ἄτοπον. ἄτοπον. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι. ἄτοπον.

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἐφάπτωνται	<i>Id.</i>	ἄπτοιται
2. εὐθείᾳ	deest.	εὐθεῖα
3. κύκλου	deest.	κύκλου

PROPOSITIO XIII.

1. ἐφαπτόνται ἂν τε ἐκτός. .	<i>Id.</i>	ἂν τε ἐκτός ἐφάπτηται.
2. ἐφαπτίσθω	<i>Id.</i>	ἀπτίσθω
3. εὐθεῖα	deest.	εὐθεῖα
4. ὅπερ	<i>Id.</i>	ὅπερ ἐστὶν
3. τοῦ	<i>Id.</i>	ἡ
6. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
7. αὐτὰ	deest.	αὐτὰ

PROPOSITIO XIV.

1. αἱ AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
3. λοιπῶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα	τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἐστὶ καὶ
5. ἐστὶν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστὶν,
6. λοιπῶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστὶν.	ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i>
2. τοῦ E κέντρου	τῆς ΑΔ διαμέτρου <i>a, c, d.</i>	τοῦ E κέντρου
3. Ε	<i>Id. e, f, g, h, k, l, m.</i>	deest.
4. ὅρα	deest. <i>a, f, g, h, k, l, m.</i>	ἄρα <i>b, c, d, e, h.</i>
5. μείζων	<i>Id.</i>	μείζων ἐστὶ <i>b, c, d, e, f, g, h,</i> <i>k, l, m.</i>
6. μὲν	<i>Id. a, c, d, e, g, h,</i> <i>k, l, m.</i>	deest. <i>b, f.</i>

PROPOSITIO XVI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. περιμπεσιῖται	<i>Id.</i>	περιμπεσιῖται*
2. γωνίας ὀξείας	<i>Id.</i>	ὀξείας γωνίας
3. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν.	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ.
4. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ	<i>Id.</i>	αἱ ἄρα
5. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
6. γωνίας ὀξείας	<i>Id.</i>	ὀξείας γωνίας
7. ἡ	<i>Id.</i>	ἡ
8. εὐθείᾳ περιμπεσιῖται, ...	<i>Id.</i>	περιμπεσιῖται εὐθείᾳ,
9. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. τούτου	τούτου	τουτῶν
11. εἰδείχθη.	εἰδείχθη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	εἰδείχθη.

PROPOSITIO XVII.

1. τὸ	<i>Id.</i>	deest.
2. τὴν	deest.	τὴν
3. ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ.	<i>Id.</i>	τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ
4. ΒΓΑ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVIII.

1. ἐφαπτομένην	<i>Id.</i>	ἀπτομένην
2. ἐφαπτίσθω	<i>Id.</i>	ἀπτίσθω
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. ὀρθὰς	<i>Id.</i>	ὀρθὰς γωνίας
2. τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς	<i>Id.</i>	πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΕ
3. οὖν	deest.	οὖν

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἴση καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA.	<i>Id.</i>	καὶ γωνία ἢ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA ἴση ἰστίν.
2. ἑτέρα γωνία	<i>Id.</i>	γωνία ἑτέρα

PROPOSITIO XXI.

1. αὐτῷ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXII.

1. Ἐπὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἐπὶ
2. ἄρα τριγώνου	<i>Id.</i>	deest.
3. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. συσταθήσεται	<i>Id.</i>	συσταθήσονται

PROPOSITIO XXIV.

1. ἰστίν.	<i>Id. a, c, d, e, f, g, h,</i>	ἰσίν. <i>b.</i> <i>k, l, m, n.</i>
2. τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν ΓΔ ἑφαρ- μοσάσης,	<i>Id. a.</i>	ἑφαρμοσάσης δὲ τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ <i>b, c, d, e, f,</i> <i>g, h, k, l, m, n.</i>
3. ἥτοι εἰς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτός, ἢ παραλλάξει ὥς τὸ ΓΘΗΔ καὶ κύκλος κύκλον τέμ- νει κατὰ	<i>Id. a.</i>	ἀλλὰ παραλλάξει ὥς τὸ ΓΘΗΔ. Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ <i>b, c, d, e, f, g,</i> <i>h, k, l, m, n.</i>

PROPOSITIO XXV.

1. δὴ	δὴ τοῦ ABΓ τμήματος .	δὴ
2. γωνία ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα γωνία
3. ἢ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε	<i>Id.</i>	ἐπὶ τὸ Ε ἢ AB
4. εὐθεία	<i>Id.</i>	deest.

480 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

5. ἴσιν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν,
6. βάσις	<i>Id.</i>	καὶ βάσις
7. ἴσιν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν.
8. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
9. κύκλος.	<i>Id.</i>	deest.
10. ἐκτὸς αὐτοῦ	<i>Id.</i>	αὐτοῦ ἐκτὸς
11. καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ABD γωνία ἴση ᾗ	<i>Id.</i>	καὶ ᾗ ὑπὸ ABD γωνία ἴση
12. πρὸς αὐτῇ σημείῳ τὸ A, .	<i>Id.</i>	τῷ A σημείῳ
13. ὡς τὸ E, ...	<i>Id.</i>	deest.
14. οὗπερ ἴσιν τὸ τμήμα. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVI.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν,	<i>Id.</i>	ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις
3. εἰσί.	deest.	εἰσί.
4. ἴστί.	deest.	ἴστί.
5. ἴσιν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἴσιν.
6. ἴσιν.	deest.	εἰσίν.
7. τμήματι.	deest.	τμήματι
8. λοιπὸν ἄρα BKT τμήμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα BKT περιφέρειά ἴσιν ἴση τῇ ΕΔΖ περιφέρειᾳ.	deest.	λοιπὸν ἄρα BKT τμήμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα BKT περιφέρεια τῇ ΕΔΖ περιφέρειᾳ ἴσιν ἴση

PROPOSITIO XXVII.

1. ἐπὶ	<i>Id.</i> <i>a, c, d, e, f, g,</i> <i>h, l, m.</i>	καὶ ἐπὶ <i>b, k.</i>
2. γωνία	<i>Id.</i> <i>a.</i>	deest. <i>b, c, d, e, f, g, h, k, l, m.</i>
3. ἴσιν ἴση.	<i>Id.</i> <i>a, k.</i>	deest. <i>b, c, d, e, f, g, h, l, m.</i>
4. Εἰ γὰρ ἄνιστος ἴσιν ἡ ὑπὸ BHT τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἴσται.	<i>Id.</i> <i>a.</i>	Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ BHT ἴση ἴσιν τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φαίρον ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ BHT τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἴσιν. Εἰ δὲ οὐ μία, αὐτῶν μείζων ἴσιν. <i>b, c, d, e, f,</i> <i>g, h, k, l, m.</i>

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. αὐτοῖς	τοῖς κύκλοις.	αὐτοῖς.
2. τῇ ΔΘΕ ἰλάττονι.	τῇ ΔΘΕ.	ἴση τῇ ΔΘΕ ἰλάττονι.
3. ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ περι- ριφεία.	ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.	περιφέρεια ΑΗΒ τῇ ΔΘΕ περιφε- ρία.
4. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO XXIX.

1. ὑπὸ	deest.	ὑπὸ
2. εὐθεῖα	hoc verbum manu alienâ inter lineas exaratum est.	εὐθεῖα
3. καὶ ἴστω.	Id.	deest.
4. γωνίας ἴσας	Id.	ἴσας γωνίας

PROPOSITIO XXX.

1. τμήν.	Id.	τίμνην.
2. τμήν.	Id.	τίμνην.
3. βάσις ἄρα	Id.	καὶ βάσις
4. κατὰ τὸ Δ σημεῖον	Id.	deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. τμήματι	Id.	deest.
2. ὀρθῆς.	Id.	ἴσθιν ὀρθῆς.
3. ἡ ὑπὸ ΒΑΓ	Id.	deest.
4. ἡ ὑπὸ ΑΔΓ	Id.	deest.
5. καὶ	deest.	καὶ
6. ΒΑΓ.	Id.	ΒΑΓ γωνία.
7. γωνία μείζων ὀρθῆς ἴσθι, καὶ ἴσθιν ἐν τῇ ΑΔΓ	Id.	μείζων ἴσθιν ὀρθῆς, καὶ ἴσθιν ἐν τῇ
8. λίγω	Id.	λίγω δὲ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

9. τι	<i>Id.</i>	deest.
10. τι	<i>Id.</i>	deest.
11. γωνία	deest.	γωνία
12. περιεχομένη	<i>Id.</i>	deest.

A L I T E R.

13. Η	<i>Id.</i>	deest.

C O R O L L A R I U M.

14. Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ᾗ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία. διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Οταν δὲ ἰφίξῃς ἴσαι ᾄσιν, ὀρθαὶ εἰσιν.	<i>Id.</i> hoc collorarium eā- dem manu in mar- gine exaratum est.	Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾗ, ὀρθή ἐστι· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἰφίξῃς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Οταν δὲ αἱ ἰφίξῃς γωνίαι ἴσαι ᾄσιν, ὀρθαὶ εἰσιν.

PROPOSITIO XXXII.

1. εἰς	<i>Id.</i>	ἐπὶ
2. εἰς	<i>Id.</i>	ἐπὶ
3. γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισ- ταμένη γωνία.	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι.
4. ἀπὸ δὲ τῆς	<i>Id.</i>	σημείον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β
5. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
6. Η ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.	<i>Id.</i>	deest.
7. Ἐῖσι δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι·	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXXIII.

1. τῷ Γ	<i>Id.</i>	τῷ Γ γωνία.
2. δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία . . .	<i>Id.</i>	γὰρ πρὸς τῷ Γ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ὥς	καὶ ὥς	ὥς
4. καὶ	deest.	καὶ
5. Καὶ	deest.	Καὶ
6. γωνία	Id.	deest.
7. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ABE . .	Id.	Καὶ ἐπὶ τοῦ ABE κύκλου
8. εἰς	Id.	ἐπὶ
9. τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου . .	ἐναλλάξ τοῦ κύκλου . .	τῷ ἐναλλὰξ
10. ἴστω πάλιν	Id.	πάλιν ἴστω
11. γωνία	Id.	deest.
12. ἴση ἴσθιν ἡ μὲν ὑπὸ BAC γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμηματί,	Id.	ἴσθιν ἡ μὲν ὑπὸ BAC τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι ἴση,
13. καὶ ἡ ὑπὸ BAC τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἴστί.	Id.	ἡ ὑπὸ BAC τῇ πρὸς τῷ Γ ἴσθιν ἴση.
14. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἴστί τῇ πρὸς τῷ Γ	Id.	deest.
15. ἡ	Id.	deest.
16. ἐρχίσθω ὁ AEB. . . .	Id.	οἰχίσθω ὥς AEB.
20. ἥκται	ἴσθιν	ἥκται
21. ἄρα δοθείσης	Id.	δοθείσης ἄρα

PROPOSITIO XXXIV.

1. δοθείση γωνία εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ.	Id.	πρὸς τὸ Δ γωνία.
2. κύκλου	deest.	κύκλου
3. ἴση ἴστί τῇ πρὸς τῷ Δ γωνία.	Id.	γωνία ἴση ἴστί τῇ πρὸς τῷ Δ.

PROPOSITIO XXXV.

1. τῶν	deest.	τῶν
2. Μὴ ἴστωσαν δὲ αἱ ΑΓ, ΔΒ .	Id.	Ἐστωσαν δὲ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ
3. κύκλου, ...	Id.	deest.
4. τέμνει	Id.	τεμεῖ
5. προσκείσθω κοινὸν	Id.	κοινὸν προσκείσθω
7. ἰδείχθη δὲ ὅτι	ωστί	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. περιεχόμενον ὀρθογώνιον . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ ἄρα ΔΓΑ	Id.	ἡ ΔΓΑ
3. ΑΔ, ΔΓ	ΑΔΓ	ΑΔ, ΔΓ
4. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ζ ἴσα ἔστι τὰ	Id.	ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς
5. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. σημείον, ...	Id.	deest.
7. ἴσον	Id.	ἴσα
8. Αλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ	Id.	Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον
ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ		τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ
ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ		ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ,
τῶν ΕΖ, ΖΕ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ		ΖΕ ἴσον ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ·
τῆς ΕΔ·		

PROPOSITIO XXXVII.

1. τῆς	Id.	deest.
2. ΑΔ, ΔΓ	ΑΔΓ	ΑΔ, ΔΓ
3. τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,	Id.	τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου,
καὶ ἔστω τὸ Ζ,		
4. Ἦν δὲ καὶ	Id.	ὑποκειται δὲ
5. ἔστι	Id.	deest.
linea 10 paginæ 194.		
6. καὶ τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα	Id.	deest.
ἰσάπτεται		

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
β'. (1) δὲ	deest.	δὲ
δ'. (2) τοῦ περιγραφομένου ἐφάπ- νται τῆς τοῦ κύκλου περιφε- ρείας.	Id.	τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπνται.
ι. (3) εἰς σχῆμα ὁμοίως . . .	Id.	ὁμοίως εἰς σχῆμα

PROPOSITIO I.

1. δὲ	Id.	δὲ οὐ
2. κείσθω	Id.	καὶ κείσθω
3. μὲν	deest.	μὲν
4. τῇ Δ ἢ ΓΕ	Id.	ἢ Δ τῇ ΓΕ
5. εὐθεία, ...	Id.	εὐθεία, μὴ μίξονι οὐσὴ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου

PROPOSITIO II.

1. πρὸς	Id.	πρὸς μὲν
2. πάλιν, πρὸς	Id.	πρὸς δὲ
3. ΖΔΕ	Id.	ΖΔΕ γωνία
4. ἡ ΘΑ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ ΑΓ.	Id.	ἡ ΘΑΗ, ὅπὸ δὲ τῆς ἀφῆς διῆκται τις ἡ ΑΓ.
5. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγράπται εἰς τὸν ΑΒ κύκλον.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

1. ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκατέρᾳ τὰ μέρη κατὰ σημεῖα, καὶ	Id.	ἐφ' ἑκατέρᾳ τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα

3. καὶ εἶσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ MAK, *Id.* τετρ. πλευρον ὧν αἱ ὑπὸ KAM,
KBM γωνίαι. KBM γωνίαι δύο ὀρθαί εἰσιν.
4. λοιπῇ deest. λοιπῇ

PROPOSITIO IV.

1. ΔΒΓ, ... *Id.* ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέμνεται ἡ ὑπὸ
ΑΒΓ,
2. ταῖς *Id.* deest.
3. τὴν *Id.* deest.
4. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθείαι αἱ ΔΕ, *Id.* deest.
ΔΖ, ΔΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
5. καὶ *Id.* μὲν
6. ἰδείχθη *Id.* deest.
7. ὁ deest. ο
8. εἰς *Id.* ἐπὶ
9. Εγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ. *Id.* deest.
10. ὁ deest. ο

PROPOSITIO V.

1. εὐθεῖα *Id.* deest.
2. οὖν ἰσὸς πρότερον *Id.* πρότερον ἰσὸς
3. ἰστὶν ἴση. *Id.* ἴση ἰστὶν.
4. ἰστὶν *Id.* deest.
5. Περιγραφέσθω *Id.* Καὶ περιγραφέσθω
6. ἰστὶν *Id.* deest.
7. πάλιν deest. πάλιν
8. Καὶ γεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ. deest. concordat cum. edit. Paris.

COROLLARIUM.

9. εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ *Id.* ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ
ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ
τυγχάνουσα ὀρθὴ ἐστίν· ἢ τε δὲ
κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τρι-
γώνου πίπτει, ... ἰσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς ΒΓ
εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, *b*,
c, d, e, f, g, h, k, l, m, n,

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

10. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
11. συμπιεσθῶνται	πιεσθῶνται	συμπιεσθῶνται
12. τῆς ΒΓ	τῆς ΒΓ. Ὁπερ ἔδει ποιῆσαι.	τῆς ΒΓ.

PROPOSITIO VI.

1. τὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. δύο	<i>Id.</i>	deest.
3. διὰ	<i>Id.</i>	κατὰ
4. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
5. δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον	ΑΒΓΔ κύκλον	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα δοθέντα	<i>Id.</i>	δοθέντα ἄρα

PROPOSITIO VII.

1. δευτέρους κύκλος ὁ	<i>Id.</i>	ὁ δευτέρους κύκλος
2. δὴ	<i>Id.</i>	δε
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἵστί παράλληλος.	<i>Id.</i>	παράλληλός ἵστιν.
5. Ὡστε καὶ εἰ ΗΘ τῇ ΖΚ ἵστί παράλληλος.	<i>Id.</i>	deest.
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ΖΚ	<i>Id.</i>	ΖΚ ἵστιν ἴση.
8. καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρω τῶν ΗΖ, ΘΚ ἵστιν ἴση.	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
10. τετράπλευρον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. εἰσί.	deest.	εἰσί.
2. ἴσαι εἰσὶν, ...	deest.	ἴσαι εἰσὶν,
3. εἰσίν.	deest.	εἰσίν.
4. ἰδείχθη	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

5. μὴν	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄρα τὸ δοθὲν	<i>Id.</i>	τὸ δοθὲν ἄρα

PROPOSITIO IX.

1. ἴση	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἴση.
2. γωνία ἄρα ἴση ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ.	<i>Id.</i>	ἡ ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση.

PROPOSITIO X.

1. καὶ κέντρον τῷ Α, καὶ δια- στήματι τῷ ΑΒ	<i>Id.</i>	κέντρον μὴν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ
2. τῶν	deest.	τῶν
3. Καὶ ἐπεὶ ἰφάπτεται μὴν ἡ ΒΔ,	<i>Id.</i>	Επεὶ οὖν ἰφάπτεται ἡ ΒΔ,
4. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση	<i>Id.</i>	καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση
5. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
6. εἴσι διπλασίους.	<i>Id.</i>	διπλασίους εἰσίν.
7. καὶ	deest.	καὶ
8. τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ.	<i>Id.</i>	διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ.

PROPOSITIO XI.

1. Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν	λοιπῶν	concordat cum edit. Paris.
3. ἱκατίρας	<i>Id.</i>	deest.
4. ΔΕ, ΕΑ	ΓΕ, ΔΕ, ΕΑ	ΔΕ, ΕΑ
5. ἐστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἐστὶ,
6. ἐστὶν ἴση.	<i>Id.</i>	ἴση ἐστί.
7. ἄρα γωνία	<i>Id.</i>	γωνία ἄρα
8. ἐστὶν ἴση, ...	<i>Id.</i>	ἴση ἐστί,

PROPOSITIO XII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσον ἰσὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ .	<i>Id.</i>	τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον.
3. Ὡστε τὰ	<i>Id.</i>	τὰ ἄρα
4. λοιπῶ	deest.	λοιπῶ
5. ΓΚ τῇ ΒΚ	<i>Id.</i>	ΒΚ τῇ ΓΚ.
6. ἴσιν ἴση γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴσιν ἴση.	ἴση γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἴσιν, ἴση ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ.	concordat cum edit. Paris.
7. διπλῇ	deest.	διπλῇ
8. ἴσιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΔ ἴση.	<i>Id.</i>	deest.
9. ἰσὶ	deest.	ἰσὶ
10. ἱκατέραν ἱκατέρᾳ, ...	desunt.	concordat cum edit. Paris.
11. Καὶ ἴσιν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση.	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ Γ, καὶ ἴσιν διπλῇ ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῇς ΒΚ.

PROPOSITIO XIII.

1. ἰσόπλευρόν	<i>Id.</i>	ὅ ἴσιν ἰσόπλευρόν
2. ὑπὸ	<i>Id.</i>	ὑφ'
3. ἰστί	deest.	ἰστί.
4. ἴσιν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἰστί,
5. ἴσονται, ...	<i>Id.</i>	ἴσιν
6. διπλῇ ἴσιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ,	<i>Id.</i>	ἴσιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ διπλῇ,
7. ὀρθῇ	deest.	ὀρθῇ
8. ταῖς	deest.	ταῖς
9. κύκλος	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ὅ	<i>Id.</i>	ὅπερ
2. αἱ	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. καὶ διαστήματι : *Id.* διαστήματι δὲ
 4. περιγεγραμμένος *Id.* περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ
 πεντάγωνον, ὃ ἴστιν ἰσόπλευρον
 καὶ ἰσογώνιον.
 5. ἄρα τὸ δοθὲν *Id.* τὸ δοθὲν ἄρα

PROPOSITIO XV.

1. ἴση ἴστιν *Id.* ἴστιν ἴση
 2. αἱ *Id.* deest.
 3. ΖΑΒΓΔ *Id.* ΖΑΒΓΔ περιφέρειά
 4. ΕΔΓΒΑ *Id.* ΕΔΓΒΑ περιφέρειά
 5. περιφέρειας *Id.* deest.
 6. δὴ *Id.* δὲ
 7. ἴστί *Id.* deest.

COROLLARIUM.

8. Καὶ ἰὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ο ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ concordat cum edit. Paris.
 Ε, Ζ σημείων πενταγώνου ἰὰν διὰ
 τῶν κατὰ κύκλου δια-
 ρεσίων
 9. τε καὶ περιγράψωμεν. . . . Οπερ ἔδει ποιῆσαι. . . concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. Εγγεγράφω *Id.* Γεγράφω
 2. ἴσται *Id.* ἴστί
 3. εὐθείας, ... deest. . . . εὐθείας,
 4. εἰρημένους, ... δείξιον εἰρημένους
 5. ὃ ἴστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσο- deest. . . . concordat cum edit. Paris.
 γώνιον,
 6. deest. . . . Οπερ ἔδει ποιῆσαι. . . deest.

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
γ'. (1) πρὸς ἄλληλα	deest.	concordat cum edit. Paris.
δ'. (2) Ἀναλογία δὲ, ἡ τῶν λόγων ταυτότης.	<i>Id. a. c.</i>	hæc definitio, quæ est octava in edit. Oxoniæ, ita se habet: Ἀναλογία δὲ ἐστὶν ἡ τῶν ὁμοιότης. <i>b.</i>
ε'. (3) ὑπερίχῃ, ἡ ἅμα ἴσα ἤ, ἡ ἅμα ἐλλείπῃ	<i>Id.</i>	ἐλλείπῃ, ἡ ἅμα ἴσα ἤ, ἡ ἅμα ὑπερίχῃ
ζ'. (4) λόγον μεγέθους	<i>Id.</i>	μεγέθῃ λόγον,
θ'. (5) ἐλαχίστη	<i>Id.</i>	ἐλαχίστοις
ια'. (6) τὸ	deest.	τὸ
(7) ὁμοίως ὥς	<i>Id.</i>	ἐν πλείον, ὥς
ιβ'. (8) λίγεται, ...	<i>Id.</i>	λίγεται εἶναι,
ισ'. (9) δὲ	deest.	δὲ
ιη'. (10) αὐτοῖς ἴσων	<i>Id.</i>	ἴσων αὐτοῖς
ιθ'. (11) Τεταγμένη ἀναλογία ἐσ- τίν, ὅταν ἤ ὥς ἡλούμενον πρὸς ἐπόμενον οὕτως ἡλούμενον πρὸς τὸ ἐπόμενον, ἢ δὲ καὶ ὥς ἐπό- μενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἐπό- μενον πρὸς ἄλλο τι.	deest. <i>a. c.</i>	concordat cum edit. Paris. <i>b.</i>
κ'. (12) αὐτοῖς ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσων αὐτοῖς
(13) μετέθισιν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO I.

1. μεγέθων	<i>Id.</i>	deest.
2. ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθῃ	<i>Id.</i>	μεγέθῃ ἐστὶν ἐν τῷ AB
3. AH, HB τῷ πλήθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. <i>Id.</i>	<i>Id.</i>	ΓΘ, ΘΔ τῷ πλήθει AH, HB

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΑΗ', ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ·
- ἴσον ἄρα τὸ ΑΗ τῷ Ε, καὶ τὰ ΑΗ, ΓΘ τοῖς Ε, Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε, καὶ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ·
- concordat cum edit. Paris. his tantum exceptis : in edit. Paris. legitur ἴσον ἐστὶ, in edit. vero Oxoniæ legitur ἐστὶν ἴσον.

PROPOSITIO II.

1. μεγέθη deest. μεγέθη
2. ἄρα Id. ἄρα τὸ

PROPOSITIO III.

1. ἴσάνεις ἐστὶ πολλαπλάσιον. ἴσαπλάσιον concordat cum edit. Paris.
2. τοσαῦτα Id. τοσαῦτα δὴ
3. μὲν Id. deest.
4. δὴ Id. δὴ

PROPOSITIO IV.

1. ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, . . . Id. ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η ἐστὶν,
2. ἀλλὰ ἔτυχεν Id. deest.
3. ἑλάττων. Καὶ ἐστὶ ἑλάττων. Καὶ ἐπὶ ὑπερί-
χει τὸ Κ τοῦ Μ, καὶ τὸ
Λ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον,
ἴσον, καὶ εἰ ἑλάττων,
ἑλάττων. Καὶ ἐστὶ

COROLLARIUM.

4. ὅτι deest. ἐτι

PROPOSITIO V.

1. καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἴσάνεις ἄρα Id. deest.
ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ
ΓΖ,
2. ἴσται Id. ὅτι

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. τῷ Z ἴσον	ἴσον τῷ Z	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	deest.	καὶ
3. τῷ Z τὸ ΚΓ	Id.	τὸ ΚΓ τῷ Z
4. ἰστίν ἴσον.	Id.	ἴσον ἰστίν.
5. εἰ	Id.	ὅτε

PROPOSITIO VII.

1. τι	Id.	deest.
2. μὲν	Id.	deest.
3. τοῦ Γ πολλαπλάσιον.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἰστίν.	Id.	deest.
5. δὴ	deest.	δὴ
6. δὴ	Id.	deest.
7. τὸ Z	Id.	deest.
8. deest.	Πέρισμα. Εκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι εἰάν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἀναπάλιν ἀνάλογον ἴσ- ται. Οπερ ἴδει διέξαι.	deest in omnibus aliis codi- cibus.

PROPOSITIO VIII.

1. AB, ...	Id.	AB τοῦ Γ
2. καὶ ἴστω	Id.	ὥς τοῦ τὸ γινόμενον μιῶζον ἴσται τοῦ Δ. Καὶ ἴσται
3. οὗ	Id.	ἄν
4. τὸ	Id.	deest.
5. ἐπειδὴ περ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλά- σιόν ἐστι, συναμφοτέρα δὲ τὰ Δ, Μ τοῦ Δ ἰστὶ τετραπλάσια, ἰστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετρα- πλάσιον· συναμφοτέρα ἄρα τὰ Μ, Δ τῷ Ν ἴσα ἰστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ μιῶζον ἰστίν·	Id.	desunt.
6. τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ	Id.	τοῦ δὲ ΖΘ

PROPOSITIO IX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

7. τοῦ ΕΒ μείζον ἔστω . . .	<i>Id.</i>	μείζων ἔστω τοῦ ΕΒ·
8. μὴ ἔλαττον εἶναι, . . .	<i>Id.</i>	οὐκ ἔστιν ἔλαττον,
9. ὡσαύτως	<i>Id.</i>	ὡσαύτως
10. ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις . . .	ἐκεῖνα ἴσα.	ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις

PROPOSITIO X.

1. τὸν	deest.	τὸν
2. τὸν ἑλάττονα εἶχε λόγον . .	ἑλάττονα εἶχε λόγον . .	τὸν ἑλάττονα λόγον εἶχε
3. ὅτι	deest.	ὅτι

PROPOSITIO XI.

1. λόγοι	λόγῳ	λόγοι
1. μὲν	deest.	μὲν
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἀλλὰ ἃ ἔτυχεν ἰσάκεις πολλα- πλάσια τὰ Α, Μ·		ἰσάκεις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχεν τὰ Α, Μ·
4. ἴσον, ἴσον·	ἴσον ἔστιν, ἴσον· . . .	concordat cum edit. Paris.
5. ἑλάττον, ἑλάττον·	ἑλλείπει, ἑλλείπει· . . .	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XII.

1. τὰ Η, Θ, Κ, τῶν Α, Μ, Ν·	τὸ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν·	concordat cum edit. Paris.
2. ἴσα· καὶ εἰ ἑλάττον, ἑλάττονα. σον.	ἴσον· καὶ εἰ ἑλάττον, ἑλάτ- τον.	concordat cum edit. Paris.
3. ἂν	<i>Id.</i>	ἐάν·
4. πολλαπλάσια, ...	πολλαπλάσιον, ...	concordat cum edit. Paris.
5. τὰ	τὰ	τὸ

PROPOSITIO XIII.

1. ἥπερ	ἡ	ἥπερ
2. ἥπερ	ἡ	ἥπερ
3. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
4. ἥπερ	<i>Id.</i>	ἥπερ
5. πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.	τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον deest. concordat cum edit. Paris.
 ἔχει ἥπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ·
7. τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερ- Id. ὑπερέχει τοῦ Δ πολλαπλασίου,
 ἔχει,
8. μὴ Id. οὐχ

PROPOSITIO XIV.

1. μείζον ἔστι τὸ Α τοῦ Γ, . . . Id. τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἔστιν,
 2. μέγεθος deest. μέγεθος
 3. καὶ Id. deest.

PROPOSITIO XV.

1. μέγεθος deest. μέγεθος

PROPOSITIO XVI.

1. ἀνάλογον ἔστιν, . . . ἔστιν ἀνάλογον ἔσται,
 2. ληφθέντα κατάλληλα . . . deest. concordat cum edit. Paris.
 3. καὶ εἰ Id. καὶ
 4. καὶ εἰ Id. καὶ

PROPOSITIO XVII.

1. ἔστι Id. deest.
 2. τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΑΜ τὸ ΑΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ concordat cum edit. Paris.
 τοῦ ΓΖ. ΗΚ τοῦ ΑΒ.
 3. ἀλλὰ ἂν ἔτυχεν deest. concordat cum edit. Paris.
 4. τὰ Id. διὰ τὰ

PROPOSITIO XVIII.

1. τὸ Id. deest.

PROPOSITIO XIX.

1. τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ Id. ἕλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ
 2. ἄρα deest. ἄρα
 3. ἰναλλάξ Id. ἰναλλάξ ἄρα ἔστιν

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX. 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. Καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Εδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

concordat cum edit.
Oxonie.

Καὶ ἐπεὶ εἰδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. Εδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ ἔστιν ἀναστρέφαντι.

PROPOSITIO XX.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ ἴαν	<i>Id.</i>	κᾶν
3. καὶ ἴαν	<i>Id.</i>	κᾶν
4. τι	<i>Id.</i>	ὃ εἴτυχε
5. οὕτως	deest.	οὕτως
6. δὲ τὸ Γ πρὸς τὴν Β	δὲ Γ πρὸς Β	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον . .	τὸ μείζονα λόγον ἔχον . .	τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκείνο

PROPOSITIO XXI.

1. μεγέθη	μεγέθη ἀνάλογον . . .	μεγέθη
2. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
3. ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ·	<i>Id.</i>	ἴσον· δηλονότι κᾶν ἴσον ἢ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ.

PROPOSITIO XXII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.	ἴσται	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ Ζ.	Καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἴσται ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ.	deest.

PROPOSITIO XXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

Ι. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τό Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, Κ τῶν Β, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλασία· τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, Μ τῶν Γ, Ε ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.

Id. a, c, d. . . .

καὶ εἴλησται τῶν Β, Δ ἰσάκεις πολλαπλασία τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα ἀΐτυχιν ἰσάκεις πολλαπλασία τὸ Α, Μ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Α οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. *b.*

PROPOSITIO XXIV.

1. ἔχη.	ἔχει.	ἔχη
2. μὲν.	<i>Id.</i>	deest.
3. πρῶτον.	<i>Id.</i>	τὸ πρῶτον
4. ἐστὶν ἄρα ὡς.	<i>Id.</i>	ὡς ἄρα

PROPOSITIO XXV.

1. δύο.	τὰ δύο.	δύο
2. μὲν.	<i>Id.</i>	deest.
3. οὖν	deest	οὖν
4. τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ·	<i>Id.</i>	τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ·
5. ἄνισα ἐστίν·	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἄνισα·
6. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

ε'. (1) λόγων.	<i>Id</i>	ὅροι
γ'. (2) ἡ.	deest	ἡ
ε'. (3) deest.	hæc definitio, quæ in λόγος ἐκ λόγων συγχεῖσθαι λέγεται, Euclide nullum habet usum, in marginē tantum exarata est. ὅταν αἱ τῶν λόγων πληκτότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθῶσι, τριῶσι τινάς. <i>a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n.</i>	

PROPOSITIO I.

1. ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἑπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἀγομένην· τὸ ΑΓ.	concordat cum edit. Paris.
2. ὁσαιδηποτοῦν.	deest concordat cum edit. Paris.
3. ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἕλαττων, ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἕλαττον, ἕλαττον·	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ μὲν	μὲν ἡ ἡ μὲν
5. τρίγωνον, ...	<i>Id.</i> deest.
6. τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον	<i>Id.</i> πρὸς τὸ ΑΓΔ
7. παραλληλόγραμμον.	<i>Id.</i> deest.

PROPOSITIO II.

1. εὐθεῖα, ...	<i>Id.</i> εὐθεῖα παράλληλος
2. πλευράν.	<i>Id.</i> πλευράν παράλληλος.
3. δὴ.	<i>Id.</i> ἄρα
4. τρίγωνον.	deest. τρίγωνον
5. δὴ.	δὴ καὶ δὴ
6. τρίγωνον, ...	τρίγωνον deest.
7. τρίγωνον·	<i>Id.</i> deest.
8. τρίγωνον.	<i>Id.</i> deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

9. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
10. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
11. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

1. τῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐνέπεισιν	<i>Id.</i>	ἐμπίπτωκεν
4. ἄρα γωνία	<i>Id.</i>	deest.
5. ὡς ἄρα	<i>Id.</i>	ἴστιν ἄρα
6. ὡς	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
8. ἥκται	<i>Id.</i>	ἥται παράλληλος
9. ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἴστιν ἴση	<i>Id.</i> <i>Id.</i>	ἴστιν ἴση, ἴση δὲ καὶ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ
10. γωνία	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IV.

1. πλευραὶ	deest	πλευραὶ
2. Εστω	<i>Id.</i>	Εστωσαν
3. μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ	<i>Id.</i>	ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ
4. πλευραὶ	deest	πλευραὶ.
5. ὑπὸ	<i>Id.</i>	περὶ
6. ὑπὸ	<i>Id.</i>	περὶ
7. ἄρα	deest	ἄρα
8. τῶν πλευρῶν	desunt	concordat cum edit. Paris.
9. ἐναλλάξ ἄρα	καὶ ἐναλλάξ	concordat cum edit. Paris.
10. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ . .	Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ μὲν	Επεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ
11. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. linea 4 paginæ 302, πρὸς τῷ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ Η	<i>Id.</i>	ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ
2. ΕΗΖ	<i>Id.</i>	ΕΑΖ τριγώνω
3. οὕτως	deest	οὕτως
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴσιν	deest	ἴσιν
6. ἴσιν ἴση	deest	ἴσιν ἴση,
7. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
8. Δ	<i>Id.</i>	Δ ἴσιν ἴση

PROPOSITIO VI.

1. ἴση	<i>Id.</i>	γωνία ἴση
2. γωνία	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴση	<i>Id.</i>	ἴσιν ἴση
4. ἴσονται, ...	<i>Id.</i>	ἴσονται ἑκατέρα ἑκατέρα,
5. ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. . . .	<i>Id.</i>	πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε.

PROPOSITIO VII.

1. τὰς	deest.	τὰς
2. τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς πλευ- ράς ἀνάλογον,	<i>Id.</i>	τὰς πλευράς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ,
3. γωνία	deest.	γωνία
4. ὑπόκειται οὕτως	<i>Id.</i>	οὕτως ὑπόκειται
5. καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ,	deest	concordat cum edit. Paris.
6. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
7. πρὸς τῷ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῷ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΗ
8. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
9. ὀρθῆς	<i>Id.</i>	ὀρθῆς καὶ
10. ἰσωγώνιον ἴστι.	<i>Id.</i>	ἴστιν ἰσωγώνιον
11. δὲ	<i>Id.</i>	δὲ

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. γωνία	deest.	γωνία
2. τῇ πρὸς τῷ Γ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	deest.	ἐστὶ
4. τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον·	<i>Id</i>	τὸ ΑΔΓ τριγώνον ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ
5. ὁμοίον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τρί- γώνῳ.	<i>Id</i>	ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶν.
6. γωνίαν, ...	<i>Id</i>	γωνίαν,
7. ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ·	πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς·	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

8. ἐστὶν·	Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. . .	ἐστὶν·

PROPOSITIO IX.

1. καὶ	deest.	καὶ
2. αὐτῇ ἥχθω ἢ ΔΖ.	<i>Id</i>	ἥχθω τῇ ΒΓ ἢ ΔΖ.

PROPOSITIO X.

1. δοθείση.	<i>Id</i>	δοθείση εὐθείᾳ
2. ΑΓ, ...	<i>Id</i> a, c, d.	δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἀτμῶν τῇ ΑΓ τετ- μημένη ὁμοίως τεμεῖν. Εστω τετμημένη ἡ ΑΓ b.

PROPOSITIO XI.

1. αὶ	<i>Id</i>	δύο εὐθειᾶς αὶ
2. προσειρεῖν.	εὐρεῖν.	προσσειρεῖν.
3. αὐτῇ.	<i>Id</i>	αὐτῇ

PROPOSITIO XII.

1. Γ.	<i>Id</i>	Γ εὐθειῶν
2. τυχοῦσαν.	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν πλευρῶν.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἰσογώνιον.	<i>Id.</i>	μίαν μιᾷ ἴσῃ ἐχόντων γωνίαν
2. ἰσογώνιον παραλληλογράμμων, ...	<i>Id.</i>	παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσῃ ἐχόντων γωνίαν,
3. το καὶ ἰσογώνια.	<i>Id.</i>	deest
4. ΔΒ, ΒΓ ἄρα.	<i>Id.</i>	ἄρα ΑΒ, ΒΓ
5. ἀντιπαραπρόκειται αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. παραλληλόγραμμον.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XV.

1. τριγώνων, ...	<i>Id.</i>	deest.
2. αἱ.	deest.	αἱ
3. τριγώνου.	<i>Id.</i>	deest.
4. ΕΑΔ.	<i>Id.</i>	ΕΑΔ τριγώνου
5. ἄρα τριγώνων.	<i>Id.</i>	τριγώνων ἄρα

PROPOSITIO XVI.

1. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ εἰ
2. αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ	<i>Id.</i>	τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἀνάλογον,
3. γὰρ.	deest.	γὰρ
4. ἄρα παραλληλογράμμων	<i>Id.</i>	παραλληλογράμμων ἄρα
5. αἱ.	deest.	αἱ
6. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε	ἴση γὰρ ἡ Ε τῇ ΓΘ	περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε
7. τῶν	<i>Id.</i>	deest.
8. ἴστιν ἡ ΑΗ τῇ Ζ	<i>Id.</i>	τῇ Ζ ἡ ΑΗ
9. ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. καὶ ἴστιν.	<i>Id.</i>	εἴσιν

PROPOSITIO XVII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ εἰ
2. ἀπὸ	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῆς μέσης

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

3. οὕτως	deest.	οὕτως
4. τὸ ἀπὸ τῆς B ἐστίν, ...	<i>Id</i>	τῷ ἀπὸ τῆς B ἐστὶν ἴσον,
5. τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἐστίν, ...	<i>Id</i>	τῷ ἀπὸ τῶν B, Δ

PROPOSITIO XVIII.

1. ἴση ἢ ὑπὸ HAB, ...	<i>Id</i>	ἢ ὑπὸ HAB ἴση,
2. ἴση.	<i>Id</i>	deest.
3. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ
4. τε.	<i>Id</i>	deest.
5. αὐτῷ.	αὐτῶν.	αὐτῷ

PROPOSITIO XIX.

1. τῷ.	<i>Id</i>	τὸ
2. ἄρα τριγώνων.	<i>Id</i>	τριγώνων ἄρα
3. τριγώνων	<i>Id</i>	deest.
4. ἔχειν λίγεται.	ἔχει.	concordat cum edit. Paris.
5. τριγώνω.	<i>Id</i>	deest.

COROLLARIUM.

7. ἴαν	<i>Id</i>	καὶ
8. τρίγωνον.	ἴδος.	concordat cum edit. Paris.
9. ΔΕΖ	ΔΕΖ. Οπερ ἴδιαι δειξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

1. τὸ.	<i>Id</i>	deest.
2. λοιπῇ	deest.	λοιπῇ
3. εἶσιν	<i>Id</i>	deest.
4. ἔτι τὸ ΕΒΓ τριγώνον τῷ ΔΗΘ τριγώνω.	<i>Id</i>	deest.
5. γωνία	<i>Id</i>	deest.
6. ἐδείχθη	ἴσιν.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴση ἐστίν	<i>Id</i>	ἴσιν ἴση
8. μὲν	<i>Id</i>	deest.

9. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
10. τὸ	deest	τὸ
11. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
12. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
13. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
14. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM I.

15. δὴ	δὲ	δὴ
16. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
17. πλευρῶν	πλευρῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM II.

18. καὶ	ἢ	καὶ
19. πλευρὰν, ...	<i>Id.</i>	deest.

ALITER.

20. τρίγωνον.	<i>Id.</i>	deest.
21. deest.	deest	καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἱπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δεῖξει.

Nota. In demonstratione propositionis XX, codicibus *a, c*, articulus τὴν non ponitur ante litteras figuram designantes, ante quas poni solet.

PROPOSITIO XXI.

1. ὁμοίον ἴστι	<i>Id.</i>	ἴστιν ὁμοιον
2. deest.	deest	ὥστε καὶ τὸ A τῷ B ἰσογώνιον το ἴστί καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει.

PROPOSITIO XXII.

1. μὲν ἢ.	<i>Id.</i>	ἢ μὲν
2. τὸ	<i>Id.</i>	καὶ τὸ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

5. καὶ *Id.* deest.
 4. καὶ *Id.* deest.
 5. Εἰ γὰρ μὴ ἴσθιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, *Id.* Γεγονέντω γὰρ ἴσθιν
 6. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ *Id.* deest.
 οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.
 7. ΣΡ *Id.* καὶ ΣΡ
 8 ἡ *Id.* ἴσθιν ἡ

Λ Η Μ Μ Α.

9. ἡ καὶ ὅμοια, ... *Id.* καὶ ὅμοια ἡ

PROPOSITIO XXIII.

1. τοῦ τε ὄν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ deest. concordat cum edit. Paris.
 καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.
 2. τὴν Μ λόγος σύγκειται ἐκ τε Μ λόγος σύγκειται ἐκ τε concordat cum edit. Paris.
 τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Α· λόγου καὶ τοῦ τῆς Κ πρὸς Α· λόγου
 τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Μ· καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς Μ·
 3. παραλληλόγραμμον. *Id.* concordat cum edit. Paris.
 4. παραλληλόγραμμον. *Id.* deest.

PROPOSITIO XXIV.

1. αὐτοῦ deest. αὐτῶ
 2. τῶν πλειῶν deest. concordat cum edit. Paris.
 3. ἄρα deest. concordat cum edit. Paris.
 4. ἡ *Id.* deest.
 5. συντιθέντι *Id.* συντιθέντι ἄρα
 6. τὴν ΑΗ, καὶ ΑΗ concordat cum edit. Paris.
 7. τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ *Id.* τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα
 8. ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ΑΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. concordat cum edit. Paris.
 ὑπὸ ΗΖΔ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ,
 9. ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμ- ἄρα deest. et reliquum ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον
 μον τῷ ΕΗ παραλληλόγραμμῳ concordat cum edit. ἰσογώνιον ἵστί τῷ ΕΗ παραλλη-
 ἰσογώνιον ἵσθιν. Paris. λογρᾶμμῳ.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

10. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
11. καὶ	deest.	καὶ
12. παραλληλογράμμου . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. δι᾽	<i>Id.</i>	deest.
2. τε	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔστιν	deest.	ἔστιν
4. τρίγωνον	<i>Id.</i>	deest.
5. τῷ Δ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVI.

1. παραλληλογράμμου γάρ . .	<i>Id.</i>	γάρ παραλληλογράμμου
2. ἀφαιρήσθω	<i>Id.</i>	ἀφαιρήσθω
3. αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἢ ΑΘΓ, καὶ ἐκκληθῆτα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, ...	<i>Id. a.</i>	αὐτῶν ἡ διάμετρος ΑΘΓ, <i>b, c, d,</i> <i>e, f, g, h, k, l, m, n.</i>
4. αὐτὴν	deest.	deest. <i>b,</i>
5. ὁμοίον ἔστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ὅρα	deest.	ὅρα
8. οὐκ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVII.

1. αὐτὴν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, ...	τῆς ΑΒ ἀναγραφέντι . .	concordat cum edit. Paris.
3. παραλληλογράμμοις	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. προσκείσθω τὸ ΚΘ	δ: τὸ ΖΒ	concordat cum edit. Paris.
5. ἴση ἔστιν	<i>Id.</i>	ἴση ἔστιν
6. ἴσιν ἴσιν	<i>Id.</i>	ἴσιν ἴσιν
7. ὥστε	<i>Id.</i>	ὥστε καὶ
8. τῆς	<i>Id.</i>	τὴν
9. προσκείσθω	<i>Id.</i>	ἴστω

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ὁμοίῳ	<i>Id.</i>	ὁμοίῳ ἔντι
2. τῶν ἠλλειμματῶν τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δι' ὁμοιον ἠλλείπειν.	<i>Id.</i>	τοῦ τε ἠλλείμματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δι' ὁμοίων ἠλλείπειν παραλληλογράμμου.
3. ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁ- μοίων ὄντων τῶν ἠλλειμματῶν,	AB ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἠλλειμματί,	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ δὴ AH ἥτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μείζον αὐτοῦ, διὰ τὸν ἔρισμον.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν	deest.	ἐστὶν
5. οὖν	deest.	οὖν
6. μὲν τῇ Λ	τῇ AK μὲν	μὲν τῇ Λ
7. τῷ KM τὸ ΗΠ.	<i>Id.</i>	τὸ ΕΟ τῷ KM.
9. ἐστὶν ἴσον.	<i>Id.</i>	ἴσον ἐστὶν.

PROPOSITIO XXIX.

1. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
3. οὖν	deest.	οὖν
4. ἐστὶν ἴσος.	<i>Id.</i>	ἴσος ἐστὶ.
5. τῷ ΕΑ ἐστὶν ὁμοιον τὸ ΟΠ	<i>Id.</i>	τὸ ΕΛ ἐστὶν ὁμοιον τῷ ΟΠ.

PROPOSITIO XXX.

1. γὰρ	deest.	γὰρ
2. ΑΓ, τουτίστι τε ΑΒ, . . .	ΑΒ, ...	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ	<i>Id.</i>	deest.

A L I T E R.

4. ΑΒ	<i>Id.</i>	ΑΒ εὐθείαν

PROPOSITIO XXXI.

1. τε	<i>Id.</i>	deest.
2. τε	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἄρα	deest.	ἄρα
4. ἢ	Id.	deest.

A L I T E R.

5. ἐστὶ	Id.	ἐστὶ
6. ἄρα εἶδες	Id.	εἶδες ἄρα
7. εἶδες	Id.	deest.
8. τοῖς	deest.	τοῖς
9. Ὅπερ εἶδεν διῆξαι.	deest.	deest.

Hæc altera demonstratio in infimâ paginâ codicis 190 exarata est, vocabulis contractis.

PROPOSITIO XXXII.

1. αἱ	Id.	deest.
2. τὲ	Id.	deest.
3. ΑΛΛὰ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΓ, ΑΓΒ δυσὲν ἐρθεῖς ἴσαι εἰσὶ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἔτι δὲ καὶ αἱ τομῆς, ἃτε πρὸς τοῖς κέντροις συριστάμηναι,	hæc verba interlineas exarata sunt manu alienâ, et secunda pars demonstrationis, quæ ad sectores attinet, nec non corollarium, in margine manu alienâ exarata sunt, vocabulis contractis.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομὴς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομῆα.	desunt.	concordat cum edit. Paris.
3. κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαυδηποτεῦν	Id.	ὁσαυδηποτεῦν κατὰ τὸ ἐξῆς
4. ἴσαι ὁσαυδηποτεῦν	Id.	ὁσαυδηποτεῦν ἴσαι
5. Εἰ ὅρα	Id.	Καὶ εἰ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. γωνίας	deest.	γωνίας
7. διπλασιων	διπλασια	concordat cum edit. Paris.
8. ὑπὸ	deest.	ὑπὸ
9. ἐστὶ	Id.	deest.
10. κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερίᾳ	Id.	ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερίᾳ
11. ΒΞΓ		ΓΞΓ γωνία
12. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλή- λοις εἰσίν	desunt.	concordat cum edit. Paris.
13. Εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ περι- φέρεια τῇ ΕΝ περιφερίᾳ,	Id.	καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ,
14. ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΑ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἑλλεί- πει, ἑλλείπει.	desunt.	concordat cum edit. Paris.

LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
α. (1) ἦν	<i>Id.</i>	ἦν ο
ζ. (2) ὁ	<i>deest.</i>	ὁ
θ. (3) ἀριθμός	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>
ι. (4) Περιστάκεις δὲ ἄρτιός ἐστιν, ὁ ὑπὸ περισσεῦ ἀριθμοῦ μετρού- μενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν·	<i>Id. a, c, e, f, g,</i> <i>h, l, m, n,</i>	<i>deest. b, d.</i>
ια. (3) ἀριθμός ἐστιν, ...	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἀριθμός,
ιβ. (6) δὲ	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>
ιγ. (7) ὅσαι	ὅσαι	ὅσαι ἴσαι
(8) τοσαυτάκεις	<i>Id.</i>	τοσαύκεις
ιδ. (9) καλεῖται	ἰστί·	καλεῖται·
ιθ. (10) ὁ	<i>deest.</i>	ὁ
κ. (11) ἀριθμῶν ἴσων	<i>Id.</i>	ἴσων ἀριθμῶν

PROPOSITIO I.

1. Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἱκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δι' αὐτὸ τοῦ ἐλάσ- σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν	<i>Id.</i>	Εὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσως ἱκκειμένων ἀνθυφαιρουμένου δι' αὐτὸ τοῦ ἐλάσ- σονος ἀπὸ τοῦ μείζονος,
2. ἀνίσων	<i>deest.</i>	ἀνίσων
3. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρεῖ.
4. μετρήσει	<i>Id.</i>	μετρήσει ὁ Ε.
5. μετρήσει	<i>Id.</i>	μετρήσει ὁ Ε.
6. μετρήσει	μετρεῖ	μετρήσει.

PROPOSITIO II.

1. καὶ ἴστω ἐλάσσων ο ΓΔ· . .	<i>desunt.</i>	concordat cum edit. Paris.
2. AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	ΓΔ, AB
3. linea secunda et tertia pa- gine 389 μετρεῖ.	ΑΔΓ	μετρήσει.

COROLLARIUM.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. μετρήται μετρήσει. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι μετρήται.

PROPOSITIO III.

1. μέγιστον κοινὸν μέτρον, . .	<i>Id.</i>	κοινὸν μέγιστον μέτρον,
2. μετρήσει, ...	<i>Id.</i>	μετρήσας
3. μετρήσει μείζων τοῦ Δ' . .	<i>Id.</i>	τις μετρήσει μείζων ὥς τοῦ Δ'
4. δὴ	deest.	δὴ
5. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
6. μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρή
7. ποιῆσαι.	δείξαι.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

1. Hoc corollarium deest in codice a.

PROPOSITIO IV.

1. Οἱ Α, ΒΓ	<i>Id.</i>	οἱ Α, ΒΓ πρότερον
2. πρῶτερον οἱ Α, ΒΓ	<i>Id.</i>	desunt.
3. οἱ Α, ΒΓ	<i>Id.</i>	desunt.
4. δὴ ἐκίστη τῶν ΒΕ, ΕΖ, ΖΓ' .	<i>Id.</i>	δὴ ὁ Δ' ἐκατέρᾳ τῶν ΒΕ, ΕΖ.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ . . .	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ
3. καὶ οἱ ΒΗ, ΕΘ ἄρα Α, Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τῷ Α ἴσος ἐστίν, ὁ δὲ ΘΖ τῷ Δ' καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶν	<i>Id.</i>	ὁ ΒΗ ἄρα καὶ ΕΘ τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶ. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστίν, καὶ ὁ ΘΖ τῷ Δ' καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσὶν.
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ

PROPOSITIO VI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἰστὶ	deest.	ἰστὶ
3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	αὐτὸ τὸ
4. καὶ ὁ ΘΕ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἰστὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἰστὶ

PROPOSITIO VII.

1. ὁ	deest.	ὁ
2. ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἰστὶν·	hæc verba alienâ ma- nu in margine exa- rata sunt.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴσιν ἴσος.	<i>Id.</i>	ἴσος ἰστὶ.
4. ἰστὶ	deest.	ἰστὶ
5. τῷ	<i>Id.</i>	τοῦ
6. ὁ ἄρα μέρος ἰστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἰστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ·	desunt, ...	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VIII.

1. τῷ ΑΕ ἴσος	<i>Id.</i>	ἴσος τῷ ΑΕ
2. ἰστὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO IX.

1. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
2. λάσσω δὲ ἴστω ὁ Α τοῦ Δ·	desunt.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	καὶ
4. δὴ	<i>Id.</i>	δὴ

PROPOSITIO X.

1. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	desunt.
2. ἴστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσω·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	deest.
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ
5. τοῦ	<i>Id.</i>	τῷ
6. καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.	<i>Id.</i>	desunt.
7. εἰδείχθη	<i>Id.</i>	ἐστὶ
8. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIII.

1. τὰ αὐτὰ	<i>Id.</i>	desunt.

PROPOSITIO XIV.

1. γὰρ	deest.	γὰρ
2. καὶ	deest.	καὶ

PROPOSITIO XV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	deest.
2. δὲ	δὴ	δὲ
3. ἔσται	<i>Id.</i>	ἔστιν
4. ἀριθμὸν	deest.	ἀριθμὸν
5. ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν	ὁ Α τοῦ Δ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVII.

1. ἔξουσι λόγον	<i>Id.</i>	λόγον ἔχουσι
2. ἀριθμὸν	deest.	ἀριθμον
3. καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε·	desunt.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. τὸν αὐτὸν ἔχουσι *Id.* καὶ αὐτὸν ἔξουσι

PROPOSITIO XIX.

1. τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου πρώτου καὶ τετάρτου τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου
 2. ἀλλ' ὥς *Id.* ὥς δὲ
 3. ἄρα ὥσπερ ἄρα
 4. τῶν *Id.* τὸν

PROPOSITIO XX.

1. Hæc propositio in margine codicis 190, eadem manu exarata est, vocabulis contractis.

2. ἐὰν δὲ καὶ ἐὰν ἐὰν δὲ
 3. ὑπὸ *Id.* ἀπὸ
 4. ἴσονται. εἰσίν. ἴσονται
 5. ὑπὸ *Id.* ἀπὸ

PROPOSITIO XXI.

1. ἔχοντας *Id.* ἔχοντας αὐτοῖς
 2. ἴσοι οἱ ΓΗ, ΗΔ εἰσὶν ἀλλήλοις, *Id.* οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοις ἴσιν,
 3. ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, . . . *Id.* ἀλλήλοις ἴσοι,
 4. τὸ αὐτὸ *Id.* αὐτὸ τὸ

PROPOSITIO XXII.

1. Hæc propositio in margine codicis 190 alienâ manu exarata est, vocabulis contractis.

2. πληθεὶς οἱ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, *Id.* πληθεὶς σύμδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε. Ζ

PROPOSITIO XXIII.

1. μὴ *Id.* εἰσιν οἱ Β, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς,
 2. ἐλάσσονες *Id.* ἐλάχιστοι

PROPOSITIO XXVI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. πρῶτοι ἕστωσαν, ...	<i>Id.</i>	ἕστωσαν πρῶτοι,
2. τοὺς Γ, Δ	<i>Id.</i>	αὐτοὺς
3. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
4. τε	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXVII.

1. Καὶ	deest.	Καὶ

PROPOSITIO XXVIII.

1. πρὸς τὴν Γ πρῶτος ἔσται . .	<i>Id.</i>	πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ.
2. οἱ	<i>Id.</i>	ὁ

PROPOSITIO XXIX.

1. τινας, ...	<i>Id.</i>	τινα,
2. ἀριθμοὶ δύο	<i>Id.</i>	δύο ἀριθμοὶ
3. μὴν	<i>Id.</i>	deest.
4. οὖν	<i>Id.</i>	ἄρα

PROPOSITIO XXX.

1. τῶν	τὸν	τῶν
2. τοὺς ΓΑ, ΑΒ	<i>Id.</i>	αὐτοὺς
3. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ	<i>Id.</i>	desunt.
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν·		
4. πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· . .	<i>Id.</i>	πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι
5. οἱ ΑΒ, ΒΓ πρὸς ἀλλήλους, .	<i>Id.</i>	πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ,
6. τοὺς ΑΒ, ΒΓ	<i>Id.</i>	αὐτοὺς

PROPOSITIO XXXI.

1. καὶ ἔστω ὁ Γ.	<i>Id.</i>	καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γὰρ οὐκ ἔστο μονάς.

PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἀλλήλους *Id.* deest.
 2. ὁ Δ deest. ὁ Δ

PROPOSITIO XXXIII.

1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι *Id.* δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον
 2. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθῆναι *Id.* δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.
 3. ὁ deest. ο
 4. πρῶτος ἀριθμὸς, ... *Id.* desunt.

A L I T E R.

deest.

deest. *a, c, d, e, f,*
g, h, n.

Εστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω
 ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ
 μετρεῖται.

Επὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, με-
 τρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ. Καὶ
 ἴστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων
 αὐτὸν ἡ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός
 ἐστιν.

A
 —————
 B
 —————
 Γ
 —————

Εἰ γὰρ μὴ, σύνθετός ἐστι· μετρη-
 θήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος.
 Μετρεῖσθω, καὶ ἴστω ὁ Γ ὁ με-
 τρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσ-
 σων ἐστί. Καὶ ἐπὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Β
 μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α με-
 τρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ,
 ἐλάσσων ὢν τοῦ Β, ἐλαχίστου
 ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπερ
 ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετος
 ἀριθμὸς ἐστι· πρῶτος ἄρα. Ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι. *b, h, l.*

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

1. γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. *Id.* δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον.

PROPOSITIO XXXV.

1. ἐν deest. ἐν
2. ἰχόντων *Id.* ἰχόντων αὐτοῖς
3. τινες deest. τινες

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁ A *Id.* ὁ
2. μετρήσουσί *Id.* μετροῦσί
3. ὅταν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλ- hæc verba inter li- concordat cum edit. Paris.
λήλους ᾧσιν· neas alienâ manu
exarata sunt.
4. ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως *Id.* desunt.
ὁ Θ πρὸς τὸν H·

PROPOSITIO XXXVII.

1. μετροῦσι, ... *Id.* μετρήσουσι.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. μετρήσουσιν *Id.* μετροῦσιν
2. δὴ *Id.* δὲ
3. οἱ A, B, Γ ἄρα τὸν Δ μετρή- deest. οἱ ἄρα A, B, Γ τὸν Δ μετροῦσι·
σουσι.
4. οὖν deest. οὖν
5. τὸν E deest. τὸν E
6. μετρήσουσί *Id.* μετροῦσι
7. μετρήσουσι. *Id.* μετροῦσι.
8. μετρήσουσι. *Id.* μετροῦσι.
9. ὁ Γ· *Id.* ὁ Γ τὸν E·
10. μετρήσουσι. *Id.* μετροῦσι.

11. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
12. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα . . .	<i>Id.</i>	ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος
13. τὸν Z μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει τὸν.
14. μετρήσουσι	<i>Id.</i>	μετροῦσι

PROPOSITIO XL.

1. ἔστω	<i>Id.</i>	ἔστω ἀριθμὸς
2. μέρος ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα μέρος

PROPOSITIO XLI.

1. τὰ δευτέρα μέρη τὰ A, B, Γ.	τὰ A, B, Γ μέρη . . .	τὰ δευτέρα μέρη τὰ A, B, Γ.
2. ἀριθμοὶ	deest.	ἀριθμοὶ
3. ὁ	deest.	ο
4. ἡ ἄρα	<i>Id.</i>	ἐπεὶ οὖν ὁ H ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ με- τρίται, ὁ H
5. ἔστω τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ- μὸς ὃς ἕξει τὰ A, B, Γ μέρη, ὁ Θ.	<i>Id.</i>	ὁ H ἐλάχιστος ὃν ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη, ἔσται τοῦ H ἐλάσσων ἀριθ- μὸς ὃς ἕξει τὰ A, B, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ.

FINIS TOMI PRIMI.