ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

OU

COMMENTAIRE

SUR LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES ÉLEMENTS D'EUCLIDE.

Du même auteur.

TABLES DE LOGARITHMES A CINQ DÉCIMALES POUR LES NOMBRES ET LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES, suivies des LOGARITHMES D'ADDITION ET DE SOUSTRACTION, OU LOGARITHMES DE GAUSS, et de diverses TABLES USUELLES. Nouvelle édition, revue et augmentée. In-8 grand raisin; 1867. (*L'introduction de cet ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du 22 août* 1859)................... 2 »

RECUEIL DE FORMULES ET DE TABLES NUMERIQUES. In-8, grand raisin; 1867... 4 50

TABLES ARITHMÉTIQUES pour servir d'Appendice à l'*Introduction à la Théorie des nombres* de M. Le Besgue. In-8 grand raisin; 1866. 1 50

ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES SUR LA THÉORIE DES PARALLÈLES, par LOBATSCHEWSKY, conseiller d'Etat de l'empire de Russie et professeur à l'Université de Kasan; traduit de l'allemand par *J. Hoüel*, professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux; *suivi d'un* EXTRAIT DE LA CORRESPONDANCE DE GAUSS ET DE SCHUMACHER. Grand in-8, avec figures dans le texte; 1866..... 2 50

THÉORIE ET APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS, AVEC L'INDICATION DES SOURCES ORIGINALES, par le Dr Richard BALTZER, professeur au Gymnase de Dresde; traduit de l'allemand par *J. Hoüel*, docteur ès Sciences. In-8; 1861.............................. 5 »

Paris.— Imprimé chez Jules Bonaventure, 55, *quai des Grands-Augustins*.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE

OU

COMMENTAIRE

SUR LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

PAR J. HOÜEL,

Ancien élève de l'École Normale, Professeur de Mathématiques pures
à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

55, quai des Grands-Augustins, 55

1867

PRÉFACE

L'Essai que je publie aujourd'hui a déjà paru par extraits dans les *Archives* de M. Grunert (*). Je me suis décidé à le faire imprimer en entier, comme une protestation contre les tendances fâcheuses qui continuent à prévaloir dans la rédaction des ouvrages de Géométrie élémentaire.

Si l'on excepte les tentatives nombreuses qui ont eu pour objet la question insoluble de la théorie des parallèles, et les vagues dissertations de quelques métaphysiciens sur l'origine des idées géométriques, rien n'a été fait en France, jusqu'à ces derniers temps, pour perfectionner l'exposition des premiers principes de la science de l'étendue. On se contente de répéter les phrases traditionnelles, et d'établir avec un faux appareil de rigueur les premiers théorèmes qui se seraient aussi bien passés de démonstrations. On dédaigne de revenir sur des choses qui semblent si claires, et dont on attribue l'évidence à la lucidité des raisonnements qu'on a faits.

Pour nous qui ne croyons pas qu'en Géométrie plus qu'ailleurs les moyens soient indifférents lorsque le but

(*) *Archiv der Mathematik und Physik*, t. XL, p. 171, 1863.

est atteint, nous ne saurions admettre cette doctrine commode ; et si, comme il n'y a plus lieu d'en douter, les commencements de la Géométrie ont besoin d'être totalement révisés et refondus, nous pensons que cette question est assez importante pour attirer l'attention sérieuse de tout homme désireux de se rendre compte de ce qu'il dit. L'intérêt que présente cette étude est d'autant plus grand qu'on y rencontre plus de difficultés, rien n'étant plus embarrassant que de classer des idées qui, au premier abord, semblent toutes jouir du même degré d'évidence, et qui nous sont devenues si familières que l'habitude a fini par émousser à leur égard la pénétration de notre jugement.

Aussi est-il bien regrettable qu'on ait cessé en France de lire et de comprendre l'admirable Traité d'Euclide, dont nos auteurs semblent ignorer l'existence, quand l'étude leur en serait si profitable. C'est ce qui m'a déterminé à joindre à mon commentaire le texte même des propositions que j'étudie, en mettant ma traduction sous la forme moderne, plus concise et plus claire.

Un autre point important, que je n'ai pu qu'indiquer ici sommairement, ce sont les découvertes profondes, faites, il y a bientôt quarante ans, sur la théorie des parallèles, par deux géomètres, qui, du fond de la Russie et de la Transylvanie, sont parvenus en même temps, sans s'être entendus, à reconstruire la théorie que Gauss avait conçue lui-même depuis longues années, mais dont il ajournait toujours la publication. Outre le jour tout nouveau que ces recherches jettent sur la nature intime des vérités géométriques, elles conduisent encore à des applications analytiques remarquables. C'est aux indications du Dr. Baltzer, l'auteur du seul Traité de Géométrie élémentaire vraiment scientifique qui ait paru de nos jours, que je dois la connaissance de ces importants travaux, qui, à peine tirés de l'oubli, ont déjà attiré l'attention d'éminents géomètres, et sur lesquels je me propose de revenir dans une autre occasion.

Le manuscrit de cet opuscule était prêt pour l'impression, lorsqu'a paru le second volume du livre de M. Duhamel sur les *Méthodes dans les sciences de raisonnement*. J'ai été heureux d'y trouver la confirmation des résultats dont j'avais puisé le germe aux leçons du Maître qui a été le réformateur de l'enseignement mathématique dans notre pays, et auquel les nouvelles générations de professeurs doivent tant de reconnaissance ! Ç'a été pour moi un encouragement à publier ma brochure, dont le cadre plus restreint m'a permis de traiter d'une manière plus développée et plus élémentaire les sujets qui lui sont communs avec l'ouvrage de M. Duhamel. Puissé-je contribuer pour ma faible part à la destruction des préjugés et des idées fausses qui règnent encore sur le point de la science qui semblerait devoir être le mieux connu !

Bordeaux, juillet 1867.

J. H.

ESSAI CRITIQUE

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

OU

COMMENTAIRE SUR LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

INTRODUCTION.

Depuis longtemps les recherches scientifiques des mathématiciens sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire se sont concentrées presque exclusivement sur la théorie des parallèles ; et si, jusqu'ici, les efforts de tant d'esprits éminents n'ont abouti à aucun résultat satisfaisant, il est peut-être permis d'en conclure qu'en poursuivant ces recherches, on a fait fausse route, et qu'on s'est attaqué à un problème insoluble [a], dont on s'est exagéré l'importance, par suite d'idées inexactes sur la nature et l'origine des vérités primordiales de la science de l'étendue.

La source de cette erreur est, croyons-nous, dans le faux point de vue métaphysique où l'on s'est placé, en considérant la Géométrie comme une science de raisonnement pur, et ne voulant admettre parmi ses axiômes que des vérités *nécessaires* et du domaine de la pure raison. On a été conduit ainsi à attribuer aux axiômes une nature toute différente de celle des autres vérités géométriques que l'expérience nous révèle en dehors de toute étude scientifique, et que le géomètre rattache à ces axiômes comme conséquences.

Cependant la Géométrie, comme la Mécanique et la Phy-

(a) Voy. Note VI.

sique, a pour objet l'étude d'une grandeur concrète, l'étendue, affectant nos sens d'une certaine manière; et c'est seulement par les révélations des sens que nous avons pu connaître les propriétés fondamentales de cette espèce particulière de grandeur. Ces propriétés, indéfinissables et indémontrables, sont les termes de comparaison obligés auxquels nous ne pouvons que rapporter les autres propriétés, à l'aide du raisonnement abstrait.

Ainsi les sens seuls peuvent nous mettre en relation avec l'étendue, et ils nous en font connaître déjà un grand nombre de propriétés, sans emprunter le secours de la logique déductive. Parmi ces propriétés, les unes sont tellement simples, tellement faciles à constater, que la force de l'habitude, jointe à la tradition constante de l'École, a bien pu faire oublier leur véritable origine, et le rôle essentiel qu'ont joué les sens dans leur découverte. On a confondu, sous le nom d'*axiômes*, ces vérités avec les vérités abstraites, qui se rapportent à la science des grandeurs en général ou à l'Arithmétique universelle [a].

D'autres propriétés, enseignées également par l'expérience, et jouissant de la même certitude immédiate que les précédentes, se déduisent néanmoins de celles-ci comme conséquences, et on les a classées, sous le nom de *théorèmes*, à côté des vérités plus cachées, que le raisonnement seul pouvait faire apercevoir.

Le partage de ces vérités fondamentales en axiômes et théorèmes est, jusqu'à un certain point, arbitraire. Ainsi, lorsque deux de ces vérités sont des conséquences réciproques l'une de l'autre, on peut prendre celle des deux que l'on voudra pour axiôme, l'autre devenant alors un théorème.

Le nombre des axiômes peut varier, suivant l'ordre que l'on adopte dans la subordination des propositions. Il y a cependant un *minimum*, au-dessous duquel ce nombre ne saurait être réduit, comme le prouvent les tentatives infructueuses auxquelles nous faisions tout à l'heure allusion.

(*a*) Ainsi, parmi les douze propositions qu'Euclide désigne du nom de κοιναὶ ἔννοιαι, les trois dernières seules appartiennent spécialement à la géométrie. Les sept premières s'appliquent à toute espèce de grandeur.

Nous nous proposons, dans ce travail, de présenter quelques considérations sur le nombre et la nature des axiômes nécessaires de la Géométrie rationnelle. Nous avons dû examiner, à cette occasion, les idées qui ont servi de base aux *Éléments de Legendre*, et qui dominent encore dans la plupart des traités modernes, auxquels celui de *Legendre* a servi de type. Pour y reconnaître de nombreuses inexactitudes, il nous a suffi d'en faire la comparaison avec les principes d'*Euclide* et les discussions des géomètres qui ont su se pénétrer de l'esprit de l'immortel auteur des anciens *Éléments*.

L'ouvrage d'*Euclide* lui-même, quelque supériorité que l'on doive lui reconnaître sur ses successeurs, ne nous a pas paru à l'abri de toute critique, et nous avons cru pouvoir y signaler de légères imperfections, qu'il serait d'ailleurs aisé de faire disparaître, sans altérer au fond l'admirable enchaînement des vérités que renferme ce chef-d'œuvre de logique.

L'immense succès qu'ont eu les *Éléments de Legendre*, à leur apparition, n'est pas dû seulement à la renommée scientifique de cet illustre analyste. Il tient aussi aux éminentes qualités de précision et de clarté qui distinguent la rédaction de ce livre, où l'auteur a si bien su reproduire la forme et le style des géomètres de l'antiquité. Malheureusement, *Legendre*, entraîné par l'exemple de ses contemporains, n'a pas su conserver dans toute leur pureté les méthodes vraiment géométriques des anciens, et il les a profondément altérées, en y mêlant les procédés arithmétiques de l'Analyse moderne.

Chez *Euclide*, la Géométrie forme une science complète, qui se suffit à elle-même, et n'invoque nulle part, dans ses démonstrations, le secours de la science des nombres. C'est plutôt celle-ci qui empruntera à la géométrie ses dénominations, et qui, rendue sensible aux yeux par le moyen des figures, pourra fonder ses premiers principes sur une évidence tout intuitive.

Legendre, au contraire, introduit à chaque instant dans ses raisonnements des considérations qui supposent les grandeurs géométriques remplacées par des nombres. C'est ainsi qu'il parle de produits de lignes multipliées par des lignes ou par des surfaces. Dans les démonstrations où il fait usage des proportions, il applique immédiatement aux proportions entre lignes des théorèmes d'arithmétique établis seulement pour les proportions entre nombres rationnels, et l'extension au cas des incommensurables, qu'il croit démontrer par un artifice imité des géomètres anciens, ne peut être justifiée, tant que l'on n'a pas défini avec plus de précision l'égalité de deux rapports entre quantités incommensurables. Nous n'insisterons pas davantage sur les défauts de ces méthodes, qui aujourd'hui sont en partie abandonnées.

Nous nous occuperons plus particulièrement des propositions fondamentales du *premier livre*, qui se rattachent immédiatement aux axiômes. Comme nous l'avons déjà fait entendre, si l'on n'avait d'autre but que de mettre *hors de doute* chacune des vérités géométriques, on pourrait faire un bien plus large appel à l'expérience, en supprimant la plupart des démonstrations dans cette partie de la géométrie, et prenant pour axiômes le plus grand nombre des propositions énoncées. Nul homme de bon sens aujourd'hui ne se donnerait la peine de réfuter un sophiste niant que, pour aller d'un point à une droite, la perpendiculaire soit plus courte que l'oblique; et ce n'est pas l'évidence qui manquerait à cette proposition pour être rangée parmi les axiômes de la géométrie.

Mais l'auteur d'un traité de géométrie ne doit pas seulement chercher à convaincre l'esprit du lecteur, il doit chercher à l'éclairer; et, s'il ne s'attache pas à établir avec soin l'enchaînement et la subordination des propositions, il arrivera à rassembler des vérités qui resteront isolées et stériles. Faute de connaître le lien qui les unit, le lecteur ne sera nullement préparé à passer des vérités connues à d'autres plus cachées, et il aura perdu l'occasion de se familiariser, sur des exemples simples, avec les procédés de recherche de la géométrie.

Il importe donc de bien préciser d'abord quelle est la nature des axiômes, et de les réduire au plus petit nombre possible. Pour nous guider dans cette recherche, nous ne perdrons jamais de vue cette maxime, trop souvent méconnue, que *les vérités simples doivent pouvoir se démontrer simplement*, et que *ce que l'on gagne en rigueur dans les raisonnements, on* *doit pouvoir aussi le gagner en simplicité.* Si quelqu'un des premiers principes de la science ne peut se déduire d'une manière courte et facile des principes précédemment posés, on aura lieu de croire qu'il n'en est pas une conséquence, et qu'il est lui-même un axiôme indémontrable. Il faut donc se défier des démonstrations longues et compliquées, par lesquelles on a souvent prétendu établir des propositions que l'on ne voulait pas admettre parmi les axiômes. Par un examen approfondi, on finit généralement par constater qu'il en est de ces démonstrations comme des appareils ingénieux au moyen desquels on espère quelquefois réaliser le mouvement perpétuel. Il s'en faut de bien peu que l'appareil ne marche ; mais il ne marche pas. — D'autres fois, on s'aperçoit que la proposition à démontrer n'avait pas été rattachée à celles dont elle est naturellement la conséquence.

Si nous appliquons ces considérations à l'examen des Traités de géométrie qui ont paru jusqu'à ce jour, nous verrons sans peine qu'ils laissent tous à désirer sous ces divers rapports.

Au point de vue de la rigueur des déductions et du choix des axiômes, aucun traité, jusqu'à présent, n'a surpassé les *Éléments d'Euclide,* malgré quelques points défectueux, qu'il serait facile de corriger. Si les démonstrations d'*Euclide* n'ont pas toujours la simplicité qui semble régner dans les ouvrages modernes, cela tient bien moins au fond même de ces démonstrations qu'à la forme dogmatique adoptée par l'auteur, qui se préoccupait avant tout de fermer la bouche à des sophistes que la Grèce avait le tort de prendre au sérieux. De là son habitude de démontrer toujours qu'une chose *ne peut pas ne pas être*, au lieu d'établir qu'elle *est,* et de faire voir en même temps *pourquoi* elle est, et comment on a été conduit à reconnaître son existence. Il suffirait souvent de quelques légères modifications pour transformer les raisonnements indirects d'*Euclide* en raisonnements directs. On ne peut d'ailleurs lui faire un reproche de n'avoir pas usé dans certains cas des procédés beaucoup plus courts de l'analyse moderne.

On est forcé de convenir aussi que l'ordre des propositions du *premier livre d'Euclide* n'est pas complétement satisfaisant. Il semble quelquefois que l'auteur ait rangé ses propositions, sans avoir égard à leur simplicité ou à leur importance, et en s'imposant pour seule condition que la démonstration de chaque proposition ne s'appuyât que sur les propositions qui la précèdent [a].

Si l'on joint à cela l'absence d'une bonne traduction française, faite en dehors de toute préoccupation archéologique, et reproduisant les idées de l'auteur dans le langage plus clair et plus précis de la géométrie moderne, on comprend que la lecture d'Euclide puisse offrir quelque difficulté aux commençants, et ainsi s'explique, jusqu'à un certain point, l'oubli où il est tombé dans nos écoles.

Et cependant, pour un géomètre intimement pénétré de l'esprit de rigueur qui règne dans cet admirable ouvrage, et joignant à cela la connaissance des ressources de la science actuelle, rien ne serait plus aisé que de tirer du livre des *Éléments* un traité aussi correct pour le fond des idées, et débarrassé de ce que la forme offre d'aride et de rebutant. Il lui suffirait de subordonner les propositions à un ordre plus rationnel ; de remplacer autant que possible les démonstrations *par l'absurde* par des démonstrations directes, plus simples et plus lumineuses ; et enfin d'invoquer, quand il y a lieu, le grand principe des *limites*, que les anciens n'avaient osé formuler dans toute sa généralité.

Sans vouloir entreprendre une tâche aussi longue, je me bornerai ici à soumettre aux auteurs, qui seraient disposés à concourir à cette œuvre si utile, le résultat de mes recherches sur les premières propositions d'*Euclide*.

J'ai commencé par donner la traduction des trente-deux propositions du premier livre, qui font l'objet de mon travail. En abandonnant le système littéral suivi par R. Simson et par Peyrard, j'ai pris pour modèle l'édition allemande des *Éléments d'Euclide* par Lorenz, où le langage ordinaire est remplacé autant que possible par les signes algébriques, plus concis et plus clairs [b].

(*a*) Voy. les notes relatives aux propositions 5 et 13 du premier livre d'Euclide, pages 17 et 23.

(*b*) Voir aussi l'édition d'Euclide publiée par *Barrow*, Londres, 1685.

J'indique, dans les notes placées au bas des pages, les endroits où le texte d'Euclide m'a semblé défectueux ou incomplet, tout en pensant, avec R. Simson, qu'une grande partie des défauts signalés peut être attribuée à la maladresse des commentateurs par les mains desquels les Éléments nous ont été transmis, et qui ne se sont pas fait faute de substituer leurs idées à celles de l'auteur, quand ils n'en comprenaient pas la portée.

Je me suis efforcé de délimiter avec plus de précision les axiômes purement géométriques, en les rattachant à leur origine expérimentale. Parmi les vérités qu'*Euclide* a rassemblées sous le nom de *Notions communes*, j'ai déjà fait remarquer que les sept premières appartiennent à la science des grandeurs en général. Les deux suivantes (les axiômes 8 et 9) ne sont pas, à proprement parler, des axiômes, mais des définitions. Enfin on n'y trouve pas l'énoncé de certains principes fondamentaux, qui se rattachent à l'origine expérimentale de la science géométrique.

Les *demandes* sont au nombre de trois. Nous proposons d'en ajouter une quatrième, dont *Euclide* fait souvent un usage tacite, quoiqu'il semble avoir voulu d'abord l'éviter à l'aide des propositions 2 et 3. Nous *demanderons* qu'une figure invariable de forme puisse être transportée d'une manière quelconque dans son plan ou dans l'espace ([a]).

J'expose ensuite, sous forme de commentaire sur les 32 premières propositions d'*Euclide*, l'esquisse d'un plan suivant lequel on pourrait reconstruire plus régulièrement cette partie du *premier livre*. J'ai essayé de montrer comment, en ne perdant jamais de vue l'origine des idées géométriques, et rapportant toujours chaque proposition à sa véritable source, on introduit dans la théorie plus de clarté et de généralité, tout en restant plus près des applications pratiques, et l'on est tout préparé, par l'analogie des procédés, à l'étude des méthodes de la nouvelle géométrie.

Les premières propositions du premier livre pourront se classer d'après les divisions suivantes :

(a) Voy. Note I.

1° Propriétés des angles ayant même sommet.

2° Propriétés des angles ayant des sommets différents (théorie des parallèles).

3° Propriétés d'un triangle. — Égalités et inégalités dans un triangle.

4° Comparaison de deux triangles. — Cas d'égalité. — Cas d'inégalité.

Viendraient ensuite les propriétés des quadrilatères et des polygones en général.

Mon but n'étant nullement de rédiger le commencement d'un traité classique, je me suis attaché à la discussion des principes et à la comparaison des méthodes, sans chercher à proportionner les développements suivant la régularité didactique.

L'Appendice, composé de plusieurs notes trop longues pour trouver place dans le texte, est terminé par quelques réflexions sur l'importance de l'enseignement de la géométrie élémentaire, sur les moyens de rendre cet enseignement plus fructueux au double point de vue de la théorie et des applications, et sur les avantages que la géométrie présente sur l'analyse abstraite, comme première préparation à l'étude des parties plus élevées des mathématiques.

LES XXXII PREMIÈRES PROPOSITIONS

DU PREMIER LIVRE D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Un *point* est ce qui n'a pas de parties.

2. Une *ligne* est une longueur sans largeur ([a]).

3. Les extrémités d'une ligne sont des points.

4. La ligne *droite* est celle qui est située semblablement par rapport à tous ses points ([b]).

5. Une *surface* est ce qui a seulement longueur et largeur ([c]).

6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

7. La surface *plane* est celle qui est située semblablement par rapport aux lignes droites qu'elle contient ([d]).

(*a*) Cette définition rappelle vaguement l'origine expérimentale de la notion de la ligne.

(*b*) Cette définition, conçue en termes assez obscurs, veut dire sans doute que la ligne droite est composée semblablement en tous ses points, ou qu'elle est superposable à elle-même dans toutes ses parties. C'est, en effet, de cette propriété fondamentale que découlent toutes les autres propriétés de la ligne droite.

(*c*) Même remarque que pour la définition 2.

(*d*) Définition aussi peu claire que celle de la ligne droite. Elle doit signifier que le plan est une surface superposable à elle-même dans toutes ses parties. R. Simson la remplace par la propriété du plan de contenir tout entière une droite qui a deux points communs avec lui. Voir la Note III.

8. Un *angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se rencontrent dans un plan, et qui ont des directions différentes ([a]).

9. Lorsque les lignes qui comprennent un angle plan sont droites, l'angle est appelé *rectiligne*.

10. Lorsqu'une droite, rencontrant une autre droite, fait avec elle deux angles adjacents égaux, chacun de ces angles est un angle *droit*, et la première droite est dite *perpendiculaire* sur la seconde.

11. L'angle *obtus* est celui qui est plus grand qu'un angle droit.

12. L'angle *aigu* est celui qui est plus petit qu'un angle droit.

13. On nomme *limite* ce qui est l'extrémité de quelque chose ([b]).

14. On nomme *figure* ce qui est entouré par une ou par plusieurs limites ([c]).

15. Un *cercle* est une figure plane, entourée par une seule ligne ([d]), appelée *circonférence*, et telle que toutes les droites, appelées *rayons*, menées à cette circonférence, d'un certain point situé à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles.

16. Ce point se nomme le *centre* du cercle.

17. Un *diamètre* du cercle est une droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la circonférence : cette droite partage le cercle en deux parties égales ([e]).

(*a*) On ne voit guère, d'après les termes de cette définition, ce qu'il faut entendre par deux lignes non droites qui n'ont pas la même direction (μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων). R. Simson suppose ici quelque interpolation d'un copiste maladroit, et il est d'avis de fondre cette définition avec la suivante, en supprimant tout ce qui ne se rapporte pas aux lignes droites. D'ailleurs Euclide n'introduit pas une seule fois, dans la suite de l'ouvrage, la considération des angles curvilignes.

(*b*) R. Simson considère cette définition comme superflue.

(*c*) Le mot *figure* se prend maintenant dans un sens plus général.

(*d*) Une ligne rentrant sur elle-même.

(*e*) Cette dernière phrase est l'énoncé d'un théorème, qui est du reste une conséquence immédiate de la définition du cercle.

18. Un *demi-cercle* est la figure comprise entre le diamètre et l'une des portions égales dans lesquelles ce diamètre partage la circonférence.

19. Un *segment* de cercle est la figure comprise entre une droite et l'une des portions inégales dans lesquelles cette droite partage la circonférence.

20. On appelle figures *rectilignes* celles qui sont entourées par des droites;

21. Figures *trilatères*, celles qui sont entourées par trois droites;

22. Figures *quadrilatères,* celles qui sont entourées par quatre droites;

23. Figures *multilatères,* celles qui sont entourées par plus de quatre droites.

24. Parmi les figures trilatères, on nomme *triangle équilatéral* celle qui a ses trois côtés égaux ;

25. Triangle *isoscèle* ([a]), celle qui a seulement deux côtés égaux;

26. Triangle *scalène*, celle qui a ses trois côtés inégaux;

27. Triangle *rectangle,* celle qui a un angle droit;

28. Triangle *obtusangle*, celle qui a un angle obtus;

29. Triangle *acutangle,* celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, on nomme *quarré* celle qui a tous ses côtés égaux et tous ses angles droits;

31. *Rectangle,* celle qui a ses angles droits, sans avoir tous ses côtés égaux;

32. *Losange,* celle qui a tous ses côtés égaux, sans avoir ses angles droits;

33. *Parallélogramme* ([b]), celle qui a ses côtés opposés égaux deux à deux seulement, et ses angles opposés égaux, mais non droits.

(*a*) Et non *isocèle*, d'après une orthographe vicieuse adoptée par un grand nombre d'auteurs.

(*b*) Nous avons substitué au mot *rhomboïde* du texte le mot par lequel cette figure est généralement désignée aujourd'hui, quoique ce mot soit tiré d'une définition différente. Il est d'ailleurs employé partout dans la suite par Euclide lui-même. (Voy. liv. I, prop. 34 et suiv.)

34. Toutes les autres figures de quatre côtés s'appellent simplement *quadrilatères* [a].

DEMANDES.

On demande de pouvoir :

1. Mener une ligne droite d'un point quelconque à un autre point quelconque ;

2. Prolonger indéfiniment, suivant sa direction, une ligne droite finie ;

3. Décrire un cercle d'un point quelconque comme centre, et avec une distance quelconque (comme *rayon*).

AXIOMES [b].

1. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles [c].

2. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront égales [d].

(*a*) Le mot *trapèze* qui se trouve dans le texte se prend maintenant dans un sens plus restreint.

(*b*) Nous traduisons ainsi les mots κοιναὶ ἔννοιαι (notions communes), titre sous lequel Euclide réunit des énoncés de natures fort différentes et qui ne doit pas être pris dans le sens que l'on attache, dans nos traités modernes, au mot *axiôme*. Les sept premiers énoncés expriment des vérités relatives à toute espèce de grandeurs, aussi bien qu'aux grandeurs géométriques ; les énoncés 8 et 9 sont de simples définitions ; les trois derniers seuls sont des axiômes géométriques proprement dits. Nous ne saurions admettre l'opinion de Peyrard, qui, d'après certains manuscrits, range ces trois derniers énoncés parmi les *demandes*. On voit aisément que ce sont là des propositions d'un tout autre caractère, et il est bien plus conforme à l'esprit d'Euclide d'en faire, avec Barrow, R. Simson et Lorenz, les fondements expérimentaux de la science géométrique.

(*c*) $A=B$, $A=C$, donc $B=C$.

(*d*) $A=B$, $A'=B'$, donc $A+A'=B+B'$.

3. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux ([a]).

4. Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront inégales (dans le même sens) ([b]).

5. Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux (dans le même sens) ([c]).

6. Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles ([d]).

7. Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles ([e]).

8. Les grandeurs que l'on peut faire coïncider l'une avec l'autre sont égales entre elles ([f]).

9. Le tout est *plus grand que* la partie ([g]).

10. Tous les angles droits sont égaux.

11. Si deux droites sont rencontrées par une troisième, qui forme avec elles deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme soit moindre que deux angles droits, ces deux droites, prolongées indéfiniment, finiront par se rencontrer du côté où elles forment les deux angles valant ensemble moins de deux angles droits ([h]).

12. Deux droites ne peuvent entourer un espace ([i]).

(*a*) $A = B$, $A' = B'$, donc $A - A' = B - B'$.

(*b*) $A \gtrless B$. $A' = B'$, donc $A + A' \gtrless B + B'$.

(*c*) $A \gtrless B$, $A' = B'$, donc $A - A' \gtrless B - B'$.

(*d*) $A = B$, donc $2A = 2B$.

(*e*) $A = B$, donc $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$.

(*f*) Définition de l'*égalité géométrique*.

(*g*) Définition du mot *plus grand que*, ou de l'*inégalité* en général.

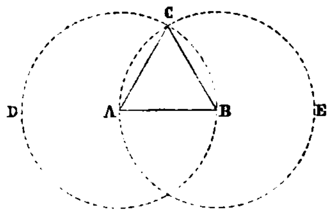
(*h*) Axiôme connu improprement sous le nom de *postulatum* d'Euclide. (Voir à ce sujet la Note VI.)

(*i*) C'est-à-dire qu'entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite.

PROPOSITION 1.

Sur une droite finie donnée A B (fig. 1), *construire un triangle équilatéral.*

Fig. 1.



Du centre A, avec le rayon A B, décrivons le cercle B C D [dem. 3]; du centre B, avec le rayon BA, décrivons le cercle A C E. Du point C, où ces deux cercles se coupent ([a]), menons aux points A et B les droites CA, CB [dem. 1]. ABC sera le triangle demandé.

En effet, puisque l'on a AC = AB [déf. 15],

et BC = BA,

il en résulte AC = BC [ax. 1].

Par conséquent AC = AB = BC, et il s'ensuit [déf. 24] que le triangle construit sur AB est équilatéral.

PROPOSITION 2.

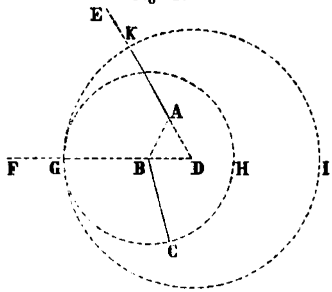
A partir d'un point donné A (fig. 2), *placer une droite égale à une droite donnée* BC ([b]).

(*a*) La démonstration d'Euclide semble incomplète, en ce qu'elle ne fait pas voir que les deux cercles se coupent nécessairement. Il suffit, pour la compléter, de faire remarquer que chacun des deux cercles a un point intérieur et un point extérieur par rapport à l'autre cercle.

(*b*) Cette proposition est devenue, pour les auteurs modernes, un cas particulier d'une demande plus générale que tous font, au moins tacitement, savoir : *Qu'une figure peut être transportée d'une manière quelconque dans son plan, ou plus généralement, dans l'espace, sans qu'aucun de ses éléments, distances mutuelles ou angles, change de grandeur.*

Menons de A en B la droite AB [dem. 1]. Sur cette droite, construisons le triangle équilatéral ABD [pr. 1]. Prolongeons les droites DA et DB vers E et F [dem. 2]. Du centre B, avec le

Fig. 2.



rayon BC, décrivons le cercle CGH ; et du centre D, avec le rayon DG, décrivons le cercle GIK [dem. 3]. La droite AK = BC sera placée à partir du point A, comme on le demandait.

En effet, puisqu'on a DK = DG [déf. 15],

et DA = DB [déf. 24],

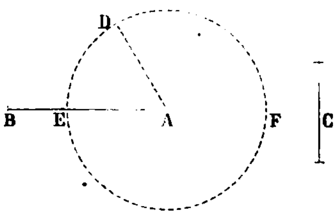
il en résulte AK = BG [ax. 3].

Or on a BC = BG, et par suite AK et BC sont l'une et l'autre égales à BG ; par suite AK = BC [ax. 1].

PROPOSITION 3.

Etant données deux droites inégales AB, C (fig. 3), *retrancher de la plus grande* AB *une droite égale à la plus petite* C ([a]).

Fig. 3.



([a]) Même observation que pour la proposition précédente.

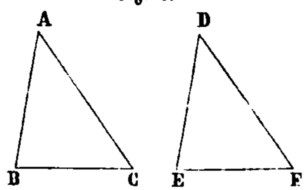
Au point A plaçons une droite AD = C [pr. 2], et du centre A, avec le rayon AD, décrivons le cercle DEF [dem. 3], rencontrant AB en E. On aura ainsi retranché de AB la ligne AE = C.

Car on a AE = AD [déf. 15]; d'ailleurs C = AD. Donc AE = C [ax. 1], et par suite BE = AB — C (a).

PROPOSITION 4.

Si deux triangles ABC, DEF (fig. 4) *ont les deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF, *et si les angles*

Fig. 4.



BAC, EDF, *compris entre les côtés égaux, sont égaux; ces triangles auront leurs bases* BC, EF *égales; les triangles seront égaux, et les angles restants, opposés aux côtés égaux,* ABC *et* DEF, ACB *et* DFE, *seront égaux chacun à chacun.*

Appliquons, en effet, le triangle ABC sur le triangle DEF (b), et, pour cela, plaçons le point A sur le point D, et la ligne AB sur la ligne DE. Le point B coïncidera avec E, puisque AB = DE. Ensuite, AB étant placé sur DE, et l'angle BAC étant égal à EDF, AC prendra la direction de DF, et puisque AC = DF, le point C tombera sur le point F. Donc, puisque B coïncide avec E, et C avec F, BC coïncidera avec EF; car, s'il en était autrement, ces deux droites, qui ont mêmes extrémités, ren-

---

(a) Si l'on donne la droite AD toute prête placée au point A, la construction se réduit à tracer simplement le cercle DEF [dem. 3], et l'on a immédiatement AE = AD [déf. 15].

(b) Il semble qu'à partir d'ici Euclide admette implicitement la demande dont il est question dans les notes précédentes. Il en fait usage non-seulement pour la démonstration actuelle, mais encore dans d'autres cas (prop. 8, par exemple).

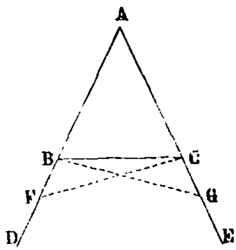
formeraient entre elles un espace, ce qui est impossible [ax. 12]. Donc on a [ax. 8]

BC = EF, triangle ABC = triangle DEF,
angle ABC = angle DEF, angle ACB = angle DFE.

PROPOSITION 5.

Dans tout triangle isoscèle ABC (fig. 5), 1° *les angles à la base* ABC, ACB *sont égaux entre eux ;* 2° *si l'on prolonge les*

Fig. 5.



côtés égaux AB, AC, *les angles formés au-dessous de la base,* DBC, ECB, *seront aussi égaux entre eux.*

Sur le prolongement BD de AB, prenons à volonté un point F, et sur AE > AF, prenons une longueur AG = AF [pr. 3, note]. Joignons ensuite FC, GB.

1° Dans les triangles ACF, ABG, on a AF = AG, AC = AB, et l'angle A est commun. Donc [pr. 4]

FC = GB, ACF = ABG, AFC = AGB.

Comme on a d'ailleurs AF = AG, et AB = AC, il en résulte [ax. 3] BF = CG. Par conséquent, dans les triangles FBC, GCB, on a

BF = CG, FC = BG, BFC = BGC.

Donc [pr. 4] FBC = GCB, c'est-à-dire que les angles *au-dessous* de la base sont égaux.

2° De plus, BCF = CBG ; et, comme on a d'ailleurs

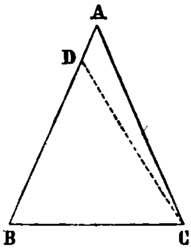
ABG = ACF, CBG = BCF,

il en résulte [ax. 3] ABC = ACB, c'est-à-dire que les angles *à la base* sont égaux ([a]).

PROPOSITION 6.

Si, dans un triangle ABC (fig. 6), *deux angles* ABC, ACB

Fig. 6.



sont égaux entre eux, les côtés AC, AB, *opposés à ces angles égaux, seront aussi égaux entre eux.*

Si les côtés AC, AB ne sont pas égaux, soit AB le plus grand. Prenons sur AB la longueur BD = AC [pr. 3], et joignons DC. Dans les deux triangles ABC, DCB, on a BD = AC, BC commun, et DBC = ACB ; donc [pr. 4]

triangle DBC = triangle ABC,

ce qui est impossible [ax. 9] ([b]). Donc AC et AB ne peuvent être inégaux. Donc AC = AB.

PROPOSITION 7.

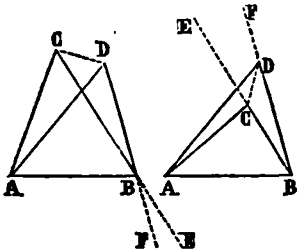
Si l'on joint les extrémités d'une même base AB (fig. 7) *à deux points différents* C, D, *situés d'un même côté de cette droite, les deux distances* CA, CB *du premier point* C *aux ex-*

(*a*) Cette démonstration aurait pu être abrégée, si Euclide eût appliqué la proposition 4 aux triangles ABC et ACB, et s'il eût placé, comme il eût été plus naturel de le faire, la proposition 13 en tête de ce livre. (Voy. la note relative à cette dernière proposition, page 23.)

(*b*) Il serait peut-être plus clair de remarquer que, de l'égalité des triangles, il résulterait que l'angle DCB = ABC [pr. 4], et comme, par hypothèse, ABC = ACB, on aurait DBC = ACB [ax. 1], ce qui est absurde [ax. 9]. On éviterait ainsi la considération des aires des deux triangles.

trémités de la base ne peuvent être égales chacune à chacune aux deux distances DA, DB *du second point* D *aux mêmes extrémités.*

Fig. 7.



Soit, en effet, s'il est possible, AD = AC et BD = BC. Joignons CD [et prolongeons BC vers E, BD vers F].

Puisque AD = AC, on a ADC = ACD [pr. 5],

et par suite ADC > DCE [ax. 9],

et à plus forte raison FDC > DCE.

Mais on a en même temps BD = BC, d'où résulterait

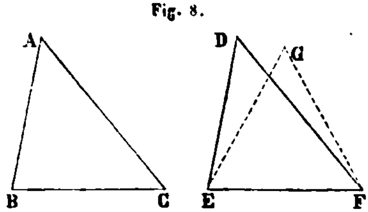
FDC = DCE [pr. 5],

ce qui serait en contradiction avec ce qui précède.

PROPOSITION 8.

Si deux triangles ABC, DEF (fig. 8) *ont leurs deux côtés* AB, AC *respectivement égaux aux deux côtés* DE, DF, *et leurs bases*

Fig. 8.



BC, EF *aussi égales entre elles, les angles, tels que* BAC, EDF, *compris entre des côtés égaux, sont égaux.*

Portons le triangle ABC sur le triangle DEF, en plaçant le point B sur le point E, et dirigeant BC suivant EF.

Puisque BC = EF, le point C tombera sur F. Or on a

$$BA = ED, \quad \text{et} \quad CA = FD.$$

Par conséquent, le point A tombera sur le point D ; car si A tombait en un autre point G, on devrait avoir

$$GE = AB = DE, \quad \text{et} \quad GF = AC = DF \text{ [ax. 1]},$$

en même temps que G différerait de D, ce qui est impossible [pr. 7]. Donc BA coïncidera avec DE, et AC avec DF. On a donc [ax. 8]

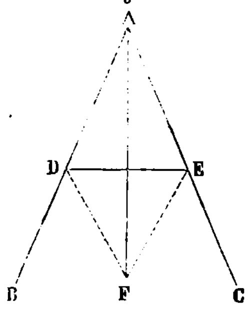
angle BAC = angle EDF, [et triangle BAC = triangle EDF.]

[Donc, *si deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, ils peuvent coïncider l'un avec l'autre, et ils sont égaux.*]

PROPOSITION 9.

Partager un angle rectiligne donné BAC (fig. 9) *en deux parties égales.*

Fig. 9.



Prenons sur AB un point quelconque D, et retranchons de AC la droite AE = AD [pr. 3, note]. Joignons DE, et construisons sur DE le triangle équilatéral DEF [pr. 1]. Si l'on joint AF, cette droite partagera l'angle BAC en deux parties égales.

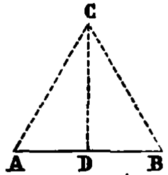
Car, les deux triangles ADF, AEF ayant AF commun, AD = AE, DF = EF, il en résulte [pr. 8]

$$DAF = EAF.$$

PROPOSITION 10.

Partager une droite finie donnée AB (fig. 10) *en deux parties égales.*

Fig. 10.



Construisons sur AB le triangle équilatéral ABC [pr. 1]. Partageons l'angle ACB en deux parties égales par la droite CD [pr. 9] : cette droite partagera AB en deux parties égales au point D.

Car les deux triangles ACD, BCD ayant

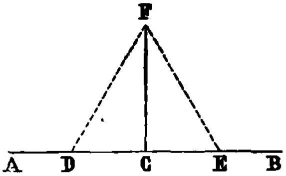
$$AC = CB, \quad CD \text{ commun}, \quad \text{angle } ACD = \text{angle } BCD,$$

on a [pr. 4] $\quad AD = DB.$

PROPOSITION 11.

En un point donné C (fig. 11) *d'une droite donnée* AB, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

Fig. 11.



Prenons sur AB un point quelconque D, et faisons CE = CD [pr. 3, note]. Construisons sur DE le triangle équilatéral DEF [pr. 1], et joignons FC. La droite FC sera perpendiculaire à AB au point C.

Car les deux triangles DCF, ECF ayant CF commun, DC = CE, DF = EF, on a [pr. 8]

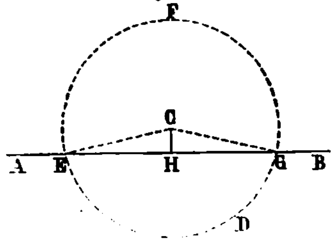
$$DCF = ECF$$

Donc [déf. 10] FC est perpendiculaire sur AB.

PROPOSITION 12.

D'un point donné C (fig. 12), *abaisser une perpendiculaire sur une droite indéfinie donnée* AB.

Fig. 12.



Prenons au-delà de AB par rapport à C, un point quelconque D ; décrivons, du centre C, avec le rayon CD, le cercle EFG ; partageons EG en deux parties égales au point H [pr. 10], et joignons CH : cette ligne CH sera perpendiculaire sur AB.

Car, en joignant CE, CG, on a EH$=$HG, CH commun, et [déf. 15] EC $=$ CG. Donc [pr. 8]

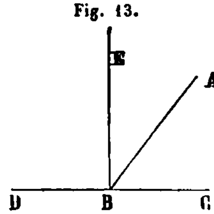
$$EHC = CHG.$$

Donc [déf. 10] CH est perpendiculaire sur AB.

PROPOSITION 13.

Les angles adjacents ABD, ABC (fig. 13), *que forme une droite* AB *avec une autre droite* CD, *à laquelle elle se termine,*

Fig. 13.



sont 1° *tous les deux droits, ou bien* 2° *leur somme est égale à deux angles droits.*

1° Si ces angles sont égaux entre eux, ils sont tous les deux droits [déf. 10].

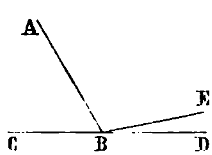
2° S'ils sont inégaux, comme ABC, ABD, élevons sur DC, au point B, la perpendiculaire BE [pr. 11]. Alors CBE, EBD seront deux angles droits [déf. 10].

Puisque $$CBE = CBA + ABE,$$
on a, en ajoutant de part et d'autre EBD [ax. 2],
$$CBE + EBD = CBA + ABE + EBD.$$
De même, puisque $ABD = DBE + EBA$,
on a, en ajoutant de part et d'autre CBA,
$$ABD + CBA = DBE + EBA + CBA.$$
Par conséquent [ax. 1],
$$ABD + CBA = CBE + EBD,$$
c'est-à-dire que l'on a
$$ABD + CBA = 2 \text{ droits } (a).$$

PROPOSITION 14.

Si en un point B *d'une droite* AB (fig. 14), *deux droites* BC, BD, *font avec la première* AB, *et de côtés différents de* AB, *des*

Fig. 14.



angles adjacents ABC, ABD, *dont la somme soit égale à deux angles droits, ces deux droites* BC, BD *seront le prolongement l'une de l'autre.*

(a) On peut s'étonner qu'Euclide ait employé un si grand appareil de logique pour prouver que l'angle CBD, formé par les deux directions BD, BC, est égal à la somme de ses deux parties, égales ou inégales, et surtout qu'il ait donné aussi tard une proposition qui aurait dû venir une des premières de ce livre, comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la note sur la proposition 5, page 18.

En effet, si BD n'est pas le prolongement de BC, soit BE ce prolongement. On aura alors [pr. 13]

$$CBA + ABE = 2 \text{ droits}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$CBA + ABD = 2 \text{ dr}.$$

Donc [ax. 1 et 10],

$$ABC + ABD = ABC + ABE.$$

Donc, en retranchant ABC de part et d'autre [ax. 3],

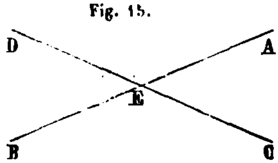
$$ABD = ABE,$$

ce qui est impossible [ax. 9]. Par conséquent, BE ne peut être en ligne droite avec BC, et le même raisonnement s'appliquera pareillement à toute autre droite différente de BD. Donc BC et BD sont le prolongement l'une de l'autre [a].

PROPOSITION 15.

Si deux droites AB, CD (fig. 15) *se coupent mutuellement, elles forment des angles opposés par le sommet égaux deux à deux, savoir* CEA = DEB, *et* CEB = AED.

Fig. 15.



On a, en effet [pr. 13],

$$CEA + AED = 2 \text{ dr.},$$

et

$$AED + DEB = 2 \text{ dr}.$$

Donc [ax. 1 et 10]

$$CEA + AED = AED + DEB;$$

par suite, en ôtant de part et d'autre AED [ax. 3],

$$CEA = DEB.$$

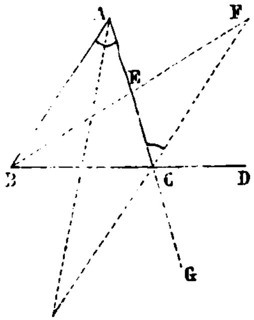
On démontrerait de même que CEB = AED.

(a) On peut faire sur cette proposition la même remarque que sur la précédente.

PROPOSITION 16.

Si l'on prolonge un côté BC *d'un triangle* ABC (fig. 16), *l'angle extérieur* ACD *est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents* CBA, BAC.

Fig. 16.



Partageons AC en deux parties égales au point E [pr. 10]; joignons BE, et prolongeons cette droite d'une quantité EF=EB [pr. 3, note]. Joignons CF.

Puisque l'on a

$$AE=EC, \quad BE=EF, \quad \text{et } AEB=FEC \text{ [pr. 15]},$$

il en résulte [pr. 4]

$$BAE=ECF.$$

Mais on a [ax. 9] $\quad ACD>ECF.$

Par conséquent, $\quad ACD>BAE.$

De même, en partageant BC en deux parties égales, et prolongeant AC vers G, on démontrera que BCG, c'est-à-dire ACD [pr. 15], est plus grand que CBA.

PROPOSITION 17.

Dans tout triangle ABC (fig. 17), *la somme de deux angles quelconques* ABC, ACB *est moindre que deux angles droits.*

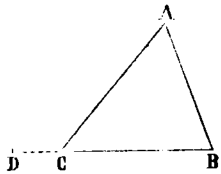
Prolongeons BC vers D. On a [pr. 16]

$$ABC<ACD.$$

Par conséquent [ax. 4],

$$ABC + ACB < ACD + ACB.$$

Fig. 17.



Or on a [pr. 13] $\qquad ACD + ACB = 2\,dr.$

Donc $\qquad ABC + ACB < 2\,dr.$

On démontrerait de même que chacune des deux sommes

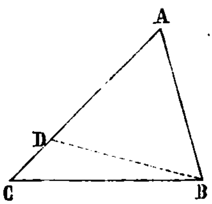
$$BAC + ACB, \quad CAB + ABC$$

est moindre que deux angles droits.

PROPOSITION 18.

Deux côtés AC, AB *d'un triangle* ABC (fig. 18), *étant inégaux, au plus grand côté* AC *est opposé un plus grand angle* ABC.

Fig. 18.



Soit AC > AB. Prenons AD = AB [pr. 3, note], et joignons BD. On aura alors [pr. 16]

$$ADB > ACB.$$

Mais $\qquad ADB = ABD$ [pr. 5].

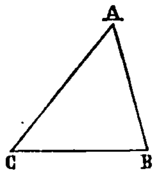
Donc ABD > ACB, et à plus forte raison

$$ABC > ACB.$$

PROPOSITION 19.

Deux angles ABC, ACB *d'un triangle* ABC (fig. 19) *étant inégaux, au plus grand angle* ABC *est opposé un plus grand côté* AC.

Fig. 19.



Si l'on n'avait pas AC>AB, il faudrait que l'on eût ou AC=AB, ou AC<AB.

Si AC=AB, on aurait [pr. 5] ABC=ACB;

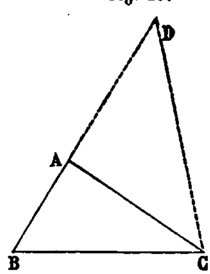
Si AC<AB, on aurait [pr. 18] ABC<ACB.

Ces deux conclusions étant contraires à l'hypothèse de ABC > ACB, il s'ensuit que l'on ne peut pas ne pas avoir AC > AB.

PROPOSITION 20.

Dans tout triangle ABC (fig. 20), *la somme de deux côtés quelconques* AB, AC *est plus grande que le troisième* BC.

Fig. 20.



Prolongeons AB vers D; faisons AD=AC [pr. 3, note], et joignons CD.

Puisque AD=AC, on a ACD=ADC [pr. 5]. Or on a BCD>ACD [ax. 9]; par suite, BCD>ADC. Donc [pr. 19] BD>BC, c'est-à-dire BA+AC>BC.

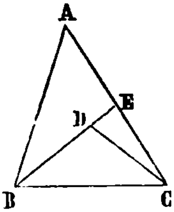
On démontrerait de la même manière que l'on a

AB+BC>AC, et BC+CA>AB.

PROPOSITION 21.

Si des deux extrémités B, C *de la base* BC (fig. 21) *du triangle* ABC, *on mène deux droites* BD, CD *à un point* D *intérieur au*

Fig. 21.



triangle ; 1° la somme de ces deux droites est moindre que celle de deux autres côtés BA, CA *du triangle ; 2° l'angle* BDC *qu'elles comprennent est plus grand que l'angle* BAC *du triangle, opposé à la même base* BC.

1° Prolongeons BD jusqu'à la rencontre de AC en E. Dans le triangle ABE, on a [pr. 20]

$$BA + AE > BE ;$$

par suite, en ajoutant CE de part et d'autre [ax. 4],

$$BA + AC > BE + EC. \tag{1}$$

On a maintenant, dans le triangle CDE [pr. 20],

$$DE + EC > DC,$$

d'où, en ajoutant DB de part et d'autre,

$$BE + EC > DC + DB. \tag{2}$$

En comparant les inégalités (1) et (2), on en tire, à plus forte raison,

$$BA + AC > DC + DB.$$

2° On a [pr. 16]

$$BDC > BEC, \quad \text{et} \quad BEC > BAC.$$

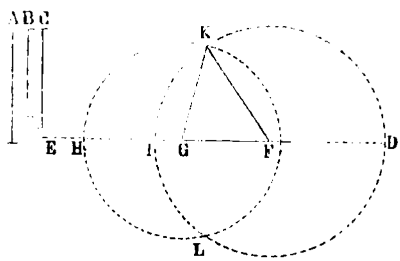
Donc, à plus forte raison,

$$BDC > BAC.$$

PROPOSITION 22.

Construire un triangle (fig. 22) *dont les côtés soient égaux à trois lignes données* A, B, C, *telles que la somme de deux quelconques d'entre elles soit plus grande que la troisième.*

Fig. 22.



Tirons une droite DE, terminée en D, indéfinie vers E. Prenons DF = A, FG = B, GH = C [pr. 3]. Décrivons, du centre F, avec le rayon FD, le cercle DKL, et du centre G, avec le rayon GH, le cercle KLH, qui coupe le cercle DKL en K. Joignons KF, KG; KFG sera le triangle demandé.

En effet, FD = FK [déf. 15]; or FD = A : donc aussi KF = A [ax. 1]. De même, puisque GK = GH et que GH = C, on a GK = C. On a d'ailleurs aussi FG = B. Donc le triangle FGK a ses trois côtés égaux respectivement aux lignes données A, B, C ([a]).

PROPOSITION 23.

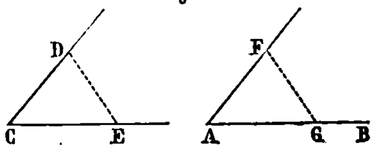
En un point A *d'une droite donnée* AB (fig. 23), *construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné* DCE.

Sur CD et sur CE prenons arbitrairement deux points D, E,

(*a*) Euclide a oublié de justifier la restriction contenue dans l'énoncé, que la somme de deux quelconques des côtés est plus grande que le troisième. Or il résulte de cette hypothèse que DG > HG, et que HG > la différence GI entre DF et GF. Donc, d'une part, le point D est *extérieur* au cercle HKL, et d'autre part, le point I est *intérieur* au même cercle. Donc le cercle DKL, ayant des points extérieurs et des points intérieurs au cercle HKL, coupera nécessairement ce dernier cercle en deux points.

et joignons DE. Construisons ensuite le triangle AFG, tel que l'on ait

Fig. 23.



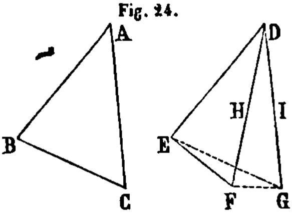
$$AF = CD, \quad AG = CE, \quad FG = DE \text{ [pr. 22]}.$$

On aura [pr. 8] $FAG = DCE$.

PROPOSITION 24.

Si deux triangles ABC, DEF (fig. 24 *et* 25) *ont deux côtés égaux chacun à chacun*, $AB = DE$, $AC = DF$, *et l'angle compris*

Fig. 24.



par ces côtés inégal, $BAC > EDF$, *le côté* BC, *opposé au plus grand angle, est plus grand que le côté* EF, *opposé au plus petit angle.*

Construisons sur DE, au point D, l'angle $EDG = BAC$ [pr. 23]; faisons $DG = AC = DF$ [pr. 3]; [prolongeons DF vers H, DG vers I (fig. 25)], et joignons EG, FG (a).

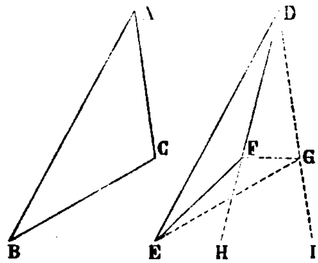
Puisqu'on a $AB = DE$, $AC = DG$, $BAC = EDG$, il en résulte [pr. 4] $BC = EG$.

(a) Nous avons réuni dans la même démonstration les deux cas que peut présenter la figure, et dont un seul (fig. 24) avait été considéré par Euclide. R. Simson remarque que l'on pourrait toujours ramener la figure à ce premier cas, en prenant pour DE le plus petit des deux côtés, DE, DF; car alors les deux points G, F, étant sur un cercle décrit du centre D, et à l'intérieur duquel se trouve le point E, il est visible que E sera du même côté que D par rapport à la base FG. — Nous n'avons pas considéré le cas où EG passe par le point F, le théorème étant alors évident.

Or on a DG=DF, d'où [pr. 5] HFG=IGF.

Par conséquent, EFG > FGI, et comme FGI > FGE, on a, à

Fig. 25.



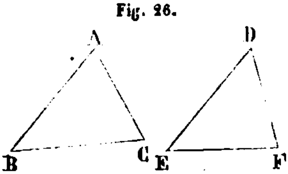
plus forte raison, EFG > FGE.

Donc [pr. 19] EG ou BC > EF.

PROPOSITION 25.

Si deux triangles ABC, DEF (fig. 26) *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = DE, AC = DF, *et le troisième côté iné-*

Fig. 26.



gal, BC > EF, *l'angle* BAC, *opposé au plus grand côté, est plus grand que l'angle* EDF, *opposé au plus petit côté.*

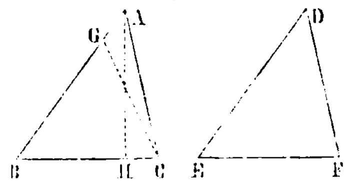
Car, si l'on n'avait pas BAC > EDF, il faudrait que l'on eût ou BAC=EDF, ou BAC < EDF.

Dans le premier cas, il en résulterait [pr. 4] BC=EF; dans le second [pr. 24], BC < EF. Ces deux conséquences étant contraires à l'hypothèse BC > EF, on a donc nécessairement BAC > EDF.

PROPOSITION 26.

Si deux triangles ABC, DEF (fig. 27) *ont deux angles égaux chacun à chacun,* ABC = DEF, ACB = EFD, *et un côté égal qui* *soit* (1^{er} CAS) *ou adjacent aux angles égaux* (BC = EF), (2^{e} CAS) *ou opposé à l'un d'eux* (AB = DE), *les deux autres côtés seront égaux chacun à chacun, et le troisième angle* BAC *sera égal au troisième* EDF.

Fig. 27.



I^{er} CAS.—Si les côtés adjacents aux angles égaux, BC et EF, sont égaux, on a :

1° AB = DE. Car, si AB et DE étaient inégaux, soit, par exemple, AB > DE. Prenons alors BG = ED, et joignons CG. Puisque

BG = ED, BC = EF, GBC = DEF,

il en résulte BCG = EFD [pr. 4].

Or, par hypothèse, BCA = EFD.

On aurait donc BCA = BCG,

ce qui est impossible [ax. 9]. Donc AB et DE ne sauraient être inégaux.

2° Puisque AB = DE, BC = EF, ABC = DEF,

on a [pr. 4] AC = DF, et BAC = EDF.

II^{e} CAS. — Si les côtés opposés à l'un des angles égaux, AB et DE, sont égaux, alors on a

1° BC = EF. Car, si BC et EF étaient inégaux, soit, par exemple, BC > EF. Prenons alors BH = EF, et joignons AH.

Puisque BH = EF, AB = DE, ABC = DEF,

il en résulte BHA = EFD [pr. 4].

Or, par hypothèse, BCA = EFD.

On aurait donc BHA = BCA,

ce qui est impossible [pr. 17]. Donc BC et EF ne sauraient être inégaux.

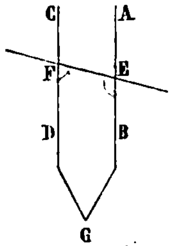
2° Puisque BC = EF, AB = DE, ABC = DEF,

on a [pr. 4] AC = DF, et BAC = EDF.

PROPOSITION 27.

Si deux droites AB, CD (fig. 28) *coupées par une troisième* EF, *font avec elle des angles* alternes-internes (a) *égaux* AEF, EFD, *elles sont parallèles.*

Fig. 28.



Car, si les droites AB, CD n'étaient pas parallèles, alors, en les prolongeant suffisamment dans un sens ou dans l'autre, elles finiraient par se rencontrer. Supposons, s'il est possible, que cette rencontre ait lieu en G. Dans le triangle EFG, on aurait alors AEF > EFD [pr. 16], ce qui est contraire à l'hypothèse admise AEF = EFD. Donc AB et CD ne peuvent se rencontrer de ce côté. Par la même raison, ces lignes ne peuvent se rencontrer de l'autre côté. Donc [déf. 35] AB et CD sont parallèles.

PROPOSITION 28.

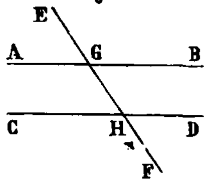
Si deux droites AB, CD (fig. 29), *coupées par une troisième* EF, *font avec elle* 1° *ou deux angles correspondants égaux* EGB, GHD, 2° *ou deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires* BGH, GHD, *elles sont parallèles.*

1° Puisque EGB = GHD, et que EGB = AGH [pr. 15], il en résulte AGH = GHD. Donc [pr. 27] AB et CD sont parallèles.

(a) Nous introduisons, pour plus de simplicité, dans les énoncés d'Euclide, les dénominations appliquées par les géomètres modernes aux divers couples d'angles formés par deux droites qui en rencontrent une troisième. Nous ne reproduisons pas ici les définitions de ces angles qui se trouvent dans tous les traités de géométrie.

2° Puisque l'on a BGH + GHD = 2 dr. [hypothèse]
et AGH + BGH = 2 dr. [pr. 13],

Fig. 29.



il en résulte [ax. 1 et 10] AGH + BGH = BGH + GHD.
En retranchant BGH de part et d'autre, il reste [ax. 3]

AGH = GHD.

Donc [pr. 27] AB et CD sont parallèles (a).

PROPOSITION 29.

Si deux droites parallèles AB, CD (fig. 29) *sont rencontrées par une troisième droite* EF, *elles feront avec elle* 1° *des angles alternes-internes égaux* AGH, GHD; 2° *des angles dirigés dans le même sens* (correspondants) *égaux*, EGB, GHD; 3° *des angles intérieurs d'un même côté supplémentaires* BGH, GHD.

1° Si les angles AGH, GHD étaient inégaux, soit AGH > GHD. On aurait alors, en ajoutant de part et d'autre BGH [ax. 4],

AGH + BGH > BGH + GHD.

Or AGH + BGH = 2 dr. [pr. 13],

et par suite BGH + GHD < 2 dr.

(a) Toutes les propositions établies jusqu'ici se démontrent sans le secours de l'axiôme 11. On pourrait encore joindre à ces propositions le théorème démontré par Legendre, que *la somme de trois angles d'un triangle rectiligne ne peut surpasser deux angles droits*. (Voy. Note VI, page 75). Les théorèmes qui suivent s'appuient sur l'axiôme 11. Il est aisé, d'après cela, de se rendre compte de l'ordre dans lequel Euclide a rangé ses propositions. Il a voulu séparer nettement toutes celles qui sont indépendantes de l'axiôme 11, et celles qui lui sont subordonnées, afin sans doute que les objections qui pourraient s'élever contre ce nouveau principe n'atteignissent que les théorèmes qui en dépendent *nécessairement*, les vingt-huit premières propositions restant hors de cause.

Il s'ensuivrait donc [ax. 11] que AB et CD, prolongées, se rencontreraient, et ne seraient pas parallèles [déf. 35], ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, AGH et GHD ne peuvent être inégaux. Donc AGH=GHD.

2° Puisque l'on a AGH=GHD, et AGH=EGB [pr. 15], il en résulte EGB=GHD.

3° Puisque EGB=GHD, on a en ajoutant BGH de part et d'autre [ax. 2], EGB+BGH=BGH+GHD.

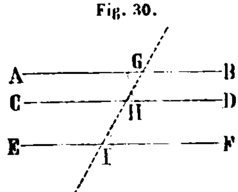
Or EGB+BGH=2dr. [pr. 13].

Donc aussi BGH+GHD=2dr. (a)

PROPOSITION 30.

Deux droites AB, CD (fig. 30) *parallèles à une troisième* EF, *sont parallèles entre elles.*

Fig. 30.



Coupons ces trois droites par la droite GI. Puisque AB et EF sont parallèles, on a AGI = GIF [pr. 29]. De même, puisque CD et EF sont parallèles, on a GIF=GHD. Donc AGI=GHD, et par suite AB et CD sont parallèles [pr. 27].

PROPOSITION 31.

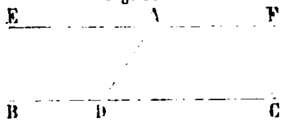
Par un point donné A (fig. 31), *mener une droite parallèle à une droite donnée* BC.

Sur BC prenons un point quelconque D, et joignons AD.

(a) Il eût été peut-être plus naturel de commencer par établir ce troisième cas, qui n'est qu'un autre énoncé de l'axiôme 11, pour en déduire ensuite les deux autres.

Construisons l'angle DAE=ADC [pr. 23], et prolongeons EA vers F. La ligne EF sera parallèle à BC [pr. 27] (a).

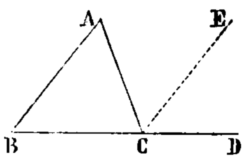
Fig. 31.



PROPOSITION 32.

Si l'on prolonge un côté BC (fig. 32) *d'un triangle* ABC, 1° *l'angle extérieur ainsi formé* ACD *est égal à la somme des*

Fig. 32.



deux angles intérieurs non adjacents CAB, ABC; 2° *la somme des trois angles* ABC, BCA, CAB *du triangle est égale à deux angles droits.*

1° Par le point C, menons CE parallèle à AB [pr. 31]. Les parallèles AB, CE étant coupées par AC, on a [pr. 29, 1°] BAC =ACE. Ces mêmes parallèles étant coupées par BD, on a [pr. 29, 2°] ABC=ECD. Donc [ax. 2] BAC+ABC=ACE+ECD =ACD.

2° Puisque BAC+ABC=ACD, on a, en ajoutant ACB de part et d'autre [ax. 2],

$$BAC+ABC+ACB=ACD+ACB.$$

Or $$ACD+ACB=2dr. \text{ [pr. 13].}$$

Donc aussi $$BAC+ABC+ACB=2dr.$$

(a) Cette proposition aurait été mieux placée avant la proposition 29. (Voy. la note relative à la proposition 28.)

ESSAI

D'UNE EXPOSITION RATIONNELLE DES PRINCIPES

DE LA

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

---

§ 1.

La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la *solidité* ou de *l'invariabilité* des figures (*).

Elle emprunte, en outre, à *l'expérience* un certain nombre de données que l'on appelle *axiômes*. — Nous verrons que les axiômes de la géométrie peuvent se réduire à quatre.

§ 2.

On appelle *surface* la limite de deux portions de l'espace.

Nous nous élevons à l'idée abstraite de surface par la considération d'une enveloppe ou cloison matérielle, dont nous réduisons indéfiniment l'épaisseur.

La limite de deux portions de surface s'appelle *ligne*.

Deux surfaces qui se rencontrent se limitent réciproquement.

L'intersection de deux surfaces est donc une ligne.

On s'est élevé à l'idée abstraite de ligne soit par la considération d'une tige très-mince, soit par celle de la rencontre de deux cloisons, ou de la trace laissée sur la superficie d'un corps par le contact d'une autre surface.

La limite de deux portions de ligne s'appelle *point*.

Une ligne peut être limitée par sa rencontre avec une surface ou avec une autre ligne.

Ainsi l'intersection de deux lignes ou d'une surface et d'une ligne est un point.

(*) Voy. Note I.

L'intersection de trois surfaces est aussi un point.

L'idée de point est venue de la considération d'un corps, dont les dimensions étaient indéfiniment réduites.

§ 3.

Nous avons défini les mots *surface, ligne, point,* en partant de l'idée de surface pour arriver jusqu'au point.

On peut suivre l'ordre inverse, en introduisant plus explicitement l'idée de mouvement (*).

On dira alors, en partant de l'idée de *point,* comme idée primitive, qu'une ligne est l'ensemble des positions occupées successivement dans l'espace par un point qui se meut.

De même, on peut considérer une surface comme l'ensemble des positions occupées successivement par une ligne qui se déplace, et qui en même temps peut changer de forme.

Toutes ces idées peuvent être rappelées par les représentations matérielles qui leur ont primitivement donné naissance.

§ 4.

L'étude des lignes et des surfaces constitue l'objet de la géométrie.

On donne le nom de *figure* à un ensemble quelconque de points, de lignes ou de surfaces, considéré comme invariable de forme.

Axiôme I. — *Trois points suffisent, en général, pour fixer dans l'espace la position d'une figure.*

§ 5.

L'expérience nous apprend cependant que, lorsqu'une figure se meut en tournant autour de deux de ses points, supposés fixes, il y a un ensemble de points, situés sur une certaine ligne, qui restent immobiles pendant que les autres se déplacent.

(*) Voy. Note II.

Ces points sont disposés sur la route que suivrait un rayon lumineux pour passer de l'un des points fixes à l'autre (en supposant ces deux points situés dans un même milieu homogène).

La ligne qui contient tous ces points, et qui nous apparaît comme la trajectoire habituelle des rayons lumineux, s'appelle la *ligne droite*. Donc

Axiôme II. — *Il existe une ligne, appelée* ligne droite, *dont la position dans l'espace est complétement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne peut s'appliquer exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs* (*).

Ainsi, d'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite (**).

Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue, quelque loin qu'on les prolonge au-delà de ces deux points.

En d'autres termes, on admet qu'une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens, et qu'elle ne peut l'être que d'une seule manière.

§ 6.

Si, en joignant deux points d'une surface par une ligne droite, la partie de la droite comprise entre ces deux points se trouve d'un certain côté de la surface, on dit que la surface est *concave* de ce côté, ou *convexe* du côté opposé.

L'expérience nous montre certaines surfaces, comme celle des eaux tranquilles, qui ne sont concaves d'aucun côté, et sur lesquelles une ligne droite, menée entre deux de leurs points, s'applique dans toute son étendue.

Une telle surface s'appelle une *surface plane* ou un *plan*.

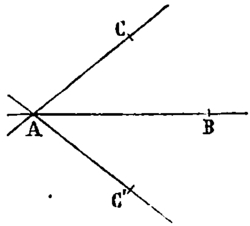
Soient A, B, C (*fig.* 33) trois points d'une surface plane. Si l'on joint le point C à un point quelconque A de la droite AB, la droite CA sera, ainsi que la droite AB, comprise tout entière

(*) Voy. Note III.

(**) C'est, sous une autre forme, l'axiôme 12 d'Euclide.

dans la surface. Si l'on fait mouvoir le point A tout le long de la droite AB, la ligne CA prendra une infinité de positions, qui par leur ensemble engendreront la surface.

Fig. 33.



Ainsi la surface plane peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite tournant autour d'un point fixe, et glissant le long d'une droite fixe qui ne passe pas par ce point.

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points A et B, ou, ce qui revient au même, autour de la droite AB comme charnière, jusqu'à ce qu'un point C du plan, non situé sur la droite AB, vienne rencontrer l'ancienne position du plan en un point C', situé de l'autre côté de AB par rapport à C; l'ancienne position pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de C'A le long de AB, et la nouvelle par le mouvement de CA le long de la même droite AB, il est clair que ces deux positions ne formeront qu'une seule et même surface, puisque leurs lignes génératrices coïncident dans chaque position; en sorte que la surface *retournée* coïncidera avec son ancienne position.

En général, si l'on donne à deux plans trois points communs, non en ligne droite, le même raisonnement fait voir que les deux plans coïncideront dans toute leur étendue. Donc

Axiôme III.—*Il existe une surface telle qu'une ligne droite, qui passe par deux quelconques de ses points, y est renfermée tout entière, et qu'une portion quelconque de cette surface peut être appliquée exactement sur la surface elle-même, soit directement, soit après qu'on l'a retournée, en lui faisant faire une demi-révolution autour de deux de ses points. Cette surface est le* plan.

Par trois points non en ligne droite, ou par une droite et un point situé hors de cette droite, ou encore, par deux droites qui se coupent, on peut toujours faire passer un plan, et l'on n'en peut faire passer qu'un.

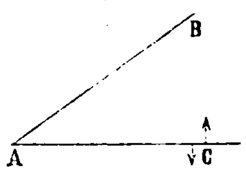
§ 7.

Lorsque deux droites se rencontrent, on dit qu'elles forment un *angle*.

On peut se représenter un angle comme la quantité plus ou moins grande dont il faut faire tourner une droite autour d'un de ses points pour la faire passer d'une position à une autre, en supposant que le mouvement s'accomplisse dans le plan mené par les deux positions.

On peut passer de la position AB (*fig.* 34) à la position AC,

Fig. 34.



en tournant dans un sens ou dans l'autre : l'angle décrit n'est pas le même dans les deux cas.

§ 8.

Pour aller d'un point A à un autre point B, en suivant une ligne droite, il faut connaître 1° la *direction* de cette droite, 2° la *longueur* de la portion de cette droite comprise entre les deux points.

Pour déterminer la direction d'une droite, on commence par imaginer un plan passant par les deux points A, B, et dans ce plan une droite fixe AC, menée par le point A. La direction de la droite AB sera connue, si l'on donne *l'angle* CAB qu'elle fait avec la droite fixe AC, c'est-à-dire la quantité dont il faut tourner, *dans le plan* ABC, suivant un sens convenu, pour passer de la position AC à la position AB.

Si l'on donne ensuite la *distance* AB, c'est-à-dire la quantité dont on doit s'avancer sur la droite AB, on aura enfin la position du point B.

§ 9.

Il est facile de s'expliquer pourquoi l'on a pris la ligne droite pour mesurer les distances, le plan pour mesurer les angles.

1° C'est que d'abord, par deux points donnés, on peut toujours mener une ligne droite, de même que, par deux droites données, on peut toujours faire passer un plan. — Il pourrait n'en plus être de même, si l'on prenait une ligne courbe ou une surface conique de forme donnée.

2° En second lieu, toute portion de ligne droite ou de plan peut être superposée à une ligne droite ou à un plan, de sorte que l'on peut constater immédiatement l'égalité ou l'inégalité de deux distances ou de deux angles.

§ 10.

Lorsqu'une droite, après avoir tourné toujours dans le même sens, revient à son ancienne position, on dit qu'elle a accompli un *tour* entier.

Lorsque la droite vient se placer sur son prolongement, on dit qu'elle a fait un *demi-tour*.

Lorsqu'elle s'arrête de manière à former avec sa première position et le prolongement de celle-ci deux angles égaux, elle a décrit un *quart de tour* ou *angle droit*, et sa nouvelle position est dite *perpendiculaire* à la première.

Le prolongement de la perpendiculaire est aussi une perpendiculaire.

La première droite est aussi perpendiculaire à la seconde.

Tous les angles droits sont égaux.

On a pris pour unité de mesure angulaire le quart de tour ou angle droit (*).

§ 11.

On appelle *cercle* une ligne courbe tracée sur un plan, et dont tous les points sont à la même distance d'un point fixe, appelé *centre*.

(*) Voy. Note V.

Si l'on fait tourner une droite dans un plan autour d'un de ses points, chacun des autres points de la droite décrira dans ce mouvement un cercle.

La distance constante d'un point du cercle au centre s'appelle *rayon*.

Si l'on fait tourner un cercle dans son plan autour de son centre, le cercle ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Un *diamètre* est une droite passant par le centre, et terminée de part et d'autre au cercle.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour de son centre et dans son plan, de telle sorte qu'un diamètre donné revienne coïncider avec son ancienne position, on voit que l'une des deux parties du cercle viendra coïncider avec l'autre. Donc un diamètre divise le cercle et la portion de plan qu'il entoure, chacun, en deux parties égales.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour d'un de ses diamètres, jusqu'à ce que son plan revienne coïncider, *par retournement*, avec son ancienne position, le cercle coïncidera encore avec lui-même, ce qui montre que les deux moitiés du cercle peuvent se superposer de deux manières différentes.

Deux cercles de même rayon coïncident nécessairement, dès que l'on fait coïncider leurs plans et leurs centres.

§ 12.

Tandis qu'une droite tourne autour d'un de ses points, supposé fixe, considérons le cercle décrit par un quelconque des points mobiles de la droite.

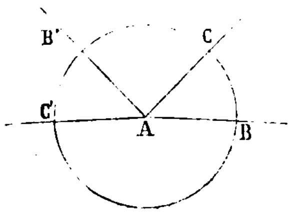
Pendant que la droite accomplit un tour entier, elle parcourt le cercle entier.

Lorsqu'elle fait un demi-tour, elle parcourt le demi-cercle.

Si on la fait tourner d'angles égaux à partir de deux positions AB, AB′ (*fig.* 35), les arcs décrits BC, B′C′ seront égaux. — Car, si l'on fait tourner le cercle autour de son centre jusqu'à ce que AB′ vienne se placer sur AB, l'égalité des angles fait voir que AC′ tombera sur AC, et par suite les arcs BC, B′C′ devront coïncider.

Si un angle est égal à la somme ou à la différence de deux autres, l'arc correspondant au premier angle sera égal à la somme ou à la différence des arcs correspondants aux deux autres angles.

Fig. 35.



De là résulte que

1° Un angle droit comprend entre ses côtés un quart de cercle ou *quadrant*.

2° Si un angle est multiplié par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est multiplié par le même nombre entier.

3° Si un angle est divisé par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est divisé par le même nombre entier.

4° Si deux angles ont entre eux un rapport quelconque, les arcs correspondants ont entre eux le même rapport.

Donc l'arc compris entre les côtés d'un angle varie proportionnellement à cet angle (*).

Si l'on veut donc comparer un angle à son unité, pour arriver à sa représentation numérique, il revient au même de comparer l'arc correspondant à cet angle avec l'arc correspondant à l'unité d'angle, et que l'on prend naturellement pour unité d'arc.

L'unité d'angle étant l'angle droit, l'unité d'arc sera le quadrant.

On exprime cette correspondance en disant qu'un *angle au centre* a pour *mesure* l'arc compris entre ses côtés.

L'avantage de la substitution des arcs de cercle aux angles consiste à offrir une représentation plus facile à saisir, et à

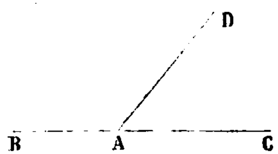
(*) En d'autres termes, si l'on prend pour unité d'arc l'arc correspondant à l'unité d'angle, en exécutant les opérations nécessaires pour l'évaluation numérique de l'angle, on se trouvera exécuter en même temps les opérations qui conduisent à l'évaluation numérique de l'arc, et l'on arrivera de part et d'autre au même résultat.

faciliter les opérations graphiques que l'on doit exécuter sur les angles.

§ 13.

Une droite AD (*fig.* 36), qui en rencontre une autre, fait avec les deux parties AB, AC de celle-ci deux angles dont la

Fig. 36.



somme est l'angle CAB = un demi-tour ou deux angles droits.

Ces deux angles sont dits ***supplémentaires***, et chacun d'eux est le ***supplément*** de l'autre.

Si l'on ajoute deux angles supplémentaires, il est clair que leurs côtés non communs seront en ligne droite.

Si deux droites se traversent mutuellement, les angles opposés par le sommet sont égaux, comme ayant même supplément. —On pourrait encore démontrer cette égalité, en retournant la figure de manière que chacun des côtés de l'angle supplémentaire commun vînt coïncider avec l'ancienne position de l'autre côté, auquel cas les deux angles en question seraient amenés à coïncider (*).

On peut encore énoncer la même proposition, en disant que les deux arcs de cercle compris entre deux rayons et entre les prolongements de ces rayons sont égaux entre eux.

§ 14.

Deux droites quelconques, rencontrées par une troisième,

(*) Nous ferons un continuel usage de ce procédé de *retournement* toutes les fois qu'il s'agira de démontrer l'égalité de deux parties d'une même figure. On peut présenter ce procédé autrement, en concevant que l'on plie en deux la figure autour de son axe de symétrie, qui est ici la bissectrice de l'angle supplémentaire.

forment avec celle-ci huit angles égaux deux à deux, et supplémentaires deux à deux, et auxquels, pour les désigner plus facilement, on a donné les noms de *correspondants*, d'*alternes-internes*, d'*internes d'un même côté*, etc.

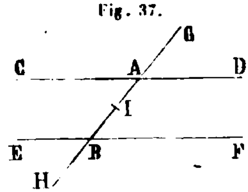
Si l'on suppose qu'une quelconque des cinq relations suivantes ait lieu :

1° Angles correspondants }
2° ...... alternes-internes } égaux.
3° ...... alternes-externes }
4° Angles internes d'un même côté } supplémentaires,
5° ...... externes .... }

les quatre autres relations ont nécessairement lieu.

Lorsque ces cinq relations ont lieu, les droites CD, EF ne peuvent avoir aucun point commun (*fig.* 37).—Concevons, en

Fig. 37.



effet, que la moitié de gauche de la figure soit rendue mobile, et qu'on lui fasse faire un demi-tour, dans son plan, autour du milieu I de la droite AB. Lorsque le point A sera arrivé en B et le point B en A, on voit aisément que les deux moitiés de la figure coïncideront dans tous leurs points, quelque loin que l'on suppose les droites prolongées. Il ne saurait donc y avoir un point de concours des droites dans une des moitiés de la figure, sans qu'il en existât un autre dans l'autre moitié ; et comme l'existence simultanée de deux points de rencontre est contraire à la nature de la ligne droite, il s'ensuit que les deux droites n'ont aucun point commun.

Donc, si l'on fait glisser un angle, de grandeur invariable, le long d'un de ses côtés, supposé fixe, le côté mobile se détache entièrement de son ancienne position, et ne conserve plus avec elle aucun point commun.

Deux droites situées dans le même plan, et ne pouvant se rencontrer, si loin qu'on les prolonge l'une et l'autre, sont dites *parallèles*.

Ainsi deux droites qui forment avec une troisième des angles satisfaisant à l'une des cinq conditions ci-dessus, sont parallèles.

En particulier, deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

En d'autres termes, par un point donné hors d'une droite, on ne peut pas mener plus d'une perpendiculaire à cette droite.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, par un point pris hors d'une droite, on peut toujours mener une parallèle à cette droite (*).

§ 15.

La parallèle étant menée, si on la fait tourner tant soit peu autour de l'un de ses points, elle finira par atteindre la première ligne, lorsqu'on les prolongera suffisamment l'une et l'autre ; de sorte que la position de parallélisme est *unique*. C'est là un nouveau principe, qui n'est pas renfermé dans les axiômes précédents, et que nous énoncerons ainsi :

AXIÔME IV.—*Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

Il résulte de là que

1° Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

2° Deux droites parallèles étant rencontrées par une sécante, les angles formés satisfont aux cinq relations du paragraphe précédent.

En particulier, toute perpendiculaire à l'une des parallèles est perpendiculaire à l'autre.

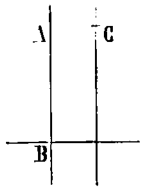
Donc, par un point donné hors d'une droite, on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite. — Car si AB (*fig.* 38) est une perpendiculaire menée à la droite donnée en un quelconque de ses points, la parallèle à AB, menée par le

---

(*) Voy. Note VII.

point donné C, sera la perpendiculaire demandée. — Nous avons d'ailleurs vu, dans le paragraphe précédent, que cette

Fig. 38.



perpendiculaire est la seule qui puisse être abaissée du point C sur la droite donnée.

§ 16.

Deux angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux.—On le voit en les comparant à l'angle formé par l'intersection de leurs côtés prolongés.

Réciproquement, deux angles étant égaux et dirigés dans le même sens, si leurs premiers côtés sont parallèles, leurs seconds côtés seront aussi parallèles.

Il résulte de là que, étant donné un système quelconque de droites, si l'on transporte ce système dans son plan, de manière qu'une des droites du système reste constamment parallèle à son ancienne position, chacune des autres droites restera également parallèle à son ancienne position.

On dit, dans ce cas, que le système a subi un *mouvement de translation parallèlement à lui-même.*

Plus généralement, si les deux côtés d'un angle tournent, dans le même sens, chacun d'une même quantité angulaire, autour de deux quelconques de leurs points, la grandeur de l'angle n'aura pas changé. — Et réciproquement, si l'on transporte un angle dans son plan, sans le retourner, chacun des côtés de l'angle fera le même angle avec son ancienne position.

En particulier, deux angles qui ont les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.

Si l'on fait tourner un système de droites dans son plan, autour d'un point quelconque qui lui soit invariablement lié, toutes les droites feront avec leurs anciennes positions respectives des angles égaux, dont la valeur commune est dite *l'angle de rotation* du système.

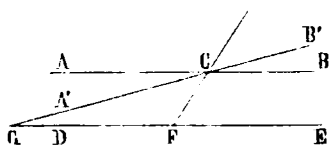
§ 17.

Deux droites concourantes forment avec une troisième des angles alternes-internes inégaux, dont le plus petit est celui qui est dirigé vers le point de concours.

En d'autres termes, si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur ainsi formé est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

Cette proposition est presque évidente, si l'on s'appuie sur l'axiôme IV. En effet, si, de la position de parallélisme, on fait passer la droite AB (*fig.* 39) à la position A′B′, en la faisant

Fig. 39.



tourner autour du point C, de manière qu'elle rencontre la droite DE en G; il est clair que, dans ce mouvement, l'angle BCF aura augmenté, tandis que son alterne-interne CFD sera resté constant. Donc, puisqu'on avait, avant le mouvement, BCF = CFD, on aura, après le mouvement, B′CF > CFD. — De même, A′CF < CFE.

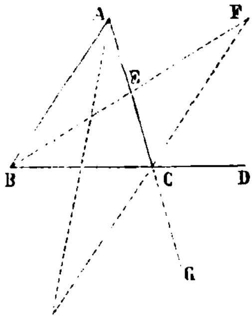
On voit en même temps que la valeur commune des différences B′CF — CFD, CFE — A′CF est égale à l'angle G que font entre elles les droites A′B′ et DE. Donc l'angle extérieur, formé par le prolongement d'un côté d'un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents, et la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

§ 18.

Si la manière précédente d'établir le théorème sur l'inégalité des angles alternes-internes formés par des droites concourantes est la plus directe et la plus simple, on ne peut nier cependant qu'elle ne s'appuie sur un axiôme dont ce théorème ne dépend pas nécessairement, et il semble alors plus logique de l'établir sans le secours de cet axiôme. C'est ce qu'a fait Euclide [prop. 16], et sa démonstration peut être présentée comme il suit :

Soit ABC (*fig.* 40) le triangle donné. Je dis que l'angle ACD est plus grand que son alterne-interne BAC. — En effet, joi-

Fig. 40.



gnons B au milieu E de la droite AC, et faisons tourner le triangle EBA autour du point E, jusqu'à ce que EA vienne s'appliquer sur son prolongement EC, et par suite le point A sur le point C. L'autre côté EB de l'angle BEA viendra aussi s'appliquer sur son prolongement. La ligne BA partira donc du point C pour aller rencontrer BEF dans l'intérieur de l'angle ACD. Donc l'angle ECF ou BAE sera contenu dans l'angle ACD. Donc enfin l'angle A est moindre que son alterne-interne ACD.

Par la même raison, les deux droites AB, AC étant coupées par BC, l'angle ABC sera moindre que son alterne-interne BCG, ou que son correspondant ACD = BCG.

Donc l'angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles extérieurs non adjacents.

En d'autres termes, dans un triangle, chaque angle est moindre que le supplément de l'un quelconque des deux autres.

Donc la somme de deux quelconques des angles d'un triangle est moindre que deux angles droits.

Tout triangle a au moins deux angles aigus.

Deux droites partant d'un même point ne peuvent avoir une perpendiculaire commune.

Si l'on mène, d'un même point, à une droite donnée, une perpendiculaire et une oblique, l'oblique fera un angle aigu avec la partie de la droite qui va du pied de l'oblique au pied de la perpendiculaire.

§ 19.

Après avoir établi ces inégalités indépendamment du *quatrième axiôme,* on démontrera, comme *Euclide* [prop. 32], les théorèmes d'égalité fondés sur cet axiôme.

Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur est égal à la somme des deux intérieurs non adjacents.

La somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Deux angles d'un triangle, étant donnés, déterminent le troisième.

§ 20.

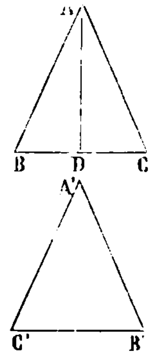
Du triangle isoscèle (*). — Soit ABC (*fig.* 41) un triangle isoscèle, dans lequel AB=AC. Retournons le plan de ce triangle, en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice AD de l'angle A ; ou, ce qui revient au même, plions la figure en deux, en faisant tourner une des moitiés autour de AD comme charnière. On voit alors que les deux moitiés de la figure se recouvrent parfaitement.

Si l'on ne veut pas d'abord introduire la bissectrice, on commencera par faire voir que le triangle retourné A'B'C'

(*) C'est à tort que plusieurs auteurs français se permettent d'écrire, au mépris de l'étymologie, *isocèle* pour *isoscèle*. C'est la même négligence que si l'on écrivait *cène* pour *scène*. Nous dirons en passant que plusieurs autres mots du langage mathématique sont généralement défigurés par un usage qui, malheureusement, tend de plus en plus à prévaloir. Cependant, malgré toutes les autorités qu'on pourrait nous citer, nous persisterons toujours à dire que *hypothénuse*, *parallélipipède*, etc., mis pour *hypoténuse*, *parallélépipède*, etc., constituent de véritables fautes d'orthographe.

peut se placer sur sa première position ABC. Alors la bissectrice de l'angle C'B'A' coïncide avec celle de l'angle BAC, le

Fig. 41.



milieu de C'B' avec le milieu de BC, etc. Donc

Théorème.—Dans un triangle isoscèle, 1° les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ; 2° la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base ; 3° elle partage cette base en deux parties égales.

Autre énoncé. — Si d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et deux obliques égales entre elles, 1° ces obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire; 2° elles sont également inclinées sur la perpendiculaire; 3° elles sont également inclinées sur la base donnée.

Donc tout point à égale distance des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.

Si donc chacun des deux points A et B de la droite AB (*fig.* 42) est équidistant des extrémités C et C' de la droite CC', AB sera perpendiculaire sur le milieu de CC'.

Autre énoncé.—Si l'on joint, dans un cercle, le centre aux deux extrémités d'une corde, 1° les deux rayons feront avec la corde des angles égaux ; 2° la bissectrice de l'angle des deux rayons (laquelle est aussi la bissectrice de l'arc) est perpendiculaire à la corde ; 3° elle partage cette corde en deux parties égales.

Donc, si deux cercles ont deux points communs, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

Remarque. — La bissectrice de l'angle A (*fig.* 41), satisfait à quatre conditions :

1° Elle passe au point A.

2° Elle partage l'angle A en deux parties égales.

3° Elle passe au milieu D de BC.

4° Elle est perpendiculaire à BC.

Or deux de ces quatre conditions, combinées convenablement, déterminent complétement la droite AD. De là résultent autant de réciproques du théorème précédent. Ainsi, dans un triangle isoscèle,

La droite qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à cette base, et bissectrice de l'angle au sommet ;

La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base partage cette base et l'angle au sommet, chacun en deux parties égales ;

La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base passe au sommet, et partage l'angle au sommet en deux parties égales.

— On peut énoncer encore ces réciproques comme il suit :

Dans un cercle, la droite qui joint le centre au milieu d'une corde est perpendiculaire à la corde et bissectrice de l'arc ;

La perpendiculaire abaissée du centre sur une corde est bissectrice de la corde et de l'arc ;

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc.

§ 21.

Considérons maintenant un triangle qui a deux angles égaux, ces deux angles étant nécessairement aigus.

En retournant le triangle et l'appliquant sur son ancienne position ; ou encore, en pliant la figure autour de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base (*), on voit que les deux moitiés de la figure coïncident l'une avec l'autre ; par conséquent, le *triangle est isoscèle.*

Autre énoncé. — Deux obliques également inclinées sur la base sont égales, et par suite s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Si deux droites, coupées par une troisième, forment avec celle-ci des angles $\left\{\begin{array}{l}\text{internes}\\ \text{externes}\end{array}\right\}$ d'un même côté égaux, ou des angles $\left\{\begin{array}{l}\text{correspondants}\\ \text{alternes-internes}\\ \text{alternes-externes}\end{array}\right\}$ supplémentaires, les trois droites forment un triangle isoscèle.

§ 22.

Soit enfin un triangle, dans lequel le sommet se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de la base.

En retournant la figure, ou en la pliant autour de la perpendiculaire, on voit que le *triangle est isoscèle.*

Ainsi un triangle, dans lequel la perpendiculaire élevée au milieu de la base passe par le sommet, est isoscèle.

Autre énoncé. — Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est équidistant des deux extrémités de cette droite.

Autre énoncé. — Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales.

— De cette proposition, jointe à sa réciproque du § 20, il résulte que la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités de cette droite.

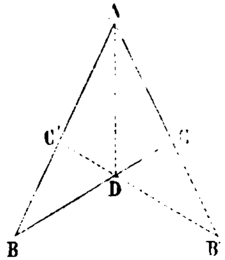
En d'autres termes, c'est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par les extrémités de la droite.

(*) Cette perpendiculaire rencontre les deux côtés *au-dessus* de la base (axiôme IV et corollaires).

§ 23.

Inégalités dans un triangle quelconque.— Si deux côtés AB, AC (*fig.* 42) d'un triangle sont inégaux, au plus grand côté AB est opposé un plus grand angle C.

Fig. 42.



Voir *Euclide*, I, 18.

Autrement, en retournant le triangle, et le plaçant sur son ancienne position (ou, ce qui revient au même, en pliant le triangle autour de la bissectrice AD de l'angle au sommet), on forme le triangle BDC', dans lequel l'angle AC'D, extérieur au triangle, est plus grand que l'angle intérieur non adjacent B.

— *Réciproquement*, si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté (*Euclide*, I, 19).

§ 24.

Dans un triangle, un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres (*Euclide*, I, 20).

Il s'ensuit que, dans un triangle, un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.

Corollaires. — Dans un polygone, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.

En d'autres termes, une ligne droite est plus courte qu'une ligne polygonale ayant les mêmes extrémités.

Un contour polygonal convexe est plus court qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe en aboutissant aux mêmes extrémités.

Un contour polygonal fermé et convexe est moindre qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe de toutes parts (*).

§ 25.

Si d'un point on mène à une droite une perpendiculaire et diverses obliques,

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;

2° Si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.

Autre énoncé. — Si la hauteur d'un triangle ne tombe pas au milieu de la base, au plus grand segment est adjacent un plus grand côté.

Pour démontrer cette proposition, si les obliques sont de côtés différents de la perpendiculaire, on compare l'une d'elles à une oblique égale à l'autre, et menée du même côté de la perpendiculaire que la première. Le triangle formé par les deux obliques a alors un angle obtus, opposé à l'oblique la plus éloignée ; donc celle-ci est la plus longue.

On peut encore énoncer cette proposition ainsi :

Tout point hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est plus rapproché de celle des deux extrémités de la droite qui est située du même côté que lui par rapport à la perpendiculaire.

§ 26.

Réciproquement, dans un triangle non isoscèle, la *hauteur* est plus rapprochée du plus petit côté.

Autre énoncé. — De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Tout point inégalement distant des deux extrémités d'une droite est hors de la perpendiculaire élevée

---

(*) Pour la comparaison des longueurs curvilignes aux longueurs rectilignes, voy. Note VIII.

sur le milieu de cette droite, et il est du même côté de cette perpendiculaire que celle des extrémités de la droite dont il est le plus rapproché.

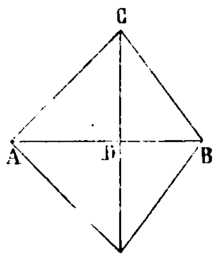
§ 27.

Cas d'égalité des triangles. — 1° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun (*Euclide*, I, 4).

2° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. — La démonstration donnée par *Legendre* (liv. I, pr. VII) est plus simple que celle d'*Euclide* (I, 26).

3° Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun. — Adossons les deux triangles (*fig.* 43) de manière que leurs sommets C, C′ se trouvent de

Fig. 43.



côtés différents de la base commune AB. Chacun des points A, B étant équidistant des points C et C′, la ligne AB est perpendiculaire sur le milieu de CC′. Si donc on replie la figure autour de AB, le point C′ tombera en C.

—*Autrement*, la perpendiculaire AB sur la base du triangle isoscèle ACC′ étant bissectrice de l'angle au sommet, on a CAB = BAC′, ce qui ramène au premier cas d'égalité.

— On peut dire encore que, les triangles CAC′, CBC′ étant isoscèles, on a l'angle ACC′ = AC′C, l'angle BCC′ = BC′C, d'où ACC′ ± BCC′ = AC′C ± BC′C, c'est-à-dire ACB = AC′B, etc.

§ 28.

Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés de même nom égaux chacun à chacun.

1° Si ce sont les deux côtés de l'angle droit, on est dans le premier cas du paragraphe précédent.

2° Si ce sont l'hypoténuse et un autre côté, on adosse les deux triangles rectangles, de manière à former un triangle isoscèle, que sa *hauteur* partage en deux triangles égaux.

— Cette dernière proposition est un cas particulier de la suivante :

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal.

§ 29.

Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, au plus grand angle est opposé un plus grand côté (*Euclide*, I, 24).

— *Réciproquement*, si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième inégal, au plus grand côté est opposé un plus grand angle (*Euclide*, I, 25).

APPENDICE

Note I.

Sur l'invariabilité des figures.

Toute la Géométrie est fondée sur l'idée de l'invariabilité des formes. On commence par admettre qu'il existe dans les figures une certaine propriété, qui subsiste lorsque ces figures se trouvent transportées dans une autre région de l'espace.

Cette propriété ne saurait être définie en termes géométriques, sans pétition de principe. L'idée d'invariabilité de forme nous vient de l'expérience. Après avoir acquis l'idée de grandeur ou d'étendue par la considération du mouvement (voy. la Note suivante), nous constatons que certains corps, ceux surtout qui offrent au toucher le plus de résistance, nous présentent toujours, de quelque manière qu'on les déplace, des dimensions et des configurations que nous jugeons être les mêmes, c'est-à-dire qui, appréciées d'après le mouvement de l'œil, en tenant compte de l'éloignement plus ou moins grand, nous causent des impressions toujours identiques. Nous donnons à ces corps le nom de *corps solides*.

Nous dépouillons ensuite, par abstraction, ces corps de toutes les parties dont la considération ne nous intéresse pas; ou, si l'on veut, nous supposons ces parties parfaitement translucides et pénétrables; et l'ensemble des parties conservées ou restées visibles constitue ce qu'on appelle une *figure géométrique*.

Note II.

Sur le mouvement géométrique.

C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du *mouvement*.

L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du *mouvement géométrique*, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.

Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement *dans le temps*, objet de la *cinématique*, ne peut pas dépendre d'une autre science que de la *géométrie pure*.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions nouvelles de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu et malgré eux; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de géométrie, dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée.

Note III.

Sur les axiômes relatifs à l'existence du plan et de la ligne droite.

Nous avons admis, pour plus de simplicité, comme deux axiômes indépendants, l'existence de la ligne droite et celle du plan. Les deux géomètres dans les ouvrages desquels nous trouvons la vraie théorie des parallèles, W. Bolyai et Lobatschewsky, ont poussé plus loin leurs recherches, et ont fondé les définitions du plan et de la ligne droite sur d'autres axiômes plus simples et d'une évidence plus frappante. Voici à peu près comment Bolyai établit ces notions (*).

On peut d'abord définir l'*égalité* de deux distances indépendamment de la ligne qui sert à les mesurer, et sans laquelle on ne pourrait définir ce que c'est qu'une distance plus grande qu'une autre. Si A et B, A' et B' sont deux systèmes de points, on peut imaginer que chacun de ces systèmes fasse partie d'un système solide quel-

(*) *Tentamen in elementa matheseos*, etc. T. I, p. 468 et suiv. Maros Vásárhely, 1833.—*Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.*, § 33 et suiv. Maros Vásárhely, 1851.

conque (*). Si l'on peut transporter l'une de ces figures sur l'autre de manière que, A étant placé sur A', B puisse se placer sur B', on dira que les *distances* AB, A'B' sont *égales*.

Le point A étant considéré comme fixe, l'ensemble de tous les points B de l'espace également distants de A forme une surface continue et fermée, appelée *sphère*, et dont le point A est le *centre*.

Une sphère partage l'espace en deux parties, l'une *intérieure*, l'autre *extérieure*. Un point ne peut passer de l'une de ces parties dans l'autre sans avoir rencontré la sphère.

Une sphère ne fait que glisser sur elle-même, lorsqu'on la fait tourner d'une manière quelconque autour de son centre.

Deux sphères de centres différents ne peuvent coïncider.

D'un centre donné, on peut toujours décrire une sphère passant par un point donné.

On peut aussi, d'un centre donné, décrire une sphère qui renferme dans son intérieur une figure donnée quelconque de dimensions finies.

Soient S, S' deux sphères de centres O, O', et telles que chacune d'elles passe par le centre de l'autre. Puisque chacune de ces sphères a une partie intérieure à l'autre sphère, il faudra nécessairement qu'elles aient des points communs. Si A est un de ces points, et qu'on fasse tourner l'ensemble des deux sphères autour des deux centres, supposés fixes, A décrira le lieu des points communs aux deux sphères. Ce lieu sera une courbe fermée C, pouvant glisser sur elle-même, et à laquelle nous donnerons le nom de *cercle*.

Si l'on retourne la figure, de manière que O vienne en O' et O' en O, S coïncidera avec S' et S' avec S. Par suite le cercle C retombera sur son ancienne position. Donc le cercle est superposable à lui-même par retournement.

Des centres O et O' décrivons deux autres sphères S_1, S'_1, égales entre elles, et enveloppant respectivement les sphères S et S'. Chacun des centres O, O' sera à la fois intérieur aux deux sphères, d'où l'on conclut aisément que les deux sphères, ayant une partie intérieure commune, doivent nécessairement se rencontrer. On verrait de même que leur intersection est un nouveau cercle C_1, pouvant glisser sur lui-même, et superposable à lui-même par retournement.

(*) Voy. la Note I.

Si l'on construit ainsi deux séries de sphères égales, s'étendant d'une manière continue jusqu'à l'infini, le lieu des cercles suivant lesquels elles se coupent deux à deux s'étendra indéfiniment, et formera une surface pouvant glisser sur elle-même, lorsqu'on la fait tourner autour des points O, O', et superposable à elle-même par retournement. Nous appellerons cette surface un *plan*.

Lorsqu'on retourne la figure en plaçant O en O' et O' en O, on peut faire en sorte qu'un point A du cercle C revienne sur son ancienne position. De part et d'autre de A, les points du cercle se placeront deux à deux les uns sur les autres, et se distribueront ainsi symétriquement par rapport à A. Si l'on désigne par M, M' deux quelconques de ces points symétriques, ils pourront être considérés comme les positions simultanées de deux mobiles partant de A et parcourant le cercle en sens contraire. Ces mobiles se rencontreront nécessairement en un point B, qui, avec A, partagera le cercle en deux moitiés superposables AMB, AM'B.

Le retournement de la figure pourra être considéré comme produit par une demi-révolution autour des points A et B, que le retournement laisse immobiles.

Dans la demi-révolution de la figure autour de A et de B, chaque point m du plan, appartenant au cercle c, décrit un demi-cercle, en venant se placer sur un point m' du même cercle c, et tant que ce cercle ne se réduira pas à un point unique, il ne pourra revenir à sa première position qu'après avoir achevé la révolution entière.

Or, dans chaque cercle c, il y a deux points qui se trouvent dans leur position primitive après la demi-révolution. Donc ses points ont dû décrire des cercles nuls, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas changé de place pendant la révolution.

L'ensemble de tous ces points forme une ligne qui reste immobile lorsqu'on la fait tourner autour de deux de ces points. Cette ligne s'appelle la *ligne droite*.

Transportons maintenant la droite le long d'elle-même, de manière que deux de ses points a, b tombent sur deux autres points a', b' de la première position. La nouvelle position restera immobile, lorsqu'on la fera tourner autour de a' et de b', et l'on en conclut qu'elle coïncidera nécessairement dans toute son étendue avec l'ancienne position, les points de celle-ci étant les seuls qui décrivent des cercles nuls. Donc on peut faire glisser une droite le long d'elle-même sans qu'elle cesse de coïncider avec sa première position.

Si d'un point a comme centre on décrit une sphère qui enveloppe les points A et B, et rencontre la droite en b et b', la portion de droite ab pourra être placée de manière que a tombe en b' et b en a. Alors se trouvera comblée la lacune qui existait encore entre A et B.

En faisant maintenant tourner la figure autour de OO', la portion de droite AB engendrera une portion de plan qui comblera la lacune laissée dans l'intérieur du cercle C.

Si l'on fait tourner la droite ab autour de a de manière que b reste dans le plan, la droite restera tout entière dans le plan. Car si elle en sortait d'un côté, elle ne serait plus superposable à elle-même, lorsqu'on ferait faire au plan une demi-révolution autour des points du cercle qui sont les milieux des deux arcs ab.

On peut donc joindre par une droite le point a à un point quelconque m du plan.

Si l'on fait mouvoir la droite am le long d'une autre droite quelconque bm, tracée sur le plan, la droite mobile décrira le plan.

Si l'on fait tourner le plan autour du point a de manière que bm rencontre toujours deux positions de am, le plan ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Il en sera de même si l'on fait glisser de la même manière la droite am le long d'elle-même.

Donc le plan est une surface superposable à elle-même lorsqu'on la fait glisser sur elle-même d'une manière quelconque, et de plus superposable à elle-même par retournement.

De là résulte que par trois points non en ligne droite on peut toujours faire passer un plan et un seul.

Note IV.

Sur la définition de la ligne droite.

Supposons un observateur placé au milieu d'une vaste plaine. Il aperçoit de loin un point, et veut se transporter en ce point.

L'instinct le porte à marcher dans la *direction* suivant laquelle ce point lui envoie ses impressions lumineuses. La preuve que ce procédé est *instinctif*, c'est qu'il est suivi par tous les animaux.

L'expérience, aidée de la réflexion, lui apprend plus tard qu'en suivant cette route, il accomplit le trajet en moins de temps que s'il se fût écarté de la direction des rayons lumineux.

De là cette vérité vulgaire, mais assez complexe au point de vue géométrique : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* C'est cet énoncé que les auteurs de la plupart des traités de géométrie ont cru pouvoir prendre pour définition de la ligne droite.

En discutant l'origine et la véritable signification de cette notion du sens commun, nous verrons sans peine que l'inscription d'une telle proposition en tête des éléments de géométrie indique que l'on n'a pas suffisamment analysé les idées très-simples qui se rapportent à cet objet.

Certains philosophes de l'antiquité, au dire de *Proclus*, voulant railler agréablement la 20^e proposition d'*Euclide*, prétendaient que les ânes eux-mêmes l'admettaient sans démonstration. On peut répondre à cela que les ânes, en suivant telle route plutôt que telle autre pour atteindre leur but, ne se préoccupent en aucune façon de la longueur du chemin. Leur instinct les porte à marcher dans la ligne suivant laquelle l'objet impressionne leurs sens, et cette ligne sera la ligne droite, parce que c'est la route que suivent la lumière, le son, etc. Il n'est pas impossible, d'ailleurs, que les animaux fassent quelquefois acte d'intelligence, en adoptant le chemin que l'expérience leur a montré être le plus court.

C'est donc l'expérience, aidée de la mémoire et de la réflexion, qui nous apprend que le chemin rectiligne est, toutes choses égales d'ailleurs, le plus tôt parcouru.

Le jugement concordant, que l'on forme en appréciant *au coup d'œil* la longueur du chemin, doit être rapporté à la même origine, puisque l'idée de grandeur, que nous transmet immédiatement le sens de la vue (abstraction faite des notions fournies par les autres sens, ainsi que par la mémoire et la réflexion), n'a pas d'autre source que le mouvement plus ou moins considérable que doit exécuter l'axe de l'œil pour parcourir tel ou tel contour.

Il nous paraît donc établi que l'adoption du chemin rectiligne a une origine primitivement instinctive et irréfléchie, et que sa propriété de *minimum*, qui en a fait conserver l'usage, nous a été révélée par l'expérience.

Examinons maintenant de plus près quelle est la signification de ce jugement, quelle en est l'exacte interprétation géométrique, après qu'on l'a, pour ainsi dire, épuré par la faculté d'abstraction, et dépouillé de toutes les circonstances physiques qui avaient accompagné sa formation.

Le chemin de *direction constante* (*), que nous parcourons en suivant le rayon lumineux, nous conduit à l'idée d'une ligne de direction constante, en remplaçant, par la pensée, notre corps par un point, c'est-à-dire en réduisant indéfiniment les dimensions de notre corps par rapport à ce qui l'environne; ce qui donne à l'idée de chemin une précision de plus en plus grande.

En appliquant le même procédé d'abstraction aux autres chemins possibles, on a dû continuer d'abord, sans s'en rendre compte, à mesurer la longueur du chemin par le nombre des pas, le temps du parcours par le temps employé à faire un pas; l'idée de temps n'étant ici, du reste, qu'une idée auxiliaire, qui doit être éliminée à la fin de l'opération intellectuelle. Dans le langage abstrait, cela revient à supposer le mobile décrivant un polygone, et à admettre, comme un fait d'expérience, qu'un côté d'un polygone est moindre que la somme de tous les autres.

Pour aller plus loin, pour acquérir des notions relatives à la longueur des lignes courbes, on est forcé de recourir à un nouveau procédé, au procédé du passage à la limite, qui remplace la comparaison directe, devenue impossible.

Il ne suffit pas, en effet, de faire appel ici à l'idée vague que chacun a ou croit avoir de la longueur d'une courbe. On peut bien, il est vrai, définir nettement ce qu'on entend par un arc plus grand ou plus petit qu'un autre, lorsque ces deux arcs sont comptés à *partir d'une origine commune*. Mais déjà, dès qu'il ne s'agit plus du cercle ou de l'hélice, il n'est plus possible de comparer directement deux arcs de la même courbe, lorsqu'ils ne sont pas comptés à partir de la même origine. A plus forte raison cette comparaison est-elle impossible, lorsque l'on considère des arcs pris sur des courbes différentes.

Il faut bien, cependant, que l'on trouve un moyen de suppléer à cette comparaison directe, sans quoi, en disant que telle ligne est plus ou moins longue que telle autre, on ne ferait que prononcer une phrase *absolument vide de sens*. Voyons donc quels moyens peuvent proposer ceux qui se refusent à invoquer le principe des limites.

1° Le temps employé par le mobile pour parcourir un certain chemin. — Mais il faut alors supposer tacitement que la *vitesse* est

(*) Nous jugeons que la direction est constante, parce que nous n'avons fait aucun effort pour imprimer à notre corps un mouvement de rotation.

la même dans les deux chemins que l'on veut comparer. Qu'est-ce maintenant que la vitesse? Ou, si l'on renonce à définir la vitesse, en l'admettant au nombre des quantités *primitives*, qu'est-ce que deux vitesses égales? — De quelque manière que l'on essaye de répondre à cette question, on se trouvera toujours obligé, tôt ou tard, de passer par les notions de limites, et l'on n'aura fait que reculer inutilement la difficulté, en introduisant des auxiliaires inutiles, pour faire une comparaison qu'on aurait aussi bien pu faire directement.

2° On applique un fil flexible sur la courbe, puis on le redresse.— On suppose ici le fil *inextensible*. Qu'est-ce donc qu'un fil inextensible, dès qu'il cesse d'être en ligne droite ou d'être appliqué sur la même courbe? Toutes les définitions que l'on peut tenter de donner du phénomène physique de l'allongement d'un fil curviligne reviennent, en définitive, à ôter à ce fil (supposé infiniment mince) son caractère de courbe continue, pour en faire un polygone à côtés *très-petits*, et ce n'est que dans le passage à la limite que l'on arrive à supposer ces côtés *infiniment petits*. On voit donc que, là encore, on n'a fait qu'obscurcir la question en la compliquant de notions physiques étrangères.

Telles sont les difficultés insurmontables que l'on rencontre, lorsqu'on veut définir la plus simple des figures de géométrie au moyen d'une de ses propriétés *secondaires*, qui n'est, au fond, qu'un théorème d'une nature assez compliquée, et exigeant, pour être compris, la connaissance préalable d'un grand nombre d'autres propositions.

Nous disons que la propriété de *minimum* de la ligne droite est une propriété secondaire. En effet, aucune des propositions fondamentales de la géométrie ne repose sur cette propriété, du moins quand on prend, pour arriver à leur démonstration, la voie la plus directe et la plus naturelle.

La propriété dont il s'agit a son analogue dans toutes les figures symétriques, sans que cependant on ait jamais songé à la prendre comme définition pour une autre figure que pour la ligne droite. Que dirait-on, en effet, d'un auteur qui définirait le cercle comme la courbe d'aire *maximum* parmi celles d'un périmètre donné? Il serait difficile de déduire simplement, de cette définition, les propriétés fondamentales du cercle. Et cependant c'est ce même procédé que la plupart des auteurs suivent pour la ligne droite, et la force de l'habitude nous empêche seule d'en sentir l'étrangeté.

L'origine de cette prétendue définition de la ligne droite remonte à une fausse interprétation d'un passage d'*Archimède*. Lorsque ce grand géomètre voulut, le premier, aborder les problèmes de la rectification du cercle et de la quadrature de la sphère, il lui fallut bien définir ce qu'il entendait par *longueur* d'une ligne courbe ou par *aire* d'une surface courbe. Pour y parvenir, il posa comme des *principes* (ὑποθέσεις) certaines propositions, sur lesquelles il s'appuya comme sur de nouveaux axiômes :

1° La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

2° Un contour convexe est moindre qu'un contour qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités.

3° La surface plane est la plus petite de toutes celles qui sont terminées au même contour.

Etc.

On peut aisément montrer, comme chacun sait, que la méthode d'exhaustion, employée par les Anciens dans leurs démonstrations, est identique, pour le fond, avec la méthode des limites, par laquelle les Modernes l'ont remplacée. La limite d'une quantité variable n'est déterminée, en effet, que par l'exclusion de toutes les valeurs de la variable, autres que celle que l'on ne peut définir directement, et que la variable ne peut en général jamais atteindre ; et ce procédé est précisément celui de la méthode d'exhaustion.

En suivant le même ordre d'idées, on reconnaîtra facilement que les principes que nous venons de rapporter, étant interprétés d'après les idées modernes, ne sont autre chose que des *définitions* de la longueur d'une ligne courbe, ou de l'aire d'une surface courbe. Ainsi *Archimède*, ne pouvant définir directement la ligne droite qui représente une longueur curviligne, a défini celle-ci comme quelque chose plus grand que tous les contours rectilignes inscrits, et plus petit que tous les contours rectilignes circonscrits. Comme on peut faire en sorte que deux contours rectilignes, pris dans chacune de ces deux séries, soient rendus aussi peu différents que l'on voudra l'un de l'autre, il en résulte que ces deux séries tendent vers une limite commune, qui est la longueur de la courbe. On voit donc que nous sommes arrivés à la définition moderne de la longueur de l'arc de courbe, sans faire autre chose que de traduire et de développer l'idée d'*Archimède*, et que les principes que nous avons cités, loin de contenir une définition de la ligne droite, servent au contraire à définir, au moyen de la ligne droite, la longueur de la ligne courbe.

On peut remarquer en même temps que les auteurs qui ont fait cette confusion au sujet de la ligne droite auraient dû, pour rester conséquents avec eux-mêmes, prendre le troisième principe pour définition du plan, les propriétés exprimées par les principes 1 et 3 étant complétement analogues.

Note V.

Sur l'unité angulaire.

Les diverses fonctions trigonométriques, le sinus, la tangente, etc., sont définies d'abord pour le premier quadrant, dans l'intervalle duquel elles parcourent entièrement la série de leurs valeurs numériques. C'est par l'introduction des signes + et — que l'on parvient à donner, aux angles non compris entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, des fonctions trigonométriques, qui ne sont autres que celles de certains angles du premier quadrant, prises avec des signes convenables. On sait, en effet, que, pour obtenir les fonctions trigonométriques d'un angle <0 ou $>\frac{\pi}{2}$, on commence par ajouter ou retrancher le nombre de quadrants nécessaire pour ramener l'angle donné à être compris dans le premier quadrant, de sorte qu'il suffit d'avoir une table des fonctions trigonométriques dressée seulement pour le premier quadrant.

Si l'on exprime maintenant un angle en prenant le quadrant pour unité, et le soumettant à la division décimale, l'angle se composera d'une partie entière, positive ou négative, et d'une partie décimale, que l'on pourra toujours supposer positive. L'opération de l'addition ou de la soustraction des quadrants sera alors complétement analogue à celle du changement de caractéristique dans les logarithmes décimaux. C'est déjà là un premier avantage du choix de la véritable unité angulaire.

Si, comme quelques auteurs l'ont proposé, on prenait le cercle entier pour unité, le quadrant serait représenté par la fraction 0,25, et, pour opérer la réduction d'un angle au premier quadrant, on serait obligé d'altérer les deux premières décimales, ce qui serait beaucoup moins simple dans la pratique.

L'adoption, comme unité angulaire, du centième de quadrant ou *grade* n'a d'autre raison d'être que le désir de se rapprocher du degré sexagésimal. Il n'en peut résulter aucun avantage sérieux, mais seulement une complication dans l'écriture, et une perpétuelle confusion des degrés *nouveaux*, des minutes *nouvelles*, etc., avec les degrés *anciens*, les minutes *anciennes*, etc.

Nous avons signalé une première analogie entre la division décimale du quadrant et les logarithmes décimaux du système de *Briggs*, La raison de cette analogie est facile à saisir. Si l'on considère une exponentielle à exposant complexe,

$$a^{x+y\sqrt{-1}},$$

la partie réelle de l'exposant est un logarithme réel, le coefficient de $\sqrt{-1}$ un arc de cercle; de sorte qu'on peut regarder les arcs de cercle comme des logarithmes imaginaires. D'après cela, si l'on rapporte les logarithmes au système décimal, les déplacements de la virgule dans la valeur numérique de l'exponentielle répondront à des changements de la seule caractéristique; et, d'après la nature des exponentielles réelles, qui ne sont pas des fonctions à période réelle, la caractéristique pourra prendre toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$.

De même, si l'on adopte la division décimale pour les logarithmes imaginaires, les changements de quadrant, qui reviennent à la multiplication de l'exponentielle par une puissance de $\sqrt{-1}$, correspondront à des changements de la *caractéristique* du logarithme imaginaire; et, d'après le caractère périodique de l'exponentielle imaginaire, cette exponentielle parcourra le cycle entier de ses valeurs, lorsqu'on fera varier la caractéristique de 0 à 4, ou encore, ce qui revient au même, de -2 à $+2$, l'addition d'une unité à la caractéristique équivalant à la multiplication par $\sqrt{-1}$.

Ainsi, de même que 10 est la base des logarithmes réels décimaux, $e^{\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}}$ sera celle des logarithmes imaginaires décimaux.

Les autres unités angulaires dont on fait usage ont aussi leurs analogues dans les logarithmes, et il est aisé de s'en rendre compte au moyen des considérations précédentes.

Dans le calcul littéral, on emploie constamment les logarithmes *naturels*, relatifs à la base e, et l'on prend pour unité angulaire l'arc égal au rayon. Dans ce cas, l'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux réels n'est plus un nombre entier; c'est le logarithme naturel de 10, ou le nombre 2,302585..... L'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux imaginaires est, de même, le nombre irrationnel $\frac{\pi}{2}$. Pour calculer numériquement dans ce système *naturel*, on serait donc obligé de se servir de caractéristiques *fractionnaires*, ce qui serait peu commode dans la pratique.

Il reste à chercher l'analogue de la division sexagésimale du cercle. Il faut, pour cela, remonter dans l'antiquité au temps où les astronomes faisaient usage de la division sexagésimale du rayon, et où le calcul proprement dit était trop méprisé des hommes de science pour qu'ils songeassent à en perfectionner les méthodes. Les inventeurs des logarithmes se sont bien gardés de reprendre ces traditions, en choisissant 60 ou 90 pour bases de leurs systèmes, et la numération sexagésimale des logarithmes imaginaires n'a plus aujourd'hui rien qui lui corresponde dans la numération des nombres réels, du moins dans les pays qui, comme la France, ont soumis leur système métrique à la division décimale.

On se demande souvent pourquoi les astronomes français, après avoir proposé les premiers la division décimale du quadrant (*), que les étrangers appellent encore la *division française*, ont été eux-mêmes les premiers à l'abandonner. Il y a, pour expliquer ce fait, une raison très-grave dans la nécessité où sont les astronomes de puiser sans cesse dans des registres d'observations, qui, à toutes les époques, ont été construits d'après le système sexagésimal. On conçoit quel immense travail entraînerait la conversion de tant de nombres d'un système dans l'autre, et quelle source d'erreurs et de confusion résulterait d'un tel remaniement, sans parler des inconvénients qu'éprouveraient les observateurs actuels, forcés de changer leurs habitudes et leurs instruments. L'astronomie, enchaînée par son passé, a donc sagement fait de renoncer à un perfectionnement qui, en somme, aurait présenté plus de dangers que d'avantages réels.

(*) Voyez, pour plus de détails, l'*Introduction des Tables décimales de Hobert et Ideler*. Berlin, 1799.

Mais les astronomes observateurs ne sont pas seuls à se servir des tables trigonométriques. Or, *pour tout autre usage que le calcul immédiat des observations faites avec des instruments portant la division sexagésimale*, il est *incontestable* que la division décimale présenterait des avantages immenses, et nous ne pouvons comprendre la persistance avec laquelle la plupart des calculateurs la rejettent. Il n'est pas besoin d'une bien grande expérience du calcul pour voir combien on gagnerait à l'adopter dans les calculs de mécanique céleste, de géodésie, de topographie, en un mot, dans tous les cas où l'on n'a pas à lire ses nombres dans un registre d'observations astronomiques.

La seule bonne raison que l'on pourrait nous opposer, c'est le manque de bonnes tables trigonométriques décimales. Les seules tables à sept figures construites dans ce système, celles de *Hobert* et *Ideler*, de *Borda* et de *Callet*, sont mal disposées pour les usages pratiques, l'intervalle des divisions étant trop considérable. Les tables de *Plauzoles*, à six figures, sont beaucoup plus commodes, et cependant elles sont peu répandues. Pour que les calculateurs pussent jouir des avantages de la division décimale, il faudrait que l'on tirât des grandes Tables manuscrites du Cadastre (*) une série de tables répondant aux divers degrés de précision dont on a besoin dans les calculs, c'est-à-dire des tables à sept, à six, à cinq et à quatre figures (**). Si cette publication était faite avec les mêmes soins et une disposition aussi convenable que celle des bonnes tables sexagésimales publiées récemment en Allemagne, nous sommes convaincu que le seul système vraiment rationnel reprendrait bientôt faveur, et que les tables sexagésimales ne trouveraient plus place que dans les observatoires, où elles devront longtemps encore être exclusivement en usage.

(*) Il existe deux exemplaires de ces Tables, déposés l'un à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, l'autre à celle de l'Institut. Voy. *Nouvelles Annales de Mathématiques, Bulletin de Bibliographie*, 1855, p. 14; *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 24 mai 1858, et *Annales de l'Observatoire*, t. IV.

(**) Voy. notre *Recueil de Formules et de Tables numériques*, qui contient des Tables trigonométriques décimales à quatre figures. Paris, Gauthier-Villars, 1866.

Note VI.

Sur l'axiôme 11 (dit *postulatum*) d'Euclide.

Des recherches déjà anciennes, mais qui ont passé inaperçues jusqu'à ces derniers temps, ont mis hors de doute que la démonstration de l'axiôme 11 d'Euclide (notre axiôme IV) ne peut pas se déduire des axiômes précédents. Ces recherches ont été faites vers l'année 1829, par deux géomètres, Lobatschewsky et J. Bolyai (*), qui par des méthodes différentes et indépendamment l'un de l'autre, sont parvenus presqu'en même temps à retrouver les résultats que Gauss possédait déjà depuis près de quarante ans. Malheureusement ce grand mathématicien n'a jamais publié ses travaux sur ce sujet, et sans la publication récente de sa correspondance avec Schumacher, nous ignorerions encore l'existence des nouvelles théories qu'il a appuyées de son imposante autorité.

Je n'entrerai pas ici dans l'exposition complète de ces théories, que l'on trouvera développées avec détails dans la brochure de Lobatschewsky dont j'ai donné une traduction (**). Je me contenterai d'en faire connaître les points principaux, et d'indiquer sommairement ce que la *géométrie abstraite*, fondée sur la négation de l'axiôme 11, a de commun avec la *géométrie euclidienne* ou *expérimentale*, et en quoi elle s'en écarte.

La théorie des parallèles ne fait qu'un avec la proposition 32 d'Euclide sur la somme des angles d'un triangle rectiligne. Aussi plusieurs géomètres, au lieu d'essayer la démonstration directe de l'axiôme 11, ont fait porter leurs efforts sur la détermination de la somme des angles d'un triangle.

On peut d'abord établir, comme Legendre l'a fait (***), quelques propositions complémentaires des 28 premières propositions d'Euclide, et indépendantes comme elles de l'axiôme 11.

(*) Fils de W. Bolyai, dont nous avons cité les ouvrages, p. 60.

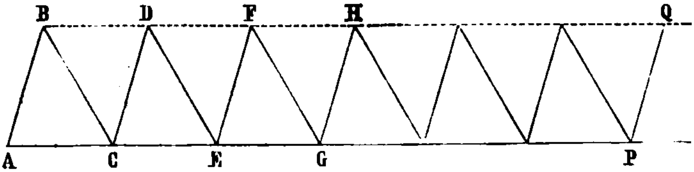
(**) *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*, par N. I. Lobatschewsky, suivi d'un extrait de la *Correspondance de Gauss et de Schumacher*. Paris, Gauthier-Villars, 1866.

(***) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 369. — *Eléments de géométrie*, 3e à 8e édition. — *Voyez* encore Lobatschewsky, *Etudes sur les parallèles*, nos 19 et 20.

I. *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne ne peut pas surpasser deux angles droits.*

Désignons, pour abréger, par $\int$ABC (*fig.* 44) la somme des trois angles du triangle ABC, et soit, s'il est possible, $\int$ABC > 2 dr. Sur

Fig. 44.



AC prolongé portons les longueurs CE = EG = ... = AC, et sur ces bases construisons les triangles DCE, FEG, ..., tous égaux à ABC.

L'angle BCD, supplément de la somme des angles ACB et DCE = BAC, sera, d'après l'hypothèse admise, < ABC. Donc [*Eucl.*, I, 24] BD < AC.

On voit d'ailleurs [*Eucl.*, I, 4] que tous les triangles BCD, DEF,... sont égaux entre eux. Donc BD = DF = FH = ...

Soit maintenant δ la différence AC — BD. Si l'on construit n triangles consécutifs égaux à ABC, la différence entre la droite totale AP = n.AC et la somme des droites BD + DF + ... = n.BD sera $n\delta$; et, en prenant n assez grand, on pourra faire en sorte que $n\delta$ surpasse la longueur finie AB + PQ = 2AB.

Mais on aurait alors AP — (BDF... Q) > AB + PQ, d'où il résulterait que le côté AP du polygone ABD ... QPA serait plus grand que la somme de tous les autres, ce qui est contraire aux corollaires de la proposition 20 du premier livre d'Euclide [§ 24, p. 57].

Il est donc impossible qu'il existe un triangle rectiligne dont les angles aient une somme plus grande que deux angles droits.

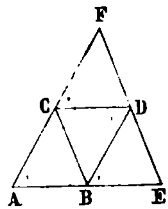
II. *S'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, cette somme sera égale aussi à deux angles droits pour tous les triangles rectilignes possibles.*

1° Soit ABC (*fig.* 45) un triangle rectiligne tel que $\int$ABC = 2 dr. Faisons le triangle BCD = ABC, en prenant l'angle BCD = CBA et CD = AB, d'où BDC = A, CBD = BCA, BD = AC.

Prolongeons AB, AC de longueurs BE = AB, CF = AC; joignons DE, DF. Des égalités précédentes et de $\int$ABC = 2 dr., il résulte

DBE = BAC = DCF, d'où l'on conclut que chacun des triangles DBE, DCB est égal à ABC. On en déduit ensuite aisément que la

Fig 45.

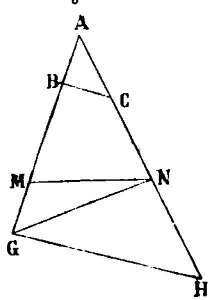


somme des angles en D est $=2$ dr., et par suite EDF est une ligne droite. Donc on peut construire un triangle AEF, ayant ses côtés doubles respectivement de ceux du triangle proposé ABC ; de plus, équiangle avec ABC, et ayant par suite la somme de ses angles $=2$ dr.

On pourra répéter cette construction autant de fois que l'on voudra, et obtenir ainsi un triangle dont les côtés seront aussi grands que l'on voudra, et la somme des angles égale encore à 2 dr.

2° Si un triangle AMN (*fig.* 46) a un angle A commun avec le triangle ABC dont la somme des angles $=2$ dr., on aura aussi

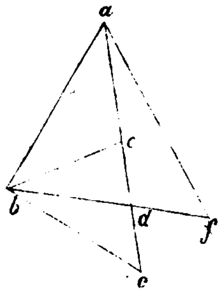
Fig. 46.



$\int$AMN $=2$ dr. Construisons, en effet, d'après ce qu'on vient de voir, un triangle AGH, dont les côtés AG, AH soient respectivement plus grands que AM, AN, et tel que l'on ait $\int$AGH $=\int$ABC $=2$ dr.; menons GN. La somme totale $\int$AMN $+\int$MNG $+\int$NGH $=$ la somme des angles en M $+$ la somme des angles en N $+\int$AGH, et, par suite, $=6$ dr. ; et comme aucune des trois sommes partielles ne peut surpasser 2 dr. [prop. 1], il faut que chacune d'elles soit $=2$ dr. Donc $\int$AMN$=2$ dr.

3° Soit maintenant abc (*fig.* 47) un triangle quelconque. Si ses angles ne sont pas égaux à ceux du triangle ABC pour lequel

Fig. 47.



$\int$ABC$=2$dr., il faudra que l'un au moins d'entre eux soit moindre que l'angle correspondant de ABC, sans quoi l'on aurait $\int abc > 2$dr. Supposons donc $bac <$ BAC ; faisons $baf =$ BAC et menons bf à volonté. D'après 2°, abf et ABC ayant un angle commun, $\int abf = 2$dr.; abd et abf ayant un angle commun, $\int abd = 2$ dr. ; abd et abc ayant un angle commun, $\int abc = 2$ dr.

Outre ces théorèmes et les 28 premières propositions d'Euclide, voici un aperçu des propositions de la Géométrie qui s'établissent indépendamment de l'axiôme 11 (*).

Une droite peut avoir avec un cercle un ou deux points communs, et pas davantage. Trois points étant donnés sur un cercle, trouver le centre de ce cercle. Possibilité des polygones réguliers; construction effective de ceux de 4, 8, 16,... côtés seulement. Deux cercles peuvent avoir, sans coïncider, un ou deux points communs, et pas davantage.

Propriétés des figures sphériques, en partie analogues aux 28 premières propositions d'Euclide. Egalité des triangles sphériques. Triangles sphériques isoscèles, etc. Trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés sur la sphère (**). Déterminer le rayon d'une

(*) Bolyai, *Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.*

(**) Ce problème n'est résoluble pour trois points donnés sur un plan que lorsqu'on admet l'axiôme 11. Si trois points quelconques, non en ligne sphère par une construction plane. Tracer un grand cercle passant par deux points donnés, ou perpendiculaire sur le milieu d'un arc de cercle donné, ou partageant un angle donné en deux parties égales, etc. Petits cercles et arcs de grands cercles tangents. Construction des polygones sphériques réguliers de 4, 8, 16,... côtés. Aire du triangle sphérique et de la sphère totale. La somme des angles d'un triangle sphérique dont les côtés sont infiniment petits par rapport au rayon de la sphère a pour limite deux angles droits.

Si donc on construit la surface qui est la limite d'une sphère passant par un point donné, et dont le rayon croît jusqu'à l'infini, les triangles tracés sur cette surface auront la somme de leurs angles égale à deux angles droits, et par conséquent toutes les conséquences qui découlent de l'axiôme 11 en géométrie plane sont vraies, dans l'hypothèse contraire, pour ces triangles tracés sur la *sphère-limite*. En particulier, on peut appliquer à ces triangles les formules de la trigonométrie rectiligne ordinaire, et en déduire ensuite les formules de la trigonométrie sphérique, qui se trouvent ainsi établies indépendamment de la théorie des parallèles (*).

Mais cette sphère-limite coïncide-t-elle avec un plan? Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'elle n'en diffère pas sensiblement dans l'étendue accessible à nos mesures, les triangles rectilignes que nous connaissons ayant une somme d'angles que nous ne pouvons pas distinguer de 2 angles droits (**). Rien ne nous démontre cependant qu'il en soit de même pour des triangles rectilignes plus grands, et que la somme des angles de ces triangles ne finisse pas par être sensiblement moindre que 2 droits.

Il n'y a, en effet, aucune incompatibilité entre les premiers axiômes (nos axiômes I, II et III) et la supposition que la somme

---

droite, pouvaient toujours être placés sur une sphère, l'axiôme 11 serait démontré.

(*) Lagrange avait reconnu l'indépendance entre les formules de la trigonométrie sphérique et l'axiôme 11, et il croyait pouvoir tirer de là une démonstration de cet axiôme. Il considérait d'ailleurs toutes les autres tentatives de démonstration comme insuffisantes. C'est ainsi qu'il s'exprimait dans ses conversations avec M. Biot. (*Communiqué par M. Lefort.*)

(**) D'après les calculs de Lobatschewsky, les observations astronomiques indiquent que, pour un triangle dont les côtés seraient à peu près égaux à la distance de la Terre au Soleil, la somme des angles ne diffère pas de 2 dr. de 3 dix-millièmes de seconde.

des angles d'un triangle soit moindre que 2 angles droits. J. Bolyai et Lobatschewsky ont tiré les conséquences de cette supposition, sans jamais se trouver en contradiction avec la logique, mais seulement avec l'expérience, telle que nous la permettent nos moyens limités.

Si la somme des angles d'un triangle rectiligne est moindre que 2 droits, on peut alors mener, par un point donné, une infinité de droites différentes, qui ne rencontrent pas une droite donnée. Celle de ces droites qui s'approche le plus de la droite donnée est dite *parallèle* à cette droite. Deux droites parallèles sont asymptotes l'une de l'autre.

Il n'y a plus, dans cette hypothèse, de figures planes semblables. On ne peut plus partager par les procédés élémentaires une droite en trois parties égales, ni circonscrire un cercle à un triangle rectiligne quelconque. La somme des angles d'un triangle varie entre 2 angles droits et zéro, et peut diminuer indéfiniment, lorsqu'on fait croître les côtés à l'infini. L'angle d'un polygone régulier n'est plus constant, et diminue indéfiniment, lorsqu'on fait croître le côté du polygone jusqu'à l'infini.

Au contraire, la somme des angles d'un triangle rectiligne infiniment petit tend vers 2 angles droits, comme celle des angles d'un triangle sphérique infiniment petit.

Les formules de la trigonométrie rectiligne relatives à l'hypothèse où l'on rejette l'axiôme 11 présentent une grande analogie avec celles de la trigonométrie sphérique; elles s'en déduiraient en attribuant aux côtés du triangle sphérique des valeurs imaginaires.

Lobatschewsky a fait voir (*) que l'on pourrait construire sur cette hypothèse un système complet de géométrie, à laquelle il a donné le nom de *Géométrie imaginaire*, nom qu'il serait plus convenable de remplacer par celui de *Géométrie abstraite*. Les expressions des éléments différentiels des lignes courbes, des surfaces et des volumes sont les mêmes que dans la *Géométrie réelle* ou *expérimentale*.

En résumé, l'expérience ne nous ayant montré aucun triangle rectiligne, si grand qu'il soit, dont la somme des angles soit moindre que deux angles droits, la géométrie d'Euclide est certainement vraie, au moins dans les limites de nos observations. Aussi suffira-t-elle

---

(*) *Géométrie imaginaire* (Journal de Crelle, t. XVII, 1837). — *Pangéométrie* (Kazan, 1855). — Voir aussi J. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*, etc., inséré dans le t. I du *Tentamen*, etc., de W. Bolyai.

toujours dans la pratique, et l'étude de la *Géométrie abstraite* n'offrira jamais d'intérêt qu'au point de vue philosophique, où elle acquiert, au contraire, une importance capitale.

Note VII.

Sur la théorie des parallèles.

Si l'on juge de la *direction* d'une droite par l'angle dont elle s'écarte d'une direction donnée, deux droites qui forment avec une troisième des angles correspondants égaux *seront de même direction*, et le théorème démontré au § 14 pourra s'énoncer ainsi :

Deux droites de même direction ne peuvent se rencontrer, et sont parallèles.

Cette proposition pourrait être prise pour axiôme, en considérant l'idée de *direction* comme une donnée fondamentale de l'expérience. Dès lors, il serait évident que deux droites qui se rencontrent ont des directions différentes, et par suite celles qui ont la même direction ne peuvent se rencontrer.

Dans cet ordre d'idées, l'axiôme réciproque, c'est-à-dire l'axiôme IV du § 15, pourrait s'énoncer comme il suit :

Dans un plan, une droite quelconque rencontre toutes celles qui n'ont pas la même direction.

Cet énoncé devient encore plus évident, lorsqu'on le rapproche de ce que nous avons dit (§ 6) de la génération rectiligne du plan.

Cette manière de présenter la théorie des parallèles est plus simple et plus symétrique que la méthode ordinaire, et nous semble avantageuse pour un *premier enseignement* de la géométrie (*). En revenant plus tard sur cet objet, on montrerait, comme nous l'avons fait au § 14, que le parallélisme des droites de même direction est une conséquence des axiômes précédents.

Note VIII.

Sur la longueur d'une ligne courbe.

On démontre, dans la plupart des traités de Calcul intégral, ce théorème, *qu'il existe une limite commune, finie et déterminée, pour*

(*) Voy. Note IX.

les périmètres des polygones infinitésimaux inscrits et circonscrits à un arc de courbe donné. On peut présenter cette démonstration sous une forme tout à fait élémentaire, sans employer l'algorithme de l'analyse transcendante.

La démonstration repose sur le *principe fondamental* du calcul intégral (*), savoir que, dans une somme d'éléments infiniment petits, on peut, sans changer la limite de cette somme, altérer chacun de ces éléments d'une fraction de lui-même infiniment petite. — En effet, en remplaçant toutes ces fractions par la plus grande d'entre elles, qui est encore infiniment petite, on voit que l'altération de la somme est moindre que cette fraction *maximum* de la somme elle-même, c'est-à-dire que si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sont tous moindres que ε, on a $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots < \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$. La somme étant supposée finie, l'altération sera donc moindre qu'une fraction infiniment petite d'une quantité finie, et par suite elle sera infiniment petite. Donc l'altération de la limite sera la limite d'un infiniment petit, c'est-à-dire *zéro*.

Cette démonstration ne repose, comme on voit, sur aucune considération qui dépasse les principes que l'on a souvent occasion d'invoquer en géométrie élémentaire.

Disons en passant que ce principe fournit immédiatement les démonstrations les plus simples des théorèmes sur l'équivalence de deux prismes ou de deux pyramides de même base et de même hauteur.

Supposons maintenant que l'on ait un triangle dont un seul angle soit infiniment petit. Le côté opposé à cet angle sera infiniment petit *par rapport à chacun des deux autres* (**), et il en sera de même, à plus forte raison, de la différence de ces deux côtés *par rapport à chacun d'eux*. Nous énoncerons ce résultat d'une manière abrégée, en disant que les deux côtés qui comprennent l'angle infiniment petit *diffèrent infiniment peu* l'un de l'autre.

Il résulte de là que, si l'on projette, par des parallèles de direction quelconque, orthogonale ou non, une droite de longueur donnée sur un axe faisant avec cette droite un angle infiniment petit, la

(*) Duhamel, *Éléments de calcul infinitésimal*, t. I, p. 35.

(**) Le rapport de cette différence à chacun des côtés serait même infiniment petit *du second ordre*, si le triangle était rectangle.

différence entre la droite et sa projection sera infiniment petite *par rapport* à chacune d'elles ; en d'autres termes, la droite et sa projection *différeront infiniment peu.*

Donc, si la droite qui ferme un contour polygonal fait avec chacun des côtés de ce contour des angles infiniment petits, la longueur de cette droite ne diffèrera qu'infiniment peu de celle du contour polygonal.

Cela posé, considérons un arc de courbe, que nous supposerons plane, pour plus de simplicité, et admettons que cet arc soit entièrement convexe (*). D'après les corollaires de la proposition 20 du premier livre d'*Euclide* (§ 24), on voit : 1° Que le contour d'un polygone inscrit dans l'arc convexe croît à mesure que l'on établit de nouveaux sommets intermédiaires, en subdivisant les arcs ; 2° que le contour d'un polygone circonscrit au même arc diminue à mesure que l'on trace de nouveaux côtés, dont les points de contact subdivisent les arcs ; 3° qu'un quelconque des contours inscrits est toujours moindre qu'un quelconque des contours circonscrits.

On en conclut d'abord : 1° Que les contours inscrits, dont on augmente le nombre des côtés suivant une certaine loi, allant d'une part toujours en croissant, mais restant d'autre part toujours moindres qu'un polygone circonscrit quelconque, tendront nécessairement vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision ;

2° Que les contours circonscrits, allant toujours en diminuant par la subdivision des arcs, et restant toujours supérieurs à un polygone inscrit quelconque, tendront aussi vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision.

Il reste à prouver que tous ces contours, tant inscrits que circonscrits, tendent vers une seule et même limite, indépendante de la loi de subdivision.

Considérons un côté d'un contour inscrit, et un polygone inscrit dans l'arc sous-tendu par ce côté. Si ce côté est assez petit, sa direction, ainsi que la direction d'un côté quelconque du polygone en question, fera un angle aussi petit qu'on voudra avec la tangente en un quelconque des points de l'arc. Donc, d'après la proposition démontrée ci-dessus, le côté et le polygone diffèrent l'un de l'autre *infiniment peu.*

(*) S'il ne l'était pas, on le décomposerait en portions convexes.

Soient maintenant deux polygones inscrits quelconques, à côtés suffisamment petits. Si nous les comparons l'un et l'autre au polygone formé par la réunion de tous leurs sommets, et correspondant par conséquent à une subdivision de chacun des deux systèmes d'arcs, chaque côté de l'un quelconque des deux contours primitifs différera infiniment peu de la portion correspondante du troisième contour. Donc chacun des deux premiers contours différera infiniment peu du troisième, et par suite les deux premiers contours différeront infiniment peu l'un de l'autre. Donc ils ne peuvent tendre que vers une seule et même limite.

On étendrait de même ce résultat à deux polygones circonscrits, ou à un polygone inscrit comparé avec un polygone circonscrit.

Ainsi se trouve établie l'existence de la *longueur* d'une courbe plane.

Il en résulte en même temps :

1° Que cette longueur est plus grande que celle d'une ligne droite ayant les mêmes extrémités ;

2° Qu'une courbe convexe est plus courte qu'une courbe quelconque qui l'enveloppe de toutes parts sans la couper, ou qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités ;

3° Que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est égale à l'unité.

Le même mode de démonstration servirait à établir l'existence de la longueur d'une courbe non plane, et celle de l'aire d'une surface courbe.

Note IX.

Réflexions sur l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Tout le monde s'accorde à répéter que l'un des buts de l'enseignement des mathématiques doit être de donner plus de rectitude à l'esprit, en lui offrant un modèle d'une logique inflexible, appliquée à des principes certains. Pour que ce but soit atteint, il faut évidemment que l'enseignement ne se départe jamais de cette rigueur qui distingue les mathématiques de toutes les autres sciences, et c'est là une condition essentielle pour que cette étude soit fructueuse, aussi bien comme gymnastique intellectuelle que comme source d'applications pratiques.

Mais la rigueur, telle que nous la concevons, n'est nullement compromise par l'omission volontaire de la démonstration d'une proposition, tandis qu'elle l'est par l'introduction d'une démonstration fausse ou incomplète. La logique n'a rien à souffrir d'une lacune laissée provisoirement dans la suite des raisonnements, pourvu que cette lacune soit clairement indiquée, et qu'on ne cherche pas à la dissimuler.

C'est d'après cette manière de voir que nous concevons la possibilité d'un enseignement gradué de la géométrie élémentaire, conduit, à tous ses degrés, d'après un plan unique et invariable, toujours soumis aux règles de la plus sévère logique, et où les difficultés ne se montreraient qu'à mesure que les esprits seraient préparés à les aborder.

Pour cela, l'étude de la géométrie devrait être reprise successivement à divers points de vue, correspondants aux divers degrés d'initiation des élèves. Pour les commençants, il s'agit avant tout de se familiariser avec les figures et leurs dénominations, d'apprendre des faits, d'entrevoir leurs applications les plus simples et les plus immédiates, celles surtout qui se rapportent aux usages de la vie ordinaire. On devra donc, au début, multiplier les axiômes, employer, au lieu de démonstrations, les vérifications expérimentales, l'analogie, l'induction, en ne laissant jamais oublier que ce mode d'exposition est essentiellement provisoire. On exercera l'élève aux tracés graphiques, au maniement des instruments, à la solution de divers problèmes de levé des plans et d'arpentage, à la construction des figures en relief au moyen de fils ou d'argile plastique, à la représentation de ces figures à l'aide de leurs projections, etc., etc. Le maître saura proportionner au degré de développement intellectuel de l'élève la part plus ou moins grande qu'il devra faire au raisonnement, dans cette première ébauche des études géométriques; et la grande variété d'applications qu'offrent la géographie, l'astronomie, l'arpentage, la stéréotomie, etc., suffira pour donner à cet enseignement un intérêt soutenu.

On pourra mêler à la géométrie pure et appliquée l'étude des propriétés les plus simples des nombres entiers , que l'on représentera par des points régulièrement distribués sur des droites ou sur des plans, ou encore par des longueurs de droites, des aires de rectangles ou des volumes de parallélépipèdes. Cette manière de traiter l'arithmétique conduit aussi promptement que la méthode abstraite aux règles du calcul, et chaque raisonnement acquiert une plus grande clarté par cette représentation qui parle aux yeux.

On exposera ensuite le système des poids et mesures, tandis que, d'un autre côté, on étudiera les propriétés des proportions entre nombres rationnels.

Remarquons que les diverses théories que nous venons d'énumérer, et qui devront servir de préliminaires à l'étude rigoureuse de la géométrie, ne sont pas destinées, selon nous, à faire l'objet d'une suite unique de leçons. On ne doit pas craindre de se répéter, dans un enseignement scientifique, et les élèves devront suivre successivement plusieurs cours gradués, dont chacun comprendra les matières du cours précédent, plus les nouveaux développements qu'on y ajoutera, en faisant au raisonnement une plus large part.

Mais les programmes de ces cours successifs ne devront pas être tracés au hasard, indépendamment les uns des autres. Il faudra se garder, avant tout, d'altérer l'ordre des propositions pour substituer à une démonstration difficile un raisonnement plus simple en apparence et moins rigoureux. Si une démonstration présente quelques difficultés pour l'intelligence de l'élève, qu'on la supprime, sans la remplacer autrement que par des explications, des analogies, des vérifications expérimentales. Mais que la subordination des vérités géométriques, telle que l'exigera plus tard une étude scientifique et approfondie, soit conservée sans altération à tous les degrés de l'enseignement. Qu'il y ait unité de plan, et que les cours les plus élémentaires ne diffèrent des cours les plus élevés que par des suppressions, de telle sorte que la place de chaque démonstration soit toujours réservée, et qu'on n'ait plus qu'à l'y intercaler, lorsque l'esprit de l'élève sera suffisamment préparé.

Le premier enseignement sera donc exclusivement expérimental, et peu à peu on fera voir à l'élève comment toutes les vérités n'ont pas besoin d'être séparément constatées par l'expérience, et comment elles sont les conséquences d'un certain nombre d'entre elles, nombre que l'on restreindra de plus en plus, à mesure que l'on avancera dans l'étude de la science, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux axiômes fondamentaux, dont le nombre ne peut plus être réduit.

Telle doit être, à notre avis, la première période de l'enseignement géométrique, et le programme que nous venons d'esquisser comprend toutes les notions mathématiques nécessaires aux commençants. Parallèlement à cet enseignement, l'élève pourra suivre utilement des cours élémentaires de cosmographie, de mécanique, de physique, de chimie, où il rencontrera à chaque instant des applications de ses connaissances en géométrie et en arithmétique.

Le second degré d'enseignement se rapprocherait, d'après nos idées, du système actuellement suivi dans les classes de science des lycées français. En géométrie, on adopterait la méthode euclidienne dans toute sa rigueur, et le cadre des études embrasserait à peu près les Éléments d'*Euclide* et les premières notions sur les sections coniques.

On joindrait à cette étude celle des premières notions d'algèbre, en rattachant les règles du calcul algébrique aux propriétés des figures par des raisonnements analogues à ceux du second livre d'*Euclide*. On établirait ainsi par la géométrie, en même temps que par l'analyse abstraite, les principales règles de la multiplication algébrique, la résolution des équations du second degré, les principaux théorèmes sur les *maxima* et les *minima*, etc.

L'étude rigoureuse de la géométrie conduisant tout naturellement au principe des limites et à la considération de l'incommensurabilité, on serait alors amené à introduire les symboles appelés *nombres incommensurables*, et à revenir sur la théorie des proportions, en l'étendant à des grandeurs continues, généralement incommensurables.

On pourrait passer de là à l'étude des logarithmes et de la trigonométrie.

Mais cette étude de la géométrie scientifique et rigoureuse doit elle-même être graduée, comme celle de la géométrie *expérimentale*. S'il peut être avantageux, dans une première exposition, de s'attacher autant que possible à la méthode des anciens, afin d'établir d'abord avec brièveté et précision les faits fondamentaux de la science ; il nous semble, au contraire, que dans les révisions successives du cours de géométrie, on devra s'étudier de préférence à faire comprendre, par des applications aux vérités simples et désormais bien connues de la géométrie élémentaire, les grandes méthodes et les puissants procédés de l'analyse moderne. On pourra, de cette manière, sans sortir du cadre d'*Euclide*, initier l'élève à tous les procédés qu'il aura plus tard à appliquer dans les parties les plus élevées de la science.

Ainsi, on sait quelles sont, en géométrie et en arithmétique, les nombreuses applications du principe des limites.

L'étude des lieux géométriques, employés comme moyens généraux de résolution des problèmes déterminés, conduira naturellement à la notion de fonction d'une ou de deux variables indépendantes. En y joignant même le mouvement, on aura une représentation sensible des fonctions de trois et même de quatre variables.

Le cercle et les sections coniques donneront lieu d'appliquer la méthode des tangentes, et de présenter la méthode des limites sous la forme plus commode de la méthode infinitésimale.

On reviendra alors avec plus de détails sur les questions de *maxima* et de *minima*, et on les ramènera à la méthode des tangentes, dans le cas d'une seule variable indépendante.

Les quadratures et les cubatures des lignes et des surfaces pourront s'effectuer non-seulement par les méthodes détournées des anciens, mais encore par les méthodes directes sur lesquelles est fondé le calcul intégral. Ainsi l'équivalence de deux prismes de même base et de même hauteur pourra s'établir par la division en tranches infiniment minces, comme nous l'avons déjà indiqué dans la Note précédente.

C'est alors qu'il conviendra d'introduire les notions de *longueur* d'une ligne courbe quelconque et d'*aire* d'une surface courbe quelconque, en justifiant et généralisant les définitions restreintes et incomplètes qu'on en avait données, au moyen des polygones réguliers, en traitant du cercle et des trois corps ronds.

On peut enfin, sans sortir du même cadre, donner des exemples de courbes enveloppes, d'applications de la méthode inverse des tangentes, etc.

En un mot, la géométrie d'*Euclide* peut servir de texte à une exposition de tous les principes fondamentaux de l'analyse moderne, et l'on conçoit quel fruit un esprit intelligent pourrait retirer d'une telle préparation à l'étude de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal.

TABLE DES MATIÈRES

Paris.—Imprimé chez Jules Bonaventure, 55, quai des Grands Augustins.