

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com



Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Bibliothèque nationale de France

omnia quae ab Henrico prodierunt
sunt bona. Millicies p. 20 Toj. 6

anno 1621 edidit parisijs
4 libros geometricae practicae
gallicae. Opus bonum sed commune

anno 1623 opusculum gallicum
edidit de fabrica et usu circuli
proportionum, opus clarum et utile
eodem anno canonem finium
tangentium et secantium

eodem anno responsione apologetica
contra Martellum qui Euclidem traductum
sibi vindicabat, opus consentaneum
nullius utilitatis

anno 1626 gallice tractatum de
Logarithmis in quo clarissime
explicat illorum usum, generum &c.
adjuvit canonem &c. in 8°. parisijs

anno 1627 gallice tractatum
de triangulis sphaericis &c. in 8°

anno 1630 opus gallicum
usus mechanici inscriptum
habet optimas praefatas in 8°. par.

1626 gallice tractatus universalis
rerum coelestium et elementarium quod
opus non est absolute perfectum

LES QUINZE LIVRES DES ELEMENS GEOMETRIQUES

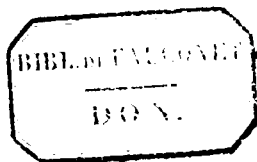
D'E U C L I D E.

Camill. fabron. aggr. lugo. naral
Traduits & commentez par D. HENRION

Mathematicien.

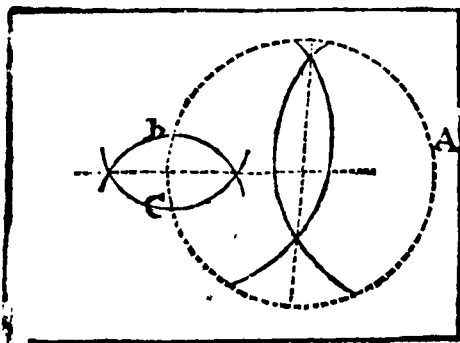
fili. Andr. nepot. rby 4. achese
DERNIERE EDITION. *aparij. b85.*

*Reueü & augmentée de plusieurs figures,
& du Livre des DONNEZ
du même Auteur.*



TOME PREMIER.

A Rouen, & se vend,



A PARIS,

Chez LAURENT D'HOURY, rue saint Jacques,
près les Mathurins, au saint Esprit.

M. DC. LXXXIII.

Avec Privilege.

THE OFFICE OF THE
DIRECTOR OF THE
BUREAU OF THE
CENSUS

WASHINGTON, D. C.

1900

1900

1900

1900

1900

1900

1900

1900

1900

1900

1900

1900

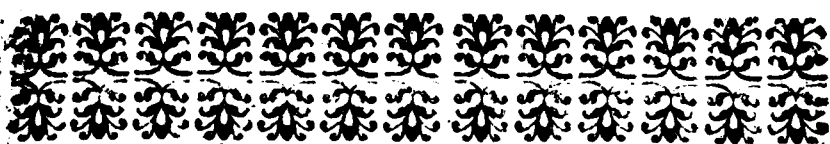
1900

1900

1900

1900

1900



AU LECTEUR.

 *MY Lecteur , voicy le dernier des Ouvrages du sieur Henrion Professeur és Mathematiques , contenant les quinze Livres des Elements d'Euclide , traduits en François , avec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles , & des figures mieux taillées qu'en toutes les traductions precedentes , auxquels il a ajouté le Livre des Donnez du même Euclide , aussi traduit en François , ce qui n'avoit point encores été fait jusques icy , quoy que l'usage de ce Livre soit fort commun par toutes les Mathematiques , & particulièrement en l'Analyse si aujourd'huy estimée & si recherchée , & qui a remis la Geometrie en son lustre autant qu'elle y fut jamais , avec*

ā ij

AU LECTEUR.

l'esperance d'une perfection beaucoup plus grande. Cet Ouvrage étoit imprimé dès le vivant de l'Autheur : & s'il ne l'a publié, c'est que son intention étoit d'y ajouter le reste de ce qui se trouve des œuvres d'Euclide, sçavoir l'Optique, & la Catoptrique, les Phenomenes, la Musique, & un fragment du leger & du pesant, toutes lesquelles parties il avoit déjà traduites, comme en font foy les Manuscrits qu'il a laissés, & qui sont entre les mains de sa veuve : ainsi il divisoit tous les Ouvrages d'Euclide en deux Tomes, dont le premier étoit celui-cy, & le dernier devoit contenir ce que nous venons de dire.



PREFACE.

LA Geometrie se divise en doctrine des plans, qui est appelée du mot general Geometrie & doctrine des solides, que les Mathematiciens appellent par un nom propre & particulier Stereometrie. Car la Geometrie en general se propose, de considerer les plans & les solides, & de les comparer entr'eux ou de les diviser. Euclide nous voulant laisser en ses Elemens une parfaite connoissance de la Geometrie, traite des plans aux six premiers Livres, & aux cinq derniers des solides, recherchant leurs proprietéz. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coûtume d'être appelez corps Platoniques, ne

P R E F A C E.

pouvoient être traittez parfaitement sans la connoissance des lignes commensurables & incommensurables, Euclide a mis son dixième Livre devant sa Stereometrie, auquel il traite de ces sortes de lignes : Et sçachant que ce traité des lignes commensurables & incommensurables ne se peut faire sans la connoissance des nombres, il traite des proprietéz des nombres aux trois Livres qui precedent le dixième. C'est pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze Livres, (dont les deux derniers sont attribuez à Hypsicle Alexandrin) se pourra à bon droit diviser en quatre parties. La premiere partie contenuë en six premiers Livres, traite des plans : La seconde comprenant les trois Livres suivans, recherche les proprietéz des nombres : La troisième qui consiste au dixième Livre seul, traite des lignes

P R E F A C E.

commensurables & incommensurables: Et enfin la quatrième partie contenue aux cinq autres Livres, comprend la science des corps ou solides. La première partie se subdivise en trois: Car aux quatre premiers Livres, il est traité des plans absolument, & de leur égalité & inégalité: mais au cinquième Livre il est traité en general des proportions des grandeurs: & au sixième, sont examinées les proportions des plans.

Ce que c'est que Probleme, Theoreme, Proposition, Lemme, Corollaire & Scholie.

Toute démonstration de Mathématique, est ou Probleme ou Theoreme. Les Mathematiciens appellent *Probleme*, une démonstration qui enseigne à faire ou construire quelque chose: Et *Theoreme*, la démonstration laquelle recherche seulement quelque propriété d'une

P R E F A C E.

ou plusieurs quantitez ensemble. Bref, les Problemes enseignent à trouver & construire quelque chose, & les Theoremes démontrent les affections & proprieté des choses déjà faites & construites. Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appelez *Proposition*, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. On appelle *Lemme*, quelque Probleme ou Theoreme, qui étant nécessaire à une démonstration, se prend & prouve auparavant que de venir à cette démonstration principale, afin de la faire plus évidente & brève. On appelle *Corollaire*, une consequence que l'on tire de ce qui a été démontré en quelque proposition. Et enfin ce qu'on nomme *Scholie*, est une annotation qu'on fait seulement comme en passant sur quelque proposition.

ELEMENT.



ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.



ES Physiciens disent que le point est le moindre objet de la veüe ; & iceluy peut être décrit avec ancre, ou autre chose: Mais les Mathematiciens rejettans cette définition, disent que le point est un objet de l'intellect si subtil, qu'il ne peut être divisé en aucunes parties : Et iceluy ne se peut écrire, mais seulement entendre & imaginer : Bien est vray, que pour le représenter à nos sens extérieurs, nous nous servons du point Physique. Le point n'a donc aucunes des dimensions Geometriques, c'est à dire qu'il n'a longueur, largeur, ny épaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est une longueur sans largeur.

Après le point, Euclide vient à la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou coulement d'iceluy point, d'un lieu en un autre: car par ainsi l'intervale compris entre ces deux lieux-là, fera

une longueur sans largeur, puis que le point du coulement duquel elle est produite, n'en a aucune : & par conséquent la ligne (qui est la premiere espece de magnitude ou quantité continue) a seulement une dimension, sçavoir est longueur, car n'ayant aucune largeur, il est certain qu'elle n'aura aussi aucune épaisseur ou profondeur.

Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le point A être mû ou coulé depuis A jusques en B, & avoir laissé par son flux ou coulement la trace & vestige AB : or cette trace AB sera appelée ligne ; car l'intervalle compris entre les deux points A & B, est vraiment une longueur sans largeur & épaisseur, puis que le point A, par le coulement duquel elle est produite, est privé de toute dimension.

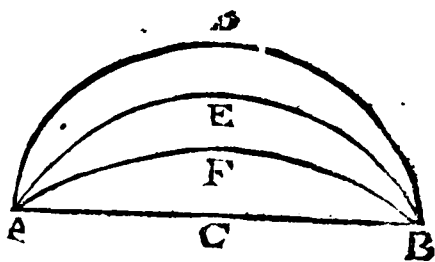


3. Les extrémitéz de la ligne, sont points.

Cecy est intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à un point, & achevent aussi à un point, comme les lignes precedentes AB, qui ont pour leurs extrémitéz les points A & B : car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres sortes de lignes, auxquelles on ne peut assigner aucun terme ny extrémité.

4. La ligne droite, est celle qui est également comprise & étendue entre ses points.

Les Mathematiciens ont de trois sortes de lignes, c'est à sçavoir la ligne droite, la ligne circulaire, qu'ils appellent aussi ligne courbe, & la ligne mixte : Euclide définit icy la droite, laquelle il dit être celle-là qui est également étendue entre ses points : ainsi la ligne ACB est dite ligne droite, pource que tous les points entre-moyens d'icelle ligne, com-



me C, sont également posez entre les extrêmes A & B, l'un n'étant plus élevé ou abaissé que l'autre : ce qui n'advient aux trois autres lignes A D B, A E B, A F B, car il est manifeste que les points entremoyens D, E, F, sont bien plus élevez que les extrêmes A & B. Quelques autres Auteurs ont diversement défini la ligne droite : car Campanus dit, que c'est le plus court chemin d'un point iusqu'à un autre : &, selon Archimede, la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont mêmes extrémités. Mais Platon dit, que c'est celle-là dont les points du milieu ombragent les extrêmes : comme par exemple, si en la ligne A C B, le point extrême A avoit la vertu d'illuminer, & le point du milieu C la force de cacher : iceluy point C empêcheroit que le point extrême B fût illuminé de l'autre extrême A : Et aussi l'œil étant au point extrême A, il ne pourroit voir l'autre extrême B, à cause du point C, posé entre iceux extrêmes : ce qui n'arriveroit pas aux lignes non droites, comme le démontrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

Or tout ainsi que les Mathématiciens conçoivent la ligne être décrite par le flux & mouvement imaginaire du point, ainsi aussi entendent-ils la qualité de la ligne décrite par la qualité d'iceluy mouvement : car si on entend que le point coule droit par le plus court chemin, ne se détournant çà ne là, la ligne ainsi décrite sera appelée ligne droite : mais si le point fluant vacille en son mouvement, & s'écarte çà & là la ligne décrite sera appelée mixte : & finalement si le point fluant ne vacille en son mouvement, mais est porté en rond d'un certain mouvement uniforme & regulier, gardant toujours une égale distance à quelque certain point à l'entour duquel il est porté, cette ligne décrite sera appelée circulaire. Or Euclide ne traite icy que de deux simples lignes, sçavoir est de la droite & de la circulaire. Il a défini celle-là cy-dessus, & il définira cette cy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la définition, pource qu'elle n'a aucun usage en ses élémens Geométriques : il y en a de plusieurs sortes, & d'icelles traitent amplement Apollonius, Pergeus, Nicomedes, Archimedes, & autres Auteurs.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Après la ligne, qui est la première espèce de quantité conti-

nuë, & qui a une seule dimension, Euclide définit la superficie, qui est la seconde espece de quantité, & a deux dimensions: car on n'y trouve pas la seule longueur comme en la ligne, mais aussi latitude, sans toutefois aucune profondeur: comme la quantité $A B C D$ comprise entre les lignes AB , BC , CD , DA ,

& considérée selon la longueur AB , ou DC , & selon la latitude AD , ou BC , sans aucune épaisseur ou profondeur, est appelée superficie. Quelques-uns décrivant la superficie disent, que c'est l'extrémité du corps. Et comme dit



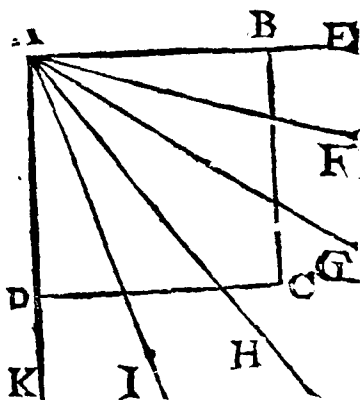
Proclus, la superficie nous est fort naïvement représentée par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuvent pénétrer au dedans de la terre, elles seront seulement longues & larges. Davantage, comme les Mathematiciens entendent que la ligne est produite par le flux ou coulement du point, ainsi disent-ils, que la ligne se mouvant en travers, produit la superficie: comme par exemple, si on entend que la ligne AB se meuve vers la ligne DC , elle fera la superficie $ABCD$, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'est la trace & vestige du mouvement de la ligne AB qui n'a aucune profondeur.

6. Les extrémités de la superficie, sont lignes.

Il faut icy entendre des superficies bornées, & terminées par lignes droites, comme la superficie $ABCD$ cy-dessus, de laquelle les extrémités sont les lignes AB , BC , CD , & DA : car il y a bien plusieurs superficies encloses d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elements-cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la superficie sphérique, qui circuit & environne un corps entièrement rond & sphérique. Comme donc la ligne terminée commence à un point, & finit à un autre point, ainsi aussi la superficie terminée commence par une ligne, & finit par une ligne, tant selon sa longueur, que selon sa largeur.

7. Superficie plane, est celle qui est également comprise entre ses lignes.

Cette définition de la superficie plane a quelque similitude & rapport à celle de la ligne droite: car comme la ligne qui est également étendue entre ses points, est appelée ligne droite; ainsi aussi la superficie qui est également étendue entre ses lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne sont plus élevées ny abaissées que les extrêmes, est appelée superficie plane. Et derechef, comme la ligne droite est la plus courte d'entre ses extrémités, ainsi aussi la superficie plane est la plus courte, ou brève de toutes celles qui ont mêmes extrémités. C'est encore pour la même raison, que quelques autres décrivans la superficie plane, disent que c'est celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ses extrêmes: ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle une ligne droite peut être accommodée. Comme par exemple, la superficie A B C D sera dite plane, si la ligne droite A E se



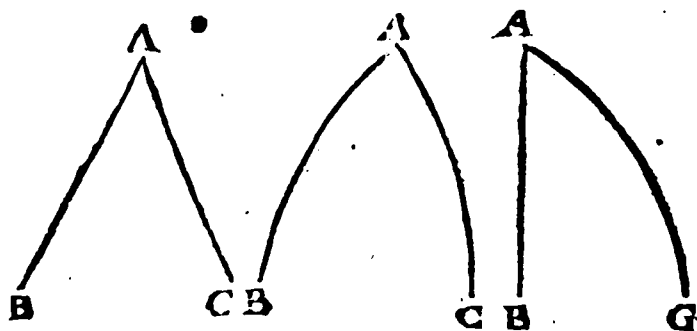
mouvant à l'entour du point immobile A, en sorte qu'elle vienne à être la même que A E, puis la même que A G, & puis encore la même que A H, en apres la même que A I, & finalement la même que A K; elle ne rencontre rien en la superficie de plus élevé ou abaissé l'un que l'autre, ains que tous les points de ladite superficie soient touchez d'icelle ligne mouvante A E, & en quelque sorte raclez par icelle. Mais toutes superficies esquelles il y a des endroits les uns plus élevez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder une ligne droite par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'est la superficie interieure d'une voûte ou arcade, ou bien l'exterieure d'un globe, ou d'une colonne ronde, & aussi d'un cone, &c. sont appelées superficies courbes: & icelles sont de plusieurs sortes, c'est à sçavoir convexe, comme la superficie interieure d'une voûte ou arcade: mais la con-

remplation de toutes ces choses appartient à la Stereometrie, dont traite Euclide és cinq derniers Livres; c'est pourquoy il explique seulement icy la superficie plane, de laquelle il traite és six premiers Livres. Et cependant est à noter que cette superficie est souventesfois appelée plan par les Mathematiciens: tellement que quand ils parlent de plan, il faut tousjours entendre une superficie plane.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en un plan non directement.

Euclide enseigne icy que quand deux lignes constituées en quelque superficie plane concurrent en un point d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pour

ce que
les
deux
lignes
AB. &
AC,
con-
cur-
rent
en A,
& ne
se ren-



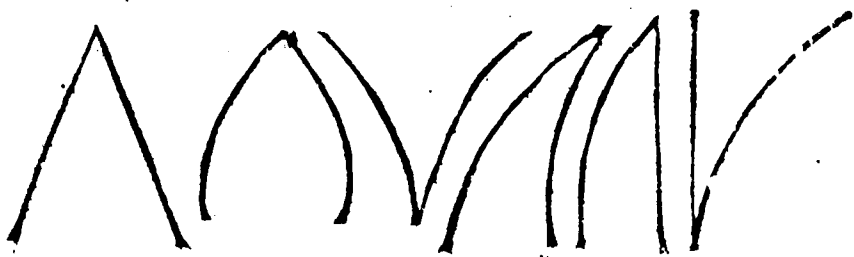
contrent pas directement; le concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au point A, s'appelle angle: Et d'autant qu'iceluy angle est constitué au même plan qu'icelles deux lignes AB & AC, on l'appelle angle plan, à la difference d'autres angles, dont les uns sont nommez angles solides, desquels traite cy apres Euclide en la Stereometrie; & les autres sont appelez angles spheriques, desquels traitent amplement Menelaus & Theodose en leurs élemens spheriques, comme nous avons aussi fait en nos triangles spheriques.

Or quant à l'angle plan cy-dessus définy est à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan

consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent , & non pas en la longueur d'icelles lignes ; car le prolongement desdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par conséquent la grandeur de l'angle. En après que quelques Geometres ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle , il étoit nécessaire qu'étrâs continuées du point de leur rencontre, elles s'entrecoupassent en iceluy , dont s'ensuivroit que deux cercles s'entretochans en un plan, ou qu'une ligne droite touchant un cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par cette définition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a aussi bien démontré Clavius sur la mesme proposition, où il refute Pellerier, qui disoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faisoit angle ; c'est pourquoy ceux qui tiennent encore cette opinion, se moquent bien d'Euclide, de Clavius, & autres Geometres, qui disent qu'une ligne droite touchant un cercle, fait un angle contingent, ou d'attouchement.

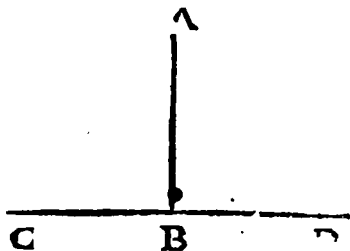
9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droites, l'angle sera appelé rectiligne.

Tout angle plan est fait, ou de deux lignes droites, & alors il se nomme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle angle curviligne ; ou bien d'une ligne droite & d'une courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curvilignes peuvent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cause de la diverse inclination ou habitude des lignes courbes, ainsi qu'il appert manifestement aux angles plans de la figure cy apposée.



10. Quand une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre égaux entr'eux, les angles sont droits, & la ligne tombante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

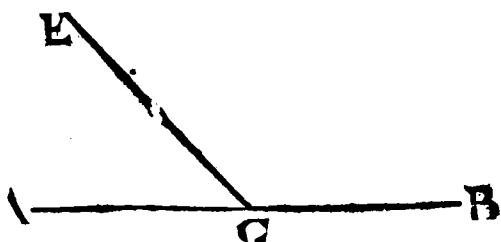
Il y a de trois sortes d'angles rectilignes, sçavoir est droit, obtus & aigu : le premier desquels Euclide définit icy avec la ligne perpendiculaire, & quant aux deux autres, il les définit aux deux définitions prochainement suivantes. Il dit donc icy que si une ligne droite tombe sur une autre ligne droite, en sorte qu'elle fasse les angles de part & d'autre égaux, ce qui advient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre; chacun d'iceux angles est appellé angle droit, & la ligne ainsi tombante, est dite perpendiculaire à celle-là sur laquelle elle tombe. Comme par exemple, si la ligne droite A B tombe sur la ligne droite C D, en sorte qu'elle ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre, les deux angles, qu'elle fait au point B seront égaux entr'eux, & chacun d'iceux sera



nommé angle droit; mais la ligne A B sera dite perpendiculaire à C D, sur laquelle elle tombe. Par même raison, la ligne droite C B sera aussi dite perpendiculaire à la ligne droite A B, encore qu'icelle C B fasse un seul angle droit avec A B; Et ce d'autant que si ladite ligne A B étoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit un autre angle égal au premier. Parquoy en Geometrie, pour conclure que quelque angle est droit, ou que la ligne qui le constituë est perpendiculaire à une autre, il faut seulement prouver que ledit angle est égal à celui de l'autre côté. Semblablement, si quelque angle est dit droit, ou que l'une des lignes qui le constituë soit perpendiculaire à l'autre, on pourra aussi conclure que ledit angle est égal à celui de l'autre côté; car si ces angles - là n'étoient égaux, ils ne seroient nommez angles droits, ainsi qu'il appert tant par la susdite définition, que par les deux suivantes.

11. Angle obtus , est celuy qui est plus grand qu'un droit.
12. Mais l'aigu , est celuy qui est plus petit qu'un droit.

Quand une ligne droite tombant sur une autre s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre , elle fait conséquemment deux angles inégaux, dont l'un est plus grand que l'angle droit, & se nomme angle obtus , mais l'autre est plus petit , & s'appelle angle aigu. Ainsi pource qu'en cette figure, la ligne droite EC tombant sur la ligne droite AB , s'incline & panche plus du côté de AC que de la part de BC , les deux angles du point C seront inégaux , & celuy vers B , qui est plus grand & ouvert que le droit sera dit angle obtus ; mais celuy de la part de A , qui est plus petit & fermé que l'angle droit , sera nommé angle aigu.



Et d'autant que souventefois en un plan concurrent plus de deux lignes à un même point, & par conséquent y constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour éviter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu dénote le point auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extrêmes signifient les commencemens d'icelles lignes qui font iceluy angle : tellement qu'en la figure cy-dessus, l'angle obtus que nous avons dit être celuy de la part de B , sera exprimé & entendu par ces trois lettres ECB , ou BCE , à cause qu'il est constitué au point C , & contenu par les deux lignes droites EC , & BC , qui commençant en E & B , se vont rencontrer au susdit point C . Mais l'angle aigu que nous avons dit être de la part de A , s'exprimera par ces trois lettres ECA , ou ACE , parce qu'il est constitué au point C , & fait par les deux lignes droites EC & AC , qui commencent en E & A , & se vont rencontrer au susdit point C . Ce

qu'on doit bien noter, afin de connoître & discerner facilement les angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.

13. Terme, est l'extrémité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extrémités des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps.

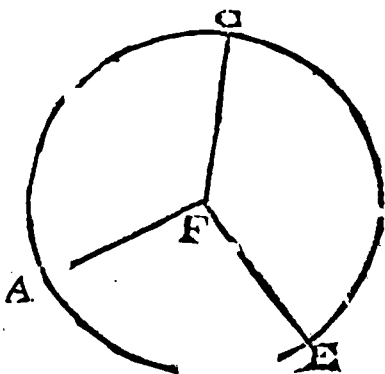
14. Figure, est ce qui est compris & environné d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dite figure: mais seulement celles que les termes environnent: ainsi la ligne terminée par deux points, n'est pas dite figure: mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont environnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le Cercle, l'Ellipse, & la Sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, est une figure plane, contenuë par une seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entr'elles.

16. Et ce point-là est appelé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaite est le cercle, lequel, selon que le définit icy Euclide, est une figure plane contenuë & environnée d'une seule ligne, à laquelle toutes celles menées d'un seul point de ceux qui sont dedans la figure, sont égales entr'elles: & cette ligne à s'appelle periphère, ou circonference du cercle, & le susdit point, centre du cercle: Comme par exemple, si une superficie ou espace est environnée d'une seule ligne ACE



& que de quelque point d'audedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droites menées au terme ou circuit ACE, comme FA, FC, & FE, sont égales entr'elles : telle figure plane sera appelée cercle, & le terme ou ligne ACE, qui circuit & environne icelle figure, s'appelle periphère, ou circonférence du cercle : mais ledit point F, est nommé centre du cercle.

Quelques Geometres définissent autrement le cercle, & disent, que c'est une figure plane, décrite par une ligne droite finie, laquelle ayant un des points extrêmes fixe, est meüe à l'entour d'iceluy jusques à ce qu'elle retourne au même lieu où elle a commencé à mouvoir : comme si la ligne droite AF ayant le point F fixe, est entendüe se mouvoir à l'entour d'iceluy point F, tirant de A vers C, E, jusques à ce qu'elle revienne au même lieu FA, où elle a commencé son mouvement ; elle décrira par iceluy mouvement le cercle ou espace ACE, duquel la circonférence est décrite & tracée par le point mobile A ; & le point fixe F, est le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droites menées à la susdite circonférence ACE, sont égales entr'elles, puiſ qu'elles proviennent toutes d'une seule & même mesure, c'est à ſçavoir de la ligne FA.

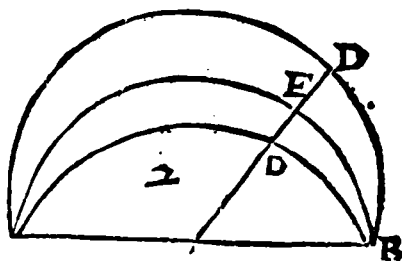
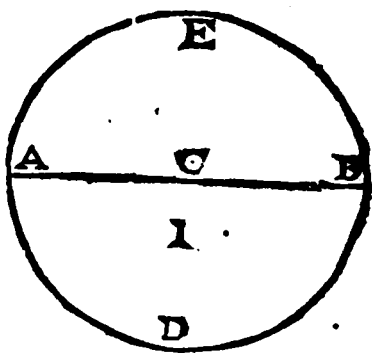
17. Diametre du cercle, est une ligne droite menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonférence d'iceluy cercle, le divisé en deux également.

Si dans un cercle on mene une ligne droite par le centre, qui aille de part & d'autre jusques à la circonférence ; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en cette premiere figure, la ligne droite AB, qui est tirée par le centre C, & va de part & d'autre jusques à la circonférence du cercle, s'appelle diametre du cercle : Et iceluy, comme adjoute Euclide, coupe le cercle en deux parties égales, tellement que la partie AEB est égale à la partie ADB. Ce qui est assez manifeste, puiſque ledit diametre AB passe par le milieu du cercle, c'est à ſçavoir par le centre C : car s'il ne divisoit le cercle en deux parties égales, les lignes droites tirées du centre à la circonférence, ne seroient pas égales, contre la definition du cercle : Neanmoins plusieurs Interpretes d'Euclide rapportent en cét endroit la de-

monstration que Proclus dit, en avoir été faite par Thales

Milelien, qui est telle :

Imaginons nous que la partie de cercle $A B D$ soit superposée & accommodée à l'autre partie du cercle $A E B$, en sorte que le diamètre $A B$ soit commun à l'une & à l'autre partie. Or la circonférence $A D B$ se rencontrera totalement avec la circonférence $A E B$, ou bien elle tombera au dessus d'elle, ou au dessous : Si elles se rencontrent & conviennent l'une à l'autre, il est évident que ces deux parties là faites par le diamètre $A B$, sont égales entr'elles, puis-



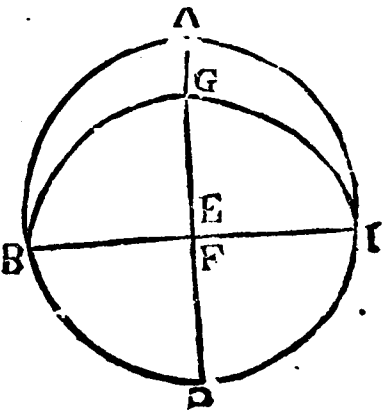
que l'une n'excede l'autre. Mais si on dit que la circonférence $A D B$ ne se rencontre pas avec la circonférence $A E B$, ains qu'elle tombe au dessus ou au dessous d'icelle, comme en la 2. figure, soit tirée du centre C une ligne droite, laquelle coupe la circonférence $A D B$ en D , & la circonférence $A E B$ en E ; les deux lignes droites $C D$ & $C E$, qui sont tirées du centre à la circonférence d'un même cercle, seront égales entr'elles, par la definition du cercle : Ce qui est absurde, car l'une n'est que partie de l'autre. Donc l'une de ces circonférences-là ne tombera pas au dessus ny au dessous de l'autre; mais se rencontreront & conviendront totalement l'une avec l'autre, & par consequent seront égales : ce qu'il falloit demontrer.

De cette demonstration il appert que le diamètre ne coupe pas seulement la circonférence en deux également, mais aussi toute l'aire & superficie du cercle : Car puisque les demies conférences conviennent & s'accordent entr'elles, comme il a été démontré : les superficies contenues & enclouées entre le diamètre & chacune d'icelles demy circonférences conviendront aussi entr'elles, puisque l'une n'excede l'autre; & par consequent elles seront égales entr'elles.

18. Demy cercle, est une figure comprise du diametre, & de moitié de la circonference.
19. Portion ou segment de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, & de partie de la circonference.

Au cercle precedent la figure AEB contenuë sous le diametre AB, & la moitié de la circonference AEB, est dite demy cercle ; car il a été démontré cy-dessus, qu'icelle figure est moitié du cercle AEBD, & ce à cause que le diametre, ou ligne droite AB, qui le divise en deux parties, passe par le centre C : Mais quant une ligne droite, qui ne passe pas par le centre du cercle, le divise en deux parties : chacune d'icelles parties cōtenuë sous ladite ligne droite, & une partie de la circonférence, est nommée segment ou portion de cercle ; & ces deux parties sont inégales, car celle où est le centre est plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle ABCD, duquel le centre est E, soit une ligne droite BFD, qui coupe ledit cercle en deux parties, sans passer par ledit centre E ; la partie BAD, composée sous la ligne droite BD, & la partie de circonference BAD, s'appelle segment ou portion de cercle, comme aussi BCD, qui est contenuë sous la même ligne droite BD, & la circonference BCD. Or il est assez évident que la portion BAD, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion BCD, attendu que si de B par le centre E on menoit un diametre, il couperoit le cercle en deux moitiëz, chacune desquelles seroit plus grande que la portion BCD, & moindre que l'autre portion BAD : Neanmoins Clavius & quelques autres Interpretes d'Euclide le demontrent ainsi.

Soit conçu ou imaginé que par le centre E, soit mené le diametre AC perpendiculaire à BD : donc si les susdites portions BAD, & BCD, sont dites égales,



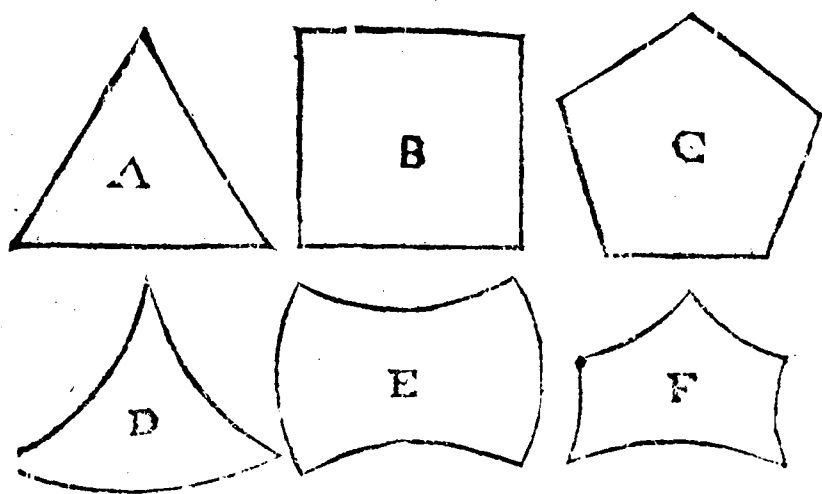
& que la portion BCD, soit entendue se mouvoir à l'entour de la ligne droite BD, en sorte qu'elle tombe sur l'autre portion BAD; cette portion là conviendra avec cette-cy, & la ligne droite CF à la ligne droite AF, à cause que par la 10. defin. les angles du point F sont droits & égaux: Parquoy la ligne droite FC, qui est maintenant la même que FA, sera plus grande que EA, qui n'est que partie d'icelle FA. Mais d'autant que EC, est égale à EA, étans toutes deux menées du centre E à la circonférence; FC sera pareillement plus grande que EC, la partie que le tout: Ce qui est absurde. Donc la portion BCD ne conviendra pas à la portion BAD; ains elle tombera dedans icelle, cōme est la portion BGD, de sorte que la ligne droite FG, qui sera lors la même que FC sera moindre que EA ou EC; car si on disoit qu'elle tombe dehors, cōme si le cercle étoit BCDG, duquel le centre fust E; aussi la portion BCD tomberoit dehors BGD, ainsi que la portion BAD: Derechef FA, qui seroit lors la même que FC, seroit plus grande que EG, c'est à dire que EC; & partant la partie FC seroit derechef plus grande que le tout EC: Ce qui est absurde. Il est donc manifeste que la portion BAD, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion BCD, puis que cette-cy est égale à la portion BGD, qui est partie de la portion BAD. Car puis qu'il a été démontré que la portion BCD, meüe à l'entour de la ligne droite BD, ne peut convenir sur la portion BAD, i.e. tomber hors icelle; elle tombera totalement au dedans cōme BGD.

Or ces deux definitions n'étoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne sont employées en ce premier Livre, mais bien au troisième, auquel la dernière est répétée.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droites.

• Apres avoir défini le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide passe aux figures planes rectilignes, & dit, que ce sont celles contenues & encloses de lignes droites, & telles sont les trois figures cy-dessous cortées A, B, C; par conséquent les figures planes comprises & environnées de lignes courbes, cōme celles cortées DEF, sont appellées figures courbeli-

gnes, ou curvilignes : mais les figures qui sont circuites &



encloses en partie de lignes droites, & en partie de lignes courbes, sont nommées figures mixtes,

21. Figure de trois côtez, est celle qui est comprise de trois lignes droites.

Euclide voulant décrire divers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilatères, ou de trois côtez, & dit que ce sont celles qui sont contenues & environnées de trois lignes droites : & d'autant que telles figures ont toujours trois angles, on les appelle communément triangles. Ainsi la figure A cy-dessus, laquelle est contenue sous trois lignes droites, qui constituent trois angles, sera nommée figure trilatère, ou plutôt triangle rectiligne ; & y en a de diverses especes, qui seront déclarées cy-après : mais la figure D, circuit & enclose de trois lignes courbes, sera dite triangle curviligne.

22. Figure de quatre côtez, est celle qui est comprise de quatre lignes droites.

Après les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres ou de quatre côtez, c'est à sçavoir les figures contenuës sous quatre lignes droites, lesquelles constituënt aussi quatre angles; & pour ce sont-elles souvent appellées quadrangles: ainsi entre les figures precedentes celle cottée B, comprise & enclose de quatre lignes droites qui constituënt quatre angles, sera appellée quadrilatere, ou quadrangle rectiligne; & y en a de diverses especes cy-apres declarées: mais la figure cottée E enclose de quatre lignes courbes sera dite quadrangle curviligne.

23. Figures multilateres, ou de plusieurs côtez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droites.

Le nombre des especes de figures rectilignes étant infini, Euclide s'est contenté de definir, & particulièrement denommer les deux premieres especes cy-dessus declarées, c'est à sçavoir celles contenuës sous trois & quatre lignes droites: & quant aux autres especes de figures, qui sont contenuës & encloses par plus de quatre lignes droites, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denommant particulièrement quelqu'unes de ces figures multilateres, prennent leurs denominations du nombre de leurs angles: ainsi les figures cy-devant cottées C, & F, lesquelles sont comprises & environnées de cinq lignes, qui constituënt cinq angles, sont appellées *Pentagones*: Et celles contenuës de six lignes, sont nommées *Hexagones*; de sept, *Heptagones*; de huit, *Octogones*; de neuf, *Enneagones*; de dix, *Decagones*; de vnze, *Endecagones*; de douze, *Dodecagones*, &c.

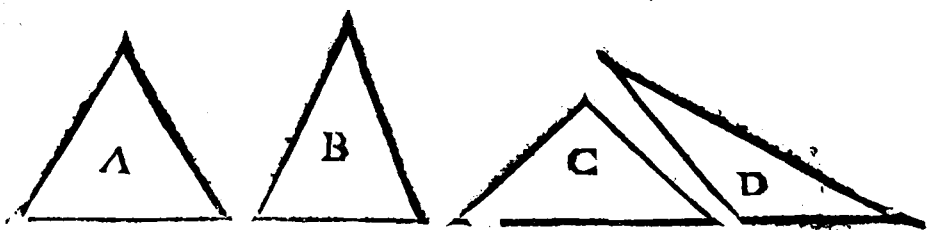
24. Or des figures de trois côtez, celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois côtez égaux.

25. Triangle Ifocele, qui a deux côtez égaux seulement.

26. Scalene, qui a les trois côtez inégaux.

Il y a diverses especes de triangles rectilignes, soit qu'on les considere

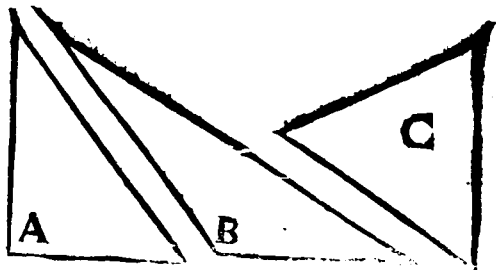
confidere selon les côtez, soit qu'on ait égard à leurs angles :



confiderant les côtez il y en a de trois especes, lesquelles Euclide expose par ces trois definitions, & dit premierement que le triangle qui a tous les trois côtez égaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral : Mais les triangles qui n'ont que deux côtez égaux, comme B & C, s'appellent triangles Ifofcelles. Et finalement, le triangle qui a tous les trois côtez inégaux, comme D, est nommé triangle scalene. Or les triangles Equilateraux sont tousjours uniformes & d'une même sorte : mais les Ifofcelles, & les Scalenes sont diversifiez en infinies manieres.

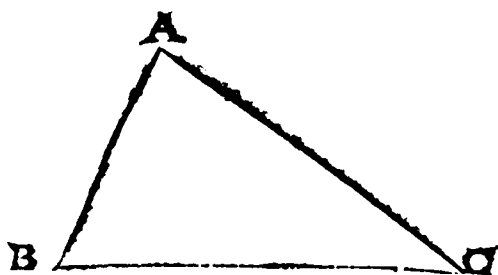
- 27. Encores des figures de trois côtez, celle se nomme triangle rectangle qui a un angle droit.
- 28. Ambligone, qui a un angle obtus.
- 29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide confidere maintenant les triangles ayant égard à leurs angles, lesquels triangles sont de trois sortes, c'est à sçavoir rectangle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles sont ceux qui ont un angle droit; & tel est icy le triangle A : mais les triangles ambligones, sont ceux qui ont un angle obtus, comme est icy le triangle B : & les triangles oxigones, sont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel est icy le triangle C.



Or est à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes

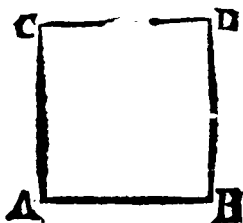
des trois qui le cōtiennent, étans prises pour deux côtez, la troisième restante a accoustumé d'être appelée par les Geometres, la base du triangle, soit qu'icelle ligne soit le costé infime du triangle, ou non : tellement que chacune desdites trois lignes qui constituent & enferment le triangle peut être prise pour base : Ainsi au triangle A



B C, les lignes A B, & A C étans prises pour les deux costez. la troisième ligne B C sera la base : mais si on prend A B, & B C pour les deux costez, A C sera la base du triangle.

30. Mais des figures de quatre côtez ; celle qui a les quatre costez égaux, & les quatre angles droits s'appelle quarré.

Après les figures trilateres, Euclide expose les quadrilateres, qui sont de cinq sortes : la premiere d'icelles, qui est equilaterale & rectangle, s'appelle quarré. Ainsi la figure quadrilaterale A B C D, ayant tous les quatre costez égaux, & tous les quatre angles droits sera appelée quarré.



31. Quarré long, qui a les quatre angles droits, mais non pas tous les côtez égaux.

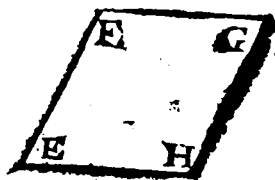
La seconde figure quadrilateres s'appelle quarré long, à cause qu'étant plus long d'une part que de l'autre, elle a tous les quatre angles droits. Ainsi la figure quadrilaterale A B C D fera appelée quarré long, car elle a les quatre angles droits, & non pas



tous les costez égaux entr'eux, ains seulement les costez opposez A B, D C, qui sont plus longs que les deux autres opposez, A D, B C, qui sont aussi égaux entr'eux.

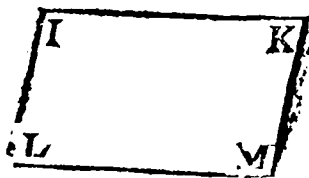
32. Rhombe, qui a les quatre côtez égaux, mais non pas les quatre angles droits.

La troisiéme sorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe a bien tous les quatre costez égaux entr'eux, ainsi que le carré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droits, ains elle en a deux opposez obtus, & deux opposez aigus. Ainsi le quadrilatere E F G H, duquel tous les quatre costez sont égaux entr'eux, & les quatre angles non droits, ains obtus & aigus, sera appellé Rhombe.



33. Rhomboide, qui a les angles opposez, & les côtez opposez aussi égaux entr'eux, sans être equilateral, ny rectangle.

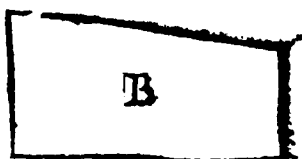
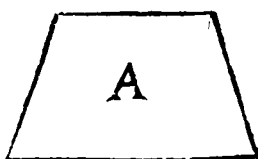
La figure quadrilatere qui n'est equilateralle ny rectangulaire, mais a les costez opposez égaux entr'eux, & les angles opposez aussi égaux entr'eux, s'appelle Rhomboide; & telle est icy la figure I K L M, de laquelle les costez opposez I K, L M sont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres costez opposez I L, K M, qui sont pareillement égaux entr'eux, mais les angles opposez I, M, égaux, & plus grands que les deux autres K, L, lesquels sont aussi égaux entr'eux.



34. Toute autre figure de quatre côtez, est appelée trapeze.

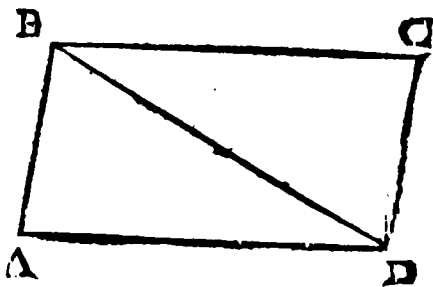
Toute autre figure quadrilatere differente des quatre susdites, c'est à sçavoir qui n'est ny carré, ny carré long, ny

Rhombe , ny
Rhomboides,
s'appelle trape-
ses & telles sont
ces deux figures
A & B, car l'u-



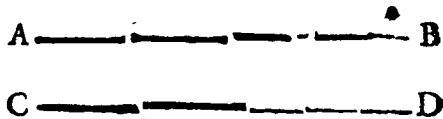
ne ny l'autre n'est equilatre ny rectangle, ny n'a les angles op-
posez égaux, ny tous les costez opposez aussi égaux.

Or est icy à noter que
quand d'un angle de
quelconque figure qua-
drilatre on tire une ligne
droite à l'angle opposé,
cette ligne est appelée
diametre par aucuns, &
diagonalle par d'autres ;
ainsi au quadrilatre A B
C D la ligne B D, menée
de l'angle B à son opposé D est dite diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droites paralleles, sont celles qui étans
sur un même plan , & prolongées infiniment
de part & d'autre ne se rencontrent jamais.

A fin que les lignes droites soient dites paralleles , ou equidi-
stantes, il ne suffit pas qu'étans prolongées infiniment de part &
d'autre, elles ne viennent iamais à se rencontrer, mais il est aussi
necessaire qu'elles soient en une même superficie plane : Car
plusieurs lignes droites n'étans en une même superficie, pour-
roient bien être prolongées à l'infiny & ne se rencontrer iamais,
lesquelles toutesfois ne seroient dites paralleles. Comme par
exemple, si deux lignes droites posées de travers au milieu de
l'air ne se touchent point, bien qu'elles soient prolongées tant
qu'on voudra, elles ne se
rencontreront iamais, &
toutesfois elles ne seront
pas dites paralleles. Par-
quoy les deux lig. droites
A B, & C D, lesquelles
sont en une même superficie plane, & qui étans prolongées à



l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne se rencontrent jamais, seront dites lignes paralleles.

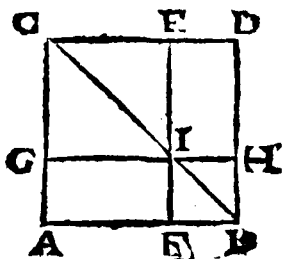
Or icy fluiffent les definitions du premier livre d'Euclide : Mais d'autant qu'en ce même Livre est souvent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point definy, nous adjoûterons icy leurs definitions.

36. Parallelogramme, est une figure quadrilatere qui a les côtez oppofez parallels, ou equidiftans.

Telle figure est tousjours l'une de ces quatre:Quarré,Quarré long, Rhombe, & Rhomboide, car elles ont toutes leurs costez oppofez parallels.

37. Mais quand en un parallelogramme on mene un diametre, & deux lignes droites paralleles aux côtez, lesquelles coupant iceluy diametre à un même point, divisent le parallelogramme en quatre autres parallelogrammes ; ces deux là par lesquels le diametre ne passe point, font appellez complemens ; mais les deux autres par lesquels le diametre passe, font dits être à l'entour du diametre.

Soit un parallelogramme ABDC, duquel le diametre est BC, & la ligne EF coupant iceluy diametre au point I, soit parallele aux costez AC, BD ; mais la ligne GH coupant ledit diametre BC au même point I, soit parallele aux côtez AB, CD. Il est manifeste que tout le parallelogramme est divisé par lefdites deux lignes paralleles EF, GH, en quatre autres parallelogrammes, deux desquels, fçavoir AGIF, & DEIH, par lesquels le diametre BC ne passe point, font appellez par les Geometres complemens, ou supplementes des deux autres parallelogrammes BF IH, CE IG, lesquels



sont dits être à l'entour du diametre, à cause que par iceux passe le diametre.

P E T I T I O N S O V D E M A N D E S.

1. D'un point donné à un autre point, mener une ligne droite.
2. Continuer infiniment une ligne droite donnée & terminée.
3. Décrire un cercle de quelque centre & intervalle que ce soit.

Euclide ne se sert en ces élemens-cy que de deux sortes de lignes simples, sçavoir est de la droite & de la circulaire, la description desquelles étant fort facile, il demande icy qu'on luy concède & accorde, sans qu'il soit contraint de démontrer qu'elle est possible : ce qui est toutefois manifeste ; car puisque la ligne est un flux & coulement imaginaire du point, & partant la ligne droite être un flux procédant de droit chemin, & le plus court qui puisse estre d'un lieu à un autre, il est certain que si on entend quelque point se

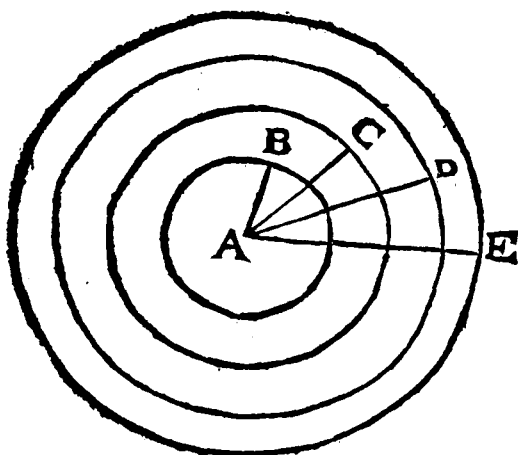
mouvoir directement à un autre, une ligne droite sera menée d'un point à l'autre. Parquoy on ne pût pas nier que depuis le point A, iusques à quelconque point B, on ne

A B

C D

puisse mener une droite ligne, comme A B ainsi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la premiere des trois petitions susdites. Et si on entend le même point se mouvoir encore plus outre directement & sans aucunement decliner ça ne là, la ligne droite terminée sera prolongée ; & ce prolongement se pourra faire à l'infiny, veu que nous pouvons entendre ce point là se mouvoir infiniment : Et partant personne ne pourra nier que la ligne droite A B cy-dessus, ne puisse être continuée iusques en C, puis encore iusques en D, & ainsi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. petition. Mais si on conçoit quelque ligne droite terminée se mouvoir à l'entour d'un de ses points extrêmes qui demeure fixe, iusques à ce qu'elle retourne au même lieu où elle a commencé son mou-

vement, sera décrit un cercle, & fait ce qui est requis par la 3. petition, comme il apert en ces quatre lignes droites AB , AC , AD , AE , chacune desquelles étant menée à l'entour du centre A , décrit un cercle selon la grandeur & intervalle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clavius a adjointé la suivante.

4. Etant donné quelconque grandeur, on en püst prendre une autre plus grande, ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continuë peust être infiniment augmentée par addition, & diminuée par division, il ne se peut donner quantité continuë si grande, qu'il ne s'en puisse donner encore une plus grande; ny une si petite qu'il ne s'en puisse encore donner une plus petite. Ce qui est dit icy touchant l'addition, est aussi veritable aux nombres; car chaque nombre peut être augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'unité, jaçoit qu'en la diminution d'iceluy on parvienne à l'unité indivisible.

A X I O M E S O V

communes Sentences.

1. Les choses égales à une même, sont égales entr'elles.

A ce premier axiome, Clavius a adjointé, qu'une chose qui est

plus grande ou plus petite qu'une des égales, est aussi plus grande ou plus petite que l'autre : Et si l'une des choses égales est plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre est pareillement plus grande ou plus petite que la même grandeur.

2. Si à choses égales, on adjoint choses égales, les tous sont égaux.
3. Si de choses égales, on ôte choses égales, les restes sont égaux.
4. Si à choses inégales, on adjoint choses égales, les tous sont inégaux.

A cet axiome Clavius a adjoint, que si à choses inégales on adjoint choses inégales, c'est à sçavoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite, les tous sont inégaux, sçavoir est celui-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

5. Si de choses inégales, on ôte choses égales, les restes sont inégaux.

A cette notion Clavius adjoint aussi, que si de choses inégales on ôte choses inégales, c'est à sçavoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus; les restes sont inégaux, sçavoir est celui-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choses ou quantitez égales, il faut aussi entendre une même commune à plusieurs; Car si à choses égales on y en adjoint une même commune, les tous seront égaux. Et si de choses égales on en retranche une commune, les restes seront aussi égaux. Et si à choses inégales on en adjoint une commune; ou à une même chose commune, on adjoint choses inégales, les tous seront inégaux. Et si de choses inégales, on en retranche une même commune, ou d'une même chose, on en retranche d'inégales, les restes seront inégaux.

6. Les choses doubles d'une autre sont égales entr'elles.

Clavius adjoint à cet axiome, que ce qui est double d'une

des choses égales est pareillement double de l'autre : Mais il est aussi manifeste que les choses qui sont triples d'une même, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. sont égales entr'elles.

7. Les choses qui sont moitié d'une même, sont égales entr'elles.

Il est aussi évident que les choses égales entr'elles sont moitié d'une même : Et semblablement que les choses qui sont tierces parties d'une même, ou quarts, ou cinquièmes, &c. sont aussi égales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par une même quantité on doit aussi entendre les quantitez égales, car les choses doubles, triples, quadruples, &c. de choses égales, sont aussi égales entr'elles ; Item, les choses qui sont moitié, ou tierces parties, &c. de choses égales, sont pareillement égales entr'elles.

8. Les choses qui conviennent entr'elles, sont égales entr'elles.

C'est à dire, que deux grandeurs seront égales entr'elles, si étans posées l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'ajustent entr'elles : comme deux lignes droites, seront dites être égales entr'elles, si l'une étant posée sur l'autre, celle qui est posée dessus s'ajuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excédée d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront égaux entr'eux quand le sommet de l'un, étant posé sur le sommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, mais les lignes de l'un tombent totalement sur celles de l'autre : car par ainsi les inclinations des lignes seront égales, combien que souventefois icelles lignes soient inégales entr'elles. Ainsi aussi deux superficies seront égales entr'elles, quand l'une étant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excédée par icelle, mais s'ajustent totalement entr'elles. Quelqu'un expliquant cette notion a dit que convenir, c'est avoir les extrémités sur les extrémités : ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs ; Car pour exemple, une ligne droite peut bien avoir ses extrémités sur les extrémités d'une ligne courbe, laquelle néanmoins, ne luy sera égale. Ainsi aussi une ligne courbe peut bien avoir ses extrémités sur les extrémités d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtant égale. Or il est manifeste

que de cet axiome on peut bien convertir & prendre pour principe, que les lignes droites égales conviennent : Aussi que les angles rectilignes égaux conviennent : Semblablement Que les superficies planes égales & semblables conviennent. On peut bien encore tirer quelques autres convertes de cet axiome : mais de le vouloir convertir universellement (comme quelques-uns) c'est se moquer, veu que si on trouve une ligne courbe égale à une droite, elles ne conviendront pas pourtant : & aussi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler un curviligne égal, lesquels néanmoins ne conviendront jamais : voire même faire un quarré égal à un triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne : lesquels pourtant ne peuvent iamais convenir.

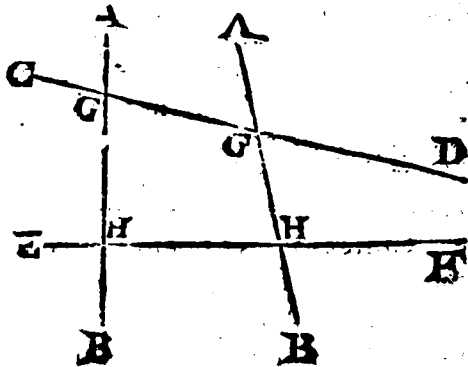
9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

De ce principe, nous pouvons convertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne égal à un angle droit, est aussi droit.

11. Si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites, fait les angles intérieurs d'un même côté plus petits que deux droits, icelles deux lignes étans continuées à l'infiny, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

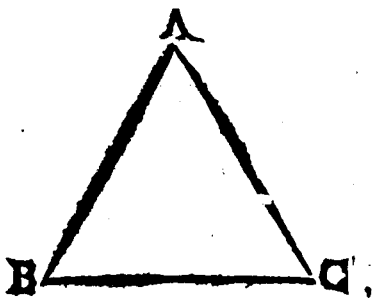
Comme par exemple, si la ligne droite A B, tombant sur les deux lignes droites C D, E F, & les coupant aux points G, H, fait les deux angles intérieurs D G H, F H G, pris ensemble plus petits que deux droits, icelles deux lignes C D, E F, étans continuées à l'infiny se rencontreront de la part de D, F, où les susdits angles intérieurs



Sont faits moindres que deux droits : Car il est manifeste que de l'autre côté, sçavoir est vers C, E, l'espace d'entre lesdites deux lignes C D, E F, s'élargira tousjours de plus en plus; mais de cettui-cy il s'étrécira en sorte que finalement icelles lignes se rencontreront à un point.

12. Deux lignes droites n'enferment pas un espace.

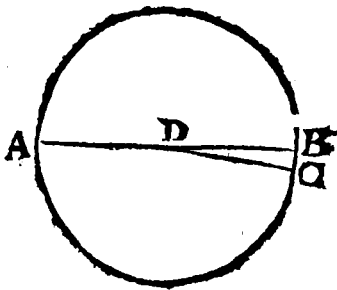
Une seule ligne courbe enferme bien un espace, comme font aussi une ligne droite & une courbe, mais deux droites ne le peuvent faire, ains il en faut du moins trois, pour contenir & enclore une espace, côme il apert en cette figure, en laquelle les 2 lignes droites A B, & B C, qui font l'angle B, étans prolongées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne se joindrōt point, mais au contraire elles se dilateront tousjours de plus en plus, tellement que pour enclore l'espace d'entre icelles deux lignes, il sera nécessaire d'en mener une troisième, comme A C.



A ces 12 axiomes, Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ont encore adjouté les 8 suivans.

13. Deux lignes droites se rencontrans indirectement n'ont pas un même & commun segment.

Combien que par la nature de la ligne droite, il soit assez manifeste que deux lignes droites, se rencontrans de travers, ne peuvent avoir aucune partie commune, tant petite qu'elle puisse être, outre le point de leur rencontre; si est-ce toutesfois que Proclus le demontre ainsi. Que deux lignes droites A D B, A D C ayent, s'il est possible, une partie commune A D. Du centre D, & de l'intervalle d'icelle A D, soit décrit un cercle coupant les deux



lignes droites proposées aux points B & C. Donc les circonferences AB, & ABC seront égales entr'elles: (car elles sont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC sont posés diametres) la partie & le tout : ce qui est absurde. Donc deux lignes droites, &c.

Or nous n'avons pas rapporté cet axiome, ny aussi les sept autres suivans, tout de même qu'ils se trouvent dans Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ains avons changé quelques mots aux uns, & ajouté aux autres, afin d'ôter de ceux-là tout doute & ambiguïté, & ne laisser en ceux-cy aucune defectuosité: comme par exemple, en certuy-cy nous avons ajouté *se rencontrans indirectement*, pource que deux lignes droites peuvent bien avoir un commun

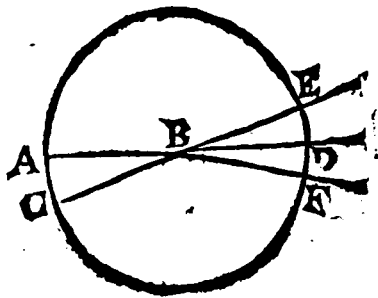
segment, quand elles sont posées directement, & constituent comme



une seule ligne droite, ainsi qu'il apert icy aux deux lignes droites DC & BA, qui ont la partie ou segment AC commun: mais quand elles sont posées de travers & indirectement, elles ne peuvent avoir aucune partie commune outre le point de leur rencontre.

14. Deux lignes droites se rencontrans à un point indirectement, si elles sont toutes deux prolongées, elles s'entrecouperont necessairement en iceluy point.

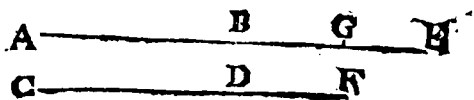
Cet axiome dépend aussi de la nature de la ligne droite, & toutesfois Clavius le démontre ainsi. Que deux lignes droites AB, CB se rencontrent indirectement au point B, ie dis qu'icelles lignes érans prolongées s'entrecouperont à iceluy point B, sçavoir est que CB prolongée tombera, comme en E, au dessus de AB prolongée. Car si CB continuée ne tomboit au dessus de AB prolongée, ou elle conviendrait avec icelle AB continuée, de sorte qu'elle passeroit par D, & par ainsi les deux lignes droites ABD, CBD auroient un même



segment $B D$ commun, contre le precedent axiome : ou bien elle tomberoit au dessous de AB prolongée comme en F , tellement que $C B F$ seroit une ligne droite : Donc du centre B , & de quelconque intervalle soit décrit un cercle $ACFD$. coupant les lignes droites $A B$, $C B$ prolongées en D , F . Or puis que l'une & l'autre ligne droite $A B D$, $C B F$ passe par le centre B , tant ACD que CF sera demy cercle par la 18. def. & consequemment les circonferences $A B D$ & CF seront égales entr'elles, le tout & la partie : ce qui est absurde.

15. Si à choses égales on adjoute choses inégales, l'excez des toutes sera le même que l'excez des ajoutées.

Aux grandeurs égales $A B$, $C D$, étans ajoutées les inégales $B E$, $D F$, desquelles la difference ou excès est $G E$; il est manifeste que la toute $A E$ excedera la toute $C F$ du même excès $G E$.



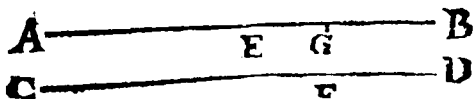
16. Si à choses inégales on ajoute choses égales, l'excez des toutes sera le même que l'excez de celles qui étoient au commencement.

Comme si (en la figure precedente) aux grandeurs inégales BE , DF , dont l'excez ou difference est $G E$, on ajoute les grandeurs inégales AB , CD : il est manifeste que la toute $A E$ excedera la toute $C F$ du même excès $G E$.

17. Si de choses égales on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera le même que l'excez des retranchées.

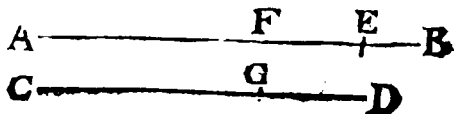
Des grandeurs égales $A B$, $C D$, étans retranchées les inéga-

les, B E, D F, dont l'excez est E G, il est évident que le reste C F excedera le reste A E, du même exciez E G.



18. Si de choses inégales on ôte choses égales, l'excez des restantes fera le même que l'excez des toutes.

Comme si des grandeurs inégales A B, C D, dont l'excez est B E, on retranche les grandeurs égales A F, C G, il est manifeste que le reste F B, excedera le reste G D, du même exciez B E.



19. Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.
20. Si un tout est double d'un tout, & le retranché du retranché; le reste sera aussi double du reste.

Comme par exemple, le nombre total 24. étant double du nombre total 12: & 18. retranché de celui-là, double de 5. retranché de celui-ci, 14. reste du premier tout, sera aussi double de 7. reste du second tout.



ELEMENT PREMIER.

PROBL. I.

PROP. I.

Sur une ligne droite donnée & terminée , décrire un triangle equilateral.



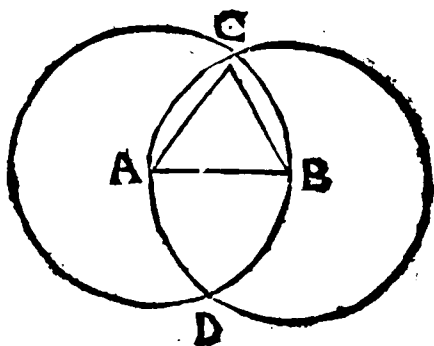
OIT la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut faire un triangle equilateral.

Du centre A , & de l'intervale de AB soit décrit le cercle BCD : Item, du centre B , & de l'intervale de la même AB , soit décrit un autre cercle ACD , coupant le premier és points C & D , de l'un desquels, sçavoir de C , soient menées les deux lignes

droites CA , & CB : Je dis que le triangle ABC , constitué sur la ligne droite donnée AB , est equilateral.

Car le costé AB , est égal au costé AC par la quinzième definition, d'autant qu'ils procedent de même centre vers même circonference: & par la même raison, le costé BA est égal au costé BC . Donc par la 1. con. sent. les costez CA ,

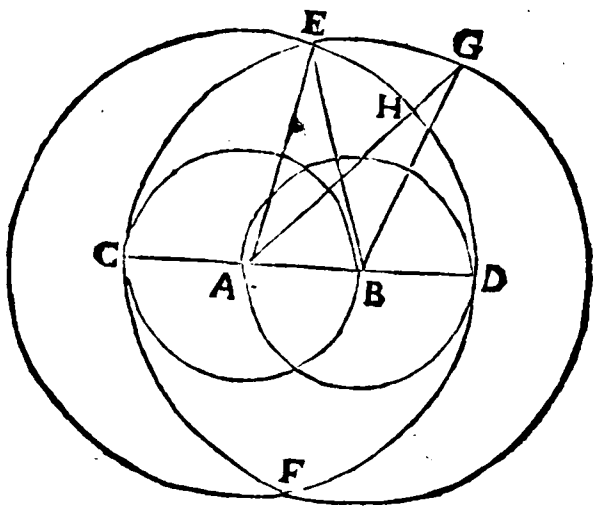
& C B seront égaux, chacun étant égal à A B : & partant le triangle A B C décrit sur A B, est equilateral ; qui est ce qu'il falloit faire.



S C H O L I E.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à décrire aussi sur une ligne droite donnée un triangle isoscèle, & un Scalene, ce que nous ferons aussi en cette maniere. Soit une ligne droite donnée A B, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient décrits deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongée icelle A B, de part & d'autre vers les circonferences jusques en C & D : puis du centre A, & intervalle A D, soit décrit le cercle D E F : Item du centre B, & intervalle B

C, le cercle C E F, coupant le premier es points E & F, de l'un ou l'autre desquels, sçavoir de E, soient menées aux points A & B, les deux lignes E A,



E B ; Je dis que le triangle A E B, fait sur la ligne donnée

née

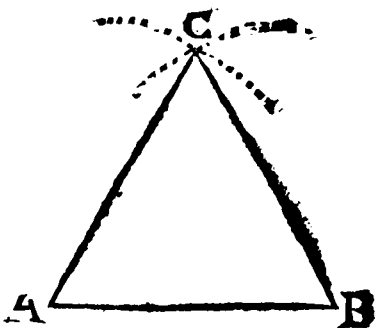
Le triangle AB , est Isoscelle, qui est que les deux côtes AE , EB , sont égaux entr'eux, & plus grands que AB . Car d'autant que par la 15. def. AE , est égale à la ligne droite, AD , & icelle AD est double de AB , veu que BA . & DB , sont égales entr'elles : aussi AE sera double de AB . Derechef, parce que BE est égal à BC , & icelle BC est double de AB , aussi BE , sera double d'icelle AB . Veü donc que l'un & l'autre côté AE & BE est double de la même AB , ils seront égaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grands que la ligne AB . Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant, si du point A , on tire la ligne droite AG à la circonference EGF , qui ne soit la même que AE , ou AD , coupant la circonference EHD en H , & de G on mene à B la ligne droite GB , sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB , lequel se dit être scalene. Car par la 15. def. tant AH , AD , que BG , BC sont égales. Mais AD , BC sont doubles de AB : d'icelle seront donc aussi doubles AH , BG : & partant plus grandes qu'icelle AB . Veü donc que AG est plus grande que AH , ou que BG : le triangle AGB sera scalene : ce qu'il falloit faire.

Or est icy, à noter que pour brièveté nous mettrons souuentefois ce mot ligne au lieu de ligne droite. & quelques fois aussi nous posons simplement deux lettres capitales : comme par exemple AB , au lieu de dire la ligne droite AB , c'est pourquoy quand on trouvera ledit mot ligne posé simplement, ou bien deux lettres capitales de suite, il faudra entendre une ligne droite. Semblablement quand on trouvera ce mot angle, ou trois lettres capitales posées simplement de suite sans aucune explication, il faudra entendre un angle rectiligne, le lieu duquel sera toujours denotté par la lettre du milieu, ainsi que nous auons déjà remarqué à la 12. Def.

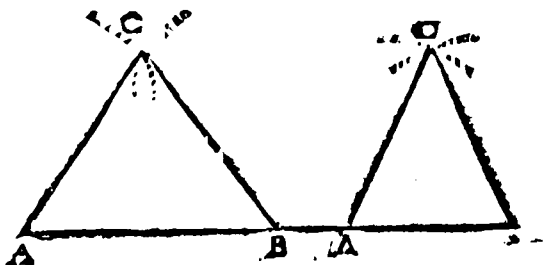
Et d'autant qu'en la construction & démonstration de la plupart des problèmes de ces Elemens-cy, Euclide employe beaucoup de paroles, & tire plusieurs lignes qui ne sont necessaires pour pratiquer lesdits problèmes, nous enseignerons en suite de leurs démonstrations, comme on peut facilement & brièvement construire lesdits problèmes, & principalement ceux qui sont les plus en usage chez les Mathematiciens, & en la pratique des-

quels on peut apporter quelque brièveté.

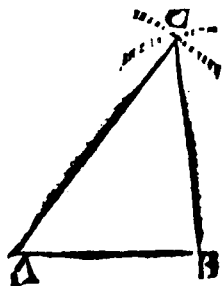
Premièrement donc, pour décrire un triangle équilateral sur une ligne droite donnée AB , des centres A & B , mais de l'intervalle d'icelle AB , soient décrits deux arcs de cercles s'entre-coupans en C ; puis iceluy point C , soient tirées les lignes droites AC , BC , & sera fait le triangle équilateral ACB .



Mais pour décrire un triangle Isofcelle sur ladite ligne AB : des centres A & B , mais d'un intervalle plus grand qu'icelle AB , si on veut les côtez plus grands que la ligne donnée, ou moindre (& toutes-fois plus grand que la moitié d'icelle AB) si on veut les côtez moindres: &



soient décrits deux arcs s'entre-coupans en C , puis tirées les deux lignes AC , BC , lesquelles feront sur AB le triangle Isofcelle ACB . Et pour construire un triangle scalene sur ladite AB , du centre B , & d'un intervalle plus grand que BA , soit décrit un arc, puis du centre A , & d'un intervalle encore plus grand que le precedent, soit décrit un autre arc qui coupe le premier en C , auquel point soient menées les deux lignes droites AC , BC , & sera fait le triangle scalene ACB .



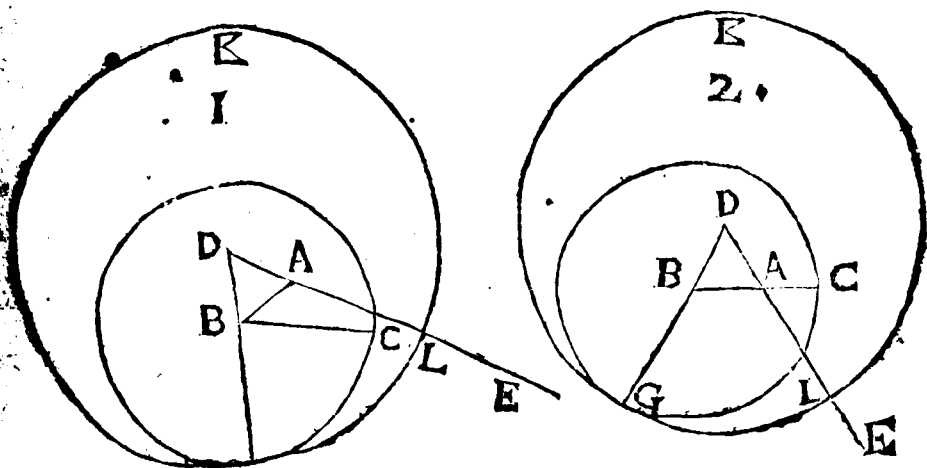
Voilà donc comme il faut décrire sur une ligne donnée un triangle ou equilateral, ou Isofcelle, ou scalene, & sur la 22. prop. de ce Livre nous enseignerons comme il faut construire quelconque triangle ayant les trois côtez égaux à trois lignes droites données.

P R O B. 2. P R O P. II.

D'un point donné, mener une ligne droite égale à une ligne droite donnée.

Soit le point donné A, & la ligne droite donnée B C : & il faut du point A, mener une ligne droite égale à icelle donnée B C.

Dè l'un ou l'autre extrême de la ligne donnée B C, sçavoir est de B, comme centre, & de l'intervale d'icelle B C, soit décrit le cercle C G : puis du point donné A, au centre B, soit



menée la ligne droite A B (sinon que le point A fut donné en la ligne B C, comme en la 2. fig.) sur laquelle ligne A B par la precedente proposition soit décrit le triangle equilateral ADB, & soit continué le costé DB, iusques à ce qu'il rencontre la circonference en G : mais le costé DA tant qu'on voudra en E. En apres, du centre D, & de l'intervale de la ligne droite DG, soit décrit le cercle G K L coupant la ligne D E en L : Je dis que la ligne A L, qui est menée du point donné A, est égale à la ligne droite donnée B C.

Car les lignes droites D G & D L sont égales, d'autant qu'elles procedent de même centre vers une même circonference, desquelles lignes si on ôte D A & D B, qui sont égales, étant D A B

triangle équilatéral : les restantes BG & AL seront aussi égales par la 3. com. rent. Mais BG est égale à BC, parce qu'elle procede de même centre vers même circonférence. Donc AL sera égale à BC, parce que les choses égales à une même sont égales entr'elles. Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AL égale à la ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Ce problème peut avoir divers cas : car où le point donné est posé en la même ligne droite donnée, ou hors icelle : & selon chacune de ces positions il y peult encore avoir divers cas, deux desquels seulement nous avons rapporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a toujours une même construction & démonstration.

Que si en la construction on fait sur la ligne droite AB le triangle ABD isoscèle au lieu qu'il a été fait équilatéral, on démontrera en la même manière la ligne droite AL être égale à la ligne droite BC.

Quant à la pratique de ce problème, elle est fort facile : car il n'y a qu'à prendre la ligne donnée BC, & de son intervalle décrire un arc du centre A, & quelque que ligne droite menée d'iceluy centre à cet arc, sera égale à la ligne droite donnée BC.

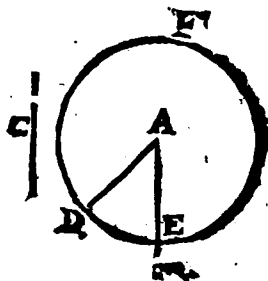
P R O B. 3.

P R O P. III.

Deux lignes droites inégales étans dondées, ôter de la plus grande, une ligne droite égale à la plus petite.

Soient les deux lignes droites inégales AB & C, desquelles AB est la plus grande : & d'icelle il faut ôter une ligne égale à C.

A l'un ou l'autre des extrêmes de la plus grande ligne AB, sçavoir est au point A, soit posée par la précédente prop. la ligne droite AD égale à la moindre C : puis du centre A, & de l'intervale AD, soit décrit un



cercle coupant AB en E. Je dis que la ligne AE est égale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droites AD, AE sont égales : & par la construction AD est égale à C; par la 1. com. sent. AE sera aussi égale à C. Nous avons donc ôté de AB la ligne AE égale à C, ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

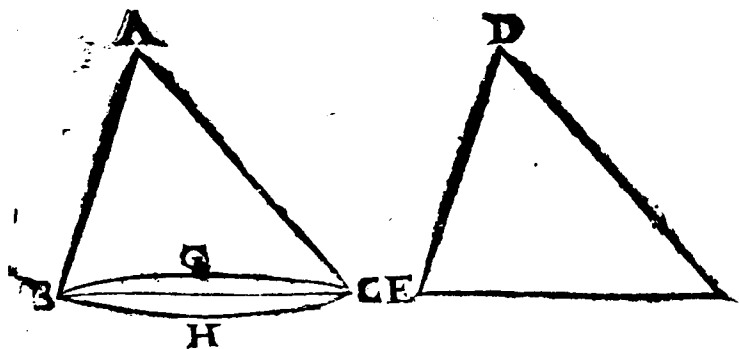
Ily peut bien avoir divers cas en ce problème, à cause des diverses positions auxquelles se peuvent rencontrer les deux lignes données, mais en tous ces cas-la on peut toujours faire la même construction & démonstration que cy dessus, comme Proclus a fort bien remarqué sur cette prop.

Quant à la pratique de ce problème, elle est tres-aisée, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnée, & de l'intervale d'icelle, décrire de l'un ou l'autre extrême de la plus grande ligne un petit arc, qui coupera d'icelle, une ligne égale à la moindre donnée.

THEOREME I. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux, égal à l'angle : la base sera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien ; & le triangle égal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le côté AB



soit égal au côté DE, & AC à DF, & l'angle A égal à l'angle D.

gle D : Je dis que la base BC sera égale à la base EF, & l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC égal au triangle DEF.

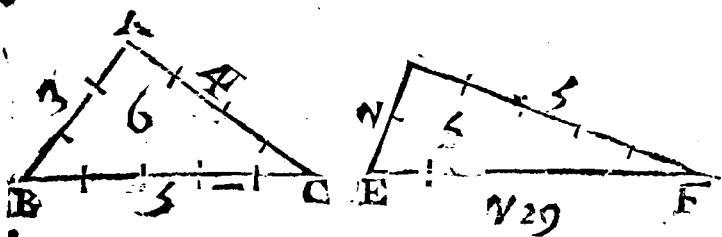
Qu'il ne soit ainsi ; si on entend le triangle DEF, être posé sur le triangle ABC, en sorte que le point D soit sur le point A, & que DE tombe sur AB, aussi DF tombera sur AC : autrement l'angle A ne seroit pas égal à l'angle D. Et d'autant que les costez AB & AC sont égaux aux costez DE & DF, chacun au sien, ils conviendront par la 8. com. sent. conveitie. & partant les extremittez E & F tomberont sur les extremittez B & C : ainsi la base EF, conviendra avec la base BC, car si elle ne convenoit, elle tomberoit ou au dessus d'icelle BC, comme BGC, ou au dessous, comme BHC : ce qui est impossible, attendu que deux lignes droites ne peuvent enclore une espace par la 12. com. sent. Donc les deux bases BC, & EF conviendront, & partant seront égales entr'elle par la susdite 8. com. sent. Et par ainsi tout le triangle DEF conviendra avec tout le triangle ABC, consequemment égal à iceluy, & l'angle B conviendra aussi avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F ; partant égaux. Si donc deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y sont du tout necessaires ; la premiere desquelles est que deux costez d'un triangle soient égaux aux deux costez de l'autre chacun au sien : & la seconde, que les deux angles contenus d'iceux costez égaux, soient aussi égaux. car defaillant l'une ou l'autre de ces deux conditions, les bases, ny les autres angles ne pourroient jamais être égaux : & la derniere defaillant, les triangles peuvent bien être quelquefois égaux, mais le plus souvent ils sont inégaux : ce que nous pourrions facilement démontrer icy n'étoit que plusieurs choses à ce requises n'ont encore été démontrées : néanmoins afin de rendre aucunement évidente la necessité des susdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus sur cette proposition, & Clavius apres luy.

Pour la premiere condition de ce theoreme, soient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D égaux.

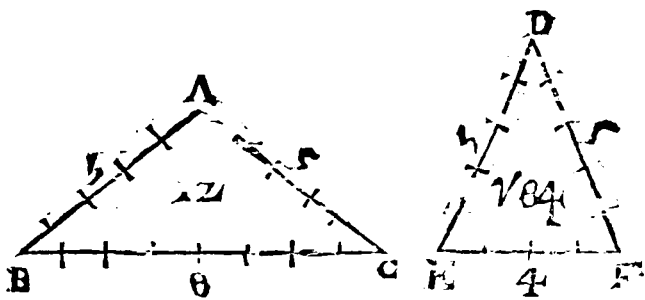
Savoir droits; & les deux costez AB , AC égaux aux



deux costez DE , DF , non chacun au sien, mais ces deux-là pris ensemble égaux à ces deux-cy aussi pris ensemble: & soit AB 3, & AC 4, qui ajoutés ensemble font 7, mais DE soit 2, & DF 5, qui font aussi ensemble 7. Ce qu'étant ainsi, la base BC sera 8, & la base EF , racine quarrée de ce nombre 29, laquelle est plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou superficie du triangle ABC sera 6: mais l'aire du triangle DEF ne sera que 5. Finalement les angles sur la base BC ne seront pas égaux aux angles de dessus la base EF , chacun au sien. Toutes lesquelles inégalitez adviennent à cause de ce que les costez AB , AC ne sont pas égaux aux costez DE , DF chacun au sien,

Quant à la seconde condition: Les costez AB , AC du

triangle
 ABC
soient
égaux
aux cô-
tez DE ,
 DF du
triangle
 DEF ,
chacun

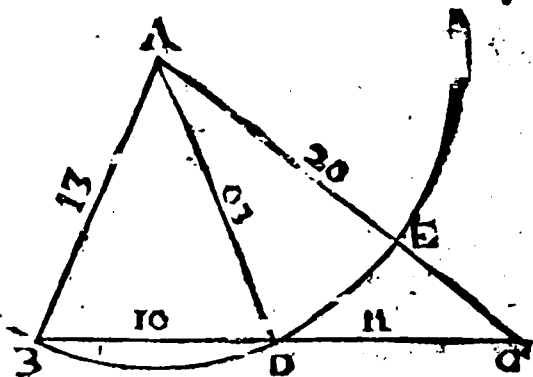


au sien, & chacun d'iceux soit 5, mais les angles A & D contenus d'iceux costez soient inégaux, & soit A plus grand que D . Toutes lesquelles choses étant ainsi, la base BC sera plus grande que la base EF , comme il sera démontré en la 24. prop. de ce Livre.

Que si nous posons la base BC être 8, & la base EF 4, l'aire du triangle ABC , sera 12; mais l'aire du triangle

DEF sera la racine quarrée de ce nombre 84, laquelle est plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui est tres-bien connu des Geometres.

Et afin qu'on n'estime pas que cette inégalité advienne à raison de ce que tous les quatre costez des triangles sont égaux, & rendre tant plus manifeste la nécessité de la seconde condition de ce theoreme, soit un triangle ABC duquel le costé AB soit moindre que le costé AC, & aussi que la base BC. Du centre A, & de l'intervalle du petit costé AB, soit décrit un cercle BDE qui coupera tant le plus grand costé AC, que la base BC: Car autrement il passeroit ou par le point C, ou au dela d'iceluy; ce qui est absurde; veu que toutes les lignes droites tirées du centre A à la circonference du cercle BDE, doivent être égales entr'elles par la 15. def. Qu'il coupe donc la base BC en D, & soit tirée la ligne AD. Par la même 15. def. AB est égale à AD, & AC est commune à tous les deux triangles ABC, ADC, & partant iceux triangles auront les deux costez AB, AC égaux aux deux costez AD, AC, chacun au sien; mais l'angle DAC, contenu des deux costez AD, AC, n'est que partie de l'angle BAC, contenu des costez égaux à ceux-là; & partant la base DC ne sera aussi que partie de la base BC, & pareillement le triangle ADC partie du triangle ABC. Ce qui est aussi manifeste par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres sçavent tres-bien que le costé AB est tant 13, le costé AC 20, & la base BC 21; le costé AD sera aussi 13, & la base DC 11; mais l'aire ou contenu du triangle ABC sera 126, & celui du triangle DAC ne sera que 66. Donc



afin que de deux triangles les bases soient égales entr'elles, & leurs angles aussi égaux entr'eux, & pa-

seulement les triangles égaux ; il est du tout nécessaire que non seulement chaque costé de l'un soit égal à chaque costé de l'autre, mais aussi que les angles contenus d'iceux costez, soient égaux entr'eux, comme a fort bien dit Euclide.

Finalemant, nous remarquerons une fois pour toutes, qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens - cy que des triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generales étans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'advient pas en toutes propositions, comme on peut voir en notre traité des triangles spheriques ; c'est pourquoy nous entendrons toutes les propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les spécifie pas.

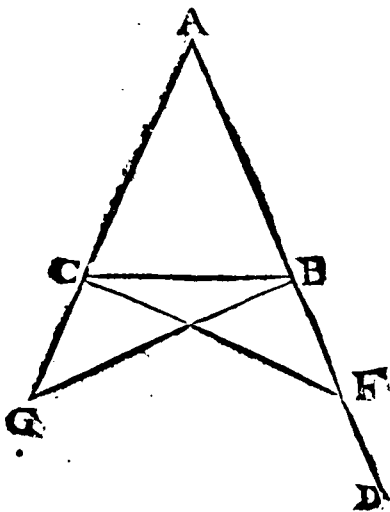
P R O P. V.

T H. 2.

Les triangles Ifofceles, ont les angles sur la base égaux : & les côtez égaux étans continuez, les angles extérieurs sous la base sont égaux.

Soit le triangle Ifofcelle ABC : Je dis premierement que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont égaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC, costez égaux jusques en D & G : & soit fait AF égale à AG par la 3. prop. & soient menées les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux costez AB & AG égaux aux deux costez AC, & AF, chacun au sien ; & par 4. proposition, la base BG sera égale à la base CF, & l'angle ABG égal à l'angle AFG & l'angle G égal à l'angle F. Item les triangles GCB, FBC, ayant l'angle G égal à l'angle F, & les deux costez GB, & GC égaux aux



deux costez CF & FB : (Car CF a été prouvé tantost égal à BG ; & AG , AF étans égaux ; & AC , AB aussi égaux ; les restes CG , & BF seront aussi égaux) par la 4. prop. la base sera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien : sçavoir est l'angle GBC , égal à l'angle FCB . Er qui des angles égaux ABG & ACF , oste les angles égaux CBG & BCF ; les demeurans ABC & ACB , seront égaux.

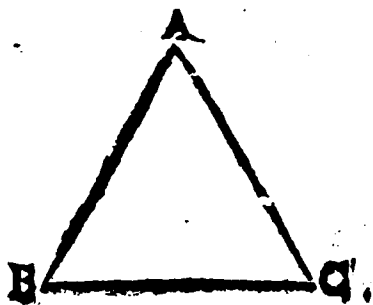
Pour la seconde partie. Que les costez égaux AB & AC étans continuez, les angles extérieurs sous la base BC , sont égaux, sçavoir FCB à BCG , elle a été suffisamment démontrée ; lors qu'on a prouvé que les triangles GBC , & CFB , avoient leurs angles égaux, chacun au sien. Patquoy les triangles Ifoſcelles, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

S C H O L I E,

Cette proposition est aussi vraie es triangles équilatéraux. Car les deux côtez AB , AC du triangle ABC étans égaux entr'eux, ou l'autre côté CB , est pareillement égal à iceux ; comme il avient au triangle équilatéral, ou bien inégal, comme il arrive au triangle Ifoſcele : Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC , sont égaux entr'eux, & ceux de dessous la même base aussi égaux entr'eux, comme il appert par la démonstration cy-dessus.

C O R O L L A I R E.

De cette 5. proposition s'ensuit que tout triangle équilatéral est aussi équiangle, c'est à dire que les trois angles de quelconque triangle équilatéral sont égaux entr'eux. Car soit un triangle équilatéral ABC : Donc parce que les deux costez AB , AC sont égaux, par la 5. prop. les deux angles B & C seront égaux. Semblablement, pource que les deux costez AB , BC sont égaux, les deux angles A & C seront aussi égaux. Donc



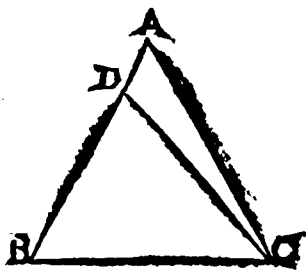
par la 1. com. sent. tous les trois angles A, B, C , seront égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. VI.

Si un triangle a deux angles égaux entr'eux; les côtez soutendans iceux angles, seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle ABC , duquel les deux angles ABC , & ACB sur la base BC sont égaux : Je dis que les deux costez AB & AC qui soutendent les susdits angles égaux, sont aussi égaux.

Autrement, soit AB plus grand que AC , s'il est possible : on en pourra donc retrancher une partie égale à AC par la 3. prop. laquelle partie soit BD , & soit menée la ligne DC : les deux triangles DBC , & ACB , ont deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & les angles compris d'iceux costez aussi égaux ; car les deux costez BD &



BC du triangle DBC sont égaux aux deux costez AC , & CB du triangle ACB , & l'angle B égal à l'angle ACB ; & par la 4. prop. iceux triangles DBC , ACB , seront égaux ce qui est impossible : car l'une est partie de l'autre, Donc les costez AB , & AC n'étoient pas inégaux, ains égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

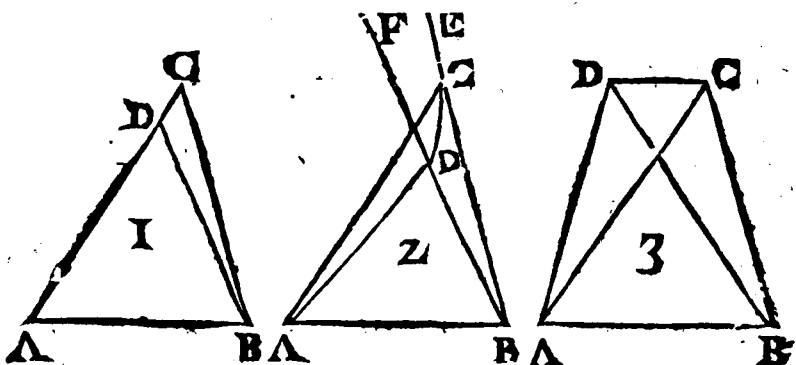
CORROLAIRE,

Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle équiangle, c'est à dire qui a tous les angles égaux, est équilateral : car par ce qui a été icy démontré, les angles ABC , ACB étans égaux, les deux costez AB , AC , seront pareillement égaux ; Mais si les deux angles A & B étoient encore égaux, aussi les côtez CA , CB substantans iceux angles, seroient aussi égaux : & partant tous les trois côtez AB , AC , BC égaux entr'eux, puis que les choses égales à une même, sont égales entr'elles.

PROP. VII. TH. IV.

Si des extremitéz de quelque lignè droite, on mene deux autres lignes droites, se rencontrans à un point; des mêmes extremitéz, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de même part, se rencontrans à un autre point.

Soit la ligne AB , des extremitéz de laquelle soient menées deux lignes droites AC & BC se rencontrans à quelconque

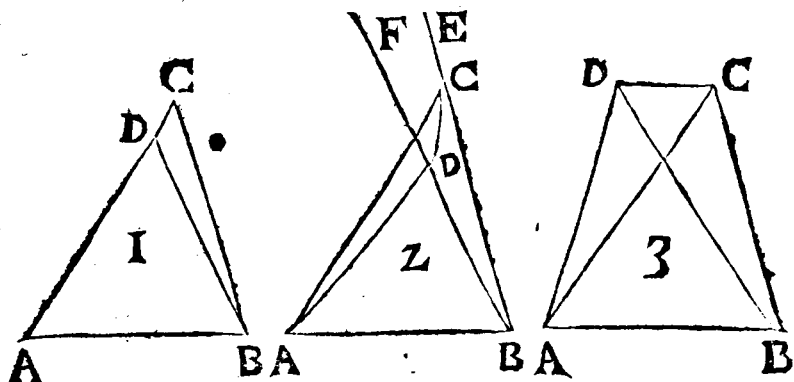


point c . Je dis que des mêmes extremitéz A & B , & de la même part que c , on ne peut mener deux autres lignes droites égales à icelles AC & BC chacune à la sienne, qui se rencontrent à un autre point que c ; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD égale à AC , & de l'extremité B la ligne BD égale à BC , il ne peut être que le point de rencontre D , soit autre que le point de rencontre c .

Car si faire se peut, que le point de rencontre D , tombe ailleurs qu'au point C : où iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC , BC ; ou dans le triangle ACB ; ou hors iceluy.

Premièrement, iceluy point de rencontre D , ne peut être sur la ligne AC , comme en la première figure: car il faudroit que les deux lignes AD , & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie au tout; ce qui est absurde: partant la rencontre D , ne se fera point sur AC , ny aussi sur BC , à cause de la même absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC, comme en la 2. figure : & apres avoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux li-



gnes AC, & AD sont posées égales, le triangle ACD sera Ifo-
scele, & par la 5. proposition les deux angles ACD & ADC sur
la base CD seront égaux. Mais l'angle ACD est moindre que
l'angle DCE : (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angl
ADC est aussi moindre que le même angle DCE : & par con-
sequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera
beaucoup moindre que le même angle DCE. Derechef, puis
que les lignes BC, BD, sont posées égales, le triangle BCD doit
être Ifosele, & partant les angles CDF & DCE sous la base
DC, seront égaux par la même 5. prop. Mais il a été demon-
tré que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE,
donc le même angle C D F est moindre que l'angle D C E, &
aussi égal à iceluy : ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D hors iceluy
triangle ACB, comme en la 3. figure : apres avoir mené la li-
gne CD il s'ensuivra que les deux triangles ADC & BCD se-
ront Ifoseles; & partant qu'ils auront les angles sur la base CD
égaux : sçavoir est ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy
BCD, est plus grand que ACD : donc aussi BDC sera plus
grand que ADC, c'est à dire la partie que le tout : ce qui est ab-
surde. Le point de rencontre D ne tombera donc pas hors le
triangle ABC, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC : Il
faut donc qu'iceluy point de rencontre D tombe au premier
point de rencontre C : Parquoy si des extrémitéz de quelque
ligne droite, &c. Ce qu'il falloit demo ntrer.

S C H O L I E.

Il est manifeste que si AD , BD prises ensemble étoient faites égales à AC , BC aussi prises ensemble, le point de leur rencontre D , seroit autre que le premier point C ; comme il seroit encore si on faisoit AD égale à BC , & BD égale à AC , mais en l'une ny l'autre maniere, icelles lignes AD , BD ne seroient pas selon l'intention d'Euclide: car il veut que non seulement les lignes AD , BD , soient égales aux lignes AC , BC chacune à la sienne, mais aussi que les lignes égales soient menées d'un même point, & de plus que ce soit de même part. Car il est tres evident qu'icelles AD , BD , peuvent bien être tirés de l'autre côté de C , c'est à sçavoir au dessous de la ligne AB . Donc fort à propos Euclide met en ce theorème que les lignes soient égales chacune à la sienne, & menées de même part, &c.

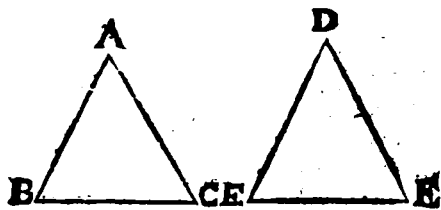
THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun au sien, & la base égale à la base; ils auront aussi l'angle compris d'iceux côtés égaux, égal à l'angle.

Soient deux triangles ABC , DEF , desquels le costé AB , est égal à DE ; AC à DF , & la base BC à la base EF : Je dis que les angles A & D compris d'iceux costez égaux, sont égaux.

Car puis que la base BC est égale à la base EF ; si on entend icelles être posées l'une sur l'autre, elles conviendront tombant le point E sur le point B , & F sur C : & par la 7. prop.

les deux lignes ED & FD , qui sont égales à BA & CA , se rencontreront au point A , & conviendront avec icelles lignes BA



& $\angle A$: partant conviendront aussi les angles A & D contenus par icelles lignes ; & par conséquent seront égaux par la 8. com. sent. Donc si deux triangles , &c, Ce qu'il falloit demonstrier.

C O R O L L A I R E.

Puis que la base EF convient avec la base BC , & les costez DE, DF , conviennent aussi avec les costez AB, AC , il s'ensuit que non seulement l'angle A est égal à l'angle D ; mais aussi que l'angle E est égal à l'angle B , & l'angle F , égal à l'angle C , & tout le triangle égal à tout le triangle.

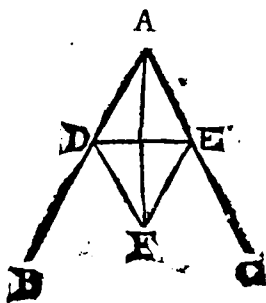
P R O B. 4. P R O P. IX.

Couper en deux également un angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC , lequel il faut couper en deux également ; c'est dire en deux angles égaux entr'eux.

Soient de AB & AC retranchées deux parties égales AD, AE : & apres avoir mené la ligne DE , sur icelle soit décrit le triangle équilatéral DEF par la premiere proposition, & soit menée la ligne AF : Je dis qu'icelle ligne coupe l'angle donné BAC en deux également.

Car puisque les lignes AD, AE ont été prises égales, & AF est commune aux deux triangles DAF, EAF ; les deux costez AD & AE , du triangle DAF , seront égaux aux deux costez AE & AF du triangle EAF , & la base DF égale à la base EF : (étant DEF triangle équilatéral) donc par la 8. prop. l'angle DAF sera égal à l'angle EAF ; & partant l'angle BAC est coupé en deux également par la ligne AF . Ce qu'il falloit faire.

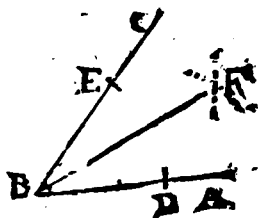


S C H O L I E.

Que si au lieu du triangle équilatéral cy-dessus con-

struit, on en fait un Ifoſcelle, la demonſtration ſera toujours la même: Ce qu'on peut auſſi faire aux trois propoſitions ſuivantes.

Quant à la pratique de cette propoſition, nous l'avons enſignée en noſtre Geometrie pratique Probl. 5. Et neanmoins nous ne laſſerons pas de la repeter icy; Et pource ſoit un angle rectiligne ABC , qu'il faut couper en deux également. Du centre B & de tel intervalle qu'on voudra, ſoient coupées BD , BE égales, puis des points D & E ſoient décrits deux arcs ſ'entrecoupons en F , & d'icelle interſection ſoit tirée par le point B , la ligne droite FB , laquelle diviſera l'angle donné ABC en deux également.



Or il apert par ce que deſſus qu'on peut auſſi couper un angle rectiligne en quatre parties égales, en huit, en ſeize, en trente-deux, & ainſi conſecutivement, en procédant toujours par augmentation double: Car apres qu'un angle rectiligne eſt coupé en deux également, ſi on diviſe derechef chaque partie en deux également, on aura quatre angles égaux. Que ſi on coupe derechef chacun d'iceux en deux également, nous aurons huit angles égaux, & ainſi conſequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

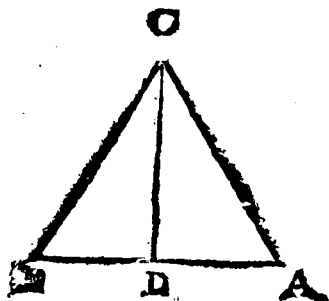
Couper en deux également une ligne droite donnée & terminée.

Soit la ligne droite donnée & terminée AB : laquelle il faut couper en deux également.

Sur icelle ligne AB ſoit conſtruit le triangle equilatéral ACB par la 1. prop. & par la prec. l'angle C ſoit coupé en deux également par la ligne CD , tirée juſques à ce qu'elle coupe AB en D . Je dis qu'icelle AB eſt coupée en deux également en D .

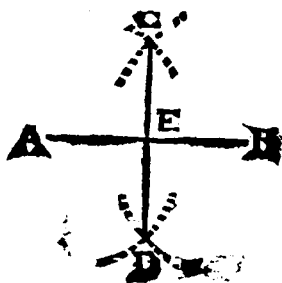
Car puis que les angles du point C ſont égaux, & le triangle ACB , eſt equilatéral, les deux triangles ACD , & BCD , ont deux

deux costez AC, CD, égaux à deux costez BC, CD, chacun au sien, & les angles du point C, qu'ils comprennent aussi égaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera égale à la base DB. Donc AB est coupée en deux également en D. Ce qu'il falloit faire.



S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de cette proposition en nostre Geometrie pratique Prob. I. & ce fait ainsi: Pour diviser la ligne droite AB en deux parties égales, du centre A, & de quelque intervalle que ce soit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) soient décrits deux arcs de cercle, l'un au dessus d'icelle ligne, comme C, & l'autre au dessous, comme D, puis du centre B, & du même intervalle soient décrits deux autres arcs qui coupent les precedens esdits points C & D, puis d'une intersection à l'autre, soit tirée la ligne droite CD, laquelle coupera AB en deux également au point E. Est à noter que si de part & d'autre de AB on ne pouvoit décrire deux arcs comme D, il faudroit ayant décrit les deux arcs C, ouvrir le compas d'un plus grand intervalle, & en décrire deux autres arcs au dessus de C, & la ligne menée d'une intersection à l'autre, & continuée jusques à AB, la coupera en deux également.



Or il apert par ce que dessus, qu'on peut aussi couper une ligne droite finie en quatre parties égales, en 8, en 16, en 32. &c. ainsi que nous avons dit, en la precedente prop. de la division de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diviser une ligne droite terminée en tant de par-

ries égales qu'on voudra, nous l'avons enseigné en nostre Geometrie pratique Probl. 7 : & ce tant Geometriquement que Mechaniquement avec le compas de proportion

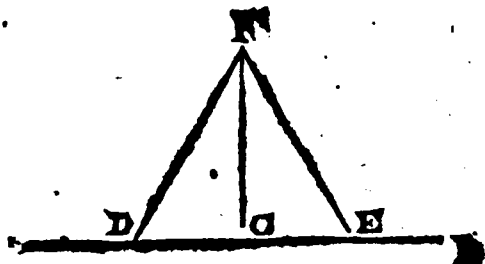
PROBL. 6.

PROP. XI.

Sur une ligne droite donnée, & d'un point en icelle, élever une ligne droite perpendiculaire.

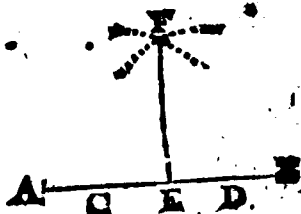
Soit une ligne droite donnée AB, & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener une ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du point C prises les deux lignes égales CD & CE par la 3. proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DFE, & de C à F soit menée la ligne CF: Je dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandée. Car les triangles DFC & CFE ayans deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, sçavoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF égale à la base EF, à cause que le triangle DFE est equilateral; par la 8. prop. les angles au point C; contenus des costez égaux, seront égaux; & partant par la 10. def. ils sont dits droits, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainsi qu'il faloit faire.



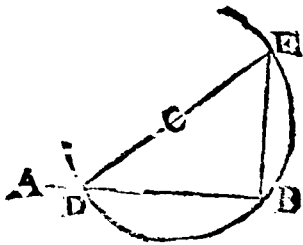
S C H O L I E.

La pratique de cette proposition est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & neanmoins nous la repeterons encore icy. Pour élever sur AB une ligne perpendiculaire du point C, soient marquées en icelle AB deux points



Comme D, également distans de C, & d'iceux points, soient décrits deux arcs d'un même intervalle s'entre coupans en E, de laquelle intersection soit tirée à C la ligne droite EC, qui sera perpendiculaire à ladite AB.

Que si le point donné étoit B à l'extrémité de la ligne, il faudroit continuer ladite ligne, & sur icelle étant continuée faire comme dessus : ou bien nous prendrons un point au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus près du point donné B, que de l'autre extrémité A ; puis d'iceluy point C, & de l'intervalle CB, nous décrirons la circonférence DBE, qui coupe la ligne donnée en D, & d'iceluy point D par C, nous tirerons la ligne droite DCE coupant la susdite circonférence en E, duquel point E soit tirée la ligne droite EB, laquelle sera perpendiculaire à AB.



Autrement, du point donné B, & de quelque intervalle que ce soit BC, moindre toutefois que la ligne donnée, soit décrit un arc CDE plus grand que le tiers de la circonférence

entière du cer-

cle, puis sur iceluy arc CDE soient pris deux intervalles CD, DE, chacun égal au semidiametre BC, & des points D, E, soient décrits deux arcs de cercle s'entre coupans au point F, duquel soit tirée au point B la ligne droite FB, qui sera perpendiculaire à AB.

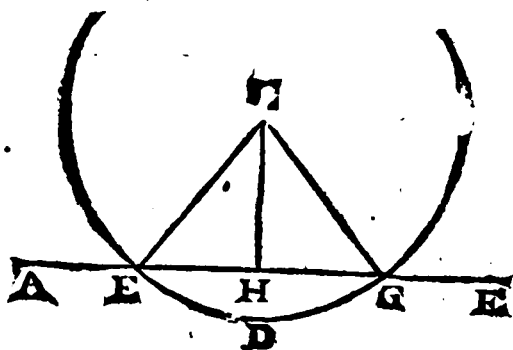
Est à noter qu'encore que le point donné B ne fut l'extrémité de la ligne, on pourroit néanmoins mener la perpendiculaire par l'une ou l'autre des deux manieres cy-dessus.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaïſſer une ligne droite perpendiculaire ſur une ligne droite indéterminée, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droite donnée & interminée AB ; & le point hors icelle C , duquel il faut mener une ligne perpendiculaire ſur AB .

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque point D ; puis du centre C , & de l'intervalle CD , ſoit décrit le cercle EDG , coupant la ligne AB és points E & G , puis par la 10. prop. ſoit coupée EG en deux éga-



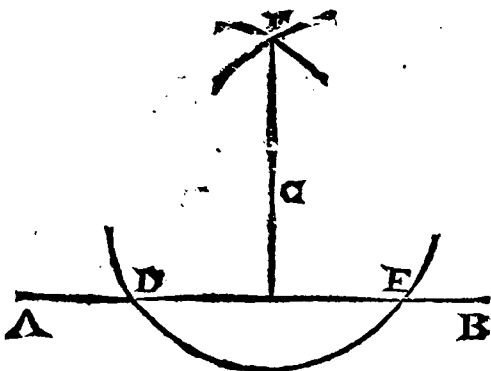
lement au point H , & ſoit menée la ligne CH , laquelle ie dis être perpendiculaire à AB .

Car étans tirées les lignes droites CE , CG ; les deux coſtez EH & HC du triangle EHG , ſeront égaux aux deux coſtez GH & HC du triangle GHC , un chacun au ſien, & la baſe CE eſt égale à la baſe CG , étans icelles tirées du centre C à la circonſerence, & par la 8. prop. les angles du point H ſeront égaux; & partant par la 10. definit. ils ſeront droits, & la ligne CH perpendicul. à AB . Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E,

La pratique de ce probleme eſt enſignée en noſtre Geometrie pratique probl. 3. & eſt icelle qu'il enſuit. Pour mener à une ligne donnée AB une perpendiculaire à un point donné hors icelle, comme C ; d'iceluy point C ſoit décrit un arc qui coupe la ligne donnée en D & E , puis

iceux points, comme centres, soient décrits deux arcs de cercles d'un même intervalle, qui s'entre-coupent au point F : (il n'importe pas de quel côté ce soit, au dessus ou au dessous de la ligne AB) puis d'iceluy point F , par celuy donné C , soit tirée une ligne droite FCG , qui rencontre la donnée en G , & icelle FCG sera perpendiculaire à AB .

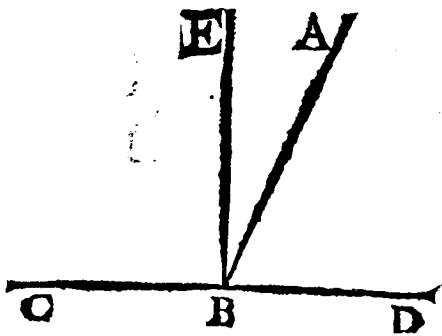


THEOR. 6. PROP. XIII.

Quand une ligne droite tombant sur une ligne droite fait angles, ou iceux seront deux angles droits, ou égaux à deux droits.

Soit la ligne droite AB , laquelle tombant sur une autre ligne droite CD , fait les angles CBA , & DBA : Je dis qu'iceux sont deux angles droits, ou égaux à deux droits.

Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD , ou elle ne l'est pas : Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droits par la 10. def. Si elle ne l'est pas, soit levée la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE seront droits par la susdite def. mais par la 19. com. sent. le seul angle droit DBE est égal aux deux angles DBA ,



ABE ensemble : parquoy si on leur ajoute le commun CBE , les trois angles DBA , ABE & CBE feront égaux aux deux droits DBE , CBE . D'icechef, d'autant que par la même

19. com. sent. les deux angles CBE , ABE ensemble égaux au seul ABC : si on ajoute le commun DBA , les deux angles ABC , DBA seront égaux aux trois CBE , ABE , DBA ; mais ces trois-cy ont été démontrés égaux à deux droits: donc ces deux-là ABC , ABD seront aussi égaux à deux droits. Parquoy si une ligne droite tombante sur une autre ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette demonstration de Theon est suivie par la plus part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayant montré comme dessus, que les deux angles CBE & DBE sont droits, concluent incontinent par la 8. com. sent. que les deux ABC , & ABD ensemble seront donc aussi égaux à deux droits, veu qu'ils occupent autant d'espace, voire le même, que les deux droits CBE , DBE , & conviennent avec eux.

Aussi Clavius a remarqué, que cette proposition semble dépendre de quelque commune notion de l'esprit: car de ce que l'angle ABC excède l'angle droit EBC , l'angle restant ABD est excédé par l'angle droit EBD ; car comme en celui-là l'excès est l'angle ABE , ainsi en celui-cy le défaut est le même angle ABE . Parquoy l'on pourra conclure, que les angles ABC , ABD sont égaux à deux droits, attendu que l'excès de l'angle obtus ABC , est le défaut de l'aigu ABD .

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles égaux à deux droits: icelles deux lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne droite AB & en icelle le point B , auquel se rencontrent deux autres lignes droites CB & DB de part & d'autre d'icelle AB , faisant les deux angles ABC & ABD

Égaux à deux droits : Je dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est une ligne droite.

Autrement, si CBD n'est ligne droite, soit continuée CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombera

ou au dessus de BD, ou au dessous :

qu'elle tombe donc au dessus, s'il est

possible, comme BE, en sorte que

CBE soit ligne droite. D'autant que

AB tombe sur CBE, les deux angles

ABC, & ABE, seront égaux à deux

droits par la 31. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont

aussi égaux à deux droits, & par la

10. com. sent. tous les angles droits

sont égaux entr'eux: d'oc par la 1. cō. sent. ces deux angles ABC,

& ABD seront égaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ôtant

l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront égaux,

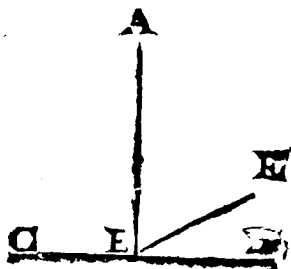
le tout & la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne

droite CB étant prolongée, ne tombera pas au dessus de BD;

mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il adviendrait

toûjours la même absurdité: donc CB, & DB se rencontrent

directement. Ce qu'il falloit demontrer.

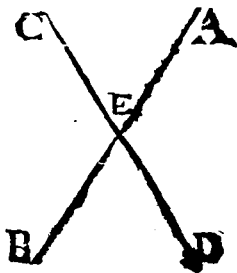


THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposez au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au point E: Je dis que les angles opposez au sommet, sçavoir AEC, & DEB, sont égaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC & BEC, sont égaux à deux droits par la 13. prop. Item, pour la même raison, CEB, & DEB, seront égaux à deux droits: partant les deux angles AEC & CEB, seront égaux aux deux CEB & DEB. Que si on ôte le commun CEB, le demeurant AEC



fera egal au demeurant DEB. Le même se peut auffi dire de deux angles opposez AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E.

Il s'ensuit de cette demonstration, que deux lignes droites s'entrecoupans, font au point de leur section quatre angles egaux à quatre angles droits. Est aussi manifeste qu'éans constituez, tant d'angles qu'on voudra, à l'entour d'un seul & même point, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droits, car si de E, en la precedente figure, on mene tant d'autres lignes droites qu'on voudra, elles diviseront seulement les quatre angles constituez, au point E, en plusieurs parties; toutes lesquelles parties prises ensemble, seront egales aux quatre angles d'iceluy point E, par la 19. com. sent. c'est à dire à quatre angles droits.

S C H O L I E.

Nous demontrerons icy la converse de cette 15. prop. qui, selon Proclus, est telle.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, non de même part, faisant les angles au sommet egaux: icelles deux lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne droite AB, & un point en icelle E, auquel soient menées les deux lignes droites CE, DE de part & d'autre de AB faisant les angles CEA, DEB egaux entr'eux. Je dis qu'icelles lignes CE, DE se rencontrent directement. Car adjoûtant aux angles egaux CEA, DEB, l'angle commun CEB:

les deux angles CEA, CEB seront egaux aux deux angles DEB, CEB par le 2. axiome. Mais les deux angles CEA, CEB sont egaux à deux droits par la 13. prop. Donc les deux DEB, CEB seront aussi egaux à deux droits.



Et par la 14. prop. les lignes droites CE , DE se rencontreront directement. Ce qui étoit proposé.

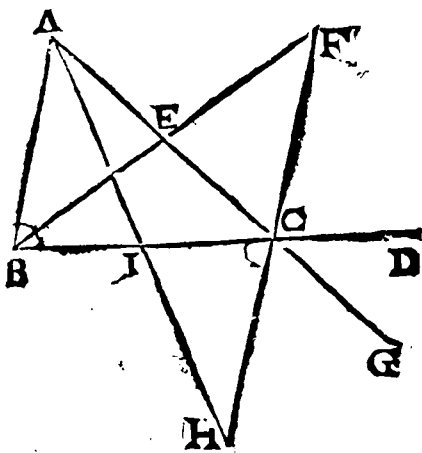
Pelletier a aucunement changé cette converse: car il dit que si quatre lignes droites AE , CE , BE , DE se rencontrans au point E y font quatre angles dont les opposez AEC , BED soient égaux entr'eux, & les opposez BEC , AED , aussi égaux entr'eux: les deux lignes opposites AE , BE se rencontreront directement, comme aussi les deux CE , DE . Ce qui est manifeste, car si aux angles égaux AEC , BED , on ajoute les égaux CEB , AED , par le 2. axiome les deux angles AEC , CEB seront égaux aux deux angles BED , AED . Donc tant ces deux-là, que ces deux-cy, sont moitié des quatre angles faits au point E , lesquels par le Corol. prec. sont égaux à quatre droits. Parquoy les deux angles AEC , CEB , seront égaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes, AE , BE se rencontreront directement. Et pour même raison CE , DE feront aussi une seule ligne droite CD .

THEOR. 9. PROP. XVI.

Un côté de quelconque triangle étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des opposez intérieurs.

Soit le triangle ABC , duquel le côté BC soit continué iusques à D . Je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé intérieur BAC : Et encore plus grand que ABC autre opposé intérieur.

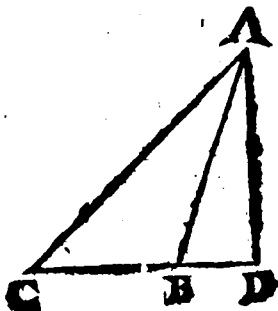
Qu'ainsi ne soit: Apres avoir coupé AC en deux également en E , soit menée la ligne BE , & continuée iusques en F : sorte que EF soit faite égale à BE , & soit menée FC . Les deux triangles AEB , & CEF , auront les deux côtés AE & EB ,



égaux aux deux costez CE & EF , chacun au sien par la construction, & par la précédente prop. l'angle AEB est égal à l'angle CEF : donc par la 4. prop. les bases AB & FC seront égales, & les autres angles égaux, chacun au sien: & partant l'angle BAE , sera égal à l'angle ECF qui n'est que partie de l'angle ACD , lequel pour cette raison sera plus grand que l'opposé intérieur BAC . Que si le costé AC est prolongé en G , & BC coupé en deux également en H , & on tite la ligne AHI , tellement que HI soit égale à AH , & soit menée CI : On démontrera par même raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'intérieur & opposé ABC . Mais par la proposition précédente à iceluy BCG , est égal l'externe ACD : donc iceluy ACD , est aussi plus grand que l'intérieur & opposé ABC . Parquoy en tout triangle, un costé estant prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cette proposition il s'ensuit (dit Proclus) que d'un même point on ne peut mener à une même ligne droite, plus de deux lignes droites égales entr'elles. Car si faire se peut, soient menées du point A à la ligne BC , trois lignes droites AB, AC, AD , égales entr'elles: d'autant que les costez AB, AD , sont égaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB sur la base BD seront égaux. Verochef, pource que les costez AB, AC sont égaux, par la même 5. prop. les angles ABC, ACB sur la base BC seront égaux. Parquoy veu que chaque angle ADB & ACB , est égal à l'angle ABD , par la 1. com. sent. l'angle ABC sera égal à l'angle ADC , c'est à dire l'exterieur à l'opposé intérieur: ce qui est absurde, puis que par cette 16. p. l'externe est plus grand que l'intérieur. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droites égales entr'elles. Ce qui étoit proposé.

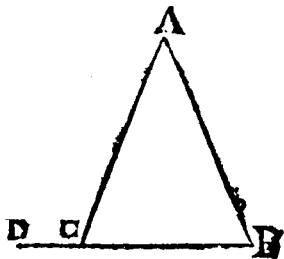


THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de qu'elle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC : Je dis que les deux angles B . & ACB sont ensemble plus petits que deux droits ; comme aussi les deux A . & ACB : Item les deux A . & B .

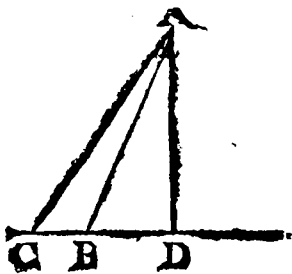
Car apres avoir continué le costé BC , iusques en D , il est evident par la 16. prop. que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé intérieur B : & par la 4. com. sent. si on leur adjointe l'angle commun ACB , les deux ACD & ACB seront plus grands que les deux B & ACB . Mais les deux ACD & ACB , sont égaux à deux droits, par la 13. prop. Partant ABC & ACB , sont plus petits que deux droits.



On démontrera pareillement que les deux angles A & ACB : Item, les deux angles A & B , en prolongeant un autre costé, sont moindres que deux droits. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que d'un même point on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur une ligne droite. Car si faire se peut, soient menées de A sur la ligne droite BD , les deux perpendic : AD , AB . Donc au triangle ABD , les deux angles internes ABD , ADB , seront égaux à deux droits, puis que chacun est droit. Ce qui est impossible : car il a été démontré cy-dessus, que deux angles d'un triangle sont moins



dres que deux angles droits.

Il s'ensuit aussi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel un angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a été démontré que deux angles quels qu'ils soient, sont moindres que deux droits, il est nécessaire que s'il y en a un droit ou obtus, celui qu'on voudra des deux autres soit aigu: car autrement en un triangle seroient deux angles droits, ou plus grands que deux droits.

S'ensuit encore de cette prop. que si une ligne droite AB , fait avec une autre ligne droite, CD , angles inégaux, sçavoir est ABD , aigu, & ABC , obtus, & de quelconque point d'icelle AB , on tire une perpendiculaire sur CD , comme AD : icelle perpendiculaire AD , tombera de la part de l'angle aigu ABD : car qu'elle tombe, s'il est possible, du costé de l'angle obtus ABC , comme AC . Donc au triangle ABC , les deux angles ABC , ACB , obtus & droit, sont plus grands que deux droits; mais aussi moindres que deux droits par cette prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tirée de A , ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus, & partant tombera du costé de l'angle aigu.

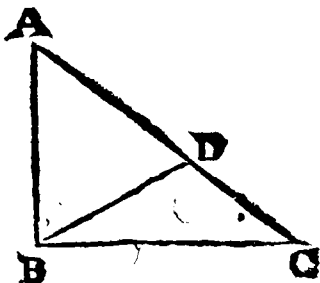
Est encore manifeste par cette prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'un triangle Isoscelle, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient, d'un triangle equilateral, & les deux de dessus la base d'un Isoscelle sont égaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux-cy ensemble, que ces deux-là, sont moindres que deux droits par cette prop. chacun d'iceux sera moindre qu'un droit, c'est à dire aigu: car s'il étoit droit, ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou égaux à deux droits, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle, le plus grand côté soutient le plus grand angle.

Soit un triangle ABC , ayant le costé AC plus grand que le costé AB . Je dis que l'angle ABC , est plus grand que l'angle ACB .

Qu'il ne soit ainsi : Puis que AC est plus grand que AB, d'iceluy soit retranchée AD, égale à AB, & soit menée BD. Le triangle ABD est Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & ADB, sur la base BD, seront égaux. Or l'angle extérieur ADB, est plus grand que l'opposé intérieur C, par la 16. prop. Mais ABC étant plus grand que ABD, il sera aussi plus grand que son égal ADB : & à plus forte raison ABC sera plus grand que C. Par même raison, si on pose le côté AC, plus grand que le côté BC ; on démontrera l'angle ABC être plus grand que l'angle BAC, sçavoir est, si de CA on coupe une ligne égale à BC, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



C O R R O L A I R E.

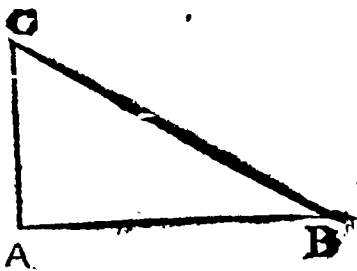
Il est donc manifeste par cette demonstration, que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inégaux.

THEOR. 12. PROP. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soutenu du plus grand côté.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé BC, qui soutient le plus grand angle A, est plus grand que le costé AB, qui soutient un moindre angle C.

Autrement, il sera égal, ou plus petit : Il ne peut être égal, d'autant que le triangle seroit Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles A & C seroient égaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi être plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, ce qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par même raison on prouvera le côté BC,



être plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, être plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soutenu du plus grand costé. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

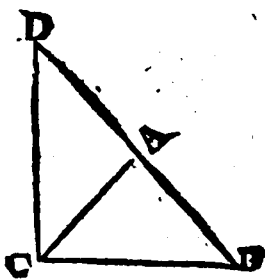
Il s'ensuit de cette proposition, que si de quelconque point on tire sur une ligne droite tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera toujours opposée à un angle aigu, & les autres à l'angle droit fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux côtez de qu'elle façon qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

Soit le triangle ABC : Je dis que deux costez d'iceluy lesquels on voudra, sçavoir est AB & AC, sont plus grands ensemble que le troisième costé BC.

Qu'il ne soit ainsi apres avoir prolongé BA, jusques en D, & fait AD, égale à AC soit menée la ligne DC. Le triangle DAC, sera Isoscelle, & par la 5. prop. les deux angles ADC, & ACD, sur la base DC, seront égaux. Mais par le 9. ax. DCB, est plus grand que DCA : il sera donc aussi plus grand que son égal ADC : & partant par la 19. prop. BD, sera plus grand costé que BC. Mais BD, est égal aux deux costez AC, & BA : donc aussi iceux AC, & BA, seront plus grands que BC. On démontrera en la même maniere que deux autres costez tels que l'on voudra sont plus grands ensemble que l'autre. Parquoy. deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demontrer.



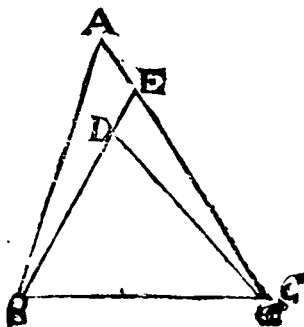
THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremitéz d'un costé de quelconque triangle, on mène deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy : icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront un plus grand angle.

Soit le triangle ABC , & des extremitéz du costé BC , soient menées interieurement deux lignes droites BD , CD , se rencontrans au point D ; Je dis qu'icelles lignes BD , & CD ensemble sont plus petites que les costez BA , & CA , ensemble : mais que l'angle D , est plus grand que l'angle A .

Qu'ainsi ne soit continuée BD , jusques au point E . Donc par la 20. prop. les deux costez BA , & AE , du triangle BAE , seront plus grands que le troisiéme BE : Et si on leur ajoûte chose commune EC , par la 4. comm. sent les tous CE , EB , seront tousiours plus petits que les tous CE , EA , AB , c'est à dire CA , AB . Pareillement les deux costez CE , ED , du triangle CED , sont plus grands que le troisiéme CD , ausquels si on ajoûte chose égale, sçavoir DB , les tous CE , ED , DB , ou CE , EB , seront tousiours plus grands que les tous CD , & DB . Mais il a été démontré que CA , AB , sont plus grands que CE , EB : donc CA , AB , seront beaucoup plus grands que CD , BD . Ce qui étoit proposé en la premiere partie.

Pour la seconde partie, sçavoir que l'angle BDC est plus grand que l'angle A . D'autant qu'il est extérieur du triangle CED , il sera plus grand que son opposé interieur CED par la 16. prop. Mais pour la même raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé interieur A : donc à plus forte raison BDC sera plus grand que A . Si donc des extremitéz d'un costé de quelconque triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

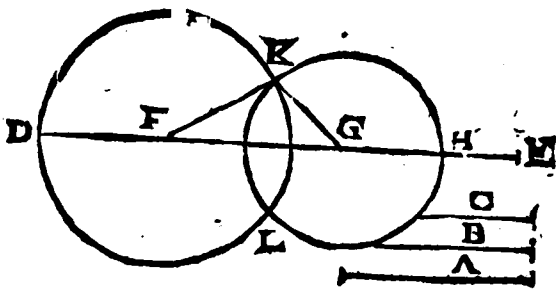


PROB. 8. PROP. XXII.

Faire un triangle de trois lignes droites égales à trois autres données : mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre ; d'autant que de tout triangle, deux côtez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes données A, B, & C, desquelles deux de qu'elle façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisième : car autrement d'icelles on ne pourroit pas constituer un triangle, comme il apert de la 20. prop. en laquelle il a été démontré que de tout triangle deux costez sont tousjours plus grands que l'autre. Il faut faire un triangle ayant les trois côtez egaux à icelles trois lignes données.

Soit prise une ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin, comme DE, de laquelle soit retranchée DF, egale à A ; & puis du reste soit prise FG egale à B, & GH egale à C, & du centre F, & de l'intervale FD, soit décrit un cercle DKL : Item un autre cercle HKL du centre G, & de l'intervale GH, coupant le premier cercle au point K duquel soient menées les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG sont egaux aux trois lignes données A, B, C.



Car d'autant que FD, FK sont egales par la def. du cercle : Item GK & GH, les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles érans egales aux trois données par la construction ; aussi les costez du triangle FKG seront egaux à icelles lignes données A, B, C. Nous avons donc fait

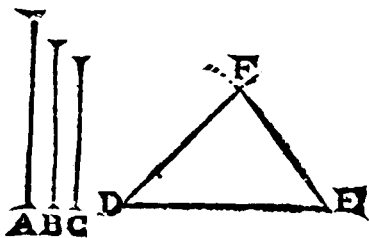
Fait un triangle de trois lignes droites égales aux trois lignes droites données A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La pratique de ce probl. est enseignée en nostre Geo-

metrie pratique Prob. II. & est telle : Soit prise la ligne droite DE égale à quelconque des données comme à A, puis du point D, & intervalle de la ligne B, soit décrit un arc F : semblablement du point E, & de l'intervalle de l'autre ligne C,

soit décrit un autre arc qui coupe le premier au point F : puis à ladite intersection soient tirées les deux lignes droites DF, EF ; & sera fait le triangle DEF, ayant les trois costez, égaux aux trois lignes droites données A, B, C.

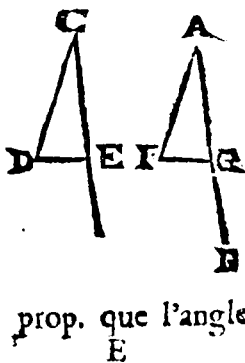


PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en icelle, faire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & le point en icelle A ; sur lequel il faut faire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné C.

Ayant pris es lignes CD, CE, qui constituent l'angle donné C quelconques points D, E, soit menée la ligne DE : & sur AB soit construit par la prop. precedente le triangle AFG, ayant les trois costez égaux aux trois costez du triangle CDE, sçavoir est les deux costez AF, AG, égaux aux deux costez CD, CE, & la base FG à la base DE. Il est donc evident par la 8. prop. que l'angle A

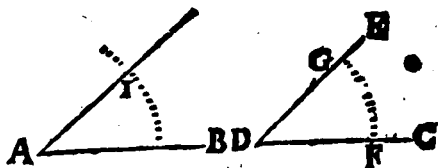


sera égal à l'angle C donné. Nous avons donc fait sur AB, au point A, l'angle FAG égal à un donné DCE, ainsi qu'il étoit requis.

S C H O L I E.

Combien que la pratique de ce problème soit enseignée en nostre Geometrie pratique, néanmoins nous l'enseignerons encore icy. Soit

une ligne donnée AB, & un point en icelle A, auquel il faut faire un angle rectiligne égal au donné CDE. Du centre D soit fait de tel intervalle qu'on voudra un arc FG, qui coupe les lignes de l'angle donné es points F, G : puis du même intervalle, soit décrit du centre A un arc interminé HI : En apres,

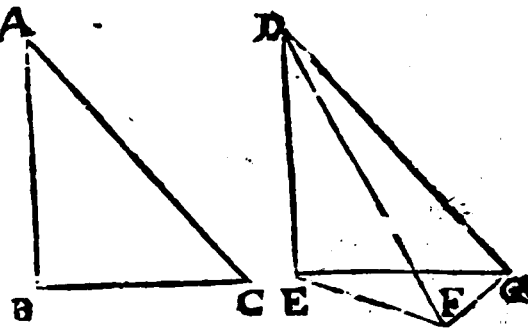


soit prise la distance FG, & icelle portée sur l'arc HI, puis du point A par I, soit tirée la ligne droite AI, & sera fait l'angle HAI égal à l'angle donné CDE.

THEOR. 15. P R O P. XXIV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux côtez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux côtez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

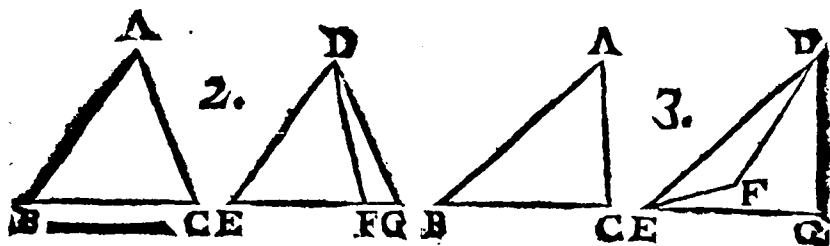
Soient deux triangles ABC & DEF, desquels deux costez AB, AC sont egaux aux costez DE, DF, chacun au sien: mais l'angle A est plus grand que l'angle F, D, F. Je dis que la base BC, est plus grande que la base EF.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE, & au point D, soit fait par la precedente prop. l'angle EDG, égal à l'angle A, (& la ligne

Droite DG, tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF, a été posé moindre que l'angle A) & soit posée DG, égale à DF, c'est à dire à AC : Soit tirée puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF, ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tirée la ligne FG. D'autant que les deux costez AB, AC, sont egaux aux deux costez DE, DG, un chacun au sien, & l'angle A egal a l'angle EDG par la construction : la base BC sera égale à la base EG, par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF, DG, sont egaux entr'eux : les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF par la 9. com. sent. donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le même angle EGF : parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le même angle EGF : donc au triangle EFG le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a été demontré que EG est égale à BC : donc BC sera aussi plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

Maintenant, que EG tombe sur icelle EF : ainsi qu'en la 2. fig. d'autant que comme dessus la base EG, sera égale à la base



BC par la 4. prop. & GE est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

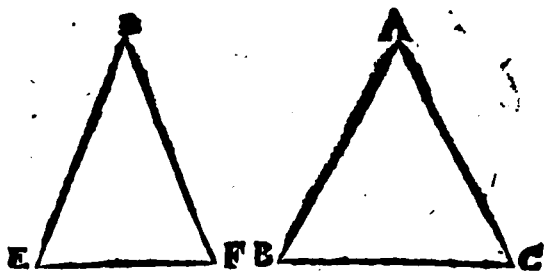
En troisième lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures DF, EF sont plus petites que les deux costez DG, EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est égale à DF : donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est égale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez egaux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux côtez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux côtez AB & AC, sont egaux aux deux DE & DF, chacun au sien :

Mais la base BC est plus grande que la base EF. Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.



Autrement, il sera egal,

ou plus petit. Mais il ne peut être egal : d'autant que par la 4. prop. les bases BC & EF seroient egales contre l'hypothese. Pareillement il ne peust être plus petit; d'autant que par la 24. prop. la base BC seroit plus petite que la base EF, & elle a été posée plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peust être egal ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 17. PROP. XXVI.

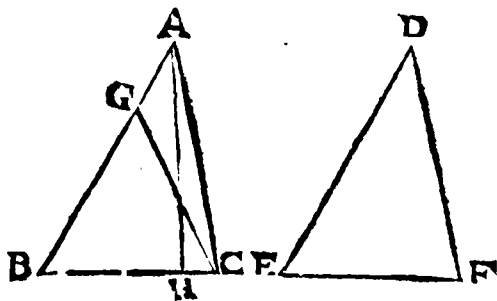
Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & un côté egal à un côté, sçavoir est, ou celui aux extremittez duquel sont les angles egaux, ou bien celui qui scûtient l'un d'iceux angles egaux : ils auront aussi les autres côtez egaux aux autres côtez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B &

$\angle ACB$, sont égaux aux deux E & F , chacun au sien, & soit premierement le costé BC , aux extremittez duquel sont les angles E & F , égal au costé EF , aux extremittez duquel sont les angles E & F . Je dis que les deux autres costez AB, AC , sont égaux aux deux autres costez DE, DF , chacun au sien, sçavoir est AB à DE , & AC à DF , & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D .

Car si AB n'est égal à DE , l'un d'iceux sera plus grand: Soit donc AB plus grand, s'il est possible, & d'iceluy soit retranchée BG égale à DE : puis soit tirée la ligne droite CG . Donc puis que les costez BC, BG , sont égaux aux costez EF, DE , chacun au sien, & l'angle B égal à l'angle E , par la 4. prop. la base CG sera égale à la base FD , & les autres angles égaux aux autres angles

chacun au sien, c'est à sçavoir que l'angle BCG sera égal à l'angle F , auquel est aussi égal l'angle ABC , par l'hypothese. Partant les deux angles ACB & GCB seroient égaux, la partie au tout: ce



qui est absurbe. Donc le costé AB n'étoit pas inégal au costé DE , mais égal. Parquoy veu que les costez AB, BC sont égaux aux costez DE, EF , chacun au sien, & l'angle B égal à l'angle E ; la base AC sera égale à la base DF , & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D , par la 4. prop. de ce livre. Ce qui étoit proposé.

Soient maintenant égaux deux autres costez sçavoir est AB à DE soustendans angles égaux ACB & F . Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont égaux aux deux autres costez DF, EF , chacun au sien, c'est à dire AC à DF , & BC à EF : & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D . Car si le costé BC n'est égal au costé EF , soit le plus grand BC , duquel soit couppe BH égal à EF , puis tiré la ligne AH . Donc puis que les costez AB, BH sont égaux aux costez DE, EF , un chacun au sien, & l'angle B est égal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. prop. la base AC sera égale à la base DF , & les autres angles égaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera

égal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle ACB, est aussi égal à l'angle F. Donc l'angle AHB, sera aussi égal à l'angle ACB, l'exterieur à son opposé interieur : ce qui est absurde : car il est plus grand par la 16. prop. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains égal. Parquoy les deux costez AB, BC, sont égaux aux deux costez DE, EF, chacun au sien, & par la 4. prop. l'angle B estant égal à l'angle E, les bases AC, DF, seront égales, & les autres angles BAC & D aussi égaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration de cette proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

SCHOLIE.

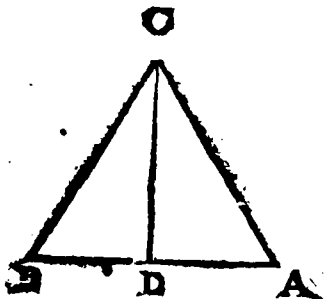
Nous demontrons icy deux theoremes assez utiles & necessaires en Geometrie : le premier est tel.

En un triangle equilateral, ou Isoscelle, étant menée une ligne droite de l'angle contenu des deux costez égaux, laquelle divise en deux également, ou l'angle, ou la base ; elle sera perpendiculaire à la base : & si elle coupe l'angle en deux également, elle coupera aussi la base en deux également : Mais si elle coupe en deux également la base, elle coupera pareillement l'angle en deux également. Et au contraire étant tirée une ligne droite perpendiculaire à la base, elle divisera en deux également, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez égaux AC, BC, & la ligne droite CD divise premierement l'angle C en deux également. Je dis qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB, & la divise en deux également. Car puis que les deux costez AC, CD, sont égaux aux deux costez BC, CD, & les angles qu'ils contiennent aussi égaux, par la quatrième prop. les bases AD, BD seront aussi égales, & les angles au point D égaux, & partant droits.

Que si la ligne droite CD divise en deux également la ligne AB : Je dis que la ligne droite CD est perpendiculaire à la ligne AB, & que l'angle C est coupé en deux

également. Car puis que les deux costez AD, DC , sont égaux aux deux costez BD, DC , & la base AC égale à la base BC , par la 8. prop. les angles du point D seront égaux, & partant droits, & la ligne CD perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi égaux.



Maintenant soit la ligne droite CD perpendiculaire à AB : Je dis qu'elle coupe aussi la base BA , & l'angle C en deux également. Car par la 5. prop. les angles A & B seront égaux : parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD , sont égaux aux deux angles B & D , du triangle BCD , un chacun ausien, & le costé CD opposé aux angles égaux A & B commun, par la 26. prop. les autres costez AD, BD , seront aussi égaux, & les autres angles du point C pareillement égaux, Ce qu'il falloit démontrer.

Le second Theorème est tel.

Le triangle auquel une ligne droite tirée de l'un des angles perpendiculaire à la base, divise ou la base ou l'angle en deux également, a les deux costez comprenant iceluy angle égaux : Et si la base est divisée en deux également, l'angle sera aussi divisé en deux également : Mais si l'angle est divisé en deux également, aussi sera la base divisée en deux également.

Au même triangle ABC , soit CD perpendiculaire à la base AB , & la divise en deux également. Je dis que les costez AC & BC sont égaux, & les angles à C aussi égaux. Car puis que les deux costez AD, DC , sont égaux aux deux costez BD, DC , & les angles qu'ils comprennent aussi égaux, sçavoir droits par la 4. prop. les bases AC, BC , & les angles à C seront pareillement égaux.

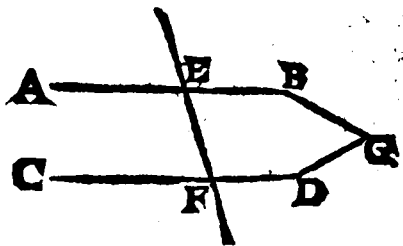
Maintenant, que la perpendiculaire CD coupe en deux également l'angle C : je dis que les costez AC, BC sont égaux, & les lignes AD, BD aussi égales : Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD , sont égaux aux deux angles D, C du triangle BCD , & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux côtés AC, BC , seront égaux, & les côtés AD, BD , aussi égaux : Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si une ligne droite tombant sur deux lignes droites fait les angles opposés alternativement égaux ; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD , sur lesquelles tombant la ligne droite EF , fait les angles BEF , & EFC alternativement égaux. Je dis que AB & CD sont paralleles.

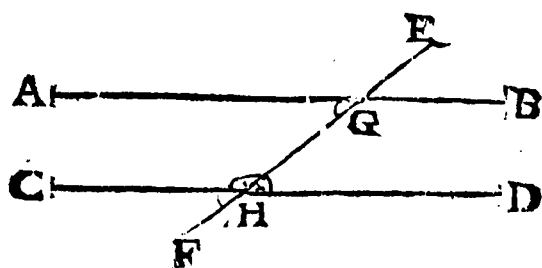
Car si elles ne sont paralleles, estans continuées elles se rencontreront : Que si elles se rencontroient, comme au point G , elles feroient un triangle avec le costé EF , & l'angle extérieur CFE seroit plus grand que l'opposé intérieur FEB par la 16. prop. ce qui est contre l'hypothese. Donc les deux lignes AB , & CD ne se rencontreront jamais ; & par la 25. def. icelles lignes seront paralleles entr'elles. Parquoy si une ligne droite tombante sur deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demon-



THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si une ligne droite tombant sur deux lignes droites, fait l'angle extérieur égal à son opposé intérieur du même costé ; ou bien les deux intérieurs de même costé, égaux à deux droits ; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD , sur lesquelles tombant une autre ligne droite EF , fasse l'angle extérieur EGA égal à GHC son opposé intérieur du même costé. Je dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.



Car puis que
l'angle GHC
est posé égal à
l'angle EGA ,
lequel est aussi
égal l'angle
 BGH par la 15
prop. les angle
alternes BGH ,

GHC , seront égaux par la première commune sentence : partant les lignes droites AB , CD seront parallèles par la proposition précédente. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux angles intérieurs de même côté AGH , & CHG sont égaux à deux droits, aussi AB & CD seront parallèles. Car par la 13. proposition, les deux angles GHC , & GHD sont égaux à deux droits ; partant aussi égaux aux deux AGH & GHC . Que si d'iceux angles égaux, on ôte le commun GHC , les demeurans AGH & GHD se trouveront alternativement égaux, & par la 27. prop. AB & CD seront parallèles. Si donc une ligne droite tombant sur deux lignes droites, &c. Ce qui falloit démontrer.

THE OR. 20 PROP. XXIX.

Si une ligne droite tombe sur deux lignes droites parallèles, elle fera les angles opposés alternativement égaux ; & l'extérieur égal à son opposé intérieur du même côté : & les deux intérieurs de même côté égaux à deux droits.

Soient deux lignes droites parallèles AB & CD , sur lesquelles tombe la ligne droite EF . Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposés alternativement sont égaux.

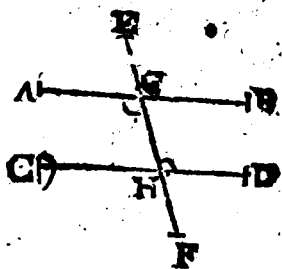
Autrement, s'ils ne sont égaux, AGH sera plus grand, ou plus petit que l'autre. Soit donc AGH plus petit, s'il est possible, que GHD : & si à iceux angles inégaux on ajoute chose comm. sçavoir l'angle GHC , les deux angl. AGH & GHC seront plus petits que les deux GHC & GHD , lesquels par la 13. prop. étans égaux à deux droits, AGH & GHC seront plus petits

que deux droites, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point paralleles : ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust égal à l'angle GHD son alterne opposé.

Pour la seconde partie. Je dis que l'angle extérieur EGB est égal à son opposé intérieur de mesme costé

GHD : ce qui est manifeste par ce qui a été démontré cy-dessus, sçavoir que les angles AGH & GHD étoient égaux, étant aussi EGB égal à AGH par la 15. proposition ; & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront égaux, étans tous deux égaux au même AGH.

Pour la troisième partie : je dis que les deux angles intérieurs de même costé AGH & GHC sont égaux à deux droites : car s'il étoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la 11. com. sent. contre l'hypothese. Si donc une ligne droite tombe sur deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



THEOR. 21. PROP. XXX.

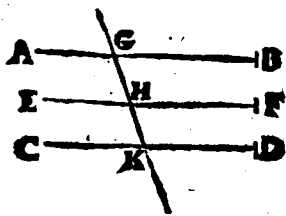
Les lignes droites paralleles à une même ligne droite, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droites AB, CD, paralleles à une même ligne droite EF. Je dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posées en un même plan, soit tirée la ligne droite GHK, qui les coupe toutes trois, sçavoir est AB en G ; EF en H ; & CD en K. Et puis que AB est posée parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, seront égaux entr'eux par la precedente proposition.

Derechef, puis que CD est aussi posée parallele à la même EF ; l'angle DKH sera aussi égal au même angle GHF c'est à sçavoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH

seront égaux entr'eux, lesquels étans alternes, les lignes AB &



CD sont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droites paralleles à une même ligne droite sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Si quelqu'un disoit que AG & BG sont paralleles à EF, & toutes fois elles ne sont paralleles entr'elles, il faudroit répondre qu'icelles AG & BG ne sont pas deux lignes, mais seulement les deux parties d'une seule & même ligne : Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, soient infiniment produites sans se rencontrer : mais il appert que AG étant prolongée se rencontre avec BG.

PROBL. 10.

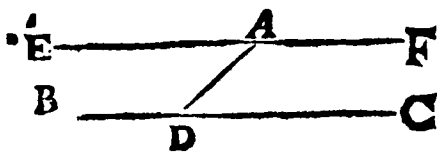
PROP. XXXI.

D'un point donné, mener une ligne droite parallele à une ligne droite donnée.

Soit le point donné A, duquel il faut mener une ligne droite parallele à la donnée BC.

Soit menée la ligne AD faisant avec la li-

gne donnée BC, quelconque angle ADC, & sur icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallele à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous avons donc d'un point donné A, mené une ligne droite EF parallele à une ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire

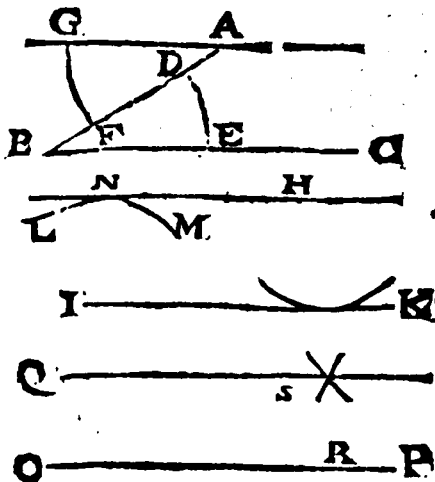


S C H O L I E.

Il est manifeste par cette construction, que le point donné doit être tellement situé hors la ligne donnée, qu'icelle étant continuée directement ne rencontre iceluy. Quant à la pratique de cette proposition, nous l'avons enseignée en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geo-

metrie pratique, laquelle toutesfois nous repeterons icy. Du point donné A soit menée la ligne droite AB faisant avec la ligne donnée BC , l'angle ABC ; puis de A & B comme centres, & d'un même intervalle, soient décrits les deux arcs DE , FG , & fait FG égal à DE , puis par les points A & G soit menée la ligne droite AG si grande qu'on voudra, & icelle sera parallele à BC .

Autrement, si du point H on veut mener une parallele à la ligne droite IK , du centre H soit fait un arc qui touche seulement la ligne donnée IK , puis du centre I (qui est l'extrémité de la ligne le plus éloigné de l'arc fait) & du même intervalle soit décrit un autre arc LM , puis du point H soit tirée la ligne droite HN , qui touche l'arc LM , & icelle ligne HN sera la parallele requise.



Encore autrement : Si du point Q , il faut tirer une ligne parallele à une ligne donnée OP , soit pris en icelle ligne quelconque distance, comme OR , avec laquelle soit décrit du centre Q un arc S ; puis soit pris la distance ou intervalle QO , & d'iceluy soit aussi décrit du centre R un arc qui coupe le precedent en S , & d'icelle intersection soit tirée par le point donné Q la ligne droite QS , laquelle sera parallele à OP , ainsi qu'il étoit requis.

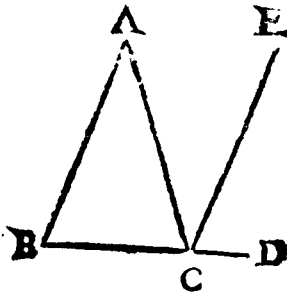
THEOR. 22. P R O P. XXXII.

En tout triangle, l'un des côtez étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez intérieurs; & de chacun triangle les trois angles intérieurs sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ABC , duquel le costé bc , soit prolongé

jusques en D : Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD, est égal aux deux opposés intérieurs A & B.

Qu'il ne soit ainsi : qu'on mène CE parallèle à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les parallèles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, seront alternativement égaux :



Item l'extérieur ECD, sera égal à son opposé intérieur ABC. Partant il est manifeste que le total ACD, est égal aux deux A & B, opposés intérieurement.

Pour la seconde partie que les trois angles A, B, & C, intérieurs du triangle ABC sont égaux à deux droits, il est évident, étant ACD égal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, sont ensemble égaux à deux droits par la 13. prop. Partant les trois angles intérieurs A, B, & ACB, seront aussi égaux à deux angles droits. Si donc de tout triangle, l'un des costez est prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

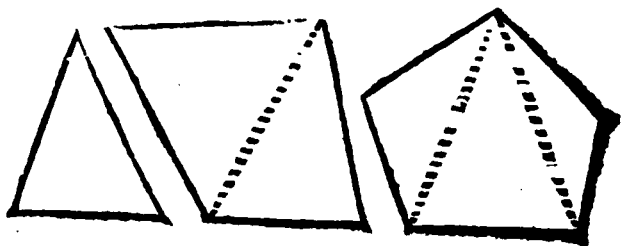
De cette proposition nous pouvons colliger à combien d'angles droits sont égaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point d'externe & ce par deux manières, dont la première est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la première figure rectiligne sont égaux à deux fois un droit, c'est à dire, à deux droits : Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont égaux à deux fois deux droits, savoir est à quatre droits : Mais ceux de la troisième figure, sont égaux à deux fois trois droits, c'est à dire à six droits, & ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est montré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ostez ; d'autant que deux lignes droites n'enferment pas une superficie, & par conséquent ne consti-

tuent une figure; mais sont requises au moins trois lignes droites pour constituer une figure rectiligne: d'où vient que le triangle est la première figure rectiligne: Car de ses costez, en estans ostez deux, reste un: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la dixième figure, puis que deux estans ostez de douze restent dix: & ainsi faut-il juger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de douze costez, est la dixième, elle aura aussi douze angles equivallans à vingt angles droits, c'est à sçavoir à deux fois dix angles droits: Ainsi aussi tous les dix angles de la figure contenue de dix costez, equivallent à seize angles droits, puis qu'icelle figure est la huitième en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de ceci est, que toute figure rectiligne se divise en autant de triangles, qu'elle est quantième en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de costez, deux estans ostez: Car de quelconque angle d'une figure, on peut tirer des lignes droites à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera divisée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux d'iceux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diviser en autres triangles: mais le quadrangle se

coupe en
deux: le
Penta-
gone en
trois,
&c. Vû
donc
que les
angles



d'iceux triangles constituent tous les angles de la fig. proposée, & tous les angles de quelconque triangle rectiligne sont égaux à deux droits: il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'est le nombre des triangles esquels elle se divise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle figure est quantième en ordre entre les figures rectilignes. Ce qu'on voit manifestement es figures cy-dessus appossées.

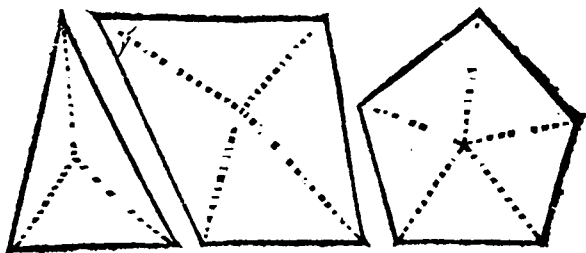
Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des an-

gles de quelconque figure rectiligne, est cettuy-cy.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, quatre étans ostez, qu'il y a de costez, ou de costez.

C'est à dire, que les angles de chaque triangle sont égaux à deux fois trois droits, quatre ostez, c'est à sçavoir à deux droits : Ainsi aussi les angles de la figure de douze costez, vaudront deux fois douze angles droits, moins quatre, sçavoir est vingt angles droits, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque point pris dedans la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chaque triangle par la 32. prop. sont égaux à deux droits, tous les angles d'iceux triangles, sont égaux à deux fois autant de droits qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée : & partant si on oste ces angles-là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi égaux à deux fois autant d'angles droits, ceux d'alentour le point pris étans ostez, qu'il y a de costez, ou d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le point pris, sont

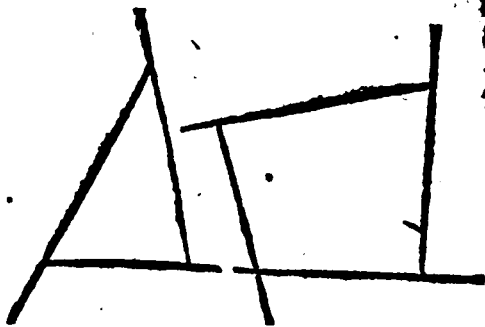
seulement
égaux à quatre droits, ainsi que nous l'avons colligé de la 15. prop. Parquoy les angles de



quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droits, quatre étans ostés, que ladite figure contient d'angles ou de côtés

Or il apert de ce que dessus, que si chaque côté de quelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles intérieurs, est prolongé par ordre vers une même part, tous les angles extérieurs pris ensemble, seront égaux à quatre droits. Car par la 13. prop. les angles intérieurs pris avec les extérieurs, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure,

Mais les angles intérieurs sont égaux à deux fois autant de droits, quatre otez, que ladite figure a d'angles, comme nous avons montré cy-dessus; partant les extérieurs sont toujours égaux à quatre droits. Par exemple: En quelconque triangle, les angles intérieurs & extérieurs ensemble, sont égaux à six droits: comme il appert en cette figure.



Mais par la 32. prop. les internes seuls sont égaux à deux droits. Donc les seuls extérieurs seront égaux à quatre droits. En un quadrangle, les angles extérieurs, & les intérieurs ensemble, sont égaux à huit droits. Mais les intérieurs seuls sont égaux à quatre droits, comme nous avons démontré; les extérieurs seuls seront donc aussi égaux à quatre droits. Toutes lesquelles choses peuvent être vues es figures apposées cy-dessus. Il y a la même raison en toutes autres figures qui ont tous leurs angles intérieurs.

COROLLAIRE.

Il résulte de cette 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle rectil. pris ensemble, sont égaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble; Pour ce que tant ces trois-là, que ces trois-cy, sont égaux à deux droits: d'où vient que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un sera aussi égal au troisième angle de l'autre; & de plus, si les deux angles de ce triangle-là sont égaux aux deux angles de de celui-cy, chacun au sien, les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isoscèle, duquel l'angle compris des costez égaux est droit, a chacun des autres angles demy droit: car ces deux ensemble font un droit, puis que par la 32. prop. les trois sont égaux à deux droits, & que le troisième est posé droit: Parquoy puis
que par

que par la 5. prop. les deux restés sont égaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droit. Mais si l'angle cōtenu des côtés est étoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droit: car les deux ensemble seroient moindres qu'un droit, &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres, seroit plus grand qu'un demy droit: pource que les deux ensemble seroient plus grands qu'un droit, &c. D'où résulte derechef que les triangles isoscèles, qui ont les angles du sommet égaux, sont equiangles; attendu que chacun des angles de dessus la base, sera la moitié du reste de deux droits.

Il est pareillement manifeste, que chaque angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, auxquels sont égaux les trois angles d'un triangle equilateral par cette 32. propos. estans divisez en trois angles égaux, chacun d'iceux sera necessairement la tierce partie de deux droits, ou bien les deux tierces parties d'un droit.

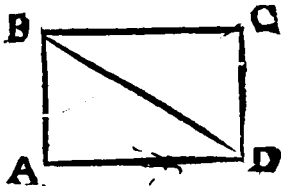
THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites égales & paralleles, & de mesme part, sont aussi égales & paralleles.

Soient deux lignes droites AB & CD , qui conjoignent de mesme part deux autres lignes droites AD & BC égales & paralleles. Je dis que AB & CD , sont aussi égales & paralleles.

Qu'il ne soit ainsi: soit menée la diagonale BD : Icelle tombant sur les deux paralleles AD & BC , fera les angles ADB & CBD alternative-

ment égaux par la 29. prop. Item AD & BC étant égales, les deux triangles ABD & CBD , auront deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi égaux, & par la 4. prop. la base AB sera égale à la base CD , & l'angle ABD sera égal alternativement à l'angle CDB , & par la 27. prop. icelles lignes égales AB & CD , seront aussi paralleles.



Donc les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

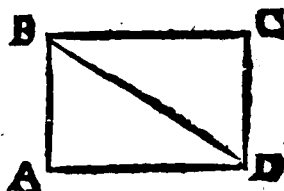
Euclide a dit que les lignes égales & paralleles doivent être conjointes de même part, afin que celles qui les joindront soient aussi égales & paralleles pource que si on les conjoignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B à D il est manifeste que les lignes qui les joindroient ainsi, ne seroient jamais paralleles, ains s'entre-couperroient toujours, & ne seroient que rarement égales.

THEOR. 24.

P R O P. XXXIV.

En tout parallelogramme, les côtés & les angles opposés, sont égaux entr'eux; & la diagonalle le coupe en deux également.

Soit le parallelogramme A B C D, auquel soit menée la diagonalle BD. Je dis que le côté AB, est égal à son opposé CD & aussi le côté AD égal au côté BC: Item que l'angle A est égal à son angle opposé C, & encore l'angle A B C égal à l'angle A D C: finalement qu'iceluy parallelogramme A B C D, est coupé en deux également par la diagonalle BD.



Car puis que la figure quadrilatere A B C D est un parallelogramme, le côté AB sera parallele au côté CD, & le côté AD au côté BC, & par la 29. propos. l'angle ABD sera alternativement égal à BDC. Item l'angle ADB alternativement égal à l'angle CBD. Ainsi les deux triangles BAD & DCB auront les angles A B D & B D A, égaux aux angles B D C & C B D, chacun au sien: & le côté BD commun à tous les deux susdits triangles: & partant par la 26. prop. les autres costez AB & A D, seront égaux aux autres costez C D & B C, chacun au sien, & l'autre angle A égal à l'autre

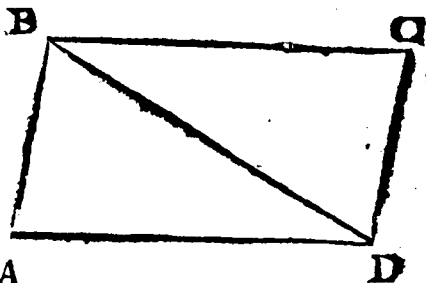
angle C. Et de plus il est évident que les deux angles du point B ensemble, seront égaux aux deux ensemble du point D. Encores par la 4. propos. les triangles ABD & CDB seront égaux; & partant le parallelogramme ABCD est couppe en deux également par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme, les costez & les angles, &c. Ce qui estoit à prouver.

S C H O L I E.

Euclide à bien dit icy que la diagonalle coupe le parallelogramme en deux également, mais il n'a rien dit des angles, pource qu'icelle diagonalle les coupe quelquesfois en deux également, & d'autres fois inegalement, ainsi qu'il est démontré au troisième Theoreme suivant.

1. Tout quadrilatre ayant les costez opposez égaux est parallelogramme.

Un quadrilatre ABCD, les costez opposez AB, CD soient egaux, & aussi les opposez AD, BC. Je dis qu'iceluy quadrilatre ABCD est un parallelogramme. Car ayant mené la diagonalle BD, les deux costez AB, BD du triangle ABD seront égaux aux deux costez DC, BD du triangle BCD, chacun au sien, & la base BD, egale à la base BC. Donc par la 8. propos. l'angle ABD sera

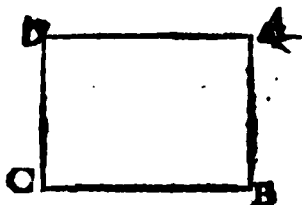


egal à l'angle CDB, qui luy est alterne, & encore ADB à son alterne CBD par le Corollaire d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes AB, CD seront paralleles; comme aussi BC, AD: & par la 36. def. le quadrilatre ABCD est un parallelogramme. Ce qui étoit proposé.

De cecy resulte que les Rhombes, & les Rhomboïdes sont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs costez opposez égaux.

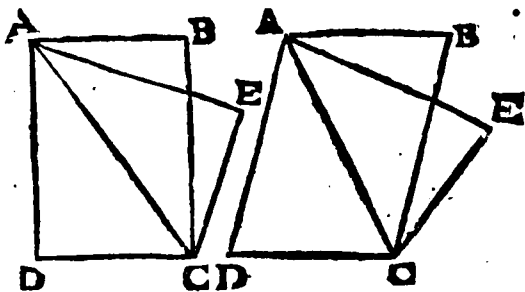
2. Tout quadrilatre qui a les angles opposez égaux, est parallelogramme.

Au quadrilatere $ABCD$, les angles oppozes A & C soient
 egaux, comme aussi les oppozes B & D . Je dis que $ABCD$
 est un parallelogramme. Car si aux angles egaux A & C
 on ajoute les angles egaux B & D ; par le 2. Ax. les deux
 angles A & B seront egaux aux
 deux angles C & D : partant
 les deux A & B seront la moi-
 tié des quatre angles A, B, C
 & D . Mais ces quatre cy sont
 egaux à quatre droits, comme
 nous avons démontré au Scho-
 lie de la 32. prop. Donc les
 deux A & B seront egaux à deux droits, & par la 28. prop.
 les costez AD, BC seront parallels. Par mesme raison les
 costez AB, DC seront aussi parallels. Parquoy le quadri-
 latere $ABCD$ est un parallelogramme. Ce qui estoit pro-
 posé.



De cecy resulte que tout quadrilatere qui a tous les an-
 gles droits est parallelogramme, attenant que les deux an-
 gles A & B seront egaux à deux droits, comme aussi les
 deux D & C , &c. Consequemment tant le quarré, que le
 quarré long, sont parallelogrammes; puis qu'ils ont tous
 leurs angles droits.

Or par les deux Theoremes precedents sont converties
 les deux premieres parties de la 34. propos. mais quant à la
 3. partie, on ne la peut pas convertir, vû que tout quadri-
 latere qui est coupé en deux également par la diagonalle,
 n'est pas parallelogramme. Car soit $ABCD$ un quarré long,
 ou bien un Rhom-
 boide, lequel sera
 parallelogramme,
 & consequemment
 étant tirée la dia-
 gonalle AC , elle le
 coupera en deux
 également: & sur
 icelle soit con-
 struit le triangle

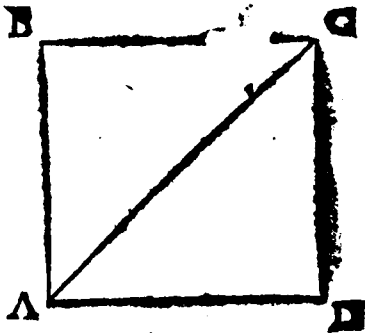


AEC , en sorte que le costé AE soit egal au costé AD , &
 le costé CE egal au costé CD : & sera fait le trapeze
 $ADCE$, duquel la diagonalle sera AC , qui le coupera en

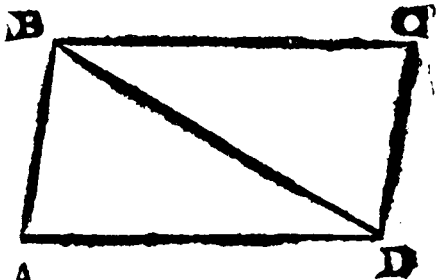
deux également, puis que les deux triangles ADC , AEC ont tous leurs costez, égaux chacun au sien, sont conséquemment égaux.

3. Si un parallelogramme est equilateral, la diagonale coupera les angles en deux également : mais inégalement s'il n'est equilateral.

Soit un parallelogramme $ABCD$, duquel tous les costez soient égaux entr'eux, & soit menée la diagonale AC : Je dis qu'elle coupe les angles A & C en deux également. Ce qui est manifeste par la 8. propos. ven que les deux triangles ABC , ADC ont tous les trois costez, égaux, chacun au sien.



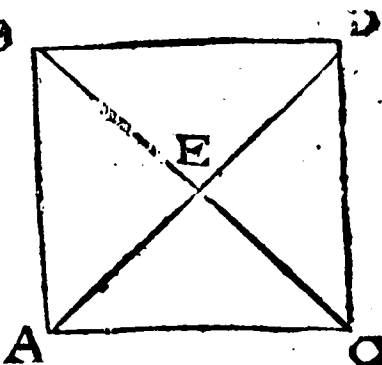
Soit derechef le parallelogramme $ABCD$, auquel le costé AD soit plus grand que le costé AB , & soit tirée la diagonale BD : Je dis qu'elle coupe inégalement les angles B & D . Car puis qu'au triangle ABD le costé AD est plus grand que le costé AB , par la 18. propos. l'angle ABD sera plus grand que l'angle ADB . Mais par la 29 prop. l'angle ABD est égal à son alterne BDC , car AD est parallele à BC , puis que $ABCD$ est un parallelogramme. Donc aussi l'angle BDC sera plus grand que l'angle ADB : & partant tout l'angle D est coupé inégalement par la diagonale BD . Il y a même raison des autres angles. Parquoy apert ce qui étoit proposé.



4. Si un parallelogramme a tous les angles égaux, les deux diagonales seront égales entr'elles : mais inégales, si les angles sont inégaux.

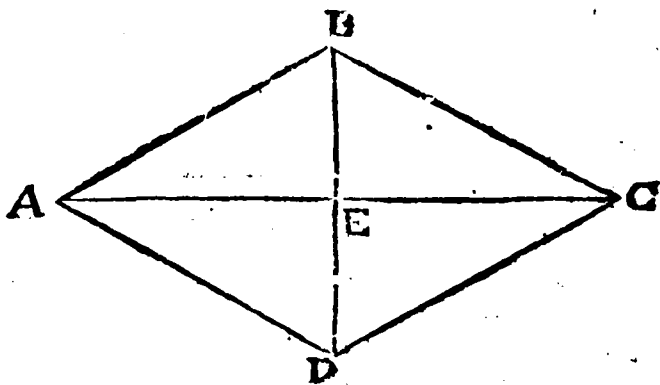
Soit premierement un parallelogramme $ABCD$, duquel tous les angles soient egaux, & soient menées les deux diagonales AC , BD : Je dis qu'icelles diagonales sont egales entr'elles. Car atten-

du que les deux costez AB , BC , du triangle ABC sont egaux aux deux costez DC , CB , du triangle BCD , chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle C , par la 4. propos. la base AC sera egale à la base BD : ce qui étoit proposé. Partant au quarré, & au quarré long les diamètres sont egaux, puis que l'un & l'autre a tous les angles egaux, sçavoir droits.



Maintenant au parallelogramme $ABCD$, duquel l'angle ABC soit plus grand que l'angle BAD , & soient les deux

diagonales AC , BD . Je dis que la diagonale AC ,



qui soutient le plus grand angle B , est plus grande que la diagonale BD , qui soutient le moindre angle A . Car d'autant qu'au triangle ABC les deux costez AB , BC , sont egaux aux deux costez AB , AD du triangle BAD , chacun au sien, & l'angle B plus grand que l'angle A , par la vingt-quatrième proposition, la base AC sera plus grande que la base BD . Ce qui étoit proposé.

De cecy resulte qu'au Rhombe. ou Rhomboïde les diagonales sont inégales: car ils ont les angles obliques, & par consequent inégaux.

En tout parallelogramme, les diagonales s'entrecoupent en deux également : & tout quadrilatere auquel les diagonales s'entrecoupent en deux également, est parallelogramme.

Au parallelogramme $ABCD$ cy-dessus, soient les deux diametres AC, BD qui s'entrecoupent au point E : Je dis que chacun d'iceux diametres est coupé en deux parties egales en E , c'est a dire que AE, CE sont egales, & BE, DE aussi egales. Car d'autant que par la 29. prop. les deux angles EAB, EBA du triangle ABE , sont egaux aux alternes ECD, EDC du triangle CDE , un chacun au sien, & le costé AB egal au costé opposé CD par la 34. prop. le costé AE sera egal au costé CE , & le costé BE au costé ED par la 26. prop. Ce qui étoit premierement proposé.

Maintenant, au quadrilatere $ABCD$ soient les deux diagonales AC, BD , qui s'entrecoupent en deux également en E : Je dis qu'iceluy quadrilatere $ABCD$ est un parallelogramme. Car puis que les costez AE, BE du triangle AEB sont egaux aux costez CE, DE du triangle CED , chacun au sien, & que par la quinzième proposition les angles au sommet E sont aussi egaux ; par la quatrième proposition les bases AB, CD seront egales, & l'angle ABE egal à l'angle alterne CDE : Donc les lignes droites AB, CD seront paralleles par la 27. proposition. Par même raison AD, BC seront démontrées paralleles. Parquoy $ABCD$ est un parallelogramme.

De cecy apert que si on veut promptement construire un parallelogramme, il faut tirer deux lignes droites interminées AC, BD , qui s'entrecoupent comme qu'il se soit en E ; puis prendre AE, EC egales, & BE, ED aussi egales, puis soient tirées les lignes AB, BC, CD, DA : & sera fait le parallelogramme $ABCD$: lequel sera un Rhombe, si les angles du point E sont faits droits, & s'ils sont obliques, ce sera un Rhomboide : Mais les susdits angles étans droits, si on fait toutes les quatre lignes EA, EB, EC, ED egales entr'elles ; le parallelogramme constitué sera un quarré : Finalement lesdits angles du point E étans

obliques, & toutes les quatre susdites lignes égales, le parallelogramme constitué sera un quarré long; le tout comme il apert des choses démontrées cy-dessus.

A ce que dessus nous adjoûterons encore ce problème.

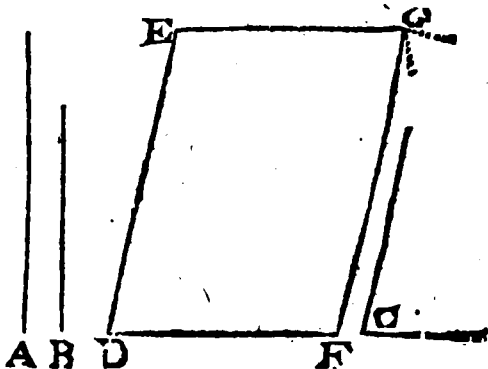
6. Construire un parallelogramme qui ait un angle egal à un angle donné, & les costez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droites données.

Soient données deux lignes droites *A, B*, & un angle *C*: Il faut construire un parallelogramme

ayant un angle egal au donné *C*, & les deux costez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes données *A* & *B*.

Soit prise *DE* egale à *A*, puis à l'extrémité *D*, soit fait l'angle *EDF* egal au don-

né *C*, faisant *DF* egale à *B*: en apres du centre *E*, & du même intervalle *B* soit décrit un arc de cercle *G*, puis du centre *F* & intervalle *A* soit décrit un autre arc qui coupe le precedent *G*, & de l'interfection soient tirées les lignes droites *EG, FG*: & le quadrilatere *DEGF*, sera le parallelogramme requis, ainsi qu'il est manifeste par les choses cy-dessus démontrées.



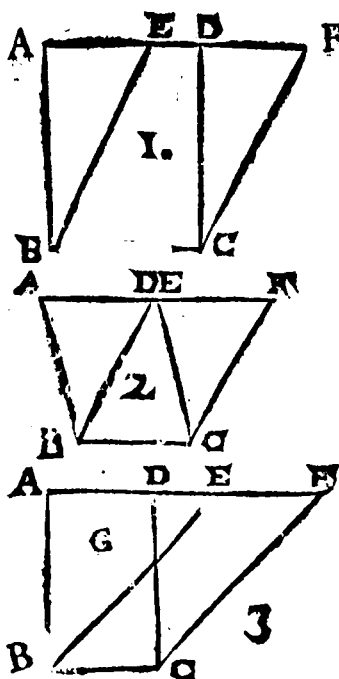
THEOR. 25. P R O P. XXXV.

Les parallelogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux,

Soient deux parallelogramme *ABCD* & *BCFE*, tous deux sur même base *BC*, & entre mêmes paralleles *AF*, & *BC*: Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Où le point *E* tombera, ou entre *A* & *D*, ou au point *D*, ou entre *D* & *F*: qu'il tombe premierement entre *A* & *D*, com-

en la premiere figure, d'autant que par la 34. prop. le costé AD est egal au costé BC qui luy est opposé, & au mesme BC est aussi egal EF costé du parallelogramme BEFD, par la 1. com. sent. les costez AD, EF seront egaux entr'eux : ôtant donc d'iceux la partie commune ED, les restes AE & DF seront egaux par la 3. com. sent. Mais par la même 34. prop. au parallelogramme ABCD, les costez opposez AB, DC sont aussi egaux ; & puis qu'étans parallels, sur iceux tombe la ligne droite FA, l'angle extérieur CDF sera egal à l'angle intérieur BAE par la 29. prop. Donc les triangles ABE, DCF auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux ; & partant iceux triangles ABE, DCF seront egaux entr'eux par la 4. prop. leur ajoutant donc le trapeze commun BEDC, sera fait le parallelogramme ABCD egal au parallelogramme BEFC. Ce qui étoit proposé.



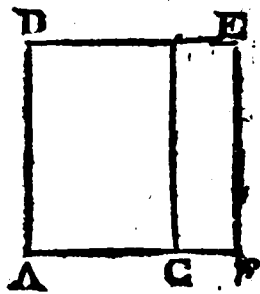
Maintenant, que le point E tombe avec le point D, comme en la deuxième figure, d'autant que comme dessus les lignes AD, EF seront egales entr'elles, & l'angle extérieur FEC egal à l'intérieur DAB ; les triangles BAD & CEF seront egaux par la quatrième proposition. Ajoutant donc à chacun le triangle commun BDC, seront faits egaux les parallelogrammes ABCD, & BEFC.

En troisième lieu, que le point E tombe entre D & F, comme en la troisième fig. D'autant que par la 34. propos. les costez opposez des parallelogrammes sont egaux, AD & BC seront egaux : Item BC & EF ; & partant AD & EF egaux, auxquels si on ajoute la ligne commune DE ; la toute AE sera egale à la toute DF. Item AB est egale à DC, lesquelles étans

parallèles, l'angle extérieur CDE sera égal à l'opposé intérieur EAB : & par la quatrième proposition les triangles BAE & CDF, seront égaux : desquels si on ôte le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG & CGEF, seront égaux : ausquels si on ajoute le triangle commun BGC, le parallélogramme ABCD sera égal au parallélogramme BC FE. Donc les parallélogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes parallèles, sont égaux entr'eux : Ce qui étoit à démontrer.

S C H O L I E.

Est icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de parallélogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes parallèles, ils entendent que ladite base soit en l'une d'icelles parallèles comme aux exemples cy-dessus : Car entendant autrement cette proposition elle pourroit estre fausse, comme a fort bien remarqué le sieur Donnor, & ainsi qu'il appert en ces deux parallélogrammes ADFC, CFEB, lesquels sont tous deux constituez sur la base CF, & entre mêmes parallèles AB, DE : & toutesfois il est évident, qu'ils ne sont pas égaux : Ce qui advient à cause de ce que leur base commune CF, n'est pas en l'une ne l'autre des parallèles AB, DE. Le même se doit aussi entendre des parallélogrammes, & des triangles mentionnez, aux propositions suivantes, c'est à dire, qu'ils doivent tous avoir leurs bases en l'une des parallèles.



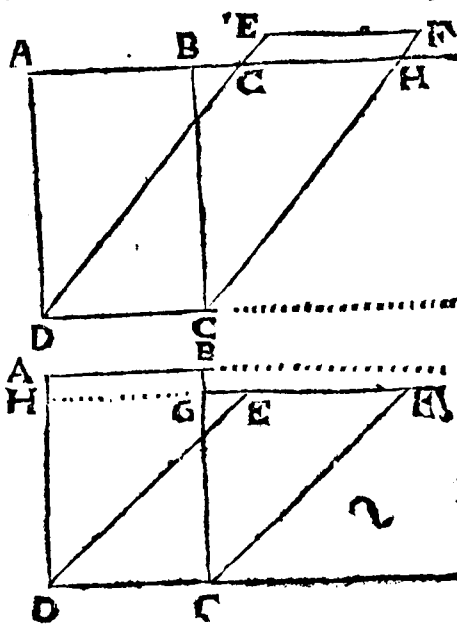
Clavius a converty cette 35 prop. ainsi :

Les parallélogrammes égaux constituez sur une même base, & de même part, seront entre mêmes parallèles.

Soient deux parallélogrammes égaux ABCD, CDEF, sur une même base CD, & d'une même part : Je dis qu'ils sont entre mêmes parallèles, c'est à dire, que prolongeant la ligne droite AB elle rencontrera directement EF. Car autrement si elle ne la rencontre elle tombera,

ou au dessus d'icelle
ou au dessous. Pre-
mierement, qu'elle
tombe au dessous, s'il
est possible, comme
est AH, en la premie-
re figure. Donc par la
35. proposition le pa-
rallélogramme CDGH
sera egal au parallé-
logramme ABCD :
Mais à iceluy paral-
lelogramme ABCD est
posé egal le parallé-
logr. CDEF. Parquoy
les parallelogrammes
CDEF, CDGH seront
egaux : le tout & la
partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continua-
tion directe de AB ne tombera donc pas au dessous de EF.

Secondement, que AB prolongée tombe s'il est possible,
au dessus de EF, comme en la 2. figure : donc EF prolon-
gée tombera au dessous de AB. Parquoy comme dessus
les parallelogrammes ABCD, CDHG seront egaux, le tout
& la partie. Ce qui est absurde. Donc puis que AB produi-
te ne tombera pas au dessus de EF, ny au dessous, elle la
rencontrera directement. Ce qui étoit proposé.



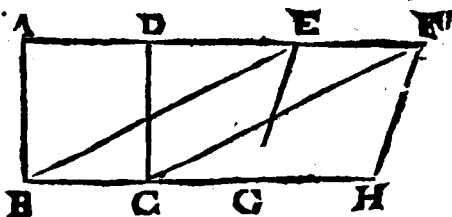
THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases egales,
& entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes ABCD & EFGH, ayans
les bases BC & GH egales, & entre mêmes paralleles AF &
BH. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Qu'il ne soit ainsi : soient menées les deux lignes BE, CF :
d'autant que BC est posée egale à GH, & que par la 34. prop.
la même GH est egale à son opposée EF, les deux lignes BC, EF
seront egales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi
paralleles par l'hypothese : Donc les lignes BE, CF, qui les

conjoignent seront aussi égales & parallèles par la 33. propos. & par conséquent BEFC sera un parallélogramme constitué sur même base BC, & entre mêmes parallèles BH, AF



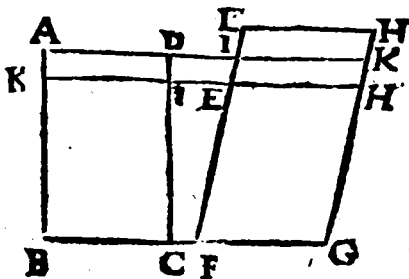
que le parallélogramme ABCD, & par la 35 prop. ils seront égaux; & par la même prop. il sera aussi égal au parallélog. EFGH, étant sur même base EF, avec iceluy, & entre mêmes parallèles AF, BH; Et par la 1. com. sent. les parallélog. ABCD, & EFGH, seront égaux entr'eux. Donc les parallélogrammes constitués sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer,

SCHOLIE.

Clavius a converty cette 36. propos. ainsi qu'il ensuit.

Les parallélogrammes égaux constitués sur bases égales : & de même part sont entre mêmes parallèles. Et si les parallélogrammes égaux constitués entre mêmes parallèles, n'ont une même base, ils seront sur bases égales.

Premierement, soient deux parallélogrammes égaux ABCD, EFGH, constitués sur bases égales BC, FG, & de même part : Je dis qu'ils sont entre mêmes parallèles, c'est à dire que AD prolongée se rencontrera directement avec EH. Car autrement elle tomberoit ou au dessous d'icelle EH, ou au dessus; & il s'ensuivroit le tout estre égal à la partie: comme il a été dit en la converse de la précédente proposition.



Secondement, soient les parallélogrammes égaux ABCD, EFGH, entre mêmes parallèles AH, BG : Je dis que leurs bases BC, FG sont égales : Car autrement l'une sera plus grande que l'autre, & soit BC la plus grande, s'il est possible, & d'icelle soit retranchée BI égale à FG : puis soit

menée IK parallèle à AB .

Donc par la 36. prop. le parallélogramme $ABIK$ sera égal au parallélogramme $EFGH$; & puis aussi égal au parallélogramme $ABCD$, la partie au tout.

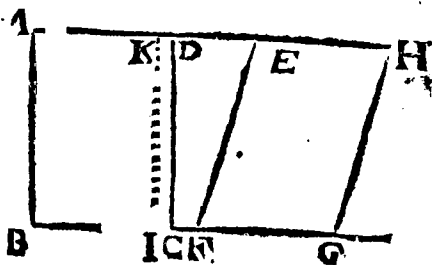
Ce qui est absurde. La base BC n'est donc pas plus grande que la base FG ; Et par mesme raison elle ne sera pas plus petite. Parquoy les bases BC , FG sont égales.

Clavius demontre encore icy cet autre Theoreme.

Si deux parallelogrammes constituez entre mesmes paralleles, ont leurs bases inegales; celuy-là sera le plus grand, qui aura la plus grande base. Et au contraire, si deux parallelogrammes inegaux sont entre mesmes paralleles; le plus grand aura une plus grande base que l'autre.

Soient les deux parallelogrammes $ABCD$, $EFGH$ de la figure precedente, entre les paralleles AH , BG . & soit la base BC plus grande que la base FG : Je dis que le parallelogramme $ABCD$, qui est sur la plus grande base BC , est plus grand que le parallelogramme $EFGH$. Car de BC soit retranché BI égale à FG , & soit tirée IK parallèle à AB par la 31. propos. de ce Livre. Donc par la 36. prop. les parallelogrammes $ABIK$, $EFGH$ constituez sur bases égales, seront égaux: & puis que par le 9. ax. le parallelogramme $ABCD$ est plus grand que le parallelogramme $ABIK$, le même parallelogramme $ABCD$ sera aussi plus grand que le parallelogramme $EFGH$. Ce qui étoit proposé.

Soient derechef les parallelogrammes $ABCD$, $EFGH$ inégaux, & $ABCD$ le plus grand: Je dis que la base BC est plus grande que la base FG . Car si elle étoit égale, les parallelogrammes seroient égaux par la 33. proposition de ce livre. Ce qui est absurde, puis que $ABCD$ a été posé plus grand que $EFGH$. Mais si ladite base BC étoit moindre, le parallelogramme $EFGH$ seroit plus grand que le parallelogramme $ABCD$, comme il a été démontré cy-dessus; Ce qui est encore absurde. Donc puis que la base BC ne peut être égale, ny moindre que la base FG , elle sera plus grande. Ce qui étoit proposé.

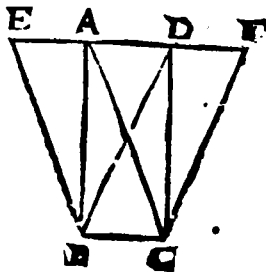


THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur une même base ; & entre mêmes paralleles , sont égaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, BDC , tous deux constituez sur la même base BC , & entre même paralleles EF , & BC. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Car si on mène BE parallele à CA , & CF parallele à BD , afin d'accomplir les parallelog. BEAC , & BCFD , iceux seront égaux par la 35. prop. attendu qu'ils sont constituez sur même base BC , & entre mêmes paralleles BC , EF. Mais les triangles donnez ABC , & DBC , sont moitié d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont coupeez en deux également par les diagonales AB , DC : dont aussi les triangles



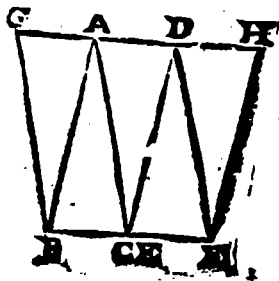
ABC ; DBC seront égaux , par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur une même base , & entre , &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur base égale ; & entre mêmes paralleles , sont égaux entreux.

Soient deux triangles ABC, DEF , constituez sur bases égales BC & EF , & entre mêmes paralleles GH & BF. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Car apres avoir mené BG , parallele à CA , & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accomplissent les deux parallelogram. ACBG. DEFH : iceux étant constituez sur bases égales , & entre mêmes paralleles , seront égaux par la 36. prop. aussi égales seront leurs moitiés sçavoir les triangles proposez ABC



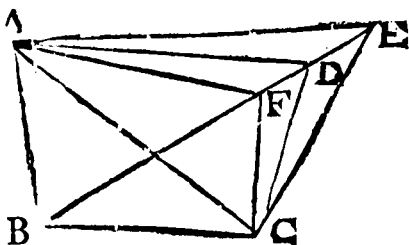
& DEF par la 34. prop. estans les parallelogrammes coupez en deux également par les diagonales BA & DF. Donc les triangles constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 29 PROP. XXXIX.

Les triangles égaux constituez sur une même base, & de même part, sont aussi entre même paralleles.

Soient deux triangles égaux ABC, & BCD constituez sur une même base BC, & de même part. Je dis qu'ils sont entre même paralleles c'est à dire, que si on mene la ligne droite AD, elle sera parallele à BC,

Autrement, du point A, on en pourra mener une autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au dessus de AD, ou au dessous. Qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AE, s'il est possible; & apres avoir continué BD jusques en E, & mené EC, les deux triangles BAC, & BEC par la 37. prop. estans sur même base, & entre mêmes paralleles, seront égaux. Mais par l'hypothese les deux triangles BAC, & BDC sont aussi égaux: donc par la 1. com. sent. les triangles BEC & BDC seroient aussi égaux, la partie & le tout; partant la parallele menée du point A, ne tombera pas au dessus de AD. Le même inconuenient s'ensuivra si on la fait tomber au dessous de AD comme AF: car ayant mené CF. les triangles BFC & BDC se trouueroient égaux, ce qui ne peut estre: donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC. Parquoy les triangles égaux constituez sur même base, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



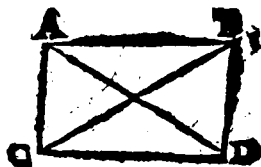
SCHOLIE.

Par cette prop. qui est la converse de la 37. il est aisé de demontrer comme a fait Commandin le Theor. suivant.

Tout quadrilatre qui est coupé en deux également par l'un

& l'autre diametre, est parallelogramme.

Le quadrilatre ABDC soit divisé en deux également par l'un & l'autre diametre AD, BC: Je dis qu'iceluy est parallelogramme. Car d'autant que les triangles ACD, BDC sont chacun moitié du quadrilatre ABDC, ils sont egaux entr'eux par le 7. ax. Et pource qu'ils ont une même base CD, & sont de même part, ils sont entre mêmes paralleles par la 39. prop. & partant AB est parallele à CD. Semblablement veu que les triangles ABC, ACD sont egaux & sur même base AC, icelle ligne AC sera aussi parallele à BD: donc le quadrilatre ABDC est parallelogramme, puis que les costez opposez d'iceluy sont parallels. Ce qui étoit proposé.

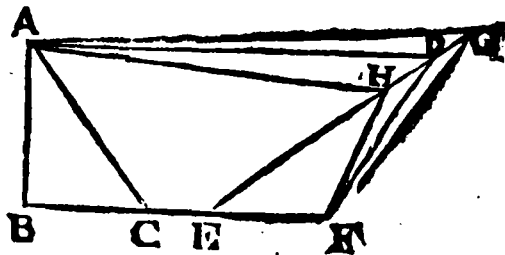


THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egales, & de même part, sont aussi entre mêmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, constituez sur bases egales BC & EF, & de même part. Je dis qu'ils sont aussi entre mêmes paralleles; c'est à dire, que si on mene une ligne droite de A en D, qu'icelle sera parallele à BF.

Autrement, du point A on en pourra mener une autre qui sera parall. à BF (si AD ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou



au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AG, s'il est possible, & apres avoir continué ED iusques à ce qu'il rencontre AG en G, & mené FG, les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. prop. mais par l'hypothese

Si les triangles BAC & DEF sont aussi égaux : donc par la 1. com. sent. le triangle EDF sera égal au triangle EGF , la partie au tout ; ce qui est impossible : Partant la parallele menée du point A ne tombera point au dessus de AD . Le mesme inconvenient s'ensuivra si on la fait tomber au dessous, comme AH , car les triangles EHF & EDF , se trouveroient égaux : donc du point A ne pourra estre menée autre ligne que AD parallele à BF . Parquoy les triangles égaux constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Commandin & Clavius apres luy, demontrent en ce lieu le Theoreme suivant.

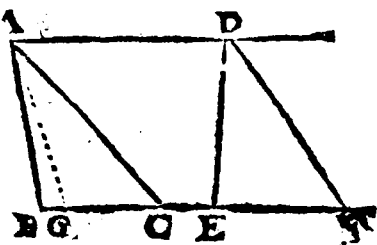
Si les triangles égaux constituez entre mesmes paralleles, n'ont une mesme base, ils seront sur bases égales.

Soient les triangles égaux ABC , DEF , entre mêmes paralleles AD , BF , & sur les bases BC , EF : Je dis qu'elles sont égales entr'elles. Car si elles ne sont égales soit BC la plus grande, & d'icelle soit retranchée CG , égale à EF , & tirée AG . Donc par la 38. proposi. le triangle ACG sera égal au triangle DEF : Mais à ce même triangle a été posé égal le triangle ABC . Donc par le 1. axiome les triangles AGC , ABC seront égaux, la partie & le tout : Ce qui est absurde. Donc les bases BC , EF , ne sont pas inégales, mais égales. Ce qu'il étoit proposé.

En suite de ce theoreme Clavius démontre encore le suivant.

Si deux triangles constituez entre mêmes paralleles, ont leurs bases inégales, celui-là sera le plus grand, duquel la base sera la plus grande. Et au contraire, si deux triangles inégaux sont entre mêmes paralleles, la base du plus grand sera la plus grande.

En la figure precedente soient entre mêmes paralleles AD , BF , les triangles ABC , DEF , & soit la base BC plus grande que la base EF : Je dis que le trian-



gle ABC , est plus grand que le triangle DEF . Car ayant pris CG égale à EF , & tiré AG , les triangles AGC , DEF , seront égaux par la 38. proposition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC est plus grand que le triangle AGC , le même triangle ABC sera plus grand que le triangle DEF .

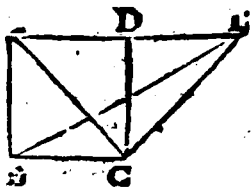
Soient derechef les triangles inégaux ABC , DEF , & le plus grand soit ABC . Je dis que la base BC est plus grande que la base EF . Car si on dit qu'elle est égale, le triangle ABC sera égal au triangle DEF : ce qui est absurde, attendu qu'il a été posé plus grand. Et si on l'estime être moindre, le triangle DEF se a plus grand que le triangle ABC , comme il a été démontré cy-dessus: Ce qui est encore plus absurde, puis que ABC a été posé plus grand que DEF . Donc la base BC sera plus grande que la base EF , puis qu'elle ne peut être ny égale, ny moindre. Ce qui étoit proposé.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si un parallélogramme, & un triangle ont une même base, & sont entre mêmes parallèles; le parallélogramme sera double du triangle.

Soit le parallélogramme $ABCD$ sur la même base BC , que le triangle BCE , & tous deux entre même parallèles AE & BC . Je dis que le parallélogramme $ABCD$ est double du triangle BEC .

Car si on mène la diagonale AC , le triangle ABC sera la moitié du parallélogramme $ABCD$ par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le même triangle ABC sera égal au triangle BEC . Donc par la 6. com. sent. le parallélogramme $ABCD$, qui est double de l'un, sera aussi double de l'autre. Si donc un parallélogramme & un triangle ont une même base, &c. Ce qu'il falloit prouver.



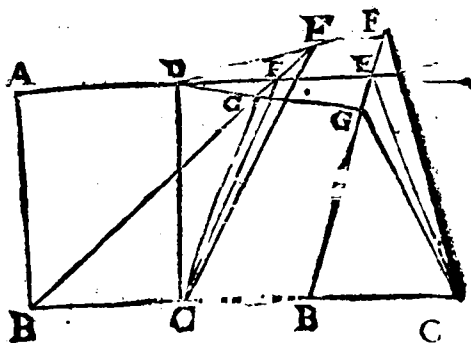
Si les bases étoient égales, on démontreroit encore la même chose, & en la même manière que dessus, tirant le diamètre du parallélogramme. Car d'autant que

Les triangles constituez sur bases egales, & entre mêmes parallèles sont egaux entr'eux, le parallelogramme qui est double de l'un, seroit aussi double de l'autre.

Clavius a démontré apres Commandin la converse de cette 41. prop. ainsi qu'il ensuit.

Si un parallelogramme double d'un triangle est constitué sur une même base qu'iceluy, ou sur une base egale, & de même part; ils seront entre mêmes parallèles. Et si un parallelogramme est double d'un triangle & entre mêmes parallèles, leurs bases seront egales, si elles ne sont une même.

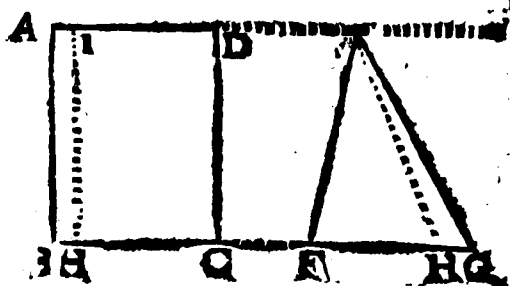
Soit le parallelogramme $ABCD$ double du triangle EBC , sur une même base, ou sur bases egales; Je dis qu'ils sont entre mêmes parallèles, c'est à dire que AD qui est parallele à BC , étant prolongée directement



tombera au point E . Car autrement elle tombera ou au dessus de E , ou au dessous. D'où adviendra comme il a été démontré en la 39. ou 40. prop. la partie être egale au tout. Car par la 41. prop. le parallelogramme sera pareillement double du triangle BFC , ou BGC ; & par le 6. axiom. les triangles EBC , FBC , ou les triangles FBC , GBC seront egaux, la partie & le tout. Ce qui est absurde.

Soit maintenant le parallelogramme $ABCD$ double du triangle EFG , & entre mêmes parallèles. Je dis que la base BC est egale à la base EG . Car si l'une d'icelles sçavoir BC est plus grande, ayant pris CH egale à FG , & tiré HI parallele à BA , on démontrera les parallelogrammes $ABCD$, $IHCD$ être egaux, le tout & la partie: (pour ce que chacun est double du triangle EFG celuy là par l'hypothese; & cettuy cy par la 41. prop.) ce qui est absurde. On démontrera en ore le même, si on dit la base FG être plus grande que la base BC : Car ayant fait FH egale à BC , & tiré la ligne droite

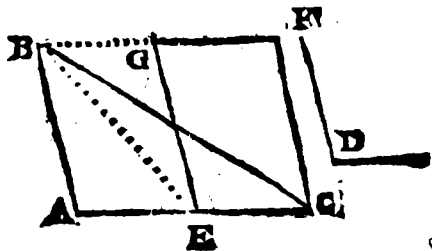
HE, les triangles EFH, EFG seront égaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun est moitié du parallélogramme ABCD, celui-là par la 41. prop. & celui-cy par l'hypothèse) Ce qui est absurde.



PROBL. II. PROP. XLII.

Faire un parallélogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D, il faut faire un parallélogramme égal au triangle donné ABC, & qui ait un angle égal à l'angle donné D.



L'un des costez du triangle, sçavoir, AC soit coupé en deux également en E, par la 10. prop. puis soit fait l'angle CEG égal à l'angle D par la 24. prop. Et par la 31. prop. soit menée de B, la ligne BF parallèle à AC, laquelle coupe EG en G. Derechef, de C soit menée CF parallèle à EG, rencontrant BF en F : & sera constitué un parallélog. EGFC, ayant l'angle CEG égal au donné D, lequel parallélogramme, ie dis être égal au triangle donné ABC. Car étant tirée la ligne BE, iceluy parallélogramme EGFC sera double du triangle EBC par la proposition précédente, duquel est aussi double le triangle ABC, iceluy étant égal aux deux ABE, EBC, qui sont égaux entr'eux par la 38. propos. Donc le parallélogramme EGFC & le triangle ABC seront égaux entr'eux par la sixième commune sentence, & puis qu'iceluy parallélogramme a l'angle CEG égal au donné D par la cou-

Construction, nous avons construit un parallelogramme egal à un triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

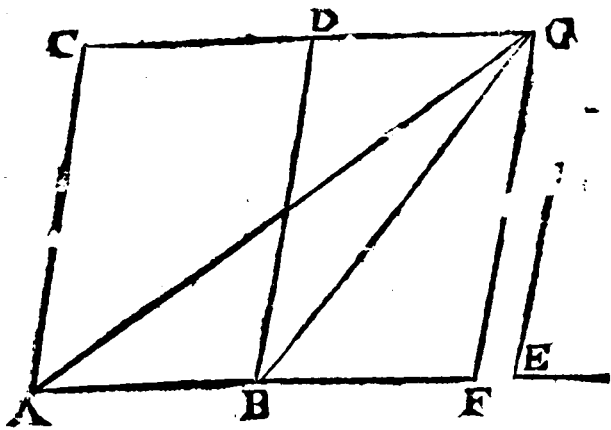
S C H O L I E.

La pratique de ce probleme est enseignée au 13. de nostre Geometrie pratique : Et est si facile à entendre par la construction cy-dessus, qu'il n'est besoin d'en dire autre chose : mais nous ajouterons icy (apres Pelletier) la converse de cette 42. proposition, qui est telle.

Faire un triangle egal à un parallelogramme donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme ABDC, & l'angle rectiligne E : il

faut faire un triangle egal au parallelogramme donné AD, ayant un angle egal au donné E. Soient prolongées CD,



tant qu'il sera de besoin, AB en sorte que BF soit egal à icelle AB ; puis au point A soit fait l'angle FAG egal au donné E, tirant AG jusques à ce qu'elle rencontre CD prolongée en G, & étant joint FG, le triangle AGF sera le requis ; Car l'angle FAG est egal au donné E, & étant tirée BG, les triangles AGB & BGF seront egaux par la 38. prop. & par tant le total AGF sera double de AGB ; Mais par la 41. prop. le parallelogramme AD est aussi double d'iceluy triangle ABG. Donc le triangle AGF, & le parallelogramme ACDB seront aussi egaux entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il est evident par les deux demonstrations cy-dessus,

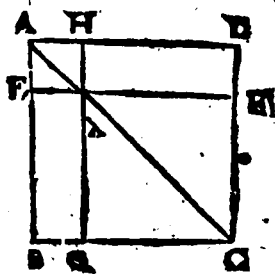
qu'un triangle qui a la base double de celle d'un parallelogramme constitué entre mêmes parallèles qu'iceluy est egal à iceluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les suppléments des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC, à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEKH & KGCF. Je dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle suppléments, sont egaux entr'eux.

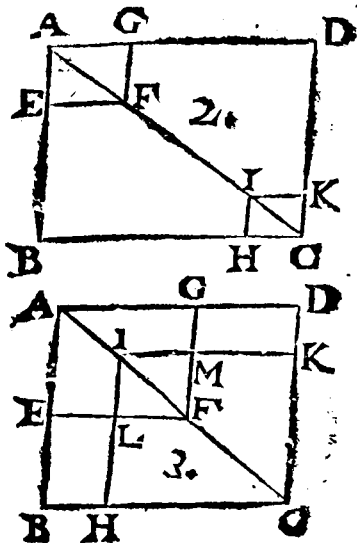
Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CKG, CFK aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABGK, ADFK: Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEK, AHK; partant si on les oste des trapezes susdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les suppléments, &c. Ce qui étoit à prouver.



S C H O L I E.

Si les deux parallelogrammes d'alentour le diametre n'étoient conjoints au point k, ainsi qu'en la figure cy-dessus, mais que l'un fut éloigné de l'autre, comme en la 2. figure, ou bien qu'ils s'entrepassassent ainsi qu'en la troisième, on démontreroit en la même maniere que dessus, être aussi egaux, les complemens ou restes, sçavoir en la 2. figure, les pentagones BEFIH, DGFJK, & en la 3. les parallelogrammes BELH, DGMK: Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'une & l'autre figure sont egaux entr'eux, comme aussi les triangles AEF, AGF; les trapezes BEFC, DGFC seront pareillement egaux par le 3. axiome.

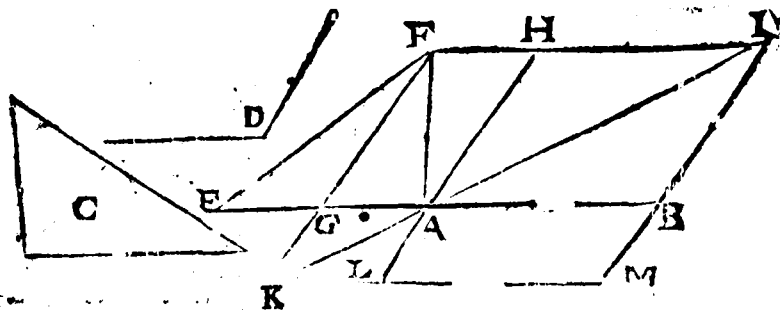
Parquoy si d'iceux trapezes de la seconde figure, on oste les triangles egaux HIC , KIC , resteront encore egaux les pentagones $BEFIH$, $DGFik$. Mais adjoustant aux trapezes de la troisieme fig. les triangles egaux LIE , MIF , les figures $BELIC$, $DGMIC$ seront egaux entr'elles, desquelles si on oste les triangles egaux HIC , KIC , resteront aussi egaux les parallelogrammes $BELH$, $DGMK$. Ce qui étoit proposé.



PROB. 12. PROP. XLIV. .

Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme égal à un triangle donné, ayant un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB , le triangle donné C , & l'angle rectiligne donné D . Il faut sur AB décrire un parallelogramme égal au triangle C , & qui ait un angle égal au donné D . Soit prolongée la ligne donnée AB jusques en E , tellement



que AE soit égale à quelconque des costez du triangle C , & soit achevé de construire par la 22. proposition, le triangle AFE , ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C , lequel luy sera aussi égal par le Corol. de la huitième.

propof. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallélogr. AGFH, égal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH égal au donné D : & après avoir continué la ligne FH jusque en I, tellement que HI soit égale à AB, soit menée IA jusques à ce qu'elle rencontre FG prolongée en K : (ce qui doit arriver, n'étant IA parallèle à FG par la 11. com. sent.) Puis du point K, soit menée KM parallèle à GB, jusques à ce qu'elle rencontre IB tirée en M : & finalement soit prolongée HA jusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Je dis que le parallélogramme ABML est le requis.

Car il est constitué sur la ligne droite donnée AB, & à l'angle BAL égal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il est égal à l'angle GAH, qui a été fait égal à l'angle D : Finalement il est égal au triangle donné C, puis que par la 43. propof. il est égal au parallélogramme AHFG, lequel a été fait égal au triangle AFE, ou C. nous avons donc décrit sur la ligne donnée AB un parallélogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

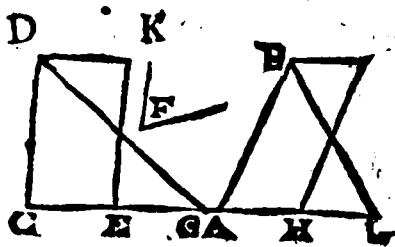
Nous avons enseigné la pratique de ce Probl. en nos Mémoires Mathématiques Probl. 15. de la Geometrie pratique, & ne differe de la construction cy-dessus. C'est pourquoy nous n'en dirons autre chose, mais nous ajouterons icy la converse de cette propof. laquelle est telle.

Sur une ligne droite donnée, construire un triangle égal à un parallélogramme donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle il faut décrire un triangle égal au parallélogramme CDKE, & qui ait un angle égal à l'angle donné F.

Soit prolongée CE, jusques en G, tellement que CE, EG soient égales, & soit menée DG, qui fera le triangle CDG : En après, par la précédente prop. soit construit sur AB le parallélogramme BH égal au triangle CDG,

ayant l'angle BAH égal au donné F : puis soit prolongée AH jusques en L, de sorte que HL soit égale à AH, & ayant tiré BL, le triangle ABL, sera le requis. Car



par le corol. de la 42. prop. iceluy triangle ABL est egal au parallelogramme BH . Mais iceluy parallelog. est egal par la construction au triangle DGG , lequel est egal au parallelog. CK par le même corol. Donc le triangle ABL sera aussi egal a iceluy parallelogramme CK : mais il a l'angle A egal au donné F , & est fait sur la ligne donnée AB parquoy appert être fait ce qui étoit proposé.

PROBL. 13.

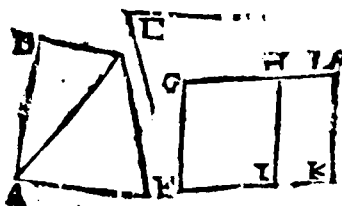
PROP. XLV.

Faire un parallelogramme egal à une figure rectiligne donnée, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée $ABCD$, & l'angle donné E : Et il faut faire un parallelogramme egal à icelle figure rectiligne $ABCD$, qui ait un angle egal au donné E .

Soit résolu de la figure recti-

ligne donnée en triangles, sçavoir est menant la ligne droite AC : puis par la 42. propof. soit fait le parallelogramme $FGHI$ egal au triangle ADC , ayant l'angle F egal à l'angle donné



E . Item sur HI soit fait le pa-

rallelogramme $HIKL$, egal au triangle ABC , ayant un angle HIK egal au donné E , & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes FH & IL , sont construits egaux à la figure rectiligne $ABCD$, & ont chacun un angle egal à l'angle donné E & ces deux parallelogrammes ensemble en font un seul. Car d'autant que chacun des angles GFI , HIK , est egal à l'angle donné E , ils le seront aussi entr'eux : auxquels si on ajoute l'angle commun FIH , les deux angles GFI , HIF , qui sont egaux à deux droits par la 29. prop. estant FH parallelogramme ; seront egaux aux deux angles HIK , HIF , lesquels partant seront egaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes FI , KI , se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI , HIK estans egaux par la 34. prop. car ils sont opposez à angles egaux GFI , HIK , si à iceux on ajoute l'angle commun IHL ; par le même discours que cy

dessus les deux lignes GH & IH se rencontreront directement ainsi FK & GL étant lignes droites. & conjoignant de même part les égales & parallèles FG & KL, elles feront aussi égales & parallèles par la 33. prop. & partant FGK sera parallélogramme; lequel nous avons construit égal à la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle F égal au donné E, ainsi qu'il étoit requis.

S C H O L I E.

S'il y eust eu davantage de triangles en la figure donnée, il eust fallu construire sur KL un troisième parallélogramme égal au troisième triangle: puis sur le côté opposé à KL, un autre parallélogramme égal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle jusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera toujours la même que dessus, répétée autant de fois qu'il sera de besoin. Or comme on décrira sur une ligne droite donnée un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné, il est assez manifeste par les choses cy-dessus dites: car pour exemple, si la ligne droite FG eust été donnée, nous eussions par la précédente prop. décrit sur icelle le parallélogramme FGH I; puis sur la même ligne FG, ou plutôt sur une égale à icelle HI, le parallélogramme HIKL, & ainsi consecutivement s'il y avoit d'avantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

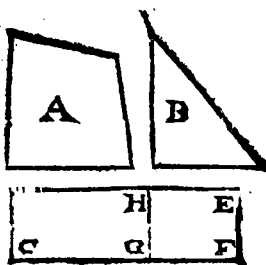
Pelletier a ajouté en ce lieu un Probleme fort utile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus brièvement qu'il n'a fait.

Estans données deux figures rectilignes inégales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre.

Soient données deux figures rectilignes A & B, dont A est la plus grande: il faut trouver l'excez de A par dessus B. Par la 45. prop. soit fait le parallélogramme CDEF égal au rectiligne A, ayant quelconque angle C: puis sur la ligne CD soit fait le parallélogramme CDHG égal au rectiligne B; ayant l'angle C commun, & le pa-

Paralelogramme $GHEF$ sera l'excès du rectiligne A par dessus le rectiligne B .

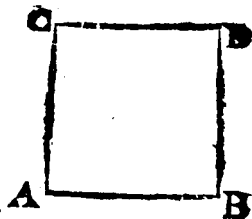
Car d'autant qu'iceluy paralelogramme GE est l'excès du paralelogramme CE egal à A , par dessus le paralelogramme CH egal à B ; le même paralelogramme GE sera aussi l'excès du rectiligne A par dessus le rectiligne B . Ce qu'il falloit faire.



PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur une ligne droite donnée, décrire un quarré.

Soit la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut décrire un quarré. Du point A , soit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle soit faite egale à icelle AB , & apres avoir mené CD parallele à AB , & AD parallele à AC , par la 31. prop. Je dis que le quadrilatere $ABDC$ est un quarré.



Car d'autant que par la construction il est paralelogramme, les costez & les angles opposez sont egaux par la 34. propos. partant le costé AB est egal à CD , & AC à BD : mais AC étant egal à AB par la construction; il est evident que les quatre costez sont egaux entr'eux. Item l'angle A étant droit par la construction, aussi son opposé D sera droit. Et la ligne AC tombant sur deux lignes paralleles AB, CD , les deux angles interieurs A & C , sont egaux à deux droits par la 29. prop. Mais l'angle A est droit: donc l'angle C sera aussi droit: partant aussi droit son opposé B . Ainsi les quatre angles A, B, C, D seront droits: & par la def. du quarré la figure $ABDC$ sera quarrée. Nous avons donc décrit un quarré sur la ligne droite donnée AB . Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de cette proposi-
tion, nostre Geometrie pratique Probl. 12. laquelle ne diffé-
re de la construction cy-dessus : car ayant mené
perpendiculaire AC , & icelle fait égale à AB , du mê-
me intervalle AB soient décrits des centres C & B , deux
arcs qui s'entrecoüpent en D , duquel étant tirées les
lignes CD , BD , sera fait le quarré requis.

Proclus demontre i. y : Que les quarrés de lignes égales
sont égaux entr'eux : & que des quarrés égaux les lignes sont
égales. Ce qui est aisé à prouver par la superposition
d'un quarré sur l'autre : Car les lignes étant égales, si
l'une est posée dessus l'autre, elles conviendront entr'el-
les ; & les angles étant aussi égaux, c'est à sçavoir droits,
ils conviendront pareillement entr'eux ; & partant tout
le quarré conviendra à tout le quarré. Que si les quarrés
sont égaux, ils conviendront entr'eux, à cause de l'é-
galité des angles : donc aussi les lignes ; autrement un
quarré seroit plus grand que l'autre. Nous avons laissé
la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour
suivre celle-cy qui est brève & facile.

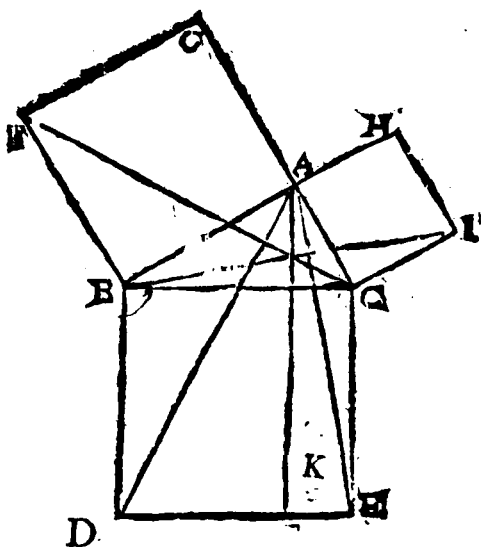
THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du côté qui
soutient l'angle droit, est égal aux quarrés
des deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC , sur les côtez duquel soient
décrits les trois quarrés $BCED$, $ABFG$, $AHIC$. Je dis que le
quarré $BCED$ décrit sur le côté BC , qui soutient l'angle
droit BAC , est égal aux deux quarrés $ABFG$ & $AHIC$, dé-
crits sur les deux autres côtez AB & AC .

Car soit menée la ligne AK parallèle à BD , ou à CE , &
tirées les lignes AD , AE , CF & BI . D'autant que par la défini-
tion du quarré, les quatre angles au point A sont droits,
les lignes droites AB , AH se rencontreront directement, &
se feront qu'une ligne droite : Item, CA , AG par la 14. prop.

Donch, puis que les angles ABF , CBD sont egaux, car ils sont droits, si on leur ajoute le commun ABC , le total ABG sera egal au total ABD . Le triangle ABD a donc les deux costez AB , BD , egaux aux deux costez FB , BC du triangle CBF , chacun au sien, & les angles ABD , CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. p. les triangles ABD , CBF seront egaux. Mais le quarré AF est double du triangle FBC par la 41. prop. car ils sont sur même base BF , & entre mêmes paralleles BF , CC : il sera donc aussi double de son egal ABD , duquel le parallelogramme BK est aussi double par la même 41. prop. & par conséquent le quarré AF sera egal au parallelogramme BK : car les choses doubles d'une même sont egales entr'elles. Par même discours on prouvera que le parallelog. CK est egal au quarré AI : partant les deux parallelogrammes ensemble BK & CK , seront egaux aux deux quarrés ensemble AF & AI . Donc le quarré BE qui est composé d'iceux parallelogrammes BK , CK , sera aussi egal aux mêmes quarrés AF , AI . Parquoy aux triangles rectangles; le quarré du costé, &c. Ce qu'il falloit prouver.



S C H O L I E.

Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'aux triangles ambliques le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarrés ensemble des deux autres costez: Et qu'en tout triangle le quarré d'un costé opposé à un angle aigu est moindre que les deux quarrés ensemble des deux autres costez. Car si l'angle obtus est resserré insques à ce qu'il vienne à

être droit, les costez, qui le comprennent demeurant les mêmes, le costé opposé usendra moindre par la 24. proposition. Mais si l'angle aigu est ouvert & élargi jusqu'à ce qu'il vienne droit, les costez, qui le comprennent demeurant les mêmes, le costé opposé à iceluy angle sera fait plus grand par la même 24. prop. veu donc qu'il a été démontré cy-dessus que le quarré du costé opposé à l'angle droit, est égal aux deux quarrés ensemble des deux autres costez; il est evident que le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que le quarré des deux quarrés ensemble des deux autres costez; & que le quarré du costé opposé à un angle aigu, est moindre que le quarré des deux quarrés ensemble des deux autres costez. Mais de combien celuy-là est plus grand, & de combien cetui-cy est moindre, Euclide le démontrera es 12. & 13. prop. du second Livre.

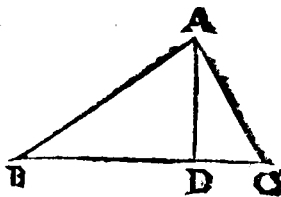
Or l'invention de ce celebre & tant renommé Theoreme est attribuée à Pythagoras, lequel en fut si content & si joyeux, que pour en rendre grace aux Dieux, plusieurs disent qu'il sacrifia un Heiatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur sacrifia qu'un bœuf; ce qui est plus vray-semblable, que non pas qu'il en ait immolé cent, veu que ce Philosophe faisoit tres-grand scrupule d'espandre le sang des animaux. Mais quoy qu'il en soit, ce Theoreme est un des plus utiles aux choses Geometriques, encore qu'il ne semble pas si admirable que la 31. prop. du sixième Livre, où Euclide demontre qu'aux triangles rectangles, la figure décrite sur le costé qui soutient l'angle droit, est égale aux deux figures semblables, décrites & semblablement posées sur les deux costez qui contiennent iceluy angle droit.

Par le moyen de cette 47. prop. il est fort aisé de démontrer cet autre Theoreme suivant.

Si de l'angle d'un triangle compris de deux costez inégaux, est tirée une perpendiculaire à la base, laquelle tombe dans le triangle; elle coupera la base en deux parties inégales, la plus grande desquelles sera vers le plus grand costé: Et au contraire, si la base est coupée inégalement par la perpendiculaire, les deux costez seront inégaux, & le plus grand sera celui adjacent au plus grand segment.

— Au triangle ABC, auquel le costé AB est plus grand que

le costé AC, soit la ligne AD perpendiculaire à la base BC, laquelle tombe dedans le triangle : ce qui advient toujours quand l'un & l'autre angle d'icelle base est aigu, ainsi qu'il est port du Cor. de la 17. prop. Je dis que la partie BD est plus grande que la partie CD. Car par la 47. prop. le quarré de AB est égal aux deux quarréz de AD, BD ; & le quarré de AC, égal aux deux de



AD, CD : Mais le quarré de AB est plus grand que celui de AC, puis que le costé AB est plus grand que le costé AC ; donc aussi les deux quarréz de AD, BD, seront plus grands que les deux quarréz de AD, DC ; par quoy ostant le commun quarré de AD, restera le quarré de BD plus grand que le quarré de CD ; & partant la ligne droite BD sera plus grande que la ligne droite CD.

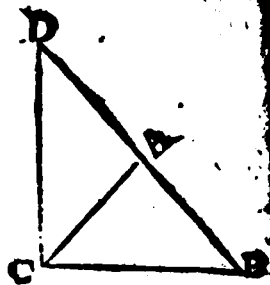
Maintenant, que la ligne perpendiculaire AD fasse le segment BD plus grand que le segment CD. Je dis que le costé AB est plus grand que le costé AC. Car le quarré de BD sera plus grand que le quarré de CD, & adjoûtant le commun quarré de AD, les deux quarréz de BD, AD, seront plus grands que les deux de CD, AD. Mais par la 47. propos. le quarré de AB est égal aux deux de BD, AD, & celui de AC égal aux deux de CD, AD. Donc aussi le quarré de AB sera plus grand que le quarré de AC, & par conséquent le costé AB sera plus grand que le costé AC. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des côtez d'un triangle, est égal aux quarréz des deux autres côtez ; l'angle soutenu d'iceluy côté est droit.

Au triangle ABC, le quarré du costé BC soit égal aux quarréz des deux autres costez BA & AC. Je dis que l'angle BAC, soutenu d'iceluy costé BC, est droit.

Car apres avoir mené AD perpendiculaire à AC, par la prop. & fait icelle AD egale à AB, soit menée CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera egal aux deux quarréz de CA & AD, lesquels sont egals aux quarréz de BA & AC, étant leurs lignes égales; par la 1. comm. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD: partant, la ligne CB egale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base BC egale à la base DC, & par la 8. prop. l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD: partant il sera aussi droit. Si donc le quarré de l'un des costez d'un triangle est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

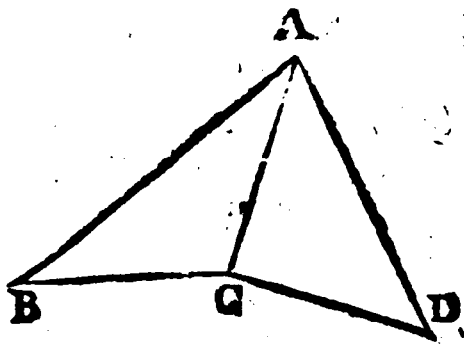


S C H O L I E.

A cette proposition, qui est converse de la precedente, nous ajouterons cet autre theoreme.

Si le quarré d'un costé de quelque triangle est plus grand que les deux quarréz ensemble des deux autres costez, l'angle soutenu d'iceluy costé est obtus: Et s'il est moindre, aigu.

Au triangle ABC, le quarré du costé AB, soit plus grand que les deux quarréz ensemble des deux autres costez AC, CB: Je dis que l'angle ACB opposé au costé AB est obtus. Car soit tiré de C perpendiculairement à AC, la ligne droite CD egale à BC, & soit joint AD. D'autant que par la 47. prop. le quarré de AD est egal aux deux quarréz de AC, CD, c'est à dire AC, CB, & le quarré de AB a

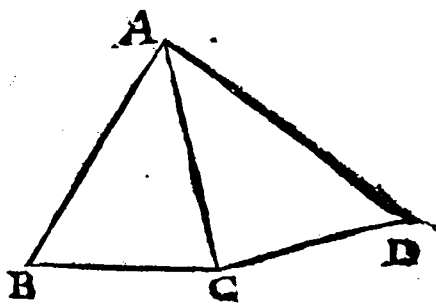


esté

est posé plus grand que les quarréz de AC, CB, le quarré de AD, sera moindre que le quarré de AB ; & partant la ligne AD moindre que ladite ligne AB. Parquoy venant que les costez BC, AC, du triangle ABC, sont égaux aux costez CD, AC, du triangle ACD, un chacun au sien, & la base AB plus grande que la base AD, par la 25. prop. l'angle ACB sera plus grand que l'angle ACD : Mais iceluy ACD est droit. Donc ACB est plus grand qu'un droit ; & partant obtus. Ce qui est proposé.

Maintenant, soit le quarré de AB moindre que les deux quarréz des deux autres costez AC, CB : Je dis que l'angle A CB soit obtus.

Car ayant fait comme auparavant le triangle rectangle ACD, on prouvera par les mêmes raisons que dessus, que la base AD est plus grande que la



base AB, & l'angle droit ACD plus grand que l'angle ACB, qui partant est aigu. Ce qui est proposé.

Or d'autant que l'application des nombres aux costez des triangles rectangles est utile à plusieurs operations, nous remarquerons icy que tout triangle est rectangle, duquel le plus grand côté contenant 5 parties égales, le moindre contient trois des mêmes parties, & l'autre 4 : ou bien selon trois autres nombres, doubles, ou triples ou quadruples, &c. des trois susdits 5, 4, 3, comme 10, 8 & 6 : ou 15, 12 & 9 ; ou 20, 16 & 13 ; ou 50, 40, & 30 ; &c. Car il apert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, est toujours égal aux quarréz des deux autres nombres.

Mais si sans avoir egard aux nombres cy-dessus, on vouloit faire un triangle rectangle, ayant tous les trois costez en nombre de parties égales sans fraction, on pourroit trouver lesdits nombres en deux manieres ; dont la premiere qu'on attribue aussi à Pythagoras, est telle. Soit pris pour le moindre côté un nombre de parties impair, & iceluy nombre étant quarré soit ôtée l'uni-

sera le moyen nombre, auquel adjoustant l'unité viendra le plus grand nombre : Comme par exemple, prenant 5 pour le nombre des parties du moindre côté, son quarré est 25, duquel ôtant l'unité restent 24, dont la moitié est 12, pour le nombre des parties du moyen côté, mais adjoustant l'unité à iceluy, viendront 13 pour le nombre des parties du plus grand côté.

La deuxième maniere est attribuée à Platon, & est telle : Soit pris un nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy soit ôtée l'unité, & restera l'un des deux autres nombres ; mais adjoustant ladite unité au même quarré, viendra le troisième nombre : comme par exemple, prenant 6 pour l'un des nombres, le quarré de la moitié d'iceluy est 9, dont l'unité étant ôtée, restent 8, pour l'un des deux autres nombres ; mais adjoustant ladite unité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troisième nombre.

Fin du premier Element.



ELEMENT SECOND.

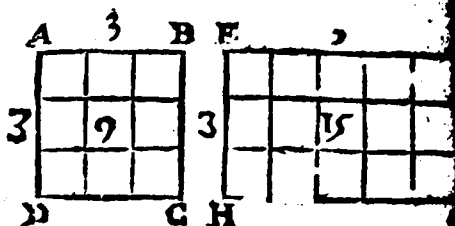
DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, est dit être contenu sous deux lignes droites qui font l'angle droit.



L a été dit en la 36. def. 1. que c'est que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre sortes : mais maintenant il faut entendre qu'un parallelogramme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droits, & par consequent il y a seulement le quarré, comme $ABCD$, & le quarré long, comme $EFGH$, qui soient rectangles : car il n'y a que ces deux sortes de parallelogrammes qui ayent les angles droits. Et est à noter, qu'en tout parallelogramme si un seul angle est donné droit, il est nécessaire que les trois autres soient aussi droits : comme par exemple, si l'angle E du parallelogramme $EFGH$ est droit. Je dis que les trois autres F, G, H , sont aussi droits. Car d'autant que les lignes EF, GH sont paral-

leles, les angles internes E & H , sont égaux à deux droits par la 29. p. 1. Mais l'angle E est droit par l'hypothèse, donc aussi l'angle H sera droit : & par la 34. p. 1. les opposés G & F seront aussi droits. Et puis que par la 34. p. 1. tout parallélogramme a les côtés opposés égaux, il n'y peut avoir en un parallélogramme que deux côtés inégaux, lesquels constituent



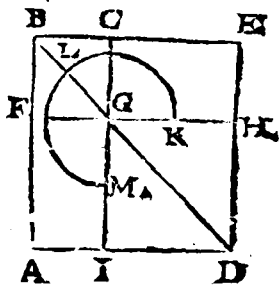
chaque angle d'iceluy : C'est pourquoy Euclide dit icy, tout parallélogramme rectangle être contenu sous deux lignes droites, qui comprennent un angle droit ; tellement que le parallélogramme rectangle $EFGH$ sera dit être contenu sous les deux lignes droites EF, EH : ou sous les deux EF, FG : ou sous FG, GH : ou finalement sous GH, HE : ainsi de x lignes exprimant toute la magnitude ou grandeur d'un parallélogramme rectangle : sçavoir l'une comme EF , ou HG , sa longueur : & l'autre comme EH , ou FG , sa largeur : & par le mouvement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait iceluy parallélogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF , en allant en bas au long de la ligne EH , se meuve en travers, tellement qu'elle fasse toujours angle droit avec icelle EH , jusques à ce que le point E parvienne au point H & le point F au point G , sera décrit tout le parallélogramme rectangle $EFGH$. Le même sera fait, si on prise EH se mouvra en travers, selon la ligne EF . D'où advient que pour obtenir l'aire ou contenu de tout parallélogramme rectangle on multiplie un côté d'iceluy par l'autre : comme par exemple, le côté EF étant de cinq pieds, & l'autre côté EH de trois : si on multiplie un nombre par l'autre, seront produits quinze pieds quarrés, pour l'aire ou contenu de tout le parallélogramme $EFGH$. Pareillement au parallélogramme rectangle $ABCD$, le côté AB étant de trois pieds, & le côté AD aussi de trois pieds : multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrés pour l'aire d'iceluy rectangle, comme montre la figure cy-dessus.

Or est icy à noter, qu'en ce second Livre, & és autres suivans, Euclide appelle les parallélogrammes rectangles,

simplement rectangles; ce qu'observent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut tous-jours entendre parallélogr. rectangl. • De rechef, que pour brièveté, & afin de ne repeter souventes fois toutes les lettres apposées aux parallélogrammes, les Geometres ont de coutume d'exprimer chaque parallélogramme soit rectangle ou non par deux lettres seulement, (sçavoir celles qui sont diametralement opposées; tellement que pour denoter le parallélogramme ABCD, on dira seulement le parallélogramme AC ou BD.

2. En tout parallélogramme; l'un des parallélogrammes décrits à l'entour du diametre, avec les deux supplémens, est appelé Gnomon.

Au parallélogramme ABED, soit menée la diagonale BD; & CGI parallèle à AB coupant icelle diagonale en G, & par iceluy point G soit menée FGH parallèle à AD: & le parallélogramme ABED sera divisé en quatre parallélogrammes, deux desquels FC & HI, sont dits être décrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les deux autres EG, AG, sont appelez supplémens, ainsi que nous avons dit à la 37. des. du premier Livre. Or la figure composée d'iceux supplémens & de l'un ou l'autre des parallélogrammes d'alentour la diagonale, se a dit Gnomon: comme la figure CEDAFG, laquelle est composée des deux supplémens AG, GE, & du parallélogramme HI, qui est alentour du diametre; sera appelée Gnomon. Pour mē ne raison la figure ABEHGI, qui est composée de deux supplémens IF, GE, & du parallélog. FC, qui est alentour le diametre, sera aussi dit Gnomon. Et à noter que pour brièvement exprimer telles figures, les Geometres y décrivent quelquesfois une circonférence, comme le Gnomon susdit ABEHGI, auquel est décrite la circonférence KLM, sera exprimé & denoté par icelle circonférence KLM.

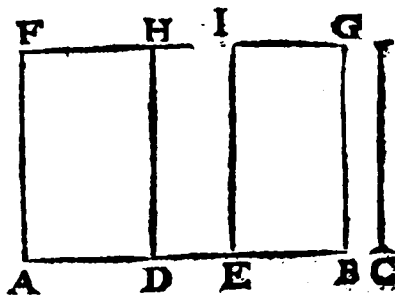


THEOR. 1. PROP. 1.

Si de deux lignes droites l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu sous les deux routes, est égal aux rectangles compris de la non coupée, & d'une chacune partie de celle qui est coupée.

Soient deux lignes droites AB & C , dont la première AB est coupée à l'aventure en plusieurs parties, sçavoir est en AD , DE , EB . Je dis que le rectangle compris d'icelles deux lignes AB & C , sera égal aux trois rectangles compris de la ligne non coupée, & d'une chacune partie de la coupée AB .

Qu'il ne soit ainsi: qu'on mène AF perpendiculaire à AB , par la 11. p. 1. laquelle soit faite égale à C , & du point F soit menée FG parallèle à AB ; & BG parallèle à AF par la 31. prop. 1. Il est évident que le quadrilatère $AFGB$, sera un parallélog. rectangle, & qu'iceluy sera compris de deux lignes données AB & C , puis que AF est égale à C . Item soient menées les deux lignes DH & EI parallèles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des parallélog. les trois quadrilatères AH , DI , EG , seront parallélogrammes rectangles compris des lignes égales AF , DH , EI , & des trois segmens AD , DE , EB , c'est à dire de la ligne C & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallélogrammes rectangles ensemble, conviennent au rectangle AG , compris des lignes données; & par la 8. com. sent. ils luy sont égaux. Parquoy si de deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit prouver.



SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de ce second livre, nous l'avons appliqué

& démontré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neanmoins j'estime qu'il ne sera inutile de les expliquer dès icy par nombres, comme a fait Clavius: Car d'autant que ce qui provient de la multiplication d'un nombre par un autre répond au produit d'une ligne en une autre, on peut facilement & brièvement montrer par nombres ce qui est icy démontré en lignes avec beaucoup de paroles.

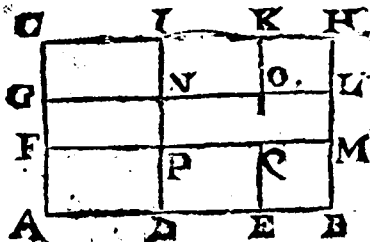
Soient donc proposez deux nombres, comme 10 & 6, le premier desquels soit divisé en trois autres nombres ou parties, 5, 3 & 2. Or multipliant les deux nombres proposez entr'eux, c'est à sçavoir 10 & 6, sera produit le nombre 60, auquel sera égale la somme de ces trois nombres 30, 18 & 12, lesquels sont procréés multipliant chaque partie du nombre divisé 10, c'est à sçavoir 5, 3, 2, par le nombre non divisé 6: ainsi qu'il appert en l'opération cy-dessous:

				30
10	5	3	2	18
6	6	6	6	12
60	30	18	12	60

Or Commandin demontre icy deux autres Theoremes, dont le premier est tel.

S'il y a deux lignes droites, l'une & l'autre desquelles soit coupée en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est égal aux rectangles contenus de chaque segment de l'une, & d'un chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, AC, contenant un angle droit A, & AB soit coupée es points D & E, mais AC es points F & G. Je dis que le rectangle contenu sous AB, AC, est égal aux rectangles compris de chaque partie AD, DE, EB, & d'un chacun segment AF, FG, GC, c'est à dire égal aux rectangles contenus de

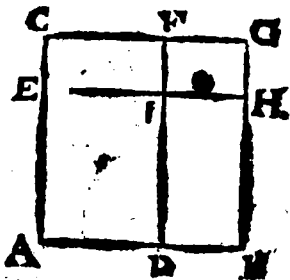


AD, AF; AD, FG; AD, GG: DE, AF; DE, FG, DE, GC: E
 AF, EB, FG; EB, GC. Car étant accompli le rectangle AB
 soient tirées DI, EK parallèles à AC: Item FM, GL para-
 leles à AB, qui couperont les premières es points P, Q, N, O
 Veu donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF: &
 NF sous AD, FG: & GI sous AD, GC, (pource que par la
 34. prop. 1. les lignes FP, GN sont égales à icelle AD.) Item
 que les rectangles DQ, PO, NK, sont contenus sous DE,
 AF: DE, FG: DE, GC: (car DP, PN, NI sont égales à
 icelles EF, FG, GC: & PQ, NO, à icelle DE, par la 34.
 prop. 1.) Et par la même raison les rectangles EM, QL, OH,
 sont compris sous EB, AF: EB, FG: EB, GC. Il est évident
 que le rectangle contenu sous AB, AC, est égal aux rec-
 tangles compris sous chacune des parties AD, DE, EB,
 & un chacun des segments AF, FG, GC: ce qui étoit
 proposé.

Nous rendrons aussi manifeste ce Theoreme par nom-
 bres: & pource soient deux nombres 12 & 8, le premier
 desquels soit divisé en trois parties 6, 4 & 2: mais le
 dernier soit seulement divisé en deux parties 5 & 3. Or
 le produit de ces deux nombres proposez multipliez en-
 tr'eux est 96, auquel est manifestement égale la somme de
 ces six nombres, 30, 20, 10, 18, 12 & 6, lesquels sont pro-
 duits par la multiplication de chacune des parties 6, 4,
 2, en chacune des parties 5 & 3, comme vouloit Commar-
 din en ce premier Theor. Quand au second il est tel qu'il
 ensuit.

S'il y a deux lignes droites coupées comme on voudra, le re-
 ctangle compris sous icelles, avec celui compris sous une partie
 de l'une d'icelles lignes, & une partie de l'autre, est égal aux re-
 ctangles contenus sous les lignes totales, & les susdites parties
 reciproquemēt, avec le rectangle cōteru des deux autres parties.

Soyent deux lignes droites AB, AC,
 faisant l'angle droit A, lesquelles
 soient coupées comme on voudra en
 D & E. Je dis que le rectangle com-
 pris sous AB, AC, avec celui compris
 sous les parties AD, EC, est égal
 aux rectangles contenus sous AB,
 EC: AC, AD: DB, AE. Car ayant
 accompli le rectangle AG, soit me-



nde DF parallèle à AC ; & EH à AB , s'entrecoupans en I .
 Ven donc que le rectangle AG est égal aux rectangles
 EG , AI , DH : si on leur ajoute le commun rectangle EF :
 les rectangles AG , EF , qui sont compris sous les routes
 AB , AC , & les parties AD , EC , seront égaux aux re-
 ctangles EG , AF , DH , compris sous AB , EC : AC , AD :
 DB , AE : ce qui étoit proposé.

Afin que ce theor. de Commandin soit aussi manifeste
 par nombres, fassent proposer deux quelconques nombres
 9 & 5 , le premier desquels soit divisé en deux parties 5
 & 4 : mais l'autre soit divisé en 3 & 2 : Or le produit
 de ces deux nombres proposez est 45 , & celui de la par-
 tie 5 , multipliée par la partie 3 est 15 ; & la somme de
 ces deux produits est 60 , auquel nombre est manifeste-
 ment égale la somme & addition de ces trois nombres
 27 , 25 & 8 , qui sont produits de 9 par 3 , de 5 par 5 , &
 de l'autre partie 4 par l'autre partie 2 .

COROLLAIRE.

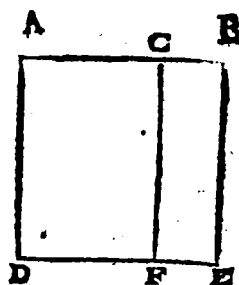
Parce que dessus est manifeste que s'il y a deux li-
 gnes droites, l'une & l'autre desquelles soit coupée
 comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera
 égal au rectangle compris sous une totale, & un seg-
 ment de l'autre, & aux deux rectangles contenus de
 l'autre segment de cette - cy, & d'un chacun seg-
 ment de celle-là. Car le rectangle AG , qui est compris
 des deux routes AB , AC , est égal au rectangle EG ,
 contenu de la route EH , c'est à dire AB , & du seg-
 ment EC , & aux deux rectangles AI , DH , compris de
 l'autre segment AE , & des segmens AD , DE . Iceluy
 rectangle AG est aussi égal aux trois rectangles AH , EF ,
 IG . Pareillement aux trois AF , DH , IG , comme aussi aux
 trois autres DG , AI , EF .

Le même se doit aussi entendre des nombres: car il
 est évident que les deux nombres cy-dessus proposez,
 c'est assavoir 9 & 5 , estans multipliez entr'eux pro-
 duisent 45 , auquel sont égaux ces trois nombres 27 , 10
 & 8 , produits de la multiplication de 9 par la partie 3 :
 & de la partie 2 par chacune des parties 5 , 4 . Et ainsi de
 toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra, les rectangles compris de la toute & d'une chacune partie, sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droite AB , coupée en deux parties telles qu'on voudra au point C . Je dis que le rectangle de la toute AB , & de la partie AC , avec le rectangle de la toute AB , & de l'autre partie CB , sont ensemble egaux au quarré de la toute AB .



Qu'ainsi ne soit ; Sur AB soit décrit le quarré AE , puis de C soit menée CF parallèle à AD , laquelle CF sera égale à icelle AD , c'est à dire à AB : car icelles AD, AB sont égales par la def. du quarré. Il est donc evident que les deux rectangles AF & CE , sont compris de la toute AB , ou son égale CF , & des deux parties AC & CB , & si ils conviennent avec le quarré AE , & par conséquent luy sont egaux. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Clavius demontre encore ce Theoreme ainsi. Soit prise une ligne droite D égale à AB : Or puis que AB est coupée en C , le rectangle contenu sous la non coupée D , & la coupée AB (qui est le quarré de la toute

AB) sera égal aux deux rectangles compris sous la non coupée D (c'est à dire sous AB) & un chacun des segments AC, CB par la prec. prop. Ce qui étoit proposé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 divisé en deux nombres 7 & 5 : il est evident qu'au quarré d'iceluy nombre, qui est 144, sont egaux

Les deux nombres 84 & 60, qui sont produits du même nombre 12 multiplié par chacune des parties 7 & 5 : car ils sont aussi 144. comme montre l'addition d'iceux.

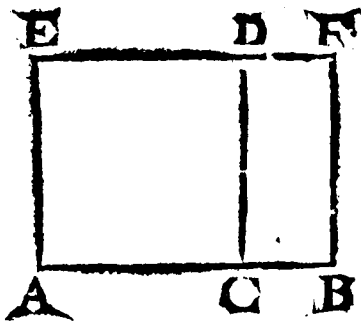
Or encore qu'en ce second Theoreme Euclide propose d'une ligne divisée en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la même maniere sera démontré le même, si la ligne est divisée en tant de parties qu'on voudra. Ce qui se peut aussi voir par nombres, ainsi qu'il ensuit. Soit le nombre 12 divisé en trois parties 5, 4 & 3. Le quarré dudit nombre 12 sera 144 ; auquel sont egaux ces trois nombres 60, 48 & 36, lesquels sont produits d'iceluy nombre proposé 12, multiplié par chacune des parties 5, 4 & 3.

Sera aussi démontré comme dessus, que si une ligne droite est coupée en tant de parties qu'on voudra ; le quarré de la toute est égal aux rectangles contenus sous chaque segmens & un chacun segment. Ce que nous rendrons aussi manifeste par nombres : & pour ce soit le nombre 10 divisé en trois parties 5, 3 & 2 : Il est evident que le quarré du nombre total 10 est 100, & qu'à iceluy sont egaux ces neuf nombres 25, 15, 10, 15, 9, 6, 10, 6 & 4. lesquels sont produits par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.

THEOR. 3. PROP. III.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra ; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est égal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement prise.

Soit la ligne droite AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'une ou l'autre partie, comme AC, est égal au rectangle compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle avoit esté premierement prise.



Qu'il ne soit ainsi : Sur la partie AC soit fait le quarré AD par la 46. pr. 1. puis soit menée BF parallele à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongée en F. Il est donc évident que AD est le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle de parties AC & CB ; (car CD est egale à AC par la définition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC, sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF ensemble, conviennent avec le rectangle AF & par conséquent egaux à iceluy. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Clavius demontre encore ce Theor. ainsi. Soit prise la ligne droite D egale a la partie AC. D'au ant que la ligne droite AB est divisée en C, par la 1. pr. de ce livre, le rectangle contenu sous D & AB (c'est à dire sous AC & AB) sera  egal au rectangle compris sous D & CB (c'est à dire sous AC, CB) & au rectangle contenu sous D & BC, c'est à dire au quarré de la partie AC. Ce qui est proposé.

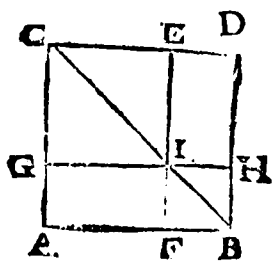
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit quelconque nombre 12 divisé en deux parties telles qu'on voudra 7 & 5. Or multipliant ledit nombre proposé 12 par sa partie 7, viendront 84, auquel produit sont egaux ces deux nombres 35 & 49, lesquels sont produits de 7 multipliez par 5, & de 7 par soy même. Mais multipliant le même nombre 12 par l'autre partie 5, sera produit le nombre 60, auquel sont aussi egaux ces deux nombres 35 & 25, qui sont les produits des deux parties 7 & 5, multipliées entr'elles, & de la partie 5 en soy même : Et partant apert ce qui a esté proposé.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra; le quarré de la route est egal aux deux quarréz des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB , coupée comme on voudra au point F . Je dis que les deux quarréz décrits sur les parties AF & FB , avec deux fois le rectangle d'icelle AF & FB sont ensemble egaux au quarré de la totale AB .

Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit décrit le quarré AD ; & apres avoir mené la diagonale BC ; du point F , soit mené la ligne droite FE parallèle à AC coupant la diagonale BC en I , & de-



rechef par iceluy point I soit menée GH parallèle à AB , le tout par la 31. prop. 1. Je dis premierement que les quadrilateres HF & EG sont quarréz.

Car déjà il appert qu'ils sont parallelogrammes, étans décrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscelle: & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base BC , sçavoir est ABC & ACB seront egaux. Pareiliement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle extérieur FIB egal à l'opposé intérieur ACB par la 29. prop. 1. lequel estant egal à ABC par la 1. com. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez BF & FI seront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HF aura les quatre costez egaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBI estant droit les trois autres seront aussi droits, comme nous avons démontré à la 1. def. de ce livre. Par mesme discours on montrera GE estre aussi quarré. Maintenant, d'autant que AI & ID sont décrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droits, il appert qu'ils sont parallelogrammes rectangles,

deux quelconques nombres 10 & 5, dont le premier double de l'autre. Il apert que 100, quarré du premier nombre 10, est quadruple de 25, quarré du dernier nombre 5.

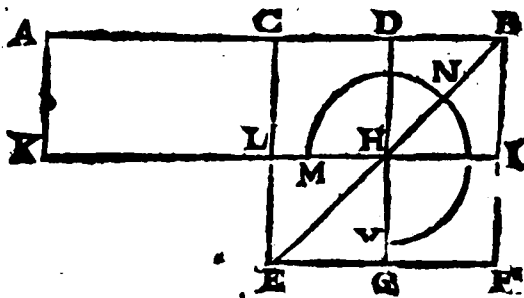
THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales; le rectangle contenu d'icelles parties inégales avec le quarré de la partie du milieu, sont égaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux parties égales au point C, & en deux inégales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inégales AD & BD, avec le quarré de la partie du milieu CD, sont égaux au quarré de la moitié CB.

Car sur la ligne CB soit décrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres avoir mené DG parallèle à BF soit menée la diagonale BE coupant DG au point H, par lequel soit menée interminément IK parallèle à AB, coupant CE en L : puis du point A,

soit aussi menée AK parallèle à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. pr. DI, LG seront quarrés; & partant la li-



gne DH sera égale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH est aussi égale à CD: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens AD, DB; & IG sera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouver que le rectangle AH, avec le quarré GL, est égal au quarré CF, fait sur la ligne CB moitié de la route AB.

Or le rectangle AL est égal au rectangle CI par la 36. pr. 1. d'autant

Autant qu'ils sont sur bases egales AC & CB, & entre mêmes paralleles AB & KI. Pareillement les suppléments CH & HF sont egaux par la 43. prop. 1. auxquels si on ajoûte le carré commun DI, les tous CI & DF seront egaux : & par la 1. com. sent. DF sera egal à AL, auxquels si on ajoûte aussi le supplément commun CH, le Gnomon MNX sera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le carré GL, conviennent avec le carré CF, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Donc aussi le rectangle AH, & le carré GL seront egaux au carré CF par la 1. com. sent. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il faisoit demontrer.

S C H O L I E.

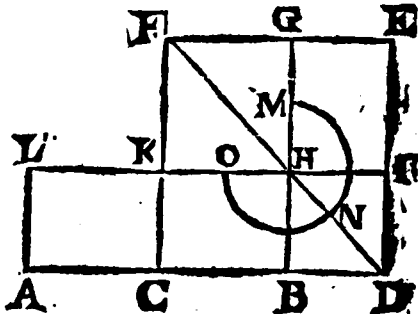
Nous ajoûterons tant en ce Theor. qu'aux 5. suivans les demonstrations qu'en a fait le docte Maurolycus. D'autant que par la 4. p. 2. le carré de CB est egal aux carrés de CD & DB, avec deux fois le rectangle d'icelles ; & que par la 3. p. 2. le rectangle de CB, DB est egal au rectangle de CD, DB, avec le carré de DB : le carré de CD sera egal à l'autre carré de CD, avec le rectangle de CB, DB, & celui de CB, DB, ou de AC, DB. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des routes AD, DB, est egal aux rectangles de DB, AC, & de DB, CD. Donc le carré de CB sera egal au carré de CD, avec le rectangle de AD, DB. Ce qui étoit proposé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux parties egales 6 & 6; Et aussi en deux parties inegales 8 & 4; & par ainsi la plus grande partie de 8 excède la moitié 6 du nombre 2, qui est la partie du milieu. Il est evident que 32, nombre produit des deux nombres inegaux 8 & 4, avec 4 qui est le carré de 2, est egal à 36, qui est le carré de 6, moitié du nombre proposé.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on luy ajoûte directement quelque autre ligne droite : le rectangle de toute & de l'ajoûtée comme d'une, & de l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié, est égal au quarré qui est fait de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux également au point C, & à icelle AB soit ajoûtée directement la ligne BD. Je dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'ajoûtée BD, avec le quarré de la moitié CB, est égal au quarré de la ligne CD, laquelle est composée de la moitié CB, & de l'ajoûtée BD.

Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit décrit le quarré CE, & tiré sa diagonale DE ; & apres avoir du point B, mené BG parallèle à DE, laquelle coupe la diagonale au point H ; par iceluy point H soit menée interminément IKL parallèle à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallèle à DI, rencontrant IL en I.

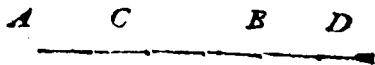


Premierement le rectangle AI est compris de la route & ajoûtée comme d'une AD, & de l'ajoûtée DI (car icelle DI est égale à l'ajoûtée BD étant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce livre.) Item KG, qui est quarré par le mesme Cor. est fait sur HK égale à la moitié CB par la 34. prop. Je dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG sont ensemble égaux au quarré CE. Car les deux suplemens CH & HE estans égaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles AK & CH aussi égaux par la 26. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur bases égales, & entre mesme parallèles : & par la 1. com. sent. AK sera égal à HE, & en ajoûtant à chacun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO sera égal au rectangle AI. Mais iceluy

Enommon avec le quarré GK, sont egaux au quarré CE : donc le rectangle AI avec le quarré KG sera egal au meisme quarré CE. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties egales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de CD est egal aux deux quarez de CB, BD avec deux fois la rectangle d'icelles CB : BD; & que par la 1. pr. 2. le rectangle des routes AD, BD est egal aux trois rectangles de DB, AC; DB, CB; & DB, DB, (qui est le quarré de DB) le quarré de CD sera egal à l'autre quarré CB avec le rectangle de AD, BD. Ce qu'il falloit demontrer.



Pour apliquer ce Theor. aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux nombres egaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 soit ajouté 3. Il est evident que le nombre 45 produit de tout le nombre composé 15 multiplié par l'ajouté 3, avec 36 quarré de la moitié 6. font 81, tout ainsi que le quarré de 9, composé de ladite moitié 6, & de l'ajouté 3.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra; le quarré de la route, & le quarré de l'une des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.

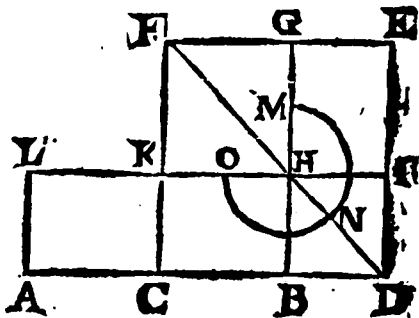
Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit décrit le quarré AD avec sa diagonale BC : & apres avoir mené du point F, la ligne FE paralele à AC, laquelle coupe la diagonale BC au point I;

S E C O N D
THEOR. 6. PROP. VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on luy ajoûte directement quelque autre ligne droite : le rectangle de toute & de l'ajoûtée comme d'une, & de l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié, est égal au quarré qui est fait de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux également au point C, & à icelle AB soit ajoûtée directement la ligne BD. Je dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'ajoûtée BD, avec le quarré de la moitié CB, est égal au quarré de la ligne CD, laquelle est composée de la moitié CB, & de l'ajoûtée BD.

Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit décrit le quarré CE, & tiré sa diagonale DE ; & apres avoir du point B, mené BG parallèle à DE, laquelle coupe la diagonale au point H ; par iceluy point H soit menée interminément IKL parallèle à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallèle à DI, rencontrant IL en I.

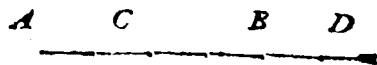


Premierement le rectangle AI est compris de la toute & ajoûtée comme d'une AD, & de l'ajoûtée DI (car icelle DI est égale à l'ajoûtée BD estant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce livre.) Item KG, qui est quarré par le mesme Cor. est fait sur HK égale à la moitié CB par la 34. prop. Je dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG sont ensemble égaux au quarré CE. Car les deux suplemens CH & HE estans égaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles AK & CH aussi égaux par la 26. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur bases égales, & entre mesme parallèles : & par la 1. com. sent. AK sera égal à HE, & en a'outant à chacun d'eux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO sera égal au rectangle AI. Mais iceluy

Guédon avec le quarré GK, sont égaux au quarré CE : donc le rectangle AI avec le quarré KG sera égal au même quarré CE. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de CD est égal aux deux quarrés de CB, BD avec deux fois le rectangle d'icelles CB : BD; & que par la 1. pr. 2. le rectangle des routes AD, BD est égal aux trois rectangles de DB, AC; DB, CB; & DB, DB, (qui est le quarré de DB) le quarré de CD sera égal à l'autre quarré CB avec le rectangle de AD, BD. Ce qu'il falloit démontrer.



Pour appliquer ce Theor. aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux nombres égaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 soit ajouté 3. Il est évident que le nombre 45 produit de tout le nombre composé 15 multiplié par l'ajouté 3, avec 36 quarré de la moitié 6. font 81, tout ainsi que le quarré de 9, composé de ladite moitié 6, & de l'ajouté 3.

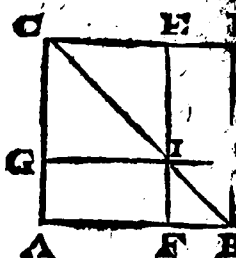
THEOR. 7. PROP. VII.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra; le quarré de la route, & le quarré de l'une des parties, sont égaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, sont égaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.

Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit décrit le quarré AD avec sa diagonale BC : & apres avoir mené du point F, la ligne FE paralele à AC, laquelle coupe la diagonale BC au point I.

d'iceluy point soit menée GH parallèle à AB par la 12. pr. 1. Donc FH & GE seront quarréz par le Cor. de la 4. prop. de ce liv. & puis que par la 34. pr. 1. GI est égale à AF; GE sera quarré du segm. AF. Derochefpource que AC est égale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB & le segm. AF. Par même raison le rectangle GD sera compris sous les mêmes lignes AB & AF: (car CD, CG sont égales à AB, AF, à cause des quarréz AD, GE.) Vû donc que les rectangles AE & ID, avec le quarré FH sont égaux au quarré AD: si on leur ajoute commun quarré EG, les quarréz AD, EG seront égaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie AF) avec le quarré FH. Parquoy si une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB est égal aux deux quarréz de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; si on ajoute le quarré commun de AF, les quarréz de AB, AF seront égaux aux trois quarréz de AF, AF, FB, avec deux fois le rectangle de AF, FB. Mais par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF est égal au rectangle de AF, FB, avec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, est égal à deux fois le rectangle de AF, FB, avec deux fois le quarré de AF: donc les quarréz de AB, AF, sont égaux à l'autre quarré de FB, avec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui étoit à démontrer.

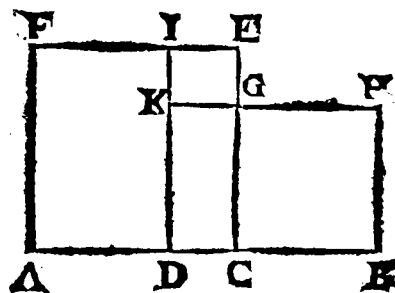
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit divisé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il est évident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, sont ensemble égaux à 193, qui est fait de 25 nombre quarré de l'autre partie 5, & deux fois 24, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarréz de 12 & 5, sont ensemble égaux à 169,

fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60, produit de 12 multiplié par la partie.

Commandin demontre en ce lieu le Theor. suivant.

Si une ligne droite est coupée en deux parties inegales, les quarréz d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excède la moindre.

Soit la ligne droite AB coupée en deux parties inegales AC , CB , desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC , soit prise AD egale à BC , afin que DC soit l'excez, de la partie AC par dessus BC . Je dis que les quarréz, des parties AC , CB sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC , CB , & au quarré de DC . Car soient construits les quarréz AE , CH , & mené DI parallele à CE ; puis prolongée HG jusques à ce qu'elle rencontre DI en K . Or d'autant que les lignes BC , AD sont egales, leur ajoutant la commune DC , la route AC , c'est à dire CE , sera egale à la route DB . Mais CG est aussi egale à CB : donc aussi le reste GE sera egal au reste DC : & partant puis qu'also IE est egale à DC par la 34.



pr. 1. GE , IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez, DC . Et d'autant que les rectangles AI , DH sont contenus sous les parties AC , CB ; (car AC est egale à l'une & à l'autre ligne AF , DB : & CB à l'une & à l'autre AD , BH .) Il est manifeste que les quarréz AE , CH , des parties AC , CB sont egaux aux rectangles AI , DH , qui sont contenus sous les parties AC , CB , & à IG quarré de l'excez DC , Ce qui étoit proposé.

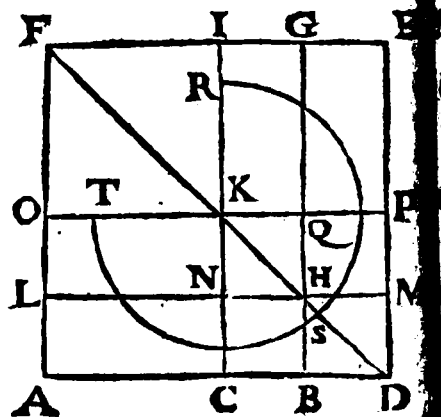
Le même est aussi manifeste par nombres: car le nombre 12 étant divisé en deux parties inégales 7 & 5: dont la plus grande excède la moindre de 2: les quarréz d'icelles parties seront 49 & 25, qui font ensemble 74, auquel nombre sont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5. avec 4 quarré de l'excez 2.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si une ligne droite est coupée comme on voit
dra ; quatre fois le rectangle compris de
route & de l'une des parties , avec le qua
de l'autre partie , est egal au quarré de la ro
te , & d'icelle partie premierement prise com
me d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & l'une ou l'autre partie, sçavoir BC, avec le carré de l'autre partie AC, sont ensemble égaux au carré de AD composé de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne soit ainsi : Soit prolongée AB vers D , & pris BD égale à BC , puis sur la totale AD soit fait le quarté AE avec la diagonale FD , & des deux points B & C , soient menées BC & CI paralleles à DE . Item des points H & K , auxquels elle coupent la diagonale FD , soient menées HM & OP paralleles à AD , par la 31. prop. 1. lesquelles coupent les premieres paralleles en N & Q .



Premierement , par ce qui resulte de la 4. prop. de ce Livre les rectangles OI , NQ , BM au long de la diagonale seront quarréz. Item , d'autant que CB est egale à $BD : CH$, & BM , seront egaux & quarréz : (étant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarréz ; ainsi les quatre CH , BM , NQ , HP , seront quarréz , & egaux : & par la 43. p. 1. les deux supplémens LK & KG seront aussi egaux entr'eux , & par la 36. pr. 1. LK est egal à AN ; & KG à QE : & par consequent iceux quatre rectangles sont aussi

aux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il est evident que AH est une fois le rectangle de AB & BH , (egale à BD) qui est un des quatre rectangles avec un des quatre petits quarrés egaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarrés faisant le Gnomon RST seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD ; lequel Gnomon avec le quarré de DK (egale à AC par la 34. p. 1.) sçavoir est OI , conveniement avec le quarré AE : & partant par la 8. coin. sent. ils luy seront egaux : Si donc une ligne droite est coupée, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Autrement, D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarrés de AB , BD , & à deux fois le rectangle d'icelles AB , BD , c'est à dire, aux quarrés de AB , BC avec deux fois le rectangle de AB , BC : & que par

A	C	B	D
—————			

de la precedente les quarrés de AB , BC sont egaux au quarré de AC avec deux fois le rectangle de AB , BC : le quarré de AD sera egal à quatre fois le rectangle de AB , BC , avec le quarré de AC . Ce qu'il falloit demontrer.

Pour accommoder ce theoreme aux nombres, soit le nombre 12, divisé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, fait 84, qui pris quatre fois avec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui est le nombre quarré de 19, composé de 12 & 7. Semblablement le nombre 240, qui est fait du nombre proposé 12, multiplié quatre fois par la partie 5, étant adjointé avec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainsi que le quarré de 17, nombre composé du donné 12, & de la partie 5.

THEOR. 9. P R O P. IX.

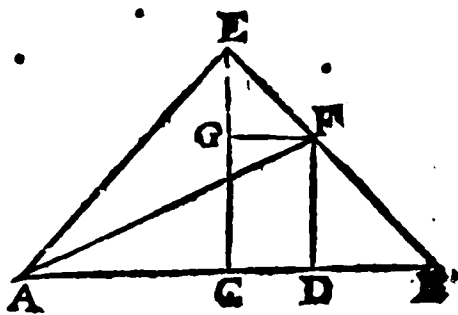
Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrés d'icelles parties inegales seront doubles des quarrés de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux egalelement au point

C, & en deux inégalement en D. Je dis que les quarrés de AD & DB parties inégales, sont doubles des quarrés de AE moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi : au point C soit levée la perpendiculaire CE, qu'on fera égale à CA, & après avoir mené AE & BE, soit levée la perpendiculaire DF, coupant BE en F, duquel point soit menée FG parallèle à AB, coupant CE en G : & finalement soit menée AF.

Premièrement, les triangles ACE, & ECB seront Ifoſcelles, & feront les Angles ſur les baſes AE & EB égaux par la 5. prop. 1. étant l'angle ECB droit pour eſtre CE perpendiculaire. Item FDB étant droit, & DBF demy



droit, auſſi, par la 32. pr. 1. DFB ſera demy droit, & par la 6. pr. 1 les coſtez DB & DF, du triangle BDF. ſeront égaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera démontré que les coſtez GF, GE, du triangle FGE, ſont égaux entr'eux. Item il eſt evident que l'angle AEB ſera droit, étant compoſé des deux demy droits AEC, & BEC.

Maintenant par la 47. pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, côté qui ſoutient l'angle droit, eſt double du quarré de AC ; étant égal à tous les deux de AC & CE. Par même diſcours, le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou de CD ſon égal par la 34. p. 1. partant les deux quarrés de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré de AF étant égal aux deux de AE & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera double des deux de AC & CD. Mais par la même 47. pr. 1. le quarré de AF eſt égal aux deux de AD & DF, ou DB ſon égal : donc les deux quarrés de AD & DB ſeront doubles des deux de AC & CD. Si donc une ligne droite eſt coupée, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD eſt égal aux deux quarrés de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : ſi on ad-

Le commun quarré de DB, les deux quarréz de AD, DB, seront egaux aux trois quarréz de AC, CD & DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais par la 7. prop. 2. les quarréz de AC ou AC, & de CD, sont egaux au quarré de DB avec deux fois le rectangle de BC, CD. Donc les quarréz de AD, DB sont egaux à deux fois les quarréz de AC, CD : & partant doubles d'eux : Ce qu'il falloit demonst. er.

Commandin demontre encore cette proposition autrement, ainsi qu'il ensuit. D'autant que AC est egale à CB, & icelle CB excède CD de DB, aussi AC excèdera la même CD de DB. Parquoy comme il a été démontré à la 7. prop. 2. les quarréz de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, avec le quarré de DB, & partant les trois quarréz de AC, CD, DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarréz de AC, CD. Mais par la 4. proposi. 2. le quarré de AD est egal aux quarréz de AC, CD, avec deux fois le rectangle de AC, CD. Donc les quarréz de AD, DB sont doubles des quarréz de AC, CD.

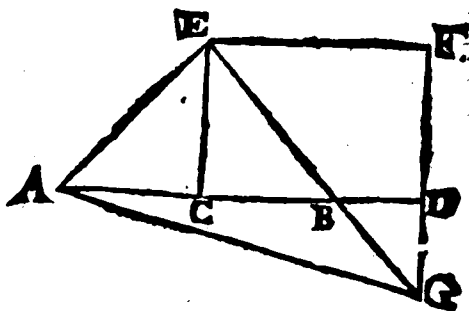
Pour aussi rendre manifeste ce Theor. par nomb. soit le n. 12 divisé en deux parties egales, 6 & 6, & en deux inegales 8 & 4. de sorte que la partie du milieu sera 2. Or il est evident que 64 & 16, qui sont les quarrés des parties inegales 8 & 4, sont ensemble doubles de 36 & 4, qui sont les quarréz de la moitié 6, & de la partie du milieu 2, comme vouloit la prop.

THEOR. 10. PROP. X.

Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & on luy ajoute directement quelqu'autre ligne droite ; le quarré de la toute avec l'ajoutée comme d'une, & le quarré de l'ajoutée, sont doubles des quarréz de la moitié, & de la moitié, & de l'ajoutée, comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux également au point

C, à laquelle soit ajoutée directement B D. Je dis que les quarez de AD & BD sont doubles des quarez de AC & CD. Qu'ainsi ne soit : au point C soit levée la perpendiculaire C E par la 11. prop. 1. egale à AC : & apres avoir mené les deux lignes AE & EB, soient menées par la 31. prop. 1. EF parallele à CD, & DF à CE se rencontrant en F, & soient continuées EB & FD, jusques à ce qu'elles se rencontrent au point G : (elles s'y rencontreront puis que les deux angles BEF, EFD, sont moindres que les deux droits CEF, EFD.) Finalement soit tirée la ligne AG.



Premierement, puis que AC & CE sont egaux ; aussi par la 5. prop. 1. les angles EAC & CEA sont egaux, & demy droits par la 32. prop. 1. étant l'angle ACE droit. Par même discours, les angles CBE & BEC seront aussi demy droits ; & l'angle AFB droit, étant composé de deux demy droits. Item par la 15. prop. 1. l'angle DBG sera egal à CBE, & demy droit : & les deux lignes CD & EF érans paralleles, par la 29. prop. 1. l'angle BEF sera egal à CBE, c'est à dire demy droit, & l'angle F étant droit par la 34. pr. 1. (car il est opposé à un droit C) BGD sera aussi demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF & BDC, seront Iloscelles rectangles, & CF parallelogramme rectangle.

Maintenant par la 47. prop. 1. le quarré de AE, costé qui soutient l'angle droit C, est egal aux deux quarez des deux autres costez AC, CE, partant double du quarré de AC. Par même discours EG se trouvera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy est egale par la 34. prop. 1. ainsi les deux quarez de AE & EG, ou le seul de AG qui leur est egal par la 47. prop. 1. sera double des deux de AC, CD. Mais par la même 47. p. 1. il est egal aux deux quarez de AD & DG, ou BD son egal, & par consequent les deux quarez de AD & BD, seront doubles des deux de AC & DC. Si donc une ligne droite est coupée en deux parties egales, &c. Ce qu'il falloit prouver,

S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarréz de AC, CD, avec deux fois le rectangle d'icelles AC, CD, ou de BC, CD : Si on adjoint le commun quarré de BD, les deux quarréz de AD, BD seront egaux aux trois quarréz de AC, CD : BD avec deux fois le rectangle

de BC, CD. Mais par A C B D
la 7. p. 2. le quarré _____
de BD avec deux fois

le rectangle de BC, CD est egal aux quarréz de CD CB, c'est à dire de AC, CD. Donc les quarréz de AD, BD, sont egaux à deux fois les quarréz de AC, CD, & partant ils sont doubles d'iceux. Ce qu'il falloit démontrer.

Commandin demontre encore cette prop. ainsi. D'autant que AC est egale à CB, & CD excède icelle CB de BD, aussi la même CD excèdera AC du même excès BD : Parquoy comme il a été démontré à la 7. prop. de ce livre, les quarréz de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD avec le quarré de BD : & partant les trois quarréz de AC, CD, BD avec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarréz de AC, CD. Mais par la 4. p. 2 le quarré de AD est egal aux deux quarréz de AC, CD. & deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : Dont les quarréz de AD & BD sont doubles des quarréz de AC, CD.

Ce Theoreme est aussi evident en nombres : car le nombre 8 étant divisé en deux parties egales 4 & 4, si on luy ajoute quelconque nombre 5, le nombre composé sera 13, duquel le quarré 169 avec 25 quarré du nombre adjoint 5, fait 194, qui est double du nombre 97, somme de ces deux nombres 16 & 81, qui sont les quarréz de la moitié 4, & de 9 composé de ladite moitié & du nombre adjoint 5.

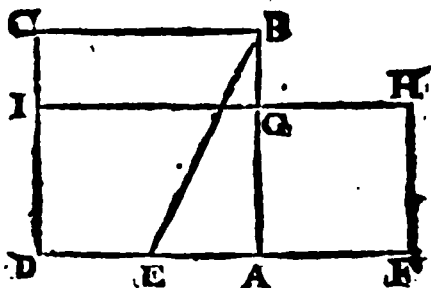
PROBL. I. PROP. XI.

Couper une ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut diviser selon le requis de la proposition.

Après avoir construit sur icelle AB le quarré AC, soit divisée AD en deux également au point E, & après avoir mené FB, & prolongé EA vers F, tellement que EF soit egale à EB, sur AF soit fait le quarré AH; & soit continuée HG jusques en I. Je dis que la ligne AB est coupée au point G, en sorte que le rectangle CG, compris de BC egale à BA; & de BG partie de BA, est egal au quarré de l'autre partie AG, sçavoir est à GF.

Car la ligne AD estant coupée en deux également en E, & on luy ajoute directement AF, & le quarré de la moitié & de l'ajoutée comme d'une, sçavoir EF, ou de son egale EB, est egal au rectangle de DF, AF, au quarré de AE par la 6. p. de ce livre. Mais le quarré de EB est egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainsi les deux quarrés de BA & AE, seront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: ôtant



donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, sçavoir AC, & le rectangle de DF, AF, sçavoir FI, seront egaux; desquels AC & FI, si on ôte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, sera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous avons coupé la ligne droite AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB est egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous avons enseigné en nos Memoires Mathe-

matiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à construire une ligne droite, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit au quarré, selon quelconque raison donnée.

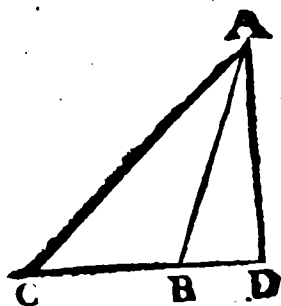
Quand aux nombres, ils ne se peuvent accommoder à ce probleme, sinon qu'on y employe les nombres irrationaux : Car aucun nombre absolu ne peut être divisé en deux autres tels que le nombre produit du tout, multiplié par l'une des parties soit egal au nombre quarré de l'autre partie, comme il sera démontré au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes precedens seront demontrez en nombres ; Neanmoins pour le contentement de ceux qui entendent les operations des nombres irrationaux, nous appliquerons les nombres aux lignes & superficies mentionnez en la demonstration cy-dessus. Que la ligne AB soit 8 : dont sa moitié AE sera 4, & leurs quarez seront 64 & 16, qui font ensemble 80, pour le quarré de BE , ou EF , qui par consequent sera irrationnelle, c'est à sçavoir $\sqrt{80}$: & d'icelle EF , osons EA 4, & ressembleront pour AF , ou AG , $\sqrt{80} - 4$, qui ostez de la toute AB 8, resteront pour l'autre partie BG $8 - \sqrt{80} - 4$, c'est à dire, $12 - \sqrt{80}$, qui multipliez par le nombre total 8, feront 96 -- $\sqrt{5120}$ pour le rectangle GC . & autant est le quarré AH ; car la partie AG , qui est $\sqrt{80} - 4$, multipliée par soy-même fait aussi 96 -- $\sqrt{5120}$, comme vouloit ce probleme.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du côté qui fôitient l'angle obtus, est plus grand que les quarez des deux autres côtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'un des côtez contenant l'angle obtus, ſçavoir celui sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC , duquel soit prolongé le côté CB iusques en D , & du point A soit menée la perpendiculaire AD par la 12. prop. 1. Je dis que le quarré du costé AC qui fôitient l'angle obtus ABC , est plus grand que les quarez de AB & CB , de deux fois le rectangle de CB & BD , ſçavoir CB qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celui sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire AD , & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'est à dire que le quarré du costé AC est egal aux deux quarez des costez AB , BC , avec deux fois le rectangle de CB , BD .

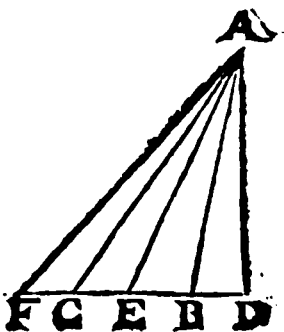
Qu'il ne soit ainsi : Puis que la ligne CD est coupée en B , le quarré d'icelle CD sera egal aux deux quarez de CB , BD , & au rectangle compris deux fois sous CB , BD , par la 4. prop. de ce Livre : Adjoûtant donc le commun quarré de AD , les deux quarez de CD , DA , ſeront egaux aux trois quarez de CB , BD , DA , & au rectangle compris deux fois sous CB , BD . Mais par la 47. pr. 1. le quarré de AC est egal aux quarez de CD , DA : donc aussi le quarré de AC ſera egal aux trois quarez de CB , BD , DA , & au rectangle compris deux fois sous CB , BD . Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB est egal aux quarez de BD , DA ; le quarré de AC ſera egal aux quarez de CB , AB , & deux fois le rectangle de



BD. Parquoy aux triangles ambligones, le carré du côté
soutient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Or que la perpendiculaire tirée de A, doive tomber sur
le côté CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a
eu icy Euclide, nous le demontrerons ainsi : Soit le trian-
gle ABC ayant l'angle B obtus, & le
côté CB prolongé de la part de B.
Je dis que la perpendic. tirée de A
tombe hors le triangle sur le côté
B prolongé, comme est la ligne
droite AD. Car si elle tomboit dans
le triangle, comme est la ligne AE,
les deux angles ABE, AEB se-
roient plus grands que deux droits,
contre la 17. prop. 1. Mais si elle
tomboit hors le triangle sur le côté
BC prolongé de la part de C, comme est AF; derechef,
au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB, seroient
plus grands que deux droits : ce qui est absurde.



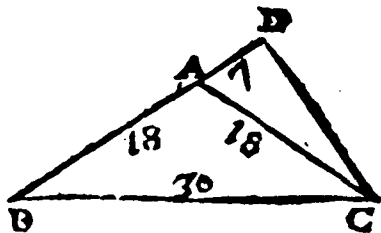
Or afin de pouvoir par le moyen des nombres faire
paroître la verité de ce theoreme, nous enseignerons icy
certaines regles, par lesquelles on pourra construire di-
vers triangles ambligones, ayans les costez commen-
surables en nombre entier, & aussi la ligne d'entre la
perpendiculaire & l'angle obtus.

R E G L E I.

Pour construire un triangle ambligone Isoscelle,
ayant les costez, & la ligne prise dehors entre la
perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en
nombre entier, soit fait le segment extérieur,
d'autant de parties egales que le nombre d'icelles
parties se puisse diuiser exactement par 7. comme
de 7. ou de 14. ou de 21. ou de 28. ou 35, &c. puis

apres soit posé pour chaque costé egal le double d'ice-
luy segment. & entre ce $\frac{4}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus
grand costé, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit segment exte-
rieur: comme au triangle

ABC , ou le segment
 AD est posé de 7, &
l'un & l'autre des costez
 AB , AC de 18, qui est
double & $\frac{4}{7}$ de 7: mais



le plus grand costé BC de 30, qui est le quadruple &
 $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle ABC composé comme des-
sus soit ambligone, il est evident: Car le quarré du
costé BC est 900, & ceux des costez AB , AC font
seulement ensemble 648, chacun d'iceux étant
324: & partant parce que nous avons démontré au
Scholie de la 12. p. 1. l'angle BAC sera obtus. Donc
le triangle ABC duquel les costez & la ligne exte-
rieure AD sont commensurables en nombre entier, est
ambligone. Parquoy le quarré dudit costé BC , qui
est 900 sera egal à la somme des quarréz des deux
autres costez AB , AC , & de deux fois BA en DA ,
c'est à dire à la somme de ces quatre nombres 324,
324, 126, 126, qui font aussi 900, comme veut
cette 12. proposition.

R E G L E II.

Pour construire un triangle Ambligone scalene
duquel non seulement les costez, & la ligne prise de-
hors entre la perpendiculaire tombant sur le moindre
costé prolongé & l'angle obtus, mais aussi ladite per-
pendiculaire, soient commensurables en nombre en-
tier.

On fait posé le segment extérieur d'autant de parties qu'on voudra qui se puissent exactement diviser par 5 ; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties ajoutez $\frac{1}{5}$ pour avoir le petit costé, pour avoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour avoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit segment sera le plus grand costé. Ou bien posez le segment extérieur de 9, ou 18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui se puisse partir exactement par 9 : puis pour le petit costé prenez $\frac{7}{9}$ dudit segment ; pour avoir le moyen, ajoutez d'iceluy segment $\frac{2}{9}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{9}$, & pour le grand costé ajoutez $\frac{2}{9}$ au double d'iceluy segment : Comme si nous posons que le segment extérieur soit de 9 parties égales, le plus petit costé sera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand costé 20. Or le quarre d'iceluy costé est 400, auquel est égale la somme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui sont les quarrés des deux costés 15 & 7, & deux fois le produit de 9 multiplié par 7, c'est à dire le segment extérieur par le moindre costé. Parquoy appert que le triangle ainsi construit est amblygone, & cette 12. prop. estre véritable.

R E G L E III.

Pour construire un triangle amblygone Scalene, auquel les costez & le segment extérieur du moyen costé prolongé jusques à la rencontre de la perpendiculaire tombant sur iceluy costé, soient commensurables en nombre entier : Soit pris ledit segment extérieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis soit ajousté au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais

K

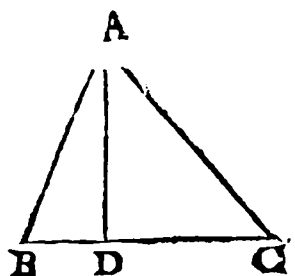
multipliant ledit segment par 8, nous aurons le plus grand costé: comme si nous posons le segment extérieur de 5 parties, ajoutans $\frac{1}{5}$ d'iceluy segment à son triple 15, nous aurons 16 pour le moindre costé, & doublant iceluy costé viendront 32 pour le moyen costé: & finalement multipliant ledit segment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand costé du triangle: lequel sera amblygone, veu que le quarré d'iceluy costé 40, est 1600, & la somme des quarréz des deux autres costez 16 & 32 n'est que 1280; mais ces deux quarréz estans ajoutez à deux fois 160 procreez de la multiplication du moyen costé 32 par le segment extérieur 5, font aussi 1600, comme veut Euclide en cette 12. prop.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du côté qui soutient l'angle aigu, est plus petit que les quarréz des deux autres côtez, de deux fois le rectangle contenu de l'un des côtez qui font l'angle aigu, sçavoir celui sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au côté BC. Je dis que le quarré du côté AB, qui soutient l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarréz des deux autres côtez AC & CB, de

deux fois le rectangle de BC
& CD : ſçavoir BC, l'un des
côtés qui font l'angle aigu
C, ſur lequel tombe la per-
pendiculaire, & CD priſe
entre la perpendiculaire, &
iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne
BC eſt coupée en D, les quarrés de BC, CD, ſont
egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle
de BC, CD par la 7. pr. de ce livre, auxquels ſi on
ajoute le quarré commun de AD, les trois quarrés
de BC, CD, AD, ſeront egaux aux deux quarrés
de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC,
CD. Mais les deux triangles ADB, ADC étans re-
ctangles, le quarré de AB eſt égal aux deux quarrés
de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarrés
de AD, DC par la 47. prop. 1. Donc les deux
quarrés de AC, BC ſeront egaux au quarré de AB,
& deux fois le rectangle de BC, CD : en ôtant donc
ceux deux rectangles, le quarré de AB ſera d'au-
tant plus petit que les quarrés de AC, BC : ce qui
étoit propoſé à prouver. On démontrera en la
même manière que le quarré du côté AC, qui ſou-
tient l'angle aigu, B, eſt plus petit que les deux
quarrés des deux autres côtés AB, BC, de deux
fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles
Oxigones, le quarré du côté qui ſoutient l'angle
aigu, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

C H O L I E.

Or combien qu'Euclide propoſe ce Theoreme des

K 2

triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable es triangles rectangles & ambliques, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il est manifeste par la 17. pr. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera tousjours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration cy-dessus : Ce qui est aussi facile a prouver. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuivroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit. Ce qui est absurde.

Et comme au precedent Scholie nous avons enseigné a construire divers triangles ambliques ayans les côtez & le segment compris entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombres entiers, afin de pouvoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a demonsté en la 12. prop. aussi enseignerons nous icy quelques regles pour construire divers triangles oxigones ayans les costez & les segmens de la base commensurables en nombres entiers, afin de faire aussi paroistre en nombre la verité de cette 13. prop.

R E G L E I.

D'autant qu'à un triangle equilateral, & à l'Isoscelle la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux costez egaux fait les segmens de la base egaux, ainsi qu'il a esté demonsté sur la 16. prop. 1. il sera fort aisé de construire tels triangles qui ayent les costez & les segmens commensurables en nombre entier, c'est pourquoy il n'est pas besoin de nous y arrêter : Mais quand est requis un triangle Isoscelle, au quel la base soit plus grande que chaque costé, & que

la perpendiculaire tombe sur l'un d'iceux costez
 egaux; elle le coupera en deux segmens inegaux,
 comme nous avons demontré à la 47. prop. 1. le
 moindre desquels segmens il faut poser d'autant de
 parties qu'on voudra, & icelles estans multipliées
 par 8, produiront le plus grand segment, mais les
 multipliant par 12, sera produit la base, & les deux
 segmens estans adioustez, l'on aura l'une & l'autre
 des iambes: ce qu'on aura aussi multipliant le moin-
 dre segment par 9. Comme par exemple, ayant po-
 sé le moindre segment de 4 parties, nous les multi-
 plierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand
 segment: mais les multipliant par 12, viennent 48
 pour la base, & par 9 viennent 36 pour chaque côté.
 Or que ce triangle Ifofcelle soit oxigone, il est ma-
 nifeste parce que nous avons demontré au Scholie
 de la 48. prop. 1. car veu que le quarré de la base
 48 n'est que 2304, & la somme des quarez des
 deux iambes est 2592, chacun d'iceux estant 1296,
 l'angle compris d'iceux costez sera aigu, & par
 consequent les autres seront aussi aigus, puis qu'ils
 sont plus petits par la 18. propos. 1. Et si à iceluy
 quarré 2304, nous adioustons 288, qui sont deux
 fois 144, nombre produit de 36, costé sur lequel tom-
 be la perpendiculaire, par 4, segment compris entre
 la perpendiculaire & l'angle opposé à ladite base,
 viendront aussi 2592. Pareillement 1296, quarré de
 l'une des iambes est moindre que 3600, somme des
 quarez de la base & de l'autre iambe, de deux fois
 1152, nombre produit du costé 36, multiplié par le
 grand segment 32: car ces trois nombres 1296, 1152,
 1152 font ensemble le mesme nombre 3600. Parquoy
 apert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. pr.

R E G L E I I.

Que s'il est requis que le triangle soit Isoscelle, ayant la base moindre que chacune jambe, & que sur l'une d'icelle tombe la perpendiculaire: il faudra poser le moindre segment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'iceluy nombre par 7, on aura le plus grand segment, mais multipliant ledit moindre segment par 3, on aura la base, & finalement la somme des deux segmens fera chacune des jambes: qu'on aura aussi multipliant la moitié du moindre segment par 9. Parquoy ayant posé le moindre segment de 4, je multiplie sa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre segment, tellement que toute la jambe sera 18. & multipliant ledit segment 4 par 3, viennent 12 pour la base. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarré du costé 18 n'est que 324, & la somme des quarréz des deux autres costez est 468: Et de plus, iceluy quarré 324 est moindre que ladite somme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 4, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à l'autre jambe: partant il apert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

R E G L E I I I.

Que s'il est requis que le triangle soit scalene, & la perpendiculaire tombe sur le moindre costé, il faudra poser le moindre segment de 70 parties, ou de

140, ou de quelque autre nombre qui se puisse diviser exactement par 70; puis adjoûter à iceluy nombre $\frac{29}{70}$ & viendra le plus grand segment, & la somme de ces deux segmens sera le moindre costé; mais ayant doublé le moindre segment, & à iceluy double adjouste $\frac{42}{70}$ c'est à dire $\frac{3}{5}$ du dit segment, sera procréé le moyen costé; & finalement si ce double du moindre segment on adjouste $\frac{55}{70}$, c'est à dire $\frac{11}{14}$, on aura le plus grand costé. Comme si nous posons le moindre segment de 70, & à iceluy adjoûtons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand segment, & par consequent le moindre costé sera 169; mais adjoûtant $\frac{42}{70}$ au double d'iceluy moindre segment, viendront 182 pour le moyen costé: & adjoûtant au même double $\frac{55}{70}$, viendront 195 pour le plus grand costé. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarre du plus grand costé 195 n'est que 38025, & la somme des quarrez des deux autres costez est 61680: parquoy le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres sont aussi aigus. Que si à iceluy quarre 38025, on adjouste deux fois 11830, nombres produit de la multiplication de 169, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre segment 70, viendra le mesme nombre 61685. Parquoy apert encore estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. p.

R E G L E I V.

Que si au triangle scalene il est requis que la perpendiculaire tombe sur le moyen costé, soit posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de

quelqu'autre nombre qu'on puisse exactement di-
 ser par 5, puis à iceluy segment soient ajoutée $\frac{4}{5}$, &
 on aura le plus grand segment; & la somme d'iceux
 sera le moyen côté: mais ajoutant $\frac{2}{5}$ au double d'ice-
 luy moindre segment, on aura le moindre côté, &
 le plus grand sera le triple dudit segment. Parquoy
 si nous posons le moindre segment de 10 parties,
 ajoutant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre
 segment, & conséquemment tout le moyen côté sera
 28. Mais ajoutant 6, qui sont les $\frac{3}{5}$ du moindre seg-
 ment 10, au double d'iceluy segment, viennent 26
 pour le moindre côté; & le plus grand sera 30, triple
 dudit moindre segment. Or qu'iceluy triangle soit
 oxigone, il est manifeste: car le quarré du plus
 grand côté 30, n'est que 900, & la somme des
 quarez des deux autres costez 26 & 28 est 1460:
 & partant le plus grand angle est aigu, & conse-
 quemment les autres angles sont aussi aigus. Main-
 tenant si nous multiplions le côté sur lequel tombe
 la perpendiculaire, sçavoir 28 par le moindre seg-
 ment 10, nous aurons 280, & pour le double 560,
 qui ajoutées au susdit quarré de 30 sçavoir 900,
 font le mesme nombre 1460 somme des deux quar-
 rez des deux autres costez 26 & 28, qui sont 676
 & 84. Pareillement le quarré du moindre côté 26,
 n'est que 676, & la somme des quarez des deux
 autres costez est 1684: tellement qu'il est moindre
 que cette dite somme de deux fois 504, nombre pro-
 duit de la multiplication de 28, côté sur lequel
 tombe la perpendiculaire par 18, segment compris
 entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à
 iceluy moindre côté. Parquoy appert derechef être
 veritable ce que dit Euclide en cette 13. proposition.

R E G L E V.

Et finalement, s'il estoit requis que la perpendiculaire tombe sur le plus grand costé, soit encore posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy segment soit adjointé $\frac{1}{4}$, & viendra le plus grand segment, tellement que la somme d'iceux segmens sera le plus grand costé: mais adjointant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre costé, & le moyen sera le quadruple dudit segment. Par ainsi le moindre segment estant posé de 5 parties, le plus grand sera de 16, & le plus grand costé 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarré de ce plus grand costé 21, n'est que 441, & la somme des deux quarréz des deux autres costez 20 & 13 est 569: parquoy l'angle opposé à iceluy costé, qui est le plus grand par la 18. prop. 1. est aigu, & consequemment le triangle susdit est oxigone. D'avantage le quarré du moindre costé 13, sçavoir 169, est plus petit que la somme des quarréz des deux autres costez 20 & 21, sçavoir est 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 16, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre costé. Pareillement le quarré du moyen costé 20, sçavoir 400, est moindre que 610, somme des quarréz des deux autres costez 13, & 21, de deux fois 105, nombre produit de 21 multiplié par le moindre segment 5. Parquoy apert encore par ce 5. triangle estre veritable, ce que dit Euclide en cette 13. prop.

Mais il est aussi evident tant par la demonstration d'Euclide, que par l'application des nombres cy-devant faite, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones seulement, est aussi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du costé qui soustient un angle aigu, est plus petit que la somme des quarréz des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu du costé sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne comprise entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

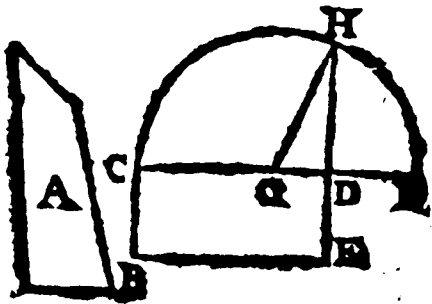
PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire un quarré egal à une figure rectiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire un quarré egal.

Soit premierement fait le parallelogramme BD egal à la figure donnée A, ayant un angle droit par la 45. prop. 1 puis soit prolongé un côté, comme CD, jusques en F, & fait DF egale à l'autre côté DE : & apres

avoir coupé CF en deux egale-ment au point G, & d'iceluy point G & intervalle GC ou GF, décrit le demy cercle



CHF, soit continuée ED jusques à ce qu'elle ren-

contre la circonference du demy cercle en H. Je dis que le quarré de DH est egal à la figure rectiligne A.

Car puisque CF est coupée en deux egale-
ment au point G, & en deux inegalement au point D;
le rectangle de CD & DF, sçavoir BD, avec le
quarré de la partie du milieu GD, est egal au quar-
ré de la moitié GF par la 5. prop. de ce livre, ou de
son egale GH, lequel est egal aux deux quarez de
GD & DH par la 47. prop. 1. Que si on oste le quar-
ré commun de GD, le demeurant quarré de DH
se trouvera egal au demeurant rectangle BD : &
par consequent à la figure rectiligne donnée A.
Nous avons donc trouvé le côté d'un quarré egal
à une figure rectiligne donnée A. Ce qu'il falloit
faire.

Fin du second Element.



ELEMENT

TROISIE'ME.

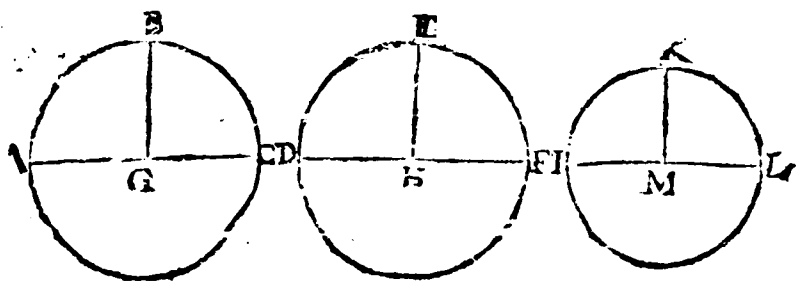
DEFINITIONS.



CERCLES égaux, sont ceux desquels les diametres sont égaux, ou desquels les lignes droites menées des centres aux circonferences, sont égales,

D'autant qu'Euclide demontre en ce 3. Livre diverses proprietéz & affections du cercle, il explique auparavant quelques termes dont l'usage sera fort frequent en iceluy : Il dit donc premierement que ces cercles-là sont égaux, desquels les diametres ou semidiametres sont égaux. Car puis que le cercle est décrit par le mouvement & revolution du demy diametre à l'entour d'une de ses extremitez fixe & immobile, comme nous avons

dit à la 15. def. du 1. Livre ; il est evident que ces cercles-là sont egaux , desquels les demy diametres , ou les lignes droites menées des centres aux circonferences sont egales entr'elles : ou bien desquels les diametres entiers sont egaux entr'eux. Comme

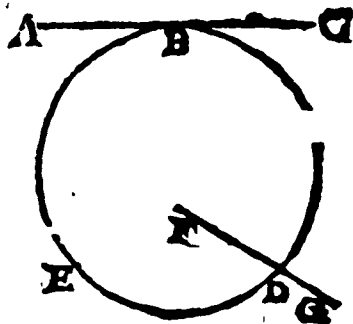


si les diametres AC, DF , ou les lignes droites GB, HE , menées des centres $G \& H$, sont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF seront egaux entr'eux. Et au contraire, si les cercles sont egaux, leurs diametres ou les lignes droites menees des centres aux circonferences, seront aussi egales.

De cecy il appert, que les cercles sont inegaux quand les diametres, ou les lignes droites menées des centres aux circonferences, sont inegales ; & que celui est le plus grand, duquel le diametre, ou demy diametre est le plus grand. Comme si les diametres DF, IL , ou les lig. droites HD, MK , menées des centres aux circonfer. sont inegales, les cercles DEF, IKL seront inegaux ; & si le diametre DF est le plus grand, aussi le cercle DEF sera le plus grand. Et au contraire ; des cercles inegaux, les diametres ou semidiametres seront inegaux, c'est à sçavoir celui du plus grand cercle, plus grand, & celui du moindre, plus petit.

2. Vne ligne droite est dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuée ne le coupe point.

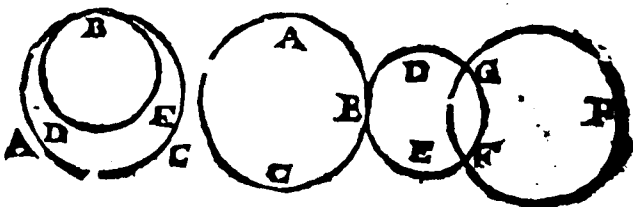
Comme la ligne droite *AB* sera dite toucher le cercle *BDE* en *B*. si elle l'y touche, en sorte qu'étant prolongée vers *C*, elle ne le coupe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droite *GD* atteint le mesme cercle au point *D*, en telle sorte qu'estant prolongée iusques à *F*, elle coupe le cercle. & tombe dedans iceluy, elle ne sera pas dite toucher le cercle, mais le couper.



3. Les cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand en se touchant ils ne se coupent point.

Ainsi les deux cercles *ABC*, *DBE* seront dits se toucher l'un

l'autre en *B*, s'ils s'y touchent en sorte qu'ils ne s'entre-

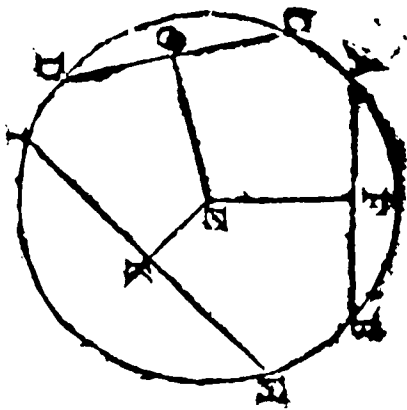


coupent point. Or cet atouchement des cercles est de

deux sortes ; Car les cercles s'entre touchent ou en dedans, ou en dehors : Ils se touchent en dedans, quand l'un est posé dedans l'autre ; & en dehors, quand l'un est constitué hors de l'autre, comme il apert icy. Mais si deux cercles s'atteignent de telle sorte que l'un coupe l'autre, comme font icy les deux cercles DGE, FGH, ils seront dits se couper, & non pas se toucher.

4. Au cercle, les lignes droites sont dites être également distantes du centre, lors que les perpendiculaires tirées du centre sur icelles, sont égales. Mais celle-là est dite estre plus éloignée du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

Comme au cercle $ABDC$, les lignes droites AB , CD , seront dites estre également distantes & éloignées du centre E , si les perpendiculaires EF , EG , sont égales : Mais la ligne droite AB sera dite estre plus

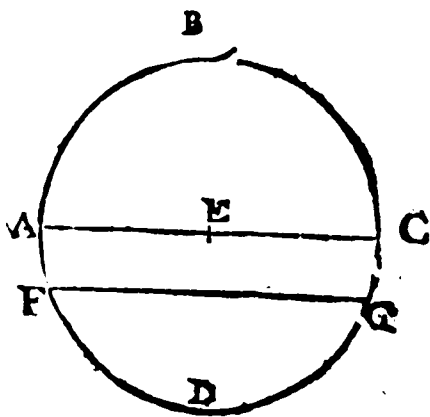


éloignée du centre E que la ligne HI , si la perpendiculaire EF est plus grande que la perpendiculaire EK .

5. Segment, ou portion de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, &

de la circonference du cercle.

Si dans un cercle, comme $ABCD$, on mène une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties, comme fait la ligne droite FG ; tant la figure FBG contenue sous ladite ligne droite FG , & la partie de circonference FBG , que la figure FDG comprise sous la mesme ligne droite FG , & la partie de circonference FDG , sera dite segment ou portion de cercle. Mais est icy à noter qu'il y a de trois sortes de segments de cercle. Car si la ligne droite passe par le centre du cercle, comme AEC , elle divisera le cercle en deux segments égaux ABC , ADC , chacun desquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a été dit au premier livre.



Mais quand la ligne ne passe point par le centre, comme FG , elle divise le cercle en deux parties inégales FBG , FDG , l'une desquelles, sçavoir FBG , dans laquelle est le centre E , est plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou segment majeur: mais l'autre portion FDG , est plus petite que le demy cercle, & s'appelle segment mineur. Davantage la ligne droite FG est appelée corde par plusieurs Geomettres, & la partie de circonference FBG , ou FDG , arc.

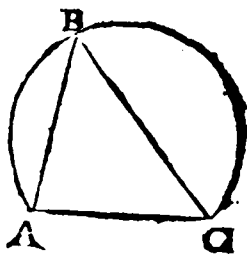
6. L'angle

6. L'angle du segment, est celuy compris d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à definir trois sortes d'angles que l'on considere aux cercles, & commence par l'angle du segment, disant que l'angle mixte BFG , ou BGF , qui en la figure prec. est contenu sous la ligne droite FG , & la circonference FBG , s'appelle angle du segment. Que si le segment est un demy cercle, l'angle d'iceluy sera appelé angle du demy cercle, & tel est l'angle EAB , ou ECB . Mais si le segment est plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG , ou BGF , sera dit angle du segment majeur: Et si le segment est plus petit que le demi cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG , ou DGF , sera appelé angle du segment mineur.

7. Un angle se dit être au segment, ou en la portion, lors qu'à un point pris en la circonference du segment, sont menées deux lignes droites des extremitéz de la ligne qui sert de base au segment; & cet angle-là est celuy compris d'icelles deux lignes.

Soit un segment de cercle ABC , auquel la base est la ligne droite AC , des extremitéz de laquelle soient menées au point B , pris en la circonference les deux lignes droites AB , CB , qui constituent l'angle rectiligne ABC ; iceluy angle est dit être au segment ABC .

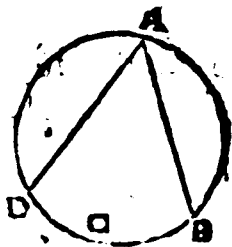


8. Mais quand les lignes droites qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit être, ou s'appuyer sur icelle.

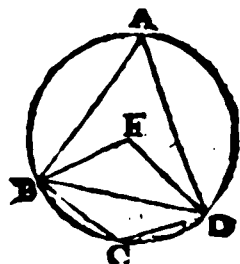
En la circonference du cercle $ABCD$ soit pris quelconque

L

point A , & d'iceluy à deux autres points B & D d'icelle circonférence, soient menées deux lignes droites AB , AD , qui constituent l'angle rectiligne DAB , & embrassent la circonférence BCD : Iceluy angle BAD sera dit estre ou s'appuyer sur icelle circonférence BCD .



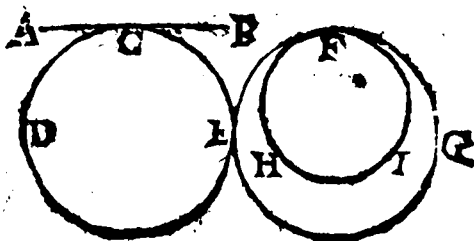
Est icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune différence entre cet angle-cy & le precedent, mais les ont pris pour un même: & toutesfois, si on les considere bien, on y trouuera une grande disirepance: Car celui-la se refere au segment auquel il est constitué, & certayn-cy se rapporte à la circonférence qui luy sert de base: Comme par exemple, si au cercle $ABCD$ on prend quelque segment de cercle BCD , l'angle qui est en ce segment ne sera pas le même que celui qui insiste, ou est appuyé sur la circonférence d'iceluy segment: car l'angle qui est en iceluy sera BCD , & l'angle qui insiste ou s'appuye sur la circonférence d'iceluy sera l'angle BAD .



Une autre chose est encore à remarquer icy, c'est que les angles qui s'appuyent sur la circonférence, peuuent être non seulement constitués en la circonférence, comme il a été dit cy-dessus, mais peuuent aussi être constitués au centre du cercle; comme par exemple, l'angle BED constitué au centre E , par les deux lignes droites BE , DE , sera aussi dit s'appuyer sur la circonférence BCD , tellement qu'il y a icy deux angles appuyez sur ladite circonférence BCD , savoir BAD constitué en la circonférence, & BED constitué au centre.

Or outre les trois sortes d'angles cy-dessus définis & expliqués, les Geometres en considerent encore un autre qu'ils appellent angle de conuergence ou d'attachement; cet angle est contenu d'une ligne droite touchant le cercle, & de la circonférence d'iceluy cercle, ou bien de deux circonférences se touchant l'une l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, si la ligne droite AB touche le cercle CDE au point C , l'angle mixte ACD ,

BCE sera dit angle
contingence ou
d'atouchement. De-
chef, si le cercle
FG touche le cercle
DE au dehors en E,
le cercle en HFI
dedans en F, tant
l'angle curviligne
EF, que EFH ou GFP, sera appellé angle de contingence
d'atouchement.



9. Secteur de cercle, est une figure contenuë sous
deux lignes droites qui font un angle au centre,
& la circonférence comprise entre icelles li-
gnes.

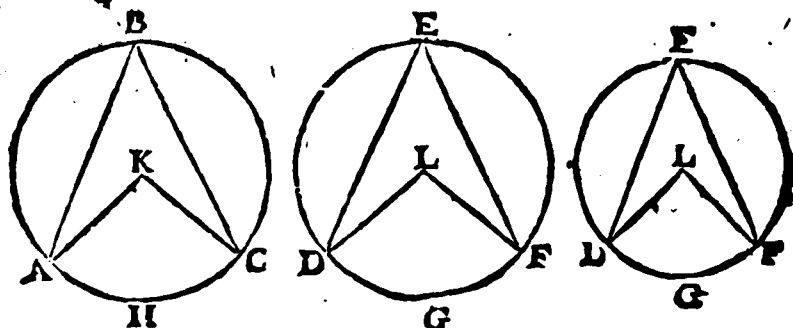
Si au cercle ABCD, duquell^e centre est E, les deux li-
gnes droites AE, CE, constituent
au centre E, l'angle AEC; la fi-
gure AEGD, contenue des deux
lignes droites AE, EC, & de la
circonférence ADC comprise en-
tre icelles lignes, sera appellée
secteur de cercle. Item la figure
ABCE, comprise des mêmes li-
gnes droites AE, EC, & de la circonférence ABC, sera
aussi dite secteur de cercle.



10. Semblables portions de cercle, sont celles qui
reçoivent angles egaux; ou bien esquelles les
angles sont egaux entr'eux.

Comme si aux cercles ABC, DEF, les angles rectilignes
A, E, sont egaux; les segmens ABC, DEF, qui reçoivent
deux angles egaux, ou esquels sont les susdits angles
egaux, seront dits segmens semblables: Et les circonféren-
ces ABC, DEF, seront pareillement dites semblables, c'est
à dire que le segment ABC sera telle partie de tout le cer-

de $ABCH$, que le segment DEF est partie de tout le cercle $DEFG$: & la circonférence ABC sera aussi tel-



le partie de toute la circonférence $ABCH$, que la circonférence DEF est de toute la circonférence $DEFG$. Par même raison, les arcs ou circonférences AHC , DGF , sur lesquelles s'appuyent angles égaux, sont aussi dits semblables : Comme si aux mêmes cercles ABC , DEF , les angles ABC , DEF ou AKC , DLF sont égaux ; les arcs ou circonférences AHC , DGF , sur lesquelles s'appuyent les susdits angles, seront dits arcs semblables.

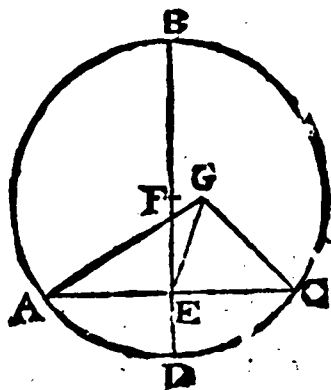
Des choses susdites, l'on peut colliger que les semblables portions d'un même cercle, ou de cercles égaux, sont aussi égales entr'elles, attendu qu'elles sont parties égales d'une même chose, ou de choses égales.

PROBL. I. PROP. I.

Trouver le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné ABC , duquel il faut trouver le centre.

Soit tirée en iceluy la ligne droite AC , qui coupe la circonférence, comme que ce soit, és points A & C : puis par les 10. & 11. prop. 1. soit icelle AC coupée en deux également, & à droits angles par la ligne droite BD , se terminant à la periphère és points B & D : & fina-



lement icelle BD soit aussi coupée en deux également en F, par la susdite 10. prop. 1. Je dis que F est le centre du cercle proposé.

Car en icelle ligne droite BD, un autre point que F ne sera pas le centre, vu que tout autre point la divise inégalement.

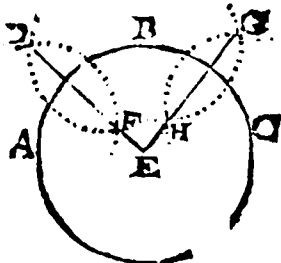
Si donc le point F n'est pas le centre, le point G hors la ligne BD soit le centre, (s'il est possible) duquel soient menées les trois lignes droites GA, GE & GC. D'autant que G étant le centre, par la def. du cercle les lignes droites AG & GC seront égales : mais par la construction AE & EC sont aussi égales, & GE est commune aux deux triangles GEA & GEC : donc iceux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & la base AG égale à la base CG, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & CEG seront égaux : & partant droits, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la construction est droit, & tous les angles droits sont égaux par la 10. com. sent. donc les deux angles AEG & BEA seront égaux, sçavoir le tout à la partie : ce qui est absurde. Donc le point G n'est pas le centre. Le même inconvénient s'ensuivra prenant tout autre point hors la ligne BD. Partant le point F sera le centre du cercle ABC, requis à trouver.

C O R O L L A I R E.

Dé'cecy est manifeste, que si au cercle une ligne droite coupe une autre ligne droite en deux également, & à angles droits, le centre du cercle sera en icelle coupante. Car il a esté démontré qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au point F, milieu de la ligne BD, laquelle coupe la ligne AC en deux également, & à angles droits en E.

S C H O L I

Combien que la pratique de ce Probleme soit aisée par la construction d'iceluy, si est-ce toutesfois qu'elle est encore plus brève & facile, ainsi qu'il ensuit. Pour trouver le centre du cercle ABC, soient pris en la circonférence d'iceluy les trois points A, B, C, comme on

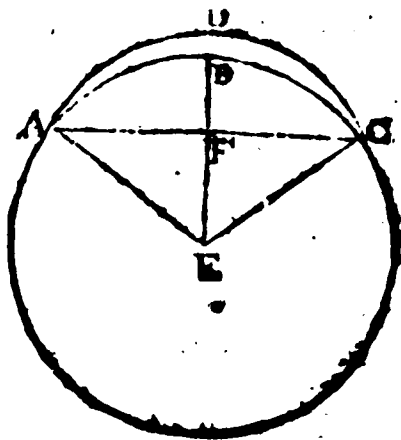


voudra : puis des deux points A & B, soient décrits d'un même intervalle, deux arcs qui s'entrecoüppent es points D & F, par lesquels soit menée la ligne droite DFE intérieurement : en apres, des points B & C, soient aussi décrits d'un même intervalle deux autres arcs s'entrecoüppans es points G & H, par lesquels soit menée la ligne droite GH, qui coupe DF en E, & iceluy point sera le centre requis.

T H E O R. I. P R O P. II.

Si en la circonference d'un cercle, on prend deux points comme on voudra ; la ligne droite menée de point à autre, tombera dans le cercle.

Soit le cercle ABC, & en la circonference d'iceluy soient pris deux points tels qu'on voudra A & C. Je dis que la ligne droite menée du point A au point C tombera dedans le cercle : car si elle ne tombe au dedans, elle tombera, ou sur la circonference, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, si il est possible, comme la ligne ADC : & ayant trouvé le centre E par la prec. prop. d'iceluy soient menées aux points A & C les lignes droites EA, EC, & à quelque point D de la ligne ADC, soit aussi menées ED, qui coupe la circonference du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux costez EA, EC sont égaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, sur la base ADC, égaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le costé AD est prolongé, l'angle extérieur EDC sera plus grand que son opposé intérieur EAD, par la 16. proposition 1. Donc le même angle EDC sera aussi plus grand que l'angle ECD, qui est égal à EAD. Parquoy EC opposé au plus grand angle EDC



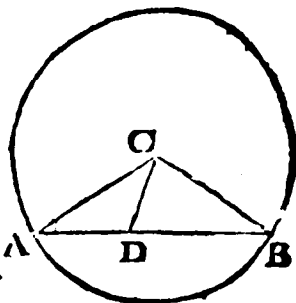
La plus grande que ED par la 19. prop. 1. & partant EB égale BC, sera aussi plus grande que ED, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc la ligne droite menée de A à C ne tombera pas hors le cercle. On démontrera par même raison qu'elle ne peut pas aussi tomber sur la circonférence ABC. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droite AFC. Parquoy si en la circonférence d'un cercle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Ce même Theoreme peut aussi être démontré affirmativement ainsi qu'il ensuit.

En la circonférence du cercle AB, dont le centre est C, soient pris deux points tels qu'on voudra A & B. Je dis que la ligne droite AB menée d'un point à l'autre tombe dans iceluy cercle.

Car soit pris en icelle ligne droite AB quelconque point comme D, entre ses extremes A & B, puis du centre C, soient menées les lignes droites CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC, du triangle ACB sont égaux, les angles BAC, ABC seront égaux par la 5. prop. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. prop. 1. donc le même angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. prop. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tirée de centre jusques à la circonférence, la ligne droite CD ne parviendra pas jusques à icelle circonférence, & par conséquent le point D tombe dans le cercle. Le même sera démontré de tout autre point qu'on voudra prendre en icelle AB. Donc toute la ligne droite AB tombe dedans le cercle proposé. Ce qu'il falloit prouver.



C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, qu'une ligne droite touchant un cercle, le touche seulement à un point: car si elle le tou-

chois à deux points, la partie de la ligne d'entre iceux points tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothèse.

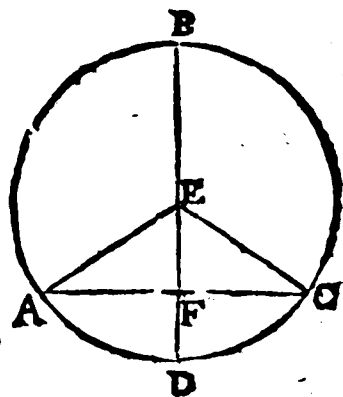
THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, & coupe en deux également une autre ligne droite qui ne passe point par le centre; elle la coupera à angles droits: & si elle la coupe à angles droits, elle la coupera aussi en deux également.

Au cercle ABCD soit la ligne droite BD, laquelle passant par le centre E, coupe en deux également la ligne droite AC, laquelle ne passe point par le centre; Je dis que BD coupe aussi AC en angles droits au point F.

Car étant menées les deux lignes droites CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux côtes AF, FE, égaux aux deux côtes CF, EF, chacun au sien, & la base AE égale à la base EC; & par la 8. prop. 1. les deux angles au point F seront égaux, & passant droits par la 10. def. 1.

Je dis pareillement, que si BD coupe AC à angles droits au point F; qu'elle la coupera aussi en deux également. Car les deux angles au point F étant droits, ils seront égaux, & l'angle A est égal à l'angle C par la 5. prop. 1. étant AEC triangle isoscèle, & le côté EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera égale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

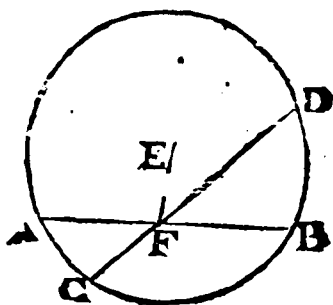


THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droites ne passant

point par le centre, s'entrecoupent; elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux également.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droites AB & CD, s'entrecoupans au point F, & desquelles ny l'une ny l'autre ne passe par le centre E. Je dis que l'une ou l'autre est coupée inégalement. Car du centre E étant menée la ligne EF; si icelles lignes AB, CD s'entrecoupent en deux également au point F, la ligne EF les coupera au mesme point aussi en deux également, & à droits angles par la pr. prec. & les angles AFE, EFB seront droits, & égaux à CFE, EFD aussi droits, & égaux: ce qui est impossible, n'étant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes droites AB, CD ne s'entrecoupoient pas en deux également. Parquoy si dans le cercle deux lignes droites ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver,

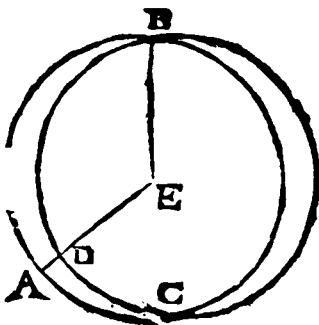


THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas même centre. •

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne sçauroient avoir un même centre.

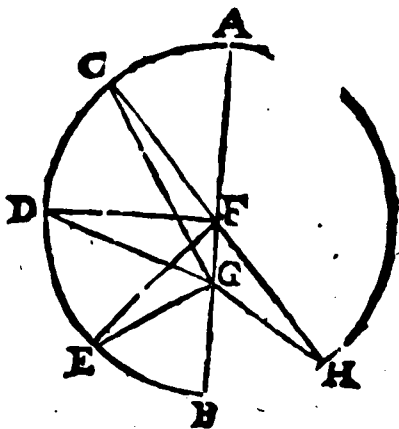
Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droites, sçavoir EB à la section B: Mais EA coupant l'une & l'autre circonférence en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droite ED sera égale à la ligne droite EB par la 15. def. 1. Dere chef, puis que E est aussi posé centre du



GF, seront plus grands que le troisième DF par la 20. prop. 1. ou que son égale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par même raison GB, sera aussi plus petite que GF, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonférence.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD: & pour la même raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en avoit davantage de tirées de G à la circonférence. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont égaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien: mais l'angle CFG est plus grand que l'angle DFG, & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour même raison GC sera aussi plus grande que GE: Item GD plus grande qu'icelle GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Finalement, ayant fait l'angle BFH égal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont égales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonférence aucune autre



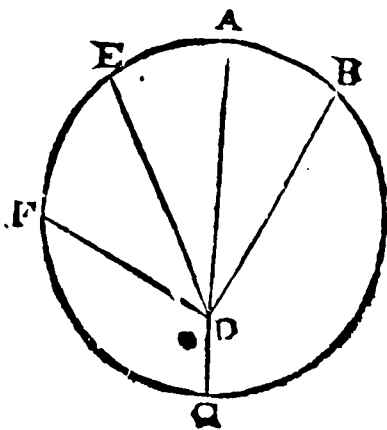
égale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont égaux aux costez HF, FG du triangle AFG, & les angles EFG, HFG aussi égaux: les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre du diamètre, sont égales entr'elles. Et il est évident qu'on ne pourra tirer du point G une autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA, tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH: & par ce qui a esté montré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du point G à la circonférence ne se peuvent tirer plus de deux lignes droites qui soient égales entr'elles. Parquoy si au diamètre d'un cercle on prend quelconque point qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Supposons qu'Euclide ait seulement démontré que des lignes droites tirées de mesme part du diametre, la plus proche de celle tirée par le centre est plus grande que la plus éloignée, toutesfois cela est aussi vray, si elles sont tirées de diverse part: comme si la ligne droite GD est plus proche de GA que la ligne droite GH ; icelle GD sera plus grande que GH : car si de la part de GD on fait l'angle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH seront egales, attendu qu'elles sont également distantes de GA , & le point E tombera entre B & D , puis que GD a esté posée plus proche de GA que GH . Mais par cette prop. GD est plus grande que GE : donc la mesme GD sera aussi plus grande que GH . Quelques Interpretes veulent convertir cette 7. prop. ainsi, qu'il en suit.

Si on prend un point dedans le cercle, & d'iceluy point tombent des lignes droites à la circonference, entre lesquelles soient la plus grande & la plus petite qui puissent étre menées de ce point-là à ladite circonference: mais des restantes, les unes soient inegales, & les autres egales: la plus grande passera par le centre du cercle, & la plus petite sera le reste du diametre: mais des autres les plus grandes seront les plus proches du centre, & les egales en seront également distantes.

Au cercle ABC soit pris le point D , duquel tombent en la circonference tant qu'on voudra de lignes droites DA, DB, DC, DE, DF , desquelles DA soit la plus grande qui puisse étre tirée d'iceluy point à ladite circonference, & DC la moindre: mais des autres, DE soit plus grande que DF , & egale à DB . Je dis premierement que DA passe par le centre du cercle: Car si elle n'y passe, étant tirée



quelque ligne droite de D par ledit centre, elle sera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. prop. 3. Ce qui est absurde, puis que DA est posée la plus grande. Donc DA passe par le centre.

En second lieu, se dit que DC est le reste du diamètre, c'est à dire qu'elle est directement à DA : Car autrement icelle DA étant prolongée directement, son prolongement sera autre que DC , & la plus petite ligne qui puisse tomber de D à la circonférence, par la 7. prop. 3. Ce qui ne peut estre, puis que DC a esté posée la plus petite: donc DC est l'autre partie du diamètre.

Tiercement, se dit que DE est plus proche de DA que DF . Car elle n'y pourroit pas estre également distante, avec du que par la susdite prop. elles seroient égales, & elles ont esté posées inégales. Mais DE ne peut pas aussi estre plus éloignée de la même DA que DF : car elles seroient plus petites qu'icelle DF , par la même proposition, & elle a esté posée plus grande.

En dernier lieu, se dit que DB , DE sont également distantes de DA : Car si l'une, en estoit plus proche elle seroit plus grande que l'autre par la même 7. prop. & elles ont esté posées égales.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque point hors le cercle, & d'iceluy point soient menées quelques lignes droites dans iceluy cercle, desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées en la circonférence concave. Quant aux autres, tousjours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus éloignée. Mais de celles qui tombent à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le point & le diame-

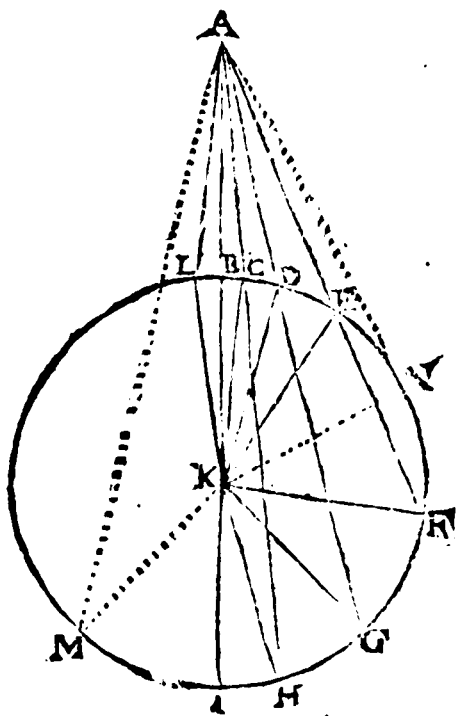
tre : Quant aux autres, la plus éloignée de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche : Et d'iceluy point ne peuvent tomber à la circonference que deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menées les lignes droites AF, AG, AH & AI coupans ledit cercle, desquelles lignes AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Je dis premierement que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes icelles lignes tirées à la circonference

concave : puis apres, que AH qui est la plus proche d'icelle AI est plus grande que AG, qui en est plus éloignée : Et pour même raison AG plus grande que AF. Et au contraire, ie dis que AB cōprise entre le point A & la circonference convexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle : puis apres, que la ligne AC plus proche de la plus petite AB est moindre que AD, qui en est plus éloignée : et par même raison icelle AD moindre que AE. Fi-

nalement, ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite AB.

Car du centre K étans menées aux points C, D, E, F, G, & H, les lignes droites KC, KD, KE, KF, KG & KH ; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la li-



gne AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK, KH sont égales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droite AI : icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la même raison AI sera plus grande que AG, & aussi que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui tombent du point A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez Ak & KH du triangle AKH sont égaux aux costez AK, KG du triangle AkG, chacun au sien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG ; la base AH sera plus grande que la base AG, par la 24. prop. 1. Par la même raison AH sera plus grande que AF ; item AG plus grande que la même AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK, est moindre que les deux AC, CK ; si on ôte les égales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par semblable raison AB sera plus petite que AD, & aussi que AE. Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui sont menées de A à la circonference convexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droites AC, CK, des extremittez du côté AK, icelles AC, CK, seront moindres que AD, DK par la 21. prop. 1. desquelles si on ôte les égales CK, DK, restera encore AC moindre que AD. Par même raison on prouvera que AC est moindre que AE : Item AD moindre que la même AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, est moindre que la plus éloignée.

Finalement, soit fait l'angle AKL égal à l'angle AKC, tirant KL, jusques à ce qu'elle rencontre la peripherie en L, & soit menée la ligne AL. D'autant que les costez AK, KC du triangle AKC, sont égaux aux costez AK, KL du triangle AKL ; & les angles AKC, AKL aussi égaux, les lignes droites AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, seront égales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puisse estre égale à icelles il est evident ; car si on en mene une autre du point A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus éloignée de AB ; & par ce qui a été démontré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du point A tomberont seulement deux lignes droites égales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy si on prend quelque point hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

S C H O L I E.

Par même raison de A ne peuvent tomber en la circonférence concave que deux lignes droites égales de part & d'autre de la plus grande AI . Car ayant fait l'angle AKM égal à l'angle AKG , & mené AM , les triangles AKM , AKG auront les bases AG , AM égales par la 4. prop. 1. & on ne peut de A mener à ladite circonférence concave d'autre ligne égale à icelle AG , AM , attendu qu'elle seroit plus proche ou plus éloignée de $A I$, & par conséquent plus grande ou plus petite qu'icelles, ainsi qu'il appert par ce qui a été démontré cy-dessus.

Il appert aussi que quand l'une des lignes tombantes de A , touche le cercle, comme AN , qu'icelle touchante est plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonférence concave. Car étant tirée du centre à l'atouchement la ligne droite KN , les deux costez AK , KF du triangle AKF , seront égaux aux deux costez AK , KN du triangle AKN , chacun au sien, & l'angle AKF est plus grand que l'angle AKN , & par la 24. pr. 1. la base AF sera plus grande que la base AN . Et par même raison toute autre ligne tombante en la circonférence concave sera plus grande qu'icelle AN .

Mais la même ligne touchante AN sera la plus grande de toutes les autres lignes qui tombent de A en la circonférence convexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux costez AE , EK sont moindres que les deux costez AN , NK , si on en ôte les lignes égales KE , KN , restera AE moindre que AN ; & ainsi des autres.

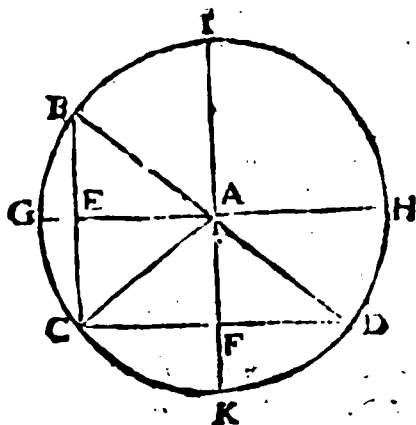
Au reste ce qu'Euclide a démontré en cette 8. prop. avenir aux lignes menées d'une même part de la plus grande ou plus petite, aviendra encore, les lignes estans menées de diverses parts, c'est à dire, que si AH est plus proche de AI que AM : icelle AH sera aussi plus grande que ladite AM , jadis qu'elles ne soient toutes deux d'une même part: & si AD est plus éloignée de AB que AL , elle sera aussi plus grande qu'icelle AL . Ce qu'on peut démontrer procédant, ainsi qu'au précédent Scholie pour les lignes tirées de diverse part.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque point au dedans d'un cercle, & d'iceluy point tombent à la circonférence plus de deux lignes droites égales, le point pris est le centre du cercle.

Soit pris le point A au cercle BCD, & d'iceluy point tombent à la circonférence les trois lignes droites égales AB, AC, AD. Je dis que le point pris A, est le centre du cercle.

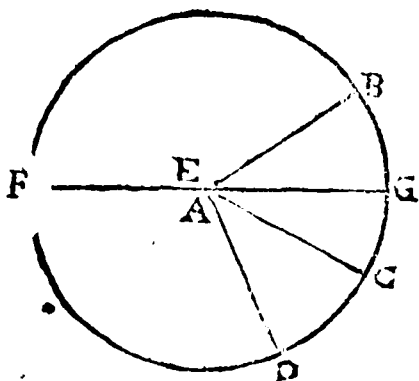
Qu'il ne soit ainsi : soient menées les lignes droites BC & CD, & apres les avoir coupées en deux également aux points E & F, d'iceux points au point A, soient menées les deux lignes droites EA, FA, & prolongées de part & d'autre en la circonférence. D'autant que les deux triangles BEA & CEA,



ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & les bases AB, AC aussi égales, les deux angles au point E sont égaux, & partant droites, & par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre du cercle sera en ligne droite GAH, puis qu'elle divise la ligne droite BC en deux également, & à angles droits en E. Par même discours le centre du cercle se trouvera aussi en la ligne droite KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre point commun. Parquoy si on prend quelque point dedans un cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

Autrement. Si le point A n'est le centre du cercle, soit iceluy centre au point E, si faire se peut, duquel soit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre G,

est pris le point A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droites AD, AC; icelle AD qui est plus proche de AF tirée par le centre E, sera plus grande que AC par la 7. p. 3. Ce qui est absurde, car icelles AB, AC ont été posées égales. La même absurdité s'ensuivra toujours si on pose le centre être à un autre point que A: parquoy iceluy point A sera le centre du cercle A B C. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 9. PROP. X.

Un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points.

Soient les deux cercles A B C D & E F G H, se coupans aux trois points I, K & L, s'il est possible. Item soient menées les deux lignes droites I K & K L, lesquelles soient coupées en deux également aux points M & N par la 10. prop. 1.

& soient menées les lignes droites M C, N H, à droits angles sur I k & K L. Il

faudra par le Corol. de la

1. pr. de ce livre que les

deux centres des deux cer-

cles soient en la ligne AC;

ils seront aussi en la ligne

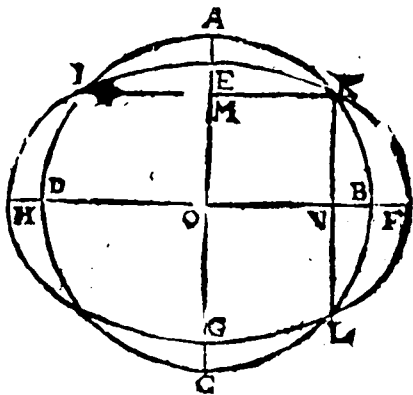
FH: Ce sera donc au point

de la commune section O,

& en ce faisant les deux

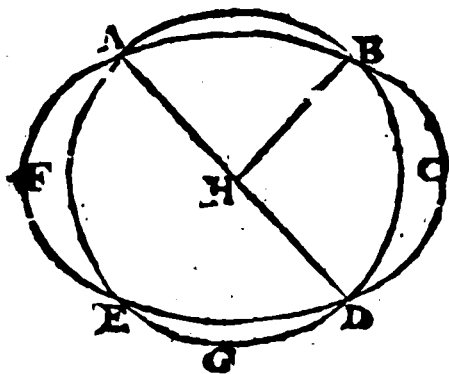
cercles auroient même cen-

tre contre la 5. prop. de ce livre. Donc les cercles A B C D &



E F G H ne se pouvoient pas couper en plus de deux points. Ce qu'il falloit demontrer.

Autrement. Que les deux cercles ABCDEF, & ABDGE se coupent, s'il est possible, en plus de deux points, c'est à savoir en A, B, D : & soit trouvé le centre du cercle ABDGE, lequel soit H, & d'iceluy soient menées les lignes droites HA, HB, HD, lesquelles seront égales entr'elles par la defin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle ABCDEF on a pris le point H, duquel tombant à la circonference plus de deux lignes égales, iceluy point H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entre coupans ont même centre. Ce qui est absurde.

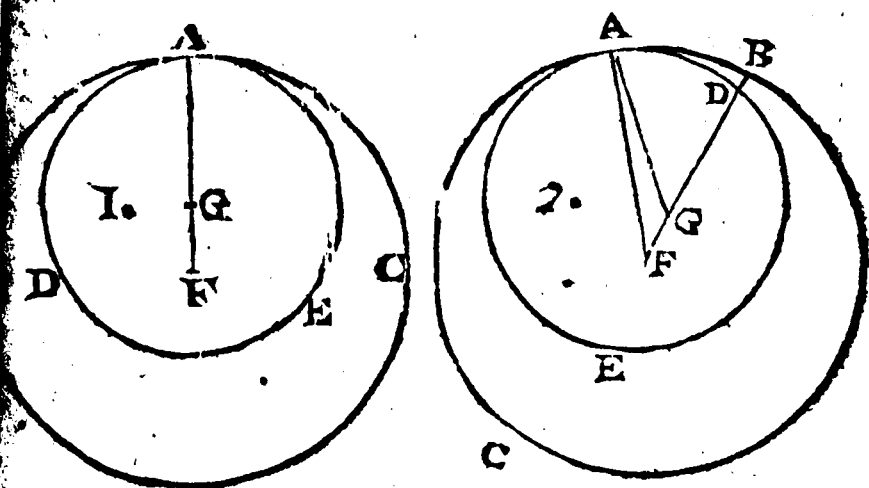


THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'un l'autre au dedans, on conjoint iceux centres par une ligne droite; icelle ligne étant prolongée tombera en l'atrouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans intérieurement au point A, & par la 1. pr. 3. soit trouvé le centre du cercle ABC, lequel soit F; puis que par la 6. pr. 3. deux cercles s'entretouchans au dedans ne peuvent avoir un même centre, F ne sera pas le centre du cercle ADE: Soit donc aussi trouvé son centre, qui soit G. Je dis que la ligne droite menée du centre F au centre G, & prolongée de ce costé là jusques à la circonference du plus grand cercle ABC, tombera au point de l'atrouchement A; comme à la premiere figure. Car

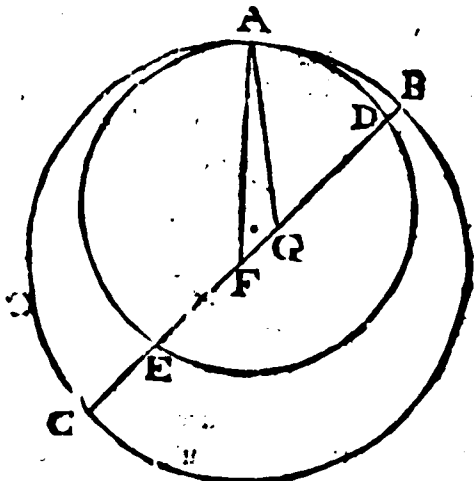
autrement il faudra qu'elle tombe à quelqu'autre point de ladite circonférence, car d'autant que les deux centres F & G sont au dedans du cercle A B C, ladite ligne FG étant conti-



nuée, elle ira nécessairement rencontrer la circonférence d'ice-luy cercle : & si quelqu'un dit que ce n'est pas au point d'arouchement, soit, s'il est possible, à quelconque autre point, comme B en la 2 figure ; tellement que la ligne FGB coupe la circonférence du moindre cercle ADE au point D. D'autant donc que les centres F & G, & le point d'atouchement A ne sont pas en une ligne droite, si dudit point A on mène des lignes droites aux deux centres F & G, elles feront un triangle avec la ligne FG, qui est la distance d'un centre à l'autre, lequel triangle soit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux costez AG, FG dudit triangle AFG, sont plus grands que l'autre costé FA ; & ice'uy FA est égal à la ligne FB, (pource que F est le centre du cercle ABC) aussi les lignes AG, GF seront plus grandes que FB : ostant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant, puis que GA est égale à GD ; (car G est le centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc la ligne droite conjoignant les deux centres des cercles ABC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'atouchement A. Parquoy si deux cercles se touchent l'un, l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

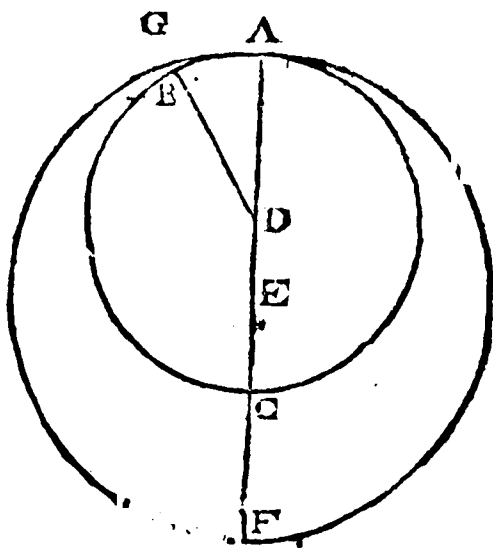
Candalle, Errard & quelques autres Interpretes de-
monstreront cette 11. prop. ainsi qu'il ensuit. Soient deux
circonférences ABC & ADE se touchans intérieurement
au point A , & de la plus grande ABC , le centre soit F ,
duquel au point d'attachement A soit menée la ligne
droite AF : le dis que
le centre de la plus
petite circonférence
 ADE est en icelle li-
gne AF . Autrement,
qu'il soit hors d'icelle,
s'il est possible, comme
au point G , & soit
conjoint FG , & pro-
longé de la part de G
jusques à ce qu'il cou-
pe les deux circonfé-
rences aux points D
& B , puis soit mené
 GA : D'autant que par



la 20. prop. 1. les deux costez AG , EG du triangle AFG
sont plus grands que l'autre costé FA ; & iceluy FA est
égal à la ligne FB , puis que F est le centre du cercle
 ABC ; aussi AG , EG seront plus grandes que FB . Or sans
donc FG commune, restera GA plus grande que GB ; mais
 GA est égale à GD (car G a été posé centre du cercle
 ADE .) Donc aussi GD sera plus grande que GB ; la par-
tie que de tout; ce qui est absurde. Parquoy le centre de
l'autre circonférence ADE ne sera pas hors la ligne FA ; &
partant les deux centres des circonférences ABC & ADE
seront en ladite ligne FA . Donc la ligne conjoignant iceux
centres & prolongée tombera au point d'attachement A .

Encore autrement selon Pellesier & Billingsley. Soient
deux cercles ABC , AFG s'entretouchans au dedans en A ,
& par la 1. pr. 3. soit trouvé le centre du cercle ABC , qui
soit D , & aussi le centre de AFG , lequel soit E : le dis
que la ligne droite menée du centre E à D & prolongée jus-
ques à la circonférence du plus grand cercle tombera au

point de l'atouche-
ment A. Car au-
trement elle tom-
bera de part ou
d'autre d'iceluy
atouchement A ;
qu'elle tombe donc,
s'il est possible, à
un autre point,
comme G : telle-
ment que FEDG
soit diametre du
grand cercle AGF,
& ELB du petit
cercle ABC, &
soit tirée DA.
D'autant qu'un
diametre FEDG,
le point D est autre



que le centre E, la ligne droite DA sera plus grande que DG par la 7. pr. 3. Mais DB est égale à DA par la def. du cercle : donc DB sera aussi plus grande que DG, la partie que le tou. Ce qui est absurde. Parquoy la ligne ED pro-
longée vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy point d'atouchement A.

THEOR. II.

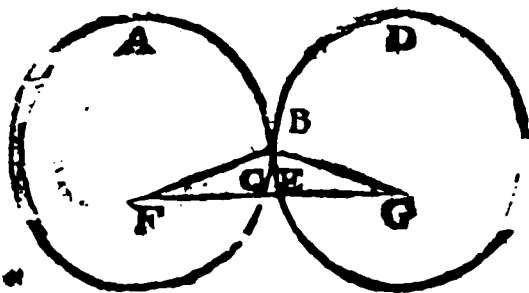
PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors,
la ligne droite menée d'un centre à l'autre, pas-
sera par l'atouchement.

Soient deux cercles ABC, DBE se touchans l'un l'autre au
dehors au point B, desquels les centres soient F & G. Je dis
que si d'un centre à l'autre on mene une ligne droite, qu'icelle
passera par le point d'atouchement B.

Autrement, il s'ensuivra absurdité : car si icelle ligne ne passe
par le point d'atouchement B, qu'elle passe ailleurs, s'il est pos-
sible, sçavoir aux points C & E, où elle coupe les deux circon-
ferences, & du point d'atouchement B soient menées les deux

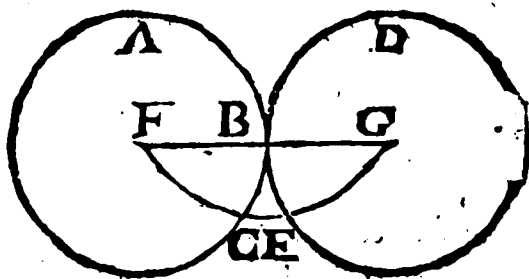
lignes droites FB , GB , lesquelles par la 20. prop. 1. feront plus grandes que FG , & par la def. du cercle, il s'ensuit que FC , étant égale à FB , & GB à GB , que les deux lignes FC & GB , seront plus grandes que FG , la partie que le tout. La ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera donc par l'atouchement B . Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

D'autant qu'en cette démonstration d'Euclide, les centres ne demeurent en leurs vraies places, & que cela pourroit peut-être causer quelque doute, Oronce & Schubert en ont ajouté une autre où les centres reviennent leurs places, laquelle est telle. Que les cercles ABC , DBE s'entre-touchent au dehors en B , & d'iceux les centres soient F & G : Je dis que la ligne droite menée d'un centre à l'autre passera par le point d'atouchement B , c'est à dire que si on mène à iceluy point B les lignes droites

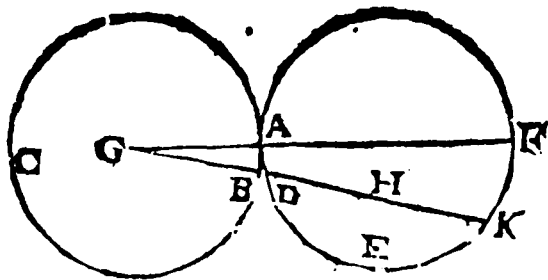
FB , GB , elles feront une seule ligne droite FBG . Car autrement elles feront un angle à iceluy point B , & de F à G



on pourra mener une ligne droite, laquelle soit (s'il est possible) $FCEG$, qui coupe les circonferences en C & E . Donc icelle ligne droite $FCEG$ constituera un triangle avec les

deux lignes FB , GB , puis qu'on a posé qu'elles s'inclinent & font angle au point B : & par la 20. p. 1. icelles FB , GB sont plus grandes que $FCEG$: Mais par la def. du cercle FC est égale à FB , & GE à GB : donc FC & GE seront aussi plus grandes que la même $FCEG$, la partie que le tout: (car icelle $FCEG$ outre FC , GE contient encore la ligne droite CE ,) Ce qui est absurde.

Pellissier, & apres luy Billingsley demontrent encore cette 12. pr. ainsi. Soient les deux cercles ABC & DEF qui s'entrecouchent par dehors au point A ; & que G soit le centre du cercle ABC , duquel soit tirée par l'atouchement des cercles, la ligne droite GA jusques à ce qu'elle rencontre la circonference DEF au point F : Je dis que le centre du cercle ADE est en icelle ligne droite GAF . Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au point H , & du centre G à iceluy centre H soit tirée la ligne droite GKH jus-

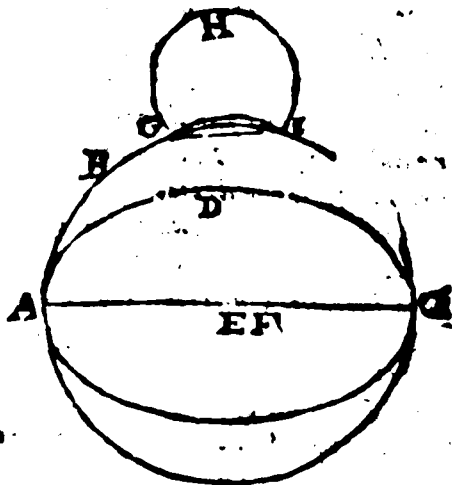


ques à ce qu'elle rencontre la circonference en K , coupant la peripherie ABC en B , & la circonference ADE en D . D'autant que du point G , qui est hors le cercle ADE , sont tirés à iceluy cercle les deux lignes droites GK , GF , desquelles GK passe par le centre H , par la 8. pr. 3. la partie extérieure GD sera moindre que GA partie extérieure de GF . Mais AG est égale à GB par la def. du cercle: donc aussi GD sera moindre que GB , le tout que la partie: ce qui est absurde. Donc le centre du cercle ADE ne sera pas hors la ligne GAF , & passant les deux centres des cercles ABC , & ADE seront en icelle ligne GF ; parquoy la ligne conjoignant iceux centres passera par l'atouchement des cercles.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Un cercle ne touche point un autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & ADC se touchans intérieurement aux deux points A & C, s'il est possible ? & d'autant qu'ils ne peuvent avoir un même centre par la 6. pr. de ce livre, soient les deux centres divers E & F, par lesquels étant tirée la ligne droite EF, & produire de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és points d'atouchement A & C par la 11. pr. de ce même livre : & par la def. du cercle, il faut que les lignes droites EA & EC soient égales. Item FA & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout : ce qui est impossible. Donc les



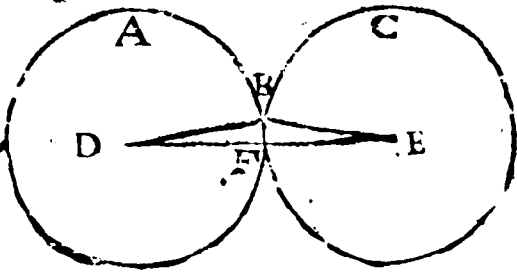
deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

Parcillement, il est impossible qu'ils se touchent extérieurement à plus d'un point : car si le cercle GHI pouvoit toucher en dehors le cercle ABC en deux points, comme G & I, il faudroit que la ligne droite GI menée par lesdits deux points tombast dedans l'une & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui est impossible : car icelle ligne droite GI tombant dedans le cercle ABC, elle ne peut pas tomber dedans le cercle GHI, puis qu'iceluy est tout dehors ABC. Parquoy les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Cette 2. partie est encore démontrée par plusieurs Interprètes ainsi. Que les deux cercles AB & CB, dont les centres sont D & E, s'entrerochent par dehors au point F : le dis qu'ils ne se peuvent toucher à un autre point. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droite DE, elle passera par ledit atouchement F par la procé-

dente prop. & si les cercles se touchoient encore à un autre point, comme B, la ligne droite menée d'un centre à l'autre passeroit aussi par iceluy atouchement B; & par ainsi les deux lignes droites DFE, DBE enclorroient une superficie, ce qui est impossible.



Glavinus demontre en ce lieu le Theoreme suivant.

Si au demy diametre d'un cercle produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extrême du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extrême du demy-diametre, & tombera tout dehors le même cercle.

Soit le cercle ABC, (voyez la dernière figure de la page 182.) duquel le centre est D, & au demy diametre AD prolongé, soit pris quelconque point comme E, duquel & de l'intervalle EA soit décrit le cercle AFG, lequel je dis toucher le cercle ABC au seul point A. Car ou le point E est dans le cercle ABC, ou dehors. S'il est dedans : d'autant que AE est plus grand que AD, c'est à dire que DC, & à plus forte raison que EC : la ligne EF qui est égale à EA sera aussi plus grande que EC : & partant le point F est hors le cercle ABC : & le cercle AFG hors le même cercle près du point F. Iceluy point F tombera beaucoup davantage hors le cercle ABC, si E est hors le même cercle ABC. Si donc donc le cercle AFG ne tombe tout dehors le cercle ABC, tellement qu'il le touche au seul point A, que le cercle AFG coupe ou touche le cercle ABC, en un autre point B, si faire se peut, & soit tirée la ligne DB. Vû donc qu'au diametre du cercle AFG est pris le point D, outre le centre E, la ligne DA sera la plus petite de toutes les lignes droites tom-

bantes de D à la circonférence, par la 7. prop. 3. Donc DA est moindre que DB , ce qui est absurde; car DA , DB tombant du centre D en la circonférence d'un même cercle ABC , sont égales. Donc le cercle AFG ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre point que A , mais tombe tout dehors iceluy: ce qui étoit proposé.

Que si au semy-diametre non produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extrême du semy-diametre touchera pareillement le premier cercle au susdit point extrême du demy-diametre, & tombera tout dedans le même cercle. Comme si au semy-diametre AE , du cercle AFG , on prend le point D , duquel & de l'intervale DA , on décrit le cercle ABC , iceluy tombera totalement dedans AFG , & le touchera au seul point A . Car puis qu'il a été démontré cy-dessus que le cercle AFG tombe tout dehors le cercle ABC , pareillement tout celui-ci tombera dedans celui-là, tellement qu'ils s'entretouchent au seul point A : & par ainsi apert ce qui étoit proposé.

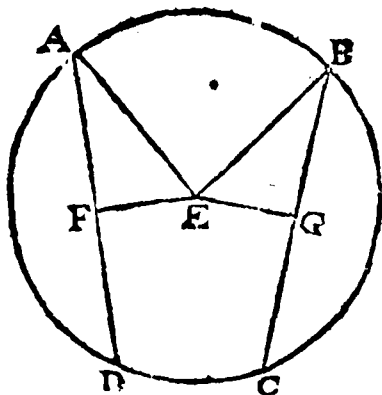
THEOR. 13. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droites égales, sont également distantes du centre; & les également distantes du centre sont égales entr'elles.

Au cercle $ABCD$, duquel le centre est E , soient deux lignes droites égales AD & BC . Je dis qu'elles seront également distantes du centre E .

Qu'ainsi ne soit, par la 12. prop. 1. du centre E soient menées les deux lignes EF , EG , perpendiculaires aux deux lignes droites AD , BC : puis soient tirées les deux lignes AE & BE . Or les deux lignes droites AD & BC , étant coupées en angles droits par les perpendiculaires EF & EG , elles seront aussi coupées en deux également par la 3. p. 3. & puis qu'icelles AD , BC sont posées égales, la moitié AF sera égale à la moitié BG . Pareillement AE étant égale à BE par la def. du cercle. le quarré de AE sera égal au quarré de BE . Mais iceluy quarré de AE est égal aux deux quarrés de

AF, FE, par la 47. prop. 1. & le quarré de BE est égal aux deux quarréz de BG, GE. Donc les deux quarréz de AF, FE seront égaux aux deux quarréz de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG sont égales, le quarré de AF est égal au quarré de BG, & par conséquent le quarré de FE, est égal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE sera égale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC seront également distantes du centre E.



Quant à la seconde patrie. Je dis que si AD, BC sont également distantes du centre E, qu'elles seront égales entr'elles : car ayant construit, comme dessus, les perpendiculaires EF & EG seront égales par la 4. def. de ce liv. & couperont AD, BC en deux également par la 3. pt. de ce même liv. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy-dessus, AF se trouvera égale à BG, & par conséquent aussi leurs doubles AD & BC seront égales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droites égales, &c. Ce qui étoit à demontrer.

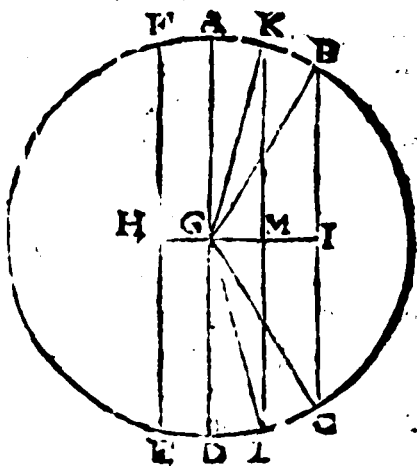
THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne est le diamètre : quant aux autres toujours la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre est G soit le diamètre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy : mais BC la plus éloignée. Je dis que de toutes ces lignes AD est la plus grande, & que FE est plus grande que BC.

Car soient tirées du centre G les lignes droites GH, GI perpendiculaires aux lignes droites FE, BC : & pource que BC est plus éloignée du centre que FE ; la perpendiculaire

GI, sera plus grande que GH, par la 4. def. de ce Livre. Soit donc coupé d'icelle GI, la ligne GM égale à GH, & par M soit menée KML perpendiculaire à GI, & soient tirées les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont égales, les lignes droites KL, FE seront également distantes du centre par la 4. def. de ce Livre, & partant égales entr'elles par la prop. précédente. Derechef, puis que GK, GL, sont plus grandes que KL par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont égales au diamètre AD; iceluy diamètre AD sera aussi plus grand que KL ou FE. Par mesme raison on démontrera que AD est plus grande que toutes les autres lignes.



Item, d'autant qu'aux triangles GKL & GBC, les costez GK, GL, GB, GC sont égaux par la définition du cercle, & l'angle CKL est plus grand que l'angle BGC, par la 24. prop. 1. la base KL, ou son égale FE, sera plus grande que la base BC, & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diamètre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

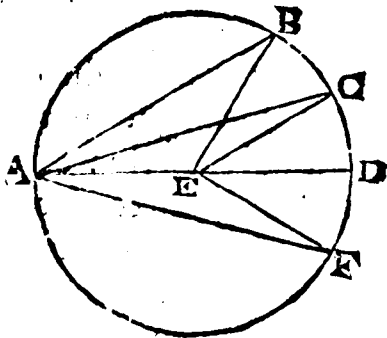
S C H O L I E.

Clavius démontrera icy le Theoreme suivant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend un point, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droite au cercle, l'une desquelles passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes; mais des autres les plus proches de celle-là qui passe par le centre seront plus grandes que les plus éloignées: & n'y en peut avoir que deux égales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle AB, CD soit pris le point

Et d'iceluy soient menées plusieurs lignes droites AB, AC, AD, desquelles AD passe par le centre E: se dit que AD est la plus grande de toutes, & AC estre plus grande que AB, qui est plus éloignée d'icelle AD. Car estans menées les lignes BE, CE; au triangle AEC les deux costez AE, EC seront plus grands que le costé AC par la 20. pr. 1. Mais celles lignes AE, EC sont égales aux lignes droites AE, ED, c'est à dire à la ligne droite AD. Donc icelle AD sera plus grande que AC: & par mesme raison elle sera aussi plus grande que AB, & ainsi des autres.



En apres, d'autant qu'au triangle AEC les deux costez AE, EC sont égaux aux deux costez AE, EB du triangle AEB, chacun au sien, & tout l'angle AEC plus grand que l'angle AEB, la base AC sera plus grande que la base AB par la 14. propof. 1. Et par mesme raison AC sera plus grande que toute autre ligne plus éloignée du centre E.

En 3. lieu: se dit que du point A on ne peut mener au cercle que deux lignes droites égales entr'elles de part & d'autre de la plus grande AD. Car ayant fait l'angle AEF égal à l'angle AEC, & joint AF, les deux costez AE, EC seront égaux aux deux costez AF, EF, & les angles AEC, AEF, contenus d'iceux costez, aussi égaux, & par la 4. prop. 1. les bases AC, AF sont égales: & il est évident que du mesme point A on ne peut tirer dans le cercle une autre ligne, qui ne s'approche ou s'éloigne de AD; & partant plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AF. Donc du point A ne se peuvent tirer dans le cercle que deux lignes droites égales entr'elles.

Que si de AB, AF, tirées de diverses parts du diamètre AD, on dit que AF est plus proche d'iceluy diamètre AD, on démontrera, comme au Scholie de la 7.

THEOR. 15. PROP. XVI.

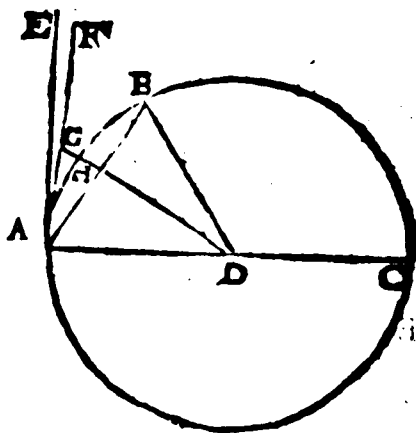
Si à l'extrémité du diamètre d'un cercle, on leve une ligne perpendiculaire, elle tombera hors le cercle : & entre icelle perpendiculaire & la circonférence ne tombera pas une autre ligne droite, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Du cercle *ABC*, soit le centre *D*, & le diamètre *AC*, sur l'extrémité duquel *A*, soit levée la ligne perpendiculaire *AE*, par la 11. prop. 1. Je dis premierement qu'icelle ligne *AE* tombe hors le cercle.

Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que *AB*, étant tirée *DB*, les deux angles *DAB*, *DBA*, seront égaux par la 5. prop. 1. Mais *DAB* est droit par la construction : donc *DBA* sera aussi droit : ce qui est absurde, puis que par la 17. prop. 1.

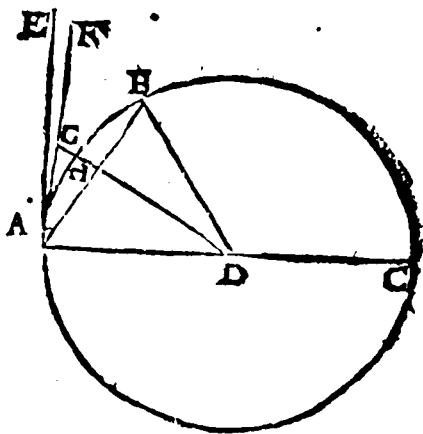
deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la même raison elle ne tombera pas aussi en la circonférence, mais dehors, comme est *AE*.

Maintenant, je dis que de *A* ne peut tomber entre la perpendiculaire *AE*, & la circonférence *AB* une autre ligne droite. Car s'il est possible que quelque ligne droite y tombe, comme *AF*, de *D* soit menée sur icelle la perpendiculaire *DG*, coupant la circonférence en *H*, laquelle tombera nécessairement de la part de l'angle aigu *DAF* par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc qu'au triangle *DAG*, les deux angles *DAG*, *DGA*, sont



sont moindres que deux droits par la 17. prop. 1. & par la construction DGA est droit, l'angle D A G sera moindre qu'un droit, & partant la ligne D A, ou son égale D H, sera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout : ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonférence AB ne tombera donc pas une autre ligne droite.

Je dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diamètre AC, & de la circonférence AB, est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celui qui reste BAE contenu de la ligne droite AE, & de la circonférence AB est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE est angle droit divisé par la seule circonférence AB, & qu'entre icelle circonférence AB & la ligne droite AE, ne peut tomber une autre ligne droite ; l'angle BAE ne peut être divisé par aucune ligne droite, & par ainsi ne sera diminué par aucune ligne droite, ny par conséquent l'angle BAC ne sera augmenté par aucune ligne droite. Si donc à l'extrémité du diamètre d'un cercle on leve une perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de l'extrémité du diamètre, touche le cercle en un seul point. Car il a été démontré qu'elle tombe hors le cercle ; & partant elle le touche seulement au point extrême du diamètre. Parquoy s'il étoit requis tirer une ligne droite par le point A donné en la circonférence du cercle, laquelle touchast le cercle en A nous tirerions de A au centre D la ligne droite AD, & sur icelle seroit élevée la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a été démontré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit le point donné A , duquel il faut mener une ligne droite qui touche le cercle donné BC , dont le centre est D .

Soit menée la ligne AD coupant le cercle BC en B :

puis du centre D , & intervalle DA , soit décrit le cercle

AEF : Et apres avoir levé au bout du demy diametre BD

la perpendiculaire BE par la

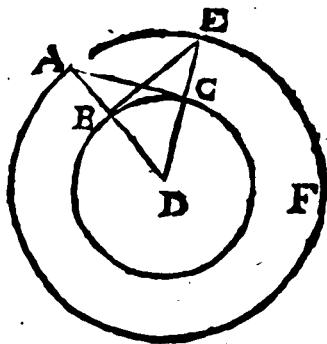
II. p. 2. laquelle coupe la circonférence AEF en E , soit

menée la ligne ED coupant le cercle BC au point C , &

du point donné A , à iceluy point C , soit menée la ligne

AC : ie dis qu'elle touche le cercle donné BC au point C .

Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux costez egaux, & l'angle D commun, la base AC sera egale à la base EB , & l'angle droit ACD egal à l'angle EBD , qui sera aussi droit. Et par le Corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au seul point C . Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AC , qui touche le cercle donné au point C . Ce qu'il falloit demontrer.



S C H O L I E.

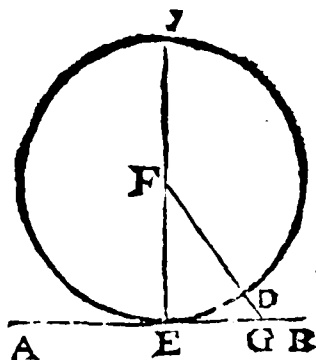
La pratique de cette prop. est aisée à entendre par la construction d'icelle : mais nous avons enseigné en nôtre Geometrie pratique, Prob. 20. une autre maniere beaucoup plus facile, laquelle nous rapporterons encore à la 34. prop. de ce livre.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite touche un cercle : & du centre à l'atouchement on mene une ligne droite, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point E , & d'iceluy point d'atouchement soit menée la ligne droite EC passant par le centre F . Je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB .

Car si elle ne l'est, soit menée FG perpendiculaire à AB , coupant la circonférence en D . Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG , FGE sont moindres que deux droits, par la 17. prop. 1. & FGE est droit par la construction FEG sera moindre qu'un droit, & par la 10. p. 1. la ligne FE , ou FD son égale sera plus grande que FG , la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc FE est perpendiculaire à AB . Parquoy si une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

Clavius démontre encore cette prop. ainsi. Si EC n'est perpendiculaire à AB , l'un des angles qu'elle fait au point E sera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu ; & veu qu'il est plus grand que l'angle du demy cercle CED , l'angle du demy cercle sera plus petit que quelque angle rectiligne aigu : ce qui est contre la 16. pr. 3. & par tant absurde.

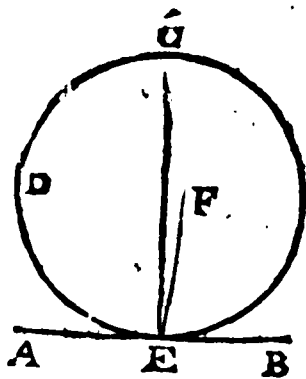
THEOR. 17. PROP. XIX.

Si une ligne droite touche un cercle, & au point de l'atouchement est levée une perpendiculaire ; en icelle sera le centre du cercle.

N 2

Soit la ligne droite AB , touchant le cercle CDE au point E & d'iceluy soit levée EC perpendiculaire à AB . Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire EC .

Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F , s'il est possible, & d'iceluy point soit menée la ligne droite EF au point de l'attouchement E ; icelle ligne EF sera aussi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui est impossible: car les deux angles AEC , AEF seroient droits & égaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors

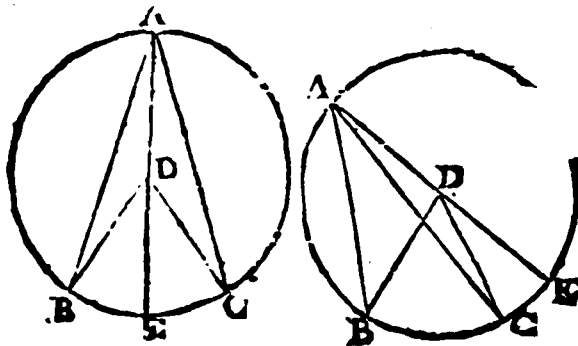


la ligne EC , ains dedans. Si donc une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 18. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonférence, quand iceux angles ont une même circonférence pour base.

Au cercle ABC , duquel le centre est D , soient construez



les deux angles BAC & BDC , sçavoir BAC en la circonférence

de, & BDC au centre, ayant pour base une même circonférence BAC . Je dis que l'angle BDC sera double de l'angle BAC .

Car premièrement, si les lignes droites AB , AC enclosent les lignes DB , DC , comme en la première figure; étant menée par le centre D la ligne droite ADE , & les lignes DA , DB & DC , étant égales, les deux triangles ADB & ADC seront Ifoſceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles égaux sur les bases AB & AC . Mais l'angle extérieur BDE par la 32. p. 1. est égal aux deux angles intérieurs DAB & DBA , qui sont égaux: partant il sera double du seul DAB : par même discours EDC se trouvera aussi double de DAC , & par conséquent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC .

Que si l'angle de la circonférence BAC est comme en la seconde figure, il s'en suivra toujours le même, ſçavoir que l'angle BDC sera double de l'angle BAC .

Car après avoir mené par le centre D la ligne ADE , par la 32. pr. 1. l'angle extérieur BDE sera égal aux deux opposés intérieurs ABD , DAB , & double du seul DAB , le triangle étant Ifoſcele: par même discours CDE sera double de CAD , & par la 20. com. sent, si de BDE double de BAE on ôte CDE , double de CAE , le demeurant BDC sera double du demeurant BAC . Parquoy au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonférence, &c. Ce qu'il falloit prouver.

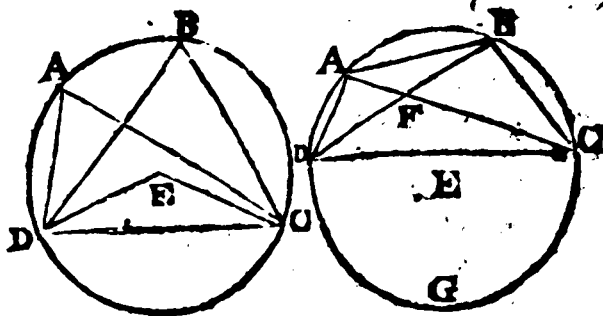
THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui sont en une même portion, sont égaux entr'eux.

Toute portion de cercle, est ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premièrement au cercle $ABCD$, le centre duquel est E , une plus grande portion $DABC$, en laquelle soient les angles DAC & DBC . Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Car si du centre E on mene les deux lignes ED & EC , l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonférence DAC par la prop. prec. & par la même prop. il sera aussi dou-

ble de
l'autre.
angle
D. B. C.
Mais les
choles
qui sont
moitié
d'une
même ,
sont



égales entr'elles : Donc aussi les angles A & B seront égaux entr'eux.

Soit maintenant une portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC, étans en la même portion DABC sont égaux.

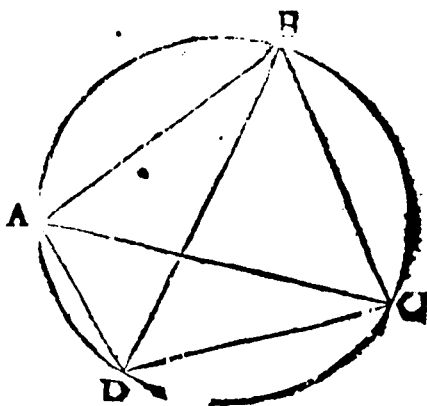
Car si on mene la ligne droite AB, il se fera une portion BGA, plus grande que le demy cercle, & comme nous avons démontré cy-dessus, les deux angles ADB & BCA, qui sont en une même portion AGB, seront égaux : pareillement aux deux triangles DAF & CBF, les angles opposez au point F sont égaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a été démontré à la 32. pr. 1. le troisième angle DAF sera égal au troisième angle CBF. Donc au cercle, les angles qui sont, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre côtez inscrites au cercle, ont les angles opposez égaux à deux angles droits.

Soit le cercle ABCD, auquel soit inscrite la figure de quatre côtez ABCD. Je dis que les angles opposez ABC, ADC, item BAD, BCD, sont égaux à deux droits. Car si on mene les deux diagonales AC & BD, les deux angles ACD & ABD, étans en une même portion ABCD, seront égaux par la pr. prec. Pareillement les deux angles DBC & CAD, étans en une même portion DABC, seront égaux ; donc les deux angles sous le point B, seront égaux aux deux DAC & DCA, lesquels avec les deux du point D, sont égaux à

deux droitz par la 32. pr.
 1. partant aussi les deux
 sous le point B avec les
 deux sous le point D : c'est
 à dire le total ABC, avec
 le total ADC, seront egaux
 à deux droitz. Nous de-
 montrerons en la même
 maniere que les deux an-
 gles BAD, BCD, sont
 egaux à deux droitz. Car
 d'erechet les deux angles
 ABD, ACD, sont egaux.
 Item les deux BCA, BDA;
 & partant tout l'angle BCD



sera egal aux deux ABD, ADB, lesquels avec BAD sont
 egaux à deux droitz par la 32. p. 1. Donc aussi les deux BCD,
 BAD, seront egaux à deux droitz. Parquoy les figures de qua-
 tre costez inscrites au cercle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

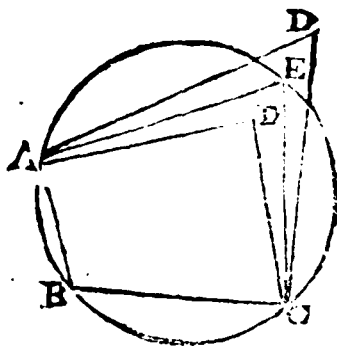
S C H O L I E.

La converse de cette 22. prop. peut être démontrée ainsi qu'il ensuit.

Si deux angles opposez d'un quadrilatere sont egaux à deux droitz, le cercle décrit par trois angles d'iceluy passera aussi par le quatrième angle.

Au quadrilatere ABCD, les deux angles opposez B & D soient egaux à deux droitz, & par les trois angles A, B, C, soit décrit un cercle : Je dis qu'il passera aussi par le 4 angle D. Car s'il n'y passe, il passera ou au deçà de D, ou au delà. Soient donc tirées

les deux lignes droites AE, CE, en telle sorte que ne coupant les lignes droites CD, AD, elles constituent au cercle un quadrilatere ABCE. Donc par la 22. pr. 3. les deux angles opposez B, E sont egaux à deux droitz. Mais par l'hypothese les deux angles B & D, sont aussi e-



gaulx à deux droitz; & partant les deux angles B & E

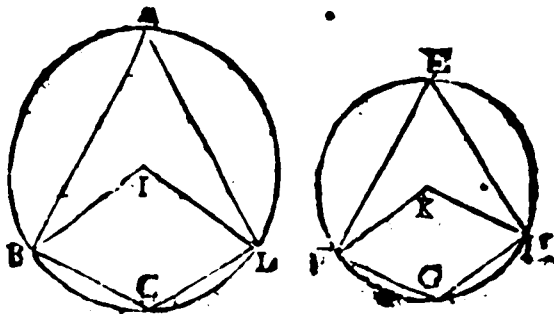
seront égaux aux deux B & D. Parquoy en ôtant l'angle commun B, resteront les angles D & E égaux : Ce qui est absurde, car étant tirée la ligne droite CA, l'angle D sera plus grand que l'angle E par la 21. pr. Mais au contraire l'angle E sera plus grand que l'angle D. Le cercle passera donc par le point D.

Nous démontrerons encore icy quatre theoremes non seulement utiles aux choses Geometriques, mais aussi nécessaires aux Astronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'appuyent sur arcs semblables sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient constituez aux centres ou aux circonferences : & au contraire, les arcs auxquels s'appuyent angles égaux constituez aux centres ou aux circonferences, sont semblables.

Aux cercles ABCD, EFGH, desquels les centres I & K. Soient premièrement les arcs semblables BCD, FGH, auxquels insistent & s'appuyent les angles I & K aux centres & les angles A & E aux circonferences. Je dis que sans ces deux là, que ces deux-cy sont égaux entr'eux. Car étant consti-

tuez en iceux arcs les angles C, G, qui par la 10. d. 3. seront égaux : & par la 22. p. 3. sans les deux angles C, A, que les deux G, E, sont



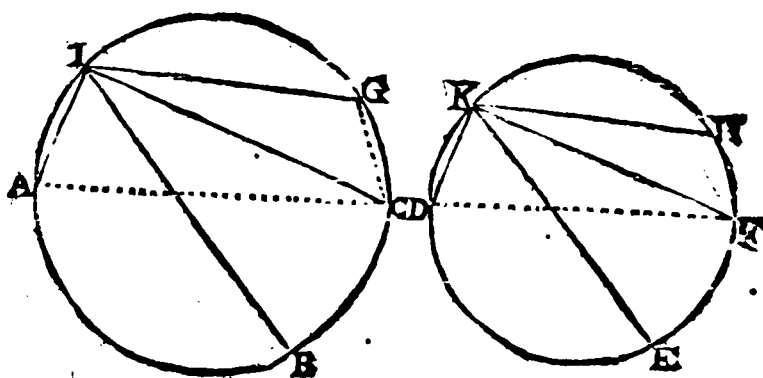
égaux à deux droits. Orant donc les égaux C, G, les restans A, E seront aussi égaux : Mais d'iceux sont doubles les angles I, K, par la 20. prop. 3. & par conséquent ils sont aussi égaux. Ce qui étoit proposé.

Secondement, soient égaux tant les angles I, K, que A, E, lesquels s'appuyent sur les arcs BCD, FGH : Je dis qu'iceux arcs BCD, FGH sont semblables. Car A & E sont égaux, & par la 22. prop. 3. tant les deux angles A & C que les deux E & G sont égaux à deux droits, les deux autres C & G seront aussi égaux ; & par tant les arcs

BCD , FGH , auxquels insistent les angles A , E aux circonférences, seront semblables par la 10. d. 3. Mais si les angles I & K aux centres sont égaux, leurs moitiés A & E , seront aussi égales. Parquoy comme dessus, les arcs BCD , FGH sont semblables. Ce qu'il falloit démontrer.

1. Si aux demy cercles, ou autres segmens semblables, l'on ajoute des segmens semblables; les totals segmens seront aussi semblables: & si des cercles, demy cercles, ou autres segmens semblables, on oste des segmens semblables; les segmens restans seront aussi semblables.

Aux cercles ABC , DEF , soient les segmens ou arcs semblables ABC , DEF qui soient demy cercles ou non, & à iceux soient ajoutez les arcs semblables CG , FH . Je dis que tout l'arc ABG est semblable à tout l'arc DEH . Car étans pris aux arcs restans les deux points I , K , comme on voudra, soient menées les lignes droites AI , CI , GI ; DK , FK , HK . D'autant que les arcs ABC , DEF sont semblables, les angles AIC , DKF , seront



égaux par le prec. Theor. Et par mesme raison les angles CIG , FKH seront aussi égaux, à cause des arcs semblables CG , FH . Donc tout l'angle AIG sera égal à tout l'angle DKH : & par le mesme theor. prec. les arcs ABG , DEH seront semblables: Ce qu'étoit proposé.

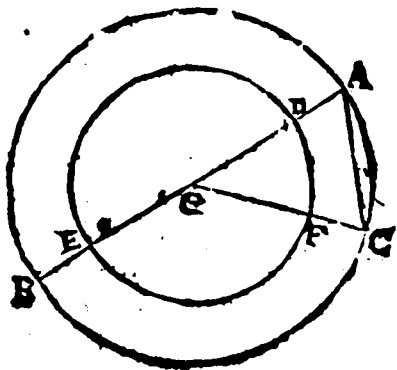
Maintenant, que des segmens ou arcs semblables ABC , DEF , soient retranchez les arcs semblables AB ,

DE. Je dis que les arcs restans BC , EF , sont aussi semblables. Car estant pris derechef les deux points I , K , aux peripheres restantes des arcs donnez, soient menées les lignes droites MI , BI , CI ; DK , EK , FK . Donc puis que tout l'arc ABC est semblable à tout l'arc DEF , tout l'angle AIC sera egal à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par mesme raison l'angle rebranché AIB sera egal à l'angle rebranché DKE , à cause des arcs semblables AB , DE : donc aussi l'angle restant BIC sera egal à l'angle restant EKF ; & consequemment les arcs BC , EF , seront semblables. Ce qu'il falloit demonstrier.

Que si des cercles entiers on oste les segmens semblables IAC , KDF , les segmens restans CGI , FHK seront aussi semblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux segmens les points A , G , D , H , soient menées les lignes droites IA , CA , IG , CG ; KD , FD , KH , FH . D'autant que les segmens IAC , KDF sont semblables, les angles IAC , KDF seront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. tant les deux angles opposez A , G , que les deux D , H , sont egaux à deux droits; en ôstant les deux angles egaux A & D , les deux restans G & H seront aussi egaux, & partant les segmens IGC , KHF seront semblables par la mesme def. Ce qui estoit proposé.

3. Si deux ou plusieurs cercles sont décrits d'un mesme centre, & d'iceluy soient menées deux ou davantage de lignes droites, qui coupent les circonferences, les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, seront semblables.

Soient deux cercles ABC , DEF , décrits d'un mesme centre G , duquel soient menées les deux lignes droites GB , GC , qui coupent les circonferences en B , C , & E , F : Je dis que les arcs EF , BC , sont semblables. Car étant prolongée la ligne EG jusques en A , & tirées les lignes droites AC , DF , l'angle G constitué au centre sera double de chacun des angles A , D ,

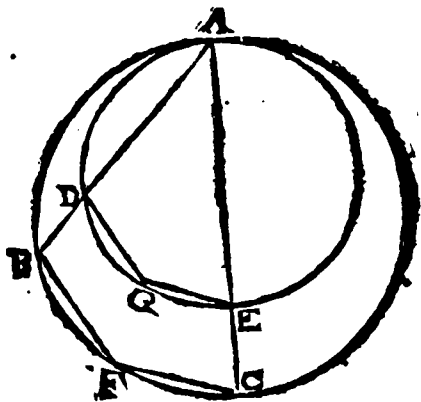


la circonférence par la 20. prop. 3. Donc par le 1. de
sheer. les arcs BC, EF, sur lesquels ils s'appuyent se-
ront semblables. Ce qui estoit proposé.

Autrement. D'autant que sur les arcs EF, BC s'ayent angles egaux au centre ; ou plütoft un seul & mesme angle BGC ; iceux arcs EF, BC seront semblables par le rheor. susdit.

Si deux ou davantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du point d'atouchement soient tirées deux ou davantage de lignes droites qui coupent les cercles ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes seront semblables ; comme aussi les arcs compris entre le point d'atouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC , ADE s'entrecroient n.
dedans au point A , duquel soient menées les deux li-
gnes droites AB , AC , qui coupent les cercles en B , C ,
& D , E : 1e dis-que tant les arcs BC , DE , que AB , AD : &
 ACB , AED sont semblables. Car ayant pris les deux points
 F , G , & tiré les lignes droites, BF , CF , DG , EG ; les deux
angles DAE , DGB , se-
ront egaux aux deux
angles BAC , BFC , at-
tendu que tant ces
deux-là, que ces deux
sont egaux à deux
droits par la 22. pr. 3.
& partant l'angle com-
mun BAC estant osté,
les deux autres angles
 DGE , BFC demeure-
ront egaux: & par la
10. def. 3. les arcs DE ,
 BC seront semblables.



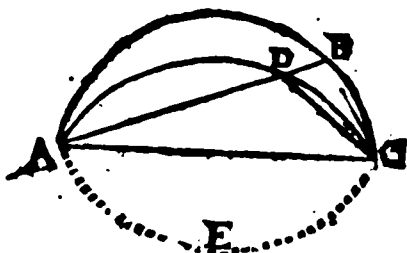
Et d'autant que si on conçoit estre tirée la ligne droite AC par le centre du cercle, elle tombera en l'atouchement A par la II. prop. 3. & en la mesme maniere que dessus les arcs DE, BC seront semblables, lesquels estans ôtez des demy cercles semblables, resteront aussi semblables les arcs AD, AB, qui estez des circôferences entieres, resteront encore les arcs AED, ACB semblables, comme nous avons démontré au 2. theor. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 21.

PROP. XXIII.

Deux portions de cercles , semblables & inegales , ne se mettront pas dessus une même ligne droite , & de même part.

Car si faire se peut , soient deux portions de cercles semblables , & inegales ABC & ADC , sur la ligne droite AC , & de même costé. Il est evident qu'elles s'entrecouperont seulement es points A & C , puis que par la 10. pr. de ce livre un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points ; & partant la circonference d'une portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droite AB coupant les circonférences en D & B , & tirées les deux lignes droites BC & DC ; par la definition des semblables portions , les deux angles ABC & ADC seront egaux , ce qui est absurde : car par la 16. pr. 1. l'angle extérieur ADC doit estre plus grand que l'opposé intérieur B . Donc les deux portions ABC & ADC , estans semblables & inegales , ne se pouvoient mettre sur une même ligne droite AC , & de même part. Ce qu'il falloit de-
montrer.



S C H O L I E.

Encore qu'en cette 23. prop. & demonstration d'icelles les portions de cercles soient constituées de même part , si est-ce toutesfois que la prop. sera aussi veritable , si lesdites portions sont posées de diverse part ; comme sont les portions ABC ; AEC . Car si on conçoit que l'une d'icelles portions , comme AEC , soit , même à l'entour de la ligne droite AC , & vienne à estre de même part que ABC , il aviendra toujours la même absurdité que dessus , attendu qu'une portion ne conviendra point à l'autre , à cause de leur inegalité.

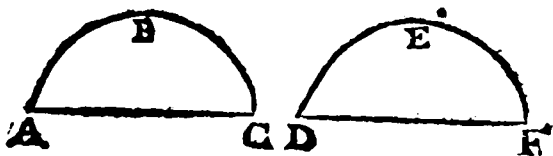
D'avantage, il est évident, que ce qui est dit icy de deux portions constituées sur une même ligne droite, se peut aussi entendre de celles constituées sur lignes droites égales; car l'une d'icelles lignes étant superposée à l'autre, elle luy conviendra, & partant les deux portions seront lors posées sur une même ligne droite, ainsi que dessus, &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles étans constituées sur lignes droites égales, sont égales entr'elles.

Soient deux portions de cercles semblables ABC & DEF constituées sur lignes droites égales AC, & DF Je dis qu'icelles portions sont égales entr'elles

Autrement, si elles estoient inégales il s'en suivroit que deux portions semblables, &



inégales, pourroient estre posées sur lignes droites égales, ou bien sur une même, contre la prop. precedente: donc les deux portions ABC & DEF constituées sur lignes droites égales, seront égales; Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Il est aisé de démontrer la converse tant de cette prop. que de la precedente, c'est à sçavoir que les égaux segmens de cercles constitués sur lignes droites égales, ou sur une même, sont semblables. Car à cause de l'égalité desdits segmens, ou portions de cercles, l'une conviendra à l'autre, & partant tous les angles constitués en icelles sont égaux: Parquoy icelles portions seront semblables. Que si quelqu'un dit que lesdites portions ne conviennent entr'elles, il faudroit ou que l'une

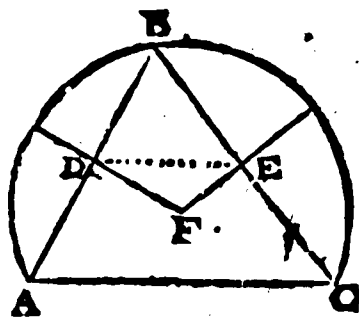
rombast toute hors de l'autre, & elles ne feroient que les entr'elles, contre l'hypothese; ou bien que la circonférence de l'une coupast la circonférence de l'autre, & par ainsi un cercle en couperoit un autre à plus de deux points, contre la 10. prop. 3.

PROBL. 3. PROP. XXV.

La portion d'un cercle étant donnée, décrire le cercle duquel elle est portion.

Soit une portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouver le centre pour achever le cercle d'icelle.

En la circonférence d'icelle portion soient pris comme on voudra les trois points A, B, C, & après avoir mené les deux lignes droites AB & BC, & icelles coupées en deux également en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux points soient levées par la 11. prop. 1. les perpendiculaires DF, & EF, se rencontrans au point F: (or elles se doivent rencontrer, pour ce que si on menoit une ligne droite de D à E, comme DE, seroient faits deux angles EDF, DEF, moindres que deux droits. (Je dis que le point F est le centre cherché.

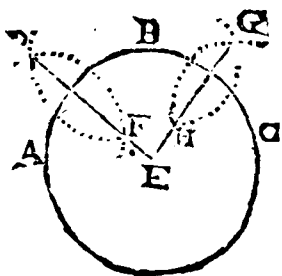


Car par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre sera en la ligne DF: Il sera aussi en EF: ce sera donc au point F, qui leur est commun. Parquoy nous avons trouvé le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette prop. n'est différente à celle de la

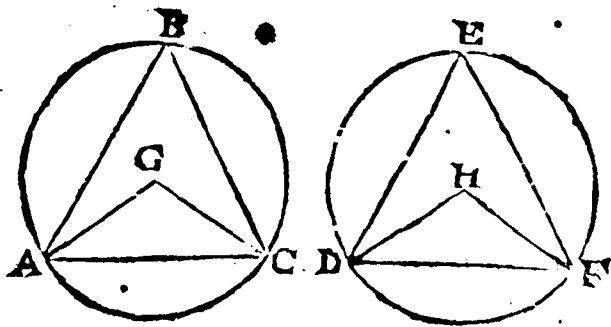
premiere, c'est à sçavoir qu'ayant pris en la circonference les trois points A, B, C , il faut des points A & B , décrire d'un même intervalle deux arcs qui s'entre-coupent en D, F , & par iceux mener une ligne droite $D F E$: en apres, des points B & C , décrire encore d'un même intervalle deux autres arcs qui s'entre-coupent en G & H , par lesquels soit menée une ligne droite $G H E$, qui coupe la precedente $D F$ en E , qui sera le centre requis.



THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonférences egales, soit qu'ils s'appuyent étans constituez aux centres, ou aux circonférences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF , lesquels les centres sont G & H , & à iceux soient constituez les angles egaux G, H : Item les angles B, E constituez aux circonférences, soient

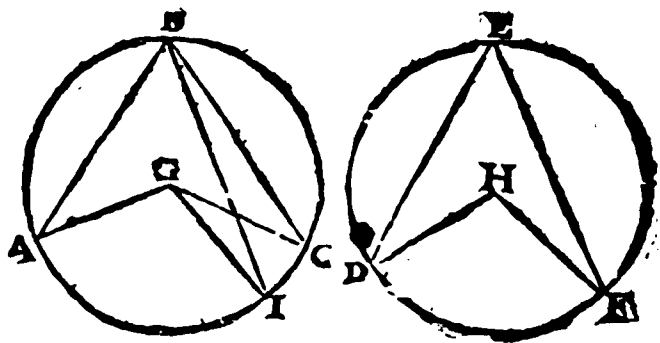


aussi egaux. Je dis que les circonférences AC & DF , sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.

Car d'autant que les cercles sont égaux, les lignes tirées du centre à la circonférence seront égales par la 1. def. de ce livr. Parquoy ayant tiré les deux lignes droites AO , DF , les deux triangles AGC , & DHF , auront deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G égal à l'angle H : & par la 4. prop. 1. la base AC sera égale à la base DF . Pareillement l'angle B étant égal à l'angle E , la portiou ABC sera semblable à la portiou DEF , par la 10. def. de ce livr. & par la 24. prop. elles seront égales ; & qui de cercles égaux ôte portions égales, sçavoir ABC & DEF , le demeurant AC sera égal au demeurant DF : ainsi les angles égaux s'appuyent dessus circonférences égales AC , DF . Donc aux cercles égaux, les angles égaux s'appuyent sur circonférences égales, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Que si les susdits angles étoient inégaux, le plus grand s'appuyeroit sur un plus grand arc que le moindre. Car aux cercles égaux ABC , DEF , soit l'angle AGC au



centre G , plus grand que l'angle DHF au centre H . Item l'angle ABC en la circonférence, plus grand que l'angle DEF en la circonférence. Je dis que l'arc AC est plus grand que l'arc DF . Car ayant fait l'angle AGI égal à l'angle DHF , & l'angle ABI égal à l'angle DEF ; par ce qui a été démontré ci-dessus, les arcs AI , DF seront égaux ; & partant AC sera plus grand que DF .

Or ce

On ne qu'Euclide des cercles égaux en cette proposition aux trois prochaines suivantes, se doit aussi entendre d'un même cercle; c'est à dire qu'en un même cercle les angles égaux s'appuyent sur circonferences égales, &c. Car toujours la même démonstration qui se fait en deux ou plusieurs cercles égaux, aura aussi lieu en un même cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles égaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences égales, sont égaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constitués aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles égaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences égales AC & DE, soient les angles ABC & DEF, tous deux en la circonferance. Item AGC & DHE au centre: ie dis premierement qu'iceux angles AGC & DHE, seront égaux.

Autrement, l'un d'iceux angles sera plus grand que l'autre:

Soit donc AGC

plus grand que

DHE, s'il est pos-

sible; & par la 23.

pr. 1. sur AG soit

fait l'angle AGI

égal à DHE, &

par la précédente

prop. les circonfe-

rences AI & DE

seront égales; ce

qui est contre notre hypothese; car nous avons posé AC égale

à DE. Il faudroit doncques que AC & AI fussent égales, contre

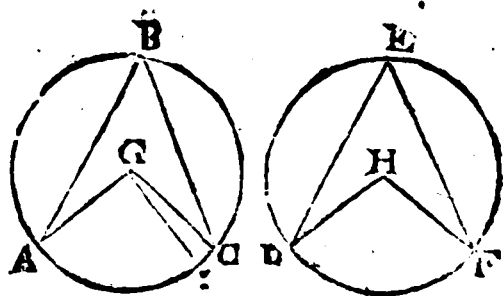
la 8. com. sent. Donc l'angle AGC n'étoit point plus grand que

l'angle DHE, & partant égal; ce qui estoit proposé.

Or l'égalité des angles du centre estant prouvée, les angles

de la circonferance sont entendus égaux, puis qu'ils sont moi-

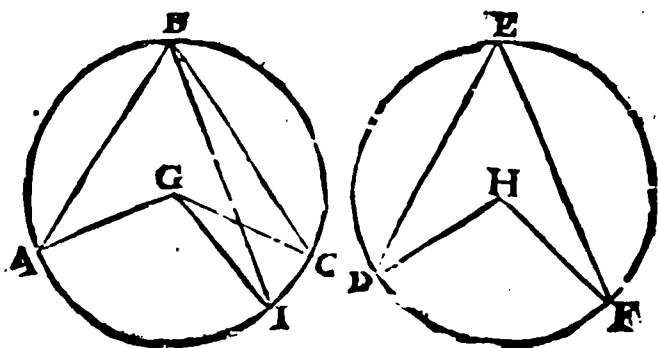
tiés d'iceux par la 20. proposition de ce livre. Donc aux



cercles égaux les angles qui s'appuyent dessus circonferences égales, sont égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Que si les arcs étoient inégaux, l'angle insistant sur le plus grand arc seroit plus grand que celui du moindre. Comme en la figure du Scholie précédent, soit l'arc AC plus grand que l'arc DF : le du que l'angle AGC est plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC, plus grand



que l'angle DEF. Car ayant fait l'arc AI égal à l'arc DF, & tiré les lignes droites GI, BI; tant les angles AGI, DHF, que les angles ABI, DEF, seront égaux, comme il a esté démontré cy-dessus : & partant l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus grand que l'angle DEF.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles égaux, les lignes droites égales prennent circonferences égales, sçavoir la plus grande à la plus grâde, & la plus petite à la plus petite.

Soient deux cercles égaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & dans ces cercles soient deux lignes droites égales AC & DF : Je dis que les circonferences qu'elles coupent, sont égales, sçavoir la petite AIC à la petite DKF,

& la grande ABC à la grande DEF.

Qu'il ne soit ainsi ; des centres G & H, soient menées les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront égales par la 1. def. de ce livre, estans les cercles égaux ; & la ligne droite AC estant

égale à la ligne droite DF, les deux triangles AGC & DHF, auront les trois côtez égaux aux trois costez, chacun au sien : & par la 8. pr. 1.

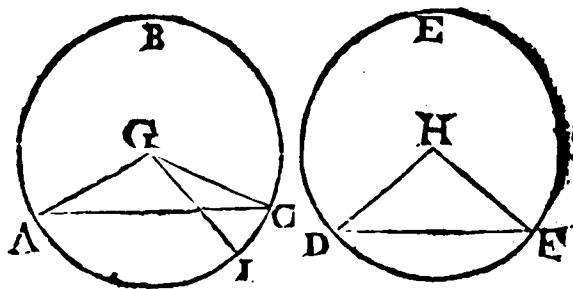
l'angle G sera égal à l'angle H, & par la 26. pr. de ce livr. ils s'appuyeront dessus circonférences égales AIC, DKF ; & qui de cercles égaux ôste icelles circonférences égales, resteront les circonférences ABC DEF, aussi égales. Donc aux cercles égaux, les lignes droites égales prennent circonférences égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Que si les lignes droites étoient inégales, la plus grande prendroit aux segmens mineurs une plus grande circonférence que la moindre : mais une moindre aux segmens majeurs.

Comme aux cercles égaux ABC, DEF, desquels les centres sont G & H, soit la ligne droite AC plus grande que la ligne droite DF : le dis que

la circonférence AC moindre que le demy cercle est plus grande que la circonférence DE : & que la circonférence ABC est moindre que la periphère DEF. Car étâs tirées les lignes droites AG, GC, DH & HF : les costez AG, GC du triangle AGC, seront égaux aux costez DH, HF du triangle DHF : & la base AC est posée plus grande que la base



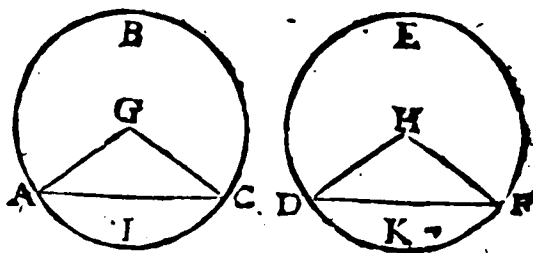
DE : Donc l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par la 25. pr. 1. Parquoy soit fait l'angle AGI égal à l'angle DHF par la 23. prop. 1. & par la 26. pr. 3. l'arc AI sera égal à l'arc DF, & partant la circonférence AIC sera plus grande que la circonférence DF, & conséquemment le reste ABC sera moindre que le reste DEF.

THEOR. 16. PROP. XXIX.

Aux cercles égaux, les circonférences égales, soutiennent lignes droites égales.

Es cercles égaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, soient les circonférences ABC, DEF égales : item les circonférences AIC, DKF aussi égales & soutenues des lignes droites AC & DF. Je dis qu'icelles lignes soutenantes sont égales.

Qu'ainsi ne soit : des centres G & H soient menées les lignes droites GA, GC, HD, HF. Or d'autant que l'on pose les circonférences AIC, DKF égales, les angles G & H qui s'appuyent dessus icelles circonférences, seront égaux par la 27. proposition de ce livre : pareillement les côtez GA & GC. étant égaux aux côtez HD & HF par 1. d. 3. la base AC sera égale à la base DF par la 4. proposition 1. Donc aux cercles égaux les circonférences, &c. Ce qui estoit à prouver.



SCHOLIE.

Mais si les circonférences étoient inégales, la plus grande seroit soutenue d'une plus grande ligne que la moindre, lesdites circonférences étant moindres que le

demy cercle ; Car si elles étoient plus grandes , la moindre d'icelles circonfer. seroit soustendue d'une plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles egaux ABC , DEF , desquels les centres sont G & H , soient les circonferences AC , DF , chacune moindre que le demy cercle, & soit AC plus grande que DF , & partant ABC moindre que DEF : Je dis que la ligne droite AC est plus grande que la ligne droite DF . Car étans tirées les lignes droites AG , GC , DH , & HF , l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par le Scholie de la 27. prop. de ce livre ; & puis que les côtez AG , GC , du triangle AGC sont egaux aux côtez DH , HF du triangle DHF , par la 24. prop. 1. la base AC sera plus grand que la base DF .

Clavius, apres Cimmandin, demontre en ce lieu les quatre Theoremes suivans.

1. Les cercles, desquels les lignes droites egales retranchent semblables circonferences, sont egaux.

Soient deux cercles ABC , DEF , desquels les lignes droites egales AC , DF , coupent semblables circonferences ABC , DEF : Je dis qu'iceux cercles sont egaux. Car si les segmens ABC , DEF sont semblables, les segmens restans AIC , DKF , seront aussi semblables, comme nous avons démontré au Scholie de la 22. prop. de ce livre. Derechef, pource que sur les lignes droites egales AC , DF , sont constituez les semblables segmens ABC , DEF , ils seront egaux par la 24. p. 3. Par mesme raison seront aussi egaux les semblables segmens AIC , DKF . Donc les cercles entiers ABC , DEF , seront egaux : Ce qui étoit proposé.

2. Des cercles inegaux, les lignes droites egales coupent circonferences dissemblables.

En la mesme figure precedente les lignes droites AC , DF soient posées egales, & les cercles ABC , DEF , inegaux. Je dis que les circonferences ABC , DEF , sont dissemblables. Car si elles étoient semblables, les cercles seroient egaux, comme nous avons démontré cy-dessus, contre l'hypothese. Donc les circonferences ABC , DEF , sont dissemblables. Par mesme raison les circonferences AIC , DKF , seront aussi dissemblables. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Les lignes droites, qui prennent circonferences semblables de cercles inegaux, sont inegales.

En la mesme figure soient posez les cercles inegaux & les circonferences ABC , DEF semblables, 1e dis que les lignes droites AC , DF sont inegales. Car si elles étoient egales, les cercles seroient egaux par le premier Theor. cy-dessus, contre l'hypoth. icelles lignes droites AC , DF , sont donc inegales.

4. Les lignes droites, qui de quelconques cercles prennent circonferences semblables & inegales, sont inegales.

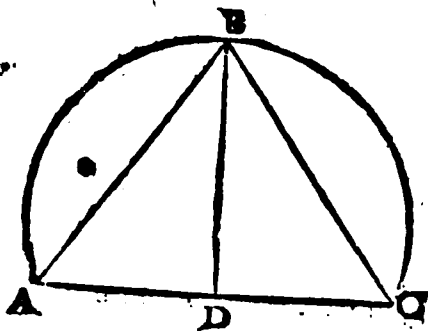
En la mesme figure, soient posées les circonferences ABC , DEF semblables & inegales. 1e dis que les lignes droites AC , DF sont inegales. Car les cercles sont ou egaux, ou inegaux : Soient premierement egaux. Si donc les lignes droites AC , DF , sont dites egales, par la 28. prop. 3. les circonferences ABC , DEF , seront egales : ce qui est contre l'hypoth. Icelles lignes droites AC , DF , ne sont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droites AC , DF , étant les circonferences ABC , DEF , semblables, seront inegales, comme il a été démontré au precedent Theor. En la mesme maniere nous démontrerois les lignes droites AC , DF estre inegales, si les circonferences AIC , DKF , sont posées semblables & inegales.

PROBL. 4. PROP. XXX.

Couper une circonference donnée en deux également.

Soit la circonference donnée ABC , laquelle il faut couper en deux également.

Soit menée la ligne droite AC , laquelle soit coupée en deux également au point D , duquel point soit élevée la perpendiculaire DB par la II. prop. I. qui rencon-

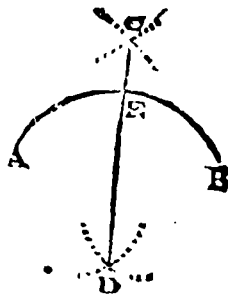


tre la circonference en B. Je dis que la circonference ABC est coupée en deux également en B.

Qu'il ne soit ainsi : soient menées les lignes droites AB & BC. D'autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB, sont égaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB, chacun au sien, & les deux angles au point D égaux : par la 4. p. 1. la base AB sera égale à la base BC, & par la 28. prop. de ce livre les circonférences AB & BC seront égales. Nous avons donc coupé la circonference donnée en deux également. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La pratique de cette proposition est fort aisée, car il n'y a qu'à décrire deux arcs de cercles de chaque extrémité de la circonference donnée A & B, qui s'entre coupent es points C & D, desquels points étant menée une ligne droite CD, elle coupera la circonference donnée AB en deux également au point E.



THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit : & celui qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'un droit ; mais celui qui est en la plus petite, est plus grand qu'un droit. Et davantage, l'angle de la plus grande portion, est plus grand qu'un droit : mais l'angle de la plus petite portion est moindre qu'un droit.

Au cercle ABC, duquel D est le centre, & AC le diamètre soit constitué au demy cercle ABC, l'angle rectiligne ABC ; & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC : mais en la moindre portion BFC, l'angle CFB. Je dis en premier lieu

que l'angle ABC au demy cercle, est droit.

Cár apres avoir mené la ligne BD , & continué AB jusques en E : il

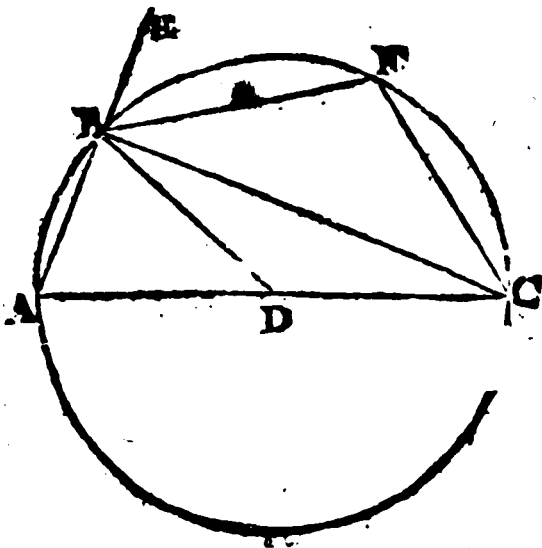
est evident que les triangles ABD & CBD sont Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base égaux, sçavoir BAD à ABD , & CBD à BCD : & partant les deux ensemble ABD , CBD , seront égaux aux deux ensemble

BAD & BCD . Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est égal à iceux deux angles BAD , BCD : & partant les deux au point B , faisant le seul ABC , seront aussi égaux à l'exterieur CBE , & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE , seront deux droits,

Je dis en second lieu, que l'angle BAC , qui est en la plus grande portion CAB , est plus petit qu'un droit : ce qui est aisé à prouver par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC , l'angle ABC , étant droit, les deux autres ensemble ne vaudront qu'un droit : & partant le seul angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Je dis tiercement, que l'angle BCF , qui est en la petite portion CFB , est plus grand qu'un droit : car par la 22. p. de ce livre la figure de quatre costez $ABFC$ inscrite au cercle, a les deux angles opposez A & F , égaux à deux droits. Mais nous avons prouvé A estre plus petit qu'un droit, par conséquent F sera plus grand.

Je dis en quatrième lieu, que l'angle de la plus grande portion, sçavoir CBA , compris de la ligne droite BC , & de la periphère BAC , est plus grand qu'un angle droit : ce qui



est evident ; car l'angle droit rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA .

Finalement , je dis que l'angle de la petite portion , compris de la ligne droite BC & de la circonference BFC , c'est à dire l'angle mixte CBF est moindre qu'un droit , car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE . Donc au cercle , l'angle qui est au demy cercle est droit , &c. Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E.

De ce que dessus , est manifeste qu'un angle d'un triangle estant egal aux deux autres , est droit.

S C H O L I E.

La [] de cette prop. est manifestement vraie, c'est à dire que

Le segment de cercle , auquel est constitué un angle droit , est demy cercle , & celuy auquel est un angle aigu , est segment majeur : mais celuy auquel est un angle obtus , est segment mineur : Et le segment duquel l'angle est plus grand qu'un droit est plus grand que le demy cercle ; mais celuy duquel l'angle est moindre que le droit , est ou demy cercle , ou moindre que le demy cercle.

Car l'angle étant droit , si le segment n'est pas un demy cercle , il sera ou plus grand , & ainsi l'angle sera aigu ; ou moindre , & ainsi l'angle sera obtus : contre l'hypothese. Derechef , l'angle étant aigu , si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle , il sera ou demy cercle , & ainsi l'angle en iceluy sera droit : ou moindre que le demy cercle , & ainsi l'angle en iceluy sera obtus : Ce qui est aussi contre l'hypothese. Finalement , l'angle étant obtus , si le segment n'est moindre que le demy cercle , il sera ou demy cercle , & ainsi l'angle en iceluy sera droit ; ou plus grand , & ainsi l'angle sera aigu : Ce qui est semblablement contre l'hypothese. Davantage , quand l'angle du segment est plus grand qu'un droit , si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle , il sera ou demy cercle , ou moindre que le demy cercle , & ainsi l'angle d'iceluy sera moindre qu'un droit , contre la position. Et quand l'angle du segment est moindre qu'un

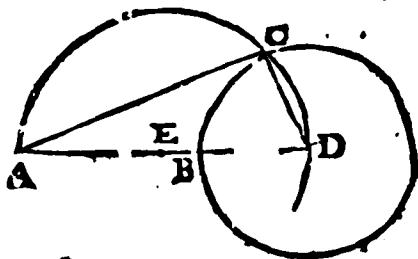
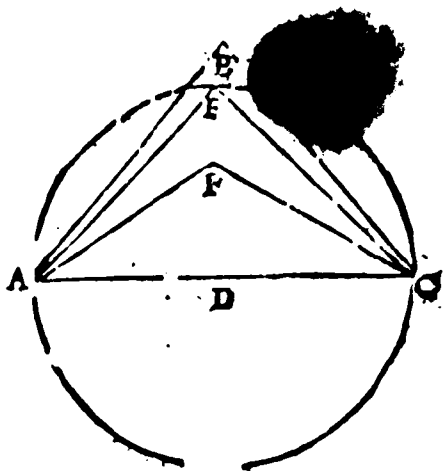
droit, si le segment n'est pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il sera plus grand, & par ainsi l'angle d'iceluy sera pareillement plus grand que le droit, ce qui est contre l'hypothese.

Clavius demontre en ce lieu le theoreme suivant,

Si le costé opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle est coupé en deux egalemt, & du point de la section est décrit un cercle de l'intervale de la moitié d'iceluy costé; iceluy cercle passera par l'angle droit du triangle.

Au triangle rectangle ABC , le costé AC opposé à l'angle droit B , soit coupé en deux egalemt au point D , duquel & de l'intervale DA , ou DC , soit décrit le cercle AEC , lequel je dis passer par B . Car s'il passoit au dessus de B , ou au dessous, étans tirés les lignes droites AE , CE , tellement qu'elles ne coupent les lignes droites AB , BC , ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà; l'angle AEC au demy cercle sera droit par la 31. p. 3. & consequemment les angles B & E seront egaux, étans droits: ce qui est absurde, vu que l'angle E par la 21. prop. 1. est necessairement ou plus grand, ou plus petit que l'angle B . Le cercle AEC passera donc par le point de l'angle droit B . Ce qui étoit proposé.

Or de la demonstration de la premiere partie de cette pr. nous colligeons un facile moyen pour d'un point donné hors un cercle mener une, ou deux lignes droites qui touchent iceluy cercle, ce qui se fait ainsi. Soit



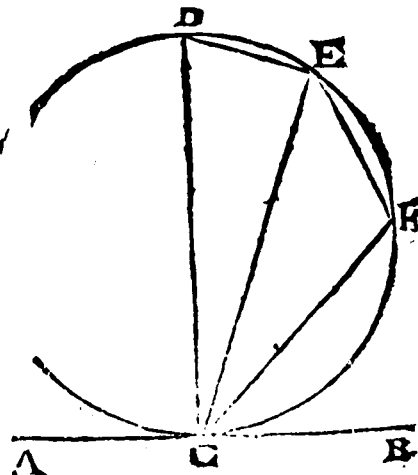
donné le point *A* hors du cercle *BC*, le centre duquel est *D* : & il faut mener de *A* une ligne droite, qui touche iceluy cercle donné. Ayant mené la ligne *AD*, soit coupée icelle en deux également en *E* par la 10. p. 1. & de *E* comme centre, & de l'intervale *EA* soit décrit un cercle *ACD* qui coupe le donné en *C*, auquel point *C* soit menée la ligne droite *AC*, & icelle touchera le cercle donné en *C*. Car étant tirée la ligne droite *CD*, l'angle *ACD* au demy cercle sera droit par ladite 31. pr. 3. & partant la ligne droite *AC*, touchera le cercle *BC* en *C* par le Cor. de la 16. p. 3. Et si du même point *A*, on vouloit encore tirer une autre ligne qui touche semblablement ledit cercle *BC*, il n'y auroit qu'à décrire le cercle entier *ACD*, & il couperoit encore la circonférence *BC* à un'autre point au dessous de *AD*, &c.

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'atouchement on mene une autre ligne droite coupant le cercle, les angles qu'elle fait à la touchante sont égaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droite *AB* touchant le cercle *CDE*, au point *C*, & d'iceluy point soit menée la ligne droite *CE*, coupant le cercle en deux portions *CDE*, *CFE*. Je dis que l'angle *ECB*, est égal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne *CDE*, & que l'angle *ECA* est aussi égal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne *CFE*.

Qu'il ne soit ainsi, apres avoir mené par le centre



le diametre CD , soient menées les lignes droites DE , EF , FC . Maintenant par la prop. precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont egaux à un droit, c'est à dire à DCB , lequel est droit par la 18. prop. de ce livre, desquels si on oste l'angle commun ECD , le demeurant ECB sera egal au demeurant D . Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle $CFED$, aura les angles opposez F & D , egaux à deux droits: c'est à dire aux deux ECA , ECB , desquels si on oste choses egaues, c'est à sçavoir les angles egaux D & ECB , les demeurans F & ECA seront egaux.

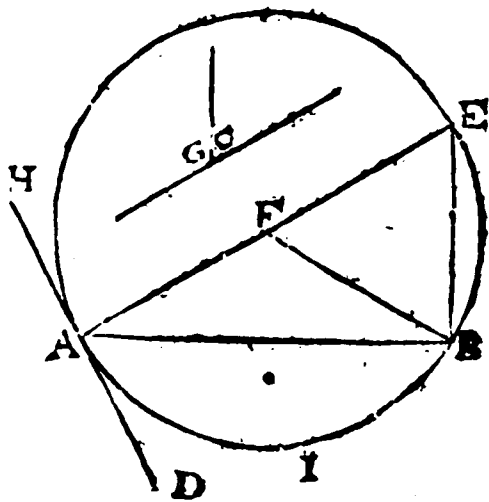
Que si la ligne coupant le cercle étoit le diametre d'iceluy, tous les angles qui se feroient tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droitz par la prop. prec. & partant appert ce qui est proposé. Si donc quelque ligne droite touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus une ligne droite donnée, décrire une portion de cercle capable d'un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB , & l'angle rectiligne C : il faut sur icelle ligne décrire une portion de cercle comprenant un angle egal à l'angle donné C .

Soit construit sur icelle ligne AB . & à l'extremité A , l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. pr. 1. & au point A soit levée AE perpendiculaire à AD ; puis sur la ligne AB & au point B , soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF jusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au point



Et donc par la 6. pr. 1. les costez FA, FB, seront egaux: Par-
 tant le cercle décrit du centre F & de l'intervale FA, passera
 aussi par le point B: & apres avoir mené la ligne droite BE. Je
 dis que l'angle E, qui est en la portion AFB est egal à l'angle
 donné C. Car d'autant que la ligne droite AE passe par le centre
 F, & qu'à icelle AE, la ligne DA est perpendiculaire; par le
 Corol. de la 16. prop. de ce livre le cercle touchera icelle DA
 en A. Parquoy par la preceden. prop. l'angle BAD, qui par la
 construction est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, décrit
 dans la portion alterne AEB, par consequent iceluy angle E se-
 ra egal à l'angle C. Nous avons donc décrit une portion de
 cercle sur la ligne donnée AB, capable d'un angle egal à un
 angle donné C.

Que si l'angle donné eût esté obtus, comme G, il eût falu
 contruire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F
 comme dessus, pour décrire le cercle AEBI, & par la prop.
 precedente la portion mineure AIB eust compris un angle egal
 à l'angle donné G.

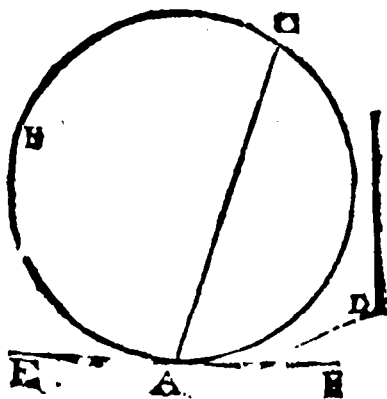
Que si l'angle donné eût esté droit, il n'eust falu que décrire
 un demy cercle sur la ligne donnée, attendu que tout angle fait
 au demy cercle est droit par la 31. pr. 3. Or nous avons donc
 construit sur la ligne donnée AB, un segment de cercle, &c.
 Ce qu'il falloit faire.

• P R O B L. 6. P R O P. XXXIV.

D'un cercle donné, ôter une portion capable d'un
 angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut ôter une portion
 capable d'un angle rectiligne egal à l'angle donné D.

Soit menée la ligne droi-
 te EF touchant le cercle en
 A: puis par la 23. prop. 1.
 soit fait sur icelle ligne, &
 au point A, l'angle rectili-
 gne FAC egal au donné D,
 faisant que la ligne droite
 AC coupe le cercle en deux
 portions. Je dis que tout
 angle qui sera fait en la por-
 tion alterne ABC sera egal
 au donné D. Car il sera e-
 gal à l'angle FAC par la 32.



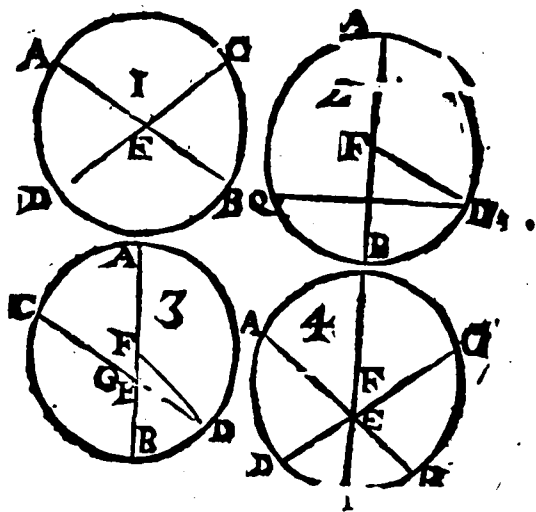
prop. de ce livre, lequel est égal à D par la construction.
Nous avons donc du cercle donné ABC coupé une portion
&c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans un cercle, deux lignes droites se coupent
l'une l'autre; le rectangle contenu des deux
parties de l'une, est égal au rectangle compris
des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, CD dans le cercle ACBD
s'entre coupans en E. Je dis que le rectangle compris des deux
parties AE & FB, est égal au rectangle contenu des deux par-
ties CE & ED.

Or les lignes
qui se coupent
dans le cercle, ou
elles passent tou-
tes deux par le
centre, ou bien
l'une d'icelles
seulement, ou
ny l'une ny l'autre.
Que si elles
passoient tou-
tes deux par le
centre comme en
la premiere figu-
re, les quatre par-
ties seront egales; & par ainsi la proposition est evidente.



Que si la seule AB, passe par le centre F, & divise DC en
deux également comme en la seconde figure, elle la divisera
aussi à droits angles, par la 3. prop. de ce livre. Et apres avoir
mené FD, il est évident par la 5. pr. 2. que le rectangle de AE,
& EB avec le carré de EF, sera égal au carré de FB, ou FD,
(car la ligne AB est coupée en deux également au point F,
& en deux inégalement en E) & par la 47. prop. 1. le carré
de FD étant égal aux deux quarrés de FE & ED, en ostant le

quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, se trouvera egal au quarré de ED, c'est à dire au rectangle de CE & ED, puis que CD est coupée en deux egaleement en E.

Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la troisiéme figure) divise inegaleement CD, ne passant point par le centre, il s'en suivra la mesme chose. Car apres avoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droite FD: pour autant que AB est eoupée en deux egaleement en F, & en deux inegaleement en E, le rectangle de AE & FB, avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE est egal aux deux de FG & GE par la 47. pr. 1. Pareillement le quarré de FD, est egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux quarrés de FG & GE, sera egal aux deux quarrés de FG & GD: & partant en ostant le quarré commun de FG le demeurant quarré de GD, sera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Mais le mesme quarré de GD est aussi egal au rectangle de CE & ED, avec le quarré de GE; par la 5. prop. 2. puis que CD est coupée en deux egaleement en G, par la perpendiculaire FG & en deux inegaleement en E. Parquoy iceluy rectangle de CE & ED avec le quarré de GE sera egal au rectangle de AE & EB avec le quarré de GE: en ôtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE, EB, se trouvera egal au rectangle de CE & ED.

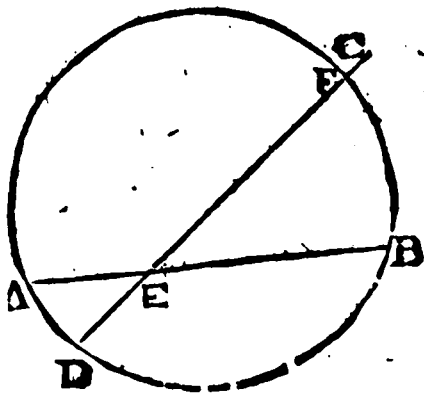
Que si ny l'une ny l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, (comme en la 4. figure) il s'en suivra le mesme: car si on mene le diametre HI, passant par le point commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & FH, sera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-dessus a esté dit; & par mesme raison il sera aussi egal au rectangle de AE & EB; & par la 1. comm. sent. les deux rectangles de AE, EB; Item de CE, ED, seront egaux. Si donc dans un cercle, deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Nous convertirons cette 35. prop. ainsi.

Si deux lignes droites s'entrecoupent, tellement que le rectangle compris des segmens de l'une soit egal au rectangle contenu sous les segmens de l'autre, le cercle décrit par trois des points extrêmes d'icelles lignes quels qu'ils soient, passera aussi par le 4 point.

Que les lignes droites AB , CD s'entre coupent en E , & que le rectangle compris sous AE , EB soit égal au rectangle compris des parties CE , ED . Je dis que les quatre points A , D , B , C , tombent en la circonférence d'un cercle, c'est à dire qu'estant décrit un cercle passant par les trois points A , D , B , il passera nécessairement par l'autre point C . Car s'il n'y passe, il passera, ou au delà de C , ou au



dedans, comme par le point F . D'autant que par la 35. proposition 3. le rectangle compris sous FE , ED est égal au rectangle compris de AE , EB , & que le rectangle contenu sous CE , ED est aussi posé égal au même rectangle de AE , EB ; les rectangles compris sous CE , ED , & sous FE , ED , seront égaux, la partie au tout; ce qui est absurde. Par même raison le cercle ne passera pas au delà du point C . Donc le cercle décrit par les trois points A , D , B , passera par le quatrième point C . Ce qu'il falloit démontrer.

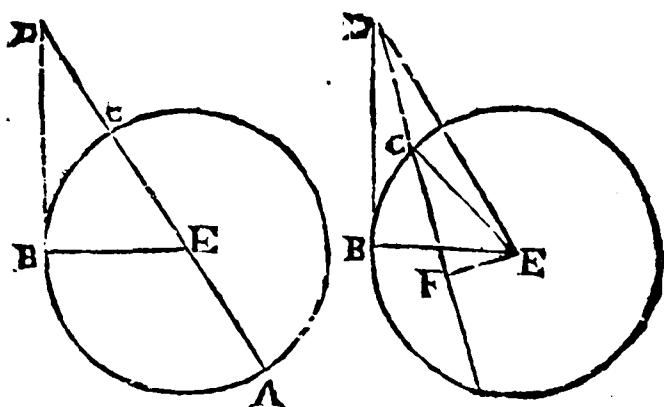
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droites, l'une desquelles coupent le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonférence convexe, est égal au carré de la touchante.

Foies le cercle ABC soit pris le point D , duquel soit menée la ligne DA , coupant le cercle en C , & la ligne DB touchant iceluy cercle en B . Je dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD , prise entre le point donné & le cercle, est égal au carré de la touchante BD .

Premierement

Premierement que la ligne AD passe par le centre E, com-



me en la premiere figure, & d'iceluy centre E au point d'at-
touchement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. pr.
de ce livre sera perpendiculaire à icelle touchante ID: & pour
autant que la ligne AC est coupée en deux également au point
E, & à icelle est ajoutée directement CD, le rectangle de la
totale AD, & de la partie CD avec le carré de CE, ou BE
son egale, est egal au carré de BD par la 6. pr. 2. ou aux deux
de DB & PE par la 47. pr. 1. Que si on ôte le carré commun
de BE, le demeurant carré de BD, sera egal au demeurant
rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé,
comme en la seconde figure, il faudra demontrer en cette for-
me: du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la
perpendiculaire ES, laquelle coupera AC en deux également
par la 3. prop. de ce livre. Et par la 6. pr. 2. comme cy-dessus,
le rectangle de AD & CD, avec le carré de CE, sera egal au
carré de DE, auxquelles choses egales si on ajoute le carré
commun de EF, le rectangle de AD & DC, avec les deux
carrés de CE & FE, ou le seul de CE par la 47. pr. 1. sera
egal aux deux carrés de DE & FE, ou au seul de DE par la
47. pr. 1. ou aux deux de DB & BE par la même 47. pr. 1. Que
si on ôte les carrés egaux de CE & BE, les demeurans carrés
de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy
hors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il falloit
demontrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'un point pris hors le cercle, sont tirées plusieurs lignes droites, coupant le cercle; les rectangles compris sous chacune d'icelles, & sa partie extérieure, seront égaux entr'eux: pour ce que chacun de ces rectangles-là, sera égal au carré de la ligne touchante.

Appert aussi que deux lignes droites tirées d'un même point, & touchant le cercle, sont égales entr'elles; puis que le carré de chacune d'icelles sera égal au rectangle de la ligne tirée du même point, & coupant le cercle, & de la partie extérieure d'icelle.

Est aussi évident que d'un même point pris hors le cercle, peuvent être seulement tirées deux lignes droites qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes égales entr'elles: & partant du point D pourroient être menées plus de deux lignes droites égales de part & d'autre de DE, contre la 8. prop. de ce troisième livre.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangle compris de toute la coupante, & de la partie prise entre le point & la circonférence convexe, est égal au carré de celle qui atteint; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC soit pris le point D, & d'iceluy soit menée la ligne droite DA qui coupe le cercle au point C, & la ligne DB qui atteint le cercle au point B: & soit le rectangle de la toute AD & de la partie CD, égal au carré de DB. Je dis que DB touche le cercle en B.

Car du point D, étant menée la ligne DF touchant le

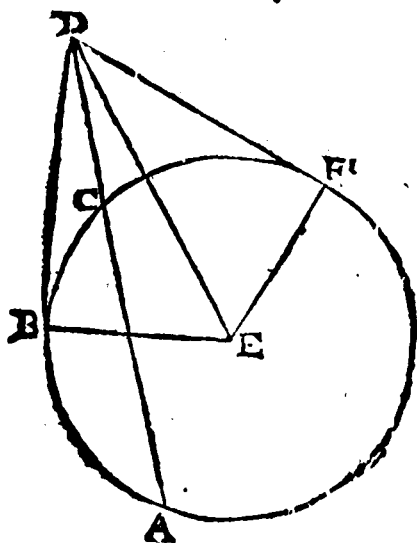
cercle au point F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la proposition précédente, le quarré de DF sera égal au rectangle de AD & CD.

Mais par l'hypothese le quarré de DB, est aussi égal à iceluy rectangle :

& partant les quarréz, & les lignes DF & BD, seront egales. Item EF & EB, sont aussi egales par la def. du cercle, & ED à soy-même : ainsi les deux triangles DBE & DFE, ayans les trois côtez

egaux aux trois costez, chacun au sien, les angles B & F, seront egaux par la 8. p.

1. & F étant droit par la 18. prop. de ce livre, aussi B sera droit ; & par le Cor. de la 16. prop. 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il falloit prouver.



Fin du troisième Element.



ELEMENT

QUATRIÈME.

DEFINITIONS.



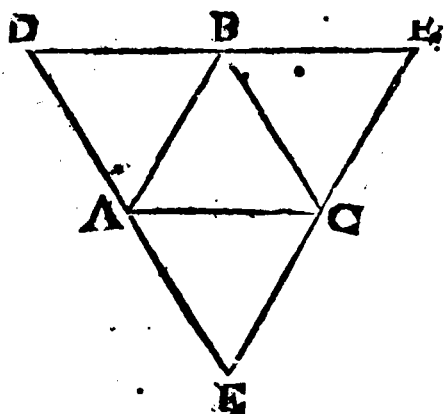
UNE figure rectiligne se dit être inscrite en une figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche un chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement aussi une figure se dit être circonscrite à une figure, quand un chacun côté de la circonscrite touche un chacun angle de l'inscrite.

Ainsi le triangle ABC , duquel chaque angle touche un chacun costé du triangle DEF est dit estre inscrit en iceluy triangle DEF . Et au contraire, à cause que chaque costé d'iceluy triangle DEF touche chaque angle du triangle ABC , il est dit estre circonscrit à iceluy triangle ABC .

Il faut entendre le mesme des inscriptions & circonscptions des autres figures rectilignes : & j'ajoit qu'il

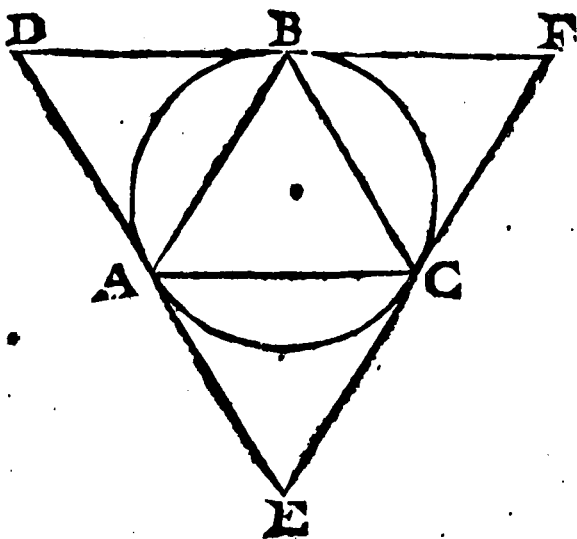
Les soient proprement dites estre inscrites, ou circonscrites quand le nombre des costez de l'inscrite est egal au nombre des costez, de la circonscrite, & le nombre des angles aussi egal : si est-ce toutes-fois qu'il n'est pas du tout necessaire, veu que plusieurs Geometres ont enseigné à inscrire un quarré, un pentagone, &c. dedans un triangle, &c.



3. Mais une figure rectiligne se dit être inscrite au cercle, quand un chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4. Et une figure rectiligne se dit être circonscrite au cercle, quand un chacun des côtez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

Ainsi le triangle ABC sera dit être inscrit au cercle ABC, à cause que chaque angle d'iceluy triangle touche la circonference dudit cercle ABC. Mais le triangle DEF sera dit être circonscrit au cercle



ABC, pource que chaque costé d'iceluy triangle *DEF* touche la circonference dudit cercle es points *ABC*.

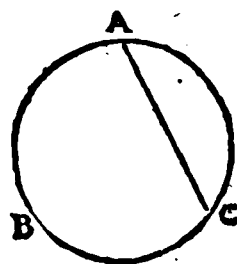
5. Semblablement aussi le cercle se dit être inscrit en une figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche un chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais le cercle se dit être circonscrit à une figure, quand la circonference du cercle touche un chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est décrit,

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle *ABC* est dit estre inscrit au triangle *DEF*, à cause qu'il touche chaque costé d'iceluy triangle es points *A, B, C*: mais le même cercle *ABC* est dit estre circonscrit au triangle *ABC*, pource qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.

7. Une ligne droite se dit être accommodée au cercle, quand les extremittez d'icelle sont en la circonference du cercle.

Ainsi la ligne droite *AC* sera dite estre accommodée au cercle *ABC*, à cause que les extremittez d'icelle ligne *AC* sont en la circonference dudit cercle.



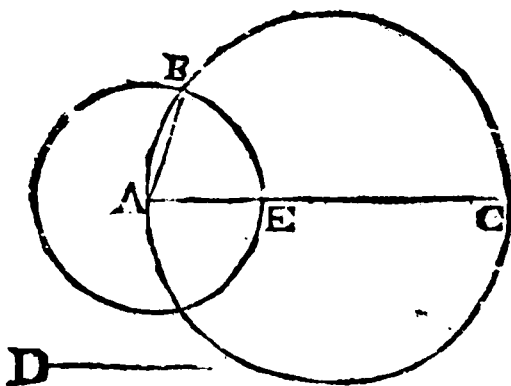
PROBL. I. PROP. I.

Au cercle donné, accommoder une ligne droite egale à une ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder une ligne droite égale à la ligne droite donnée D, qui n'est pas plus grande que le diamètre d'iceluy cercle.

Soit mené le diamètre AC, & si la ligne donnée est égale à iceluy diamètre, on

aura accommodé au cercle ABC la ligne AC égale à la donnée D. Mais si D est moindre que le diamètre AC, d'iceluy soit retranchée la partie AE égale à ladite ligne D. En apres du centre A, & de l'intervalle AE soit décrit le cercle BE



coupant le cercle donné au point B, & soit menée la ligne droite AB : icelle sera accommodée au cercle, & égale à D.

Car les extremités d'icelle AB sont en la circonférence du cercle ABC étant menée de l'extrémité du diamètre A au point de l'intersection B. Mais par la def. du cercle les lignes droites AB & AE sont égales, & par la construction, icelle AE est égale à D : donc par la 1. com. sent. AB & D seront égales entr'elles. Nous avons donc accommodé au cercle donné une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit faire.

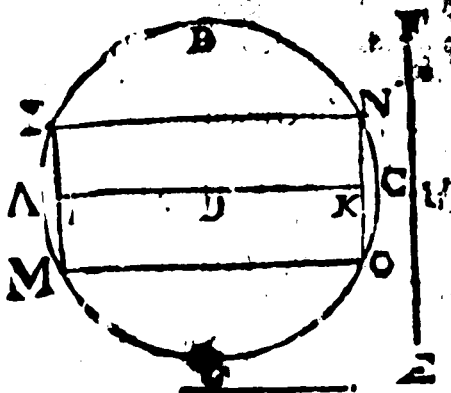
S C H O L I E.

Commandin adjointe en cet endroit le probl. suivant.

En un cercle donné accommoder une ligne droite égale à une ligne droite donnée, qui ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle, & parallèle à une autre ligne droite donnée.

Soit le cercle donné ABC, duquel le centre est D, auquel il faut accommoder une ligne droite égale à une donnée EF, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle, & laquelle soit parallèle à la ligne droite donnée G. Par le centre D soit tiré le diamètre ADC parallèle à la ligne donnée G. Que si EF est égale au diamètre AC, sera fait ce qui estoit requis : Mais si elle n'est égale à

scelus diamètre, soit scellé le compée en deux également au point H, & soit prise DI égale à EH, & DK égale à HF, afin que la somme IK soit égale à la somme EF; puis par les points I, K, soient tirées à angles droites LM, NO, & soit joint MO: Icelle MO accommodée au cercle sera égale à EF, & parallèle à G. Car puis que LM, NO



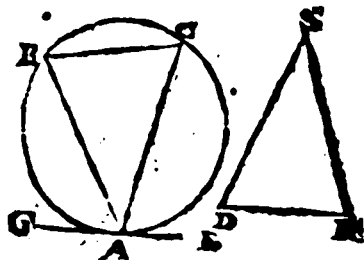
sont également distantes du centre D, elles seront égales entr'elles par la 14. pr. 3. & par la 3. prop. 3. elles seront coupées en deux également en I & K, étant coupée à angles droits par le diamètre AC; & partant IM, KO sont égales entr'elles; & pour ce qu'elles sont aussi parallèles par la 28. pr. 1. semblablement IK, MO seront égales & parallèles par la 33. pr. 1. Parquoy veu que IK est égale à EF & parallèle à G, aussi MO sera égale à icelle EF, & parallèle à G par la 30. pr. 1. Par même raison, si on tire LN, elle sera égale à EF, & parallèle à G. Donc au cercle ABC, est accommodée la ligne droite MO, ou LN, égale à EF & parallèle à G. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 2. PROP. II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle equiangle à un triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un triangle equiangle au donné DSF.

Soit menée la ligne droite GH, qui touche le cercle au point A, auquel point soient faits les deux angles GAB égal à l'angle D, & HAC égal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, jusques à ce qu'elles rencontrent la circonférence en B & C: puis soit menée BC. Je dis



que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF.

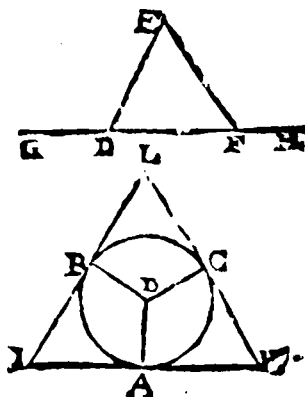
Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le coupe en deux porcions, l'angle C en la portion BCA sera egal à l'angle de l'atouchement GAB, & par consequent à l'angle D son egal par la 32. pr. 3. & par la même raison, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B sera aussi egal à l'angle F, & par la 32. pr. 1. le troisieme angle A sera aussi egal à l'angle S : & par consequent les triangles DSF, BAC seront equiangles. Au cercle donné nous avons donc décrit un triangle equiangle à un triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un triangle equiangle à un triangle donné.

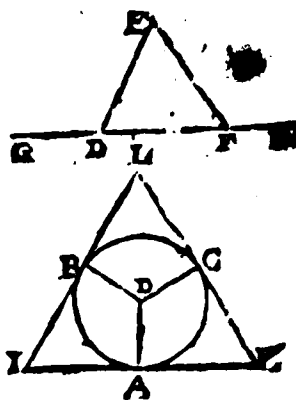
Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un triangle equiangle au triangle donné DEF.

Soit prolongé le costé DE de part & d'autre jufques en G & H, & du centre D soit menée comme on voudra la ligne DA, sur laquelle & au point D, soient construits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA, DB, DC, soient menées les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, lesquelles toucheront le cercle es points A, B, C, par le Corol. de la 16. pr. 3. & icelles se rencontraux aux trois points I, K, L, seront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.



Car il apert deja qu'il est circonscrit au cercle ; puis que tous les costez d'iceluy le touchent es points A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez à les quatre angles egaux à quatre angles droits (comme nous avons démontré à la 32. pr. 1.) le trapeze ADBI aura les quatre angles egaux à quatre

droits. Mais les deux A & B estans droits par la construction les deux autres D & I , seront egaux, à deux droits, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE , qui sont egaux à deux angles droits par la 13. proposition 1. & par la construction ADB est égal à GDE : donc l'angle I sera égal à l'angle EDF . Par mesme discours l'angle K trouvera égal à l'angle DFE . Et par la 32. pr. 1. le troisième L sera égal au troisième E : ainsi le triangle circonscrit IKL sera equiangle au triangle donné DEF : Parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.

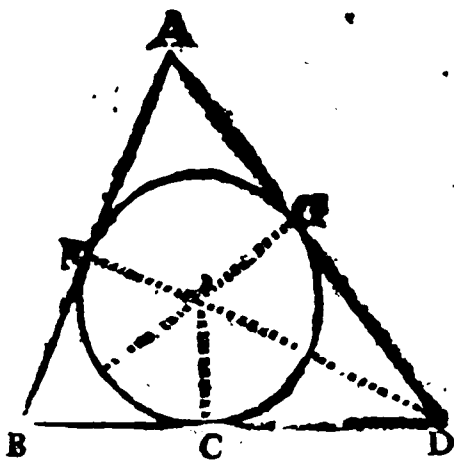


PROBL. 4. PROP. IV.

Dans un triangle donné, décrire un cercle.

Soit le triangle donné, ABC , dans lequel il faut décrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. les deux angles B & C soient coupez en deux également par les deux lignes BD & CD , se rencontrans au point D : Item d'iceluy point de rencontre D , soient menées les trois perpendiculaires DE , DF , DG , par la 12. pr. 1. & du centre D , & intervalle DE soit décrit le cercle EFG . Je dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC .



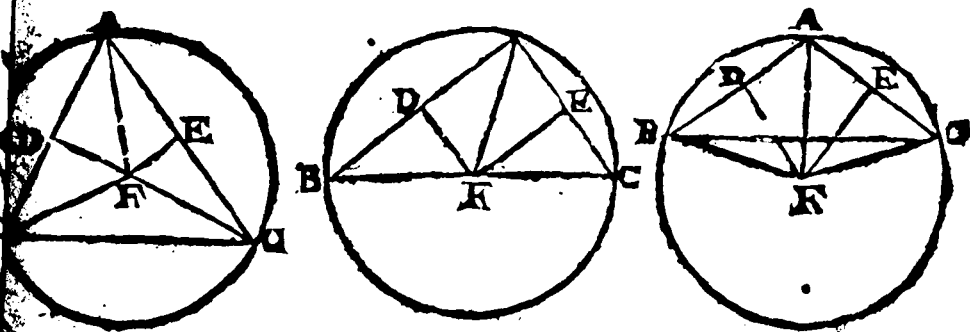
Car d'autant que l'angle DEB est droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillemēt droit, & le total B étant coupé en deux également, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB étant cōmun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. pr. 1. Par mēme discours DG se prouvera egal à DE, & par la 1. com. sent. les trois lignes DE, DF, DG, seront egales entr'elles : ainsi le cercle EFG décrit de l'intervale DE, le sera aussi de l'intervale des deux autres : & partant il passera par les points E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le Corol. de la 16. pr. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. def. de ce livre, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné ; Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 5. PROP. V.

A l'entour du triangle donné décrire un cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux également les deux costez AB & AC aux points D & E par la 10. pr. 1. & par la 11 pr. 1. d'iceux points D & E, soient levées les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au point F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle : & apres avoir mené les trois lignes



FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les côtez AD ; BD egaux, & DF cōmun, & les deux angles au point D egaux pour estre droits : donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. prop. 1. Par mēme discours AF, CF, seront aussi ega-

les : & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront égales entr'elles : & partant le cercle décrit de F, & de l'intervalle FA, passera aussi par les points B & C. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour du triangle donné ABC : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus : car ils sont tous en une grande portion de cercle : mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera droit, attendu qu'il sera au demy cercle : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en une moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droit : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce Problème la maniere de décrire un cercle par trois points donnez, lesquels ne soient en une ligne droite : car ayant joint iceux points par lignes droites, on aura un triangle, à l'entour duquel il faudra décrire un cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Ceci se pratique aussi plus facilement, comme nous avons enseigné en nostre Geometrie pratique, Probl. 21.

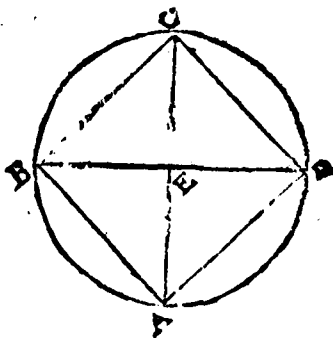
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans un cercle donné, décrire un-quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut décrire un-quarré.

Soient menées les deux diametres AC & BD se coupans au centre E en angles droits, & soient menées les quatre lignes droites AB, BC, DC, & DA. Je dis que le quadrilatere ABCD est un-quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les quatre angles au point E sont droits, & égaux par la construction, les 4. arcs auxquels ils insistent seront égaux par la 26. pr. 3. & partant les lignes droites qui soutiennent iceux arcs seront aussi égales par la 29. prop. 3. donc tous les costez du quadrilatere ABCD seront égaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droits, chacun d'iceux estant au demy. cercle: donc le quadrilatere ABCD est un quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

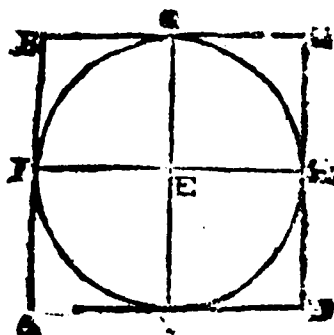


PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'un cercle donné décrire un quarré.

Soit le cercle donné F G S I à l'entour duquel il faut décrire un quarré.

Soient menez les deux diametres FS & CI se coupans à angles droits au centre E, & par la 31. pr. 1. des points G & I, soient menées les deux lignes BC, AD paralleles au diametre FS: Item par les points F & S soient aussi menées les deux lignes AB, DC paralleles à GI, & icelles 4. lignes paralleles se rencontrans aux points A, B, C, D, feront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est evident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre côtez seront égaux, chacun d'iceux estant égal à l'un des deux diametres FS, GI, qui sont égaux entr'eux. Pareillement par la mesme trente-quatre proposition 1. les quatre angles

A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au point E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du point E étant droit; au chacun des quatre A, B, C, D, sera droit; & par conséquent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droits, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és points, F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous avons décrit un quarré l'entour d'un cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la fig. ptec.) dans lequel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux également les quatre costez du quarré aux points F, G, S, I; & après avoir mené les deux lignes FS & GI s'entrecoupans au point E, d'iceluy point E, & de l'intervale EF, soit décrit un cercle FGSI, lequel sera le demandé.

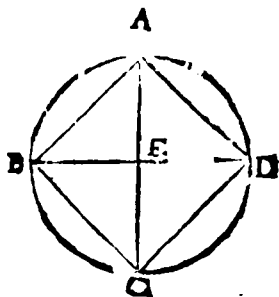
Car d'autant que AD, BC sont egales & paralleles, leurs moitez AI, BG seront aussi egales & paralleles, & par la 33. pr. l. AB sera egale & parallele à IG. Semblablement CD sera egale & parallele à la mesme IG: & par mesmes raisons on démontrera que AD, BC sont egales & paralleles à FS. Donc le quarré donné sera aussi divisé en quatre parallelogrammes, lesquels par la 34. prop. 1. auront les costez opposez egaux; ainsi AF & IE seront egaux; Item FE & AI; FB & BG; ID & ES; mais toutes icelles moitez des costez du quarré sont egales entr'elles; partant EF, EG, ES, EI, seront aussi egales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du point E, & de l'intervale de l'une d'icelles, comme EF, passera aussi par les points G, S, I, & touchera le quarré aux mesmes points F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pource que les angles à iceux points sont droits. Nous avons donc décrit un cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné $ABCD$, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient menées les deux diagonales AC & BD , s'entrecoupans au point E : puis du centre E , & de l'intervale EA , soit décrit le cercle $ADCB$. Je dis qu'il sera le demandé, c'est à dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné $ABCD$.



Car le costé AB étant egal au costé AD , le triangle BAD sera isoscele : & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB , sur la base BD seront egaux, & chacun demy droit par la 32. prop. 1. étant l'angle BAD droit par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demontrons que tous les autres angles des points A, B, C, D , seront aussi demy droits : & partant egaux entr'eux : ainsi au triangle AED les deux angles EAD & EDA seront egaux, & par conséquent les lignes droites EA, ED , aussi egales par la 6. prop. 1. & par mesme discours ED sera egale à EC , & EC à EB ; comme aussi EB à EA : & partant les quatre lignes droites EA, ED, EC & EB , seront egales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du centre E , & de l'intervale de l'une d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné $ABCD$. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour d'un quarré donné : ce qu'il falloit faire.

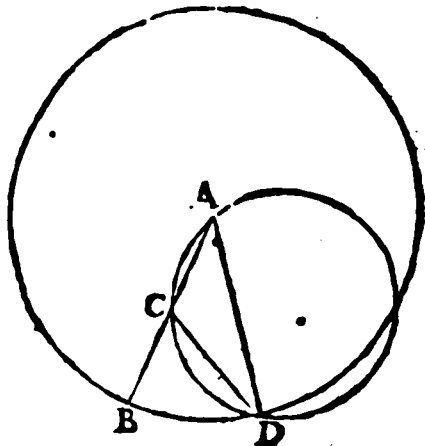
PROBL. 10. PROP. X.

Décrire un triangle isoscele, ayant un chacun des angles de dessus la base double de l'autre.

Soit pris quelconque ligne droite AB , laquelle par la 11.

p. 2. soit coupée en C, en sorte que le rectangle compris de AB, BC, soit égal au carré de AC : puis du centre A, & de l'intervalle AB soit décrit un cercle, dans lequel soit accommodée la ligne droite BD égale à AC : & après soit menée la ligne AD. Je dis que ABD est un triangle Isoscele ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A, ainsi qu'il étoit requis.

Car en premier lieu, il apert assez qu'iceluy triangle ABD est Isoscele, puis que les deux costez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD : & apres avoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, soit décrit le cercle ACD par la 5. p. 4. D'autant que par la construction le rectangle de AB & BC est égal au carré de CA, ou de son égale DB ; par la 37. pr. 1. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 32. pr. 3. l'angle CDB



sera égal à l'angle A, qui est au segment alterne CAD : & si à iceux angles on ajoute le commun ADC, les tous seront égaux ; sçavoir le total ADB, au deux CAD & ADC : mais l'angle extérieur DCB, est aussi égal aux deux oppozés intérieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il sera aussi égal à l'angle ADB, ou ABD, qui luy est égal par la 5. p. 1. puis que le triangle est Isoscele : & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé CD égal à DB : & partant aussi égal à CA ; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD égaux par la 5. prop. 1. & l'angle extérieur DCB (qui est égal à tous les deux) sera double du seul A aussi sera son égal B, & partant aussi son autre égal ADB. Nous avons donc construit le triangle Isoscele ABD, ayant chacun des angles de dessus la base BD double du troisième : Ce qu'il falloit faire.

COROL.

COROLLAIRE.

Pour ce que les trois angles du triangle ABD , sont égaux à deux droits, c'est à dire à cinq cinquièmes de deux droits : Il est évident que l'angle A est la cinquième partie de deux droits, & chacun des autres B & D , les deux cinquièmes parties : Item A estre les deux quints d'un droit, & chacun des deux B & D les quatre quints, puis que tous les trois sont égaux à deux droits, c'est à dire à dix quints d'un droit.

SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit construire un triangle Isoscele, ayant un chacun des angles de dessus la base, non seulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais aussi selon quelconque raison donnée, nous l'avons enseigné (après Pappus & Clavius) en nostre Geometrique pratique Prob. 37. & Scholie du 126.

PROBL. II. PROP. XI.

Dans un cercle donné, décrire un pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné $ABCDE$, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

Soit par la piec.

prop. construit le

triangle FGH ,

Isoscele, qui ait

chacun des an-

gles G & H dou-

ble de l'angle F :

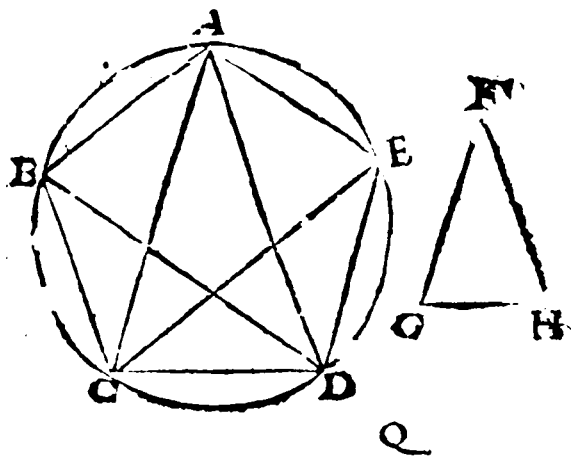
puis au cercle

donné soit inscrit

le triangle ACD

equiangle au

triangle FGH



par la 2. p. 4. Et ayant coupé les angles ACD , ADC en deux également par les lignes droites CE & DB par la 9. p. 1. soient menées les lignes droites CB , BA , AE , ED . Je dis que le pentagone $ABCDE$ inscrit au cercle donné, est equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH à chacun des deux angles sur la base GH , double du troisième F ; le triangle ACD , qui est equiangle à iceluy FGH , aura aussi chacun des angles dessus la base CD double du troisième A , lesquels étant coupés en deux également par les lignes droites CE & DB , les cinq angles ADB , BDC , CAD , DCE , ACE seront égaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences égales pour bases : mais les égales circonferences comprennent lignes droites égales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq costez AB , BC , CD , DE & EA , étant égaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi est-il manifeste par la 27. prop. 3. qu'il est equiangle, d'autant que chaque angle d'iceluy est soustenu de circonferences égales, sçavoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, vû que nous avons prouvé que tous iceux arcs sont égaux. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un pentagone equiangle, & equilateral : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cery, il s'ensuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquièmes parties de deux droits, ou bien les 6 quints d'un droit. Car puis que les trois angles BAC , CAD , DAE sont égaux par la 27. prop. 3. & EAD est le quint de deux droits, ou les deux quints d'un droit; le total BAE , qui est composé de ces trois, sera les trois quints de deux angles droits, ou bien les six quints d'un droit.

SCHOLIE.

Clavius enseigne en ce lieu-cy deux manieres pour décrire un pentagone equilateral, & equiangle sur une ligne droite donnée & terminée, la plus facile desquelles nous avons enseignée en nostre Geometrie pratique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

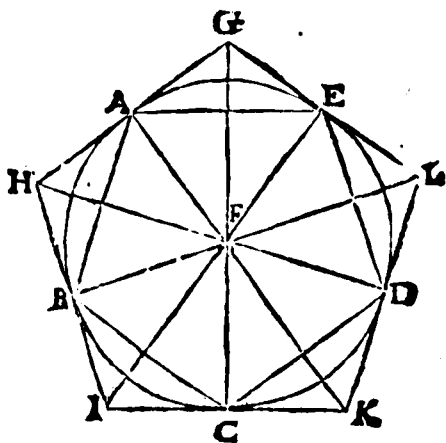
P R O B L. 12. P R O P. XII.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un pentagone, equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné $ABCDE$, à l'entour duquel il faut décrire un pentagone equilateral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit décrit le pentagone $AECDE$ par la prec. prop. & apres avoir mené du centre F les 5 lignes FA, FB, FC, FD, FE , soient menées sur icelles les 5 lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. prop.

1. se rencontrans aux cinq points G, H, I, K, L : (elles se doivent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux droits, étans parties des angles droits GAF, GFE par la 11. com. sent. les lignes droites AG, EG se rencontreront de la part de G , & ainsi des autres. (Je dis que $GHIKL$ est le pentagone demandé.



Car il est evidemment circonscrit au cercle donné; puis que par le Coroll. de la 16. p. 3. les lignes droites GH, HI, IK, KL, LG touchent ledit cercle és points A, B, C, D, E : En apres si on mene les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL ; d'autant que les angles FAG, FEG sont droits par la 47. prop. 1. le carré de FG sera egal aux deux quarez de FA, AG ; il sera aussi egal aux deux de FE, EG , & par consequent les deux quarez de FA, AG , seront egaux aux deux de FE, EG . Mais les quarez de FA, FE sont egaux (étans décrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, EG seront aussi egaux; & les lignes $AG & EG$ egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EFG , chacun au sien, & la base AG egale à la base GE : & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux:

& partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours AFB, qui est egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour bales) sera aussi double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux : Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun : & par la 26. prop. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouveront egales : mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouvera tous les autres costez egaux, & partant le pentagone GHIKL sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est evident : car nous avons montré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux, sçavoir est, les angles AGF, EGF : Item AGF, AHF : & qu'on en pouvoit dire autant des autres : donc les deux angles sous le point G, seront egaux aux deux angles sous le point H, & ainsi des autres : partant le pentagone sera equiangle & equilateral. Nous avons donc décrit à l'entour d'un cercle donné un pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

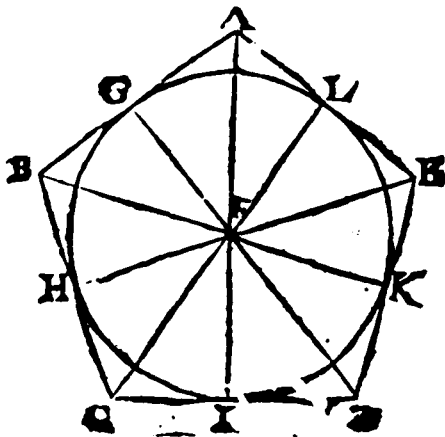
Dans un pentagone donné equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit donné un pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. soient coupez en deux également deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF se rencontrans au point F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy point F soient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires sur les costez du pentagone, puis du centre F, & intervalle FG soit décrit le cercle GHIKL.

Je dis qu'il est inscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les li-



gnes droites FC, FD & FE : d'autant que les deux costez AB, BF, du triangle ABF, sont egaux aux deux costez CB, BF du triangle BFC, chacun au sien, & les angles ABF, CBF, contenus d'iceux costez, egaux par la construction; les bases AF, CF seront egales, & les angles BAF, BCF aussi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C sont posez egaux, & que par la construction l'angle BAF est moitié de BAE; l'angle BCF sera aussi moitié de BCD, & consequemment iceluy BCD, est divisé en deux également par la ligne FC. Par même raison nous montrerons que les deux autres angles du pentagone D & E, sont divisés en deux également par les lignes FD & FE. Maintenant puisque par la construction les deux angles sous le point A sont egaux, ayant esté le total coupé en deux également, & que l'angle droit G est egal à l'angle droit L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. prop. 1. les deux autres costez seront egaux, sçavoir AG à AL, & FG à FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouveront egales : & partant le cercle décrit de F & intervalle FG, passe par les points G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le Cor. de la 16. p. 3. Le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 14. PROP. XIV.

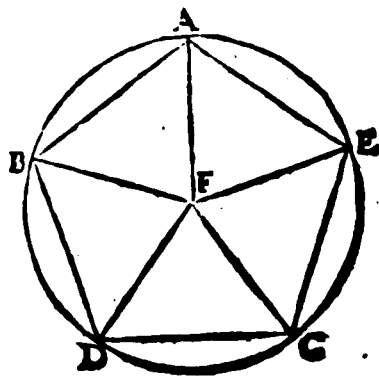
A l'entour d'un pentagone donné, lequel est equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné ABCDE, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez les deux angles A & B en deux également par la 9. p. 1. avec les lignes droites AF & BF se rencontrans au point F, & d'iceluy point F; & intervalle de l'une d'icelles deux lignes, soit décrit le cercle ABCDE. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les trois lignes FC, FD, FE, nous démontrerons comme au precedent Probl. qu'elles couperont en deux également les angles C, D, E. En apres, puis que le pentagone est equiangle, & chaque angle d'iceluy est coupé en deux également, au triangle AFB les deux angles sur la base BA se-

ront égaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi égaux : par le mesme discours BF & FC seront aussi égaux, & ainsi des autres coupantes ; & par la 1. com. sent. il est évident qu'icelles 5. lignes FA, FB, FC, FD, FE seront égales entr'elles, & partant que le cercle décrit de l'intervale de l'une d'icelles, passera par les extremités des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné. Parquoy nous avons décrit un cercle à l'entour d'un pentagone equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il falloit faire.



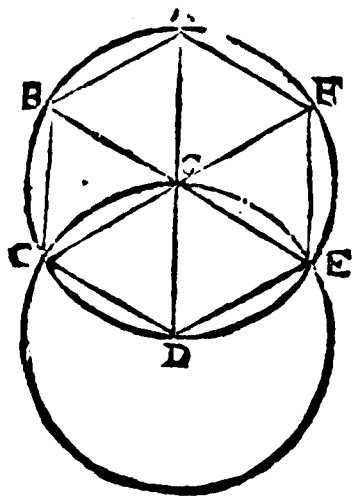
PROBL. 15. PROP. XV.

Dans un cercle donné, inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre est G ; dans lequel cercle il faut inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & intervalle DG, soit décrit le cercle GCE coupant le donné aux points C & E, desquels points soient menées les deux lignes CGF, EGB : finalement, soient menées les lignes droites AB, BC, CD, DE, EF ; FA ; & on aura décrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que je dis être equilateral, & equiangle.

Car il est evident (demon-
trant comme en la 1. p. 1.) que
les deux triangles CDG, DEG
construits sur la ligne DG sont
equilateraux, & par le Cor. de



la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. un chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droits : & puis que par la 13. p. 1. les deux angles CGE ; EGF sont égaux à deux droits, l'angle EGF vaudra aussi le tiers de deux angles droits : donc tous les angles du point G seront égaux entr'eux, valant chacun un tiers de deux angles droits ; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont égaux : partant les six basés AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront égales, & les angles sur icelles aussi égaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral : mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont égaux, les deux du point A seront égaux aux deux du point B, & ainsi des autres. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un hexagone equiangle & equilateral : Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est égal au demy diametre du cercle ; car le costé de l'hexagone DC, est égal au semidiametre DG par la def. du cercle.

P R O B L. 16. P R O P. XVI.

Dans un cercle donné, décrire un quindecagone equiangle & equilateral.

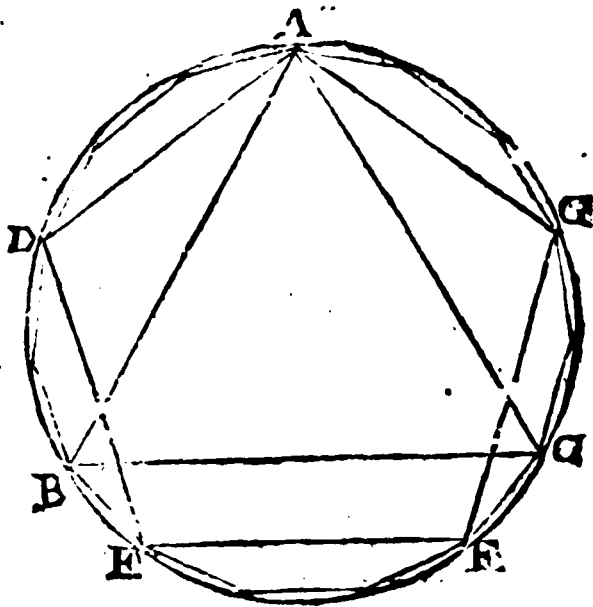
Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut inscrire un quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premièrement décrit dans iceluy cercle le triangle equilateral A B C par la 2. p. de ce livre ; les trois costez étant égaux, la circonference sera divisée en trois également par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce livre, ayant l'un des angles au point A. Je dis qu'ayant mené la ligne droite BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car, comme il a esté dit ; l'arc ADB est le tiers de toute la circonference ; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item la ligne droite AD, costé du pentagone, soutient l'arc AD, cinquième partie de la circonference : par-

tant doit contenir trois côstez du quindecagone : & conséquemment les deux arcs AD & DE contiendront six côstez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE sera la quinzième partie de toute la circonférence : & partant la ligne droite BE sera le côsté du quindecagone, & si par la r.

p. de ce livre on accommodé au cercle encorés 14 lignes droites égales à icelle BE, sera inscrit au cercle un quindecagone equilateral, & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous les angles sous-tendent arcs égaux, cha-



cun d'iceux angles étant composé de 13 arcs égaux. Nous avons donc au cercle donné décrit un quindecagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

Parcillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze points des divisions égales du cercle, nous tirons des lignes droites qui le touchent, se décrira un quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle : & davantage nous décrirons & circonscrirons un cercle à un quindecagone equilateral & equiangle donné, suivant la même méthode pratiquée au pentagone.

Fin du quatrième Element.



ELEMENT

CINQUIE'ME.

DEFINITIONS.



Partie est une grandeur tirée d'une autre plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure une autre plus grande, elle est dite partie d'icelle: Comme *A* qui est contenu 3 fois en *B*, est dit partie d'iceluy. Or entre les *Mathematiciens* il y a deux sortes de partie: car il y en a une qui mesure son tout; comme *A*, lequel repeté 3 fois constitue son tout *B*: & l'autre sorte ne me-

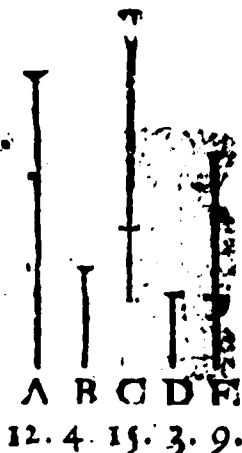


sûre pas son tout, mais prise ie ne sçay combien de fois excède iceluy, ou defaut au même, comme *A*, lequel étant pris 3 fois excède *C*, mais étant pris seulement 2 fois, il est excédé par le même *C*: Or la première est dite partie aliquote; & l'autre, partie aliquante: de cette-là seulemēt parle icy *Euclide*, puis que cette-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'apelle-il pas partie au 7. livre, mais parties.

2. Multiplice, est une grandeur plus grande qu'une autre plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si la grandeur *A*, est mesurée par *B*, moindre grandeur qu'icelle *A*, elle est dite multiplie de *B*: ainsi aussi la grandeur *C*, qui est mesurée 5. fois par *D*, est dite multiplie d'icelle *D*.

Or quand deux petites grandeurs en mesurent également deux autres plus grandes, c'est à dire, qu'une moindre est contenuë autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande,



ces deux plus grandes là sont dites equimultiplices d'icelles moindres: comme les grandeurs *A* & *E* sont dites equimultiplices de *B* & *D*. Pour ce que tout ainsi que *A* contient trois fois *B*, ainsi aussi *E* contient trois fois *D*. Et le même se doit entendre, si plusieurs moindres grandeurs en mesurent également plusieurs grandes.

3. Raison, est une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de même genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaison est apelée raison. & par quelqu'uns proportion; Parquoy on ne peut pas dire, qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie, ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne & la superficie, ny le nombre & la ligne, ne sont pas quantitez de même genre. Semblablement si on confere une ligne avec une ligne selon la qualité, c'est à dire, selon que l'une est blanche, & l'autre noire; ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de même genre, cette comparaison n'est pas dite raison, pource qu'elle n'est pas faite selon la quantité.

Or jaçoit que la raison se trouve proprement es seules quantitez, si est-ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, cōme sont les temps, les sons, les voix, les lieux, les mouvemens, les pois, & les puissances, sont aussi dites avoir raison, si leur habitude est considerée selon la quantité, comme quand nous disons un temps être plus grand qu'un autre temps, ou moindre; ou deux temps estre egaux, &c. telle habitude sera dite raison, pource qu'atōrs les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison cette quantité-là, qui est referée à une autre, est dite par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raison; & celle-là à laquelle elle est referée, est dite consequent d'icelle raison: Comme en la raison de *A* à *B*; *A* est dit antecedant de la rai-

son, & B consequent; Que si au contraire B est comparé à A; B sera appelé antecédant, & A consequent.

A———

B———

Or cette raison définie par Euclide, est divisée en raison rationnelle, & irrationnelle.

La rationnelle, est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'une ligne de 10 pieds à une autre de cinq pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10 & cinq. Mais l'irrationnelle, est cette raison-la qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diamètre d'un quarré au côté d'iceluy, laquelle ne se peut trouver ny exprimer en nombre: comme est démontré par Euclide, en la dernière proposition du 10. livre.

Autres disent que la raison ou portion rationnelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire, qui ont une commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par une même commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20 pieds à une autre de 8 pieds: car une ligne de 4 pieds ou de 2, est partie aliquote de l'une & l'autre de ces deux-la, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationnelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouver aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonale, & de plusieurs autres lignes dont est traité au 10. livre.

Cette raison se divise aussi en raison d'égalité, & d'inégalité: La raison d'égalité, est quand deux quantitez égales se comparent entr'elles, comme 10 à 10; une ligne de 12 pieds à une autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raison d'inégalité, est quand deux

quantitez inegales se comparent entr'elles, comme 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 9; celle d'une ligne de 7 pieds à une autre de 15 pieds, &c.

Cette raison d'inegalité, est subdivisée en raison d'inegalite majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalite majeure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dite raison d'inegalité majeure: item la raison d'une ligne de 10 pieds à une de 4, &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7 pieds à 9, s'apelle raison de moindre inegalité: item celle d'une ligne de 9 pieds à une autre de 12 pieds, &c.

La raison rationnelle d'inegalité majeure, est divisée en cinq genres, sçavoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente: les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composees d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand l'antecedant d'icelle contient le consequent plusieurs fois precisément: & cette raison contient sous soy diverses especes. Car si l'antecedant contient le consequent deux fois precisément, elle est dite double: si trois fois, triple, si 4, quadruple: si dix, deculpe, &c. Comme la raison de 20 à 4 est dite quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le consequent 4, cinq fois, & la raison d'une ligne de 18 pieds, à une autre de 3 pieds, est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand l'antecedent

contient le consequent une fois, & en outre une partie aliquote d'iceluy consequent : & cette raison a diverses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'iceluy consequent, est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3, à 2, en laquelle l'antecedent, 3 contient le consequent 2, une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy ; si elle est tierce partie, sesquiterce, si une quartie partie, sesquiquarte : si une cinquième partie, sesquiquinte, &c. Commencant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'iceluy : & a aussi cette raison plusieurs especes. Car si l'antecedant contient le consequent une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, est constituée une raison superbipatiente tierces comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, une fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy : si $\frac{3}{4}$, sera constituée une raison supertripatiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36, & ainsi des autres ; le nom d'icelles commençant tousiours par super, & prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & encore une partie aliquote d'iceluy : cette-cy est composée de la premiere & de la deuxieme : & tout ainsi que chacune d'icelles contient plusieurs especes, aussi fait celle-cy. Car si l'antecedant contient le consequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy, cette raison sera apellée double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy : si $\frac{1}{3}$, comme d'une

igne de 7 pieds à une autre de 3 pieds, cette raison s'appellera double sesquiterce : & la raison de 29 à 7 s'appellera quadruple sesquisseptuble, d'autant qu'en 29, 7. est cōtenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres. La raison multiple superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & plusieurs parties aliquotes d'iceluy : cette raison est composée de la premiere & troisieme ; & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs especes, aussi fait cette-cy : comme si l'antecedant contient le consequent, 2 fois, encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, cette raison sera appellée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8 à 3 : mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'iceluy, elle s'appellera triple superpatiente quarte, comme est la raison de 15 à 4 s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{5}{7}$ d'iceluy, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34 à 7, & ainsi des autres.

Or tout ce qui a été dit cy-dessus des cinq especes de raison rationnelle d'inegalité majeure, se doit aussi entendre des cinq especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut tousiours aposer cette syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Et pource que les denominateurs des raisons rationnelles cy-dessus exposées sont assez utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se dénomment. Nous apellons denominateur d'une raison, le nombre qui exprime distinctement, & apertement la quantité de la grandeur antecedante au respect de la consequente : comme le dominateur de la raison quintuple est 5, pource que ce nombre là montre que la grandeur en quantité antecedante contient 5 fois la consequente.

Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est $1 \frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la quantité antecedante contient la consequente une fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle : Item le denominateur de la raison subtriple, est $\frac{1}{3}$, car il demontre que l'antecedant est la tierce partie du consequent : & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme j'estime, Euclide au 6. livre, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous avons dit, combien une grandeur est au respect d'une autre avec laquelle elle est conferée, ainsi qu'il apert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unitiez, que l'antecedant de la raison contient de fois le consequent. Comme le denominateur de la raison double, est 2, de la sextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, duquel le numerateur est toujours l'unité : mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple $\frac{1}{6}$ de la subcentuple $\frac{1}{100}$ &c. Il est donc facile de trouver le denominateur de quelconque raison multiple ou submultiple, puis que la proposition montre le denominateur de la raison, comme il est evident par les exemples proposez cy dessus.

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'unité avec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le consequent. Comme le denominateur de la raison sesquialtere, est $1 \frac{1}{2}$: de la sesquiterce $\frac{1}{3}$; &c. il n'est donc pas difficile de trouver

Sur le denominateur d'une raison superparticuliere, puis que la prolation d'icelle raison exprime le denominateur par sa partie aliquote, comme il apert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nōbre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subsequalter , est $\frac{2}{3}$: & celui de la subsequitierce, est $\frac{3}{4}$: &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouvé, car il n'y a qu'  prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison subsequisquinte est $\frac{5}{6}$: & celui de la raison subsequisepiti me est $\frac{7}{8}$: mais celui-là de la raison subsequisquintesi me, est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelque raison superpartiente, est une unité avec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le consequant. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quarte, est $1\frac{1}{4}$: celui de la raison superquadrupartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$; & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles   trouver, pource que la prolation même de la raison exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il apert  s exemples cy-dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unitéz, que la quantité consequente contient de parties aliquotes par dessus l'antecedante. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{7}$; celui de subsuperquadrupartiente quintes, est $\frac{5}{8}$: &c. On trouvera donc le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de

la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimées en la raison proposée, auquel si on ajoute le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction: comme le denominateur de la raison subsuperpartiente quinte est $\frac{2}{5}$, pource que le numerateur de cette fraction est le nombre denommant les quintes, sçavoir 5, auquel est ajouté le nombre 3, des trois parties, afin de faire 8, denominateur de la fraction: mais le denominateur de la raison subsuperquadrupartiente neuvième est $\frac{2}{9}$: & ainsi des autres.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier denommant la raison multiple proposée avec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la consequente. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptième est $3\frac{1}{7}$: mais celui de la raison quadruple sesquiquinte, est $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pource que la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme il se voit es exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes contenues en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiquarte, est $\frac{4}{3}$; de subquintuple sesquinuvième, $\frac{6}{5}$, &c. On trouvera le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si on ajoute 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple su-

Superpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, avec les parties aliquotes que la quantité antecedente doit contenir de la consequente. Comme le denominateur de la raison triple superbipartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$; de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouver le denominateur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme apert es exemples cy-dessus: & le denominateur d'une raison submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{1-1}$: de subquadruple supertripartiente quintes $\frac{5}{2-3}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouvé, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes: lequel étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit ajouté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il apert es exemples posez cy-dessus.

Finalemēt le denominateur de la raison d'egalité est toujours l'unité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'une contient l'autre une fois precisément.

4. *Proportion*, est une similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dite raison, ainsi la comparaison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dite proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dite proportion. Et c'est ce que les Grècs appellent

analogie. & quelques Latins proportionalité: Selon Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils apellent Medieté, sont la proportion Arithmétique, la Geometrique, & l'Harmonique.

Mais Euclide ne traite icy que de la Geometrique, laquelle est ou continuë, ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedent & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente; mais consequent à la quantité antecedente: comme si on dit que telle qu'est la raison de A à B , telle est celle de B à C , où la quantité B est antecedant de la quantité C , & consequent de la quantité A . Mais la proportion discrete ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entre moyenne, est prise seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedent ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B , est comme celle de C à D .

5, Les grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, lesquelles étans multipliées se peuvent excéder l'une l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. apelé raison l'habitude de deux grandeurs de même genre, il explique en cette-cy quelle chose requierent deux quantitez de même genre, afin qu'elles soient dites avoir raison, sçavoir est, que l'une ou l'autre d'icelles étant multipliée, elles s'augmentent en sorte, que finalement elle surpasse l'autre.

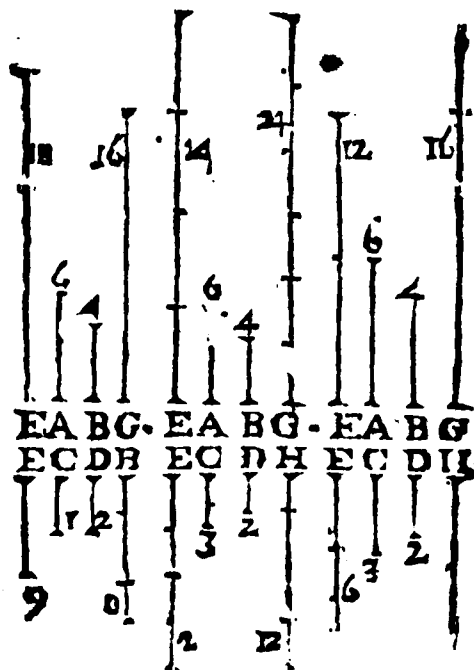
tre : ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excède le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre, constituent un triangle Isocele, par la 20. p. 1 les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutes fois n'est encore connue) puis que le diametre multiplié par 4, c'est à dire pris 4 fois, excède la circonference: car toute la circonference, comme il est démontré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore une particule peu moindre qu'une septième partie d'iceluy diametre. Mais il s'ensuit de cette def. qu'une ligne finie n'aura raison à une infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que ce soit multipliée la ligne finie elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il apert de la 16. pr. 3 qu'iceluy angle contingent, ne peut jamais excéder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, comme la troisième à la quatrième, quand les equimultiples de la première & troisième, aux equimultiples de la seconde & quatrième, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egaux, ou excèdent, un chacun à un chacun, prenant ceux-là qui s'entre-répondent.

Ayant été dit par Euclide, que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, main-

tenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour être en même raison. sçavoir est, que les equemultiples de la premiere & troisieme grandeur excedent, soient egaux ou defaillent aux equemultiples de la deuxieme & quatrieme

en quelque multiplication que soient pris iceux equemultiples, comme apert en ces quatre quantitez A, B, C, D, ou les equemultiples de A & C, premiere & 3, sont E & F, & les equemultiples de B & D, 2^e & 4^e quantitez sont G & H: tel-



lement qu'il se voit qu'ayant multiplié A & C, par un même nombre; & B, D, par quelconque même nombre, si le multiple E excède le multiple G qui luy correspond, aussi le multiple F excède le multiple H; s'il est égal, l'autre sera aussi égal; s'il defaut aussi fera l'autre, & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiples: & partant il y a même raison de A premiere quantité à B seconde, que de C troisieme à D quatrieme.

Par la converse de cette def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la troisieme à la quatrieme, il s'ensuit que les equemultiples de la pre-

miere & troisiéme excèdent . sont egaux , ou defail-
lent aux equemultiplices de la deuxiéme & quatrié-
me . engendrées de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y a même raison de la premiere à la se-
conde, que de la tierce à la quatriéme, il s'ensuivra que
les equemultiplices de la premiere & troisiéme n'ex-
cederont, ne seront egaux, ou ne defaudront aux equem-
multiplices de la deuxiéme & quatriéme produite de
quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de quatre grandeurs se doit aussi
entendre de trois , prenant celle du milieu deux fois,
afin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en même raison
sont apelées proportionnelles.

Comme si des grandeurs *A*,
B, *C*, *D*, il y a mesme raison de
A à *B*, que de *C* à *D*, icelles
grandeurs sont dites proportion-
nelles.

A ————— 12

B ————— 8

C ————— 6

D ————— 4

Et les grandeurs *E*, *F*, *G*, les-
quelles sont en proportion conti-
nuë, sont aussi dites continuelle-
ment proportionnelles.

E ————— 12

F ————— 6

G ————— 3

8. Quand des equemultiplices, celui de la
premiere grandeur excède celui de la se-
conde, & le multiplice de la troisiéme n'ex-
cède celui de la quatriéme, lors il y aura
plus grande raison de la premiere grandeur
à la seconde, que de la troisiéme à la qua-
triéme.

Euclide declare icy quelle condition doivent avoir 4 grandeurs, afin que la premiere soit dite avoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4^e, disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3^e, & les equemultiplices de la deuxième & 4^e, si la multiplie de la premiere excède la multiplie de la 2^e mais la multiplie de la 3^e n'excede la multiplie de la 4^e il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la 3^e à la 4^e, comme il apert en l'exemple icy posé, auquel sont prises E & F, doubles de A & C, premiere & 3^e grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxième & 4^e grandeurs: & pource que E multiplie de A premiere est plus grand que G multiplie de B 2^e, & F multiplie de C 3^e n'est pas plus grand que H multiplie de D 4^e, la raison de A premiere grandeur à B 2^e, est dite plus grande que la raison de C 3^e à D 4^e.

	12		
	6		9
		2	
E A	E G		
F C	D H		
	4	3	
8		9	

Or afin que quatre grandeurs soient dites être en même raison, il est nécessaire que les equemultiplices d'icelles, pris selon quelconques multiplications, excèdent, soient égaux ou defaillent, comme il a été exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dite avoir plus grande raison à la 2^e, que la 3^e à la 4^e: c'est assez que des equemultiplices pris selon quelque multiplication, celui de la premiere grandeur excède celui de la deuxième: & le multiplie de la troisième n'excede celui de la quatrième, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient tels. Parquoy pour conclurre en quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une au-

tre, que d'une troisième à une quatrième. Il suffira de démontrer que selon quelque multiplication, le multiple de la première grandeur excédant celui de la seconde, le multiple de la troisième n'excede celui de la quatrième.

Et convertissant cette 8^e def. s'il y a plus grande raison de la première grandeur à la deuxième, que de la troisième à la quatrième, le multiple de la première excédant celui de la deuxième, il se peut faire quelque multiplication par laquelle le multiple de la troisième n'excede celui de la quatrième.

Que si au contraire d'icelle def. le multiple de la première grandeur ne surmonte celui de la deuxième, & le multiple de la tierce excède celui de la quarte, la première grandeur sera dite avoir moindre raison à la deuxième que la tierce à la quarte. La converse a aussi lieu.

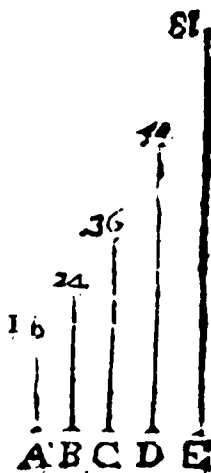
9. Proportion ne peut être constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a été dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons: il s'ensuit qu'il n'y peut avoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë, mais il en faut quatre au moins, si elle est proportion discrete.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir à la troisième la raison doublée de la première

à la seconde: mais s'il y en a quatre. la premiere est dite être à la quatrième, en raison triplée de la premiere à la seconde: & toujours d'un même ordre une plus, jusques à ce que la proportion soit achevée.

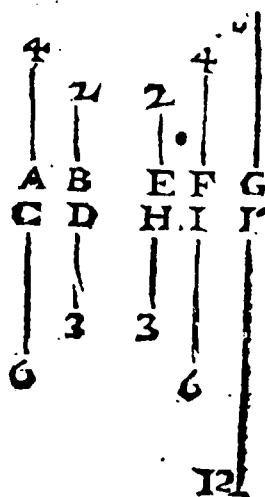
Comme si les grandeurs A, B, C, D, E , sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite avoir à la 3^e quantité C , la raison doublee de celle de A à la 2^e B , pource qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B . sçavoir est la raison de A à B , & celle de B à C , tellement que la raison de A à C , prend par ce moyen la raison doublee de A à B , c'est à dire posée deux fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4^e D , est dite triplée de celle de A à B , pource qu'entre A & D , se trouvent 3 raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B : c'est à sçavoir la raison de A à B , celle de B à C , & celle de C à D : & partant la raison de A à D encloft par ce moyen la raison triplée de A à B , c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E , est dite quadruplée de la raison de A à B : pource qu'entre A & E sont encloses 4 raisons, qui sont egales à celle de A à B , &c.



II. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecédans aux antecédans, & les conséquens aux conséquens,

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A, B, C, D , sçavoir que comme A est à B , ainsi C soit à D , les quantitez

A & C , antecedantes de chaque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez consequentes B & D . Ainsi pareillement, si les quantitez E, F, G , sont proportionnelles aux quantitez H, I, K : les termes E & H , seront dits homologues, ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dit homologue au terme I : & aussi G à K : ainsi les côtez des figures éans



comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecedans des raisons, & quels consequens.

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en cette def. & es suivâtes, aucuns moyens d'argumenter es proportions,

desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dit donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de

quatre grandeurs proportionnelles proposées, comme A, B, C, D , sçavoir que comme A est à B , ainsi C est

à D ; on vient à conclurre qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant C , que du consequent B au consequent D : & cette maniere d'argumenter (laquelle est démontré à la 16. p. de ce liv.)

se couche ordinairement ainsi: comme A est à B , ainsi

comme A est à B , ainsi C est à D .



se couche ordinairement ainsi: comme A est à B , ainsi

ainsi C est à D : Donc en permutant comme A sera à C, ainsi B à D. Et est à noter qu'en cette manière d'argumenter, les quatre grandeurs doivent être de même genre.

13. Raison inverse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecédent pour le comparer à l'antecedant, comme si c'étoit le consequent,

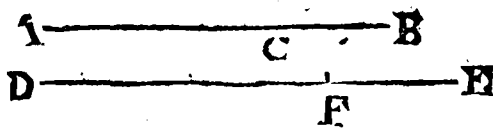
Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous infererons que par raison inverse, comme B est à A, ainsi que D est à C, c'est à dire les consequens aux antecédans. En cette sorte d'argumenter les Auteurs parlent presque toujours ainsi : comme A est à B, ainsi C est à D : donc en changeant, ou au contraire, B sera à A, comme D à C. Cette manière d'argumenter sera démontrée au Corrollaire de la 4. proposition de ce livre.

A ———
B ———
C ———
D ———

14. Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedent avec le consequent, comme une seule chose, pour le comparer au même consequent.

Comme si AC est à CB, comme DF à FE, & on vient à conclure que la toute AB est à CB, comme la toute DE à FE; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB, est au mesme consequent CB, comme la composée de l'antecedant DF, & du consequent FE, est à iceluy consequent

Et cette maniere d'argumenter sera dite composition de raison.



Et se pronon-

ce ainsi ; comme AC est à CB , ainsi DF à FE : donc en composant AB sera à CB , comme DE à FE : laquelle sorte d'argumenter sera démontrée en la 18. p. de ce livre.

A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison. en peuvent estre ajoûtez deux autres : le premier peut estre dit composition converse de raison : sçavoir quand on prend l'antecedant & le consequent comme un seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB , comme DF à FE ; & nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant & du consequent, est à l'antecedant AC , ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF : laquelle façon d'argumenter nous démontrerons estre valable sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit composition contraire de raison ; c'est à sçavoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme un seul. Comme si AC est à CB , ainsi que DF à FE , & nous inferons par composition contraire de raison : donc comme AC antecedant sera à la toute AB , composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE , composée de l'antecedant & du consequent. Nous démontrerons sur la 18 p. de ce liv. que cette forme d'argumeter est valable. 15. Division de raison, est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse

le consequent , pour le comparer à iceluy même consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB , que de DE à FE : donc aussi AC , excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, sera à CB consequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excède le consequent, sera à FE consequent. Or les Auteurs concluent ordinairement avec cette raison ainsi : comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : donc en

$$\begin{array}{ccccccc} A & & 10 & & C & 10 & B \\ \hline D & & 16 & & F & 9 & E \end{array}$$

divisant AC sera aussi à CB ; comme DF à FE . Ce qui sera démontré en la 17. p. de ce livre.

A ce moyen d'argumenter en peuvent aussi estre ajoutez deux autres : le premier peut estre appellé division converse de raison ; c'est à sçavoir quand le consequent est comparé à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : Comme si AB est à CB , comme DE à FE , & nous inferons : donc aussi par division converse de raison, comme CB consequent sera à AC , excez par lequel l'antecedant surmonte le consequent ; ainsi FE consequent sera à DF , excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : laquelle maniere d'argumenter nous demonstrerons pouvoir estre sur la 17. pr. 5. Il est manifeste qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations par division de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit division contraire de raison, c'est à sçavoir quand l'antecedant est conferé à l'excez, par lequel le consequent excède l'antecedant. Comme quand on dit, A Cestre à AB ,

comme DF à DE : Donc aussi par division contraire de raison AC antecédant sera à CB , excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant; comme DF antecédant sera à EF , excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demontrerons sur la 17. prop. de ce livre.

Il est evident qu'en cette division contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conversion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB , ainsi DE à FE : & on vient à conclure, que AB antecédant sera aussi à AC , excez par lequel il surmonte le consequent comme DE antecédant sera à DF , excez par lequel l'antecedant

excede le consequent,

cela sera dit conversion de raison. En cette sorte d'argumēter les Au-

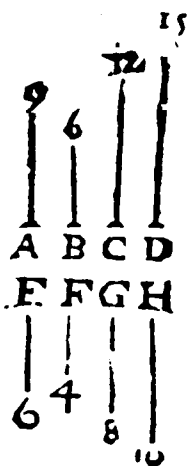
theurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : Donc par conversion de raison AB sera à AC , comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera démontrée au Cor. de la 19. pr. de ce livre.

$$\begin{array}{r} A \quad \underline{\quad 21 \quad} \quad C \quad 10 \quad 15 \\ D \quad \underline{\quad 16 \quad} \quad F \quad 3 \quad E \end{array}$$

17. Raison egale, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en même raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement, c'est lors qu'on prend les extrêmes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D : & autant d'un autre E, F, G, H , lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B , comme E à F ; & B à C , comme F à G ; & C à D , comme G à H : si on infere que comme A est à D , premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H , premiere & derniere des secondes. Cette maniere d'argumenter est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que cette maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçavoir est quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre: & quand l'ordre est perty: Euclide explique is deux def. suivantes que c'est que proportion ordonnée, & perturbée.



18. Proportion ordonnée, est quand l'antecedant est au consequent, comme l'antecedant est au consequent: & que le consequent est à quelqu'autre, comme le consequent est aussi à quelqu'autre.

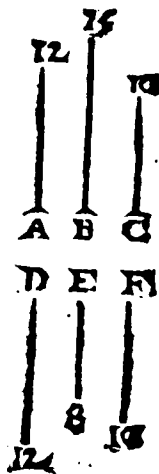
Cecy est aisé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous avons posé A estre à B , comme E à F ; & B à C , comme F à G ; & C à D , comme G à H :

Car

Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des 4. dernieres; & partant cette proportion est dite ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'égalité, la proportion d'ordre estant observée, soit bon, sera demonsté en la 22. p. de ce livre.

19. Proportion troublée, est quand trois grandeurs étans d'un côté, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquième à la sixième, & comme la seconde à la troisième, ainsi la quatrième à la cinquième.

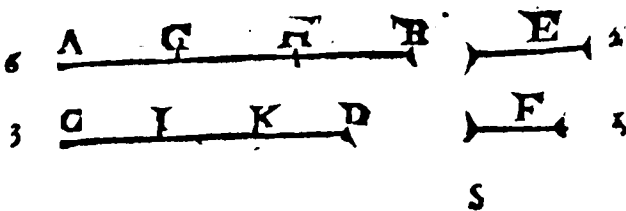
Comme si A est à B, ainsi que E est à F; & comme B est à C, ainsi D à E: cette proportion sera dite troublée ou perturbée, & autant qu'un mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison des premières grandeurs entr'elles, qu'és secondes aussi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere est comparée à la seconde, & cette cy à la 3^e: mais és secondes quantitez la 2^e est comparée à la 3^e, & la premiere à la seconde. Or que le moyen d'argumenter par raison égale, la proportion troublée estant gardée, soit bon, il sera demonsté en la 23. p. de ce livre.



THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra équemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne; comme l'une sera multiplie de l'une, ainsi les toutes seront multiplices des toutes.

Soient tant de grandeurs qu'on voudra A B & C D, équemultiplices



d'autant d'autres grandeurs E & F. Je dis que les grandeurs AB & CD ensemble, seront autant multiplies de E & F ensemble, comme AB l'est de E, ou CD de F.

Car puis que AB est multiplie de E; E mesurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce livre, qu'elle la mesure donc trois fois, & soit icelle AB couppee en trois parties égales, AG, GH, HB, chacune desquelles sera égale à E. Le même se peut dire de la grandeur CD, laquelle on coupera aussi en trois parties égales CI, IK, KD, étant chacune d'icelles égale à F: mais qui a choses égales, sçavoir à AG & E, adjoûte choses égales, sçavoir CI & F, les toutes AG, CI ensemble, seront égales aux toutes E & F ensemble. Par même raison GH & IK ensemble, seront égales à icelles E & F ensemble pareillement HB & KD, aux mêmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, égales à E; & en CD d'égales à F: autant y en a-t'il en AB & CD prises ensemble, qui sont égales à E & F prises ensemble; Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F, comme la seule AB est triple de la seule E; ou la seule CD de la seule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplies, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

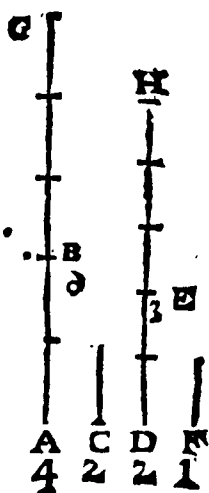
THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multiplie de la seconde, que la troisieme de la quarte, & la cinquieme autant multiplie de la seconde, que la sixieme de la quarte; la composée de la premiere & cinquieme, sera autant multiplie de la seconde, comme la composée de la troisieme & sixieme, le sera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplie de la seconde C, comme la 3. DE l'est de la 4. F: & soit la 5. BG autant multiplie de la 2. C, comme la 6. EH de la 4. F: Je dis que AG composée de la premiere & cinquieme AB & BG, sera autant multiplie de la 2.

C, comme DH composée de la tierce & sixième DE & EH, le sera de la quarte F.

Car puis que AB est autant multiplie de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DE d'égales à F. Par la même raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs égales à C, comme il y en a en EH d'égales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DH d'égales à F: parquoy AG composée de la première & cinquième est autant multiplie de la seconde C, comme DH composée de la tierce & sixième l'est de la quarte F. Parquoy si la première est autant multiplie de la seconde, que la troisième de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



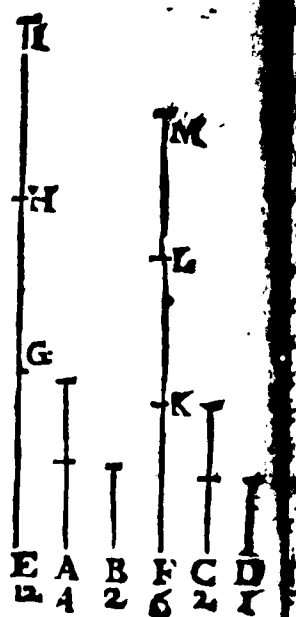
THEOR. 3. PROP. III.

Si la première est autant multiplie de la seconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des équemultiples de la première, & troisième: aussi le multiplie de la première sera autant multiplie de la seconde, que le multiplie de la tierce le sera de la quarte.

Soit A autant multiplie de B, comme C l'est de D; & de la première & tierce A, C, soient pris les équemultiples E & F. Je dis que E sera autant multiplie de B 2^e, que F de D 4^e.

Car puis que E est autant multiplie de A, que F l'est de C: E contiendra autant de parties égales à A, comme F de parties égales à C. Soit donc E divisée en EG, GH & HI, chacune égale à A: Item F divisée en FK, KL & LM, chacune égale à C: & d'autant que EG & FK sont égales à A & C, lesquelles sont équemultiples de B & D par l'hypothese, aussi EG & FK

seront equemultiples des mêmes B & D. Par même raison GH & KL : item HI & LM, seront equemultiples d'icelles B & D. Vû donc que EG premiere grandeur est autant multipliee de la seconde B, que FK tierce l'est de D quarte. Item GH cinquième autant multipliee de la même seconde B, que KL sixième de la quatrième D ; aussi EH composée de la premiere & cinquième sera autant multipliee de la seconde B, que FL composée de la tierce & sixième l'est de la quatrième D, par la prec. prop. Derechef puis que EH premiere grandeur est autant multipliee de la seconde B, que FL tierce l'est de D quarte, & HI



cinquième est aussi autant multipliee de la seconde B que LM sixième l'est de la quatrième D : EI composée de la premiere & cinquième sera aussi autant multipliee de la seconde B, que FM composée de la tierce & sixième l'est de D quatrième par la 2. p. de ce livre. Si donc la premiere est autant multipliee de la seconde, &c. C'est qu'il falloit demontrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere est à la seconde, en même raison que la tierce à la quarte : aussi les equemultiples de la premiere & tierce, auront même raison aux equemultiples de la seconde & quarte, en quelque multiplication que ce soit ; si elles sont prises ainsi qu'elles s'entrecorrespondent.

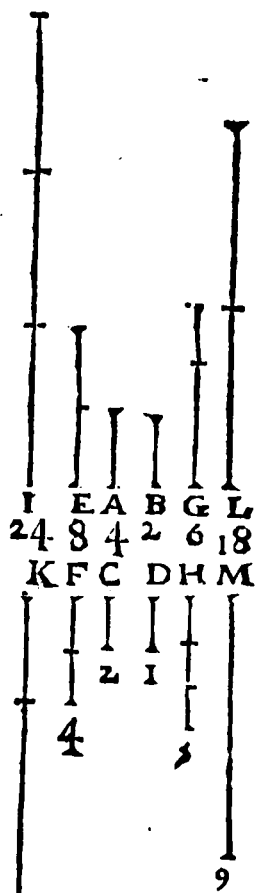
Soit A à B en même raison que C à D, & soient prises E & F equemultiples de A premiere & C tierce. Item G & H equemultiples de B seconde & D quarte.

ELEMENT.

277

selon quelque multiplication que ce soit, Je^e dis qu'il y a même raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K équemultiples de E & F, pareillement L & M équemultiples de G & H : d'autant que E premiere, est autant multiple de A seconde, que F tierce l'est de C quarte, & I, K sont prises équemultiples d'icelles E, F premiere & tierce; aussi par la 3. prop. de ce livre I & K, seront equemultiples de A & C, seconde & quarte. Par mesme raison L & M, seront aussi équemultiples de B & D : & puis que A est à B comme C à D : & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont été démontrées I & K équemultiples; Mais de B & D seconde & quarte, autres équemultiples L & M : par la converse de la 6. def. de ce livre, si I defaut, est égal, ou plus grand que L, aussi K defaudra, sera égal, ou plus grand que M, selon quelconque multiplication que soient pris iceux équemultiples. Et pour autant que I & K, sont équemultiples de E & F; pareillement L & M de G & H : par la mesme 6. def. il y aura mesme raison de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste la preuve de la raison inverse, qu'Euclide a expliquée en la 13. def. de ce livre, sçavoir est que si 4. grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estans prises à rebours, c'est à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté de-

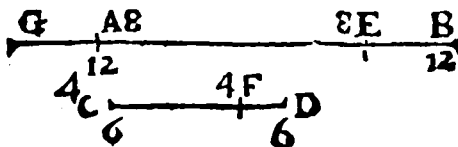
monstré que si I defaut, est égal ou plus grand que L, aussi defaudra, sera égal, ou plus grand que M, selon quelconques multiplices. Il appert aussi que si L defaut, est égal, ou plus grand que I, aussi M defaudra, sera égal, ou plus grand que K, selon quelconques multiplications : Et partant par la 6. d. il y aura mesme raison de G à E que de H à F.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une grandeur est autant multipliee d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée : aussi le reste sera autant multipliee du reste que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multipliee de la toute CD, comme la retranchée AE, de la retranchée CF. Je dis que le reste EB sera autant multipliee du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD.

Car AG étant faite autant multipliee de FD comme AE l'est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD : d'autant que AE, AG sont équimultiplices de CF, FD : par la 1. pr. de ce livre, la toute GE, sera autant multipliee de la toute CD, comme AE de CF : Mais aussi AB, est autant multipliee de CD comme AE de CF, donc GE, AB, sont équimultiplices de CD, & partant égales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostant ce



qui leur est commun, sçavoir AE, resteront égales GA, EB; qui partant seront équimultiplices de FD, puis que GA a été posée multipliee d'icelle FD, & autant comme AB l'est de CD : donc aussi le reste EB, sera autant multipliee du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD. Parquoy si une grandeur est autant multipliee d'une grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

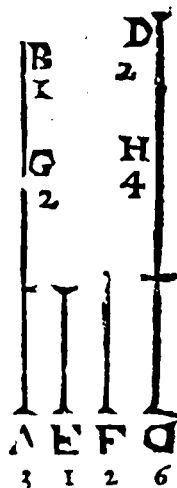
THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont équemultiples de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des équemultiples : ou les restes seront égaux aux mêmes, ou équemultiples d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, équemultiples des grandeurs E, F, & les retranchées AG, CH aussi équemultiples des mêmes grandeurs E, F. Je dis que les restes GB, HD, seront ou égaux aux mêmes E, F, ou équemultiples d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, sont équemultiples de E & F ; en AB il y aura autant de grandeurs égales à E, comme en CD de grandeurs égales à F.

Pareillement d'autant que la retranchée AG est autant multiplie de E, que la retranchée CH l'est de F ; AG contiendra autant de grandeurs égales à E, que CH de grandeurs égales à F, par la 1. & 2. def. de ce livre. Si donc d'égales multitudes de grandeurs AB & CD, on ôte égales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes restantes GB & HD seront égales : c'est-à-dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F ; ou bien si GB est égale à E, aussi



HD sera égale à F : & par ainsi iceux restes GB, HD seront égaux à E & F, chacune à la sienne, ou bien seront équemultiples d'icelles. Parquoy si deux grandeurs sont équemultiples de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs égales, ont même raison à une même grandeur ; & cette-cy aura même raison aux grandeurs égales.

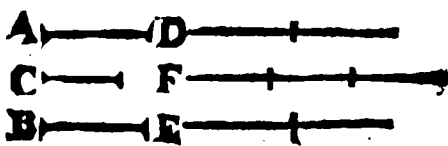
Soient deux grandeurs égales A & B, & une autre quelle

S +

qu'elle soit C. Je dis que A & B ont même raison l'une que l'autre à C, & que C aura même raison à A qu'à B.

Qu'il ne soit ainsi;

soient pris D & E équemultiplices de A première, & B tierce, soit aussi pris F quelqueque multiplice de C, seconde & quar-



te : donc puis que D est autant multiplie de A, que E est multiplie de B ; & que A & B sont posées égales : aussi D & E seront égales par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, égale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, égale, ou plus petite que la même F, & par la susdite 6. def. de ce livre, il y aura telle raison de A à C, comme de B à la même C.

Quant à l'autre partie, elle se prouve tout de même par la susdite def. en prenant les mêmes équemultiplices, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inverse. Car puis qu'il a été démontré que A est à C comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le Corol. de la 4. prop. de ce livre. Donc les grandeurs égales ont même raison à une même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inégales, la plus grande a plus grande raison à une même grandeur, que la plus petite : & une même grandeur a plus grande raison à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inégales AB & C, desquelles AB est la plus grande, & une troisième quelle qu'elle soit D. Je dis que AB a plus grande raison à la troisième D, que non pas C : item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.

Qu'il ne soit ainsi : soit entenduë AB première grandeur, D seconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB est plus grande que C, soit retranchée AE égale à icelle

C, & soient pris des équemultiplices, à
 ſçavoir FG de BE, & GH de EA, en ſorte
 que chacune d'icelles FG & GH ſoit plus
 grande que D: & puis que les deux FG, GH,
 ſont équemultiplices des deux BE, EA, par
 la 1. prop. de ce livre, la toute HF ſera au-
 tant multiplce de la toute AB, comme HG
 de AE, ou de C ſon égale. Maintenant ſoit
 priſe IK auſſi multiplce de D, en ſorte
 qu'elle ſoit plus petite que HF, mais plus
 grande que HG: (ce qui eſt facile, puis
 que D eſt plus petite que ny FG, ny GH:
 ſi bien qu'il faut ſeulement adjoûter tant de
 fois la grandeur D, juſques à ce que l'on
 ait ce que l'on cherche.) D'autant que FH,
 GH ſont équemultiplices de AB premiere,
 & C troiſième, ſi IK eſt priſe pour l'éque-
 multiplce, tant de D ſeconde, que D qua-
 trième, il eſt évident que HF multiplce de
 A B premiere, étant plus grande que IK
 multiplce de D ſeconde, HG multiplce de
 C tierce, n'eſt pas plus grande que IK multiplce de D
 quarre: & partant par la huitième def. de ce livre, il y aura
 plus grande raiſon de AB à D, que de C à la même D.

Quant à la ſeconde partie: d'autant que IK multi-
 plce de la premiere D, (car il faut maintenant poſer
 D premiere & troiſième, C ſeconde, & A B quatrième)
 eſt plus grande que HG multiplce de la ſeconde C; &
 IK multiplce de la troiſième D, eſt moindre que FH
 multiplce de A B quatrième: Il y aura plus grande rai-
 ſon de D à C, que de D à A B, par la 8. def. de ce livre.
 Parquoy des grandeurs inégales, &c. Ce qu'il falloit
 démonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont même raiſon à une même
 grandeur, ſont égales entr'elles: & celles-là
 auſſi ſont égales, auſquelles une même gran-
 deur a même raiſon.

Soient premierement deux grandeurs A & B, leſquelles



ayent même raison l'une que l'autre à la troisième C. Je dis qu'elles sont égales entr'elles.

Car si elles n'étoient égales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande; & par la précédente prop. icelle plus grande auroit plus grande raison à C, que la plus petite, ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inégales, mais égales.

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C ait une même raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi égales entr'elles: car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre: & par la même 8. prop. a icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: A & B ne sont donc pas inégales, mais égales. Donc les grandeurs qui ont même raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



ABC

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raison à une même grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle-là à laquelle une même grandeur a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raison de A à C soit plus grande que de B à la même C. Je dis que A sera plus grande que B.

Autrement, si A n'étoit plus grande que B, elle seroit égale, ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles étoient égales, elles auroient même raison l'une que l'autre à C, par la 7. prop. de ce livre, ce qui seroit contre l'hypothese: si aussi elle étoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. prop. de ce même livre, ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A ne sera pas moindre ny égale à B: & par conséquent sera plus grande.

Maintenant que C aye plus grande raison à B, que non pas à A: Je dis que B sera plus petite que A. Autrement si B n'étoit moindre que A, elle seroit égale,



ABC

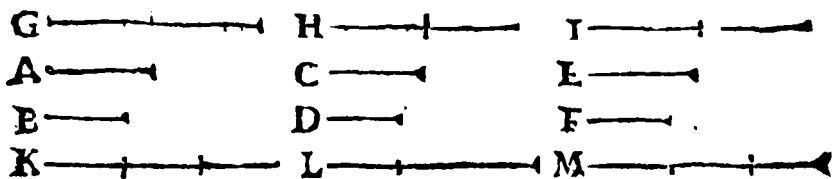
ou plus grande, ce qui est impossible : car si A & B étoient égales, C auroit même raison à l'une qu'à l'autre par la susdite 7. prop. de ce livre : ce qui est contre nôtre hypothese : si aussi elle étoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la susdite 8. pr. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raison à une même grandeur, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de même à une autre, sont aussi de même entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainsi E à F : Je dis que comme A est à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi : de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelconques équemultiples, G, H, I. Pareillement, des consequentes B, D, F, quelconques équemultiples, K, L, M. D'autant que A est à B



comme C à D, par la converse de la 6. def. de ce livre, si G multiplie de A, est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B : aussi H multiplie de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L, multiplie de D. Item, puis que comme C est à D, ainsi E est à F, si H multiplie de C est égale, plus grande, ou plus petite que L multiplie de D, aussi I multiplie de E, sera égale, plus grande, ou plus petite que M multiplie de F : Parquoy si G multiplie de A premiere, est plus grande, égale, ou plus petite que K multiplie de B seconde, aussi I multiplie de E tierce, sera plus grande, égale, ou plus petite que M multiplie de F quarte ; & par la susdite 6. def. comme A sera à B, ainsi E sera à F. Parquoy les raisons qui sont de même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Clavius démontre ensuite de ce, que les raisons qui sont de même à d'autres, sont aussi de même entr'elles : Comme si A est à B, ainsi que C à D, & que E soit à F, comme A à B; & G à H, comme C à D; Aussi

comme E sera à F, ainsi G sera à H. Car

A	B	C	D
3.	2.	6.	4.
E	F	G	H
11.	p. 5.	9.	6.
12.	8.		

D sont de même à la raison de A à B, par la même 11. prop. 5. comme E sera à F, ainsi G sera à H.

Derechef, si les raisons de A à B, de C à D & de E à F sont de même entr'elles; & que comme A est à B, ainsi G soit à H; & comme C à D, ainsi I à K; & comme E est à F, ainsi L soit à M : aussi les raisons de G à H, de I à K, & de L à M sont de même entr'elles : Car suivant ce que nous

avons démontré cy-dessus de quatre

A	B	C	D	E	F
3.	2.	6.	4.	9.	6.
G	H	I	K	L	M
12.	2.	18.	12.	30.	20.

raisons, comme G est à H, ainsi I est à K, pour ce que ces raisons sont semblables aux raisons de A à B, & de C à D. Et en la même manière, comme I sera à K, ainsi L sera à M, d'autant qu'icelles raisons sont de même aux raisons de C à D, & de E à F, lesquelles sont semblables. Item, comme G sera à H, ainsi L à M; puis que ces raisons sont de même que les raisons de A à B, & de E à F, qui sont posées égales : Le même seroit encores démontré s'il y avoit davantage de raisons.

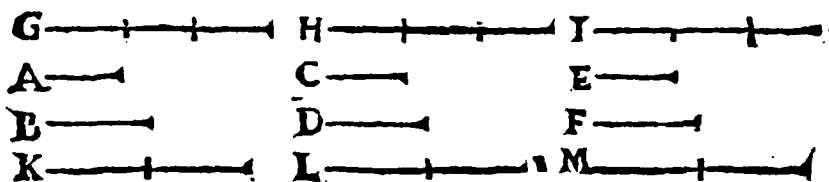
THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles : comme l'une des antecedantes sera à la consequente, ainsi toutes les antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçavoir que A soit à B, comme C est à D, & E à F:

Je dis que comme l'une des antecedantes est à sa consequente ; sçavoir est A à B , ainsi toutes les antecedantes ensemble A , C , E , seront à toutes les consequentes ensemble B , D , F .

Car étans prises des antecedantes A , C , E , les équemultiples G , H , I : item des consequentes B , D , F , les équemultiples K , L , M ; toutes les trois multiples G , H , I ensemble , seront autant multiple des trois grandeurs A , C , E ensemble , comme la seule G est multipliée de la seule A , par la premiere prop. de ce livre. Aussi par la même raison toutes les trois multiples K , L , M ensemble , seront autant multiple des trois grandeurs B , D , F ensemble , comme K sera multipliée de B . Partant puis que A , B , C , D , E , F sont proportionnelles , si G multipliée de A premiere,



est plus grande , égale , ou plus petite que K multipliée de B seconde , aussi H multipliée de C troisième , sera plus grande , égale , ou plus petite que L , multipliée de D quatrième , par la converse de la 6. def. de ce livre , & ainsi des deux autres : Partant si G est plus grande , égale , ou plus petite que K , le composé des trois G , H , I , sera aussi plus grand , égal , ou plus petit que le composé des trois K , L , M . Donc par la même 6. def. comme A sera à B , ainsi les trois A , C , E ensemble , seront aux trois B , D , F ensemble . Parquoy si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles , &c. Ce qui étoit à prouver.

T H E O R. 13. P R O P. XIII.

Si la premiere est à la seconde comme la tierce à la quarte : mais la tierce a plus grande raison à la quarte , que la cinquième à la sixième : aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde , que la cinquième à la sixième.

Soit A premiere à B seconde, (*en la prec. fig.*) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquième à F sixième. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A premiere à B seconde, que de E cinquième à F sixième.

Car estans prises des antecedantes A, C, E, les équemultiples G, H, I, & des consequentes B, D, F, les équemultiples K, L, M: D'autant que A est à B, comme C à D, si G multiple de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiple de B, aussi par la converse de la 6. def. de ce livre, H multiple de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L multiple de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C premiere à D seconde, que de E tierce à F quatrième, si H multiple de C, est plus grande que L multiple de D, il n'est pas nécessaire que I multiple de E excède M multiple de F, par la 8. def. de ce livre convertie: donc aussi si G excède K, nécessairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquième E à la sixième F: aussi la premiere A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquième E à la sixième F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E premiere à F seconde étant plus grande que celle de C tierce à D quarte, si I excède M, il n'est pas nécessaire que H excède L, car quelquesfois elle defaut, ou est égale à icelle par la 8. def. de ce liv. convertie. Mais si H defaut, ou est égale à L, aussi G defaudra, ou sera égale à K par la 6. def. convertie, parce qu'on a posé C 1. estre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy si I excède M nécessairement G n'excedera pas K: & partant par la susdite 8. def. il y aura plus grande raison de E à F, que de A à B, c'est à dire que la raison de A à B sera moindre que de E à F: ce qui étoit proposé.

En la mesme maniere sera demonstrieré, que s'il y a plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la

cinquième à la sixième ; pareillement la première aura beaucoup plus grande raison à la seconde , que la cinquième à la sixième.

Que si la première a moindre raison à la seconde , que la tierce à la quarte ; & la tierce a moindre raison à la quatrième , que la cinquième à la sixième : aussi la première aura beaucoup moindre raison à la seconde , que la cinquième à la sixième.

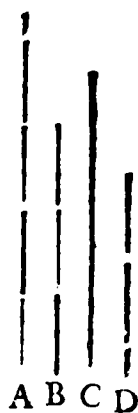
T H E O R. 14. P R O P. XIV.

Si la première est à la seconde , comme la tierce à la quarte , & que la première soit plus grande que la tierce : aussi la seconde sera plus grande que la quarte : & si égale , égale : si plus petite , plus petite.

Soit A à B , comme C est à D , & que A première soit plus grande , égale , ou plus petite que C troisième : Je dis que B seconde sera aussi plus grande , égale , ou plus petite que D quatrième.

Soit premierement A plus grande que C : il y aura donc plus grande raison de A à B , que de C à la même B , par la 8. prop. de ce livre , & par consequent plus grande raison de C à D , que de C à B , estant icelle la même raison que de A à B , & par la 10. prop. de ce même livre B sera plus grande que D.

Soit puis apres A égale à C , & par la 7. prop. de ce même livre A sera à B , comme C à B : & puis que les raisons de C à D , & C à B , sont les mêmes que de A à B , les raisons de C à D & de C à B , seront de même entr'elles , par la 11. prop. de ce livre , & partant par la 9. prop. B & D , seront égales.



Finaleme^{nt} soit A moindre que C , & par la susdite 8. prop. il y aura plus grande raison de C à D, que de A à D ; & par consequent plus grande raison de A à B , que de A à D , puis qu'il y a même raison de A à B , que de C à D , & par la 10. prop. de ce même livre B sera moindre que D. Si donc la premiere est à la seconde , comme la tierce à la quarte , &c. Ce qu'il falloit prouver.



SCHOLIE.

Que si la seconde est plus grande , ou égale , ou moindre que la quarte : aussi la premiere sera plus grande , ou égale , ou moindre que la tierce. Car puis que A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce livre. Donc si B est plus grande , ou égale , ou moindre que D, aussi A sera plus grande , ou égale , ou moindre que C par la susdite 14. prop.

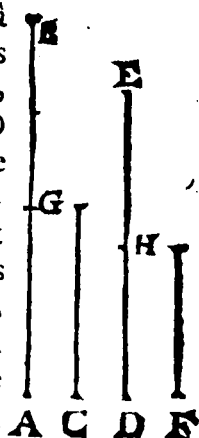
Or Euclide n'a pas démontré que si la premiere est plus grande , égale , ou plus petite que la seconde : aussi la tierce sera plus grande , égale , ou moindre que la quarte , pource que cela est evident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions neantmoins démontrer apres Commandin : mais d'autant que sa demonstration ne compete qu'aux grandeurs de même genre , nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre , encore que les grandeurs soient de divers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs sont entr'elles , comme sont leurs équemultiplices entr'elles : étans prises comme elles s'entrespondent.

Soit AB autant multiplice de C comme DE est multiplice de F. Je dis que AB sera à DE , comme C à F. Car puis que AB & DE sont équemultiplices d'icelles C & F, il y

Il y aura en AB autant de parties égales à C, comme DE contient de parties égales à F : soit donc divisée AB és parties AG, GB égales à C, & DE és parties DH, HD égales à F; & par la 7. prop. de ce livre une chacune partie de AB, sera à une chacune partie de DE, comme C est à F; & par la 12. prop. toutes les antécédantes AB, seront à toutes les conséquentes DE, comme AG l'une des antécédantes, est à DH la conséquente, c'est-à-dire comme C à F, puis que c'est la même raison. Parquoy les grandeurs sont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouver.



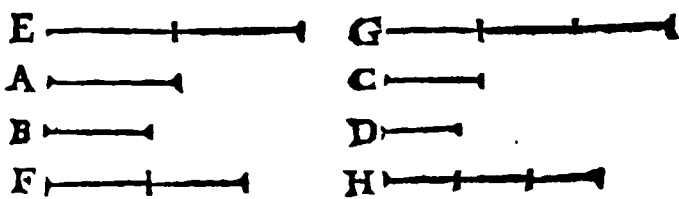
THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi étans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera à C, comme B est à D.

Car si

on prend
E & F e-
quemul-
tiplices
de A &
B; item
G & H



equemultiplices de C & D; E sera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & par conséquent E étant à F, & C à D, en même raison que A à B, elles sont de même entr'elles par la 11. prop. de ce livre. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mêmes que de C à D, elles seront aussi de même entr'elles par la susdite 11. prop. c'est-à-dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. prop. de ce même livre, si E premiere est plus grande, égale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, égale, ou moindre que H quarte.

trième, en quelconque multiplication que soient prises les équemultiples; & par la 6. def. d'iceluy cinquième livre A sera à C , comme B à D : (puisque E & F sont équemultiples de A première, & B troisième; & G & H équemultiples de C seconde & D quatrième, & celles-là defaillent, sont égales, ou excèdent celles-cy, &c. Parquoy si quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Or la demonstration de cette proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B étoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre: aussi les équemultiples E & F seroient d'un genre, c'est à sçavoir duquel sont A & B , & les équemultiples G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celui duquel sont C & D . Parquoy on ne pourroit pas dire E estre plus grande, égale, ou moindre que G : & partant rien ne se concluroit par la 6. def. de ce livre. La raison permise a donc seulement lieu quand les quatre grandeurs sont d'un mesme genre.

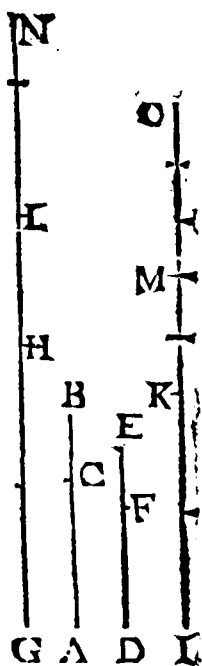
THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles étans divisées, seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composées AB , CB , & DE , FE , proportionnelles, c'est-à-dire, que AB soit à CB , comme DE à FE . Je dis que les mêmes grandeurs étans divisées sont aussi proportionnelles, c'est-à-dire que comme AC est à CB , ainsi DF est à FE .

Car d'icelles AC , CB , DF , FE soient prises les équemultiples GH , HL , IK , KM , chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce livre GL sera autant multiple de AB , que GH de AC , c'est à-dire comme IK de DF . Mais icelle IK est autant multiple de DF , que IM de DE par la même 1. prop. donc GL , IM sont équemultiples de AB , DE . Deutchef soient prises LN ,

MO equemultiples de CB, FE. Pour
 autant que HL premiere est autant mul-
 tiplice de CB seconde, que KM tierce
 de la quarte FE, & LN cinquième autant
 multiple de CB seconde, que MO si-
 xième de la quarte FE; par la 2. p. de
 ce livre, HN sera autant multiple de
 CB seconde, que KO de FE quatrième.
 Et puis que AB est à CB, comme DE
 à FE: & ont été prises GL, IM eque-
 multiples de AB, DE, mais HN, KO
 de CB, FE: par la 6. def. convertie si
 GL multiple de AB premiere excède,
 est égale, ou moindre que HN multi-
 plice de CB seconde, aussi IM, multi-
 plicé de DE tierce, excèdera, sera égale,
 ou moindre, que KO multiple de FE
 quarte: ôtant donc les choses communes
 HL, KM, si GH excède LN, aussi IK
 excèdera MO; & si égale, égale; & si moindre,
 moindre. Et d'autant que GH, IK sont equemultiples
 de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO eque-
 multiples de CB seconde & FE quarte, & il'a été
 démontré (en quelconque multiplication qu'ayent été
 prises icelles equemultiples) que les equemultiples
 de la premiere & troisième excèdent, sont égales,
 ou moindres, que les equemultiples de la seconde &
 quatrième, par la susdite 6. def. de ce cinquième livre
 AC sera à CB, comme DF à FE: ce qui étoit proposé.
 Si donc les grandeurs composées sont proportionnelles,
 &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

Noas démontrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel
 en la 15. def. nous avons dit converse de la raison divisée:
 c'est-à-dire que si AB est à CB, comme DE à FE, aussi CB
 sera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB
 à CB, ainsi DE à FE, en divisant par la 17. p. 5. comme
 AC sera à CB, ainsi DE à FE: & en changeant, comme
 CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui étoit proposé.

Par même maniere , sera démontré ce moyen-là d'argumenter , lequel en la même 15. def. nous avons appelé contrainte division de raison : c'est-à-dire que si AC est à AB comme DF à DE : aussi AC sera à CB , ainsi que DF à FE . Car puis que AC est à AB , comme DF à DE : en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF : donc en divisant par la 17. p. 5. comme CB à AC : ainsi FE à DF : & en changeant derechef, comme AC à CB , ainsi DF à FE : ce qu'il étoit à démontrer.

THEOR. 18. PROPOSITION XVIII.

Si les grandeurs divisées sont proportionnelles, icelles étans composées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs divisées AB , BC ; & DE , EF proportionnelles. Je dis qu'en composant, AC est à CB , comme DF à FE .

Car si comme AC est à BC , ainsi DF n'est pas à EF , DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF , même raison que AC à BC . Soit donc premierement DF à GF , moindre que EF , en même raison que AC à BC , s'il est possible : & en divisant par la précédente proposition, DG sera à GF comme AB à BC . Mais comme AB à BC , ainsi DE est à EF : donc aussi comme DG sera à GF , ainsi DE sera à EF par la 11. prop. de ce livre. Mais DG première est plus grande que DE troisième : donc par la 14. proposition de ce même livre GF seconde, sera aussi plus grande que EF quatrième, la partie que le tout : ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF , moindre que EF , même raison que de AC à BC .

Par même discours on démontrera que DF n'aura pas à une grandeur plus grande que EF , même raison que AC à BC . Donc comme AC est à BC , ainsi DF est à EF , puisque DF ne peut être à une grandeur moindre, ou plus grande que



EF, en même raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs divisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter des proportions, lesquels nous avons décrits en la 14. def. de ce livre. Quant au premier, que nous avons nommé *converse composition de raison* : soit comme AB à BC ainsi DE à EF. Je dis, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc en composant par la 18. p. cy-dessus, comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : Ce qu'il falloit prouver.

Quant à l'autre moyen que nous avons appelé *contraire composition de raison* : soit derechef comme AB à IC, ainsi DE à EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la même prop. comme AC sera à AB, ainsi DF à DE ; & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : Ce qui étoit proposé à prouver.

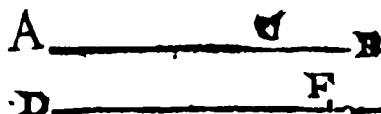
THEOR. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché ; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Je dis que le reste CB est aussi au reste FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB est à DE, comme AC à DF, aussi en permutant par la 16. prop. de ce livre AB sera à AC, comme DE à DF ; & par la 17. prop. de ce même livre, en divisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF : parquoy en permutant derechef par la susdite 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est-à-dire

comme la toute AB à
la toute DE, puis
que AB, DE, &
AC, DF, ont été
posées en même rai-



son. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

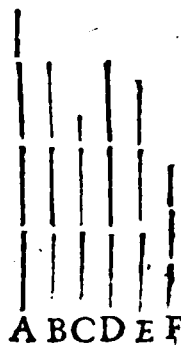
Nous demontrons icy ce mo. en-là d'argumenter es proportions, qui est pris par la conversion de raison. Car soit comme A à C, ainsi DE à FE. Je dis par conversion de raison, AB être aussi à AC, comme DE à DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en divisant par la 17. prop. de ce livre, comme AC à CB, ainsi DF à FE, donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF. Et partant en composant par la 18. prop. de ce cinquième livre, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : ce qui étoit proposé.

THEOR. 10. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, étans prises de deux en deux; sont en même raison, & qu'en raison égale la première soit plus grande que la troisième; aussi la quatrième sera plus grande que la sixième; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F : & que A première soit plus grande que C troisième. Je dis que D 4. sera aussi plus grande que F 6.

- Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquième livre. Mais comme A est à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E : (car puis que B est à C, toime E à F, en changeant comme



C sera à B, ainsi F à E.) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E que de F à E, & par la 10. pr. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est égale à C; je dis aussi que D sera égale à F. Car puis que A est égale à C, par la 7. p. de ce livre, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E: & par la 11. pr. 5. D sera à E, comme C à B: & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E: & partant D & F seront égales par la 9. prop. de ce même livre.



En troisième lieu, si A est moindre que C, je dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E: il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquième livre. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E: & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



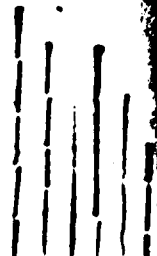
THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en même raison, étant leur proportion sans ordre, & qu'en raison égale la première soit plus grande que la troisième; aussi la quatrième sera plus grande que la sixième; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en même raison, étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que comme A sera égale, plus

grande, ou plus petite que C, aussi D sera égale, plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce livre. Mais comme A à B, ainsi E à F; il y aura donc plus grande raison de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquième livre. Et d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera à B, ainsi E à D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D sera plus grande que F.



ABC DEF

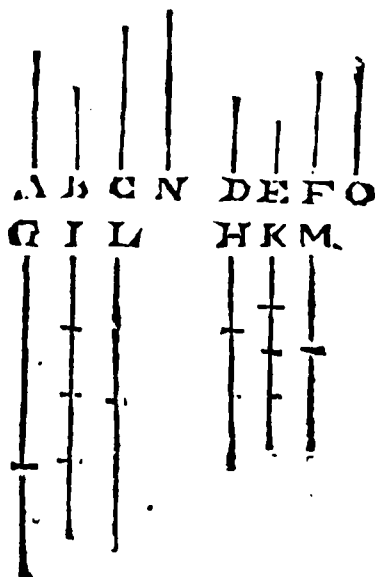
On peut prouver comme en la précédente, si A est égale, ou plus petite que C; aussi D être égale, ou moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles étans prises de deux en deux soient en même raison; icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Je dis qu'en raison égale comme A est à C, ainsi D à F.

Car étans prises G, H equemultiples de A, D: Item I, K, equemultiples de B, F: Item L, M, equemultiples de C, F; puisque A est à B, comme D à E, aussi G multiple de A première sera à I multiple de B deu-



xième, comme H multiplie de D troisième à K multiplie de E quatrième par la 4. p. de ce cinquième livre. Par même raison I sera à L, comme K à M. Vû donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, étans prises de deux en deux sont en même raison, par la 20. pr. 5. si G excède L, aussi H excèdera M; & si égale, égale; & si plus petite, plus petite: & partant puis que G, H, equemultiples de A & D défailent, sont égales, ou excèdent L, M, equemultiples quelconques de C & F, par la 6. def. A sera à C, comme D à F: ce qu'il falloit prouver.

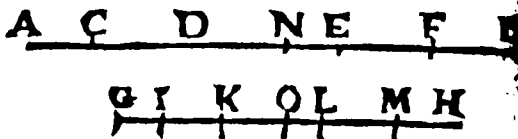
Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que A est encore à N comme D à O. Car puisque nous venons de démonstrer que A est à C, comme D à F; & on a posé C estre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquelles sont prises de deux en deux en même raison. Donc comme il a été démontré es trois grandeurs cy-dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la même maniere sera démontré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

Le docte Stevin en la 19. def. de ses Probl. Geomet. explique une sorte d'argumenter es proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le suivant.

S'il y-a deux grandeurs, desquelles chacune soit coupée en tant de parties qu'on voudra égales en multitude, & proportionnelles: la composée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la composée des parties restantes, en même raison que la composée, d'autant de parties de la derniere grandeur, sera à la composée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est coupée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à cette partie-là, est aussi coupée en deux autres parties proportionnelles à ces deux-là: les totales grandeurs seront aussi coupées proportionnellement.

Soit une grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB ; & une autre grandeur GH , couppée en autant de parties que AB , ſçavoir es cinq GI, IK, KL, LM, MH , proportionnelles à celles là de AB . Je dis que AD compoſée des deux parties AC, CD , eſt à DB compoſée des trois parties reſtantes, comme GK compoſée des deux parties GI, IK , eſt à KH compoſée des trois autres parties reſtantes. Car puis que comme AC eſt à CD , ainſi GI eſt à IK , en compoſant par la 18. p. de ce



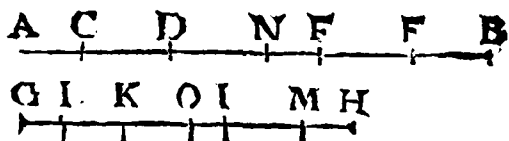
livre AD ſera à CD , comme GK à IK . Mais comme CD à DE , ainſi IK à KL : donc par la 22. prop. de ce meſme livre, en raiſon gale, comme AD ſera à DE , ainſi GK ſera à KL . De rechef, pource qu'en changeant, BE eſt à FE , comme HM à ML , auſſi en compoſant BE ſera à FE , comme HL à ML . Mais FE eſt à ED , comme ML à LK : donc en raiſon égale, BE ſera à ED comme HL à LK ; & en compoſant, BD ſera à ED , comme HK à IK ; & en changeant, DE à DB , comme KL à KH . Parquoy puis qu'il a eſté démontré que AD eſt à DE , comme GK à KL , & DE eſt à DB , comme KL à KH , par la ſuſdite 22. prop. 5. en raiſon égale comme AD ſera à DB , ainſi GK ſera à KH .

Nous démonſtrerons en la meſme maniere, que comme AC eſt à CB , ainſi GI eſt à IH . Car derechef en changeant, compoſant, & par égalité de raiſon, comme BC ſera à DC , ainſi HI à KI : & en changeant, comme CD ſera à CB , ainſi IK ſera à IH . Veu donc que comme AC eſt à CD , ainſi GI eſt à IK , & comme CD à CB , ainſi IK à IH : en raiſon égale, comme AC ſera à CB , ainſi GI ſera à IH .

Par meſme raiſon, comme AF ſera à FB , ainſi GM ſera à MH : Car derechef en compoſant, & par égalité de raiſon, comme AF ſera à EF , ainſi GM ſera à LM , par les ſuſdites 18. & 21. prop. de ce livre. Mais auſſi comme EF eſt à FB , ainſi LM à MH : Donc en raiſon égale, comme AF eſt à FB , ainſi GM eſt à HM , & ainſi des autres: appert donc ce qui eſtoit premierement propoſé.

Maintenant ſoit couppée, (comme pour exemple) la troiſième partie DE en deux quelconques parties DN, NE ; & auſſi

la troisieme KL en
deux parties KO, OL
proportionnelles a cel-
le-la. Je dis que com-
me AN à NB, ainsi
GO à OH. Car en
changeant, comme



EN sera à ND, ainsi LO à OK : & en composant par la
18. prop. 5. comme ED sera à DN, ainsi LA à KO. Parquoy
puis que comme CD est à DE ; ainsi IK à KL : & comme DE
à DN, ainsi KL à KO : par la 22. prop. 5. en raison egale,
comme D sera à DN, ainsi IK à KO : donc les parties AC,
CD, DN, sont proportionnelles aux parties GI, IK, KO. De-
rechef, pource qu'en changeant, comme FE est à ED, ainsi
ML à LK : & en composant, comme DE à NE, ainsi KL à
OL, en raison egale, comme FE sera à EN, ainsi ML à LO,
& en changeant, comme NE à EF, ainsi OL à LM : & par-
tant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FP, sont propor-
tionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. On
comme il a esté demonstré en la premiere partie, AN sera à NB
comme GO à OH : appert donc ce qui estoit proposé en second
lieu.

A ce Theoreme nous en joindrons deux autres, le premier
desquels est tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'au-
tres, lesquelles prises de deux en deux, soient en mesme
raison : toutes les grandeurs d'un ordre, seront à laquelle
on voudra d'icelles en mesme raison, que toutes les gran-
deurs de l'autre ordre seront à la correspondante.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre
D, E, F, & soit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F :
je dis, que comme toutes les grandeurs
A, B, C ensemble, seront à laquelle on
voudra d'icelles, par exemple à la der-
niere C, ainsi toutes les grandeurs D, E,
F ensemble, seront à la derniere F. Car
puisque comme A est à B, ainsi D à E,
en composant A, B sont à B comme D,
E, à E. Mais B est à C, comme E à F :
donc en raison egale A, B seront à C,
comme D, E à F : & en composant A, B,



C, seront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit davantage de grandeurs, la demonstration ne seroit dissemblable à celle cy-dessus : car il n'y auroit qu'à repeter la composition & égalité de raison autant de fois qu'il seroit de besoin : Comme par exemple, soient encore G & H tellement que C soit à G, comme F à H. D'autant que A, B est à C, comme D, E est à F; & C à G, comme F à H; en raison égale A, B, sont à G comme D, E à H, & en composant A, B, G, sont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C est à G, ainsi F à H, en changeant, comme G sera à C, ainsi H à F: donc en raison égale, comme A, B, G sont à C, ainsi D, E, H, à F; & en composant comme toutes les grandeurs A, B, G, C, ensemble, seront à la seule C, ainsi toutes les grandeurs D, E, H, F ensemble, seront à la seule F.

Mais si on vouloit prouver, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, sont à la dernière G, ainsi les quatre autres D, E, F, H, sont à la dernière H, il seroit bien plus bref: Car puis que nous avons démontré, que comme A, B, C, sont à C, ainsi D, E, F à F, & que comme C est à G, ainsi F est à H en raison égale, comme A, B, C seront à G, ainsi D, E, F à H: donc en composant, toutes les grandeurs A, B, C, G, seront à G, comme toutes les grandeurs D, E, F, H seront à H.

En la même sorte on démontrera, que toutes lesdites grandeurs A, B, C, G seront à A, comme toutes les grandeurs D, E, F, H, seront à D, n'y ayant autre difference, sinon qu'il faut prendre au contraire de ce que dessus.

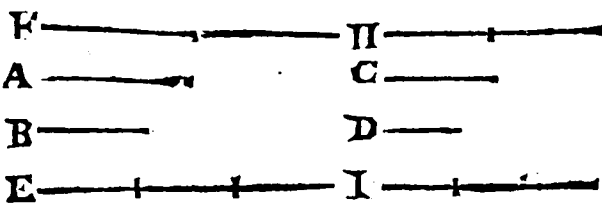
Et de ce est manifeste, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, est à sa correspondante du second ordre, ainsi toutes les grandeurs du premier ordre seront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le second Theoreme est démontré par Clavius au Scholie de cette 22. prop. & est tel.

Si la premiere est à la seconde en même raison que la tierce à la quarte : les equemultiples de la premiere & troisieme auront aussi une même raison à la seconde & quatrieme. Item les equemultiples de la seconde & quatrieme, auront une même raison à la premiere & troisieme. Et au contraire, la seconde & quatrieme auront une même raison aux equemultiples de la premiere & troisieme. Item la premiere & troisieme auront une même raison aux equemultiples de la deuxième & quatrieme.

Soit A à B , comme C à D , & soient F , H , equemultiples de A , C : item G , I , equemultiples de B , D . Je dis que F est à B , comme H à D : item que G est à A , comme I à C . Et au contraire que B est à F , comme D à H : item A à G , comme C à I . Car puis que F est autant multiplie de A , que H l'est de C , comme F est à A , ainsi H à C , & par l'hypothese A est à B , comme C à D ; donc en raison égale par la 22. pr. 5. comme F sera à B , ainsi H sera à D . Derechef, pource que G est à B , comme I à D , & comme B à A , ainsi D à C : (car puis que A est à B comme

C à D par l'hypothese, en changeant comme B à A , ainsi D à C) en raison égale, comme G sera



à A , ainsi I à C par la susdite 22. prop. 5.

Maintenant pource que B est à A , comme D à C par raison inverse : & comme A à F , ainsi C à H : en raison égale, comme B sera à F , ainsi D à H . Derechef, puis que A est à B , comme C à D : & comme B est à G , ainsi D à I ; en raison égale, comme A sera à G , ainsi C à I , par ladite 22. prop. 5. Ce qui estoit proposé.

Par cecy est manifeste un moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souvent, principalement Archimedes, Apollonius Pergeus, & autres : sçavoir est comme A à B , ainsi C est à D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de A est à B , ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D : Item comme A est à B , ainsi C à D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B , sçavoir à G ; ainsi aussi C sera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D , sçavoir à I .

THEOR. 23. PROP. XXIII.

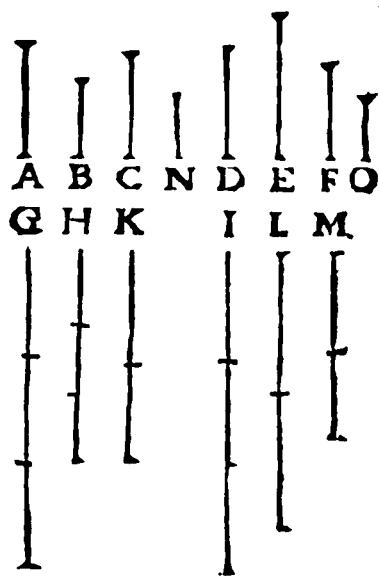
Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublée : icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en même raison étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.

Car étans prises G, H, I, equemultiplices de A, B, D: item K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F.

Par la 15. p. de ce livre comme A sera à B, ainsi G à H, puis que G, H, sont equemultiplices d'icelles A, B, Mais comme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdite 15. pr. 5. pource que L, M, sont equemultiplices d'icelles

E, F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multipliee de la premiere B, sera à K multipliee de la seconde C, ainsi I multipliee de la troisième D, sera à L multipliee de la quatrième E: donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, étans prises de deux en deux sont en même raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a été démontré, que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, égale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, égale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera à C, ainsi sera D à F. Parquoy si trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

Que s'il y avoit plus de trois grandeurs, & que leur propor-

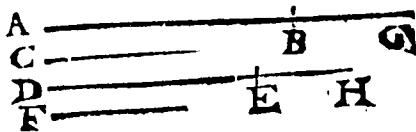
tion soit troublée, sçavoir est que comme A est à B , ainsi F soit à O , & comme B est à C , ainsi E soit à F , & comme C à N , ainsi D à E . Je dis que A sera à N , comme D à O . D'autant qu'il a esté démontré en trois grandeurs que comme A est à C , ainsi F est à O , & que par l'hypothese comme C est à N , ainsi D est à E , il y aura trois grandeurs d'un côté A, C, N , & trois d'un autre D, E, O , lesquelles prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublée. Donc derechef en raison égale démontrée en trois grandeurs A sera à N , comme D à O . Le mesme sera aussi démontré en cinq grandeurs par quatre, comme il a esté démontré en quatre par trois, & ainsi semblablement de davantage.

T H E O R. 24. P R O P. XXIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisieme à la quatrieme, & la cinquieme à la seconde, comme la sixieme à la quatrieme; la composée de la premiere & cinquieme, sera à la seconde, comme la composée de la troisieme & sixieme, sera à la quatrieme.

Soit la premiere AB à la seconde C , comme la troisieme DE est à la quatrieme F ; & la cinquieme BG à la deuxieme C , comme la sixieme EH à la quatrieme F . Je dis que la toute AG , sera à C , comme la toute DH à F .

Car puisque comme BG à C , ainsi EH à F , aussi en changeant, comme C sera à BG , ainsi F à EH . Vû donc que AB est à C , comme DE à F , & C à



BG , comme F à EH , en raison égale, AB sera à BG , comme DE à EH , par la 22. p. 5. & en composant, comme la toute AG sera à BG , ainsi la toute DH sera à EH , par la 18. pr. d'iceluy 5. livre: & derechef puis que AG est à BG , comme DH à EH , & BG à C , comme EH à F , en raison égale, AG sera à C , comme DH à F .

Si donc la première est à la seconde, comme la troisième à la quatrième, &c. Ce qui étoit à prouver.

S C H O L I E.

Presque en la même manière sera démontré en tout genre proportion, ce qui a esté démontré à la 6. prop. de ce 5. livre tant seulement aux grandeurs multiplies, sçavoir est,

Si deux grandeurs ont même proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchées ayent même proportion à icelles; les restantes auront aussi même proportion à icelles.

Que AG & DH aient même proportion à C & F, c'est à dire que comme AG est à C, ainsi DH soit à F. Item les retranchées AB & DE aient même proportion à icelles C & F, tellement que comme AB est à C, ainsi DE soit aussi à F: se dit que les restantes BG, EH ont même proportion à icelles C, F, c'est à dire que comme BG est à C, ainsi EH est à F. Car d'autant que comme AB est à C, ainsi DE est à F, par raison inverse, comme C à AB, ainsi F à DE: donc puis que AG est à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à DE, en raison égale AG sera à AB, comme DH à DE: & en divisant comme BG sera à AB, ainsi DH à DE. Et derechef, puis que BG est à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE à F, en raison égale BG sera à C, comme EH à F. Ce qui est proposé.

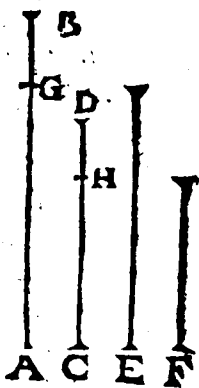
THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F, desquelles AB soit la plus grande & F la plus petite. Je dis que AB & F ensemble, sont plus grandes que les deux autres CD & E ensemble.

Car si de AB on retranche AG égale à E, & de CD on retranche CH égale à F: AG sera à CH, comme E à F, c'est

est-à-dite comme AB à CD . Et puis-
 que la toute AB est à la toute CD , com-
 me la retranchée AG à la retranchée
 CH ; par la 19. prop. de ce livre, com-
 me la toute AB sera à la toute CD , ainsi
 le reste GB sera au reste HD : Parquoy
 celui reste GB sera plus grand que le
 reste HD , comme la toute AB est plus
 grande que la toute CD . Et pour au-
 tant que AG & E sont égales, si on
 ajoute à icelles, les grandeurs égales
 & CH , c'est à sçavoir, F à icelle
 AG , & CH à E ; viendront AG & F en-
 semble, égales à E & CH ensemble. Et adjoûtant à ces
 choses égales, les inégales GB , & HD , seront faites
 AB & ensemble plus grandes que GE & CD ensemble,
 puis que GB est plus grande que HD . Parquoy si quatre
 grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit
 démontrer.



S C H O L I E.

Or il ensuit nécessairement que si la grandeur antecédante
 est la plus grande de toutes celles de la proportion,
 la conséquente de l'autre raison, sera la plus petite de toutes;
 comme on peut voir en l'exemple proposé. Car d'autant que
 comme AB est à CD , ainsi E à F ; Or que AB première est plus
 grande que E tierce, par la 14. prop. 5. CD seconde sera aussi
 plus grande que F quatrième.

Similairement, pour ce que AB est plus grande que CD ,
 aussi E sera plus grande que F à cause de la similitude des rai-
 sons, comme nous avons dit au Scholie de la mesme 14. prop.
 Que si au contraire la grandeur antecédante d'une raison est la
 plus petite de toutes, la conséquente de l'autre sera la plus gran-
 de, comme il appert, si on dit que F est à E , comme CD à AB .

Commandin adjoute en cel lieu, le theoreme suivant.

Si trois grandeurs sont proportionnelles, la plus
 grande & la plus petite d'icelles, seront plus grandes
 que le double de l'autre.

Soient trois grandeurs proportionnelles A, B, C , tellement que

V

comme A est à B , ainsi B à C & soit A la plus grande, & D la plus petite: Je dis que A & D ensemble, sont plus grandes que le double de B . Car ayant pris D égale à B , comme A sera à B , ainsi D sera à C ; & partant A & C ensemble, seront plus grandes que B & D ensemble par la 25. prop. 5. c'est à dire que le double de B . Ce qui est proposé.

Euclide finit icy son 5. livre des Elemens; mais d'autant que Campanus, Commandin & Clavius y adjoint quelques autres propositions, dont les bons Auteurs s'aident fort souvent, & les citent, comme si elles estoient d'Euclide nous les adjointerons aussi icy.

ABD

THEOR. 16. PROP. XXVI

Si la premiere a plus grande raison à la seconde que la troisième à la quatrième: en changeant la seconde aura moindre raison à la premiere que la quatrième à la tierce.

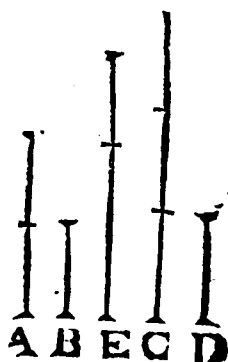
Que A ait plus grande raison à B que C à D : Je dis que la raison de B à A est moindre que la raison de D à C . Car soit entendu E estie à B , comme C est à D . Donc aussi la raison de A à B sera plus grande que celle de E à B ; & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que E ; & partant B aura moindre raison à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais comme B est à E , ainsi est en changeant D à C . Donc aussi la raison de B à A est moindre que celle de D à C . Ce qu'il falloit demonstrier.

ARECD

SCHOLIE.

Nous demonstrerons presque en la mesme maniere que si la premiere a moindre raison à la seconde, que la troisième à la quatrième; en changeant, la seconde aura plus grande raison à la premiere, que la quarte à la tierce.

Que *A* ait moindre raison à *B*, que *C* à *D*: Je dis qu'en changeant *B* à plus grande raison à *A*, que *D* à *C*. Car soit entendu *E* estre à *B*, comme *C* à *D*: & la raison de *A* à *B* sera pareillement moindre que celle de *E* à *B*, parce que nous avons démontré au Scholie de la 13. prop. 5. Donc par la 10. prop. 5. *A* sera moindre que *E*: & par la 8. prop. 5. la raison de *B* à *A* sera plus grande que de *B* à *E*. Mais comme *B* est à *E*, ainsi est en changeant *D* à *C*: Donc aussi la raison de *B* à *A* sera plus grande que de *D* à *C*.

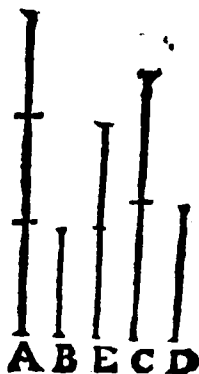


Autrement. D'autant que la raison de *A* à *B*, est moindre que de *C* à *D*: la raison de *C* à *D* sera plus grande que celle de *A* à *B*: donc en changeant par la 26. prop. 5. la raison de *D* à *C*, sera moindre que de *B* à *A*: & partant il y aura plus grande raison de *B* à *A* que de *D* à *C*. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 27. PROP. XXVII.

Si la premiere a plus grande raison à la seconde, que la tierce à la quarte; aussi en permutant la premiere aura plus grande raison à la tierce, que la seconde à la quarte.

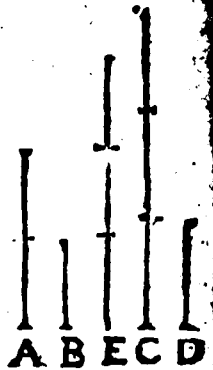
Que *A* ait plus grande raison à *B* que *C* à *D*. Je dis qu'en permutant *A* aura plus grande raison à *C*, que *B* à *D*. Car soit entendu *E* estre à *B*, comme *C* à *D*: & la raison de *A* à *B* sera aussi plus grande que de *E* à *B*: & partant *A* sera plus grande que *E* par la 10. prop. 5. donc la raison de *A* à *C* sera plus grande que de *E* à *C* par la 8. prop. 5. Mais pource qu'en permutant comme *E* est à *C*, ainsi *B* est à *D*, (car *E* est posée à *B*, comme *C* à *D*,) il y aura aussi plus grande raison de *A* à *C*, que de *B* à *D*. Ce qui est proposé.



SCHOLIE.

Nous démonstrerons semblablement, que si la première raison à la seconde, que la troisième à la quatrième en permutant la première aura moindre raison à la tierce, la seconde à la quatrième.

Car soit la raison de A à B moindre que de C à D : Je dis qu'en permutant A aura moindre raison à C , que B à D . Car soit entendu E estre à B , comme C à D , & la raison de A à B sera pareillement moindre que de E à B : & par la 10. prop. 5. A sera moindre que E : parquoy la raison de A à C sera moindre que de E à la même C par la 8. prop. 5. Et puis que E est posée estre à B , comme C à D : en permutant comme E à C , ainsi B à D . Donc aussi la raison de A à C sera moindre que de B à D . Ce qui est proposé.

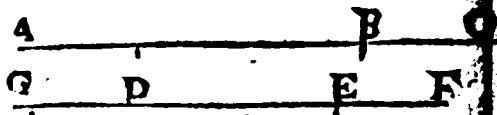


Autrement. D'autant qu'il y a moindre raison de A à B que de C à D , il y aura plus grande raison de C à D que de A à B : dont en permutant par la 27. p. 5. il y aura aussi plus grande raison de C à A que de D à B : & par la 26. prop. en raison inverse, il y aura moindre raison de A à C , que de B à D . Ce qui est proposé.

THEOR. 28. PROP. XXVIII.

Si la première a plus grande raison à la seconde que la tierce à la quatrième: la composée de la première & de la seconde aura aussi plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & de la quatrième à la quatrième.

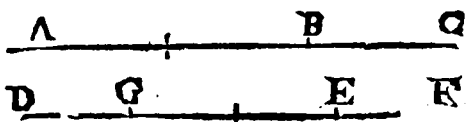
Que AB première ait plus grande raison à BC seconde, que DE tierce à EF quatrième: Je dis qu'en composant AC aura plus grande ra-



Don à BC, que DF à EF. Car soit entendu comme AB est à BC, ainsi quelque autre GE soit à EF; & il y aura aussi plus grande raison de GE à EF, que de DE à EF; & par la 10. prop. 5. GE sera plus grande que DE. Donc puis que comme AB est à BC, ainsi GE est à EF: en composant comme AC sera à BC, ainsi GF sera à EF: Mais il y a plus grande raison de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. p. 5. (car GF est plus grande que DF.) Donc aussi AC aura plus grande raison à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que si AB a moindre raison à BC que DE à EF, aussi en composant AC aura moindre raison à BC que DF à EF. Car d'erechef si comme AB est à BC, ainsi quelque autre GE est à EF: Icelle GE sera moindre que DE par la 10. prop. 5. Et en composant AC sera à BC, comme GF, à EF. Mais GF a moindre raison à EF que DF à EF par la 8. pr. 5. attendu que GF est moindre que DE: donc aussi AC aura moindre raison à CB, que DF à EF.

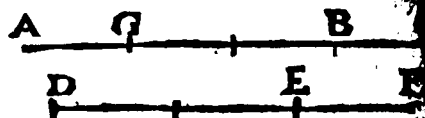


Autrement. D'autant qu'il y a moindre raison de AB à BC, que de DE à EF, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AE à BC; & par la 28. p. 5. en composant il y aura aussi plus grande raison de DF à EF, que de AC à EC: & partant il y aura moindre raison de AC à BC, que de DF à EF.

THEOR. 29. PROP. XXIX.

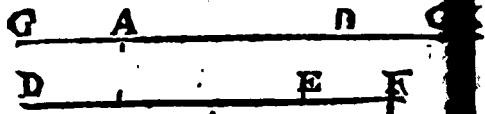
Si la composée de la première & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quatrième: Aussi en divisant, la première aura plus grande raison à la deuxième, que la troisième à la quatrième.

Que AC ait à BC plus grande raison que DE à EF. Je dis qu'en divisant AB, aura aussi à BC plus grande raison que DE à EF. Car soit entendu que comme GC est à EF, ainsi quel- que autre GC soit à CB; & il y aura aussi plus grande raison de AC à BC que de GC à BC: & partant AC sera plus grande que GC par 10. p. 5. Ostant donc BC commun, restera AB plus grande que GB: & par la 8. prop. 5. Il y aura plus grande raison de AB à BC, que de GB à BC. Mais en divisant par la 17. prop. 5. comme GB est à BC, ainsi DE est à EF: (car on a posé GC être à BC, comme DF à EF.) Donc aussi la raison de AB à BC sera plus grande, que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

Que si AC a moindre raison à BC que DE à EF, aussi en divisant AB aura moindre raison à BC que DE à EF. Car si on entend GC être à BC, comme DE à EF, la raison de AC à BC sera pareillement moindre que celle de GC à BC. & par la 10. prop. 5. AC sera moindre que GC. Ostant donc BC commune, restera AB moindre que GB; & par la 8. prop. 5. la raison de AB à BC sera moindre que de GB à BC: Mais puis que GC est à BC comme DE à EF, en divisant GB sera à BC comme DE à EF: il y aura donc aussi moindre raison de AB à BC que de DE à EF.

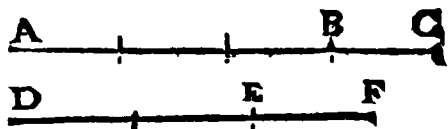


Autrement. D'autant que la raison de AC à BC est moindre que de DE à EF, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AC à BC: donc aussi en divisant, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AB à BC par la 29. p. 5. & partant la raison de AB à BC sera moindre que de DE à EF.

THEOR. 30. PROP. XXX.

Si la composée de la premiere & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quarte : par conversion de raison, la premiere & seconde aura moindre raison à la premiere, que la tierce & quarte à la tierce.

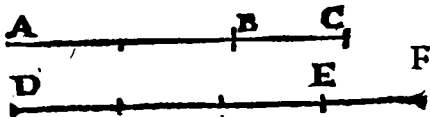
Que AC ait plus grande raison à BC que DF à EF: Je dis par conversion de raison, que AC a moindre raison à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raison à BC que DF à EF, en divisant AB aura plus grande raison à BC que DE à EF par la 29. prop. 5.



Donc par raison inverse, il y aura moindre raison de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en composant, il y aura aussi moindre raison de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Semblablement si AC a moindre raison à CB que DF à EF, aussi par conversion de raison AC aura plus grande raison à AB que DF à DE. Car puis qu'il y a moindre raison de AC à BC que de DF à EF, par la 29. prop. 5. en divisant il y aura moindre raison de AB à BC que de DE à EF, & en changeant par la 26. prop. 5. il y aura pa-



reillement moindre raison de BC à AB, que de EF à DE: donc en composant par la 28. prop. 5. il y aura plus grande raison de AC à AB que de DF à DE.

Autrement, D'autant que la raison de AC à BC est moindre que celle de DF à EF, il y aura plus grande raison de DF à EF que de AC à BC : donc par conversion de raison,

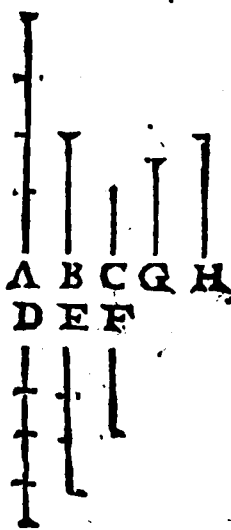
il y aura moindre raison de DF à DE, que de AC à AB : c'est-à-dire qu'il y aura plus grande raison de AC à AB que de DF à DE.

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la première des premières à la seconde, que de la première des dernières à la seconde, & aussi plus grande raison de la seconde des premières à la tierce, que de la seconde des dernières à la tierce : En raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de la première des premières à la tierce, que de la première des dernières à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raison de A à B soit plus grande que celle de D à E : Item, la raison de B à C soit aussi plus grande que de E à F : Je dis qu'en raison égale, il y aura plus grande raison de A à C que de D à F.

Car soit entendu G estre à C, comme E à F; & il y aura plus grande raison de B à C, que de G à C : Donc par la 10. prop. 5. B sera plus grande que G; & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raison de A à G, que de A à B : Mais la raison de A à B est posée plus grande que de D à E : Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A à G, que de D à E. Soit derechef posée H estre à G, comme D à E : Il y aura donc aussi plus grande raison de A à G, que de H à G : & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que H : & partant A aura plus grande raison à C, que H à la même C, par la 8. prop. 5. Mais comme H est à C, ainsi est en raison égale D à F. (pource



que comme D est à E, ainsi H à G, & comme E est à F, ainsi G à C.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C, que de D à F. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Nous démontrerons en la mesme maniere, que si la raison de A à B est la mesme que de D à E, & celle de B à C plus grande que de E à F : ou au contraire, si la raison de A à B est plus grande que de D à E, & celle de B à C la mesme que de E à F : en raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de A à C, que de D à F : car soit premierement A à B, comme D à E, mais la raison de B à C plus grande que de E à F. Soit posée G à C comme E à F ; & la raison de B à C sera plus grande que de G à C, & conséquemment B plus grande que G, par la 10. prop. 5. Parquoy il y aura plus grande raison de A à G que de A à B. Mais A est posée à B, comme D à E. Donc aussi la raison de A à G sera plus grande que de D à E. Soit posée derechef H à G, comme D à E ; & il y aura plus grande raison de A à G que de H à G ; & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que H : Parquoy la raison de A à C sera plus grande que de H à C. Mais comme H est à C ainsi est en raison égale D à F : (attendu que comme D à E, ainsi H à G, & comme E à F, ainsi G à C.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C que de D à F.

Maintenant la raison de A à B soit plus grande que celle de D à E, mais B soit à C, comme E à F. Soit posée G à C, comme E à F ; & B sera aussi à C, comme G à C : & par la 9. prop. 5. B sera égale à G. Parquoy A sera à G, comme A à B par la 7. prop. 5. Mais la raison de A à B est posée plus grande que de D à E. Donc aussi la raison de A à G sera plus grande que de D à E. Soit derechef posée H à G comme D à E ; & il y aura plus grande raison de A à G, que de H à G : & partant A sera plus grande que H par la 10. prop. 5. & il y aura plus grande raison de A à C que de H à C. Mais comme H est à C, ainsi en raison égale D est à F : (car comme D à E, ainsi H à G, & comme E est à F, ainsi G à C.) Il y aura donc pareillement plus grande raison de A à G que de D à F.

Nous démontrerons semblablement que si A a moindre raison à B, que D à E ; & B à C moindre raison que E à F : aussi en raison égale A aura moindre raison à C que D à F. Et le

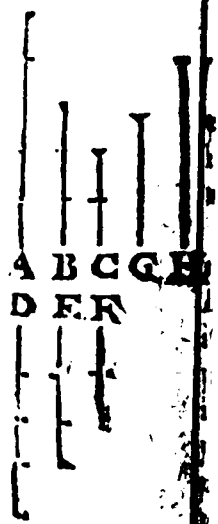
mesme adviendra encore, si A étant à B comme D à E , la raison de B à C est moindre que de E à F : Ou au contraire la raison de A à B étant moindre que de D à E , B est à C comme E à F : Car il est manifeste que la demonstration sera toujours la mesme que dessus.

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la seconde, que de la seconde des dernieres à la tierce: Semblablement qu'il y ait plus grande raison de la seconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la seconde: En raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A , B , C , & trois autres D , E , F , & que A ait plus grande raison à B , que E à F , & B à C que D à E : Je dis qu'en raison égale, A aura plus grande raison à C , que D à F .

Car soit entendu que G est à C , comme D à E ; & il y aura aussi plus grande raison de B à C , que de G à C : partant B sera plus grande que G , par la 10. prop. 5. Parquoy la raison de A à G sera plus grande que de A à B , par la 8. prop. 5. Mais la raison de A à B est plus grande que de E à F : il y aura donc encore beaucoup plus grande raison de A à G que de E à F . Soit derechef entendu H estre à G , comme E est à F , & il y aura aussi plus grande raison de A à G , que de H à G , & par la 10 prop. 5. A sera plus grande que H : parquoy il y aura plus grande raison de A à C que de H à la mesme C . Mais comme H est à C ,



ainsi est en raison égale D à F : (car comme D est à E, ainsi G est à C, & comme E est à F, ainsi H à G.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C que de D à F. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

On démontrera semblablement, que si A a même raison à B que E à F, & B à C plus grande que D à E : Ou au contraire, si la raison de A à B est plus grande que de E à F, mais celle de B à C la même que de D à E ; en raison égale, la raison de A à C sera plus grande que de D à F.

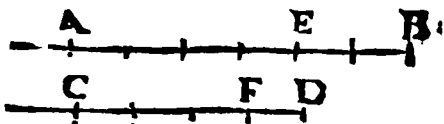
Par même raison on démontrera aussi, que si les raisons des premières grandeurs sont moindres ; aussi la raison des extrêmes sera moindre ; c'est-à-dire, que si A a moindre raison à B que E à F, & B à C que D à E : aussi A aura moindre raison à C, que D à F.

THEOR. 33. PROP. XXXIII.

S'il y a plus grande raison du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura aussi plus grande raison du reste au reste, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raison à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF : Je dis que le reste EB aura plus grande raison au reste FD, que la toute AB à la toute CD.

Car d'autant qu'il y a plus grande raison de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura aussi plus grande raison de AB à AE, que de CD à CF par la 27. prop. 5. & par conversion de raison il y aura moindre raison de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. prop. 5. Donc en permutant, il y aura aussi moindre raison de AB à CD, que de EB à FD par la 27. prop. 5. c'est-à-dire, que le reste EB aura plus gran-



de raison au reste FD , que la toute AB , à la toute C .
Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

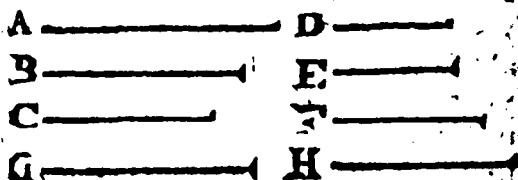
Que si la toute AB a moindre raison à la toute CE que la retranchée AE à la retranchée CF : aussi le reste EB aura moindre raison au reste FD , que la toute AB à la toute CD , comme il appert par la démonstration ci dessus.

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la première des premières à la première des dernières, que de la seconde à la seconde; & cette-cy soit aussi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainsi de suite : Toutes les premières ensemble auront plus grande raison à toutes les dernières ensemble, que toutes les premières, la première ôtée, à toutes les dernières, la première aussi ôtée; mais moindre raison que la première des premières à la première des dernières; & finalement aussi plus grande raison que la dernière des premières à la dernière des dernières.

Soient premièrement trois grandeurs A , B , C , & trois autres D , E , F ; & la raison de A à D soit plus grande que celle de B à E , & celle-cy plus grande que celle de C à F : Je

dis que A , B , C ensemble, ont plus grande raison à D , E , F ensemble, que B , C ensemble à E , F



ensemble : mais moindre que A à D , & aussi plus grande que C à F.

Car puis qu'il y a plus grande raison de A à D que de B à E , en permutant , il y aura aussi plus grande raison de A à B que de D à E par la 27. prop. 5. Donc en composant A & B ensemble , auront plus grande raison à B , que D & E ensemble à E par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef , A & B ensemble , auront plus grande raison à D & E ensemble que B à E. Et puis que la toute A , B , à plus grande raison à la toute D , E , que la retranchée B à la retranchée E , la restante A aura aussi plus grande raison à la restante D , que la toute A , B , à la toute D , E , par la prec. prop. Par même raison , il y aura plus grande raison de B à E , que de la toute B , C , à la toute E , F. Il y aura donc encore bien plus grande raison de A à D , que de la toute B , C à la toute E , F. Donc en permutant , il y aura plus grande raison de A à B , C ensemble , que de D à E , F ensemble par la 27. prop. 5. Et en composant , il y aura plus grande raison de A , B , C à B , C , que de D , E , F à E , F , par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raison des toutes A , B , C ensemble , aux toutes D , E , F ensemble , que de B , C à E , F : ce qui est premierement proposé.

Et puis qu'il y a plus grande raison de la toute A , B , C à la toute D , E , F , que de la retranchée B , C à la retranchée E , F , il y aura aussi plus grande raison de la restante A à la restante D , que de la toute A , B , C , à la toute D , E , F , par la prop. prec. Ce qui est secondement proposé.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raison de B à E , que de C à F : en permutant il y aura aussi plus grande raison de B à C , que de E à F par la 27. prop. 5. Et en composant , la toute B , C aura plus grande raison à C , que la toute E , F , à F par la 28. prop. 5. Donc en permutant derechef , il y aura plus grande raison de B , C à E , F , que de C à F. Mais il a été démontré que A , B , C , ensemble ont plus grande raison à D , E , F , ensemble , que B , C , à E , F : Il y aura donc encore bien plus grande raison

des toutes A, B, C, aux toutes D, E, F, que la dernière C à la dernière F. Ce qui est tiercement proposé.

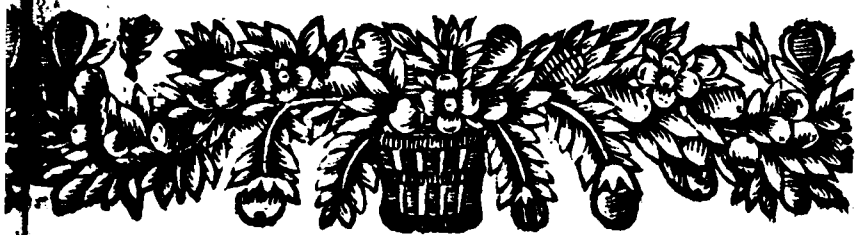
Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, avec la même hypothèse, c'est-à-dire, que la raison de C tierce à F tierce soit plus grande, que de G quarte à H quatrième. Je dis que la même chose s'ensuit. Car comme il a déjà été démontré en trois grandeurs, il y a plus grande raison de B à C, que de B, C, G ensemble à E, F, H ensemble. Donc il y aura encore plus grande raison de A à D, que de B, C, G, à E, F, H. Et en permutant il y aura plus grande raison de A à B, C, G que de D à E, F, H. Parquoy en composant il y aura aussi plus grande raison de A, B, C, G à B, C, G, que de D, E, F, H à E, F, H : & en permutant il y aura plus grande raison de A, B, C, G à D, E, F, H, que de B, C, G à E, F, H. Ce qui est premierement proposé.

Et vû qu'il y a plus grande raison de la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H, que de la retranchée B, C, G, à la retranchée E, F, H, la restante A aura plus grande raison à la restante D, que la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H. Ce qui est secondement proposé.

Mais comme il a été démontré en trois grandeurs, B, C, G ont plus grande raison à E, F, H, que G à H : & A, B, C, G plus grande à D, E, F, H, que B, C, G, à E, F, H : Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A, B, C, G à D, E, F, H, que de la dernière G à la dernière H : ce qui est tiercement proposé.

En la même manière on conclurra la même en 5 grandeurs par 4 : & en 6 par 5, &c. tout ainsi qu'il est démontré en 4 par 3. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Fin du cinquième Livre.



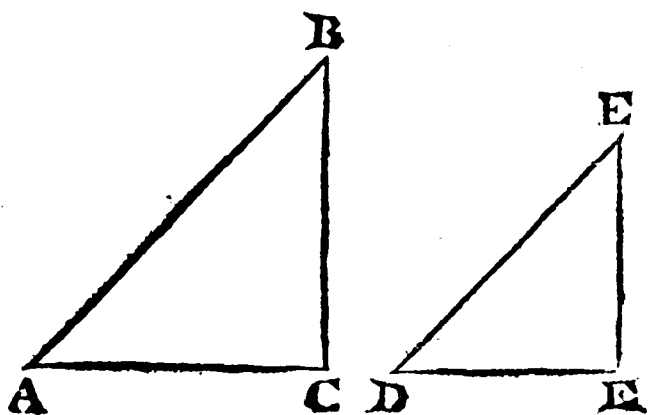
ELEMENT

SIXIEME.

DEFINITIONS.

S E M B L A B L E S figures rectilignes, sont celles qui ont les angles égaux, un chacun au sien, & les côtez qui contiennent les angles égaux, proportionnaux.

C'est-à-dire, que toutes figures rectilignes sont dites semblables, si étans equiangles elles ont les côtez d'alentour leurs angles égaux proportionnaux : comme les deux triangles A BC , D EF , seront dits semblables, si l'angle A étant égal à l'angle D , l'angle B égal à l'angle E , &

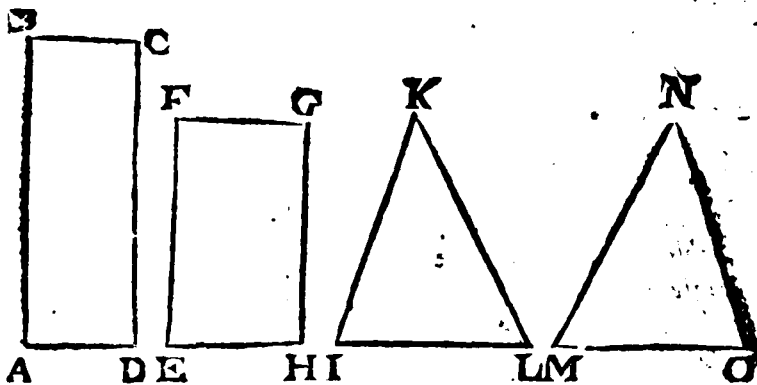


l'angle C à l'angle F ; les côtéz qui sont & constituent les angles égaux , sont proportionnaux ; c'est à sçavoir , que comme AB est à AC , ainsi DE soit à DF , & comme AB est à BC , ainsi DE soit à EF , & comme AC est à BC , ainsi DF soit à EF.

Que si l'une ou l'autre des deux conditions susdites n'est-à-dire , que chacun des angles de l'une des figures n'est égal à chacun des angles de l'autre , si les côtéz d'alentour leurs angles égaux ne sont proportionnaux ; ou au contraire telles figures ne seront dites semblables , comme sont le carré & le carré long ; car ces deux figures ont bien les angles égaux , sçavoir droits : mais les côtéz de l'une ne sont pas en même raison que les côtéz de l'autre : car ceux du carré sont en raison d'égalité , & ceux d'alentour l'angle droit du carré long , sont en raison d'inégalité , puis que l'un est plus grand que l'autre. D'où est manifeste , que toutes figures rectilignes équiangles & équilatérales , lesquelles ont les angles & les côtéz égaux en nombre , sont semblables , combien qu'elles soient inégales.

2. Les figures sont reciproques , quand les termes antecédans & conséquens des raisons , sont en l'une & en l'autre figure.

C'est à dire , que s'il y a deux figures semblables ou non , dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'une des figures , & le second & troisième terme en l'autre ; icelles



figures seront dites reciproques. Comme si aux deux parallelogrammes AECB, DFHG, les côtéz AB, BC, sont proportion-

naux

aux côtez EF, FG; tellement qu'il y ait mesme raison de AB à EF, que de FG à BC; ou bien que AB soit à FG comme EF à BC: Iceux parallelogrammes seront dits figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux est le terme antecedant de l'une des raisons, & le consequent de l'autre. Item les triangles IKL, MNC, seront aussi dits reciproques, si IK est à MN, comme MC à IL; ou bien IK à MC, comme MN à IL.

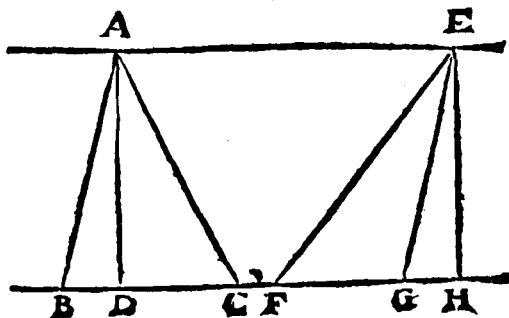
Une ligne droite est dite estre divisée en la moyenne & extrême raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

Quand quelque ligne droite, comme AB, est coupée inegalement en C, de telle sorte que la toute AB, soit au plus grand segment AC, comme iceluy plus grand segment AC, est au moindre segment CB: cette ligne AB sera dite estre coupée en C selon la moyenne & extreme raison. Or comme cela se fait, Euclide l'enseignera en la 30. prop. de ce livre, combien que sous autres paroles il l'ait déjà enseignée à la 11. prop. 2.

La hauteur d'une chacune figure, est la perpendiculaire tirée du sommet à la base.

Si de A sommet du triangle ABC, l'on mene AD perpendiculaire à la base BC, icelle perpendiculaire sera la hauteur d'iceluy triangle ABC: tellement que ledit triangle sera dit avoir autant de hauteur qu'est icelle perpendiculaire AD.

De semblablement la perpendiculaire EH tirée de E, sommet du triangle EFG, sur la base FG, prolongée de la part de G, sera la hauteur d'iceluy triangle EFG. Parquoy si les perpendiculaires de ces deux figures menées



des sommets d'icelles sur leurs bases (soit qu'icelles bases soient prolongées, ou non) sont égales ; icelles figures seront avoir même hauteur. Or telles perpendiculaires seront égales quand les bases des figures & leurs sommets seront constitués en mêmes parallèles : Comme sont les perpendiculaires AD , EH , des triangles ABC , FEG , constitués entre mêmes parallèles. Car puis que les deux angles ADH , EHD , intérieurs, & de même part, sont droits, les lignes AD , EH , sont parallèles par la 25. prop. 1. Mais AE , DH , sont aussi parallèles, puis que les triangles AEC , EFG , sont posés & constitués entre mêmes parallèles : Donc le quadrilatère $AEDH$, sera parallélogramme, & partant les côtés opposés AD , EH , seront égaux par la 34. prop. 1. Ce qui étoit à prouver.

5. Une raison est dite être composée de raisons quand les quantitez des raisons multipliées entr'elles font quelque raison.

C'est-à-dire, que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliées entr'elles produisent quelque quantité de raison : icelle raison est dite être composée de celles-là. Or la quantité d'une raison est le dénominateur d'icelle, comme nous avons déjà dit sur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raison triple est 3 : mais de la subtriple c'est $\frac{1}{3}$, &c. Ainsi la raison double se dit être composée de la sesquialtere, & de la sesquiterce, pource que les quantitez de dénominateurs d'icelles, sçavoir est $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{2}{3}$, étans multipliés entr'eux produisent 2, dénominateur ou quantité de la raison double.

Derechef, la même raison double sera dite être composée de la double sesquialtere, & de la subsestiquiquarte : car les quantitez ou dénominateurs de ces deux raisons, étans multipliés

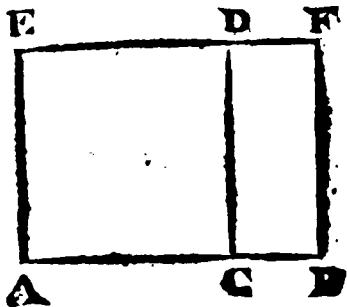
entr'eux , produisent encore 2 , dénominateur de la même raison double. Pareillement la raison trigecuple se dit être composée des raisons double, triple & quintuple ; d'autant que les dénominateurs d'icelles raisons , sçavoir est 2 , 3 , & 5 , étans multipliez entr'eux produisent 30 , dénominateur d'icelle raison trigecuple. Parquoy étans posées tant de grandeurs qu'on voudra par ordre , la raison des extrêmes sera composée des raisons entre-moyennes , pource que le dénominateur ou quantité de la raison de la premiere grandeur à la derniere , est produite & procréée par les dénominateurs des raisons entre-moyennes multipliez entr'eux : comme pour exemple , soit *A* à *B* en raison sesquialtere ; *B* à *C* en raison double ; & *C* à *D* en raison superbipartiente tierce : la raison des extrêmes *AD* , qui est quintuple , est composée des trois *A. B. C. D.* raisons susdites. Car il est évi- 30. 20. 10. 6. dent que multipliant le dénominateur de la raison de *A* à *B* , par celui de *B* à *C* , sçavoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3 : & partant *A* est à *C* en raison triple , & multipliant le dénominateur d'icelle , sçavoir est 3 par le dénominateur de la raison de *C* à *D* , qui est $1\frac{2}{3}$ proviennent 5 ; & partant *A* qui est à *D* en raison quintuple , est produite & composée des raisons entre-moyennes.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles , tant les 27 28 & 29 prop. de ce livre , que plusieurs du 10. adjoûtent icy cette def.

6. Un parallelogramme étant appliqué selon quelque ligne droite donnée , est dit defaillir d'un

parallélogramme, lors qu'il n'occupe pas toute ladite ligne : mais il est dit excéder, quand en occupe une plus grande; en sorte toutesfois qu'iceluy parallélogramme defaillant, ou excédant ait deux angles communs avec le parallélogramme appliqué sur toute la ligne proposée & la différence de ces deux parallélogrammes est dite défaut, ou excez.

Soit une ligne droite AB sur laquelle soit constitué le parallélogramme $ACDE$, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB , ains laisse CB ; & soit achevé le parallélogramme $ABFE$ tirant EF parallèle à CD jusques à ce qu'elle rencontre ED prolongée en F . Or le parallélogramme AD appliqué selon la ligne droite AB , ayant les deux angles A, E communs avec le parallélogramme AF , appliqué & décrit sur toute ladite ligne AB , est dit defaillir du parallélogramme CF ; & iceluy parallélogramme CF sera appelé le défaut.



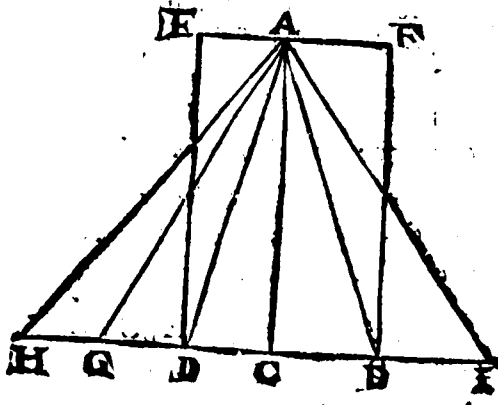
Devecchef, soit une ligne droite AC , sur laquelle soit constitué le parallélogramme AF , ayant le côté AB plus grand que la ligne proposée AC , & soit tirée CD parallèle à BF . Donc le parallélogramme AF appliqué selon la ligne droite AC , & qui avec le parallélogramme AD décrit sur toute ladite ligne AC a les deux angles A, E communs, sera dit excéder AD du parallélogramme CF , tellement qu'iceluy CF est dit l'excez.

THEOR. I. PROP. I.

Les triangles, & les parallélogrammes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD de même hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallélogrammes

mes CE, CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC, CD. Je dis premierement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC, pour seconde la base CD, pour troisieme le triangle ABC, & pour quatrieme le triangle ACD ; les equemultiplices de la premiere & troisieme seront plus petites, égales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatrieme, ainsi que le requert la 6. definition du 5. livre.



Qu'il ne soit ainsi ; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & après avoir pris d'un côté BG & GH, chacune égale à BC : item de l'autre côté, DI égale à CD, soient menées les lignes droites AG, AH, AI. Donc par la 38. prop. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, étans sur bases égales & entre mesmes paralleles, seront égaux : aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront égaux ; ainsi il est évident qu'autant de fois que la base HC contiendra la base BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la base CI contiendra la base CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy si la base CH, est égale à la base CI, le triangle ACH sera aussi égal au triangle ACI, par la 38. prop. 1. Mais si la base est plus grande, conséquemment le triangle sera plus grand ; si plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la base BC sera à la base CD, ainsi le triangle ABC sera au triangle ACD : ce qui étoit à démontrer pour la premiere partie.

Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le même se peut dire que des triangles ; parce qu'iceux parallelogrammes sont doubles des trian-

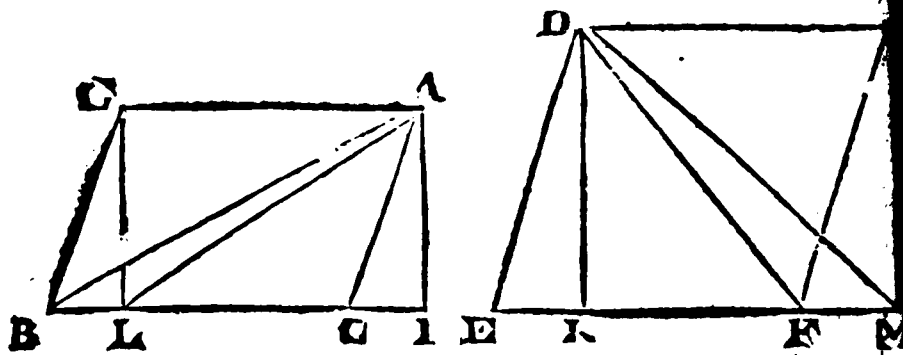
gles ABC , ACD par la 41. prop. 1. & par la 15. prop. 5. ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Commandin adjointe en ce lieu cet autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont égales, ou une même, sont entr'eux, comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC , DEF , & les parallelogrammes $AGBC$, $DEFH$, ayans les bases BC , EF égales : Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , & le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$, comme la hauteur AI est à la hauteur DK . Car si on prend les lignes IL , KM égales aux bases BC , EF , & on tire les lignes LA , MD , le triangle ALI sera égal au triangle ABC par la 38. prop. 1. puis qu'ils sont sur bases égales LI , BC , & entre mêmes paralleles AG , IB : Par même raison le triangle DKM sera égal au triangle



DEF . Parquoy par la 7. prop. 5. comme ABC sera à DEF , ainsi ALI sera à DKM . Mais par la 1. prop. 6. comme ALI est à DKM , ainsi AI à DK . (car si AI , DK sont posées les bases, les lignes droites égales LI , KM seront les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF , comme AI à DK .

Et d'autant que par la 15. prop. 5. comme ABC est à DEF , ainsi le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$; (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par

La 41. prop. 1.) aussi $AGBC$ sera à $DEFH$, comme AI à DK . Le même s'ensuivra si les triangles, & les parallelogrammes ont une même base.

THEOR. 2. PROP. II.

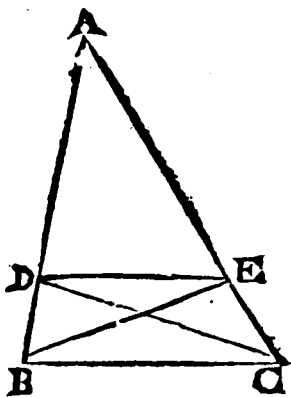
Si on mene une ligne droite parallele à l'un des côtez d'un triangle, laquelle coupe les deux autres côtez; elle les coupera proportionnellement: & si deux côtez d'un triangle sont coupez proportionnellement, la ligne coupante sera parallele à l'autre côté.

Soit le triangle ABC , dans lequel soit menée la ligne droite DE parallele au côté BC , couppant les deux autres côtez AB & AC aux points D & E . Je dis que les côtez AB , AC sont coupez proportionnellement aux points D & E , c'est-à-dire que AD sera à DB , comme AE est à EC .

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. Les deux triangles DEB & EDC , estans sur même base, & entre mêmes paralleles, sont égaux; & par la 7. p. 5. ils auront même raison l'un comme l'autre au troisième ADE . Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA , estans de même hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD à la base DA : & par la même proposition, le triangle CDE , estant de même hauteur qu'iceluy triangle EDA , ils seront aussi l'un à l'autre, comme CE est à EA : & partant par la 11. prop. 5. BD sera à DA , comme CE à EA :

(puisque ces deux raisons sont les mêmes que du triangle BED au triangle DEA , & du triangle CDE au même triangle DEA .) Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie: je dis que si DB est à DA , comme CE à EA , la ligne coupante DE sera parallele au côté BC .



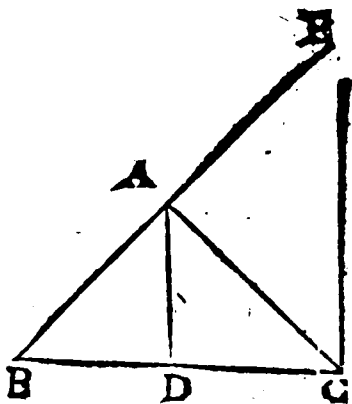
Car les triangles DEB & DEA , seront par la 1. prop. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA . Item les deux autres triangles CDE , & EDA , seront aussi l'un à l'autre comme CE à EA : & par la 11. prop. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA , comme le triangle CDE est au même triangle DEA : & par la 9. prop. 5. les deux triangles BED , & EDC seront égaux, lesquels étans sur même base DE , par la 39. prop. 1. ils seront entre mêmes parallèles : & partant DE sera parallele à BC . Parquoy si l'on mène une ligne parallele à l'un des côtez d'un triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, laquelle coupe aussi la base ; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle : Et si les segmens de la base sont l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle : la ligne droite tirée du sommet à la section de la base, coupe l'angle en deux également.

Au triangle ABC , soit l'angle BAC coupé en deux également par la ligne AD , laquelle coupe aussi la base BC au point D : Je dis premierement, que BD est à DC , comme AB à AC .

Qu'il ne soit ainsi : après avoir du point C mené CE parallele à DA , soit continué BA directement jusques à ce qu'il rencontre CE en E , (Or BA , CE se rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE sont moindres que deux droits, étans égaux aux deux B & BDA , qui sont moindres que deux droits par la 17. prop. 1.) & parce que DA



Si CE sont paralleles, l'angle CAD sera égal à son alterne ACE par la 29. prop. 1. Et si l'exterieur DAB sera égal à l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD étant égaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront égaux : & partant par la 6. prop. 1. les côtez AE & AC seront égaux. Mais par la precedente prop. BA est à AE, comme BD à DC ; (étant AD parallele à CE) & par consequent BA sera aussi à AC, (égale à AE) comme BD à DC. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie : je dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera coupé en deux également par la ligne droite AD.

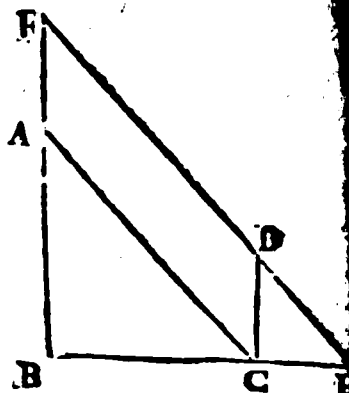
Car après avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. prop. 5. BA sera à AE, comme le même BA est à AC, & par la 9. prop. 5. AE & AC seront égaux ; & partant par la 5. prop. 1. les deux angles AEC, ACE, seront aussi égaux ; & par la 29. prop. 1. ils sont égaux, l'un à DAB, & l'autre à DAC, lesquels par ce moyen seront aussi égaux ; ce qui étoit proposé. Parquoy si l'angle d'un triangle est coupé en deux également, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R. 4. P R O P. IV.

Des triangles équiangles, les côtez qui sont au long des angles égaux, sont proportionnaux ; & les côtez qui soutiennent les angles égaux, sont de même raison.

Soient deux triangles ABC, DCE, équiangles : c'est-à-dire, que l'angle ABC soit égal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troisième au troisième. Je dis que comme AB est à BC, ainsi DC à CE ; & comme BC à CA, ainsi CE à ED ; & finalement comme AB à AC, ainsi DC à DE. Car ainsi les côtez d'alentour des angles égaux, sont les proportionnaux, & les côtez homologues, ou de même raison, sont ceux-là qui soutiennent les angles égaux, c'est-à-dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles égaux.

Soient constituez les côtez BC, CE selon une ligne droite, tellement que l'angle externe DCE soit égal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC : & d'autant que par la 17. prop. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droits, & l'angle DEC est égal à l'angle ACB, aussi les angles B & E seront moindres que deux droits : & partant les lignes BA & ED étans produites de la part de A & D, se rencontreront : Qu'elles soient donc prolongées & conviennent en F. Il est évident que l'angle extérieur ECD, étant par l'hypothèse égal à son opposé intérieur CRA ; DC sera parallele à FB par la 18. prop. 1.



Pareillement l'angle extérieur ACB étant égal à son opposé intérieur DEC, aussi par la même 18. prop. 1. CD & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34. prop. 1. il aura les angles, & les côtes opposez égaux. Mais AC étant parallele à EF, par la 2. prop. 6. AB sera à AF, ou CD son égale, comme BC à CE ; & en permutant par la 16. prop. 5. AB sera à BC comme DC à CE. Pareillement CD étant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son égale, sera à ED par la 2. prop. 6. & en permutant BC sera à AC comme CE à ED.

Veu donc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison égale AB sera à AC comme DC à ED. Parquoy des triangles équiangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

De cecy resulte, que si une ligne droite parallele à un côté d'un triangle, coupe les deux autres côtez d'iceluy, elle ôtera un triangle semblable au tout. Comme au triangle BFE, étant menée la ligne droite AC parallele au côté FE, qui coupe les deux autres côtez en A & C : Je dis que le triangle

Le triangle BAC retranché par icelle ligne AC , est semblable au triangle BFE . Car d'autant que par la 29. prop. 1. l'angle externe BAC est égal à l'interne de même côté F ; & que l'angle B est commun à tous les deux triangles BAC , BFE , ils seront équiangles par le Corol. de la 32. prop. 1. Parquoy, comme il a été démontré cy-dessus, ils ont les côtez autour des angles égaux proportionnaux: & partant selon la 1. def. 6. les deux triangles BAC & BEF seront semblables.

T H E O R. 5. P R O P. V.

Si deux triangles ont les côtez proportionnaux, ils seront équiangles, & auront les angles égaux, sous lesquels les côtez de même raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC , & DEF , ayans les côtez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF , & BC à CA , comme EF à FD , & encore AB à AC comme DE à DF . Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir l'angle A estre égal à l'angle D , & l'angle B à l'angle E , & l'angle C à l'angle F : car ainsi les angles égaux regardent les côtez de même raison.

Qu'il ne soit ainsi: sur la ligne EF , & aux deux points E & F soient construits deux angles, sçavoir FEG égal à l'angle B , & EFG égal à l'angle C , tirant les lignes EG , & FG jusques à ce qu'elles se rencontrent en G : Et par la 32.

prop. 1. le 3^e angle G

sera égal au 3^e angle

A . Parquoy les trian-

gles ABC , GEF sont

equiangles; & par la

4. prop. 6. comme

AB est à BC , ainsi

GE à EF . Mais com-

me AB est à BC ,

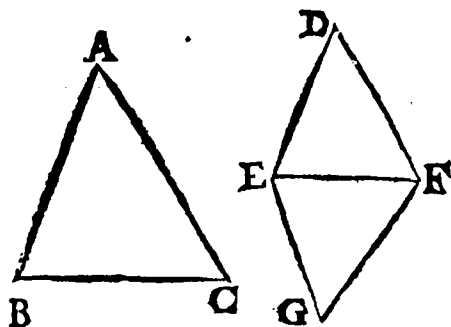
ainsi aussi a été posé

DE à EF : Donc par

la 11. prop. 5. comme GE à EF , ainsi DE à la même

EF : & partant par la 9. prop. 5. GE , DE seront égales.

Et d'autant que par la proposition precedente, comme BC



est à CA, ainsi EF est à FG; & par l'hypothèse comme BC est à CA, ainsi EF est à FD: par la 11. prop. 5. comme EF sera à FG, ainsi la même EF sera à FD: & par la 9. prop. 5. FG, FD seront égales. Veut donc que les côtés EG, FG du triangle GEF, sont égaux aux côtés DE, EF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune aux deux triangles, les angles G & D seront égaux par la 8. prop. 1. & partant par la 4. prop. 1. les autres angles GEF, GFE seront aussi égaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G étant égal à l'angle A, aussi l'angle D sera égal au même angle A: & ainsi l'angle DEF sera égal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainsi qu'il étoit proposé. Si donc deux triangles ont les côtés proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés au long d'iceux angles égaux, proportionnaux; ils seront équiangles, & auront les angles égaux sous lesquels les côtés de même raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B égal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE soit à EF. Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir que l'angle A est égal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainsi les angles égaux sont subtendus des côtés homologues.

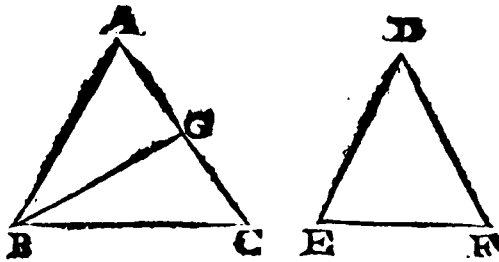
Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne EF soit construit, comme en la proposit. & fig. précédente, le triangle GEF équiangle au triangle ABC: & par la 4. prop. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la même raison) & par la 9. prop. 5. GE & DE (qui ont une même raison à EF) seront égaux; & partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux côtés égaux à deux côtés, sçavoir GE, EF, à DE, EF, chacun au sien, & les deux angles au point E, égaux (car ils sont chacun égaux à l'angle B) & par la 4. prop. 1. ils auront la base égale, la base, & les autres angles égaux aux autres angles, cha-

un au sien , & partant iceux triangles seront équiangles.
 Mais l'un d'iceux triangles , sçavoir GEF, est équiangle
 au triangle ABC par la construction. Donc l'autre trian-
 gle DEF sera aussi équiangle au mesme triangle ABC.
 Parquoy si deux triangles ont un angle égal à un angle,
 &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle , &
 les côtez au long d'un autre angle , proportion-
 naux , étans les troisièmes angles de mesme es-
 pece : Iceux triangles seront équiangles , & au-
 ront les angles égaux , au long desquels les cô-
 tez seront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux
 angles A & D soient égaux , & les côtez AB, BC d'alen-
 tour l'angle ABC,
 proportionnaux aux
 côtez DE, EF d'a-
 lentour l'angle E,
 c'est-à-dire que com-
 me AB est à BC,
 ainsi DE soit à EF:
 mais les autres an-
 gles C & F soient de
 mesme espece, c'est



à dire aigus, droits, ou obtus : & soient premierement
 aigus. Je dis que les triangles sont équiangles , sçavoir
 est, que les angles ABC & E, à l'entour desquels sont les
 côtez proportionnaux , & les angles C & F sont égaux.

Car si l'angle B est égal à l'angle F, il appert par la pre-
 cedente prop. que les triangles seront équiangles. Mais si
 lesdits angles ne sont égaux , soit B plus grand que E, &
 soit fait ABG égal à E par la 23. prop. 1. Donc le troi-
 sième angle AGB, sera égal au troisième F, & partant
 aigu comme iceluy ; & les deux triangles ABG & DEF
 seront équiangles ; & par la 4. prop. 6. comme AB sera
 à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme

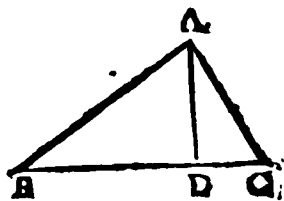
AB est à BC, ainsi DE à EF : donc par la 11. prop. comme AB sera à BG, ainsi le même AB sera à B & partant par la 9. prop. 5. BG, & BC seront égaux & par la 5. prop. 1. les deux angles C & BGC sur base CG seront égaux, & tous deux aigus, & par conséquent l'angle BGA sera plus grand qu'un droit puis que par la 13. prop. 1. les deux BGC, AGB sont égaux à deux droits : Mais l'angle AGB a été démontré égal à l'angle F : donc F seroit aussi plus grand qu'un droit, & on l'a posé aussi moindre : ce qui est absurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne soit aigu ; & comme dessus l'angle C sera égal à l'angle BGC ; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seront moindres que deux droits, mais égaux ou plus grands que deux droits : ce qui est absurde : car par la 17. prop. 1. ils sont moindres que deux droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inégaux, ains égaux, & partant par la 32. prop. 1. le troisième C sera aussi égal au troisième F : ce qui est proposé. Si donc deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base ; elle coupera iceluy triangle en deux autres triangles semblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que les triangles ABD & ADC, auxquels est divisé iceluy triangle ABC par la perpendiculaire AD, sont semblables entr'eux, & au total ABC.

Qu'ainsi ne soit : d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & égal à l'angle droit BAC, du triangle total ABC, & l'angle B est



commun à tous les deux triangles BAD & ABC, & par la 32. prop. 1. le troisième angle BAD, sera égal au troisième ACB : & partant les deux triangles BAD & ABC, seront équiangles ; & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, c'est-à-dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD ; & comme BA à AC, ainsi BD à DA : & comme BC à CA, ainsi BA à AD : & partant par la 1. def. de ce livre les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par même discours, on prouvera que les deux triangles ABC & ADC, sont aussi équiangles, & semblables : car l'angle C étant commun à tous les deux triangles, & l'angle droit BAC égal à l'angle droit ADC, le troisième angle CAD sera égal au troisième angle B, par la 32. prop. 1. & par la 4. prop. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA à CD : & comme CA à AB, ainsi CD à DA, & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la même manière, les triangles ADB, ADC être semblables entr'eux, puisque les angles au point D sont droits, & tant les angles ABD, CAD, que BAD, ACD, ont été démontrés égaux : & partant par la 4. prop. 6. comme BD sera à DA, ainsi DA à DC : & comme DA à AB, ainsi DC à CA : & comme AB à BD, ainsi CA à AD. Si donc de l'angle droit d'un triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base : & chacun des côtez comprenant l'angle droit, être aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

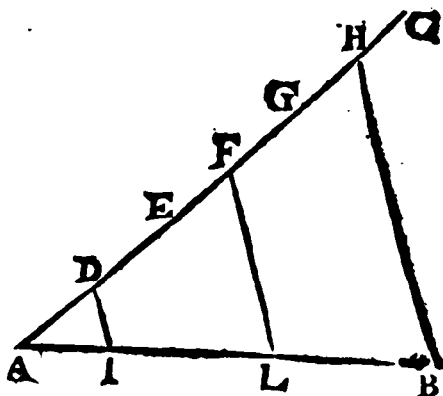
Car il a été démontré, que comme BD est à DA, ainsi DA est à DC : & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB est à BA : ainsi BA à BD : & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB & BD : finalement que comme BC est à CA, ainsi CA à CD : & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD.

P R O B . I . P R O P . I X .

D'une ligne droite donnée , ôter une partie demandée.

Soit la ligne droite donnée AB , de laquelle il faut ôter la cinquième partie , ou autre telle qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne droite AC interminement , faisant quelconque angle avec AB , comme BAC , & en icelle AC , soient prises à l'advanture autant de parties égales que dénote la partie qu'on veut ôter , comme en l'exemple proposé ; il faut prendre cinq parties égales AD , DE , EF , FG , GH : & après avoir conjoint les points B & H par la ligne BH , du point D soit menée DI , parallèle à HB : Je dis que AI est la cinquième partie requise de AB .



Car puis qu'au triangle ABH , la ligne DI est parallèle au côté HB , par la 2. prop. 6. comme HD sera à DA , ainsi BI à IA : & en composant par la 18. prop. 5. comme HA sera à DA , ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquième partie de la ligne droite AB , laquelle avoit été demandée. Donc d'une ligne droite donnée , &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E .

Que si de AB il falloit couper plusieurs parties , comme pour exemple les trois cinquièmes , il est évident par ce qui a été démontré cy-dessus , qu'étant tirée la ligne FL parallèle à HB , le segment AL sera les trois cinquièmes de AB , tout ainsi que AF est les trois cinquièmes de AH . Et pour promptement

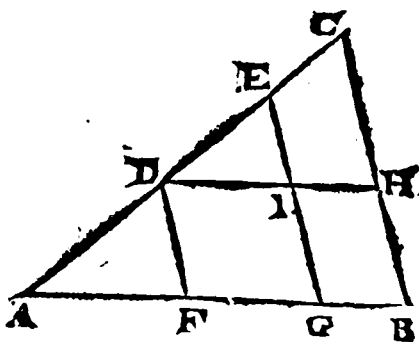
ient pratiquer cecy, il faut décrire du centre F, & de l'intervalle HB un arc au dessous de la ligne donnée AB, mais de B & de l'intervalle FH, décrire un autre arc qui coupe le précédent, puis tirer une ligne droite de la section d'iceux arcs à F, & icelle coupera la partie requise AL.

P R O B L . 2 . P R O P . X .

Couper une ligne droite donnée non coupée, semblablement à une autre ligne droite donnée & coupée.

Soient données les lignes droites AB, AC, desquelles AC est coupée en D & E : & il faut couper AB en parties semblables & proportionnelles à celles de AC.

Soient accommodées ces lignes données, en sorte qu'elles fassent quelconque angle BAC ; & après avoir mené BC, des points D & E, soient menées DF, EG, parallèles à celle BC, par la 31. pr. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement coupée en AF & G, comme la ligne AC est coupée en D & E. Car



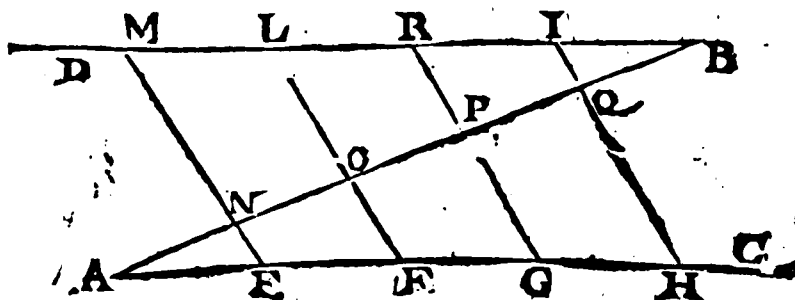
par la 2. prop. 5. comme AD est à DE, ainsi AF à FG. Que si on tire DH parallèle à AB coupant EG en I. De plus, par la susdite 2. prop. 6. comme DE sera à EC, ainsi DI à IH, c'est-à-dire, ainsi FG à GB, pource que par la 34. prop. 1. FG est égale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC : & par conséquent AB est coupée semblablement à AC, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

* Nous ajouterons icy deux Probl. fort utiles, & necess
res aux choses geometriques.

1. Estant donnée une ligne droite, la couper en parties égales qu'on voudra.

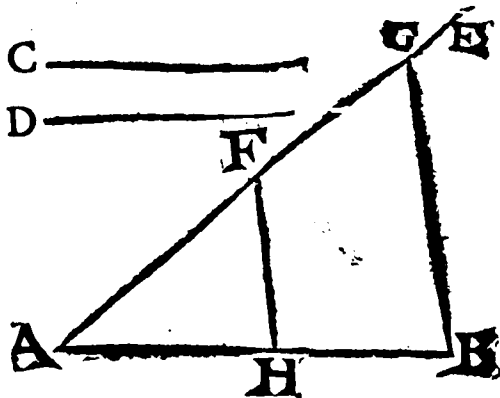
Soit la ligne donnée AB , qu'il faut couper en cinq parties égales. De l'extrémité A , soit menée la ligne AC ; tant qu'il y aura besoin, faisant quelconque angle avec AB ; puis de l'extrémité B , soit menée BD parallèle à AC , & d'icelle soient coupées quatre parties égales AE , EF , FG , & GD , qui est une partie moins que le nombre des parties esquel il faut couper la ligne donnée; en après, du point B en B'



soient aussi prises les quatre parties BI, IK, KE, & LM égales à celles de la ligne AC ; puis étans menées les lignes EN, FL, GK, & HI, elles couperont la ligne donnée AB en cinq parties égales. Car puis que par la construction les lignes EN, ML, sont égales & parallèles entr'elles, par la 33. prop. ME, IF, seront aussi parallèles entr'elles : Et par même raison LF, KG, HI, seront pareillement parallèles. Vû donc que AH est coupée en quatre parties égales, AQ le sera aussi. Par même raison BN sera encore divisée en quatre parties égales, parce que BM a été coupée en autant de parties égales. Parquoy vû que tant AN que BQ sont égales à chaque partie NO, OP, PQ toutes les cinq parties AN, NO, OP, PQ & QB, seront égales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.

2. Coupper une ligne droite donnée en deux parties, qui soient entr'elles selon une raison donnée.

Soit la ligne droite
donnée AB, qu'il faut
coupper en deux par-
ties, qui aient telle
raison entr'elles que C
à D : Du point A,
soit menée AE faisant
quelconque angle avec
AB; & d'icelle AE,
soit couppee AF esgale
à C, & puis FG esga-
le à D : en après soit
menée BG, & du
point F tirée FH pa-



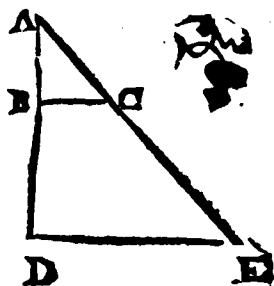
llelle à icelle BG, laquelle coupe AB en H : & icelle AB
sera couppee à iceluy point H, selon la raison de C à D, puis
que par la 2. prop. de ce livre, AH est à HB, comme AF à
FG, qui sont esgales à C & D. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. XI.

À deux lignes droites données, en trouver une troi-
sième proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AB & AC, aus-
quelles il en faut trouver une troisième proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en
un angle CAB; & apres avoir pro-
longé AB interminément, soit faite
BD égale à AC, & mené CB; puis
du point D, soit tirée DE parallèle à
BC, rencontrant AC prolongée en E.
Je dis que CE est la troisième propor-
tionnelle requise, c'est-à-dire que
comme AB est à AC, ainsi AC à CE.
Car puis qu'au triangle ADE, la li-
gne droite BC est parallèle au côté



DE, par la 2. prop. 6. comme AB sera à BD, ainsi AC à
CE : mais par la 7. prop. 5. comme AB est à BD, ainsi
le même AB est à AC, égale à icelle BD. Donc comme

Y 2°

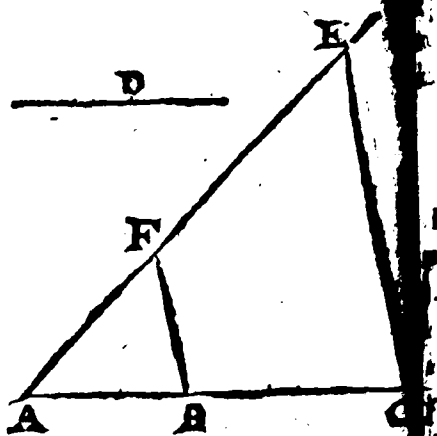
AB est à AC, ainsi AC à CE. Partant à deux lignes droites données, nous en avons trouvé une troisième proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 4. PROP. XII.

A trois lignes droites données, en trouver une quatrième proportionnelle.

Soient les trois lignes droites données AB, BC, & D, auxquelles il en faut trouver une quatrième proportionnelle.

Soient disposées les deux premières AB, BC, selon une ligne droite AC; & ayant tiré de A une ligne droite interminée AE, faisant avec la première AB, quelque angle, comme A; d'icelle AE, soit coupée AF égale à D, & menée BF: en après, de C, soit menée CE parallèle à icelle BF, rencontrant AE en E. Je dis



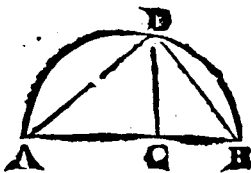
que FE est la quatrième proportionnelle requise. Car puis qu'au triangle AEC, la ligne BF est parallèle à CE, par la 2. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi AF est à FE, où D son égale est à FE. Nous avons donc trouvé une quatrième ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droites données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouver une moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC , CB , disposées en une ligne droite AB , sur laquelle soit décrit un demy cercle ADB : & après avoir du point C levé la perpendiculaire CD , qui rencontre la circonference en D : Je dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.



Car étans menées les deux lignes droites AD & BD , l'angle ADB dans le demy cercle, sera droit par la 31. prop. 3. Vû donc que de l'angle droit ADB du triangle rectangle ADB , est tirée DC perpendiculaire à la base AB , par le Corol. de la 8. pr. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC , CB . Nous avons donc trouvé une moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E .

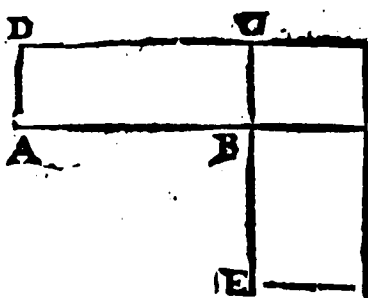
De cecy est évident qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de quelconque point du diamètre d'un cercle, jusques à la circonference d'iceluy, est moyenne proportionnelle entre les segmens du diamètre faits par icelle perpendiculaire. Car de quelconque point pris au diamètre AB , étant levée une perpendiculaire jusques à la circonference, par les mêmes raisons que dessus, icelle perpendiculaire sera moyenne prop. entre les deux segmens du diamètre AB .

T H E O R . 9 . P R O P . X I V .

Des parallelogrammes égaux, qui ont un angle égal à un angle ; les côtez au long des angles égaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont un angle égal à un angle, & les côtez au long des angles égaux reciproques, sont égaux.

Soient deux parallelogrammes égaux $ABCD$, & $BEFG$, desquels les deux angles ABC & EBG soient égaux :

Je dis que les côtez qui sont autour d'iceux angles égaux, sont reciproques : c'est-à-dire, que AB est à BG , comme EB à BC .



Car les parallelogrammes AC , BF , étans disposés de telle façon que les deux côtez AB &

BG , fassent une ligne droite AG ; les deux côtez EB & BC , feront aussi une ligne droite EC , à cause des angles égaux ABC , EBG , comme il est évident par les 2. consent. 13. & 14. prop. 1. & soient prolongez DC , FG jusques à ce qu'ils se rencontrent en H . Puis donc que les deux parallelogrammes AC , EG , sont égaux, ils auront une même raison au parallelogramme BH , par la 7. prop. 5. Mais la raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH , est par la 1. prop. 6. comme celle de la base AB à la base BG . Item celle des parallelogrammes EG , BH , est comme celle de EB à BC & partant par la 11. prop. 5, comme AB à BG , ainsi EB à BC . Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie; si AB est à BG , comme EB à BC , & que les angles ABC & EBG soient égaux : Je dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi égaux.

Car ayant fait la même construction que devant, on prouvera par la 1. prop. 6. qu'il y a même raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH , que de la base AB à la base BG ; pareillement qu'il y a même raison du parallelogramme EG au parallelogramme BH , que de EB à BC : mais les raisons des bases sont posées semblables : donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG , au troisième BH seront semblables par la 11. pr. 5. & partant par la 9. prop. 5. ils seront égaux. Parquoy des parallelogrammes égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

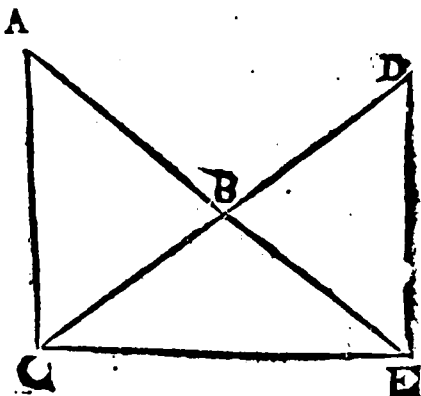
THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles égaux ayans un angle égal à un angle, ont les côtez au long des angles égaux reci-

proques : & les triangles qui ont un angle égal à un angle , & les côtez au long des angles égaux reciproques , sont égaux.

Soient deux triangles égaux ABC , & DBE , ayans les angles au point B égaux : Je dis que les côtez qui sont au long d'iceux angles égaux , sont reciproques : c'est-à-dire, que comme AB est à BE , ainsi DB sera à BC .

Car les triangles étans disposés en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & fassent une seule ligne droite AE , les deux lignes DB , BC , feront aussi une ligne droite CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE . Pour éstant que les deux triangles ABC & DBE sont égaux , ils



auront une même raison au triangle BEC par la 7. prop. 5. mais par la 1. prop. 6, la raison du triangle ABC au triangle BEC , (étant de même hauteur) est comme de la base AB à la base BE : pareillement par la même 1. prop. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB , comme DB est à BC : & partant par la 11. prop. 5. AB sera à BE , comme DB à BC . Ce qui a été proposé.

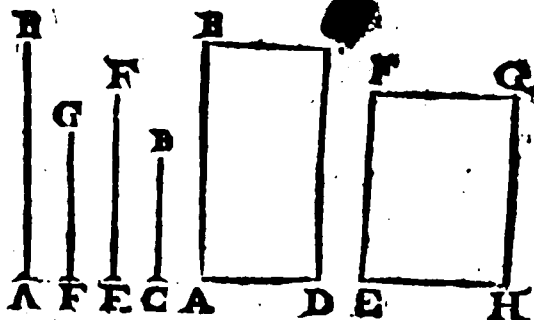
Pour la seconde partie : soient les côtez d'alentour les angles égaux au point B , reciproques, c'est à sçavoir, que comme AB est à BE , ainsi DB à BC . Je dis que les triangles ABC , DBE , sont égaux. Car ayant fait la même construction que cy-dessus , par la 1. prop. 6. comme AB sera à BE , ainsi le triangle ACB au triangle BCE , & comme DB à BC , ainsi le triangle BED au même triangle BEC : mais par l'hypothese les raisons des bases sont semblables : donc aussi les raisons des triangles ACB , BED , au troisième BCE seront semblables par la 11. prop. 5. & partant ils seront égaux par la 9. pr. 5. Donc les triangles égaux ayans un angle égal à un angle , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XVI.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles le rectangle compris des extrêmes, est égal à celui des moyennes ; & si le rectangle compris des extrêmes, est égal au rectangle compris des moyennes ; les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB , FG , EF , BC , sçavoir est que AB soit à FG , comme EF à BC , & soit le rectangle $ABCD$ compris des extrêmes AB , BC ; & le rectangle $EFGH$ compris sous les moyennes EF , FG . Je dis qu'iceux rectangles AC , EG , sont égaux.

Car puis que les angles droits B & F sont égaux, & que comme AB est à FG , ainsi EF à BC ; les côtes au long des angles égaux B & F , seront reciproques par la 1.



def. 6. & partant par la 14. prop. 6. les parallelogrammes AC & EG seront égaux. Ce qui a été proposé.

Quant à la seconde partie : soient les rectangles AC , EG égaux. Je dis que les quatre lignes AB , FG , EF , BC , sont proportionnelles : c'est-à-dire, que comme AB est à FG , ainsi EF à BC . Car puis que les rectangles sont égaux, & ont les angles B & F aussi égaux, sçavoir droits, ils auront les côtes au long d'iceux angles égaux, reciproques par la 14. prop. 6. sçavoir est, que comme AB est à FG , ainsi EF à BC . Si donc quatre lignes droites sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

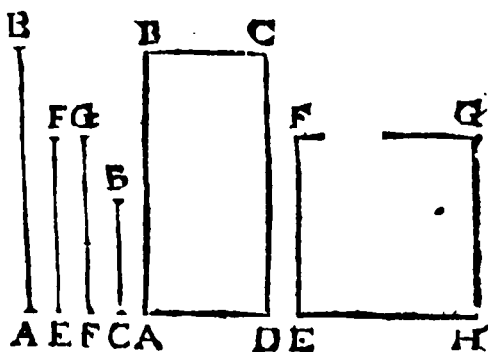
THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droites sont proportionnelles, le rectangle compris des extrêmes, sera égal au quarré de la moyenne : & si le rectangle compris des extrêmes est égal au quarré de la moyenne, les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes droites proportionnelles AB , EF , BC , & soit le rectangle $ABCD$ compris sous les extrêmes AB , BC , & le quarré de la moyenne EF soit $EFGH$. Je dis que le rectangle AC est égal au quarré EG .

Car étant prise FG égale à EF , les quatre lignes AB , EF , FG , BC , seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris sous les moyennes EF , FG , à cause de l'égalité d'icelles. Parquoy par la prec. prop. le rectangle AC compris des deux extrêmes AB , BC , est égal au rectangle des moyennes EF , FG , c'est-à-dire au quarré EG . Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie ; le rectangle AC soit égal au quarré EG : Je dis que comme AB est à EF , ainsi EF à BC . Car puis que les rectangles AC , EG sont égaux, par la 16. prop. 6. comme AB sera à FE , ainsi FG à BC : mais par la 7. prop. 3. comme FG est à BC , ainsi EF , égale à icelle FG , est à la même BC : & partant comme AB est à EF , ainsi EF est à BC . Si donc trois lignes droites sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

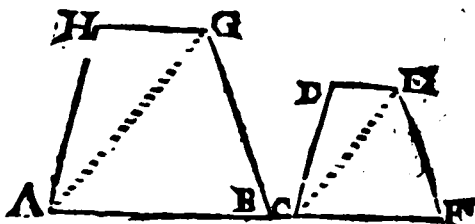
Il est manifeste par la dernière partie de ce Theoreme qu'une ligne droite est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droites, qui comprennent un rectangle esgal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle AB , BC est esgal au quarré de EF , il a été démontré que comme AB à EF , ainsi EF à BC ; & partant EF est moyenne proposition entre AB & BC .

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur une ligne droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable, & semblablement posée à une figure rectiligne donnée.

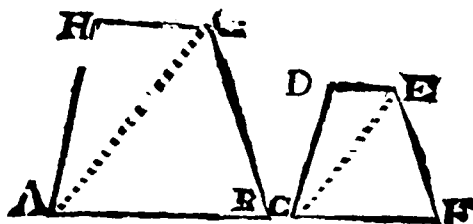
Soit la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut construire une figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée $CDEF$.

De quelque angle que ce soit de la figure donnée soient menées des lignes droites à chacun des angles opposez, afin de diviser icelle figure en triangles; comme



icy de l'angle C ; soit menée à l'angle opposé E , la ligne droite CE , laquelle divise la figure donnée en deux triangles CEF , CDE : en après par la 23. prop. 1. soit décrit sur la ligne AB , & aux points extrêmes A & B , les deux angles BAG & ABG , égaux, sçavoir l'un à l'angle FCE , & l'autre à l'angle CFE . Il est évident par la 32. prop. 1. que le troisième AGB sera égal au troisième CEF , & les triangles CEF , AGB seront équiangles, & auront les côtes au long des angles égaux proportionaux par la 4. prop. 6. Pareillement sur la ligne AG , & aux deux points A & G , soient décrits les deux angles GAH & AGH , égaux aux deux DCE & CED , chacun au sien: aussi par

la 32. prop. 1. le troisiéme H sera égal au troisiéme D, & les triangles CDE & AHG seront équiangles, & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux : ainsi l'angle D étant égal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G : les deux figures CDEF, ABGH, seront équiangles : & pour autant qu'elles sont composées de triangles équiangles, lesquels ont les côtez au long des angles égaux proportionnaux, comme CF



fera à FE, ainsi AB à BG : item comme CF est à CE, ainsi AB à AG ; & comme CE à CD, ainsi AG à AH : & en raison égale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH ; par ainsi les côtez au long des angles égaux F, B, & FCD, BAH, seront proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement décrites. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

S C H O L I E .

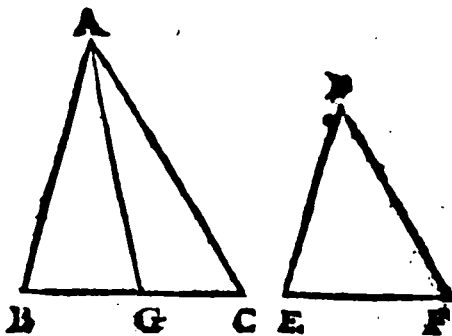
Il est évident par ce que nous avons dit sur la 32. prop. 1. que si la figure donnée avoit plus de quatre côtez, elle seroit divisée en plus de deux triangles : & alors il faudroit pour les deux premiers operer ainsi que dessus, puis après proceder de triangle en triangle jusques à la fin, décrivant toujours sur & aux extrémitéz de la dernière ligne deux angles égaux aux deux de dessus la diagonale correspondante, ainsi qu'il a été fait icy sur AG, homologue & correspondante à la diagonale CE.

T H E O R . 13. P R O P . XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF , ayant les angles B & E égaux ; item C & F ; mais comme AB est à BC ainsi DE à EF , &c. Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtes de même raison AB & DE , ou AC & DF , ou BC & EF , c'est-à-dire que si à deux quelconques de ces côtes de même raison comme par exemple BC & EF , on trouve la troisième proportionnelle BG , le triangle ABC sera au triangle DEF , comme la ligne BC est à la troisième proportionnelle BG : car telle est la raison doublée par la 10. def. 5.

Car étant tirée la ligne AG : d'autant que les triangles ABC , DEF sont semblables, & que comme AB est à BC ainsi DE est à EF , en permutant par la 16. prop. 5. comme AB sera à DE , ainsi BC sera à EF ; mais comme BC est à EF , ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE , ainsi EF sera à BG par la 11. prop. 5. & par ainsi les deux triangles ABG , DEF , auront les côtes au long des angles égaux B & E , reciproques : & par la 15. prop. 6. iceux triangles ABG , DEF , seront égaux entr'eux : & partant comme le trian-



gle ABC sera au triangle DEF , ainsi sera le même triangle ABC au triangle ABG par la 7. prop. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de même hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. prop. 6. Donc comme le triangle ABC est au triangle DEF , ainsi est BC à BG . Mais BC , EF , BG , étant continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublée de BC à EF par la 10. def. 3. donc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublée du côté BC au côté EF . Donc les triangles semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

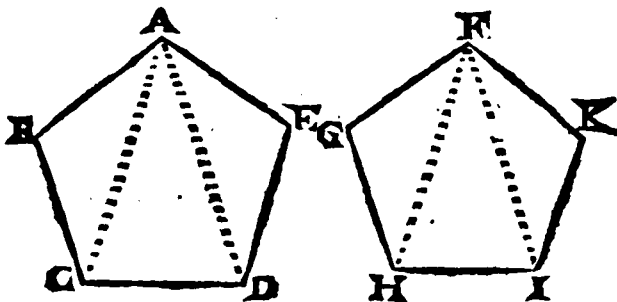
De cecy est manifeste , qu'étans trois lignes droites proportionnelles , comme la premiere sera à la troisieme , ainsi le triangle décrit sur la premiere sera au triangle semblable , & semblablement posé sur la seconde. Car il a été démontré , que comme BC 1. est à BG 3. ainsi le triangle ABC au triangle DEF .

T H E O R. 14. P R O P. XX.

Les polygones semblables peuvent estre divisez en nombre égal de triangles semblables entr'eux , & proportionnaux à leur tout : & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables $ABCDE$, & $F G H I K$, ayans les angles A , F , égaux. Item B , G , &c. Je dis premierement qu'iceux polygones peuvent estre divisez en nombre égal de triangles semblables.

Car après avoir mené les lignes AC , AD , FH , FI , il est évident que l'une des figures est divisée en autant de triangles que

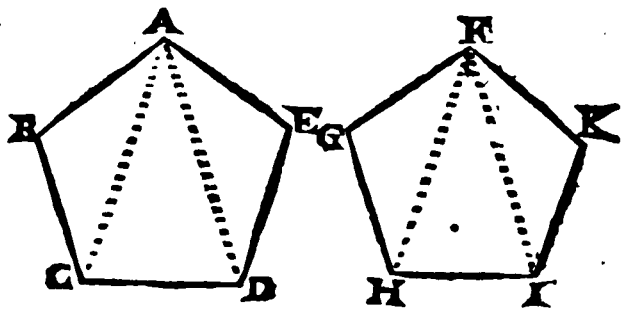


l'autre. Et d'autant que l'angle B est posé égal à l'angle G , & que comme BA est à BC , ainsi GF à GH : par la 6. prop. de ce livre , les triangles ABC & FGH seront équiangles , & par la 4. prop. de ce mesme livre , ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux , & par consequent ils seront semblables : par mesme discours , les triangles AED & FKI , seront aussi semblables.

Pareillement par ce qui a été dit cy dessus AC est à CH comme FH à HG : mais BC est à CD comme GH à HI : car ce sont côtez de figures semblables : donc en raison égale par la 22. prop. 5. AC. sera à CD, comme FH à HI : & d'autant que les angles BCD, GHI sont égaux, & les angles BCA, GHF aussi égaux ; ceux-cy étans ôrez de ceux-là, les rettans ACD, FHI, seront pareillement égaux : & partant par la 6. prop. 6. les triangles ACD, & FHI, seront équiangles, & par consequent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionnaux à leur tout : c'est-à-dire, que chaque triangle de l'un des polygones a telle raison à son triangle correspondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'une des figures sont semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & que par la prop. preced. ils sont l'un à l'autre, en raison doublée de leurs côtez de mesme raison : les triangles ABC & FGH, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH : aussi en la mesme raison doublée se-

ront les triangles ACD, FHI : & le troisième AED étant au troisième FKI en raison doublée de AD à FI,



qui est la même que de AC à FH, étans côtez de triangles semblables : aussi les triangles ACD, FKI, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH : & par la 12. prop. 5. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, sera à son respondant de l'autre.

Je dist tiercement, que le polygone est au polygone en raison doublée des côtez de même raison, comme CD & HI : car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure FGHKI, comme l'un des triangles de

l'une, ſçavoir ACD, eſt à l'un des triangles de l'autre, ſçavoir FHI, leſquels triangles par la prop. prec. ſont en raiſon doublée de CD à HI, par la 11. prop. 5. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des mêmes côtéz CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloir démontrer.

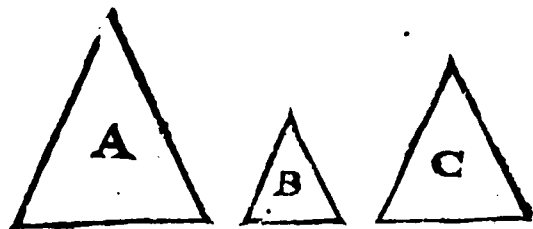
C O R O L L A I R E.

Par cey eſt manifeſte, qu'étans trois lignes droites proportionnelles, comme la premiere ſera à la tierce, ainſi le polygone décrit ſur la premiere ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement décrit ſur la ſeconde; puis qu'il a été démontré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs côtéz de même raiſon, c'eſt-à-dire, comme le côté du premier a une troiſième proportionnelle auſdits côtéz de même raiſon.

T H E O R. 15. P R O P. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à une même figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A ſemblable à la figure rectiligne B, & la figure rectiligne C, auſſi ſemblable à la même B: Je diſ que les figures A & C ſeront ſemblables entr'elles.



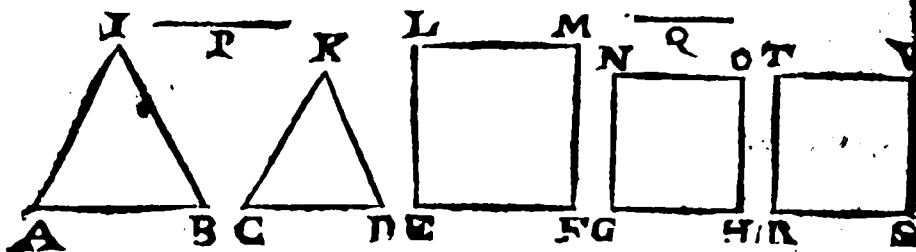
Car d'autant que chacune d'icelles figures A & C eſt ſemblable à B, elle a les angles égaux aux angles de B, & les côtéz d'autour iceux angles égaux proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. ſent. les angles de A, ſeront auſſi égaux aux angles de C; & par la 11.

prop. 5. les côtez au long des angles égaux seront proportionaux : & par la 11. def. 6. A & C seront semblables : donc les figures rectilignes semblables , &c. C qu'il falloit démontrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles ; les figures rectilignes semblables , & semblablement décrites sur icelles , seront aussi proportionnelles : & si icelles figures ainsi décrites sont proportionnelles , icelles lignes droites seront aussi proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, CD, EF, GH : & sur AB, CD, soient constituées deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK semblables , & semblablement décrites : Item sur EF & GH deux autres



quelconques figures rectilignes semblables , & semblablement décrites EFML, GHON. Je dis premièrement que ces quatre figures rectilignes sont proportionnelles , c'est-à-dire , que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi : aux deux lignes AB & CD , soit trouvée P troisième proportionnelle par la 11. prop. 6. & aux deux EF & GH , soit trouvée Q aussi troisième proportionnelle : & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH : Item CD à P comme GH à Q ; en raison égale AB sera à P , comme EF à Q par la 22. prop. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. prop. 6. Item
comme

E L E M E N T.

353

comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. prop. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement décrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont décrites, seront aussi proportionnelles, c'est à sçavoir, que comme AB est à CD, ainsi EF est à GH.

Car ayant trouvé RS quatrième proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. prop. 6. sur icelle RS soit décrit le rectiligne RV semblable, & semblablement posé au rectiligne EM par la 18. prop. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. precedente; & l'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, par ce qui a été démontré cy-dessus, comme le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, ainsi le rectiligne EM sera au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a été posé EM à GO: donc par la 11. prop. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. prop. 5. les rectilignes RV, GO seront égaux: lesquels étans semblables, & semblablement décrits, consistent necessairement (comme nous démontrerons encontinent) sur lignes droites égales RS, GH. Parquoy par la 7. prop. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD: donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

L E M M E.

Or que les rectilignes égaux semblables & semblablement décrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droites égales, on le prouvera ainsi. Si les lignes GH, RS peuvent être inégales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi S à SV: & GH ayant été posée plus grande que RS, par la 14. prop. 5. HO sera aussi plus grande que SV: & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cettuy-là peut être constitué dans celui-là: ce qui est absurde, ayans

Z

été posez égaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.

SCHOLIE.

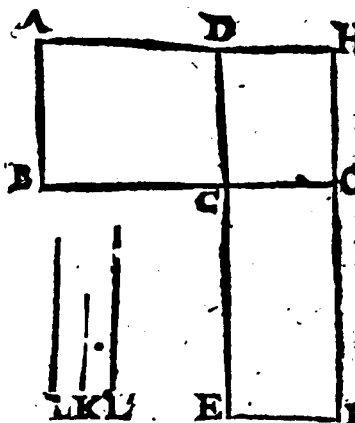
Il est évident, que s'il y a aussi trois lignes droites proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne étant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a été cy-dessus démontré. Vu donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celui décrit sur la troisième; est manifeste ce qui étoit proposé.

THEOR. 17. PRO P. XXIII.

Les parallelogrammes équiangles, sont l'un l'autre en la raison composée de celles de leurs côtez.

Soient deux parallelogrammes équiangles ABCD, CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG égaux : dis que la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF est composée de celles de leurs côtez ; savoir est composée de la raison qui est de BC à CG, de celle qui est de DC à CE.

Car soient disposez les deux parallelogrammes l'un contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne fassent qu'une seule ligne droite, & alors DC & CE feront aussi une ligne droite, puis que les angles BCD, ECG sont égaux, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. Soient prolongez les côtez AD, FG, qui se rencontrant en H, fassent le parallelogramme



me DCGH ; puis soit prise quelconque ligne droite I ; & aux trois BC , CG & I , soit trouvée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC , CE & K , la 4. prop. L. Vû donc que par la 1. prop. 6. comme BC est à CG , ainsi AC à DG ; & comme BC à CG , ainsi aussi I est à K par l'hypothese : pareillement comme AC sera à DG , ainsi sera I à K , par la 11. prop. 5. Mais par même raison DG est à CF , comme K à L , (attendu que comme DG à CF , ainsi DC à CE , par la 1. prop. 6. qui est la même raison que de K à L.) Donc en raison égale , comme AC sera à CF , ainsi I sera à L par la 22. prop. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG , & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce livre. Donc aussi d'icelles raisons est composée la raison du parallélogramme AC au parallélogramme CF. Parquoy les parallélogrammes équiangles sont l'un à l'autre , &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Le mesme sera encore démontré plus brièvement, ainsi qu'il ensuit. Les parallélogrammes AC, CF étans disposez comme auparavant, AC sera à CH, comme BC à CG ; & CH à EG comme DC à EC par la 1. prop. 6. Mais la raison de AC à EG , est composée des raisons entre-moyennes , sçavoir de AC à CH , & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la mesme raison de AC à EG sera aussi composée des raisons de BC à CG , & de DC à CE , qui sont égales à icelles entre-moyennes. Ce qui est proposé.

Or il est facile de colliger des choses cy-dessus dites & démontrées par Euclide en cette 23. prop. comment on compose en lignes , ou en nombres une raison de deux ou de davantage de raisons. Car des raisons de BC à CG , & de DC à CE , a été composée la raison de I à L en lignes : mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut composer une raison de trois autres

proposées ; ayant trouvé celle composée de deux , & celle & de la troisième nous en composerons une autre en la même manière , laquelle sera composée de trois : & ainsi consequemment des autres.

Cette 23. prop. est aussi véritable en nombres comme le démontre Euclide au 8. l. prop. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouver la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raisons de leurs côtez , étans connues en nombres. Comme par exemple , si la raison de BC à CG est la même que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la même que de 3 à 5, nous trouverons la raison d'iceux parallelogrammes ainsi. Ayant posé la première raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la dernière raison) ainsi 2 soit à un autre nombre , qui sera trouvé estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposées , & consequemment en delaisant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composée d'icelles & telle sera la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduitte en nombres entiers sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la même manière que dessus oster une raison d'une autre raison plus grande: comme par exemple , soit la raison de A à B, qu'il faut oster d'une plus grande raison C à D.

A —————
B ————
C —————
E —————
D ————

Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre, sçavoir E, qui soit posée moyenne entre C & D : & la raison de E à D sera la raison re-

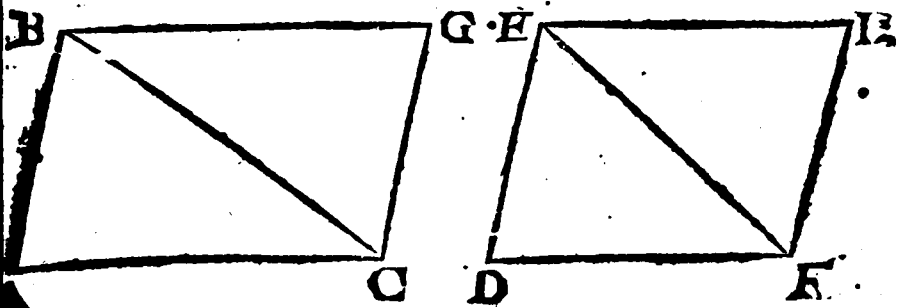
stante de la soustraction requise. Car puisque la raison de C à D est composée de celle de C à E, & de E à D; si on en oste celle-là de C à E, ou de A à B, qui luy est égale; restera la susdite raison de E à D.

Qu'il faille encore oster la raison de 4 à 3, de celle de 6 à 2, soit fait que comme 4 est à 3, ainsi 6 soit à un autre nombre, sçavoir $4\frac{1}{2}$: & la raison de $4\frac{1}{2}$ à 2, sera le reste requis. Car il est évident que la raison de 6 à 2, est composée de celles de 6 à $4\frac{1}{2}$, & de $4\frac{1}{2}$ à 2: & partant en ostant de ces deux raisons celle de 6 à $4\frac{1}{2}$, ou de 4 à 3, qui luy est égale, restera la susdite raison de $4\frac{1}{2}$ à 2, qui est double sesquiquarte.

Commandin démontre en ce lieu les trois Theor. suivans.

1. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont en raison composée des côtez, qui comprennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle B esgal à l'angle E; Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des côtez comprenans les angles esgaux B & E. Car ayant achevé les parallelogrammes AG, DH, ils seront esquiangles: & partant par la 23. prop. 6. la raison d'iceux sera composée de celle de leurs cô-

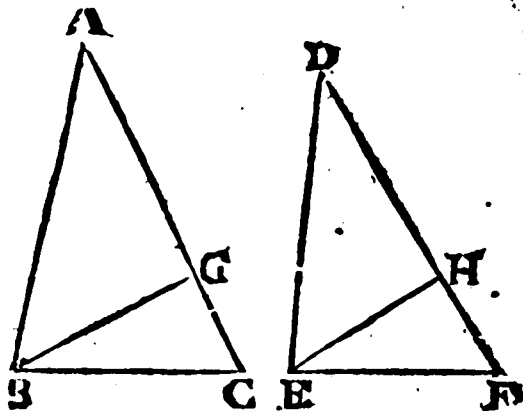


tez: Vu donc que les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitez par la 34. prop. 1. sont en la même raison

qu'iceux par la 15. prop. 5. aussi iceux triangles seront égaux à l'autre en icelle raison composée des côtez.

2. Les triangles qui ont un angle égal à un angle sont l'un à l'autre, en la même raison que les rectangles compris sous les côtez, qui contiennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC , DEF , ayans l'angle A égal à l'angle D : je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC , est au rectangle de DE , DF . Car étans tirées sur AC , DF , les perpendiculaires BG , EH ; les triangles ABG , DEH , seront esquilés, comme appert par le Corol. de la 32. prop. 1. Donc par la 4. prop. 6. comme GB est à BA , ainsi HE à ED . Mais par la 1. prop. 6. comme GB est à BA , ainsi le rectangle de BG , AC , au rectangle de BA , AC , pourvu que posant GB , BA , bases, la hauteur d'iceux rectangles sera une même, savoir AC . Semblablement comme HE à ED ainsi est le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF . Donc par la 11. prop. 5. le rectangle de BG , AC , est au rectangle de AB , AC , comme le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF ; & en permu-



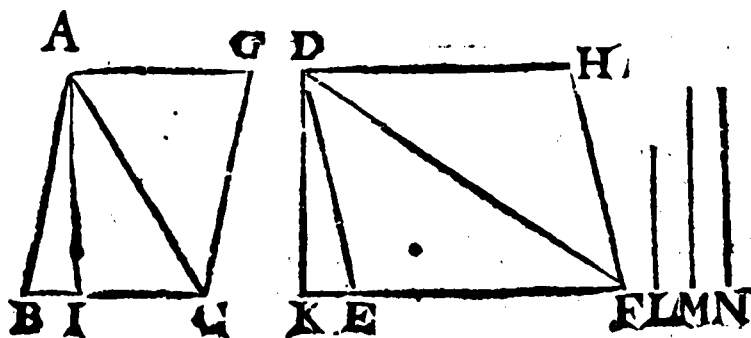
tant le rectangle de BG , AC sera au rectangle de EH , DF , comme le rectangle de AB , AC au rectangle de DE , DF . Mais le rectangle de BG , AC , est au rectangle de EH , DF , ainsi que le triangle ABC au triangle DEF par la 15. prop. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles, par la 41. prop. 1. (Car ils ont mêmes bases qu'iceux AC , DF , & mêmes hauteurs BG , EH : & partant entre mêmes parallèles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC , est au rectangle de DE , DF . Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les parallelogrammes esquiangles sont aussi entr'eux, en la même raison que les rectangles compris sous les côtez des angles esgaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

3. Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composée de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

Soient les triangles ABC , DEF ; & les parallelogrammes BG , EH ; & les hauteurs à iceux soient AI , DK . Je dis que la raison tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, est composée de la raison de la base BC à la base EF , & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK . Car premierement soient les hauteurs esgales, mais les bases, ou aussi esgales ou inegales: & soit fait comme BC à EF , ainsi L à M : & comme AI à DK , ainsi M à N ,

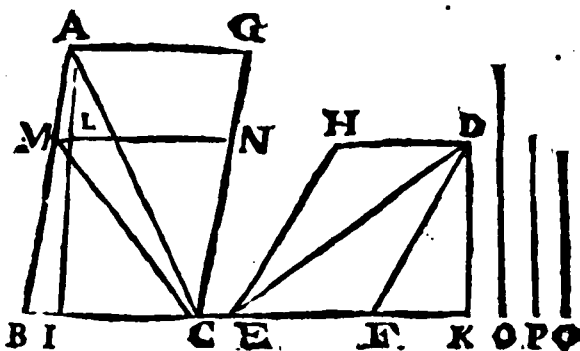


desquelles seront esgales, puis que AI , DK , sont posées esgales: & partant par la 7. prop. 5. L sera à N , comme L à M , c'est-à-dire comme BC à EF . Mais par la 1. prop. 6. comme BC est à EF , ainsi est le triangle ABC au triangle DEF ; & le parallelogramme BG au parallelogramme EH : Donc par la 11. prop. 5. comme L sera à N , ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est composée de la raison de L à M , c'est-à-dire de la raison de BC à EF , & de la raison de M à N , c'est-à-dire de AI à DK : donc la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du

parallélogramme BG au parallélogramme EH, est aussi composée des mêmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inégales, AI la plus grande : mais les bases BC, EF, égales, aussi inégales. Soit fait que comme AI est à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q : puis ayant coupé IL égale à DK, par L, soit tirée MN parallèle à BC, & joint CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC, & le parallélogramme BG au parallélogramme BN, comme la hauteur AI à la hauteur IL & DK qui lui est égale, c'est-à-dire comme O à P, par la

Scholie de la 1. prop. 6. & comme le triangle MBC est au triangle DEF, & le parallélogramme BN au parallélogramme FH, ainsi est la base BC à la base EF, (pource



qu'ils sont de même hauteur) c'est-à-dire ainsi P à Q : en raison égale ABC sera à DEF, & BG à FH comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composée de la raison de O à P & c'est-à-dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est-à-dire de la base BC à la base EF : la raison du triangle ABC au triangle DEF : & du parallélogramme BG au parallélogramme FH, sera composée des mêmes raisons. Ce qui étoit proposé.

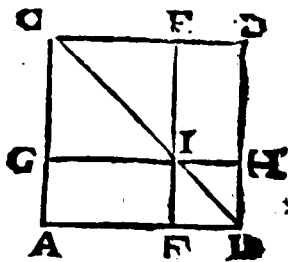
On peut démontrer en la même manière, que le triangle DEF, qui a la moindre hauteur, est au triangle ABC, & le parallélogramme FH au parallélogramme BG en la raison composée de celle de la base EF à la base BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faisant que comme EF à BC ainsi Q à P; & puis comme DK à AI, ainsi P à O; & tout le reste comme dessus. Appart donc ce qui étoit proposé.

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, ayans un angle commun au total, sont semblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme $ABDC$, duquel le diametre est BC , & à l'entour d'iceluy diametre soient les deux parallelogrammes GE & FH , ayans les angles B & C communs avec le total: Je dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH sont semblables entr'eux, & au total $ABDC$.

Car d'autant que les lignes AB & GH sont paralleles, sur lesquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. prop. 1. l'angle externe CIG sera égal à l'interne IBF , & l'externe CGI à l'interne A , auquel est aussi égal l'externe IFB , attendu que BA tombe sur les deux paralleles EF & CA . Parquoy les trois triangles CAB , CGI & IFB ayans chacun deux angles égaux à deux angles, chacun au sien, les troisièmes angles seront aussi égaux, & consequemment iceux triangles seront équiangles entr'eux. Et par même raison les trois autres triangles CDB , CEI & IHB , qui par la 34. pr. 1. sont égaux aux trois precedents seront aussi équiangles entr'eux: Donc les parallelogrammes composez d'iceux triangles, sçavoir AD , GE & FH , seront pareillement équiangles entr'eux. Davantage, puis que le triangle CAB est équiangle au triangle CGI , & le triangle CDB au triangle CEI , par la 4. prop. 6. comme CA sera à AB , ainsi CG à GI : & par ainsi les côtez d'autour les angles égaux A & G , sont proportionaux. Derechef, comme AB est à BC , ainsi GI est à IC , & comme CB est à BD , ainsi CI est à IE . Donc en raison égale, comme AB sera à BD , ainsi GI sera à IE : & partant les côtez d'alentour les angles égaux



ABD, GIE sont proportionnaux. On prouvera en même manière que les côtes d'alentour les autres angles égaux d'iceux parallelogrammes AD & GE sont aussi proportionnaux. Donc par la 1. def. 6. le parallelogramme GE sera semblable au parallelogramme total AD. Et par mêmes raisons, le parallelogramme FH se prouvera aussi semblable au même parallelogramme AD. Donc par la 21. prop. 6. tous les trois parallelogrammes AD, GE & FH seront semblables entr'eux. Parquoy en tous parallelogrammes; les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 7. PROP. XXV.

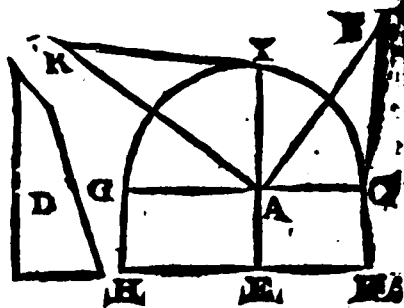
Décrire une figure rectiligne, semblable à une figure rectiligne donnée, & égale à une autre proposée.

Soient deux figures rectilignes ABC & D : il faut faire une autre figure rectiligne égale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne AC (qui est l'un des côtes du rectiligne ABC, auquel on en doit faire un semblable) soit fait le rectangle ACFE égal à ladite figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit le rectangle GE égal à la figure donnée D, le tout par les. 44. & 45.

prop. 1. & après avoir trouvé AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, soit décrite la figure AIK semblable & semblablement posée à la figure ACB, par la 18. prop. 6. Je dis qu'icelle figure AKI sera aussi égale à la figure donnée D.

Car par la construction le rectangle GE est égal au rectiligne D, & le rectangle AF au rectiligne ABC, & par la 1. prop. 6. AF est à GE, comme CA à AG : Mais les deux figures semblables ABC & AKI sont l'une à l'autre

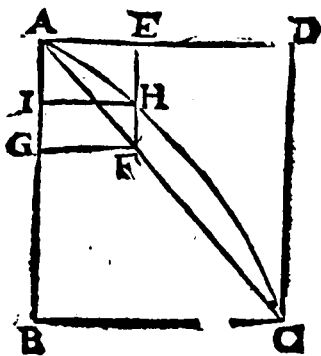


ce en la mesme raison de AC à AG, par le Corol. dela 19. ou 20. prop. 6. attendu qu'icelles figures sont décrites sur les deux premières lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. prop. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. prop. 5. & partant ACB étant égal à AF : aussi IKA sera égal à GE, & par conséquent égal à D : & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable, & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous avons donc décrit une figure rectiligne semblable à une autre donnée, & égale à une proposée. Ce qu'il falloit faire.

T H E O R. 19. P R O P. XXVI.

Si d'un parallelogramme on oste un parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant un angle commun avec le tout ; l'osté sera avec le tout à l'entour d'un mesme diametre.

Du parallelogramme ABCD soit retranché le parallelogramme AEFG semblable & semblablement posé au total BD, & ayant l'angle A commun avec iceluy : Je dis qu'ils sont tous deux constituez à l'entour d'un mesme diametre, c'est-à-dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il passera par F, comme AFC.



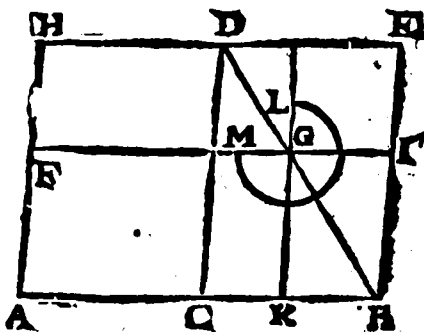
Autrement, soit (s'il est possible) un autre diametre AHC, qui ne passe par l'angle F du parallelogramme retranché EG : ains coupe le côté EF en H, & d'iceluy point soit menée HI parallele à AE, par la 31. prop. 1. donc le parallelogramme IE étant à l'entour d'un mesme diametre avec le total DB sera semblable à iceluy, par la 24. prop. 6. auquel total, GE est aussi semblable par

l'hypothese : & partant par la 21. prop. 6. les paralleles GE & IE seront semblables entr'eux : & par la 1. def. AE sera à EF comme AB à EH : mais AE étant égal à mesme, il faudroit aussi par la 14. prop. 5. que EF 2^e se égale à EH 4^e, c'est à sçavoir le tout à la partie, ce est absurde : donc le parallelogr. total BD, & le retranché GE, étoient constituez à l'entour d'un mesme diamètre : car il adviendra toujors la mesme absurdité, si l'on dit que le diamètre de BD coupe à quelconque autre point, soit le côté EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'un parallelogramme on oster un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon une mesme ligne droite, & defaillans de parallelogrammes semblables & semblablement posez à un autre décrit sur la moitié de la mesme ligne, le plus grand est-celuy-là qui est décrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaut.

Soit la ligne droite AB couppee en deux également en C, & sur cb moitié d'icelle, soit constitué quelconque parallelogramme BCDE, duquel le diamètre est BD ; Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelogramme AD constitué sur la moitié AC, sera appliqué selon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & semblable à iceluy defaut CE. Je dis que de tous les parallelogrammes qui peuvent estre appliquez selon icelle ligne AB, & defaillans d'une figure semblable & semblablement posée à CE, le plus grand est AD,



qui est décrit sur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car étant pris au diametre BD^o quelconque point G, & tirées par iceluy point les lignes droites FGI, KG, paralleles aux lignes droites AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, sont égaux, si on leur adjouste KI commun; aussi CI, KE seront égaux. Mais CI, CF, étans sur bases égales, sont pareillement égaux par la 36. prop. 1. donc aussi CF, KE seront égaux, & leur adjoustant CG commun, le parallelogramme AG sera égal au gnomon LM. Parquoy puis que CE est plus grand qu'iceluy gnomon LM: (car CE, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme DG) aussi AD qui est égal à CE, par la 36. prop. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du même parallelogramme DG. Et en la même maniere sera démontré que AD est plus grand que tous autres parallelogrammes, qui seront appliquez selon la même ligne droite AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables & semblablement posées à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez selon une même ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 8. PROP. XXVIII.

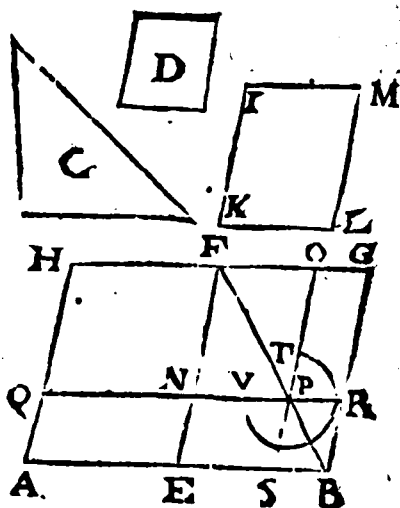
A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & defaillant d'un parallelogramme semblable à un autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnée ne soit plus grande que le parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal à la figure rectiligne

donnée C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppe AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EF, GB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. prop. 6. & soit accomply le parallelogramme AHGB.

Maintenant, si AF est égal à C, on a ce que l'on demande: car il est appliqué selon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui est fait semblable à D. Mais si C est plus petit que AF, (car par l'hypothese il ne peut être plus grand) il sera aussi plus petit que EG égal à iceluy AF: soit donc trouvé l'excez de EG par dessus C, (cette égalité ou inégalité, & excez sera connu par ce que nous avons dit à la



45. prop. 1.) lequel excez par la 25. prop. 6. soit reduit en parallelogramme IKLM, semblable & semblablement posé à EG: & vû que EG est plus grand que KM, il est évident que les côtez EF, FG, seront aussi plus grands que les côtez homologues KI, IM: parquoy d'iceux EF, FG soient coupeez FN, FO, égaux à iceux KI, IM, afin qu'étant accomply le parallelogramme NFOP, il soit égal à KM, & semblable & semblablement posé au même KM; & partant aussi à EG: & par conséquent qu'étant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, soient autour d'iceluy diametre par la 26. prop. 6. & après avoir continué de part & d'autre les côtez NP, OP, tant qu'il sera de besoin, sera constitué le parallelogramme AP, lequel je dis être le parallelogramme demandé.

Car il est appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. prop. 6. est semblable à EG, partant aussi à D. Item puis que IL est

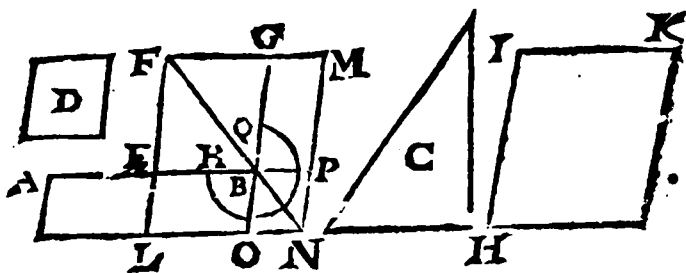
l'excez par lequel EG excède C, & qu'à iceluy excez est égal NO : Il est évident que le gnomon TV sera égal à la figure C. Mais il est aussi égal à AP, comme il a été prouvé à la précédente : donc aussi AP sera égal à C : Mais il est appliqué à la ligne donnée AB, & de faillant du parallelogramme SR semblable au donné D. Nous avons donc à une ligne droite donnée appliqué un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. XXIX.

À une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, excédant d'un parallelogramme semblable à un autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal au rectiligne donné C, mais excédant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB soit coupée en deux également au point E, & sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGB semblable, & semblablement posé à D par la 18. prop. 6. En après, soit décrit le parallelogramme HK égal aux deux figures C & EG, & semblable, & semblablement posé à EG par la 25. prop. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI sera à IK, ainsi EF sera à FG ; &



par consequent HK étant plus grand que EG, aussi les côtez HI, IK seront plus grands que les côtez EF, FG : étans donc prolongez les côtez FE, FG, tellement que

FL, FM, soient égales aux lignes IH, IK, & ache-
 le parallelogramme LFMN, il sera semblable, & se-
 blablement posé à EG. Parquoy par la 26. prop. 6.
 parallelogrammes LM, & EG seront constituez à l'en-
 tour d'un même diamètre, lequel soit FN. Maintena-
 étant prolongez AB & GB jusques en P & O; & ache-
 le parallelogramme LA : le parallelogramme AN se-
 appliqué à la ligne AB, l'excédant du parallelogramme
 OP, qui est semblable à EG par la 24. prop. 6. & pa-
 rant à D. Mais je dis aussi qu'iceluy parallelogramme
 AN est égal au rectiligne C; car puisque par la 30.
 prop. 1. AL, EO sont égaux, & par la 43. prop. 1.
 EO est égal au complement BM, aussi AL sera égal à
 iceluy BM : leur adjoûtant donc LP commun; le pa-
 rallelogramme AN sera égal au gnomon QR, lequel est
 égal au rectiligne C : (car puisque HK, c'est-à-dire
 LM, est égal aux rectilignes C & EG ensemble : si on
 ôte EG commun, resteront égaux le gnomon QR, &
 le rectiligne C.) Donc aussi le parallelogramme AN
 sera égal au rectiligne C. A la ligne droite AB, nous
 avons donc appliqué le parallelogramme AN égal au
 rectiligne C, excédant du parallelogramme OP, qui
 est semblable à un autre donné D : Ce qu'il falloit
 faire.

P R O B L. 10. P R O P. XXX.

Couper une ligne droite donnée & terminée,
 selon la moyenne & extrême raison.

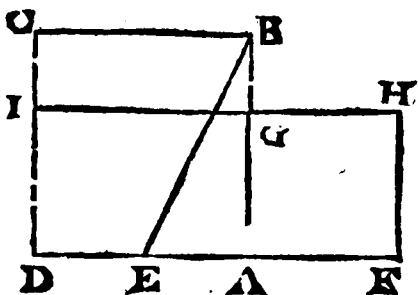
Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut coup-
 per selon la moyenne & extrême raison.

Ayant décrit sur icelle ligne AB, le quarré AC, au
 côté DA soit appliqué par la 29. prop. 6. le rectangle
 DH égal à iceluy quarré AC, excédant du parallelo-
 gramme AH, semblable à iceluy AC; & la ligne AB
 sera coupée en G, selon la moyenne & extrême raison.

Car premierement l'excez AH sera quarré, puis qu'il
 est semblable au quarré AC; & d'autant que DH est
 fait égal à AC, si d'iceux on ôte le parallelogramme
 commun AI, resteront égaux les parallelogrammes CG
 & AH,

et AH, lesquels ont aussi les angles au point G égaux. Donc par la 14. prop. 6. les côtes d'alentour iceux angles seront reciproques; tellement que comme IG est à GH, ainsi AG est à GB.

Mais par la 34. prop. 1. IG est égale à BC, c'est à dire à AB; & GH à AG: Donc comme AB sera à AG, ainsi AG sera à GB. Et puisque AB est plus grande que AG 3. par la 14. prop. 5. AG 2. est aussi plus grande que GB 4. Veu donc



que la toute AB est au plus grand segment AG, comme iceluy plus grand segment AG est au plus petit GB; icelle AB est coupée en G, selon la moyenne & extrême raison, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB soit coupée en G, par la 11. prop. 2. en sorte que le carré de la partie AG soit égal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. Je dis que AB sera coupée selon la moyenne & extrême raison au point G.

Car puis que le carré de AG est égal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, seront continuellement proportionnelles, par la 17. prop. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme iceluy segment AG est au plus petit segment GB; & par la 3. def. 6. AB est coupée en G, selon la moyenne & extrême raison. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 21. PROP. XXXI.

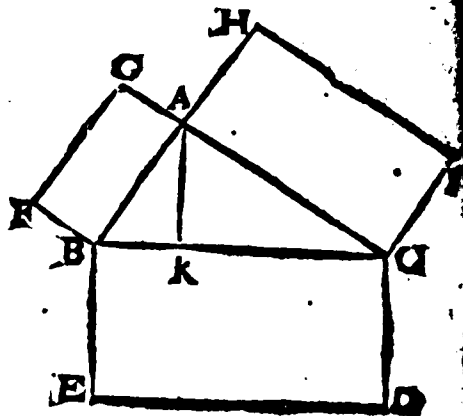
Aux triangles rectangles, la figure décrite sur le côté qui soutient l'angle droit, est égale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement décrites sur les deux autres côtes.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droit, & sur le côté BC, qui soutient iceluy angle,

soit décrite quelconque figure rectiligne BD , & les deux autres côtes AB , AC , soient constituées deux figures AF , AI semblables, & semblablement posées à BD : Je dis qu'icelle figure BD est égale aux deux autres AF , AI .

Car si du point A , on mène sur BC la perpendiculaire AK , par la 8. prop. 6. elle fera deux triangles semblables entr'eux, & au total ; & par ainsi les trois triangles BAK , ABC ,

CAK , seront semblables entr'eux, & par la 19. prop. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des côtes de même raison AB , BC , CA . Mais par la 20. prop. 6. les trois figures AF , BD & AI , étans semblables, & semblablement posées,



elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs côtes de même raison AB , BC , CA , qui sont les mêmes côtes des triangles : donc par la 11. prop. 5. les rectilignes AF , BD , AI , seront entr'eux, comme les triangles BAK , BAC , CAK entr'eux, c'est-à-dire que comme le triangle BAK est au triangle ABC , ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD , & comme le triangle CAK est au triangle ABC , ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD : Donc par la 24. prop. 5. comme le composé des triangles BAK , CAK , 1. & 5. grandeurs sera au triangle ABC , 2. grandeur, ainsi le composé des rectilignes AF , AI , 3. & 6. grandeurs, sera au rectiligne BD , 4. grandeur : mais le triangle BAC , est égal aux deux autres BAK , CAK : donc la figure BD sera aussi égale aux deux autres AF , AI . Parquoy au triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Autrement. D'autant que par la 20. prop. 6. les figures semblables sont en raison doublée de leurs côtés homologues, comme le carré de AB 1. grandeur, et

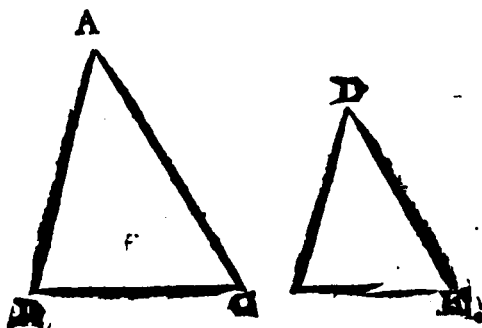
quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AF 3. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur : Mais aussi comme le quarré de AC 5. grandeur, est au quarré de BC 6. grandeur, ainsi la figure AI 6. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. prop. 5. le composé de la 1. & 5. grandeur, sçavoir le quarré de AB & celui de AC, sera à la 2. grandeur BC, comme le composé de la 3. & 6. grandeur, sçavoir la figure AF & la figure AI, sera à la 4. grandeur BD. Mais par la 7. prop. 1. les deux quarrés de AB, AC, sont égaux au seul quarré de BC : donc aussi les deux figures AF, AI ensemble, seront égales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux côtez proportionaux à deux côtez, sont disposez selon un angle, tellement que les côtez de même raison soient parallèles ; les deux autres côtez se rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les côtez BA & AC proportionaux aux côtez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle ACD, & que BA soit parallèle à CD, & AC à DE : Je dis que les deux autres côtez BC & CE se rencontreront directement.

Car puisque BA & CD sont parallèles, l'angle ACD sera égal à son alterne A, par la 29. pro. 1. aussi AC étant parallèle à DE, l'angle D sera égal à son alterne C : parquoy l'angle D sera égal à l'angle A. Mais par l'hypothese les côtez qui constituent iceux angles égaux,

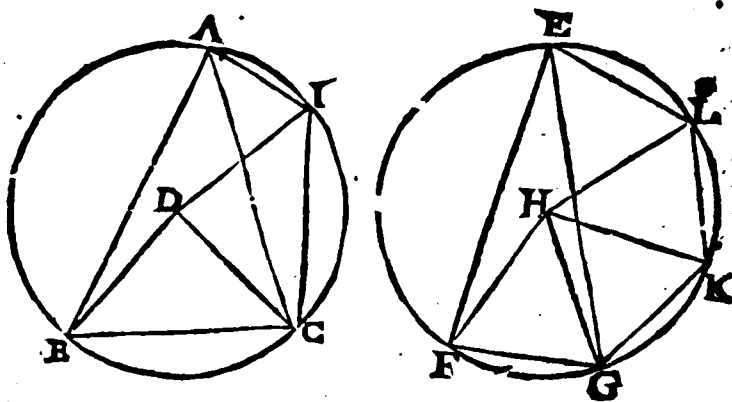


sont proportionnaux : donc par la 6. prop. 6. les deux angles ABC , DCE , seront équiangles, & auront les angles B & DCE égaux : leur adjoustant donc les égaux & ACD , les deux B & A ensemble, seront égaux, deux DCE , & ACD ensemble ; c'est à dire au seul angle ACE : parquoy adjoustant derechef à ces angles égaux commun ACB , les deux angles ACE , ACB , seront égaux aux trois angles du triangle BAC , c'est à dire deux droits par la 32. prop. 1. & par la 14. prop. 1. deux lignes BC & CE se rencontreront directement, donc deux triangles ayans deux côtez proportionnaux deux côtez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, sont entr'eux comme les circonferences qui les soustiennent. Et les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.

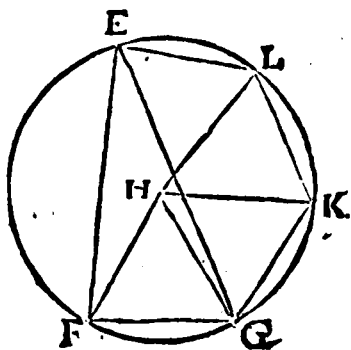
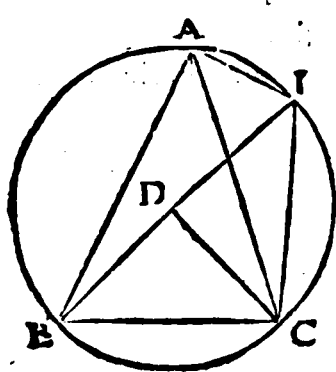
Soient deux cercles égaux ABC & EFG , desquels centres sont D & H ; & soient les deux angles BDC & FHG aux centres ; mais les deux BAC , FEG , aux circonferences.



Je dis premierement, que comme la circonference BC est à la circonference FG , ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG , & l'angle BAC à l'angle FEG .

Car ayant mené les deux lignes droites BC, FG, soient commodées aux cercles des lignes droites, ſçavoir CI égale à BC ; & GK, KL chacune égale à FG : puis ſoient menées les lignes ID, KH & LH. Veut donc que les deux lignes droites BC & CI ſont égales, les arcs BC & CI ſont auffi égaux par la 28. prop. 3. & partant les angles BDC & CDI, ſeront égaux par la 27. prop. 3. Pour mêmes raisons, tant les trois arcs FG, GK, & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL ſont égaux entr'eux : donc l'arc FGKL eſt autant multiplié de l'arc FG, comme l'angle FHL eſt multiplié de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplié de l'arc BC, comme l'angle BDI, eſt multiplié de l'angle BDC, puis que les angles BDI, FHL ſont diviſez chacun en autant de parties égales, que les arcs BCI, FGKL, ſur leſquels ils ſ'appuient : partant l'arc BCI eſt égal à l'arc FGKL, l'angle BDI ſera égal à l'angle FHL par la 27. prop. 3. ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit : donc puis que BCI, BDI, ſont équemultipliés de BC, BDC, première & troiſième grandeur ; & FGKL, FHL équemultipliés de FG, FHG 2^e & 4^e grandeur ; par la 6. def. 5. comme l'arc BC eſt à l'arc FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. prop. 5. l'angle BDC eſt à l'angle FHG, comme l'angle BAC eſt à l'angle FEG,



(car ceux-là ſont doubles de ceux-cy par la 20. prop. 3.) il eſt évident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC eſt auffi à l'angle FEG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG.

Ce qu'on peut encore démontrer par les mesmes raisons & argumens employez pour les angles du centre ; si on tire les lignes droites IA , KL , LE , &c.

Secondement, Je dis que le secteur BDC est au secteur FHG , comme l'arc BC est à l'arc FG : Car (demonstré par la mesme construction que dessus) il est manifeste que les cordes BC & CI étant égales, & leurs arcs BC & CI égaux, les angles BAC , & CAI seront pareille-
 égaux par la 27. prop. 3. & conséquemment que les segments sur lesquels ils insistent & s'appuient, sont égaux & égaux entr'eux. Mais les deux triangles BAC & CAI , sont aussi égaux par la 4. prop. 2. leur adjonction donc les deux segments égaux, les deux secteurs BAC & CAI seront égaux : Parquoy l'arc BCI sera autant multiple de l'arc BC , que le secteur BDI le sera du secteur BDC : & par mesme discours, l'arc $FGKL$ sera autant multiple de l'arc FG , que le secteur FHL l'est du secteur FHG . Partant si l'arc BCI est égal à l'arc $FGKL$, aussi le secteur BDI sera égal au secteur FHL ; & si plus grand, plus grand ; & si plus petit, plus petit. Donc les deux arcs BC , FG , avec les deux secteurs BDC & FHG , sont quatre grandeurs, de la 1^e & 3^e desquelles les arcs BCI , BDI , sont equemultiples, mais de la 2^e & 4^e sont aussi equemultiples $FGKL$, FHL . Et puis que nous avons prouvé que si l'arc BCI est égal à l'arc $FGKL$, aussi le secteur BDI est égal au secteur FHL ; & si plus grand, plus grand ; & si moindre, moindre : par la 6. de la 5. comme l'arc BC sera à l'arc FG , ainsi le secteur BDC sera au secteur FHG . Parquoy aux cercles égaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonférences &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

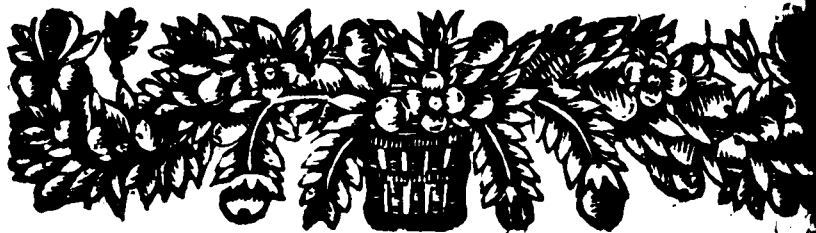
De cecy il s'ensuit que comme le secteur est au secteur, ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre raison est la même que de l'arc à l'arc ; & partant par la 11. prop. 5. ils seront aussi entr'eux en la même raison.

Il est aussi évident que comme un angle au centre, est à quatre angles droits, ainsi est l'arc sous-tendant iceluy angle à toute la circonférence : & au contraire, que comme quatre

angles droits sont à un angle au centre , ainsi toute la circonférence est à l'arc sous-tendant iceluy angle.

Car comme l'angle au centre est à l'angle droit au centre, ainsi l'arc qui sous-tient iceluy angle, est au quadrant qui sous-tient l'angle droit par la 33. prop. 6. Parquoy comme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit , c'est à sçavoir à quatre angles droits , ainsi l'arc sous-tendant iceluy angle, sera au quadruple du quadrant , c'est-à-dire à toute la circonférence , par les choses démontrées à la fin du Scholie de la 22. prop. 5. Puis après , d'autant qu'un angle au centre est à quatre angles droits , comme l'arc qui sous-tient iceluy angle , est à toute la circonférence ; aussi en permutant , comme quatre angles droits seront à un angle au centre , ainsi toute la circonférence sera à l'arc sous-tendant l'angle au centre : Ce qui a été proposé.

Fin du sixième Element.



ELEMENT

SEPTIEME.

DEFINITIONS.

L'UNITÉ, est selon laquelle une
chacune des choses qui sont , est
appelée une.

Euclide ayant traité és 6. livres precedents de la premiere partie de Geometrie , sçavoir est de celle-là qui considere les plans , au paravant que venir à l'autre partie , laquelle traite des solides , il explique en ce septième livre & és deux suivans , les proprietéz & affections des nombres, pour puis après traiter au 10. livre des lignes commensurables & incommensurables , necessaires pour avoir entiere & parfaite connoissance des proprietéz des solides. Euclide commençant donc selon sa coûtume par les principes , il définit premierement que c'est que l'unité , & dit que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme une : & selon cette unité nous avons de coûtume de dire une pierre , un animal , un corps , &c. Mais

est à noter que tout ainsi qu'en la Geometrie le point n'a aucune partie étant indivisible, aussi les nombres l'unité ne reçoit aucune division, mais est indivisible selon nôtre auteur, lequel n'a égard en ces Elemens-cy qu'aux nombres entiers : mais nous y joindrons aussi quelque chose des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les regles enseignées en nôtre Arithmetique pratique, ne sont moins veritables & certaines, que si elles étoient restraintes seulement aux nombres entiers dont traite icy Euclide.

2. Nombre, est une multitude composée de plusieurs unitez.

C'est-à-dire qu'étans assemblées plusieurs unitez ensemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre : dont s'ensuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'unitez qui le constituent : de sorte que l'unité est la partie de chaque nombre dénommée par le même nombre duquel elle est partie : comme le nombre 4 composé de quatre unitez, se divise en autant de parties, sçavoir est en quatre unitez, chacune desquelles est dite quatrième partie du nombre 4. Ainsi aussi le nombre 20 composé de vingt unitez se divise en autant de parties, chacune desquelles est dite vingtième partie d'iceluy nombre 20, &c. D'où résulte que tous les nombres sont commensurables entr'eux, puis qu'ils sont tous mesurez par une même & commune mesure, sçavoir par l'unité, comme il est dit : ce qui ne peut pas convenir à toutes les grandeurs, puis que plusieurs

d'icelles n'ont point de commune mesure, mais sont incommensurables, comme il sera démontré au 10. livre.

3. Un nombre est partie d'un autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit mesure le plus grand.

C'est-à-dire, que lors qu'un nombre en mesure un plus grand, sans qu'il reste rien, il est dit partie d'iceluy : comme 4 est dit partie de 12, d'autant qu'iceluy nombre 12 est divisé exactement par 4 sans qu'il reste rien : semblablement chacun de ces nombres 2, 3, 6 et 9, est partie du nombre 18, puis que chacun le mesure ou divise exactement. Or toute partie, comme nous avons dit à la 1. def. 5. est appelée aliquote, & prend son nom du nombre par lequel elle en mesure un autre ; tellement que 2 est dit partie aliquote de 4 ; & se nomme $\frac{1}{2}$; pource que 2 mesure 4 par 2 : et cinq est dit partie aliquote de 15, c'est à sçavoir $\frac{1}{3}$, pource que 5 mesure 15 par 3 & ainsi 4 qui mesure 28 par 7, est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Mais un nombre est dit parties d'un autre plus grand, lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est-à-dire, que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dit partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 est dit parties de 9 : car il ne le mesure pas précisément, mais

est deux parties d'iceluy, sçavoir est $\frac{2}{3}$: ainsi 12 est parties de 16, sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui mesure l'un & l'autre nombre, est 3 fois en 12, & 4 fois en 16 : aussi 15 est parties de 24, sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui est commune mesure, est 5 fois en 15, & 8 fois en 24. Semblablement 5 est parties de 7, sçavoir est $\frac{5}{7}$: & 4 est parties de 9, sçavoir est $\frac{4}{9}$, &c.

5. Mais un grand nombre est dit multiple d'un petit, lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dit partie d'un plus grand, ains seulement de celuy-là qu'il mesure précisément ; ainsi aussi tout grand nombre n'est pas dit multiple, ou le plusieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais seulement de ceux là qui le peuvent précisément mesurer : tellement que de deux nombres inégaux, si le petit mesure précisément le grand, ce moindre est dit partie du grand, mais celuy-cy est aussi dit multiple de celuy-là ; Ainsi 4 est bien dit parties de 12, mais aussi iceluy 12 est dit multiple de 4. Pareillement 30 est dit multiple tant de 5 que de 6, qui sont parties d'iceluy, puis que l'un & l'autre le mesure.

6. Nombre pair, est celuy qui peut être divisé en deux également.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, sont appellez nombres pairs, pource que chacun

d'iceux peut être divisé en deux également, c'est-à-dire en deux parties égales; car leurs moitiés sont 1, 2, 4, 10, 25. &c.

■ Mais l'impair, est celui qui ne peut être divisé en deux également: ou bien celui qui est différent du nombre pair de l'unité.

Comme tous ces nombres-cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, sont nommez impairs, pource qu'ils ne peuvent être divisez en deux également: Ou bien d'autant qu'ils sont differens de l'unité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50, &c.

8. Nombre parement pair, est celui qu'un nombre pair mesure par un nombre pair.

C'est-à-dire, que si un nombre pair en mesure un autre par un nombre qui soit aussi pair, le nombre mesuré sera dit parement pair: comme 32, lequel 8 mesure par 4, est dit nombre parement pair: Semblablement 24 sera dit nombre parement pair, pource que 6 nombre pair le mesure par 4 nombre pair, &c.

9. Et parement impair, est celui qu'un nombre impair mesure par un nombre pair.

C'est-à-dire, que si un nombre pair en mesure un autre par un nombre impair, le mesuré sera dit parement impair: comme 42 est dit nombre

pairement impair , pource que 6 , nombre pair le mesure par 7 , nombre impair. Semblablement 24 sera dit nombre pairement impair , d'autant que 3 , nombre impair le mesure par 8 , nombre pair. Et est à noter , qu'il y a plusieurs nombres qui sont pairement pair , & pairement impair , comme 12 , 24 , 48 , 96. &c. Et que ce soit l'intention d'Euclide , les 32 , 33 , & 34. prop. 9. le montrent assez.

10. Mais nombre impairement impair , est celuy qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15 , lequel est mesuré de 5 , par 3 , est dit nombre impairement impair : & tels sont aussi les nombres suivans , 9 , 21 , 25 , 27 , 33 , 35 , &c.

11. Nombre premier , est celuy qui est mesuré par la seule unité.

C'est-à-dire , que si un nombre n'est mesuré par aucun autre nombre , mais seulement par soy même , & l'unité , il est nombre premier , & tels sont tous ceux-cy 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , &c. Car chacun d'iceux n'est mesuré par aucun autre nombre , mais par la seule unité.

12. Nombres premiers entr'eux , sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire , que si deux ou davantage de

nombre n'ont autre commune mesure que l'unité : ils seront dits premiers entr'eux, jaçoit que chacun d'iceux puisse être mesuré par quelque nombre outre l'unité. Comme ces deux nombres 15 & 8, sont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y a que l'unité qui les puisse mesurer tous deux : car encore que le premier soit mesuré par 5 & 3, & le dernier par 4 & 2, si est-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut mesurer l'un & l'autre des proposez, ains la seule unité est leur commune mesure.

13. Nombre composé, est celuy qui est mesuré par quelque autre nombre.

Comme 15 est appellé nombre composé, pource qu'il est mesuré par 5 & 3 : Aussi 27 est nombre composé, d'autant qu'il est mesuré par 9 & 3, &c.

14. Mais les nombres composez entr'eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire, que si deux ou davantage de nombres sont mesurez par quelque nombre outre l'unité, comme par leur commune mesure, ils seront dits nombres composez entr'eux : ainsi les nombres 9 & 15 sont composez entr'eux, d'autant que 3 mesure l'un & l'autre d'iceux, comme leur commune mesure. Aussi 7, 21, & 28, sont composez entr'eux, pource que le premier d'iceux mesure soy-même, & les deux autres.

15. Un nombre est dit multiplier un nombre, lors qu'il en est procréé un autre, qui est autant de fois composé de celuy qui est multiplié qu'il y a d'unités au multipliant.

Comme 4 sera dit multiplier 6, si iceluy nombre 6 est pris ou composé quatre fois, c'est à sçavoir autant de fois qu'il y a d'unités au multipliant 4; & le nombre procréé, qu'on appelle vulgairement produit, sera 24. Aussi le nombre 6 sera dit multiplier le nombre 4, si nous prenons iceluy nombre 4, six fois; c'est à sçavoir autant de fois qu'il y a d'unités en 6 nombre multipliant; & en sera procréé le même nombre 24. Ainsi un nombre sera dit être procréé ou produit de deux nombres, quand il sera produit en multipliant l'un d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre 36 sera dit être le produit de ces deux nombres 4 & 9, pource qu'il est procréé en multipliant le nombre 4 par le nombre 9, ou au contraire le nombre 9 par le nombre 4.

Or de ce que dessus il s'ensuit que le nombre produit de la multiplication d'un nombre par un autre, a même raison auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'unité. Car puis que selon la def. d'Euclide, pour avoir le produit de deux nombres il faut prendre autant de fois l'un d'iceux, qu'il y a d'unités en l'autre, iceluy produit contiendra autant de fois l'un ou l'autre des nombres multipliers qu'il y a d'unités en l'autre: & partant il y aura même raison du nombre pro-

duit à l'un ou l'autre des multipliers, que de l'autre multiplicateur à l'unité : parquoy la multiplication d'un nombre en un autre peut être définie ainsi.

La multiplication d'un nombre par un autre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison auquel on voudra des nombres multipliers, que l'autre à l'unité.

Ainsi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, est produit le nombre 35, lequel est à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A cette définition Clavius adjointe la suivante.

Un nombre est dit diviser un nombre, quand on en prend un autre, qui contient autant d'unités que le nombre divisant est contenu de fois au nombre divisé.

Comme le nombre 6 sera dit diviser le nombre 24, si on prend le nombre 4; qui montre par ses quatre unités, que le nombre 6 est contenu 4 fois au nombre divisé 24. Aussi le nombre 4 sera dit diviser le même nombre 24, si on prend le nombre 6, lequel dénote par ses six unités, que le nombre divisant est contenu six fois au divisé 24.

De cecy il advient que le nombre provenant de la division, lequel on appelle vulgairement quotient, a même raison à l'unité, que le nombre divisé au diviseur. Car puis que, comme nous avons dit en la def. le quotient doit montrer & indiquer par ses unités, combien de fois le nombre diviseur est contenu au divisé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'unité, que le nombre divisé

se contient le diviseur; & partant il y aura même raison du quotient à l'unité, que du nombre divisé au diviseur. Parquoy la division d'un nombre par un autre se peut aussi définir ainsi.

La division d'un nombre par un nombre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'unité, que le nombre divisé au divisant.

Ainsi appert que de la division du nombre 24 par six, est provenu le nombre 4, lequel est à 1, comme 24 à 6. Item de la division du même nombre 24, par 4, est produit le nombre 6, qui est à 1, comme 24 à 4.

De cecy il advient qu'étant divisé un nombre par un nombre, le nombre divisé sera procréé de la multiplication du nombre trouvé, c'est-à-dire du quotient, par le nombre diviseur. Car ayant divisé le nombre A par B , le quotient soit C . Je dis que le nombre A sera produit de la multiplication du nombre C par le

nombre B . D'autant que par A . B . C . D .
 def. de la multiplication le 48. 8. 6. 1.
 nombre procréé de C multiplié

par B , est à B , comme C à l'unité D ; & que par la def. de la division A est aussi à B , comme C à l'unité D ; il est manifeste que le nombre procréé par la multiplication de C en B est le nombre A , vu que tant iceluy nombre procréé, que le divisé A , a même raison à D , que C à l'unité D .

Or ce que nous avons dit cy-dessus touchant la multiplication & division des nombres entiers, convient aussi aux nombres rompus; tellement que le nombre $\frac{1}{2}$ sera dit multiplier le nombre 20,

si le nombre 20 est pris autant de fois qu'il y a d'unités en $\frac{1}{2}$, & sera procréé le nombre 10 : d'autant que l'unité est seulement par sa moitié en $\frac{1}{2}$, il faut aussi prendre le nombre 20 par moitié, qui est 10. Semblablement le nombre 20 sera dit multiplier $\frac{1}{2}$, si $\frac{1}{2}$ est pris vingt fois, à sçavoir autant de fois que l'unité est en 20 ; le produit sera le même nombre 10. Item, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ seront dits s'entremultiplier ; si on prend la troisième partie de $\frac{1}{2}$, tout ainsi que $\frac{1}{3}$ contient seulement la troisième partie de l'unité : ou bien on prend la moitié de $\frac{1}{3}$, parce que $\frac{1}{3}$ contient seulement la moitié de l'unité : & par ainsi le produit sera $\frac{1}{6}$; car c'est la troisième partie du nombre $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{2}{6}$, & la moitié du nombre $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{6}$.

Mais le nombre $\frac{1}{2}$ sera dit diviser le nombre 10, si on prend le nombre 20, qui montre que le nombre divisant $\frac{1}{2}$ est contenu vingt fois au nombre divisé 10 ; tellement qu'il y ait la même raison du nombre procréé 20 à 1, que du nombre divisé 10 au divisant $\frac{1}{2}$. Ainsi aussi $\frac{1}{2}$ sera dit diviser $\frac{1}{6}$ si on prend le nombre $\frac{1}{3}$, lequel montre que le nombre divisant $\frac{1}{2}$, n'est pas tout contenu au divisé $\frac{1}{6}$, ains seulement la troisième partie d'iceluy : car puis que le nombre $\frac{1}{2}$ est le même que $\frac{3}{6}$, il est évident que la troisième partie d'iceluy, c'est à sçavoir $\frac{1}{6}$, est contenu en $\frac{1}{6}$. Or comme il faut faire & pratiquer non seulement la multiplication & division en nombres rompus, mais aussi toutes les autres règles & opérations d'Arithmétique, nous l'avons enseigné en notre Pratique d'Arithmétique, & à la fin de ce 7. livre d'Euclide nous en ferons les démonstrations.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appelé plan; & les nombres multipliers sont dits côtez d'iceluy plan.

C'est-à-dire que tout nombre produit de la mutuelle multiplication de deux nombres est appelé nombre plan: d'autant que chaque unité de l'un d'iceux nombres étant posée & étendue d'ordre autant de fois qu'il y a d'unité en l'autre nombre, est représenté un parallelogramme rectangle, duquel les côtez sont les deux nombres se multipliers, comme il a été dit au 2. livre. Ainsi le nombre 20 produit de 5 par 4 est dit nombre plan, & iceux nombres 5 & 4 sont dits côtez d'iceluy plan.

17. Mais quand trois nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appelé solide, & les multipliers sont dits côtez d'iceluy.

Comme si on multiplie 6 par 5, & leur produit 30 par 4, sera procréé le nombre 120; lequel s'appellera nombre solide, & les trois nombres multipliers 6, 5 & 4, seront dits côtez d'iceluy solide.

18. Nombre quarré, est celuy qui est également égal: ou bien c'est le produit de deux nombres égaux.

Comme le nombre plan 16 est appelé quarré, parce qu'il est procréé de la multiplication de 4

par 4, & conséquemment égal de tous côtez. Ain-
aussi 49, produit de la multiplication de 7 par 7
sera appellé nombre quarré.

19. Nombre cube, est celuy qui est égale-
ment égal également : ou bien c'est le pro-
duit de trois nombres égaux.

Comme si le nombre 4 est multiplié par 4, & puis
leur produit 16 encore par 4, sera procréé le nombre
64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres sont proportionnaux
quand le premier est autant multiple, ou
mesme partie, ou mesmes parties du second
comme le troisième du quatrième.

C'est à dire, que quand un nombre est même par-
tie, ou mêmes parties d'un nombre, qu'un autre
d'un autre, iceux quatre nombres sont dits propor-
tionnaux. Ainsi pource que le nom-
bre A est même partie du nombre B, que le nombre C du nombre D,
c'est à sçavoir la moitié, iceux
quatre nombres A, B, C, D, sont
proportionnaux. Aussi les quatre
nombres E, F, G, H sont propor-
tionnaux, puis que E est mêmes
parties de F, que G de H, c'est à
sçavoir deux troisièmes parties.

Item les quatre nombres I, K, L, M, sont aussi
proportionnaux, d'autant que comme I est quadrup-
le de K, aussi L est quadruple de M; ou bien pour

te que M est telle partie de L que K de I : Car il est évident que si le premier nombre I est autant multiple du second K , que le troisième L , l'est du quatrième M : en prenant les mesmes nombres par ordre contraire, M sera telle partie de L , que K de I , c'est à sçavoir le quart. Parquoy on peut assurément conclurre que quatre nombres sont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers est même partie, ou mesmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers est de l'autre, moyennant qu'ils soient pris d'un même ordre, c'est-à-dire que si le moindre nombre des deux premiers est antecédant, le moindre des deux derniers soit aussi antecédant ; & si consequent, consequent. Et c'est à mon avis ainsi qu'il faut entendre cette 20. def. pour la rendre universelle, car autrement on ne pourroit pas

conclurre par icelle la proportion-
 N O P Q
 nalité de plusieurs nombres, com- 15. 12. 25. 20.
 me par exemple de ces quatre

N , O , P , Q , vñ que les prenant selon l'ordre qu'ils sont posez, le premier N n'est pas multiple du second O , ny aussi partie ou parties, puis qu'il est plus grand qu'iceluy ; & néanmoins ils sont proportionnaux, vñ que le moindre des deux premiers, c'est à sçavoir O , contient autant de parties de l'autre N , que le moindre des deux autres, qui est Q , en contient de

l'autre P , c'est à sçavoir qua-
 R S T V
 tre cinquièmes parties. Sembla- 36. 27. 24. 18.

blement ces quatre autres nombres R , S , T , V , sont proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T , que S en con-

tient de R ; ou bien à cause que S est mesme parties de R , que V de T , c'est à sçavoir trois quarts.

Clavius estimant que cette def. a été corrompue , pour la restituer y a adjointé ces mots : Ou bien quand le premier contient également le second , & le troisième le quatrième , & en outre une même partie , ou mesmes parties d'iceluy. Mais je n'estime pas que cette addition y soit nécessaire , puis que le moindre nombre de chaque raison étant conféré à l'autre ladite def. convient à toutes sortes de proportions : Et que ce soit l'intention , d'Euclide , il appert assez par les démonstrations des 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 & 13. prop. de ce 7. livre.

Or Euclide définit seulement icy les nombres proportionaux , qui ont une même raison d'inégalité : Car de la raison d'égalité , il est évident que le premier nombre étant égal au second , aussi le troisième doit être égal au quatrième , afin qu'ils soient dits proportionaux.

De cette 20. def. résulte appertement , que les nombres égaux ont même raison à un même nombre ; Et au contraire qu'un même nombre a aussi même raison à des égaux : Ce qui a été démontré en toutes grandeurs à la 7. prop. 5. Il en résulte encore que les nombres qui ont même raison à un même nombre , ou auxquels un même nombre a même raison , sont égaux entr'eux. Ce qui a aussi été démontré en toutes sortes de grandeurs en la 9. prop. 5.

• De cette même def. on collige aussi que de deux nombres inégaux , le plus grand a plus grande rai-

son à un même nombre, que le plus petit ; & au contraire qu'un même nombre a plus grande raison à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inégaux, celui qui a plus grande raison à un même, est le plus grand : & celui auquel un même nombre a plus grande raison, est le plus petit : Toutes lesquelles choses sont claires, & évidentes, si cette def. est bien entendue. Cecy a aussi été démontré es grandeurs au 5. livre prop. 8. & 10.

Or cette définition, & tout ce que nous avons dit cy-dessus, convient aussi aux nombres rompus : Car ces quatre nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, sont proportionnaux, attendu que le premier est autant multiple du second, que le troisième du quatrième, sçavoir double ; ainsi qu'il appert en réduisant les deux premiers en même dénomination, sçavoir à $\frac{6}{8}$ & $\frac{3}{8}$, mais les deux autres à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement ces quatre nombres $2\frac{3}{8}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, sont proportionnaux, puis que le premier est telle partie du second, que le troisième du quatrième, sçavoir la moitié, &c.

21. Les nombres semblables plans, ou solides, sont ceux qui ont les côtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, sont nombres plans semblables, pource que 6 & 4, côtez de cettuy-là sont proportionnaux à 3 & 2, côtez de celui-cy : ainsi aussi 192 & 24, sont nombres solides semblables, pource que 8, 6, 4, côtez de cettuy-là sont port. à 4, 3, 2, côtez de celui-cy. Et est à

noter que ces nombres plans , & solides semblables peuvent bien être aussi compris sous des noms non proportionnaux ; mais toutesfois nous ne considérons icy qu'entant qu'ils sont contenus sous leurs côtez proportionnaux.

22. Nombre parfait, est celuy qui est égal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6 est dit nombre parfait, pource que ses parties aliquotes d'iceluy, sçavoir 1, 2, 3, prises ensemble, luy sont égales. Ainsi aussi 28, dont les parties aliquotes, sçavoir est 1, 2, 4, 7, 14, estans prises ensemble, luy sont égales ; sera dit nombre parfait ; & tels sont aussi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'un nombre prises ensemble, sont plus grandes qu'iceluy, il est dit abondant ; & quand elles sont moindres, il est appelé diminué.

A ces définitions d'Euclide, Clavius en adjoint quelques autres, touchant les raisons & proportions des nombres, comme de la raison égale, de l'alterne, de l'inverse, & autres dont est traité en general au 5. livre : Mais pource que nous les avons tellement expliquées en ce lieu-là ; qu'on les peut entendre & adapter, non seulement aux lignes, superficies & solides, mais aussi aux nombres, & en general à toutes sortes de grandeurs & quantitez soient continuës ou discrettes ; je n'estime pas qu'il soit besoin de les repeter icy, c'est pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OU DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre tant qu'on voudra d'égaux ou multiples.
2. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre un plus grand.

Combien que selon nôtre Autheur le nombre ne puisse être diminué infiniment, ains seulement jusques à l'unité qu'il fait indivisible, si est-ce toutesfois qu'il peut être augmenté infiniment par la continue addition de l'unité : Parquoy étant proposé quelconque nombre, on en peut trouver un plus grand, c'est à sçavoir celuy qui est produit de l'addition d'une ou de plusieurs unitez au nombre donné.

A X I O M E S O U C O M M U N E S
S E N T E N C E S.

1. **L** Es nombres equemultiplices de nombres égaux, ou d'un même nombre, sont égaux entr'eux.
2. Et ceux desquels un même nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont égaux, sont aussi égaux entr'eux.
3. Mais les nombres qui sont une même partie, ou même parties de nombres égaux, ou d'un même, sont égaux entr'eux.
4. Et ceux desquels un même nombre, ou nombres égaux, sont même partis, ou mesmes parties: sont aussi égaux entr'eux.
5. L'unité mesure tout nombre par les unitez qui sont en iceluy, c'est-à-dire par le même nombre.
6. Tout nombre mesure soy-même par l'unité.
7. Si un nombre multipliant un nombre, en produit quelqu'un, le multipliant mesurera le produit.

par le multiplié : mais le multiplié mesurera le même produit par le multipliant.

8. Si un nombre mesure un nombre ; aussi celui par lequel il le mesure , mesurera le même par les unitez qui sont au mesurant , c'est-à-dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si un nombre mesurant un nombre , multiplie celui par lequel il le mesure , ou est multiplié par iceluy , sera produit celui lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou davantage mesure aussi le composé d'iceux.

11. Mais celui qui mesure le mesureur , mesure aussi le mesuré.

12. Et celui qui mesure le tout , & le retranché mesure aussi le reste.

T H E O R . I . P R O P . I .

Si de deux nombres inégaux proposez, on soustrait toujours alternativement le plus petit du plus grand , & que le plus petit reste ne mesure jamais le precedant jusques à ce qu'on ait pris l'unité ; les nombres proposez au commencement seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inégaux AB & CD , tels que si on soustrait continuellement le plus petit du plus grand ; le plus petit reste ne mesure jamais le precedant , jusques à ce qu'on parvienne à l'unité : Je dis qu'iceux nombres AB & CD , seront premiers

A	F . . . 2	G . 1 B
C . . . 3	H . . . 2	D
E . . . 2		

entr'eux , c'est-à-dire , qu'ils ont pour commune mesure la seule unité. Autrement , s'ils ne sont premiers , ils seront composez , & par la 14. def. de ce livre ils seront mesurez par quelque nombre : soit iceluy E communement

sure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustrait de AB, soit le reste FB plus petit que CD: item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB: Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, unité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi son égal AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. E mesurera aussi le reste FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent son égal FG: mais il mesure aussi le tout FB; E mesurera donc pareillement l'unité restante GB, & avoir le tout la partie: ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'unité seulement: & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce livre. Si donc de deux nombres inégaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E.

Commandin demonstre icy la proposition suivante.

Estant proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustrait toujours alternativement le moindre du plus grand, la soustraction ne parviendra pas jusques à l'unité.

Ce qui est evident, car si on parvenoit à l'unité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonsté en la prop. cy-dessus: & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous connoissons facilement s'ils sont premiers entr'eux ou non. Car estant faite la soustraction, comme dit est, si on parvient jusques à l'unité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux: mais si on n'y parvient pas, ils seront composez.

P R O B L. I. P R O P. II.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux; trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux AB & CD, desquels CD soit le moindre: il faut trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soit soustrait le plus petit nombre CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose, comme EB,

A.....9	B.....6	B
C.....6	F....3	D
G....4		

iceluy soit osté de CD, tellement qu'il reste encor FD & ainsi soit soustrait continuellement le plus petit du plus grand, jusques à ce qu'on parvienne à un nombre qui mesure le precedent: ce qui aviendra necessairement: car si on parvenoit jusques à l'unité, les nombres AB, CD par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc que FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouverons ainsi. D'autant que FD mesure EB, & EB mesure CF, par la 11. com. sent. FD mesurera aussi le mesme CF; & mesurant soy-mesme, il mesurera le tout CD, composé des deux CF, FD par la 10. com. sent. Mais iceluy CD mesure AE: donc FD mesurera aussi AE: Et puisqu'il mesure aussi EB; il mesurera le tout AB composé d'iceux AE, EB. Par ainsi FD mesure tous les deux nombres AB & CD.

Il est aussi leur plus grande commune mesure; autrement en soit (s'il est possible) une autre plus grande, comme G. Veu donc que G mesure CD, il mesurera aussi AB, & mesurant le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste EB; & par consequent il mesurera CF. Mais il mesure aussi le tout CD; il mesurera donc aussi le reste FD, sçavoir le plus grand nombre le plus petit: ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que FD ne mesurera pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD est leur plus grande commune mesure.

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure, attendu qu'il mesure soy-mesme, ainsi qu'il appert icy. Nous avons donc trouvé la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

A.....8	B
C....4	D

De cecy est évident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a été démontré que si G mesure AB, & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par les choses cy-dessus dites, nous connoissons facilement si trois ou davantage de nombres proposez sont premiers entr'eux, ou non. Car soient donnez les trois nombres A, B, C. Premièrement donc soit ven par ce qui est dit à la 1. prop. si les deux nombres

A & B sont premiers entr'eux, ou non; Que s'ils sont premiers, il est évident que les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux.

Mais si A & B étoient composez entr'eux, soit trouvée par la 2. prop.

leur plus grande commune mesure D; que si elle mesure aussi le nombre C, il est manifeste que les trois nombres A, B, C, sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure.

A.....	12
B.....	9
C.....	6
D...	3

Que si D plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C; C & D seront premiers entr'eux, ou non: s'ils sont premiers,

les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils étoient composez, ils auroient une commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B,

A.....	9
B.....	6
C.....	5
D...	3

par le Corol. de cette prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese.

Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, seront composez entr'eux. Car étant trouvée par la 2. prop. 7. E la plus grande commune mesure de C & D; ceuy nombre E mesurera aussi

A.....	12
B.....	8
C.....	6
D....	4
E...	2

A & B par la 11. com. sont, puis que D les mesure. Parquoy que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C : & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui étoit proposé.

En la mesme maniere sera examiné & connu si plus de trois nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra éprouver premierement trois ; si cinq, quatre, &c. & achever comme nous avons dit, de trois nombres proposez.

PROBL. 1. PROP. III.

Estans donnez trois nombres, non premiers entr'eux ; trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C ; desquels il faut trouver la plus grande commune mesure.

A 12	D 4
B 8	E . . . 2
C 6	F . . . 3

Soit trouvé par la prec prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous avons ce que nous demandons : car si un plus grand nombre que D mesureroit A, B, C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune mesure de A & B, sçavoir est, un grand nombre, un moindre : ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese, que par le susdit Corol. de la 2. prop. donc par icelle même proposition soit trouvée E plus grande commune mesure de C & D. Il est évident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D ; lequel D mesure B & A. Je dis davantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit une autre plus grande, sçavoir F, s'il est possible : Or mesurant A, & B, elle

mesurera aussi D ; leur plus grande commune mesure par le même Corol. de la 2. prop. & par la même raison mesurant C & D , elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E , sçavoir le plus grand , le plus petit : ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres donnez A , B , C ; & partant iceluy nombre E sera leur plus grande commune mesure. Parquoy nous avons trouvé la plus grande commune mesure de trois nombres proposez , non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Par cecy il est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois , mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

S C H O L I E.

En la même maniere , étans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux , sera trouvée leur plus grande commune mesure ; C'est-à-dire , que s'il y a quatre nombres , il faudra premièrement trouver la plus grande commune mesure de trois , si 5 , de quatre : si 6 , de cinq , &c. puis achever , comme il a été dit de trois nombres donnez. Et aura aussi lieu le Corol. précédent ; tellement que le nombre qui en mesure quatre , mesurera aussi leur plus grande commune mesure , &c.

T H E O R. 2. P R O P. IV.

Tout nombre moindre , est partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres A & B inégaux, desquels A soit le plus grand. Je dis que le plus petit B , est ou partie ou parties du plus grand A.

A 6
B . . . 3

Car ou B mesure A , ou non. S'il le mesure , il est partie par la 3. def. de ce livre : s'il ne le mesure pas , ou bien A & B , seront entr'eux nombre premiers, ou composez.

Premierement qu'ils soient premiers: d'autant que chaque unité de B est partie de A, il est évident que B est parties de A, à sçavoir autant de parties qu'il y a d'unités en B.

A.....	6
B.....	5

Secondement A & B soient composez entr'eux : & puis que B ne mesure pas A, soit trouvée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit divisé B, en parties BD, DE, chacune égale à C. Vû donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A; item DE. Partant tout le nombre B est parties de A, à sçavoir autant de parties que C est autant de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

A.....	6
B..2 D..2 E	
C..2	

T H E O R. 3. P R O P. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2, que D 3, l'est de EF 4. Je dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.

A...3	
B...3 G...3 C	
D...4	
E...4 H...4 F	

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc divisé BC en autant de parties qu'il contient de fois A, sçavoir en BG & GC; EF se divisera aussi en autant de parties égales à D, sçavoir en EH & HF: & d'autant que BG est égal à A, & EH à D, si à choses égales A & BG, on ajoute choses égales, D & EH: A & D ensemble, seront égaux à BG.

BC & EH ensemble : semblablement A & D ensemble, seront égaux à GC & HF ensemble, & ainsi de suite, si il y avoit davantage de parties en BC & EF : & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble : Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Le même est aussi veritable en nombres rompus, ainsi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A est telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF : & partant sera démontré comme dessus A, D, en-

semble être la même partie de BC, EF ensemble que A de BC : Sçavoir est, si BC, EF sont divisés es parties BG, GC ; EH, HF, égales à iceux nombres A & D, &c.

$$\left| \begin{array}{cc} A^{\frac{2}{7}} & D^{\frac{3}{8}} \\ B^{\frac{2}{7}} G^{\frac{2}{7}} C & E^{\frac{3}{8}} H^{\frac{3}{8}} F \end{array} \right|$$

Or cette $\S$ prop. peut être transférée à tant de nombres qu'on voudra ainsi.

Si il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient même partie d'autant d'autres nombres, chacun du sien correspondant ; aussi les tous seront même partie des tous, que l'un sera de l'un son correspondant.

Soient les nombres A, B, C, une même partie des nombres DE, FG, HI, chacun de son correspondant : Je dis que tous les nombres A, B, C, ensemble sont la même partie de tous

A....4	B...3	C..2
D....4	K....4	E F...3
L...3	G H..2	M...2
I		

les nombres DE, FG, HI ensemble, que A de DE. Car étans divisés les nombres DE, FG, HI en parties égales à iceux A, B, C ; il y aura en DE autant de parties égales à A qu'en FG d'égales à B, & qu'en HI d'égales à C. Vû donc que A & DK, sont égaux, si on leur adjointe les égaux

B & FL; A, B ensemble seront égaux à DK, FL ensemble & si à iceux on adjointe encores les égaux C & HM: au A, B, C ensemble, seront égaux à DK, FL, HM, ensemble. Par même raison A, B, C ensemble seront égaux à KL, LG, MI ensemble: & ainsi de suite, s'il y avoit davantage de parties en DE, FG, HI: donc l'aggrégé des nombres A, B, C sera autant de fois égal à l'aggrégé des parties de nombres DE, FG, HI, que A sera contenu de fois en DE. Parquoy A, B, C ensemble, seront la même partie de DE, FG, HI ensemble, que A de DE.

Or cecy convient aussi aux nombres rompus, soit qu'ils le soient tous, soit qu'avec

$A \frac{2}{5}$	B. 1	C. $1\frac{1}{2}$
$D \frac{2}{5}$	K $\frac{2}{5}$ E	F. 1 L. 1 G H. $1\frac{1}{2}$ M. $1\frac{1}{2}$ I

iceux il y ait aussi quelque nombre entier, voire même l'unité, ainsi qu'en cette autre figure. Car il est évident que cette diversité de nombres ne peut apporter aucun changement en la démonstration cy dessus.

Commandin a démontré en ce lieu le theoreme suivant.

Si un nombre est autant multiple d'un nombre qu'un autre l'est d'un autre; l'un & l'autre ensemble sera autant multiple de l'un & l'autre ensemble, qu'un seul l'est d'un seul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B, que le nombre C, l'est du nombre D: je dis que A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Car puis que A est multiple de B, & C autant multiple de D; B sera telle partie de A, que D de C: & par la 5. prop. 7. B & D ensemble sera telle partie de A & C ensemble, que A de B: partant A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Ce qu'il falloit démontrer.

A.....	8
B....	4
C.....	6
D...	3

Ce qui est icy démontré de deux nombres, se doit aussi entendre de davantage, tellement que la prop. se peut rendre universelle disant ainsi:

S'il y a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres ; chacun du sien correspondant ; les tous seront autant multiple des tous, que l'un sera multiple de l'un, son correspondant.

Ce qui correspond à ce qui a été démontré en toutes sortes de grandeurs à la 1. prop. 5. Et neanmoins nous le démontrerons encor ainsi. Soient trois nombres A, B, C , equemul-

tiplices de trois autres D, E, F , chacun de son correspondant : se dis que les tous A, B, C ,

A.....8	B.....6	C....4
D....4	E...3	F..2

ensemble, sont autant multiples des tous, D, E, F ensemble, que A est multiple de D . Car puis que A est autant multiple de D , que B de E , & C de F : au contraire D sera telle partie de A , que E de B , & F de C . Donc par les choses cy-dessus démontrées, D, E, F ensemble, seront telle partie de A, B, C ensemble, que D de A : & par le contraire les toutes A, B, C ensemble, seront autant multiples des toutes D, E, F ensemble, que A de D . Et n'importe que les nombres proposez soient nombres entiers, ou nombres rompus, car il est évident que la demonstration des uns est la même que des autres.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart : le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F , desquels le premier AB contient autant de parties du second C , que le troisième DE en contient du quatrième F . Je dis que AB & DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C .

A...3	G...3	B
C.....9		
D...4	H...4	E
F.....12		

Car d'autant que AB contient telles parties de C, & DE de F; érans AB & DE divisez en AG, GB; & DE en HE, selon qu'ils sont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la précéd AG & DH ensemble sera telle partie de C & F ensemble, que AG de C. Item GB & HE ensemble, sera telle partie de C & F ensemble, que GB de C; & ainsi de suite, s'il y avoit davantage de parties en AB & DE. Par quoy iceux AB & DE ensemble, seront telles parties de C & F ensemble, que AB de C. Donc si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette même prop. avec sa démonstration a aussi lieu en

$A \frac{1}{3} \quad G \frac{1}{3} \quad B$	$D \frac{2}{7} \quad H \frac{2}{7} \quad E$
$C \frac{2}{3}$	$F \frac{4}{7}$

nombres rompus, comme il appert en cet exemple.

Mais cette 6. prop. peut aussi être estendue à tant de nombres qu'on voudra, soient entiers, ou rompus, ainsi qu'en suit.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient mesmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'un chacun; aussi les tous seront mesmes parties des tous, que l'un de l'un son correspondant.

Car c'est la même démonstration que dessus; observant seulement qu'au lieu de la 5. prop. il se faut servir icy de l'universelle démontrée au Scholie d'icelle 5. prop.

T H E O R. 5. P R O P. VII.

Si un nombre est telle partie d'un autre nombre que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE est du retranché CF . Je dis que le reste EB , sera telle partie du reste FD , que le tout AB est du tout CD .

$A \dots 4 E \dots 2 B$
$G \dots 4 C \dots 8 F \dots 4 D$

Car étant pris le nombre GC , en sorte que telle partie qu'est le retranché AE du retranché CF , telle partie le reste EB soit d'iceluy GC ; par la 5. prop. les deux nombres AE & EB ensemble seront telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est AB de CF ; c'est-à-dire qu'est le tout AB du tout CD : & partant puis que le nombre AB est telle partie du nombre CF que de CD : iceux nombres GF , CD seront égaux entr'eux par la 4. com. sent. en étant donc le nombre commun CF , les demeurans GC & FD seront égaux: & partant le reste EB sera telle partie du reste FD , que de GC : c'est-à-dire que le tout AB du tout CD , puis que EB a été posé telle partie de GC , que AE de CF ; qui par l'hypothese est la même que AB de CD . Si donc un nombre est telle partie d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette prop. avec sa démonstration convient aussi aux nombres rompus: Et encore le theoreme suivant, lequel Commandin démontre en cet endroit.

Si un nombre est autant multiple d'un autre nombre que le retranché du retranché; aussi le reste sera autant multiple du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD , que le retranché AE du retranché CF : Je dis aussi que le reste EB est autant multiple du reste FD , que le tout AB l'est du tout CD . Car puis que AB , AE sont equemultiples de CD , CF , par le contraire

$A \dots 6 E \dots 4 B$
$C \dots 3 F \dots 2 D$

le tout CD sera telle partie du tout AB , que le retranché du retranché AE : & partant par la susdite prop. 7. au le reste FD , sera telle partie du reste EB , que le tout CD du tout AB : donc au contraire EB sera autant multiple de FD que le tout AB est multiple du tout CD . Ce qui étoit proposé à démontrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché : aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD , que le retranché AE du retranché CF : Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD , que le total AB , du total CD .

G. .2	A.	6	E. .2	B
C.	9	F. . . .	3	D

Car si on pose GA contenir telles parties de FD , que AE de CF , ou AB de CD , par la 6. prop. les deux nombres GA , AE ensemble, seront telles parties des deux CF , FD ensemble, (c'est-à-dire le tout GE du tout CD) que GA de FD , ou AB de CD : & partant puis que GE & AB contiennent telles parties de CD , l'un que l'autre, ils seront égaux : parquoy en ostant le nombre commun AE , resteront GA & EB égaux. Mais GA contient telles parties de FD , que AB de CD : Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD , que AB de CD . Parquoy si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Que si aux nombres entiers cy-dessus apposez l'on substitue des nombres rompus, tu démontreras en la même manière cette 8. prop. être aussi véritable en fractions ; & semblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier sera telle, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A soit telle partie de BC, que D est de EF. Je dis qu'en permutant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourvû que A & BC soient plus petits que D & EF, chacun au sien; car ainsi se doit entendre cette proposition.

A...	3	
B...	3	G...3 C
D...	4	
E...	4	H....4 F

Qu'ainsi ne soit : d'autant que par l'hypothese, A est telle partie de BC comme D de EF : BC contiendra autant de parties égales à A que EF en contient d'égales à D : soit donc divisé le nombre BC es parties BG, GC, chacune égale à A ; & le nombre EF es parties EH, HF chacune égale à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. prop. de ce livre, A est partie ou parties de D, & ainsi consequemment des autres, sçavoir BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG est égale à GC, & EH à HF ; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC ensemble, c'est-à-dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensemble, sçavoir EF, que BG de EH, c'est-à-dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB , C , DE & F , desquel
contienne telle parties de C , que DE de F ; Je dis que
permutant, AB sera telle
ou telles parties de DE ,
que C est de F , moyen-
nant que AB & C soient
plus petits que DE & F ,
chacun au sien, car cette
prop. aussi bien que la pre-
cedente se doit ainsi en-
tendre.

A	..2	G	..2	B
C	6			
D	5	H	5	E
F	10			

Car AB estant divisé en AG , GB parties de C ; & DE
en DH , HE parties de F ; AB sera divisé en autant
parties que DE , & tant AG que GB sera telle parties
 C , que DH & HE de F : donc en permutant par la
prop. de ce livre, AG sera telle partie ou parties de DH
& GB de HE , que C de F : & partant AG sera telle pa-
tie, ou parties de DH , que GB de HE . Donc par la
ou 6. prop. AG , GB ensemble, sçavoir est le premi-
er nombre AB , sera aussi telle partie, ou parties de DH
& HE ensemble, c'est-à-dire du troisieme nombre DE ,
que AG de DH , c'est-à dire que le second nombre
du quart F : Parquoy si de quatre nombres, le premi-
er contient telles parties du second, &c. Ce qu'il fallo
prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au re-
tranché; aussi le reste sera au reste, comme le
tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD , comme le retranché AE
au retranché CF : Je dis que le reste EB est au reste FD ,
comme le tout AB au tout CD .

Car puis que AB est à CD ,
comme AE à CF ; AB estant
plus petit nombre que CD , il
sera telle ou telles parties d'i-
celuy CD , que AE de CF ,

A	4	E	..2	B
C	6	F	...3	D

& par la 7. ou 8. prop. le reste EB sera telle ou telles parties du reste FD, que le tout du tout : & partant par la 20. def. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Or combien qu'en cette démonstration Euclide pose le nombre AB plus petit que le nombre CD, si est-ce toutesfois qu'elle auroit aussi lieu, si AB étoit plus grand que CD. Car on ice-

luy mesure CD mesurerait AB, ou il ne le mesurerait pas. Que CD mesure donc premierement AB; &

d'autant que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, par la 20. def. AB, AE, seront equemultiples de CD, CF, c'est-à-dire que CD sera telle partie de AB, que CF de AE; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi même partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, seront equemultiples d'icelles CD, FD: & par la 20. def. convertie, comme le tout AB sera au tout CD, ainsi le reste EB sera au reste FD.

Maintenant que CD ne mesure pas AB: derechef puis que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, telles parties que CD est de AB, telles parties

CF est aussi de AE par la susdite 20. def. & par la 8. prop. le reste FD sera même parties du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par la même def. convertie, le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB sera au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R. 10. P R O P. XII.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra proportionaux; comme l'un des antecedans sera à son consequent, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux
 A, B; C, D; E, F; c'est à sçavoir qu'il y ait telle raison
 de A à B, que
 de C à D, &
 que de E à F.
 Je dis que tous
 les antecedans

A 6	C 4	E . . . 2
B 9	D 6	F . . . 3

A, C, E ensemble, seront à tous les consequens B, D, F ensemble, comme A, l'un des antecedans ; est à B son consequent.

Car puis que les susdits nombres sont proportionnaux & A, C, E, sont moindres que B, D, E; par la 20. def. A sera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F & par la 5. ou 6. prop. de ce mesme livre A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D ensemble; que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C ensemble comme un seul, est telle partie, ou parties de B, D ensemble, comme un seul, que E de F, aussi par les mesmes prop. A, C ensemble avec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble avec F, que A de B parquoy par la susdite 20. def. convertie tous les antecedans A, C, E ensemble, auront même raison à tous les consequens B, D, F ensemble, que A à B : Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'un des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Euclide n'ayant démontré cette prop. qu'en quatre nombres, nous avons delaisé sa demonstration pour prendre celle cy, qu'on peut estendre à tant de nombres qu'on voudra : & combien qu'en cette démonstration nous ayons posé, comme il a fait, les nombres antecedans moindres que les consequens, si est-ce toutesfois qu'étans plus grands la démonstration n'en sera differente, sinon en ce qu'il faudra, comme au Scholie precedent, prendre iceux antecedans equemultiples des consequens; & puis après iceux consequens mesmes parties desdits antecedans, &c.

T H E O R. II. P R O P. XIII.

Si quatre nombres sont proportionnaux : aussi en permutant ils seront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, savoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D; Je dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

Car puis que comme A est à B, ainsi C à D, par la 20. def. A étant plus petit que B, & C que D; A sera telle ou telles parties de B, que C est de D; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop.

A	6
B	9
C	8
D	12

de ce livre A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, & par la susdite 20. def. convertie, il y aura même raison de A à C que de B à D. Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette demonstration d'Euclide a seulement lieu, quand les nombres antecédans sont moindres que les conséquens, & que A est moindre que C: mais s'ils sont plus grands, & que A soit plus grand que B, & moindre que C, la demonstration s'en fera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. B sera même partie, ou mesmes parties de A, que D de C: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera même partie ou parties de D, que A de C: & par la susdite 20. def. A sera à C, comme B à D.

A	4
B	3
C	8
D	6

Que si A est plus grand que B, & que C, on argumentera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. D sera même partie ou parties de C que B de A: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7.

A	9
B	6
C	3
D	2

C sera telle partie, ou telles parties de A, que D de B; & partant par la même def. A sera à C, comme B à D.

Finaleme^{nt} si *A* est moindre que *B*, & plus grand que *C*, on dira ainsi: d'autant que comme *A* est à 3, ainsi *C* est à *D*, par la 20. def. 7. *C* est même partie ou parties de *D*, que *A* de *B*: donc en changeant par la 9. ou 10. prop. 7. *C* sera même partie, ou parties de *A*, que *D* de *B*; & par la susdite 20.^e def. convertie, *A* sera à *C*, comme *B* à *D*.

<i>A</i>	4
<i>B</i>	8
<i>C</i> . . .	2
<i>D</i>	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté & autant d'un autre, qui soient prins de deux en deux, & en même raison; iceux en raison égale, seront aussi en même raison.

Soient tant de nombres qu'on voudra *A*, *B*, *C*, & autant d'autres *D*, *E*, *F*; & qu'il y ait telle raison de *A* à *B*, que de *D* à *E*, & de *B* à *C*, que de *E* à *F*. Je dis qu'en raison égale, il y aura telle raison de *A* à *C*, que de *D* à *F*.

Car puis que comme *A* est à *B*, ainsi *D* à *E*, en permutant par la

<i>A</i>	9	<i>D</i>	6
<i>B</i>	6	<i>E</i>	4
<i>C</i> . . .	3	<i>F</i> . .	2

preced. prop. comme *A* sera à *D*, ainsi *B* à *E*: semblablement aussi puis que comme *B* est à *C*, ainsi *E* à *F*, en permutant comme *B* sera à *E*, ainsi *C* à *F*. Donc comme *A* sera à *D*, ainsi *C* sera à *F* (car puis que *A* est à *D*, & *C* à *F*, en même raison que *B* à *E*, aussi *A* sera à *D* en la même raison que *C* à *F*, comme sera incontinent démontré) & partant en permutant, comme *A* sera à *C*, ainsi *D* sera à *F*: Ce qu'il falloit prouver.

LE M M E.

Or que *A* estant à *D*, & *C* à *F*, en même raison que *B* à *E*, ils soient de même raison entr'eux, nous le démon-

THEOR. 13. PROP. XV.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produits seront égaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B ; & que A multipliant B produise C ; & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produits C & D sont égaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C ; B sera autant de fois en C , que l'unité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'unité mesure A , & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que l'unité mesurera B . Item B multipliant A & produisant D ; A sera autant de fois en D , qu'il y a d'unités en B par la même 15. def. & par conséquent mesurera D autant de fois que l'unité mesure B : mais nous avons prouvé que A mesurerait aussi C autant de fois que l'unité mesure B : donc A mesure C & D également, & partant par la 1. com. sent. C & D seront égaux entr'eux: Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Unité.	
$A \dots 3$	$B \dots 4$
$C \dots \dots \dots 12$	
$D \dots \dots \dots 12$	

S C H O L I E.

On démontrera cette prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produit C ; par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'unité: & en permutant C sera à A comme B à l'unité. Mais par la même def. comme B est à l'unité, ainsi aussi D est à A , pource que B multipliant A a produit D . Donc comme C sera à A ainsi D sera au même A , par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont égaux entr'eux.

Unité.	
$A \frac{2}{3}$	$B 4 \frac{5}{7}$
$D 3 \frac{1}{7}$	$C 3 \frac{1}{7}$

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre en multiplie deux autres, les produits seront entr'eux en même raison que les multipliez.

Soit le nombre A , lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E : Je dis que les deux produits D & E sont entr'eux , comme B à C.

Car par la 15. def. B multiplié par A est autant de fois contenu en son produit D , que l'unité en A ; & C dans son produit E , comme la mesme unité en A : & partant B mesurera autant de fois D , que C mesure E. Donc B fera telle partie de D , que C

de E : & par la 20. def. B sera à D , comme C à E ; & en permutant par la 13. prop. 7. comme B sera à C , ainsi D sera à E : Si donc un nombre en multiplie deux autres , &c. Ce qu'il falloit prouver.

Unité.		
A . . .	2	
B . . .	3	C 4
D	6	
E	8	

S C H O L I E.

Cette prop. a aussi lieu en nombres rompus , & se demontre ainsi. D'autant que A multipliant B & C , produit D & E ; par la def. de la multiplication il y aura telle raison tant de D à B , que de E à C , comme de A à l'unité , &

partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D sera à B , ainsi E à C : donc en permutant comme D sera à E , ainsi B à C.

	A $\frac{1}{2}$	
B $\frac{3}{4}$	C $7\frac{1}{5}$	
D $\frac{3}{8}$	E $3\frac{3}{5}$	

T H E O R. 16. P R O P. XVIII.

Si deux nombres en multiplient un autre , les produits seront entr'eux , en mesme raison que les multipliers.

Soient deux nombres A & B , qui multiplians C produisent D & E. Je dis que comme A est à B , ainsi D est à E.

Car puis que A multipliant C produit D, aussi C multipliant A produit le mesme D par la 16. prop. Semblablement, puis que

A . . . 3	B . . . 4
C . . 2	
D 6	E 8

B multipliant C produit E, aussi C multipliant B produira le mesme E : vû donc qu'un mesme nombre C multipliant A & B, produit D & E, comme A est à B, ainsi D est à E par la prop. prec. Parquoy si deux nombres en multiplient un autre, &c. Ce qui estoit à prouver.

S C H O L I E.

Vû que la demonstration tant de cette prop. que des deux suivantes, est la même en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arrêterons davantage; mais dirons icy que Clavius a accommodé (après Campanus) tant cette prop. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra ; en cette sorte.

Si un nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produits seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliez, ou multipliers.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou étant multiplié par iceux, soient produits les nombres E, F, G. Je dis que E, F, G, sont entr'eux comme les nombres multipliez ou multipliers B, C, D ; c'est-à-dire que comme B

A . . . 3		
B . . 2	C . . . 3	D . . . 4
E 6	F 9	G 12

est à C, ainsi E à F ; & comme C à D, ainsi F à G. Car puis que E, F sont produits de A multipliant B, C ; ou de B, C, multipliez par A, comme B sera à C, ainsi E sera à F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F, G, sont produits de A en C, D, ou de C, D par A, aussi comme C sera à D, ainsi F sera à G, & ainsi des autres. Appert donc ce qui étoit proposé.

THEOR,

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux, le produit du premier multiplié par le quart, sera égal au produit du second par le tiers: Et si le produit du premier multiplié par le quart, est égal au produit du second par le tiers, iceux quatre nombres sont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, savoir que comme A est à B, ainsi C est à D; & que le premier A multiplié par le dernier D produise E, & le second B par le tiers C produise F. Je dis que E & F sont égaux.

Qu'ainsi ne soit:

Soit multiplié A par C, & le produit soit

A.....6	B....4
C...3	D...2
E.....12	
F.....12	
G.....18	

G; d'autant que A multiplié par C & D, produit G & E, il y aura telle raison de G à E, que de C à D, par la prop. préc. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produit G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui sont en même raison que A & B. Parquoy G estant à E, & G à F en même raison que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura même raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres égaux, ainsi que nous avons dit sur la 20. def.

Pour la seconde partie, soit E produit de A multiplié par D, égal à F, produit de B multiplié par C: Je dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produit de A multiplié par C, E & F nombres égaux auront même raison à G, comme nous avons dit en la suite de la 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la précéd. prop. & telle raison de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. prop. A sera à B, comme

D d

C à D : si donc quatre nombres sont proportionnaux, le produit du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Clavius adjoute icy cet autre Theoreme, la demonstration duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres, le premier a plus grande raison au second, que le troisieme au quatrieme; le produit du premier multiplié par le quatrieme sera plus grand que le produit du second multiplié par le troisieme; & si le nombre produit du premier & quatrieme est plus grand, que celui du second & troisieme, y aura plus grande raison du premier au second que du troisieme au quatrieme.

Soient quatre nombres A, B, C, D , & qu'il y ait premierement plus grande raison du premier A au second B , que du troisieme C au quatrieme D : Je dis que le nombre procreé de A en D est plus grand que celui fait de B en C . Car si on pose que E soit à B , comme C à D , il y aura aussi plus grande raison

A	7	E	6
B	4		
C	9		
D	6		

de A à B , que de E à B ; & partant A sera plus grand que E , comme nous avons annoté sur la 20. def. 7. Par quoy il se fera un plus grand nombre de A en D , que de E par le même D . Mais par la 19. prop. 7. le produit de E en D est esgal à celui de B en C : donc aussi le nombre procreé de A en D sera plus grand que celui fait de B en C . Ce qu'il falloit prouver.

Maintenant que le nombre procreé de A en D , soit plus grand, que celui fait de B en C : Je dis qu'il y a plus grande raison de A à B , que de C à D . Car si on entend que le

A	5	E	6
B	4		
C . . .	3		
D . . .	2		

nombre E en D fasse le même nombre, que de B en C

le produit de A en D sera aussi plus grand que celui de E par le même D : & partant A sera plus grand que E . Parquoy il y aura plus grande raison de A à B , que de E au même B . Mais par la 19. prop. 7. comme E est à B , ainsi G est à D : donc aussi la raison de A à B sera plus grande que de C à D . Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit moindre raison du premier nombre au second, que du troisieme au quatriesme, le nombre fait du premier multiplié par le quatriesme seroit moindre, que celui fait du second par le troisieme : Et si le nombre procréé du premier multiplié par le quatriesme estoit moindre, que celui fait du second par le troisieme, il y auroit moindre raison du premier nombre au second, que du troisieme au quatriesme. La demonstration n'est differente à la precedente, sinon en ce qu'il faut changer plus grand en moindre.

A ce Theoreme nous en adjoûterons un autre fort util, qui est tel.

Si trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit sera toujours le même, en quelque façon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A , B , C , & le produit de A multiplié par B soit D , lequel multiplié par C produise E : Mais changeant d'ordre le produit de B par C soit F , & iceluy multiplié par A produise G : changeant derechef d'ordre, le produit de A en C soit H , qui multiplié par B fasse I . Je

dis que les trois produits E , G , I , sont un même nombre. Car puis que B multipliant A & produit D , F , par la 17. prop. 7. comme A est à C , ainsi D à

E , & par la 19. prop. 7. le produit de A en F , qui est G , sera esgal au produit de C en D , qui est E . Item puisque C multipliant A & B , produit H & F , comme A est à B , ainsi H à F ; & partant le produit de A en F , qui est G , sera esgal au produit de B en H , qui est I . Par ainsi les deux nombres E & I estans esgaux au nombre G , tous les trois E , G , I , sont esgaux entr'eux, c'est-à-dire un même nombre : Ce qu'il falloit prouver.

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60.	G 60.	I 60.

Maintenant soient quatre nombres A, B, C, D , & multipliant A par B , & le produit par C , soit fait E , qui multiplié par D produise F : Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C , & le produit par B , soit fait G , qui multiplié par A , fasse H : Je dis que F & H sont un même nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres proposez A, B, C, D , sera toujours produit le même

nombre. Car puis que multipliant d'un côté les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'un autre côté les trois D, C, B ,

A 2.	B 3.	C 4.	D 5.
E 24.	I 12.	G 60.	
F 120.		H 120.	

aussi entr'eux sont produits les deux E & G , soient multipliés B & C entr'eux, & le produit soit I . Or par ce qui a esté démontré cy-dessus de trois nombres, le nombre E qui se fait multipliant A par B , & le produit par C , se fera aussi multipliant B par C , & le produit (sçavoir I) par A . Par même discours, on prouvera que G seroit produit multipliant D par I . Vû donc que I multipliant A & D , produit E & G , comme A est à D , ainsi E est à G , par la 17. prop. 7. & par tant le produit des extrêmes A & G sera le même que de moyens D & E par la 19. prop. 7. dont F & H sont un même nombre. Et par semblable discours on prouvera toujours la même : Car de quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'un côté, & trois d'un autre, il se rencontrera que de trois pris à'un côté, & d'autre, il y en aura toujours deux qui seront communs de part & d'autre, & par ainsi la même démonstration aura toujours lieu.

Que si l'on propose cinq nombres, on en prendra quatre d'un côté, & quatre d'un autre, & s'en trouveront toujours trois qui seront communs d'un côté & d'autre : tellement qu'en s'aydant de ce qui a esté démontré en trois, & en quatre nombres, on accomplira la démonstration en la même sorte. Et si on propose six nombres, l'on se servira de ce qui a esté démontré en cinq, & ainsi toujours en augmentant le nombre en nombre, si on en propose davantage. Ce que docte Bachet a aussi démontré en ses Problemes plaisans : & variable en toutes sortes de nombres, soient entiers ou fractions.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extrêmes est égal au produit du milieu : & si le produit des extrêmes est égal à celui du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, sçavoir, que comme A est à B, ainsi B à C : Je dis que le produit de A, 1. multiplié par C, 3^e, est égal au produit du moyen B multiplié par soy-mesme.

Car étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C ; & par la prec. prop. le produit de A par C, sera égal au produit de B par D, c'est-à-dire de B par soy-même.

A	9
B	6
D	6
C	4

Pour la seconde partie ; soit le produit de A, 1. multiplié par C, 3^e, égal au produit de B moyen multiplié par soy-même : Je dis que les nombres A, B, C, sont proportionnaux.

Car derechef étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C ; & par la prop. prec. le produit de A par C sera égal au produit de B par D, c'est à dire de B par soy-même, puis que D luy est égal : partant les trois nombres A, B, C, sont proportionnaux. Si donc trois nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que s'il y a plus grande raison du premier nombre au second, que du second au troisième ; le nombre procréé du premier multiplié par le troisième sera plus grand, que celui fait du second multiplié par soy-même : & si le nombre fait du premier multiplié par le troisième est plus grand que du second en soy-même, il y aura plus grande raison du premier au second, que du second au troisième. Item s'il y a moindre raison du premier au second, que du second au troisième, le produit du premier

par le troisième sera moindre que le produit du second par le même : & si un moindre nombre est fait du premier multiplié

A	8
B	6
D	6
C	5

A	4
B	6
D	6
C	7

par le troisième, que du second en soy ; il y aura moindre raison du premier nombre au deuxième, que du deuxième au troisième : Ce qui sera évident par ce qui est démontré au Schol. précédent, ayant posé le nombre D égal au second nombre B afin qu'il y ait quatre nombres : Car alors il y aura plus grande raison du premier au deuxième, que du troisième au quatrième, ou moindre, &c. Comme il appert aux exemples cy apposés, soit que les nombres soient entiers ou rampus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison avec iceux, mesurent également les nombres qui ont la même raison, sçavoir le plus grand, le plus grand ; & le plus petit.

Soient deux nombres A & B, les plus petits en leur raison, & deux autres nombres plus grands C & D en même raison qu'iceux A & B, c'est à dire que comme A est à B, ainsi C à D : Je dis que A & B mesurent également C & D, c'est à dire que A mesure C autant de fois que B mesure D.

A...3	B....4
C.....6	D.....8

Car puis que iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, en permutant par la 13. prop. A sera à C comme B à D : & puis que A & B sont plus petits que C & D, par la 20. def. ils seront même partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuvent être parties : car il est évident qu'ils ne se

soient les plus petits nombres de leur raison, contre l'hypothese. Donc A est même partie de C, que B de D : & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D : Parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont une même raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison, la proportion étant troublée, en raison égale, ils seront proportionnaux.

Soient trois nombres d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F; lesquels pris de deux en deux soient en même raison, & leur proportion troublée, sçavoir que A soit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E : Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.

A 4	D 12
B 3	E 8
C 2	F 6

Car puis que A est à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, sera égal au produit de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B est à C, comme D à E, le même produit de B multiplié par E, sera égal au produit de C multiplié par D, par la même prop. & partant le produit de A par F, sera égal au produit de C par D, & par la susdite 19. prop. il y aura même raison de A à C que de D à F : Parquoy s'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Il est evident que cette démonstration convient aussi aux nombres rompus. Et d'autant que de six moyens d'argumenter es proportions, lesquels Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 5. livre, il en démontre en celui-cy seulement deux en nombres; il ne sera hors de propos de démontrer aussi en

nombre les quatre autres moyens, comme ont fait plusieurs Interpretes.

1. Si quatre nombres sont proportionnaux ; par raison inverse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D . Je dis qu'en changeant comme B à A , ainsi D à C . Car puis que comme A à B , ainsi C à D , en permutant par la 13. prop. comme A sera à C , ainsi B à D . Derechef puis que B est à D comme A à C , par la mesme prop. B sera à A comme D à C . Ce qui étoit proposé.

$A \dots\dots 6$	$C \dots 3$
$B \dots\dots 4$	$D \dots 2$

2. Si les nombres composez sont proportionnaux, iceux divisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à EF . Je dis qu'aussi en divisant, comme AC à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE , ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. pr. comme le tout AB est au tout DE , ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB , ainsi DF sera à FE . Ce qui étoit proposé.

$A \dots\dots 6$	$C \dots 3$	B
$D \dots\dots 4$	$F \dots 2$	E

Par la même maniere nous démontrerons comme au livre 5. la division converse, & contraire de raison. Car soit premièrement comme AB à CB , ainsi DE à FE ; Je dis que, par division converse de raison, comme CB à AC , ainsi FE à DF . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE ; en divisant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant, comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF .

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE . Je dis par division contraire de raison, que comme AC est à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB , ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Donc en divisant comme CB à AC , ainsi FE à DF : & en changeant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE . Ce qui étoit proposé.

3. Si les nombres divisez sont proportionnaux, iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je dis qu'en composant comme AC est à BC , ainsi DF , à EF . Car puis que comme AB à BC , ainsi DE à EF , en permutant par la 13.

A 6 B . . . 3 C					
D 4 E . . 2 F					

prop. comme AB à DE , ainsi BC à EF , & partant par la 12. prop. comme AB , BC ensemble, à DE , EF ensemble, c'est-à-dire le tout AC au tout DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop. comme AC à BC , ainsi DF à EF . Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous démontrerons icy comme au 5. livre la composition converse & contraire de raison. Car soit premièrement comme AB à BC , ainsi DE à EF . Je dis par composition converse de raison, que comme AC est à AB , ainsi DF à DE . Car vu que AB est à BC , comme DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : & en composant comme AC sera à AB , ainsi DF sera à DE .

Maintenant soit derechef AB à BC , comme DE à EF . Je dis que par composition contraire de raison, comme AB est à AC , ainsi DE à DF : car puis que comme AB à BC , ainsi DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE . Donc en composant, comme AC à AB , ainsi DF à DE : & en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF .

4. Si les nombres composez sont proportionnaux, ils le seront aussi par conversion de raison.

Soit comme AB à CB , ainsi DE à FE . Je dis que par conversion de raison, comme AB est à AC , ainsi DE à DF .

Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB sera au tout DE , ainsi le

A 6 C . . . 3 B					
D 4 F . . 2 E					

retranché CB sera au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE , ainsi le reste AC au reste DF . Donc en permutant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Ce qui estoit proposé.

A ces quatre theoremes nous adjoûterons les quatre suivans.

5. S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison; comme tous les nombres du premier ordre ensemble seront à l'un d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à iceluy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A, B, C, D d'un côté, & quatre d'un autre E, F, G, H , & que A soit à B , comme E à F , & B à C comme F à G ; & C à D comme G à H : Je dis que comme tous les nombres A, B, C, D , ensemble, seront au dernier D , ainsi tous les nombres E, F, G, H , ensemble seront au dernier H . Car d'autant que comme A est à B , ainsi E est à F ; en composant comme A, B , ensemble seront

$A \dots 3$	$B \dots 4$	$C \dots 2$	$D \dots 5$
$E \dots 6$	$F \dots 8$	$G \dots 4$	$H \dots 10$

à B , ainsi E, F ensemble seront à F . Mais comme B est à C , ainsi F à G : donc en raison esgale, comme AB , ensemble sont à C . Ainsi E, F ensemble sont à G ; parquoy, en composant comme A, B, C ensemble seront à C , ainsi E, F, G , ensemble seront à G . Mais comme C à D , ainsi G à H : donc en raison esgale comme A, B, C ensemble seront à D , ainsi E, F, G ensemble seront à H : Et en composant comme A, B, C, D ensemble sont à D , ainsi E, F, G, H ensemble seront à H . Ce qu'il falloit prouver.

D'où est manifeste que comme l'un des nombres du premier ordre est à son correspondant de l'autre ordre, ainsi tous les nombres du premier ordre ensemble seront à tous ceux du second ordre ensemble. Car puisque comme A, B, C, D ensemble sont à D , ainsi E, F, G, H ensemble sont à H ; en permutant A, B, C, D ensemble sont à E, F, G, H ensemble, comme D à H .

6. Si le premier a même raison au second, que le troisième au quatrième, & que le cinquième ait aussi même

me raison au second, que le sixième au quatrième : le composé du premier & cinquième aura même raison au second, que le composé du troisième & sixième au quatrième.

Soit AB premier à C deuxième, comme DE troisième à F quatrième. Item soit BG cinquième à C deuxième, comme EH sixième à F quatrième. Je dis que AG , composé du premier & du cinquième est à C deuxième, comme DE composé du troisième & sixième est à F quatrième. Car

A.....6B..26	D.....9E...3H
C.....4	F.....6

puis que comme BG est à C , ainsi EH à F , en changeant comme C sera à BG , ainsi F à EH . Vu donc que comme AB à C , ainsi DE à F , & comme C à BG , ainsi F à EH ; en raison esgale, comme AB est à BG , ainsi DE est à EH : & en composant, comme AG à BG , ainsi DH à EH ; partant puis que derechef comme AG à BG , ainsi DH à EH , & comme EG à C , ainsi EH à F ; en raison esgale, comme AG sera à C , ainsi DH à F . Ce qui est proposé.

7. Si le premier a même raison au second, que le troisième au quatrième; & que le premier ait, aussi la même au cinquième, que le troisième au sixième; aussi le premier aura même raison au composé du second & cinquième, que le troisième au composé du quatrième & sixième.

Soit le tout AB à C , comme le tout DE à F : Item le retranché AG soit à C , comme le retranché DH à F : Je dis que le reste GB est à C , comme le reste HE à F . Car puis

A.....6G..2B	D.....9H...E
C.....4	F.....6

que comme AG à C ainsi DH à F , en changeant comme C sera à AG ainsi F à DH . Vu donc que comme AB à C , ainsi

DE à F, & comme C à AG, ainsi F à DH; en raison esgale, comme AB à AG, ainsi DE à DH. Parquoy en devisant comme GB à AG, ainsi HE à DH. Mais puis qu'derechef, comme GB à AG, ainsi HE à DH, & comme AG à C, ainsi DH à F; en raison esgale, comme GB sera à C, ainsi HE sera à F. Ce qui est proposé.

8. Si deux nombres, & des retranchés d'iceux, ont une même raison à deux nombres: aussi les restes auront même raison aux mêmes nombres.

Soit A premier à BC deuxiesme, comme D troisieme EF quatriesme: & comme A premier CG cinquieme, ainsi D troisieme à FH sixiesme. Je dis que comme A premier est à BG, composé du deuxiesme & cinquieme, ainsi D, troisieme à EH composé du quatriesme & sixiesme. Car puis que comme A est à BC, ainsi D à EF; en changeant comme BC sera à A, ainsi EF à D. D'autant donc que comme

A.....6	D.....9
B....4	C...2
G	E.....6
F....4	H

BC à A, ainsi EF à D, & comme A à CG, ainsi D à FH; en raison esgale, comme BC à CG, ainsi EF à FH: & en composant comme BG à CG, ainsi EH à FH, & en changeant comme CG à BG, ainsi FH à EH. Vû donc que comme A à CG, ainsi D à FH, & comme CG à BG, ainsi FH à EH; en raison esgale, comme A sera à BG, ainsi D à EH. Ce qui est proposé.

THEOR. 21. P R O P. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Je dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient, s'il est possible, C & D plus petits en la même raison ; & par la 21. prop. ils mesureront A &

A 6	B 5	
C ----	D --	E -

B, l'un comme l'autre : qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E fera commune mesure des nombres A & B, ainsi ils ne seroient pas premiers entr'eux, mais composez, contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en même raison qu'eux. Parquoy les nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont une même raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : Je dis qu'ils sont premiers entr'eux.

Autrement, s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux, s'il est possible, sçavoir A autant de fois qu'il y a d'unitéz en D, & B autant de fois qu'il y a d'unitéz en

A 6	D --
C -	
B 5	E --

E. Vû donc que C mesure A par les unitéz qui sont en D, & B par les unitéz qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura même raison de A à B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison, ce qui est contre nostre hypothese : A & B sont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celui qui en mesurera l'un sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre desquels sçavoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Vû donc que D

A 6	B 5
C . . . 3	D -

mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouvera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre ; le produit des deux sera aussi premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C, & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est aussi premier à C.

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux, qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux,

A . . 2	B . . 3	C 5
D 6	E . . 2	F . . . 3

sçavoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produit D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B : Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux, E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente ; & par la 23. prop. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison ; & partant ils mesureront également F & B, qui sont en la mesme raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. pr. Mais il mesure aussi c: donc B & C ne seroient pas premiers, contre l'hypothese. Parquoy D sera premier à C. Si donc deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par soy, est premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A & B, & que l'un ou l'autre d'iceux, sçavoir A, multiplié par soy produise C. Je dis que B & C sont premiers entr'eux.

Car si on prend D, égal à A, B sera aussi premier à D. Ainsi A & D estans premiers à B par la 26. p. 7.

A multiplié par D, c'est à dire par soy-même, produira C premier au même B. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A . . . 3	B . . . 4
C 9	D . . . 3

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits seront aussi premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E soit le produit de A multiplié par B, & F produit de C multiplié par D : Je dis que E, & F sont premiers entr'eux.

A . . 2	B . . . 4
C . . 3	D . . . 5
E 8	F 15

Car A & B estans premiers à C, leur produit E sera aussi premier au même C par la 26. pr. Par le même discours E sera aussi premier à D; ainsi C & D estans premiers à E, leur produit F sera aussi premier à E par la même 26. prop. Si donc deux nombres sont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chacun par soy, leurs produits seront premiers entr'eux : Et si iceux produits sont encore multipliez par les nombres proposez au commencement, leurs produits seront encores premiers entr'eux : & cecy aviendra toujours environ les extrêmes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par soy-mesme produise C, mais B multiplié aussi par soy produise D. Je dis que C & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produit E, & B multipliant D produit F. Je dis que E & F seront aussi premiers entr'eux.

A . . . 2	B . . . 3
C 4	D , ... 9
E 8	F 27
G 16	H 81.

Car par là 27. pr. A & B estans premiers, C produit de A multiplié par soy, sera premier au restant B: par mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef, puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. prop. C sera aussi premier à B, & D à A: Mais il a été démontré que C est aussi premier à D: parquoy l'un & l'autre nombre A, C, sera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produit de A en C, sera premier à F, produit de B par D.

Que si encore A multipliant E produit G; & B multipliant F produit H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produit E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par mesme raison F sera aussi premier à A: Ainsi les deux nombres A, E, seront premiers

premiers aux deux B, F, ſçavoir l'un & l'autre & l'un & l'autre ; & partant par la 28. prop. G produit de A en E, ſera auffi premier à H produit de B en F, & ainſi à l'infiny. Parquoy ſi deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

T H E O R. 28. P R O P. XXX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le compoſé d'iceux ſera premier à chacun d'eux : & ſi le compoſé de deux nombres eſt premier à quelqu'un d'iceux, ils ſeront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C : Je diſ que le compoſé des deux A C, ſera premier à chacun d'iceux A B, B C.

Car ſi A C, A B ne ſont premiers, ſoit D leur commune meſure, ſ'il eſt poſſible : ſi donc D meſure le tout A C, & la partie A B, il meſurera auffi le reſte B C, par la 12. com. ſent. Ainſi A B & B C ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypothèſe. Parquoy A C ſera premier à A B : on demonſtrera par la meſme manière que A C eſt auffi premier à B C.

Secondement, ſi le tout A C eſt premier à A B ou à B C. Je diſ qu'iceux A B & B C ſeront premiers entr'eux. Autrement, que D les meſure ſ'ils ne ſont premiers ; il meſurera auffi le compoſé des deux A C, par la 10. com. ſent. Ainſi A C ne ſeroit premier à A B, & B C, ce qui eſt contre l'hypothèſe. A B & B C ſont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloir demonſtrer.

C O R O L L A I R E.

Il ſ'enſuit de cecy, que ſi un nombre compoſé de deux, eſt premier à l'un d'iceux, il ſera auffi premier à l'autre. Car ſi A C eſt premier à A B : A B, B C ſeront premiers entr'eux par la ſeconde partie de cette prop. Donc auffi A C ſera premiere à

BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a
proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, est premier à tout autre
nombre qu'il ne mesure pas.

Soit un nombre premier A, qui ne mesure le nombre
B : Je dis que A & B sont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le sont, ils
auront une commune
mesure autre que l'uni-
té; laquelle soit C, s'il
est possible. Or C ne
peut estre égal à A puis

que nous avons posé que A ne mesure pas B : & par ain-
A estant mesuré par quelque autre nombre, il ne sera
premier contre l'hypothese. Parquoy A & B sont premiers
entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il
falloit demontrer.

A 5	B 9
	C —

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que
quelque nombre premier mesure leur produit
il mesurera aussi l'un d'iceux nombres posez à
commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication des-
quels soit produit C, & que D nombre premier mesure
iceluy C. Je dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre d'
eux A & B, s'il ne les mesure tous deux.

Autrement,
s'il ne mesure
l'un ny l'autre,
qu'il mesure C
par le nombre
E : Si donc D
ne mesure A,

A 4	B 6
C 24	
D 3	E 8

Par la prop. prec. il sera premier à iceluy , & par la 23. prop. ils seront les plus petits de leur raison. Mais d'autant que D multiplié par E fait C , aussi bien que A multiplié par B , par la 19. prop. A sera à D , comme E à B , & par la 21. prop. A & D mesureront également E & B , c'est-à-dire que A mesurera E , & D mesurera B. En la mesme maniere sera démontré que si D ne mesure pas B , qu'il mesurera A. Si donc deux nombres se multiplient l'un l'autre , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Je dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il est composé , il sera mesuré de quelque nombre par la 13. def. & soit de B, lequel sera composé ou non : s'il est premier , la prop. est manifeste : mais s'il est composé , il sera mesuré par un autre nombre ; & soit C, lequel sera premier ou non : s'il est premier , puis qu'il mesure B ; & B mesure A , aussi C mesurera A par la 11. com. sent.

A	8
B	4
C . .	2

Mais si C est composé , il sera mesuré par quelque nombre ; Et pource qu'un nombre ne se diminue infiniment , nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne mesurera ; & partant à un nombre premier , lequel mesurant tous les precedents , mesurera aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier , ou bien mesuré par quelque nombre premier.

E c 2

Soit quelconque nombre A : Je dis qu'iceluy est nombre premier, ou que quelque nombre premier le mesure.

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloir démontrer.

A	5
A	6

P R O B L. 3. P R O P. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étans donnez trouver les plus petits nombres de tous ceux qui auront même raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C & il faut trouver les plus petits en la même raison.

Lefdits nombres A, B, C sont ou nombres premiers ou nombres composez : s'ils sont premiers entr'eux, & à ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composez, soit trouvé D plus grande commune mesure d'iceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle mesure A selon E, B selon F, & C selon G. Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est évident qu'iceux E, F, G sont es mêmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C par les nombres E, F, G;

D multipliant iceux E, F, G, seront produits A, B, C, par la 9. com. sent.

A	6	B	4	C	8
		D . . .	2		
E . . .	3	F . .	2	G . . .	4
H -		I -		K -	L -

& par ce que nous avons démontré à la 18. prop. E, F, G auront la même proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K, les plus petits nombres ayans même proportion qu'iceux A, B, C : ils

les mesureront donc également par la 21. prop. & soit par le nombre L ; ce qu'étant , par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Ven donc que D multipliant E, fait A ; & L multipliant H, fait le même A ; par la 19. prop. il y aura telle raison de D à L, que de H à E : mais H est moindre que E : donc D sera aussi moindre que L : & puis que H, I, K mesurent A, B, C par L ; L mesurera aussi iceux A, B, C par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera pas la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C : ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en même raison , que les proposez A, B, C. Parquoy étans donnez quelconques nombres , nous avons trouvé les plus petits , &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres , mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison qu'iceux proposez.

S C H O L I E.

Par ces choses appert le moyen de trouver les deux plus petits nombres qui ont la même raison , que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouverons les deux moindres en la même raison , si par ce prob. nous prenons E & F en la même raison des deux A & B, c'est à sçavoir ces nombres-là , par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B, mesure iceux. Car par le corol. cy dessus , E & F seront des plus petits de tous ceux qui sont en la même raison que A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C.

Or il advient quelquesfois qu'un des nombres E, F, G, trouvez par cette 35. prop. est l'unité , c'est à sçavoir quand D, plus grande commune mesure des nombres proposez A, B, C, est égal à l'un d'iceux : & alors les nombres trouvez E, F, G sont les plus petits en la continuation de leur proportion , puis qu'il ne se peut donner un nombre moindre que l'unité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouver le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez mesure le plus grand, il est évident qu'iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons : que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non ; si premiers soit multiplié A par B, & le produit soit C. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est évident que C sera mesuré par l'un & par l'autre, & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux

A . . . 3	B . . . 4
C 12	
D ----	
E --	F --

A, B, en soit un autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'étant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. sent. & partant par la 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B, étant premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produit C, & multipliant F produit D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous avons montré que A mesureroit F : donc C mesurera aussi D, sçavoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C étoit donc le moindre nombre que A & B peuvent mesurer.

Soient maintenant les deux nombres A & B composez, & par la prec. prop. soient trouvez C & D les plus petits nombres de la même raison, tellement que ces 4. nombres A,

B, C, D,

soient proportion-

naux: Quoy

posé par la

A . . . 4	B . . . 6
C . . 2	D . . 3
E 12	

19. prop. le produit de A multiplié par D , sera égal au produit de B multiplié par C ; iceluy produit soit E. Donc E sera mesuré par B , & par A : & par le même discours de la précédente démonstration , on montrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A , & par B. Nous avons donc trouvé le plus petit nombre , &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E .

De cecy il s'ensuit , que si deux nombres multiplient les plus petits de leur raison , sçavoir le plus grand , le plus petit , & le plus petit le plus grand ; le produit sera le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car C & D estans poses les plus petits en la raison de A à B , il a esté prouvé que E produit de A plus petit multiplié par D , plus grand ; & de B plus grand par C plus petit , est le plus petit nombre mesuré par A & B.

T H E O R . 33. P R O P . XXXVII.

Si deux nombres mesurent un autre nombre ; le plus petit qu'ils mesurent , mesurera aussi cet autre nombre.

Soient deux nombres A , & B , qui en mesurent un autre CD , & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Je dis que E mesurera aussi CD.

Autrement , si E ne mesure CD ; après avoir ôté E de CD , tant de fois que

l'on pourra , il restera un nombre moindre que E :

qu'il laisse donc FD plus petit que E , s'il est possi-

ble : A & B mesurans E , ils mesureront aussi CF

par la 11. com. sent. Mais ils mesurent le tout CD par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E , ce qui est impossible , étant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD : Si donc deux nombres mesurent un autre nombre , &c. Ce qu'il falloit prouver.

A . . 2	B . . . 3	1
C	F	D
E 6		

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A , B , C ; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils peuvent mesurer.

Soit trouvé D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B , par la 36. prop. Or C mesure aussi D , ou ne le mesurera pas : s'il le mesure ; Je dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A , B , C , peuvent mesurer : car s'il ne l'est , en soit quelque autre plus petit E , s'il est possible , lequel tous

les trois A , B , C mesurent. D'autant que A & B mesurent B moindre que D , iceluy D , ne sera le moindre que A & B mesurent,

A ..2	B ...3	C 6
D	6	
E —		

ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuvent mesurer les nombres proposez A, B, C.

Que si D n'est aussi mesuré par C : par la même 36. prop. soit trouvé E plus petit nombre mesuré par C & D ; Je dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

Car premierement E est mesuré par A , B , C : d'autant que C & D le mesurent ; & A & B mesurant D , par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A , B , C , soit F plus petit , s'il est possible : donc A & B mesurant F ; D le

plus petit mesuré par eux , mesurera aussi F par la prec. prop. Mais C mesure aussi F ; (car A , B & C le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la même prop. E plus

A ..2	B ...3	C 4
D	6	
E	12	
F —		

petit mesuré par C & D , mesurera aussi F ; le plus grand un plus petit ; ce qui est impossible. Donc E étoit le plus

petit nombre mesuré par A., B, C. Estant donc donnez trois nombres nous avons trouvé le plus petit qu'ils peuvent mesurer : Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste , que si trois nombres en mesurent quelque autre ; le plus petit qu'ils mesureront , mesurera aussi cet autre. Car il a été démontré que A, B, C, mesurant F ; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le même nombre F.

S C H O L I E.

Par même raison étans donnez plus de trois nombres , nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez , il faudra trouver le moindre que tous mesurent : si 5 , il faudra trouver le plus petit que 4 mesurent , &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a été dit de trois nombres.

T H E O R. 34. P R O P. XXXIX.

Si un nombre mesure un autre nombre ; le mesuré aura une partie dénommée par le mesurant,

Soit le nombre A , lequel mesure le nombre B. Je dis qu'iceluy B contiendra une partie dénommée par A.

Qu'ainsi ne soit ; que A mesure B selon C , c'est-à-dire , autant de fois qu'il y a d'unitéz en C ; par là 15.

prop. C mesurera B autant de fois que l'unité mesure A ; & C sera telle partie de B que l'unité de A.

Unité.		
A ... 3	B 6	C . . 2

Mais l'unité est une partie

de A , dénommée par iceluy A , comme nous avons dit en la 2. def. de ce 7. livre : donc aussi C sera une partie de B dénommée par A. Si donc un nombre , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si un nombre a une partie quelle qu'elle soit le nombre nommant cette partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B dénommée par le nombre C. Je dis que C mesure A.

Car puis que B est partie dénommée par C; & l'unité est une partie de C, dénommée par le même C; comme l'unité mesure C, ainsi B mesure A: & par la 15. prop. en permutant comme l'unité mesurera B, ainsi C mesurera

A.....12
B...3 C....4

A. Parquoy si un nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouver le plus petit nombre, qui ait les parties données.

Soient les parties données A, B, C; il faut trouver le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D, E, F, dénommez par icelles parties A, B, C; & par la 38. prop. soit trouvé G, le plus petit nombre que peuvent mesurer D, E, F: Je dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F mesurent G; par la 39. prop. G aura les parties dénommées par D, E, F, c'est-à-dire les parties A, B, C. Je dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties. Et H sera mesuré par les nombres D, E, F dénommées par les parties A, B, C.

A deuxieme	D...2
B tiers	E...3
C quart.	F....4
G.....	12
H.....	

par la precedente proposition : & partant puis que H est moindre que G ; iceluy nombre G ne sera pas le plus petit que peuvent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. Donc G est le moindre nombre, ayant les parties données A, B, C. Parquoy nous avons trouvé le plus petit nombre ayant les parties données : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. livre les prop. & démonstrations qui conviennent & ont lieu aussi bien aux nombres rompus qu'aux entiers ; si est-ce neanmoins que pour donner une entière & parfaite intelligence des regles & preceptes enseignez en nôtre Pratique d'Arithmetique touchant les fractions, nous avons estimé être besoin d'ajouter icy les prop. suivantes.

D E M O N S T R A T I O N S D E S
fractions, ou nombres rompus.

1. Si deux fractions ont un même dénominateur, & que l'unité soit le numerateur de l'une d'icelles fractions; elles auront même raison entr'elles que les numerateurs.

Soient deux fractions AB, CB, ayans un même dénominateur B, & le numerateur C soit l'unité : je dis que le nombre rompu AB est au nombre rompu CB, comme le numerateur A est au numerateur C. Car vu que la fraction AB se divise en autant de fractions esgales à la fraction CB qu'il y a d'unitiez en A, chacune d'icelles fractions ayant le numerateur C, & le dénominateur B; autant de fois que l'unité C est contenue en A, autant de fois la fraction CB est contenue en la fraction AB : parquoy l'unité C est même partie du nombre A, que la fraction CB de la fraction AB; & partant par la 20. def. 7. comme l'unité C est à A, ainsi la fraction CB est à la fraction AB; & en changeant, le numerateur A sera au numerateur C, comme la fraction AB sera à la fraction CB. . Ce qui estoit à prouver.

A	C
B	B

2. Le numérateur de quelconque fraction a même raison au dénominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle provient.

Soit quelconque fraction AB : je dis que le numérateur A est au dénominateur B comme la fraction AB est à son entier. Soit pris une fraction CB dont le numérateur C est l'unité, & le dénominateur est le même B ; mais soit une autre fraction DB , de laquelle le numérateur D soit esgal au même dénominateur B , afin qu'icelle fraction DB soit esgale à l'entier de la fraction AB . D'autant que par la prop. prec. comme A est à C , ainsi la fraction AB est à la fraction CB ; & comme C est à D , ainsi la fraction CB est à la fraction DB ; en raison esgale, comme A sera à D , c'est-à-dire le numérateur A au dénominateur B , (car B est esgal à D) ainsi la fraction AB sera à la fraction DB , c'est-à-dire à l'entier : ce qui a esté proposé.

$$\left| \begin{array}{cc} A1 & C1 \\ B8 & B8 \end{array} \right|$$

3. Les fractions qui ont un même dénominateur sont entr'elles en même raison que leurs numérateurs.

Soient quelconques fractions AB , CB , ayans un même dénominateur B : je dis que la fraction AB est à la fraction CB , comme le numérateur A est au numérateur C . Car puis que par la prop. prec. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à son entier, & que comme B est à C , ainsi l'entier est à la fraction CB ; (car par la même prop. prec. comme C à B , ainsi la fraction CB à son entier, & en changeant comme B à C , ainsi l'entier à la fraction CB) en raison esgale, comme le numérateur A sera au numérateur C , ainsi la fraction AB sera à la fraction CB . Ce qui estoit à démontrer.

$$\left| \begin{array}{cc} A7 & C5 \\ B21 & B21 \end{array} \right|$$

S'il y avoit plus de deux fractions, on prouveroit en la même maniere que la seconde seroit à la troisieme, comme le numérateur au numérateur ; & puis après la troisieme à la quatrieme, & ainsi consecutivement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les dénominateurs de toutes les autres, les nombres produits seront entr'eux, en même proportion que les fractions.

Nous disons le numerateur d'une fraction être multiplié par le denominateur de toutes les autres, quand iceluy numerateur est multiplié par le denominateur de l'une des autres fractions, & puis encore le produit par le denominateur de l'une des restantes, & ainsi continuellement tant qu'il y aura de fraction : & n'importe par quel ordre on les prenne, puis que le produit est toujours le mesme, comme nous avons démontré au Scholie de la 19. prop. 7.

Soient premierement deux fractions AB , CD , & de A en D soit fait E , mais de C en B soit fait F : je dis que le produit E est au produit F , comme la fraction AB , est à la fraction CD . Qu'ainsi ne soit ; de B en D soit fait G : donc puis que D multipliant A & B , a fait E & G , par la 17. prop. 7. comme A sera à B , ainsi E sera à G :

Mais par la 2. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à son entier. Donc aussi comme la fraction AB sera à son entier, ainsi E sera à G . Derechef, pource que B multipliant D & C a fait G & F , par la mesme 17. prop. 7. comme D sera à C , ainsi G sera à F . Mais comme D est à C , ainsi l'entier est à la fraction CD :

E	8	F	9
A	2	C	3
B	3	D	4
G	12		

(car puis que par la 2. prop. comme C à D , ainsi la fraction CD à son entier, en changeant comme D à C , ainsi l'entier à la fraction CD .) Donc comme G sera à F , ainsi l'entier sera à la fraction CD . Parquoy la fraction AB , l'entier, & la fraction CD seront en mesme proportion que les trois produits E , G , F . Donc en raison esgale comme E sera à F , ainsi la fraction AB sera à la fraction CD . Ce qui a esté proposé.

Soient maintenant les trois fractions AB , CD , HI , & que de A en D soit fait E , & de E en I soit produit L : mais que de C en B soit fait F , & de F en I vienne M : fina-

blement que de B en D soit fait G, & de G en H vienne N. je dis que les trois produits L, M, N sont entr'eux en même proportion que les fractions proposées AB, CD, HI. Car puis que I multipliant E & F fait L & M, par la 17. prop. 7. comme E est à F, ainsi est le produit L au produit M : par la demonstration prec. comme E est à F, ainsi la fraction AB est à la fraction CD. Donc le produit L est au produit M comme la fraction AB à la fraction CD. Deveshef puis que B multipliant C & D a fait F & G, comme C à D, ainsi F à G : Mais aussi I multipliant F & G a fait M & K. Donc iceux produits M & K seront entr'eux comme F à G, c'est-à-dire comme C à D. Mais par la 2. prop. comme C à D, ainsi la fraction CD à son entier : Donc aussi comme la fraction CD sera à l'entier, ainsi sera M à K. Semblablement G multipliant I & H, fait K & N ; partant comme I à H, ainsi K à N. Mais il appert par ce qui a esté démontré cy-dessus, que comme I est à H, ainsi est l'entier à la fraction HI. Donc comme l'entier sera à la fraction HI, ainsi K sera à N. Parquoy la fraction CD, l'entier, & la fraction HI, seront en même proportion que les produits M, K & N : donc en raison esgale, comme la fraction CD sera à la fraction HI, ainsi le produit M sera au produit N. Mais nous avons déjà démontré cy-dessus, que comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi est le produit L au produit M : donc les trois produits L, M, N seront entr'eux en même proportion que les trois fractions AB, CD, HI. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y a quatre fractions, on démontrera en la même sorte que comme la troisesme sera à la quatriesme, ainsi le produit correspondant à cette là sera au produit correspondant à cette-cy ; & ainsi continuellement de fraction en fraction, repétant toujours la demonstration cy-dessus.

Or il appert de cette demonstration que si les susdits produits estoient esgaux, les fractions seroient aussi esgales : & au contraire que les fractions estans esgales, lesdits produits seront pareille-

L 40	M 45	
E 8	F 9	N 24
A 2	C 3	H 2
B 3	D 4	I 5
G 12 K 60		

ment esgaux : Mais qu'estans inegales , le produit de la plus grande sera le plus grand , & de la moindre , le moindre , & ainsi des autres.

5. L'entier a même raison à la somme de deux ou davantage de fractions , que le nombre produit des dénominateurs multipliez entr'eux à la somme des produits du numerateur de chaque fraction multiplié par les dénominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB , CD , EF , & que de B en D & F soit procréé K ; & de A en D & F soit fait G ; mais de C par B & F soit produit H ; & de E par B & D soit fait I : Je dis que l'entier est à la somme des fractions AB , CD , EF , comme le produit K est à la somme des produits G , H , I .

Car puisque par la prop. prec. les fractions AB , CD , EF , sont entr'elles comme les produits G , H , I , par le 5. theor. du Scholie de la 22. prop. 7. comme la somme d'icelles fractions AB , CD , EF est à la fraction EF , ainsi la somme des produits G , H , I est au produit I . Mais comme la fraction EF est à l'entier , ainsi I est à K : (car par la 2. pro.

G 16	H 12	I 18
A 2	C 1	E 3
B 3	D 2	F 4
K 24		

comme la fraction EF est à l'entier , ainsi E est à F , & par la 18. prop. 7. comme E à F , ainsi I à K , pource que E , F multipliant le produit de B en D ont fait I & K .) Donc en raison esgale comme la somme des fractions AB , CD , EF est à l'entier , ainsi la somme des produits G , H , I est à K : & au contraire , comme l'entier est à la somme des fractions AB , CD , EF , ainsi K est à la somme des produits G , H , I . Ce qu'il falloit démontrer.

6. Si deux fractions ont un même numerateur , comme la premiere fraction sera à la seconde , ainsi le dénominateur de la seconde sera au dénominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB , AC , ayans un même nume-

rateur A : Je dis que la fraction AB est à la fraction AC , comme le dénominateur C est au dénominateur B . Car de A en C soit fait D , & de A en B soit produit E . Or puis que A multipliant C & B , fait D & E , par la 17. prop. 7. comme C sera à B , ainsi D sera à E . Mais par la 4. prop. comme D est à E , ainsi la fraction AB est à la fraction AC :

Donc aussi la fraction AB sera à la fraction AC , comme C sera à B . Ce qu'il falloit prouver.

D_{10}	E_6
A_2 B_3	A_2 C_5

7. Les fractions desquelles les numerateurs ont une même raison aux dénominateurs sont égales entr'elles : Et des fractions égales, les numerateurs ont une même raison aux dénominateurs : Mais des inégales, celles dont le numerateur a plus grande raison au dénominateur, est la plus grande : Et de la plus grande, le numerateur a plus grande raison au dénominateur.

Soient deux fractions AB , CD , & qu'il y ait même raison du numerateur A au dénominateur B , que du numerateur C au dénominateur D : Je dis qu'icelles fractions AB , CD , sont esgales. Car ayant fait E de A en D , & F de B en C : comme la fraction AB est à la fraction CD , ainsi E à F , par la 4. prop. Mais puis que comme A est à B , ainsi C est à D ; par la 19. prop. 7. les deux produits E & F seront égaux : donc aussi la fraction AB sera égale à la fraction CD . Ce qu'il falloit prouver.

E_{12}	F_{12}
A_2 B_3	C_4 D_6

Soient maintenant deux fractions égales AB , CD : Je dis que comme A est à B , ainsi C à D : Car comme à la prec. démonst.

ayant fait E de A en D , & F de B en C , comme AB sera à CD , ainsi E à F . Mais AB est égale à CD : donc aussi E sera égal à F ; & par la 19. prop. 7. comme A sera à B , ainsi C sera à D : Ce qu'il falloit démontrer.

En troisième lieu, qu'il y ait plus grande raison de A à B , que de C à D : Je dis que la fraction AB est plus grande que la fraction CD . Car ayant fait E de A en D , & F de B en C , par la 4. prop. comme la fraction AB sera à la fraction CD , ainsi

ainsi E à F. Mais par le Scholie de la 19. prop. 7. le nombre E est plus grand que le nombre F : donc aussi la fraction AB sera plus grande que la fraction CD. Ce qu'il falloit prouver.

Finablement ; que la fraction AB soit plus grande que la fraction CD : je dis que la raison de A à B est plus grande que celle de C à D. Car comme dessus la fraction AB sera à la fraction CD, comme E à F.

Mais par l'hypothese la fraction AB est plus grande que la fraction CD : donc aussi E sera plus grand que F. Et puis que E est le produit de A en D, & F celui de B en C, par le Scholie de la 19. prop. 7. il y aura plus grande raison de A à B, que de C à D. Ce qu'il falloit prouver.

E 14	F 9
$\frac{A_2}{B_3}$	$\frac{C_3}{D_7}$

8. Les fractions dont les numerateurs sont en même raison que les dénominateurs, sont égales entr'elles. Et des fractions égales, les numerateurs ont même raison entr'eux, que les dénominateurs. Mais des fractions inégales, celle dont le numerateur a plus grande raison au numerateur, que le dénominateur au dénominateur, est la plus grande ; & de la plus grande, le numerateur a plus grande raison au numerateur, que le dénominateur au dénominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait même raison du numerateur A au numerateur C, que du dénominateur B au dénominateur D : je dis qu'icelles fractions AB, CD, sont égales. Car en raison permutee A sera à B, comme C à D ; & partant par la proposition precedente les fractions sont égales. Ce qu'il falloit prouver.

$\frac{A_2}{B_3}$	$\frac{C_4}{D_6}$

Mais soient les fractions AB, CD, égales : je dis que comme A est à C, ainsi B est à D. Car par la prop. prec. comme A sera à B, ainsi C sera à D ; & en permutant, comme A sera à C, ainsi B sera à D. Ce qui étoit à prouver.

$\frac{A_5}{B_6}$	$\frac{C_2}{D_3}$

Maintenant, qu'il y ait plus grande raison de A à C, que de B à D : je dis que la fraction AB

F f

est plus grande que la fraction CD . Car en permutant, y aura plus grande raison de A à B , que de C à D ; & la prec. prop. la fraction AB , sera plus grande que la fraction CD : Ce qu'il falloit prouver.

En dernier lieu, soit la fraction AB plus grande que la fraction CD : Je dis qu'il y a plus grande raison de A à B , que de C à D . Car par la prec. prop. il y aura plus grande raison de A à B , que de C à D ; & partant en permettant, la raison de A à C sera plus grande que de B à D . Ce qu'il falloit prouver.

9. Reduire les fractions de diverses dénominations à autant d'autres fractions de même dénomination, qu'il leur soient égales, chacune à la sienne.

Soient premièrement les deux fractions AB , CD , ayant divers dénominateurs B , D : & il faut les réduire à deux autres fractions qui leur soient égales, & d'une même dénomination. Soit fait E de A en D ; & F de B en C ; mais G de B en D : Je dis que les fractions EG , FG , qui ont un même dénominateur G , sont égales aux fractions AB , CD , chacune à la sienne, c'est-à-dire que EG est égale à AB , & FG à CD . Car d'autant que A & B multipliant D , ont fait E & G : par la 18. prop. 7. comme A à B , ainsi E à G : & par la 7. prop. les fractions EG , AB sont égales. Par même raison on prouvera que la fraction FG est égale à la fraction CD .

$E8$	$F9$
$A2$	$C3$
$B3$	$D4$
$G12$	

Maintenant, soient trois fractions de diverses dénominations AB , CD , EF : lesquelles il faut réduire à trois autres d'une même dénomination, qui leur soient égales, chacune à la sienne. Tout ainsi que dessus soit fait G de A en D , & H de B en C ; mais I de B en D : puis après soit fait K de G en F ; L de H en F ; M de I en E ; & N de I en F . Je dis que les trois fractions KN , LN , & MN , qui ont un même dénominateur N , sont égales aux trois fractions AB , CD , EF , chacune à la sienne.

$K12$	$L16$	
$G3$	$H4$	$M18$
$A1$	$C2$	$E3$
$B2$	$D3$	$F4$
$I6$	$N24$	

Car premierement, il appert par ce qui a été démontré y-dessus, que GI est égale à AB , & HI à CD : Mais puis que F multipliant G , H , I , a produit K , L , N , par le Scholie de la 18. prop. 7. iceux produits sont entr'eux en même proportion, que G , H , I . Parquoy KN sera aussi égale à AB , & LN à CD . Semblablement, pource que I multipliant E & F , fait M & N , comme E est à F , ainsi M à N , & par la 7. prop. la fraction MN sera égale à la fraction EF . Par ainsi nous avons trouvé les trois fractions KN , LN & MN , qui ont un mesme dénominateur N , & sont égales aux trois proposées AB , CD , EF , chacune à la sienne. Ce qu'il falloit faire.

Que s'il y avoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme dessus, puis multiplier chaque numerateur d'icelles par le dénominateur de la quatrième fraction, & leur dénominateur commun tant par le numerateur que dénominateur d'icelle quatrième fraction : & ainsi on auroit quatre fractions d'une même dénomination égales aux proposées. Bref, il appert assez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diverses dénominations à reduire à une même dénomination, que multipliant le numerateur de chacune d'icelles fractions par les dénominateurs de toutes les autres, viendra le numerateur de chacune, & puis multipliant tous les dénominateurs entr'eux, sera procréé le dénominateur commun : & ce en quelconque ordre & façon qu'on fasse lesdites multiplications, puis que par le Theor. du Scholie de la 19. prop. 7. lors que trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit est toujours un même en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce soit à une fraction dont le dénominateur est donné.

Premierement l'entier soit l'unité A , qu'il faut reduire à une fraction dont le dénominateur est B .

Soit pris le numerateur C égal au dénominateur B : se dis que la fraction CB est égale à l'unité A ; Car par la 2. prop. comme C est à B , ainsi la fraction CB est à l'entier A . Mais C est égal à B ; donc aussi la fraction CB est égale à l'entier A , c'est à dire à l'unité.

$$\frac{C4}{A1 \quad B4}$$

Maintenant que l'entier soit le nombre A , lequel il faut réduire à la fraction dont le dénominateur est B . De A en B fait le numérateur C : Je dis que la fraction CB est égale au nombre entier A . Soit posée l'unité D au dessous de A , afin que la fraction AD soit égale à autant d'unités qu'il y en a au nombre A . Or d'autant que de la multiplication de A en B est fait C , par la 15. def. 7. le nombre B sera aussi autant de fois en C , qu'il y a d'unités en A . Donc comme A sera à D , ainsi C sera à B . Parquoy des fractions AD , CB les numérateurs A & C , ont une même raison aux dénominateurs D & B : partant elles seront égales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction AD est égale à l'entier A , à cause que le dénominateur D est l'unité : Donc aussi la fraction CB sera égale au même entier A . Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

A	C
D	B

II. Doubler & medier une fraction donnée.

Premièrement qu'il faille doubler la fraction AB . Soit doublé le numérateur A , afin que soit fait le numérateur C , demeurant le même dénominateur B : Ou bien lors que le dénominateur B est pair en soit pris la moitié, afin d'avoir le dénominateur D , demeurant le même numérateur A . Je dis que chaque fraction CB , AD , est double de la fraction AB . Car puis que les fractions AB , CB , ont un même dénominateur B , par la 3. prop. comme le numérateur C sera au numérateur A , ainsi la fraction CB sera à la fraction AB . Mais par la construction C est double de A : donc aussi la fraction CB sera double de la fraction AB .

A	C	A
B	B	D

De rechef, pource que les fractions AB , AD , ont un même numérateur A , par la 6. prop. comme le dénominateur B sera au dénominateur D , ainsi la fraction AD sera à la fraction AB . Mais par la construction B est double d'iceluy D : donc aussi la fraction AD sera double de la fraction AB .

Maintenant qu'il faille prendre la moitié de la fraction AB . Soit doublé le dénominateur B , afin qu'il en vienne le dénominateur C , demeurant le même numérateur A : Ou bien quand le numérateur A est pair, en soit pris la moitié, qui soit E avec le même dénominateur B . Je dis que chaque fraction

AC, DB est moitié de la fraction AB.

Car puis que les fractions AB, AC

ont un même numérateur par la 6.

prop. comme B sera à C, ainsi la fra-

ction AC sera à la fraction AB.

Mais par la construction B est la

moitié de C : Donc aussi la fraction AC sera moitié de la

fraction AB.

Derechef, puis que les fractions AB, DB, ont un même dé-
nominateur, par la 3. prop. comme D sera à A, ainsi la fra-
ction DB sera à la fraction AB. Vu donc que par la constru-
ction D est moitié de A, aussi la fraction DB sera moitié de la
fraction AB. Nous avons donc doublé, & pris la moitié de la
fraction donnée AB. Ce qu'il falloit faire.

En la même maniere une fraction donnée sera triplée, qua-
druplée, &c. si on triple, quadruple, &c. le numérateur de-
meurant le même dénominateur : Ou bien si on prend (quand
il se peut faire) le tiers, le quart, &c. du dénominateur, de-
meurant le même numérateur. Pareillement on aura le tiers,
le quart, &c. D'une fraction donnée, si on triple, quadruple,
&c. le dénominateur, demeurant le même numérateur : Ou
bien si on prend (lors qu'il se peut faire) le tiers, le quart,
&c. du numérateur, le même dénominateur demeurant :
Ce qu'on démontrera en la même maniere que dessus.

12. La fraction de fraction est égale à la fraction simple
de laquelle le numérateur est procédé de la multiplication
des numérateurs entr'eux, & le dénominateur est produit
des dénominateurs aussi multipliés entr'eux.

Soit premierement AB une fraction de la fraction CD, la
valeur de laquelle au respect de l'unité, ou du nombre entier
E, soit exprimée par F; mais de A en C soit fait G, & de B en D
soit produit H: se dit que la fraction de fraction donnée est esgale
à la simple fraction GH, au respect de l'entier E. Car soit encore
fait I de B en C; & par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la
fraction AB est à son entier, c'est à sçavoir à la fraction CD,
de laquelle l'entier est E. Mais par la 18. prop. 7. comme A est
à B ainsi G à I, pource que A, B, multiplians C, pro-
duisent iceux G, I : donc aussi comme la fraction AB
sera à la fraction CD, ainsi sera G à I. Derechef, pource
que par la 2. prop. comme C est à D, ainsi la fraction CD

est à son entier E, & que par la

17. prop. 7. comme C à D, ainsi

I à H: aussi la fraction CD sera

à son entier E, comme I à H.

Vu donc que comme la fraction

AB est à la fraction CD, ainsi

G est à I; & comme la fraction

CD est à son entier E, ainsi est I

à H; en raison égale, comme AB

fraction de la fraction CD est

à l'entier E, ainsi G est à H: Mais nous avons posé que

icelle fraction de fraction soit esgale la simple fraction

F: donc aussi la fraction F sera à l'entier E, comme

G à H. Mais par la 2. prop. comme G est à H, ainsi

fraction GH est au même entier E: Donc les fraction

simples F & GH seront égales; & partant puis que

fraction F est égale à la fraction de fraction donnée, aussi la

fraction GH sera esgale à la fraction AB au respect de la fra

ction CD, duquel l'entier est E. Ce qu'il falloit prouver.

Soit maintenant AB fraction de CD, qui est aussi fraction

de la fraction EF; & soit fait G de A en C; & H de B en D

Item I de G en E; & K de H en F: Je dis que la fraction

IK est égale à la fraction de fraction donnée. Ce qui est man

ifeste, veu que par la démonstration

prec. la fract. GH est esgale à AB, fra

ction de la fraction CD; tellement qu'i

celle GH est fraction de la fraction EF,

à laquelle est aussi esgale la fraction IK,

par la même démonstration.

Que s'il y avoit davantage de fra

ctions, c'est à dire que EF fust enco

fraction d'une autre fraction, le produit

de I, K, par cette autre fraction, donneroit pareillement la

fraction simple esgale à la fraction de fraction donnée; & ainsi

continuellement s'il y avoit davantage de fractions.

Il appert donc qu'estant donnée une fraction de tant de

fractions qu'on voudra on la reduira en une simple fraction,

multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis aussi tous

les denominateurs entr'eux.

G 6 I 9

A² C³ E¹ F²

B³ D⁵ E²⁰ F³

H 15

G 10 I 30

A⁵ C² E³

B⁶ D³ F⁴

H 18

13. Reduire une fraction donnée à minimès termes.

Soit une fraction AB , qu'il faut reduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A, B , seront premiers entr'eux, ou non; s'ils sont premiers, la fraction AB ne pourra être reduite à plus petite dénomination. Car soit reduite, s'il est possible, à moindres termes C, D , tellement que la fraction CD soit égale à la fraction AB . D'autant que par la 7. prop. comme A est à B , ainsi C à D , & que les nombres C, D , sont moindres que les nombres A, B ; iceux A, B , ne seront les moindres termes de cette raison: Mais par la 23. prop. 7. ils sont aussi les plus petits, veu qu'ils sont premiers entr'eux: Ce qui est absurde.

$$\frac{A7}{B8} = \frac{C}{D}$$

Maintenant que A, B , ne soient premiers entr'eux: & par la 2. prop. 7. la plus grande mesure d'iceux soit C , qui mesure A par D ; & B par E : Je dis que la fraction DE est égale à la fraction AB , & constituée aux plus petits termes qu'elle puisse estre. Car puis que C mesure A & B par D & E ; par la 7. com. sent. 7. Iceux A, B , seront produits de C en D, E , & par la 19. prop. 7. comme A sera à B , ainsi D à E , & partant par la 7. prop. les fractions AB, DE , seront esgales. En apres, pource que C , plus grande mesure des nombres A, B , les mesure par D, E ; par le corol. de la 35. prop. 7. iceux D, E , seront les plus petits nombres de tous ceux qui ont même raison que A à B . Nous avons donc reduit la fraction donnée AB en sa plus petite denomination DE : Ce qu'il falloit faire.

$$\frac{A6}{B9} = \frac{D2}{E3}$$

$$C3$$

14. Estant donnée une fraction, la reduire (si faire se peut) à une autre égale de dénomination donnée.

Soit donnée la fraction AB , qu'il faut reduire à une autre esgale, de laquelle le dénominateur soit C . De A en C , soit fait D , lequel B mesure par E : Je dis que la fraction EC , qui a le denominateur donné. C'est esgale à la fraction donnée AB . Car puis que B mesure D par E , par le 9. ax. 7. D sera fait de B en E : Mais il a aussi esté fait de A en C . Donc par la 19. proposition 7. comme A sera à B , ainsi E sera à C ; & par la 7. proposition les fractions AB, EC seront esgales.

$$\frac{A2}{B3} = \frac{E6}{C9}$$

$$D18$$

Que si B ne mesure D procréé de A en C, la fraction donnée ne se pourra réduire à la dénomination donnée C. Car soit réduite, s'il est possible, à la fraction EC. Donc puisque les fractions AB, EC sont égales, comme A sera à B, ainsi E sera à C par la 7. prop. & passant par la 19. prop. 7. le nombre produit de B en E sera égal à celui fait de A en C, c'est à sçavoir D. Donc par le 7. ax. 7. B mesurera D par E : Ce qui est absurde, puis qu'on a posé que B ne mesure D.

A 2	E.
B 7	C 7
D 14	

Or la réduction de fraction, qui en l'Arithmétique pratique, est vulgairement appelée Evaluation, dépend de cette prop. ven qu'évaluer une fraction n'est autre chose, que trouver une fraction égale à la donnée, qui ait pour dénominateur le nombre & valeur de l'entier proposé.

Comme par exemple, quand on veut évaluer les $\frac{2}{5}$ d'une livre, ce n'est autre chose que trouver une autre fraction égale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour dénominateur le nombre 20, qui est la valeur de la livre : & suivant

A 2	E 8
B 5	C 20
D 40	

ce qui est icy démontré, si ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numérateur de la fraction donnée, on divise le produit 40 par le dénominateur 5, viendra 8 pour le numérateur de ladite fraction cherchée, c'est à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ sera égale à la donnée $\frac{2}{5}$; au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut aussi dire 8 sols, puis que l'entier auquel se referoit la fraction donnée vaut 20 sols.

15. Quand un nombre est divisé par un autre plus grand , le quotient est une fraction de laquelle le nombre à diviser est numérateur , & le diviseur dénominateur.

Soit le nombre A , qu'il faut diviser par un plus grand nombre B : je dis que le quotient est la fraction AB , de laquelle le nombre à diviser A , est numérateur , & le diviseur B dénominateur.

$$\left| \begin{array}{cc} A5 & B7 \\ \hline A5 & B7 \end{array} \right|$$

Car d'autant que par la

7. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à l'entier , c'est-à-dire à l'unité par la def. de la division (La division d'un nombre par un nombre est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'unité que le nombre dividande au diviseur) la fraction AB sera quotient du nombre A divisé par le nombre B . Ce qu'il falloit prouver.

16. Adjoûter plusieurs fractions en une somme.

Qu'il faille premierement adjoûter ensemble deux fractions AB , CB d'une même dénomination. Soient adjoûtez ensemble les numérateurs A , C , la somme desquels soit D , au dessous de laquelle soit posé le même dénominateur B : je dis que la fraction DB , est la somme de l'addition des fractions AB , CB . Car d'autant que les fractions ont un même dénominateur , par la 3. prop. comme A sera à C , ainsi la fraction AB sera à la fraction CB ; & en composant , comme A , C ,

$$\left| \begin{array}{ccc} A2 & C3 & D5 \\ \hline B7 & B7 & B7 \end{array} \right|$$

ensemble à C, ainsi les fractions AB, CB ensemble à la fraction CB. Mais par la même 3. prop. comme C à D, ainsi la fraction CB à la fraction DB. Donc en raison égale, comme AC, ensemble à D, ainsi les fractions AB, CB ensemble à la fraction DB. Vû donc que par la construction A, C, ensemble sont égales à D, aussi les fractions AB, CB ensemble, seront égales à la fraction DB.

Soient maintenant trois fractions de diverses dénominations AB, CD, EF, lesquelles il faut adjoûter ensemble. Les fractions proposées soient reduites à autant d'autres fractions de même dénomination GK, HK, IK, par la 9. prop. puis soient adjoûtez en-

semble les numérateurs G, H, I, dont la somme soit L, à laquelle soit suppose le dénominateur commun K, & la fraction LK, sera la somme des trois

G 12. H 16 I 18			
A ₁	C ₂	E ₃	L ₄₆
B ₂	I	F ₄	K ₂₄
K 24			

fractions proposées. Car d'autant que par la 3. prop. les numérateurs G, H, I, sont en même proportion que les fractions GK, HK, IK, par le 5. Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G, H, I ensemble seront à I, comme les trois fractions AB, CD, EF ensemble seront à la fraction EF. Mais par la 3. prop. comme I est à L, ainsi aussi la fraction EF est à la fraction LK, Donc en raison égale, comme les trois nombres G, H, I ensemble seront à L, ainsi les trois

fractions AB , CD , EF ensemble seront à LK . Mais par la construction le nombre L est égal aux trois G , H , I : Donc aussi la fraction LK sera égale aux trois proposées AB , CD , EF . Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

Or ayant réduit les fractions proposées à une même dénomination, & ajouté ensemble les numérateurs trouvez, puis à la somme L , supposé le dénominateur commun K ; on prouvera encore que la fraction LK est égale aux proposées en cette sorte. D'autant, que par la 5. prop. comme l'entier est à la somme des fractions AB , CD , EF , ainsi le dénominateur commun K est à la somme des produits G , H , I , c'est-à-dire L ; en changeant, comme la somme des fractions AB , CD , EF ; sera à l'entier, ainsi L sera à K . Mais par la 2. prop. comme L est à K , ainsi aussi la fraction LK est au même entier. Donc comme la somme des fractions AB , CD , EF , est à l'entier, ainsi la fraction LK est au même entier : & partant la somme des fractions AB , CD , EF , sera égale à la fraction LK . Ce qui étoit proposé.

Que si les fractions proposées à ajouter ne se referoient à l'unité, ains à quelque nombre entier, la somme d'icelles se rapporteroit au même nombre. Par exemple s'il falloit ajouter $\frac{2}{5}$ du nombre 60 avec les $\frac{2}{7}$ du même nombre, la somme d'icelles fractions seroit $\frac{19}{35}$, qui se refereroient aussi au même nombre 60 ; tellement que ce seroit 76 : car les $\frac{2}{5}$ de 60 sont 40, & les $\frac{2}{7}$ sont 36, lesquels deux nombres adjointz ensemble, font le susdit nombre 76.

17. Oter une petite fraction d'une plus grande.

De la fraction AB , qu'il en faille ôter une moindre fraction CB , laquelle est de même dénomination. Soit ôté le numérateur C du numérateur A , & au dessous du reste

D , soit posé le même dénominateur B : Je dis que la fraction DB est ce qui reste après avoir soustrait la fraction CB

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & C & D \\ \hline B & B & B \\ \hline \end{array}$$

de la fraction AB . Car puisque C ôté de A , reste D ; A est composé de C & D : donc la fraction AB , de laquelle le numérateur A est l'aggrégé des numérateurs C , D , est la somme des deux fractions CB , DB , comme il a été démontré en la préc. prop. Parquoy ayant ôté la fraction CB de la fraction AB , restera la fraction DB .

Mais si de AB , il faut ôter une moindre fraction CD , qui a un autre dénominateur que AB : par la 9. prop. icelles fractions AB , CD , soient reduites à deux autres d'une même dénomination EG , FG : puis soit ôté le numérateur F du numérateur E , & reste H , au dessous duquel soit apposé le dénominateur commun G : Je dis qu'après avoir ôté la fraction CD de la plus grande fraction AB , reste la fraction HG , ainsi qu'il appert par la démonstration cy-dessus. Ce qu'on peut encore démontrer ainsi d'autant que D multipliant A , B fait E , G , par la 17. prop. 7. comme A sera à B , ainsi E sera à G . Mais par là 2. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à l'entier.

Donc aussi comme E à G , ainsi la fraction $\frac{A}{B}$ est à l'entier. Derochef , pource que B multipliant C , D , fait F , G , comme C sera D , ainsi F à G . Mais aussi comme C à D , ainsi la fraction $\frac{C}{D}$ est à l'entier. Donc comme F à G , ainsi la fraction $\frac{CD}{G}$ est à l'entier. Vû donc que comme F première est à G deuxième,

E 15	F 8	
A 30	C 2	H 7
B 4	D 5	G 20
G 20		

ainsi la fraction $\frac{CD}{G}$ troisième est à l'entier quatrième , & que par la 2. prop. comme H cinquième est au même G deuxième , ainsi la fraction $\frac{HG}{G}$ sixième est au même entier quatrième par le 6. Theor. du Schol. de la 22. prop. 7. comme F , H , première & cinquième ensemble sera à G deuxième , ainsi les fractions $\frac{CD}{G}$, $\frac{HG}{G}$, troisième & sixième ensemble , sera à l'entier quatrième. Mais comme F , H , ensemble sont à G , ainsi E égal à iceux F , H (Car F ôté de E reste H) est au même nombre G. Donc aussi comme E sera à G , ainsi les fractions $\frac{CD}{G}$, $\frac{HG}{G}$ ensemble seront à l'entier. Mais il a été démontré que comme E à G , ainsi la fraction $\frac{A}{B}$ à l'entier. Donc aussi comme la fraction $\frac{A}{B}$ sera à l'entier , ainsi les fractions $\frac{CD}{G}$, $\frac{HG}{G}$ ensemble seront au même entier : Et partant les fractions $\frac{CD}{G}$, $\frac{HG}{G}$ ensemble seront égales à la fraction $\frac{A}{B}$. Parquoy ayant ôté la fraction $\frac{CD}{G}$ de la fraction $\frac{A}{B}$, le reste sera la fraction $\frac{HG}{G}$. Ce qu'il falloit faire.

Or si les fractions proposées ne se referoient à

l'unité, ains à quelque nombre entier, le reste se refereroit aussi au même nombre. Par exemple, s'il falloit soustraire $\frac{2}{5}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du même nombre, le reste $\frac{7}{20}$ se refereroit au même nombre 40; & partant ce seroit 14 : car par la 15. prop. les $\frac{2}{5}$ de 40, sont 16, & les $\frac{3}{4}$ sont 30.

18. Multiplier une fraction par une fraction.

Soit une fraction AB , qu'il faut multiplier par la fraction CD : de la multiplication des numérateurs A , C , entr'eux soit fait E , au dessous duquel soit posé F produit des dénominateurs B , D , multipliez entr'eux : Je dis que la fraction EF est le produit des fractions AB , CD , multipliées entr'elles. Car

H_{45}	G_{30}	
A_2	C_3	E_6
B_3	D_5	F_{15}

soit fait G de E en D ; & H de C en F : Et par la 4. prop. comme la fraction EF sera à la fraction CD , ainsi G à H . Mais pource que C multipliant A , F , fait E , H , par la 17. prop. 7. comme A sera à F , ainsi E à H ; & en permutant, comme A sera à E , ainsi F sera à H . Derechef, pource que D multipliant E , B fait G , F , par la 17. prop. 7. comme E sera à B ainsi G à F . Parquoy les trois nombres A , E , B sont proportionnels aux trois G , F , H en proportion troublée : donc en raison égale, comme A sera à B , ainsi G à H . Mais nous avons démontré que comme G est à H , ainsi la fraction EF est à la fraction CD ; & par la 2. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB

est à l'entier, c'est-à-dire à 1. Donc aussi comme la fraction EF est à la fraction CD ; ainsi la fraction AB est à 1. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'un nombre en un nombre est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'un des multiplians que l'autre à l'unité) la fraction EF est produite de la multiplication de la fraction AB en la fraction CD : parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.

Or quand on multiplie des fractions, qui ne se rapportent pas à l'unité, ains à quelque nombre entier donné; il ne faut pas referer le nombre produit de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier proposé, ainsi qu'en l'addition et soustraction; mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné: Car vû que la comparaison se doit faire entre choses semblables, & que de la multiplication de deux nombres est produit un nombre plan: il faudra referer le nombre produit de la multiplication avec le plan du nombre entier proposé, c'est-à-dire avec son quarré, si toutes les deux fractions se referent à un même nombre entier, pource qu'iceluy nombre (suivant ce que nous avons dit à la 14. prop.) leur est comme dénominateur, & par consequent il le faut multiplier par soy-même afin d'avoir le dénominateur du produit desdites fractions. Mais si les fractions se referoient à divers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan fait des nombres entiers proposez. Ainsi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ d'une livre, c'est-à-dire les $\frac{2}{5}$ de 20 sols, par $\frac{1}{8}$ du même nombre 20, le produit est cette fraction $\frac{1}{10}$, laquelle il ne faut pas rapporter au nombre en-

tier proposé 20, mais à son quarré 400; tellement que ce produit $\frac{2}{10}$ est 80, & il ne seroit que 4, si on le referoit seulement au nombre proposé 20. Ce qui est apparent, car par la 14. prop. les $\frac{2}{7}$ du nombre 20. sont 8 & $\frac{1}{2}$ du même nombre 20, est 10; & de 8 en 10, est fait 80, qui est $\frac{2}{10}$ du nombre 400, quarré du nōbre 20, entier proposé. Nous dirons donc que $\frac{2}{5}$ d'une livre multipliez par $\frac{1}{2}$ livre, ne produisent pas $\frac{2}{10}$ d'une livre, qui sont seulement 4 sols, mais produisent $\frac{2}{10}$ de 400, qui sont 80 s. ou 4 livres. Mais lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20, par les $\frac{3}{4}$ du nombre entier 24, le produit est $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{10}$ du nombre 480, c'est-à-dire 144: Car par la 14 prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20 sont 8, ou $\frac{8}{10}$, & les $\frac{3}{4}$ de 24 sont 18, ou $\frac{18}{10}$, qui multipliez comme dit est cy-dessus, produisent 144, ou la fraction $\frac{144}{100}$: tellement que les $\frac{6}{10}$ trouvez ne se doivent referer à l'un ny à l'autre entier proposé 20 & 24, ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.

19. Diviser une fraction par une fraction.

Soit la fraction AB , qu'il faut diviser par la fraction CD : & premierement que les nombres de cette-cy C, D , mesurent les nombres de celle-là AB , par E, F ; tellement que A étant divisé par C le quotient soit E , & ayant divisé B par D , le quotient soit F : Je dis que la fraction EF , est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD . Car d'autant que C mesure A

A_5	C_5	E_1
B_{12}	D_6	F_2
A_4	C_2	E_2
B_9	D_9	F_1
A_3	C_3	E_3
B_{10}	D_5	F_2

par E ,

par E, & D mesure B par F par le 9. ax. 7. A est procréé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction AB, est produite de la multiplication de la fraction EF par la fraction CD: & partant par la def. de la multiplication, comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi la fraction EF sera à l'unité. Parquoy puis que comme AB, fraction divisée, est à CD, fraction divisante, ainsi la fraction EF est à l'unité, par la def. de la division, la fraction EF sera le quotient de la division de la fraction AB par la fraction CD. Ce qui estoit proposé.

Maintenant, que les nombres de la fraction CD, ne mesurent les nombres de la fraction AB: Par la 9. prop. les fractions proposées AB, CD, soient reduites à deux autres égales de même dénomination EG, FG; puis des deux numerateurs E & F, soit fait à part la fraction EF. Je dis qu'icelle fraction EF est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD. Car par la 3. prop. la fraction EG est à la fraction FG, comme le numera-

teur E est au numérateur F; & par la 2. prop. comme E est à F, ainsi la fraction EF est à son entier,

E ₁₂	F ₁₀	E ₈	F ₉
A ₄	C ₂	A ₂	C ₃
B ₅	D ₃	B ₃	D ₄
G ₁₅		G ₁₂	

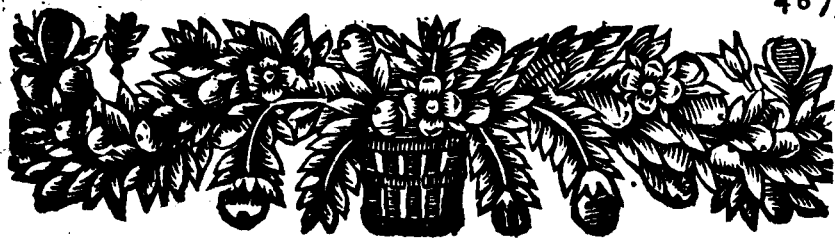
c'est-à-dire à l'unité. Donc aussi comme la fraction EF est à l'unité, ainsi la fraction EG est à la fraction FG, c'est-à-dire la fraction AB à la fraction

CD , puis qu'elles leur sont égales par la construction ; & partant par la def. de la division la fraction EF sera le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD . Ce qui étoit proposé.

Or il appert assez que cette démonstration a lieu en toutes fractions, soit que les nombres de la fraction divisante mesurent ou non les nombres de la fraction à diviser ; & aussi que le dénominateur commun G n'entre point au quotient de la division, ains seulement les deux numérateurs E & F ; c'est pourquoy en la pratique d'Arithmet. il suffit de multiplier le numérateur de la fraction à diviser par le dénominateur de la fraction divisante, pour avoir le numérateur du quotient ; mais le numérateur de la fraction divisante par le dénominateur de la fraction à diviser pour avoir le dénominateur d'iceluy quotient.

Il est aussi manifeste que si les nombres de la fraction divisante sont changez de lieu à autre, que la division se fera comme la multiplication ; c'est à sçavoir en multipliant les numérateurs entr'eux, & puis après les dénominateurs. Comme par exemple, voulant diviser $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$, nous changerons les nombres de cette fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par lesquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'est à sçavoir 5 par 3, & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Fin du septième Element.



ELEMENT HUITIEME.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extrêmes soient premiers entr'eux; ils seront les plus petits de leur raison.



SOIENT
tant de
nombres
que l'on
voudra

A 4	D —
B 6	E —
C ,	F —

continuellement proportionnaux A, B, C; & que les extrêmes A & C, soient premiers entr'eux: Je dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en même raison.

Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en même raison, s'il est possible. Par ainsi il y a d'un côté les trois nombres A, B, C, & d'un autre les trois D, E, F, qui prins de deux en deux sont en même raison: Donc en raison égale, D sera à F, comme A est à C par la 14. prop. 7. & parce que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également D & F: ce qui est impossible, pour être plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, étoient les plus petits en la même raison,

Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. I. PROP. II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en une raison donnée.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : il faut premièrement trouver trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que A multiplié par soy-même produise C ; A par B produise D ; & B par soy produise E : Je dis premièrement que C, D, E, sont continuellement

		F8.
	C4.	
A2.	D6.	G12.
B3.	E9.	H18.
		I27.

proportionnaux en la raison

de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produit C & D ; comme A sera à B, ainsi C sera à D par la 27. prop. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E : Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car d'autant que A & B sont les plus petits de leur raison, par la 24. prop. 7. ils sont premiers entr'eux, & par la 29. prop. 7. C & E seront aussi premiers entr'eux : & par la précédente prop. les trois nombres C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Maintenant, qu'il en faille trouver quatre. Que A multipliant les trois trouvez C, D, E, produise F, G, H, & B multipliant le dernier E fasse I : Je dis que les quatre nombres F, G, H, I, sont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a fait F, G, H,

iceux sont en la même raison que C, D, E, c'est-à-dire en la raison de A à B. Derèchef, puis que A & B multipliant E ont fait H & I, par la 18. prop. 7. comme A sera à B, ainsi H sera à I : & partant F, G, H, I, seront continuellement proportionnaux en la raison donnée de A à B. Davantage, puis que A & B étans les plus petits de leur raison, sont premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi les extrêmes F & I seront premiers entr'eux par la 29. prop. 7. attendu que A & B multipliez par eux-mêmes, ont produit C & E, & iceux multipliez par les mêmes A & B, ont produit les extrêmes F & I. Donc par la prop. prec. les quatre nombres F, G, H, I, seront les plus petits de leur raison. Et en cette façon on en trouvera tant que l'on voudra. Nous avons donc trouvé des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il résulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, étans les plus petits de leur raison ; les extrêmes seront quarréz : s'il y en a quatre, qu'iceux extrêmes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrêmes C & E, ont été produits de A & B multipliez par eux-mêmes ; & des quatre F, G, H, I, les extrêmes F & I, ont été produits de la multiplication de A & B par leurs quarréz C & E.

Il résulte encore que les extrêmes des nombres continuellement proportionnaux trouvez selon cette prop. sont premiers entr'eux. Car il a été démontré par les 24. & 29. prop. 7. que les extrêmes C, E, & F, I, sont premiers entr'eux.

T H E O R. 2. P R O P. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : les extrêmes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en

la même raison : Je dis que les extrêmes A & D , seront premiers entr'eux.

Car soient trouvez par la 35. prop. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B , sçavoir F & G : ils seront premiers

entr'eux par la

23. prop. 7. &

comme il a été

enseigné en la

preced. soient

trouvez des nō-

bres continuel-

lement propor-

tionnaires , & les

plus petits en la

raison de F à G , sçavoir premierement les trois H , L ,

K ; puis après les quatre L , M , N , O ; & ainsi con-

secutivement un plus , jusques à ce qu'on en ait autant

qu'il y en aura de proposez : il ne faut donc icy que ces

quatre L , M , N , O. Or iceux étans les plus petits en

la raison de F à G , ils seront égaux aux quatre A , B ,

C , D , qui sont aussi les plus petits en la même raison.

Et comme les extrêmes L & O , sont premiers entr'eux

par le corol. de la preced. les extrêmes A & D seront aussi

premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on

voudra continuellement proportionnaires , &c. Ce qu'il

falloit prouver.

A 3.			L 8.
B 12.	F 2.	H 4.	M 12.
C 18.	G 3.	I 6.	N 18.
D 27.		K 9.	O 27.

PROBL. 2. PROP. IV.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons ; trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaires selon les raisons données.

Soient données les deux raisons de A à B , & de C à D , aux plus petits termes d'icelles : il faut trouver trois nombres en continuelle proportion , les plus petits de ceux qui sont selon les raisons données.

Soit trouvé par la 36.

p. 7. le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, lequel soit F : en apres, soit trouvé G, autant de fois mesuré par A, que F par B : Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H sont

continuellement proportionnaux, les plus petits qui soient selon les raisons données.

Car d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F ; & par conséquent A & B multiplians un même nombre (sçavoir celui par lequel ils mesurent G & F) ont produit G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en même raison que A à B. Et par même discours F sera à H, comme C à D : Donc G, F, H, sont continuellement proportionnaux, selon les raisons données. Mais ils sont aussi les plus petits, selon icelles raisons données : car s'il n'est ainsi, en soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui répondent aux raisons données, comme les trois G, F, H. Or vû que A & B sont les plus petits en leur raison, par la 21. p. 7. ils mesureront également L & M, iceux estans en la même raison, c'est à sçavoir le consequent B, le consequent M : Par même discours C & D mesureront également M & N, sçavoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C mesureront M ; par la 37. p. 7. F, qui est le plus petit nombre qu'ils mesurent, mesurera aussi M, sçavoir est, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Partant les nombres G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Maintenant soient données trois raisons aux plus petits termes A à B, C à D, & F à G, selon lesquelles il faut trouver quatre nombres tels que requiert la proposition.

Soient trouvez les trois nombres I, H, K, comme dessus : ce fait, ou F mesurera K, ou non. S'il le mesureroit, il faudroit prendre L autant de fois mesuré

par G, que K par F : & par la precedente demonstration, il est évident qu'on auroit satisfait. Que si F ne mesure K, soit trouvé O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G mesure

autant de fois P, que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N, & I mesure M. Je dis que M, N, O, P sont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

Car puisque I, H, K mesurent également M, N, O, comme dit est cy-dessus, I sera à H ainsi que M à N, & comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il y a mesme raison de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pour ce que A & B mesurent également iceux I & H, & C, D, également H & K. Donc comme A à B, ainsi M à N; & comme C à D, ainsi N à O; aussi comme F à G, ainsi O à P, à cause que F, G mesurent également O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont donc continuellement proportionnaux es raisons données. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera en la mesme façon qu'on a fait cy-dessus de trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procedé, si 4, ou davantage de raisons sont données aux plus petits termes. Parquoy estans données tant de raisons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en la raison composée de leurs costez.

Soient deux nombres plans A & B, les costez de A, soient C & D; & les costez de B, soient E & F. Je dis

A 2.	I 8.	M 16.
B 3.	H 12.	N 24.
C 4.	K 15.	O 30.
D 5.		
F 6.	L —	P 35.
G 7.	• •	

que le plan A est au plan B, en la raison composée de C à E, & de D à F.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié par E produise G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui seront en même

A 12.	C 3.
G 8.	D 4.
B 18.	E 2.
	F 9.

raison que C à E, par la 17. p. 7. Et par même discours E multipliant D & F, produira G & B, qui seront aussi en même raison que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B sont continuellement proportionnaux és raisons de C à E, & de D à F, costez. Mais par la 5. d. 6. la raison de A à B est composée de A à G, & de G à B. Donc la raison du nombre plan A au nombre plan B, sera composée de la raison des costez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

T H E O R. 4. P R O P. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne mesure le second, aussi pas un autre ne mesurera pas un autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne mesure B^{2e}. Je

dis que pas un autre n'en mesurera pas un autre.

Car premièrement, comme A ne mesure B, ainsi

B ne mesurera C; ny C ne mesurera D; ny D, E, d'autant qu'ils sont en même raison; par ainsi aucun d'iceux nombres ne mesure son prochain suivant. Je dis aussi qu'en passant quelqu'un, les extrêmes ne se pourront

A 16.	B 24.	C 36.	D 54.	E 81.
F 4.	G 6.	H 9.		

mesurer, comme A ne pourra mesurer C. Car ayant trouvé trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A à B, ou de A, B, C par la 35. p. 7. en raison égale A sera C comme F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure B, aussi F ne mesurera G; & partant F ne sera pas l'unité, autrement il mesurerait G, vu que l'unité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce livre F & H sont nombres premiers, & que F n'est pas l'unité; iceluy F ne mesurera pas H: Mais nous avons démontré que comme A est à C, ainsi F est à H. Donc comme F ne mesure H, aussi A ne mesurera C. Par le même discours on prouvera que B ne mesurera D, ny C ne mesurera E. Que si on prend quatre nombres les plus petits en la raison de A à B, on démontrera en la même manière que A ne mesurera le quatrième D, ny B un quatrième E, & ainsi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

Car par la précédente, si A ne mesuroit B, aussi

pas un autre ne mesurerait pas un autre, & par conséquent A ne mesurerait pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 3.	B 9.	C 12.	D 24.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, estans en la même raison.

• Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux : & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre E & F se trouveront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3.	C 9.	D 27.	B 81.
G 1.	H 3.	I 9.	K 27.
E 2.	L 6.	M 18.	F 54.

Car ayant trouvé par la 2. prop. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B; en raison égale, comme A sera à B, ou E à F (car c'est la même raison) ainsi G à K par la 14. prop. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. prop. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M : tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent également les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous avons démontré à la 18. prop. 7. Mais G, H, I, K, sont continuellement proportionnaux : donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est égale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

De cette démonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi que la proportion des nombres E, L, M, F, est la même que des nombres A, C, D, B. Car il a été démontré que la proportion de E, L, M, F, est la même que celle des nombres G, H, I, K : Mais iceux sont par la construction en la même proportion que A, C, D, B : donc aussi E,

L, M, F, sont en même proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, es moindres nombres, est trouvée entre le binaire & l'unité; mais la superparticuliere, entre les nombres differens seulement de l'unité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire; si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce Theor.) entre le binaire & l'unité, ou entre les nombres differens de la seule unité, ou du binaire; c'est à sçavoir entre les plus petits nombres qui ont la même raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il est tout évident qu'entre le binaire & l'unité, ny entre deux nombres differens seulement de l'unité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement un nombre, qui differe à l'un & l'autre de l'unité: lequel nous démontrerons ne pouvoir être milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD, differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre EF moindre que AB de l'unité, mais plus grand que CD, aussi de l'unité. Je dis que EF n'est moyen prop. entre

A 6 G, B	A . . G . B
E 5 H F.	E . H . F
C D	C . D

AB, CD. Car si on dit que comme AB à EF, ainsi EF à CD: étant ôté de AB, le nombre AG égal à EF, afin qu'il reste l'unité GB; & de EF, le nombre EH égal à CD, afin qu'il reste aussi l'unité HF; pareillement comme AB sera à EF, ainsi le retranché AG sera au retranché EH. Donc aussi le reste GB sera au reste HF; c'est-à-dire l'unité à l'unité, comme le tout AB au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui est absurde; dont EF n'est pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi un entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raison triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui est impossible, comme nous venons de démontrer.

Par même raison , ne peut aussi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomboit un, il en tomberoit aussi un (par ce Theor.) entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple : ce. qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire AB & l'unité C, tombe un moyen prop. D binaire, ou ternaire ; tellement que AB soit à D, comme D à C : en changeant C sera à D comme D à AB. Et pour ce que l'unité C mesure D, aussi D mesurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D mesure pareillement le senaire AE : donc D mesurera le tout AE, & le retranché AB ; & partant par la II. com. sent. aussi D mesurera le reste BE unité. Ce qui est absurde. La même absurdité adviendra toujours, si on dit qu'un nombre quartenaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'unité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.

A B . E
D . . D . . .
G .

T H E O R . 7 . P R O P . IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'unité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre lesquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'unité, il

tombera autant de nombres cōtinuel- lement propor- tionnaux,	A 8	C 12.	D 18.	B 27.
		Unité.		
		E 1.	F 3.	
		G 4.	H 6.	I 9.
	K 8.	L 12.	M 18.	N 27.

qu'entre A & B.

Car ayant posé l'unité, soient pris E & F, les plus petits nombres qui soient en la raison de A à C, par la 1. prop. 7. puis par la 2. prop. 8. soient trouvez les trois plus petits en la même raison G, H, I: puis les quatre K, L, M, N; & ainsi conséquemment jusques à ce que la multitude des pris soit égale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrêmes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. prop. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F: Mais leurs égaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la même raison par la construction. Donc K, L, M, N, sont égaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A, & N à B. Et pour ce que (comme il appert par la démonstration de la 2. pr. 8.) E multipliant soy-même a produit G; & multipliant G a fait K, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy K par le même E: mais par la 5. com. sent. l'unité mesure iceluy E par E. Donc l'unité mesurera également E; & E iceluy G; & G iceluy K: & partant l'unité sera même partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. def. 7. l'unité & les nombres E, G, K, sont continuellement proportionnaux. Par même discours l'unité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouvez continuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'unité, est égale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il s'ensuivra qu'entre l'unité & le nombre K ou A, qui luy est égal; & aussi entre l'unité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-t'il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qu'entre

l'unité C , & chacun d'iceux , tombent quelques nombres continuellement

proportionnaux , comme D & E , entre C & A : Item F & G , entre C & B. Je dis qu'il en tombera aussi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8.	I 12.	K 18.	B 27.
E 4.	H 6.	G 9.	
D 2.	F 3.		
C 1.			

Car si on vient à multiplier , comme en la 2. prop. 8. pour trouver les trois nombres H , I , K , c'est à sçavoir que H soit le produit de D multiplié par F ; I , le produit de D par H : & K , le produit de F par H. Puis que comme C à D , ainsi D à E , & E à A ; & que par la 5. com. sent. C unité mesure D , par les unitez qui sont en D ; aussi D mesurera E , par les unitez qui sont en D ; & E mesurera A , par les mêmes unitez de D ; ainsi il est évident que D multiplié par soy-même produit E , & E multiplié par D , a produit A. Par même discours se prouvera que F multiplié par soy-même , a produit G , & que G par F a produit B.

Maintenant , puis que D multiplié par soy-même , & par F a produit E & H , par la 17. prop. 7. comme D à F , ainsi E à H. Pareillement F multiplié par D , & par soy-même , a produit H & G ; aussi H sera à G comme D à F : parquoy les trois nombres E , H , G , seront continuellement proportionnaux. Davantage D multipliant E & H , produit A & I ; & partant comme E sera à H , ainsi A sera à I , par la 17. prop. 7. & puis que D & F multipliant H , produisent I & K ; I sera à K , comme D à F. Par la 18. prop. 7. Par même discours K sera à B , comme H à G , étans les produits de H & G multipliez par F. Parquoy A , I , K , B , sont continuellement proportionnaux ; & partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle proportion entre A & B , c'est à sçavoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B , & l'unité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité , &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarez tombe un moyen proportionnel : & le quarré est au quarré en raison doublée du côté au côté.

Soient deux nombres quarez A & B, desquels les côtez soient C & D. Je dis qu'entre iceux quarez A & B, tombera un moyen proportionnel : & que le quarré A est au quarré B en la raison doublée du côté C au côté D.

Car le nombre C multiplié par D, produise E : Et puis

que C est le côté de A; iceluy C multiplié par soy-même produit A; & par D fait E : donc comme C à D, ainsi A à E par la 17. prop. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant soy-même fait le quarré B; par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi E à B. Partant E est moyen proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie : puis que A, E, B sont continuellement proportionnaux, A 1. est à B 3. en raison doublée de A 1. à E 2. par la 10. deff. 5. qui est la même raison que de C à D, ainsi qu'il a été démontré cy dessus. Parquoy entre deux nombres quarez tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux : & le cube est au cube en raison triplée du côté au côté.

Soient deux nombres cubes A & B, desquels les côtez soient C & D. Je dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux : & que la raison du cube A au cube B, est la raison triplée du côté C au côté D.

Qu'il

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-même produise E ; & D par soy produise F ; mais C & D l'un par l'autre produi-

se G : & iceluy

G multiplié par

l'un & l'autre C

& D, produise H

& I. Or puis que

C multipliant C

& D a fait E & G ; comme C sera à D, ainsi E à G

par la 17. prop. 7. Item puis que D multipliant C & D

a fait G & F ; aussi G sera à F comme C à D : Partant

E, G, F, sont continuellement proportionnaux en la

raison de C à D. Derechef, pource que C multipliant

E fait le cube A, & multipliant G a fait H, par la

même prop. A sera à H, comme E à G, c'est-à-dire

comme C à D. Item puis que D multipliant G a fait

I, & multipliant F est produit le cube B ; par la 17.

prop. 7. I sera à B, comme G à F, c'est-à-dire comme

C à D. Mais par la 18. prop. 7. H est aussi à I, comme

C à D, attendu que C, D, multiplians G, ont fait H

& I : donc A, H, I, B seront continuellement pro-

portionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I,

seront deux moyens proportionnaux entre les nombres

cubes A & B.

Quant à la seconde partie, elle est manifeste, car

d'autant que A, H, I, B sont continuellement pro-

portionnaux, A 1. est à B 4^e en raison triplée de A 1.

à H 2^e par la 10. def. 5. Mais comme A est à H, ainsi

C est à D. Donc le cube A est au cube B en raison tri-

plée du côté C au côté D. Parquoy entre deux nombres

cubes, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 27.	H 36.	I 48.	B 64.
E 9.	G 12.	F 16.	
C 3.	D 4.		

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont conti-

nuellement proportionnaux, iceux étans mul-

tipliez chacun par soy, leurs produits seront

aussi continuellement proportionnaux : & si

chacun multiplie encores son produit, les

H h

derniers produits seront aussi continuellement proportionnaux : & cela adviendra toujours environ les extrêmes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, lesquels multipliez chacun par soy-même, produisent D, E, F; & que les mêmes A, B, C, multipliant chacun son produit fassent G, H, I, & ainsi continuellement. Je dis que D, E, F, & G, H, I, sont continuellement proportionnaux.

		A ₂ .	B ₄ .	C ₈ .		
	D ₄ .	N ₈ .	E ₁₆ .	O ₃₂ .	F ₆₄ .	
G ₈ .	P ₁₆ .	Q ₃₂ .	H ₆₄ .	R ₁₂₈ .	S ₂₅₆ .	I ₅₁₂ .

Qu'il ne soit ainsi, que N soit le produit de A multiplié par B : & O celui de B par C. Pareillement que A multipliant N, E fasse P & Q : mais B multipliant O, F produise R, S. Donc par la 17. prop. 7. A multipliant soy-même, & B, les produits D & N seront en la même raison de A à B : & par même discours A multipliant A & soy-même, les produits N & E seront aussi en la même raison de A à B, & ainsi des autres : Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B : par ainsi D, N, E; & E, O, F, sont continuellement proportionnaux en une même raison ; & partant en raison égale, comme D sera à E, ainsi E à F : par quoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E fait G, P, Q; par ce que nous avons démontré à la 18. prop. 7. G, P, Q seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'est-à-dire comme A à B. Item pource que A & B multipliant E ont produit Q & H, aussi par la 18. prop. 7. comme A sera à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouvez proportionnaux en la mesme raison de A à B : & partant en raison égale, comme G sera à H, ainsi H à I : par quoy G, H, I seront continuellement proportionnaux. S'il

Il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si un nombre quarré mesure un nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé : que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B; & d'iceux quarrés les costez soient C & D. Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car ayant multiplié C par D, il est évident par la demonstration de la 11. prop. 8. que le produit E est moyen

A 4.	E 12.	B 36.
C 2.	D 6.	

proport. entre A & B, en la raison de C à D : mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A mesure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E. Parquoy puis que comme A à E, ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D.

Je dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E, & E mesurera B, & par consequent A mesurera aussi B, car qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent. Parquoy si un nombre quarré mesure un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube : aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit un nombre cube A, qui mesure un autre nombre cube B, & d'iceux cubes les costez soient C & D. Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car que chaque côté C, D multipliant soy-mesme fasse E, F, mais se multipliant l'un l'autre fassent G, multipliant de-rechef G, produisent H, I. Il est évident par la démonstration de la 12. prop. 8. que

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Et puis que par l'hypothese A 1. mesure B dernier, il mesurera aussi H 2^e, par la 7. prop. 8. Mais A étant à H, comme C à D, aussi le côté C mesurera le côté D.

Secondement, que le côté C mesure le côté D: Je dis que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a été dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D: Parquoy le côté C mesurant le côté D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sect. Si donc un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si un nombre quarré ne mesure un nombre quarré, aussi le côté ne mesurera le côté que si le côté ne mesure le côté; aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarez A & B, desquels les côtés sont C & D; mais que le quarré A ne mesure le quarré B. Je dis premierement que le côté C ne mesurera pas le côté D.

Car par la 14. prop. de ce livre, si ledit côté C mesuroit le côté D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese. Secondement que le côté C ne mesure pas le côté D: Je dis que le quarré A ne mesurera

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

pas aussi le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le côté C mesurerait le côté D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R. 15. P R O P. XVII.

Si un nombre cube ne mesure un nombre cube, aussi le côté ne mesurera le côté : que si le côté ne mesure le côté, aussi le cube ne mesurera le cube,

Soient les nombres cubes A & B, dont les côtez sont C & D; & que A ne mesure B : Je dis que le côté C ne mesure pas aussi le côté D : & davantage que si le côté C ne mesure pas le côté D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

Cette démonstration se fait par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le côté mesuroit le côté, aussi le cube mesurerait le cube, ce qui est contre l'hypothese.

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

Et pour le second : Si le cube mesuroit le cube, aussi le côté mesurerait le côté, par la susdite 15. prop. 8. ce qui est aussi contre l'hypothese. Parquoy si un nombre cube ne mesure un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouver.

T H E O R. 16. P R O P. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un moyen proportionnel : & le plan est au plan en raison doublée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres plans semblables A & B, & leurs côtez soient C D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouvera un moyen proportionnel; & que A est à B en raison doublée de C à E, ou de D à F, côtez de même raison.

A 12.	G 18.	B 27.
C 6.	D 2.	E 9.

Car puis que les plans

A & B sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à E comme E à F ; & si A sera le produit de C par D : Item le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G : par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & E produit A & G : A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant, comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D & F, produit G & B : partant iceux G & B seront l'un à l'autre comme D à F : ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à E, & partant G sera un moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est évidente : car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E ; par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la même raison que de C à E, ou de D à F, côtéz de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux ; & le solide est au solide en raison triplée des côtéz de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B ; & de A les côtéz soient C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H,

Je dis qu'entre A & B, on trouvera deux moyens proportionnaux, & que

A 30.	M 60.	N 120.	B 240.
I 6.	L 12.	K 24.	
C 2.	D 3.	E 5.	F 4. G 6. H 10.

A est à B en raison triplée de C à F, ou de D à G, ou E à H, côtéz de même raison.

Car I soit le produit de C multiplié par D : K le produit de F par G : L le produit de F par D, & finalement M & N, soient les produits de L par E & H.

Maintenant puis que par la 21. def. 7. les côtez C, D, E, sont proportionnaux aux côtez F, G, H : en permutant, ils seront aussi proportion. c'est-à-dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produit I & L, par la 17. prop. 7. I sera à L comme C à F, c'est-à-dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produit I & K; parquoy I sera à K comme D à G : & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produit de la multiplication des trois nombres C, D, E : & I, le produit de C par D : aussi A sera le produit de I par E. Item le solide B étant produit de la multiplication des trois nombres F, G, H : & K le produit de F en G : aussi B sera le produit de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produit A & M en la raison de I à L : & semblablement que L multipliant E & H, produit M & N en la raison de E à H, qui est la même que de I à L : aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la même que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est-à-dire de C à F : & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est évidente : car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont été prouvez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M : Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H : donc A sera à B en raison triplée de C à F, ou D à G, ou E à H, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe un moyen proportionnel : iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe

H h 4

un moyen proportionnel C. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raison de A, C, B : par la 21. prop. 7. iceux D & E mesureront également A & C;

qu'ils les mesurent par F : Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la même raison : qu'ils les mesurent par G. Donc F multipliant D & E, sera produit A & C par la 9. com. sent. Item G multipliant les mêmes D & E, seront produits C & B. Vû donc que E multipliant F & G a fait C & B ; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. prop. 7. Mais comme C est à B, ainsi étoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G ; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a fait A, iceluy A sera un plan duquel les côtez sont D, F. Item pource que G multipliant E a fait B ; B sera le plan duquel E & G sont les côtez. Mais ces côtez ont été démontrez proportionnaux, c'est-à-dire D être à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B seront plans semblables. Parquoy si entre deux nombres tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux ; iceux seront nombres solides semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis que A & B sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe un moyen proportionnel F, par la preced. pro. E & G seront plans semblables : Soient

A 12.	C 18.	B 27.
D 2.	E 3.	F 6. G 9.

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.

E 4.	F 6.	G 9.

H 2.	I 2.	M 4.	K 3.	L 3.	N 6.

leurs côtez H, I ; & K, L , lesquels seront proportion-
 naux par la 21. def. 7. & puisque E, F, G sont les plus pe-
 tits en la raison de A, C, D, ils les mesureront également
 par la 21. prop. 7. soit selon le nombre M: c'est-à-dire que
 E, F, G, étans multipliez par M produisent A, C, D.
 Item par le même discours E, F, G, mesureront éga-
 lement les trois nombres C, D, B, chacun le sien: soit
 selon le nombre N, c'est à dire, que N multipliant E, F,
 G, produise C, D, B. Il est donc évident, que A & B sont
 nombres solides, desquels les côtez sont H, I, M, &
 K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, pro-
 duisent C & D, par la 1^{re}. prop. 7. M sera à N en la rai-
 son de C à D, & C est à D en même raison que E à F par
 la 17. prop. 7. pource que N multipliant E & F a produit
 iceux C & D; mais aussi E est à F en la même raison que
 H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L, com-
 me M à N; & en permutant, H sera à I, comme K à L;
 & I à M comme L à N: & partant les côtez H, I, M sont
 proportionnaux aux côtez K, L, N; & par la 21. def. 7.
 A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si en-
 tre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prou-
 ver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement propor-
 tionnaux, & que le premier soit quarré; le
 troisième sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux
 A, B, C, desquels le premier A soit quarré: Je dis
 que le troisième C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C
 tombe un moyen proportion-
 nel, par la 20. prop. de ce
 livre, ils seront plans sembla-
 bles; & partant l'un d'iceux
 étant quarré, aussi sera l'autre.

—————		
A 4.	B 6.	C 9.
—————		

Si donc trois nombres sont continuellement propor-
 tionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionaux, A, B, C & D, le premier desquels A soit cube; Je dis que le quatrième D est aussi cube.

Car puisque entre A & D tombent deux moyens proportionaux B & C, par la 21. prop. de ce livre, iceux

A 8.	B 12.	C 18.	D 27.

A & D seront solides semblables : mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré; & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. Je dis que B est aussi quarré.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. prop. 8, il tombe entre C & D, un moyen proportionnel, sçavoir est E; il en tombera aussi un

A 16.	F 24.	B 36.
C 4.	E 6.	D 9.

entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Vû donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionaux, & le premier A est quarré; aussi par la 22. prop. 8. le troisiéme B sera quarré. Parquoy si quatre

Nombre sont continuellement proportionnaux, &c.
Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

Il appert des choses cy-dessus dites, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut être exhibée en deux nombres quarez: Car si elle y estoit exhibée, par la 24. prop. 8. les deux premiers nombres ayans la même raison que les quarez de la raison exhibée seroient aussi quarez, puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32, &c. seroient quarez; d'autant que 4 estant quarré, par la 24. prop. 8. aussi 8 seroit quarré: donc aussi 16 & 32, &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8; & entre 8 & 16; & entre 16 & 32, &c. tomberoit un moyen proportionnel, s'ils estoient quarez, par la 11. prop. 8. & nous avons démontré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 11. prop. 8. il tomberoit entre iceux un milieu proportionnel: donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible, comme nous avons démontré au Scholie de la même proposition.

T H E O R. 23. P R O P. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

Que A soit à B, comme le cube C au cube D,
& que A soit cube: Je dis que B est aussi cube.

A 8.	G 12.	H 18.	B 27.
C 64.	E 96.	F 144.	D 216.

Car puisque A est à B comme C à D, il tombera deux moyens proportion-

naux entre les deux cubes C & D par la 14. prop. de ce livre, lesquels soient E & F : Mais par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B sont continuellement proportionnaux, & que le premier A est cube, aussi sera le quatrième B par la 13. prop. 8. Parquoy si deux nombres sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il appert aussi des choses cy-dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans semblables, sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B. Je dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. prop. 8. il tombera entre A & B un moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continuë de A,

A 20.	C 30.	B 45.
D 4.	E 6.	F 9.

C, B, les extrêmes D & F seront quarez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison égale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçavoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius a démontré après Commandin la converse de cette proposition c'est à sçavoir :

Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B étans entr'eux, comme les quarréz D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera un moyen prop. entre iceux quarréz : & aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, B. Je dis que A fera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop.

8. entre A & B tombe-

ront deux moyens pro-

portionnaux, & soient

iceux C & D. Que si

on prend les plus petits

termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux

on trouve, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G,

H, en continuelle proportion, les extrêmes E & H seront

cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raison égale

comme E à H, ainsi A à B : Parquoy les nombres solides

semblables sont l'un à l'autre, &c. Ce qui étoit à dé-

montrer.

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 8.	F 12.	G 18.	H 27.

SCHOLIE.

Clavius démontre aussi après Commandin la converse de cette proposition sçavoir est:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, étans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens prop.

entre les nombres cubes E & H ; il en tombera aussi deux extrêmes A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 11. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est évident par toutes les choses cy-dessus dites , qu'aucuns nombres ayans raison double , ou superparticulièr , ou superbi-partiente , ne sont plans , ou solides semblables. Car s'ils étoient plans semblables , par la 18. prop. 8. un moyen proportionnel tomberoit entr'eux , ce qui ne se peut faire , comme il a été démontré au Scholie de la 8. prop. 8. Ils ne seront pas aussi solides semblables , puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. prop. 8. Ce qui ne se peut faire , pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'unité ou du binaire , comme il a été dit au susdit Scholie , entre lesquels il est certain que deux nombres moyens proport. ne peuvent tomber.

Semblablement deux nombres premiers , quels qu'ils soient , ne peuvent être plans , ou solides semblables , pource qu'ils ne peuvent avoir les côtéz proportionaux. Car quelque nombre plan que ce soit étant nombre premier , a seulement soy-même & l'unité pour côtéz , encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13 , desquels les côtéz sont 7 , 1 ; & 13 , 1 , puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux côtéz , lesquels appert n'être proportionaux. Et le nombre solide , qui aussi est nombre premier , a seulement pour côtéz soy-même , & deux-unitéz : & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuvent être proportionaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux , n'étans quarréz , ou cubes , ne peuvent être plans , ou solides semblables. Car s'ils étoient tels , par la 18 ou 19. prop. 8. tomberoit entre iceux , un ou deux moyens prop. & puis que les extrêmes sont posez premiers entr'eux ; tous les trois , ou les quatre seroient premiers entr'eux , pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux , les extrêmes n'en ayans point : Parquoy il est évident par la 23. prop. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. prop. 8. les deux extrêmes seront quarréz , ou cubes. Ce qui est absurde ; car ils ont été posez n'être quarréz ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans , ou solides semblables , desquels le moindre soit premier , il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. prop. 7. iceux

deux nombres proposez seroient premiers entr'eux : & partant (comme nous venons de prouver) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde : car ils ont été posez tels.

De cecy est évident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuvent être plans, ou solides semblables. Car s'ils l'étoient, le moindre mesurerait le plus grand, comme appert cy-dessus. Vû donc qu'il se mesure aussi soy-même, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez : Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouver deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente ; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube ; il est évident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20 ; ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. prop. 8. ils seroient comme quarré à quarré : & 16 étant quarré, par la 24. prop. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par même raison, si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas ; comme 27 & 40 ; ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'étoient, par la 27. prop. 8. ils seroient comme cube à cube : & 27 étant cube, par la 25. prop. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huitième Element.



ELEMENT

NEUFIE'ME.

THEOR. I. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré.



OIENT deux nombres plans semblables A & B, lesquels se multiplians mutuellement, produisent C. Je dis que C est quarré. Car A se multipliant soy-même produit D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. prop. 7, Mais

A & B étans plans semblables, il tombera entr'eux un moyen proportionnel par la 18. prop. 8. Il en tombera donc aussi un entre D & C, par la 8. prop. 8. &

soit E. Et puisque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D est quarré par la construction; le tiers C sera aussi quarré par la 22. prop. 8. Parquoy si deux nombres plans semblables, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 4.	B 9.
D 16.	E 24. C 36.

THEOR.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplians l'un l'autre produisent un nombre quarré, iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'un l'autre, produisent C quarré. Je dis que A & B sont plans semblables.

Car que A se multipliant soy-même produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C

A 4.	B 9.
D 16.	C 36.

par la 17. prop. 7. Et par la 11. pro. 8.

entre les quarrés D & C tombe un moyen proportionnel : il en tombeta donc aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant par la 20. prop. 8. A & B seront plans semblables. Parquoy si deux nombres se multiplians l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 3. PROP. III.

Si un nombre cube se multiplie soy-même, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-même produise B. Je dis que B est nombre cube.

Car soit C côté du cube A :

& de C multiplié en soy, soit

produit D ; il est manifeste

que C multipliant D, produit

le cube A. Vû donc que C

multipliant soy-même a fait

D, par la 7. com. sent. C me-

surera D par C. Mais par la

7. com. sent. l'unité mesure aussi C par C. L'unité sera

donc même partie de C, que C de D ; & partant com-

me l'unité est à C, ainsi C à D par la 20. def. 7. De-

A 8.	
E 16.	D 4.
F 32.	C 2.
B 64.	Vnité.

rechef, puisque C multipliant D a fait A, par la 7. cōsent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est même partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A; mais comme C à D, ainsi étoit l'unité à C. Donc comme l'unité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Dereschef, pource que A mesure B par A; (car B a été fait de A multiplié en soy) & que l'unité mesure aussi A par A; l'unité sera même partie de A, que A de B: partant comme l'unité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puisqu'entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D, par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et vu que les quatre nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatrième sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si un nombre cube multiplie un nombre cube, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C: Je dis que C est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-même, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B & soy-même, a produit C & D; il y aura telle raison de D à C, que de

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

A à B, par la 17. prop. 7. Et par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. prop. 8. Et partant D étant cube, par la 23. prop. 8. C sera aussi cube. Si donc un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 5. PROP. V.

Si un nombre cube multipliant quelque autre nombre, produit un nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-même, il sera cube par la 3. prop. 9. & d'autant que A multipliant A & B, a fait D & C, par la 17. prop. 7. A sera à B comme D à C, & par la 8. prop. 8. entre A & B se trouveront deux moyens proportionaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. prop. 8. A étant cube, B multiplié sera aussi nombre cube. Parquoy si un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si un nombre se multipliant soy-même produit un nombre cube; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par soy-même produise le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre cube.

Car si on prend C produit de A multiplié par B, il sera cube par la definition du nombre cube; & par la 5. prop. 9. A sera aussi cube. Si donc un nombre se multipliant soy-même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 8.	B 64.	C 512.

THEOR. 7. PROP. VII.

Un nombre composé étant multiplié par quelque autre nombre le produit sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel étant multiplié par quelque nombre B produise C. Je dis que C est nombre solide.

A 6.	B 5.	C 30.
D 2.	E 3.	

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'unité le mesurera par la 13. def. Que D mesure donc A par E. Ce qu'étant posé, D

multipliant iceluy E, produira A par la 9. com. sent.
Et puis que B multipliant A a produit C, iceluy C sera
procréé de la mutuelle multiplication des trois nombres
D, E, B; partant par la 17. prop. 7. il sera nombre
solide, duquel les côtez sont D, E, B. Parquoy un
nombre composé, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on
voudra continuellement proportionnaux, le
troisième depuis l'unité sera quarré, & tous
les autres qui en laisseront un : Mais le qua-
trième sera cube, & tous les suivans qui en
laisseront deux : & le septième sera cube &
quarré ensemble, & tous les suivans qui en
laisseront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement
proportionnaux depuis l'unité, A, B, C, D, E, F,
G, H, I. Je dis que le troisième B sera quarré, en-
semble tous les autres qui en laisseront un de l'ordre,
comme D, F & H : en après, que le quatrième C est

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou
laissent deux, comme F & I : Pareillement que le septième
nombre F est cube & quarré ensemble, comme aussi
tous les autres qui pourroient suivre en laissant toujours
cinq nombres.

Pour la premiere partie : puis que les nombres sont
continuellement proportionnaux, comme l'unité mesure
A selon les unitéz qui sont en A, par la 5. com. sent.
ainsi chacun mesurera son suivant selon les unitéz de A :
partant B troisième, qui sera en ce faisant le produit de
A multiplié par soy, sera quarré : & par la 22. prop.

B. puis que B , C , D , sont continuellement proportionnaux , & B est quarré , aussi D sera quarré. Par même discours en prenant les trois continuellement proportionnaux D , E , F ; vû que D est quarré , aussi F sera quarré ; & ainsi de tous les autres nombres qui en fassent un.

Pour la seconde partie : puis que A multiplié par soy produit B ; & B par A produit C ; Il est évident par les définitions du 7. que C sera cube , & par la 23. prop. 3. C , D , E , F , étans continuellement proportionnaux , F sera aussi cube : par même raison , étans prins les quatre continuellement proportionnaux F , G , H , I , puis que F est cube , aussi I sera cube ; & ainsi de tous les autres nombres , en laissant deux , si davantage y en avoit.

Pour la troisième partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a été prouvé quarré & cube ; iceluy sera cube & quarré ensemble : Et il en sera ainsi de tous les autres. Si donc depuis l'unité , il y a tant de nombres qu'on voudra , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R . 9 . P R O P . I X .

Si depuis l'unité , il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux , & que celuy qui suit l'unité soit quarré , aussi tous les autres seront quarez : & s'il est cube , aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportion-

naux depuis

l'unité A ,	Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
B , C , D ,	1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.
E , F. Je							

dis premie-

rement que si le premier A est quarré , que tous les autres seront aussi quarez.

Car puis qu'iceux nombres A , B , C , D , E , F , sont continuellement proportionnaux depuis l'unité , par

la prec. prop. le troisieme nombre B sera nombre quarré comme aussi tous les autres qui en laissent un, sçavoir D & F. Mais pource que A, B, C sont continuellement proport. & que A est quarré par l'hypothese; par la 22. prop. 8. C sera aussi quarré: & par la même raison prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C étant quarré, aussi le fera le troisieme E: partant tous les nombres A, B, C, D, E, F sont quarrés: Et ainsi de tous autres.

Je dis en second lieu, que si A est cube, aussi tous les autres seront cubes: Car d'autant que A, B, C, D, E, F

font
conti-
nuelle-
ment

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.

pro-

port. depuis l'unité, C quatrieme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, sçavoir F, par la prec. prop. Or que les autres nombres B, D, E, soient aussi cubes, nous le prouuerons ainsi. D'autant que par l'hypothese l'unité est à A, comme A à B; l'unité mesurera A, & iceluy A le nombre B également. Mais par la 5. com. sent. l'unité mesure A par le même A: donc A mesurera aussi B par le même A: & par la 9. com. sent. A multiplié en soy produira B, lequel A étant cube, B sera aussi cube par la 3. prop. 9. Mais tous les autres nombres suivans sont en la raison de A à B, & partant par la 23. prop. 8. ils seront tous cubes. Si donc depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'unité, ne soit nombre quarré: aussi pas un autre ne sera quarré, sinon le troisieme depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un. Que si celuy qui suit l'unité n'est nombre cube, aussi

pas un autre ne sera cube, sinon le quatrième depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E, F; & premièrement que A qui suit l'unité, ne soit nombre carré. Je dis que pas un autre ne sera carré, sinon le troisième B, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un, sçavoir D & F.

Car par la

8. prop. 9.						
B, D, F	Vnité.	A.	B.	C.	D.	E. F.
sont quarrés: Et si	1.	3.	9.	27.	81.	243. 729.

quelqu'un

veut dire qu'il y en a aussi d'autres, comme C, il faudroit par la 21. prop. 8. que A fust aussi nombre carré, (étans C, B, A, continuellement proportionnaux & C carré) ce qui est contre l'hypothese. Par mêmes raisons on démontrera qu'aucun autre ne peut être carré, sinon les susdits.

Maintenant, que A proche de l'unité ne soit nombre cube: Je dis qu'aucun autre ne sera cube, sinon C quatrième depuis l'unité, & tous les autres qui en laisseront deux, comme F, &c.

Car par la 8. prop. 9. C & F sont cubes: Et si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube, d'autant que D, C, B, A sont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. prop. 8. que A fut pareillement cube, ce qui est contre l'hypothese: donc D n'est pas cube. Par mêmes raisons on démontrera qu'aucun autre, outre les susdits, ne peuvent être cube. Si donc depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XI.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: le plus petit mesurera le plus grand selon quel-

qu'un de ceux qui sont entre les proportion-
naux.

Depuis l'unité A, soient tant de nombres qu'on vou-
dra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F.
Je dis que le plus petit nombre B mesurera le plus grand
F par quelqu'un des nombres C, D, E.

Car d'autant que

A, B, C, D, E

sont en même raisõ

que B, C, D, E,

F, en raison égale,

l'unité A sera a E,

comme B est à F. Et par la 20. def. du 7. l'unité mesu-
rera E; & le nombre B le nombre F, également. Mais
par la 5. com. sent. l'unité A mesure E par E: donc aussi
B mesurera F par E. Le même peut-on dire des autres.
Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c.
Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que le plus grand nombre est
autant éloigné du grand qui le mesure, que l'unité est distante
d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand: & c.
d'autant qu'il y doit avoir une même raison du moindre nom-
bre au plus grand, que de l'unité à celuy par lequel le moi-
ndre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera F par D; & C mesurera F par C, c'est-
à-dire par soy-même, &c. Pource que tant entre B & F,
qu'entre l'unité & D se trouvent trois nombres: & tant entre
C & F, qu'entre

l'unité & C sont
interposez deux
nombres.

Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encore
que quelconque de
ces nombres multiplié par soy-même, en produit un autre, qui
entre les proportionnaux est autant éloigné d'iceluy, comme
il est distant de l'unité. Mais si un petit nombre en multiplie
un grand, celuy qui en proviendra sera autant éloigné de

grand que le moindre de l'unité : Car si un nombre qui en mesure un autre, multiplie celui par lequel il le mesure, sera produit celui-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-même produit F, qui est autant éloigné de C, qu'iceluy C de l'unité. Pareillement B multipliant D, sera le même F, pource que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celui qui est proche de l'unité.

Soient depuis l'unité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Je dis que tous les nombres premiers qui se trouveront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'unité ; c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre E, il mesurera aussi B.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si ledit nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B ; B & F seront nombres premiers par la 31. prop. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produit C ; comme nous avons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. prop. 7. Item B multipliant C produit D : D & F seront donc aussi premiers par la 26. prop. 7. Pareillement B multipliant D produit E : partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E : ce qui est contre l'hypothese : Donc F mesureroit aussi B. Parquoy si depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que ce-

luy d'après l'unité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A soient tant de nombres qu'on vouldra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'unité soit premier. Je dis que le plus grand nombre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que quelque autre nombre, comme G, mesure E: Or G sera premier ou composé: s'il est premier, & mesurant E extrême, par la prec. prop. il mesurera aussi B, premier proche de l'unité: ce qui est absurde. Donc G n'est premier, mais composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. prop. 7. qui ne peut être autre que B: d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il mesurast aussi B nombre premier: ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H: & puis que par les choses dites au Scholie de la 11. prop. de ce livre, B multipliant D & H produit E & G, par la 17. prop. 7. comme E sera à G, ainsi D à H: mais G mesure E: donc aussi H mesurera D. On prouvera comme dessus qu'il ne peut être premier ny mesuré par un autre nombre premier que B: Car si H étoit premier, mesurant D, il mesurerait aussi B: ce qui ne se peut faire, ayant été posé premier. Que si H est composé, celui nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est un autre, cet autre mesurera aussi D; & celui qui mesure D, c'est à sçavoir B, par la 11. com. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H: & posant que ce soit par le nombre I. On prouvera aussi comme dessus, que comme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut être nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K: par mêmes raisons, comme I mesure C,

A	1.	B	3.	C	9.	D	27.	E	81.
K	--	I	--	H	--	G	--		

ainsi K mesurera B nombre premier : il faut donc qu'à tout le moins il luy soit égal, ce qui est impossible : d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. prop. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par soy-même. Partant aucun nombre ne mesurera E, sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. prop. 9. Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouver.

T H E O R. 14. P R O P. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F : donc par la 9. com. sent. E multiplié par F produira A, lequel est mesuré par B, C, D; & par la 32. prop. 7. iceux B, C, D, mesureront

A.	B.	C.	D.
30.	2.	3.	5.
E---	F--		

l'un des deux E, F : Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas un d'iceux ; ils mesureront donc F, qui est plus petit que A : ce qui est absurde ; puis que A est posé le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par B, C, D. Donc E ne pouvoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Nous démontrerons icy en nombres (après Commandinus & Clavius) les 10 premiers Theoremes, qui sont démontrez en lignes au second livre.

1. S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppe en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indivise, & de chaque partie de celuy qui est couppe.

Soient deux nombres, AB & C , desquels AB est divise en AD , DE , EB , & soit fait F de C en AB : Item GH de C en AD , & HI de C en DE , & IK de C en EB : Je dis que F est egal aux nombres GH , HI , IK , c'est-à-dire à tout le nombre GK compose d'iceux. Car puisque C multiplie AB , a produit F , AB mesurera F par C : c'est-à-dire que AB sera la partie d'iceluy

F , dénommée par C . Par la même raison AB sera la partie de GH ; & DE de HI ; & EB de IK , dénommée par C , sçavoir est, la même que AB de F . Mais

$A \dots D \dots E \dots B \dots C \dots$
$F \dots \dots \dots 12 \dots$
$G \dots \dots H \dots I \dots K \dots$

il est évident par la 5. prop. 7. que AB est la même partie de GK , que AD de GH , parquoy aussi AB sera même partie de GK ; que AB de F : & partant par la 4. cor. sent. F & GK seront égaux entr'eux. Ce qui étoit proposé.

2. Si un nombre est couppe en deux parties, les nombres plans compris sous le tout, & une chacune partie, sont égaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit divise en AC , CB . Je dis que les nombres qui seront produits du total

AB , es parties AC , CB seront ensemble égaux au quarré de AB . Car étant pris le nombre D egal à AB , par le 1.

$A \dots C \dots B$
$D \dots \dots$

Theor. le nombre fait de D , c'est-à-dire de AB , en AB , sçavoir est le quarré

d'iceluy AB , sera egal aux nombres qui seront produits de D , c'est-à-dire de AB , en AC , & en CB : Ce qui étoit proposé.

Le même sera démontré, si AB est couppe en plus de deux parties, comme on peut voir par la seconde figure icy appposée. Car par

$A \dots C \dots D \dots B$
$E \dots \dots$

La même raison, le nombre fait de E , c'est-à-dire de AB , en AB , c'est à sçavoir le quarré de AB , sera esgal aux nombres, qui seront produits de E , c'est-à-dire de AB , en chaque partie AC , CD & DB .

3. Si un nombre est coupé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, est égal à celui-là contenu des parties, & au quarré fait d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB divisé en AC , CB . Je dis que le nombre plan produit de AB en la partie AC , est esgal à celui fait des parties AC , CB , & au quarré d'icelle partie AC . Car estant pris le nombre D esgal à la susdite partie AC ; par le 1. Theor. le nombre fait de D , c'est-à-dire de AC , en AB ; ou (qui est le même) de AB en AC , sera esgal aux nombres faits de D , c'est-à-dire de AC , en CB , & de D , c'est-à-dire de AC , en AC , sçavoir est le quarré de AC . Ce qui estoit proposé.

$$\begin{array}{|l} A \dots C \dots B \\ D \dots \end{array}$$

4. Si un nombre est divisé en deux parties; le quarré fait du tout est égal aux deux quarrés faits des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB divisé en AC , CB . Je dis que le nombre quarré fait de AB , est esgal aux quarrés des parties AC , CB , avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB . Car par le 2. Theor. le nombre quarré de

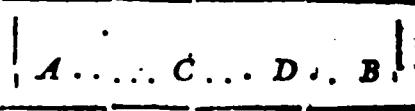
AB , est esgal aux nombres faits de AB en AC , & en CB . Mais par le 3. Theor. le nombre fait de AB en AC , est esgal au nombre produit de AC en CB , & au

$$\begin{array}{|l} A \dots C \dots B \end{array}$$

quarré d'iceluy AC : Item le nombre produit de AB en CB , est par même raison esgal au nombre produit de AC en CB , & au quarré de CB . Donc le nombre quarré fait de AB , est pareillement esgal aux nombres quarrés des parties AC , CB , & a deux fois le nombre fait de AC en CB . Ce qui estoit proposé.

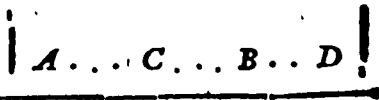
5. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & en deux inégales; le nombre plan contenu des parties inégales, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est égal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB , coupé en deux parties égales AC , CB , & en deux inégales AD , DB . Je dis que le nombre plan compris des parties inégales AD , DB , avec le quarré du nombre CD , est égal au quarré du nombre BC . Car puis que par le Theor. preced. le nombre quarré de CB , est égal aux quarrés des parties CD , DB , avec deux fois le nombre fait de CD , DB ; & par le 3. Theor. le nombre plan compris de CD , DB , ensemble, avec le quarré de DB , est égal au nombre produit de CB en DB , sera fait que si ce nombre fait de CB , en DB , est pris pour le quarré de DB , avec le nombre fait de CD , en DB , aussi le nombre quarré de CB ; est égal à l'autre quarré de CD , ensemble à l'autre nombre fait de CD en DB , & au nombre produit de CB , c'est-à-dire de AC en DB : & partant par le 1. Theor. la nombre fait du total AD en DB , est égal aux nombres produits de CD en DB , & de AC en DB . Donc le quarré de CB , sera égal au quarré de CD , & au nombre fait de AD en DB . Ce qui estoit proposé.



6. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & à iceluy est adjointé quelque autre nombre; le nombre qui est fait du tout avec l'adjointé en l'adjointé, avec le quarré de la moitié du nombre, est égal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adjointé.

Soit le nombre AB coupé en deux parties égales AC , CB , & à iceluy soit adjointé le nombre BD . Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adjointé BD comme au seul, sçavoir est de AD en l'adjointé BD , avec le quarré de la moitié CB , est égal au quarré fait de la moitié CB & adjointé BD comme

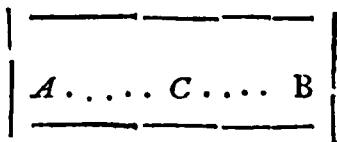


en ſeul, c'eſt-à-dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. Theor. le quarré de CD eſt eſgal aux quarréz des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'eſt-à-dire aux quarréz des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD : Mais par le premier Theor. le nombre fait de AD en BD, eſt eſgal aux nombres contenus ſous CB, BD, & ſous AC, BD, & ſous AD, BD, c'eſt-à-dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD en DB, pour le quarré de la partie BD, avec les nombres faits de CB en BD, & de AC en BD, le quarré de CD ſera eſgal à l'autre quarré de CB, enſemble avec le nombre fait de AD en BD : c'eſt-à-dire que le nombre fait de AD en BD, avec le quarré de CB, eſt eſgal au quarré de CD. Ce qui eſtoit propoſé.

7. Si un nombre eſt diviſé en deux parties, le quarré du tout avec le quarré de l'une des parties, eſt égal à deux fois le nombre fait du tout en icelle partie, enſemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB coupé en parties AC, CB. Je diſ que le quarré de AB, avec celui de la partie CB, eſt eſgal à deux fois le nombre fait de AB en CB, enſemble avec le quarré de l'autre partie AC. Car puis que par le 4. Theor. le quarré de AB eſt eſgal aux quarréz des parties AC, CB, & à deux fois le nombre fait d'icelles AC, CB;

ſi on ajoute le commun quarré de CB, les quarréz de AB, CB, ſeront enſemble eſgaux aux quarréz de AC, CB, avec deux fois le nombre produit de AC en



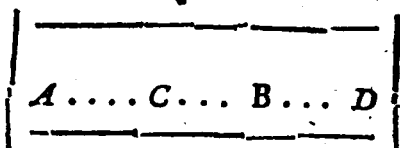
CB : mais par le 3. Theor. le nombre fait de AC en CB avec le quarré de CB, eſt eſgal au nombre produit de AB en CB; & partant le double de l'un eſt eſgal au double de l'autre. Donc ſi pour le double du nombre fait de AC en CB, & quarré de CB, on prend le double du nombre produit de AB en CB, les quarréz des nombres AB, CB ſeront enſemble eſgaux à deux fois le nombre de AB en CB, avec le quarré de l'autre partie AC. Ce qui eſtoit propoſé.

8. Si un nombre eſt diviſé en deux parties, quatre fois le nombre fait du tout en une partie, avec le quarré de

l'autre partie, est égal au quarré du nombre composé de tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB couppe es parties AC , CB . Je dis que le nombre fait de AB en la partie CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC , est esgal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB .

Car estant adjousté le nombre BD esgal à CB , par le 4. Theor. le quarré du tout AD est esgal aux quarréz des nombres AB , BD , en-

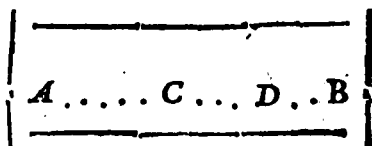


semble avec le nombre double de AB en BD , c'est-à-dire aux quarréz des nombres AB , CB , ensemble avec deux fois le nombre de AB en CB : Mais par le 7. Theor. les quarréz de AB , CB , sont esgaux à deux fois le nombre contenu de AB , CB , avec le quarré de AC : donc si pour les quarréz de AB , CB , on prend le nombre double de AB en CB , & le quarré de AC ; le quarré fait de AD est esgal à quatre fois le nombre fait de AB en CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC . Ce qui estoit proposé.

9. Si un nombre est couppe en deux parties égales, & en deux inégales; les quarréz faits des parties inégales, sont doubles des quarréz faits de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre AB divisé es parties esgales AC , CB , & es inegales AD , DB . Je dis que les quarréz des parties inegales AD , DB , sont doubles des quarréz de la moitié AC , & du nombre entre-moyen CD .

Car puisque par le 4. Theor. le quarré du nombre AD est esgal aux quarréz des nombres AC , CD , ensemble avec deux fois le nombre fait de AC



en CD ; si on adjoute le commun quarré de DB , les quarréz des parties AD , DB , seront esgaux aux quarréz des parties AC , CD , BD , ensemble avec deux fois le nombre produit de AC en CD , c'est-à-dire de CB en CD . Mais par le 7. Theor. les quarréz de CB , c'est-à-dire de AC , & CD , sont esgaux au quarré de DB , & à deux fois le nombre de CB en CD . Donc si pour le quarré de DB , &

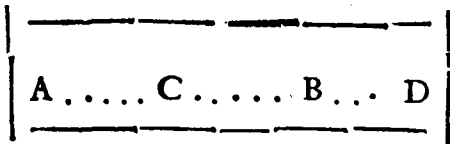
deux

deux fois le nombre fait de CB en CD, on prend les quarréz de AC, CD, les quarréz de AD, DB seront esgaux au double des quarréz des parties AC, CD; & partant ces quarréz-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

10. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & à iceluy on adjointe quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adjointe, sont ensemble doubles des quarréz de la moitié, & de celuy fait du nombre composé d'icelle moitié & de l'adjointe.

Soit le nombre AB divisé en deux parties égales AC, CB, & à iceluy soit adjointe le nombre BD. Je dis que le quarré du nombre AD composé du tout AB, & de l'adjointe BD, & le quarré d'iceluy nombre adjointe BD, sont ensemble doubles des quarréz faits de la moitié AC, & de CD, composé de la moitié CB & de l'adjointe BD. Car puisque par

le 4. Theor. le quarré de AD est esgal aux quarréz de AC, CD, & a deux fois le nombre pro-

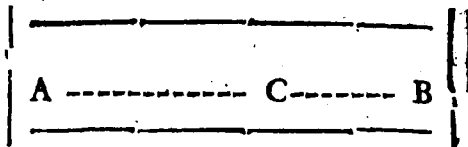


duit de AC, c'est-à-dire de CB, en CD; si on adjointe le commun quarré du nombre BD, les quarréz des nombres AD, BD, seront esgaux aux quarréz des parties AC, CD, BD, ensemble avec deux fois le nombre produit de CB en CD. Mais par le 7. Theor. les quarréz de CB, ou AC, & CD sont esgaux au quarré de BD, & a deux fois le nombre fait de CB en CD. Donc si pour le quarré de BD, & deux fois iceluy nombre produit de CB en CD, on prend les quarréz des nombres CB, CD, c'est-à-dire des nombres AC, CD; les quarréz des nombres AD, BD seront esgaux à deux fois les quarréz des nombres AC, CD: & partant ceux-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

Or voila quant aux 10. premieres prop. du 2. liv. mais la 11^e. ne se peut accommoder aux nombres, c'est-à-dire qu'on ne peut pas diviser un nombre proposé, en telle sorte que le nombre plan fait du tout & de l'une des parties, soit égal au nombre quarré de l'autre partie.

Car, s'il est possible, soit divisé AB en AC, CB, en sorte que le nombre plan fait du tout AB, & de la partie CB, soit esgal au quarré de l'autre partie AC. Donc quatre fois le nom-

bre de AB en CB , sera quadruple du carré de AC : & partant quatre fois le nombre plan d'iceluy AB en CB , avec le carré de AC , sera quintuple d'iceluy carré de AC .



Mais quatre fois le nombre plan de AB en CB , avec le carré de AC , est carré, vu que par le 8. Theor. il est esgal au nombre carré, qui est fait du nombre composé de AB & de CB . Donc deux nombres quarez (sçavoir celuy qui est fait de AB en CB quatre fois avec le carré de AC ; & le carré de AC) ont même raison, que 5 à 1, ou 25 à 5. Ce qui est absurde, ainsi qu'il appert du corol. de la 24. prop. 8. Le nombre AB ne peut donc pas être divisé; en sorte que le nombre plan fait du tout en une des parties soit esgal au carré de l'autre partie. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont même raison avec iceux: le composé de deux tels que l'on voudra d'iceux, sera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C , les plus petits de tous ceux qui ont la même raison. Je dis que le composé de deux quels on voudra d'iceux, comme de A & B , est premier à l'autre C ; & le composé de B, C , premier à A ; & de A, C , premier à B .

A 9.	B 12.	C 16.
D 3.	E 4.	

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la même raison par le Scholie de la 35. prop. 7. il est évident par ce qui a été démontré à la 2. prop. 8. que A & C sont les quarez de D & E , & que B est le produit de D multiplié par E : & par le 3. Theor. du Scholie precedent le composé de D, E , multiplié par D , produira un nombre égal au composé de A & B . Mais D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi leur composé sera pre-

mier à E, par la 30. prop. 7. & partant aussi a son carré C, par la 27. prop. 7. Et par même raison D sera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produit du composé de D & E multiplié par D, sera aussi premier à C. Mais nous avons montré que ce produit est égal au nombre composé de A & B : Donc aussi le composé de A & B sera premier à C.

En après, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacun d'eux ; par la 26. prop. 7. le produit du composé de D, E, multiplié par E sera premier à D. Mais par le susdit Theor. iceluy produit est égal à C fait de E en soy, & au nombre B fait de D en E. Donc le nombre composé de ces deux B & C sera aussi premier à D ; & partant aussi à A par la 27. proposition 7.

Finablement D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au composé de deux par la 30. prop. 7. leur produit B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produit de D, E comme un seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produit de D E comme un seul nombre multiplié en soy, est égal à A & C & deux fois B ensemble : donc A & C avec deux fois B, sont premiers à B. Or en ôtant les deux fois B, il est manifeste que le reste composé de A & C, sera premier à B. Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesurerait aussi deux fois B ; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a été démontré cy-dessus. Donc le composé de A & C est premier à B. Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionaux, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Je dis que comme A est à B, ainsi B n'est pas à quelque au-

tre, c'est-à-dire qu'à A & B, on ne peut trouver un troisième proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B, ainsi B soit à un autre, sçavoir C. Par

$$\left| \begin{array}{ccc} \hline A & B & C \\ \hline 3 & 5 & -- \\ \hline \end{array} \right|$$

la 23. prop. 7. A & B étans premiers, ils feront les plus petits qui soient en la même raison; & par la 21. prop. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy-même; donc A mesure iceux A & B. Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothèse. Donc il n'est pas comme A à B, ainsi B à C. Par même raison, il ne sera pas comme B à A, ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Ce qui est dit & démontré tant en cette 16. prop. qu'aux trois suivantes, se doit entendre des nombres entiers: car si on les vouloit étendre aux fractions, il est certain & manifeste qu'à deux nombres quels qu'ils soient, on en peut trouver un troisième proportionnel; puis que le quarré du second nombre étant divisé par le premier, en est produit un troisième proportionnel. Comme aux deux nombres premiers trois & cinq, si le quarré du second nombre 5, sçavoir 25 est divisé par le premier 3, proviendra $8\frac{1}{3}$ pour le troisième proportionnel, &c.

T H E O R. 17. P R O P. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extrêmes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, lesquels les extrêmes A & C soient premiers entr'eux. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

A 4.	B 6.	C 9.	D---

Car, s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B à D : & par la 23. prop. 7. & C étans premiers, ils seront les plus petits en leur raison : & par la 21. prop. 7. ils mesureront également B & D ; sçavoir est A iceluy B ; & C iceluy D. & pource que comme A à B, ainsi B à C ; & A mesure B, aussi B mesurera C : & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C ; & iceux A mesurant soy-même, il mesurera iceux A & C premiers entr'eux : ce qui est absurde. A n'est donc pas à B, comme C à D. Par mêmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

P R O B L. I. P R O P. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on pourra trouver un troisiéme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B : Il faut considerer si à iceux on peut trouver un troisiéme nombre proportionnel.

La solution de cette proposition est aisée: Car il n'y a qu'à considerer si C, produit du second nombre B multiplié par soy-même,

A 4.	B 6.	D 9.	C 36.
A 6.	B 7.	D---	C 49.

peut être mesuré, c'est-à-dire divisé par le premier A : car s'il peut être mesuré ou divisé, comme en la premiere formule, il est évident par la 20. prop. 7. que le quotient D sera troisiéme nombre proportionnel ; sinon,

on n'en trouvera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres étans prop. le produit des extrêmes doit être égal au produit du milieu.

PROBL. 2. PROP. XIX.

Estans donnez trois nombres, considérer si on pourra trouver un quatrième proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut considérer si à iceux on peut trouver un quatrième proportionnel.

La solution de cette prop. est aussi aisée. Car il faut seulement

A 3.	B 6.	C 5.	E 10.	D 30.

considérer si D; qui est le produit des second & troisième nombres B & C, peut être mesuré par le premier A: s'il peut être mesuré ou divisé, il est évident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatrième proportionnel. sinon, on n'en trouvera point, puis que par la susdite 19. prop. 7. quatre nombres étans proportionnels le produit du second & troisième doit être égal au produit du premier & quatrième.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouvera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Je dis qu'il s'en trouvera encores d'autres.

Car si on trouve le nombre DE, le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à iceluy

A ..2	B ...3	C 5
D-----		30E. F
G----		

DE on adjoute l'unité EF, le tout DF sera premier ou

non : S'il est premier , on a un nombre premier autre que pas un des proposez : Mais si DF n'est premier , il sera mesuré par quelque nombre premier , par la 34. prop. 7. Soit donc mesuré par G ; il est évident que G ne peut pas être un des trois A , B , C : car s'il étoit quelqu'un d'iceux , il mesurerait comme eux DE. Donc G mesurant le tout DF , & le retranché DE , par la 12. com. sent. il mesurerait aussi le reste DF , sçavoir un nombre l'unité : Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas un des proposez. Et en cette façon on en peut trouver infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propose , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adjoutez ; le tout sera pair.

Soient adjoutez tant de nombres pairs que l'on voudra AB , BC , CD : Je dis que tout le composé AD , est pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié , iceux AB , BC , CD , auront chacun moitié :

Soit donc

EF moitié

de AB ; &

FG de BC ;

& GH de

CD. D'au-

A 6	B 4	C 8	D
E 3	F 2	G 4	H

tant que comme AB à EF , ainsi BC à FG , & CD à GH (la raison étant toujours double) aussi par la 12. prop. 7. comme AB sera à EF , ainsi AD à EH. Mais AB est double d'iceluy EF : Donc aussi AD sera double de EH ; & partant iceluy nombre AD ayant moitié est pair par la susd. 6. def. Parquoy si tant de nombres pairs , &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont

adjoûtez, & que la multitude d'iceux soit pair, le tout sera pair.

Soient adjoûtez tant de nombres impairs que l'on voudra, desquels la multitude AB, BC, CD, DE, soit pair : Je dis que le tout AE est pair.

Car d'autant que AB, BC, CD, DE, sont impairs, par

A ... 3	B 5	C 7	D 9	E

la 7. def. 7. chacun sera different du nombre pair de l'unité : & partant si de chacun d'iceux l'on retranche l'unité on les rendra tous pairs, & par la 21. prop. 9. le composé d'iceux sera pair : Et d'autant que leur multitude est en nombre pair, les unitez retranchées feront aussi un nombre pair, lequel adjoûté avec tout le reste, qui est déjà nombre pair, le tout AE sera pareillement pair par la susdite 21. prop. 9. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont ajoûtez, & que la multitude d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Soient adjoûtez tant de nombres impairs que l'on voudra, la multitude desquels comme AB, BC, CD soit impair : Je dis que le tout AD est impair.

A ...	B C E . D

Car puis que par la def. du nombre impair, il differe du nombre pair de l'unité, ayant retranché l'unité ED du nombre impair CD, le reste CE sera pair. Mais par la prec. prop. AC composé des impairs AB, BC, pairs en multitude, est pair : Donc aussi AE composé des pairs AC, CE, sera pair : Et partant si à ice-

luy AE, l'on adjoûte l'unité ED, le tout AD sera impair, puis que par la susd. def. le nombre impair differe du pair de l'unité. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Soit un nombre pair AB, duquel soit retranché un nombre pair CB: Je dis que le reste AC est aussi pair.

Ce qui est évident: Car s'il n'étoit pair, en ostant l'unité AD on le rendroit pair: Et le retranché avec iceluy, sçavoir DB, seroit

$$\begin{array}{|c|} \hline A . D C B \\ \hline \end{array}$$

aussi un nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adjoûtant l'unité ostée AD, le tout AB seroit impair; ce qui est absurde, puis qu'il a été posé pair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Du nombre pair AB, soit retranché le nombre impair CB: Je dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché l'unité CD du nombre impair CB, le reste DB sera pair. Et d'autant que le tout AB est posé

$$\begin{array}{|c|} \hline A C . D B \\ \hline \end{array}$$

pair, par la preced. le reste AD sera aussi pair. Et partant si on en oste l'unité CD, le reste AC sera impair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair on oste un nombre impair, le reste sera pair.

Soit un nombre impair AB, duquel soit retranché un nombre impair CB : Je dis que le reste AC est pair.

Car ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'unité DB, les nombres restans AD, CD, seront pairs. Et d'autant

que du nombre pair AD, est retranché le nombre pair CD; par la 24. prop. 9. le reste AC sera pair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer;

$$\begin{array}{|c|} \hline A \dots C \dots D \dots B \\ \hline \end{array}$$

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste un nombre pair, le reste sera impair.

Du nombre impair AB, soit retranché un nombre pair CB : Je dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'unité AD, le reste DB sera pair; duquel étant retranché le pair CB, par la 24. prop. 9. le reste DC sera aussi pair : & partant l'unité AD y étant adjouëtée, AC sera impair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

$$\begin{array}{|c|} \hline A \dots D \dots C \dots B \\ \hline \end{array}$$

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si un nombre impair multiplie un nombre pair, le produit sera pair.

Soit un nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est pair.

Car d'autant que C est produit de A en B; iceluy produit C sera composé d'autant de nombres égaux à B, qu'il y a d'unités en A. Mais B est pair, & partant C sera composé

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A \dots 3 & B \dots 4 \\ \hline C \dots \dots \dots 12 \\ \hline \end{array}$$

d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unités en A : & par la 21. prop. 9. C sera pair. Parquoy si un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

On démontrera en la même manière, que si un nombre pair multiplie un nombre pair, le produit sera aussi pair. Car de reche C se compose d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unités en A, &c.

A . . . 2	B 4
C 8	

C O R O L L A I R E.

De ce que dessus, il s'ensuit qu'un nombre pair multiplié par soy-même produira un nombre pair ; comme il est manifeste, en posant les nombres pairs A & B égaux.

T H E O R. 27. P R O P. XXIX.

Si un nombre impair multiplie un nombre impair ; le produit sera impair.

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est impair.

Car puis que C est le produit de A en B, il sera composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A : Et partant puis que tant A que B est

A . . . 3	B 5
C 15	

nombre impair, leur dit produit C sera composé d'autant de nombres impairs égaux à B, qu'il y a d'unités au nombre impair A : parquoy la multitude d'iceux sera impair, & par la 23. prop. 9. ledit produit C sera nombre impair. Si donc un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste qu'un nombre impair multiplié par soy-même produit un nombre impair.

S C H O L I E.

Clavius demontre en cet endroit (après *Campanus*) les deux Theoremes suivans.

1. Un nombre impair mesurant un nombre pair , il le mesure par un nombre pair.

Soit le nombre impair *A*, lequel mesure le nombre pair *B* par *C*. Je dis que *C* est pair. Car s'il est impair, *B* produit de *A* impair multiplié par *C* impair, sera impair, par l. 29. prop. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc *C* est pair.

<i>A</i> . . . 3	<i>C</i> . . 2
<i>B</i> 6	

2. Un nombre impair mesurant un nombre impair, il le mesure par un nombre impair.

Soit le nombre impair *A*, qui mesure le nombre impair *B* par *C*. Je dis que *C* est impair : Car s'il est pair ; *B* fait de *A* impair

<i>A</i> . . . 3	<i>C</i> 5
<i>B</i> 15	

par *C* pair, sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est contre l'hypothese ; donc *C* est impair.

A ces deux Theor. nous adjoûterons le suivant.

Tout nombre qui mesure un nombre impair, est aussi impair.

Soit le nombre impair *A*, lequel *B* mesure par *C*. Je dis que *B* est impair. Car *C* étant multiplié par *B* produira *A* par la 9. com.

<i>A</i> 15	
<i>B</i> 5	<i>C</i> . . 3

sent. Et si *B* n'est impair, mais pair, le produit *A* sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc *B* qui mesure *A* impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Jedis qu'il mesurera aussi sa moitié C.

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D : iceluy D sera pair, comme nous avons démontré au Scholie du precedent Theor. 1. & partant il se pourra di-

A ... 3	D 4	E ... 2
B	12	
C	6	

viser en deux également par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moitié E, ainsi B sera à sa moitié C : & en permutant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D, aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B dénommée par A : donc aussi E sera la partie de C dénommée par le même A : & partant A mesurera C, par la 40. prop 7. Si donc un nombre impair mesure un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si un nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Je dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers entr'eux, quelque nom-

bre les mesurera, & soit D, lequel sera impair, comme nous avons démontré au S. ho-

A ... 3	B 4
C	8 D--

lie de la 29. prop. 9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop. prec. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C ; & partant ils seront premiers entr'eux. Si donc un nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suivent le binaire en progression double, sont seulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Je dis que B, C, D, E sont tant seulement pairement pairs.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'unité, & puis- que depuis l'uni-

Unité.	A2.	B4.	C8.	D16.	E32.

té, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. prop. 9. lesquels étans tous pairs, il est évident par les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient suivre en la même progression. Mais d'autant que A prochain de l'unité est nombre premier, à sçavoir binaire, par la 13. prop. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la même progression, lesquels étans tous pairs, un nombre pair mesurera chacun d'iceux par un nombre pairs, & partant iceux nombres seront seulement pairement pairs. Parquoy tous les nombres qui suivent le binaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B est impair : Je dis que A est seulement pairement impair.

Car puisque B impair est moitié de A, il le mesurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A sera pairement impair. Mais qu'il soit seulement pairement impair,

On le prouvera ainsi. S'il étoit parement pair, un nombre pair, comme D, le mesurerait par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. sent. A est fait de D en E : mais le même A est aussi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. prop. 7. le produit de C par B, étant égal au produit de E en D, comme C sera à E, ainsi D à B. Mais C nombre binaire mesure E : Il faudroit donc aussi que D pair mesurast B impair : ce qui est impossible. Donc A n'est parement pair : & partant il est seulement parement impair. Parquoy si la moitié d'un nombre est impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 30.	
B 15.	C 2.
D --	E --

THEOR. 32. PRO P. XXXIV.

Si un nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié ne soit nombre impair, il sera parement pair, & parement impair.

Le nombre pair A, ne soit de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié soit pair : Je dis que A est parement pair & parement impair.

Qu'il soit parement pair, il est évident. Car d'autant que sa moitié est pair,

A	20

le binaire, qui est pair, le mesurera par icelle moitié ; & par la 9. def. 7. il sera parement pair.

Or il est aussi parement impair : car puis que iceluy nombre A n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, si on le divise toujours en deux également on viendra enfin à un nombre impair auparavant que parvenir jusques au binaire, lequel nombre impair mesurera A par un nombre pair : Car si c'estoit par un impair, attendu que par la 29. prop. 9. un nombre impair multipliant un nombre impair, produit un nombre impair, A seroit impair : ce qui

est absurde, étant posé pair. Vû donc qu'un nombre impair mesure A par un nombre pair, & qu'un nombre pair le mesure aussi par un nombre pair; iceluy nombre A sera pairement pair, & pairement impair. Parquoy si un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux , & que l'on retranche du second & du dernier , un nombre égal au premier ; comme le reste du second sera au premier , ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A , B , C , D , & que du second B l'on retranche FG égal au premier A : Et du dernier D l'on retranche KL aussi égal à A : Je dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois precedens A, B , C , ensemble.

Car si de DL on retranche LI égal à BG, il est évident que KI sera égal à BF, (étant KL égal à FG) & si on retranche LH égal à

A		8	
B	4	F	8 G
C			18
D	9	H	6 I 4 K 8 L

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, jusques à ce que le tout composé soit nombre premier : iceluy tout multiplié par le dernier produira un nombre parfait.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raison double, la somme desquels & de l'unité soit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D fasse FG : Je dis que le produit FG est nombre parfait.

Car ayant pris HI double de E ; K double de HI ; & L double de K, & ainsi de suite tant qu'il y aura de nombres proposez : iceux nombres E, HI, KL, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D ; & partant en raison égale, A sera à D comme E à L ; & par la 19. prop. 7. le produit de A multiplié

Vnité.

A . . . 2

B 4

C 8

D 16

E 31

H 31 M 31 I

K 124

L 248

F 31 N 465 G

O-- P--

par L, sera égal au produit de D par E, sçavoir FG : mais A étant binaire, FG sera double de L : ainsi E, HI, K, L, FG, seront continuellement proportionnaux en raison double. Maintenant de HI second soit retranché HM égal à E premier ; & de FG dernier, soit retranché FN, aussi égal à E premier : par la prec. prop. comme MI est égal à E, (d'autant que HI étoit double de E) ainsi NG sera égal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN égal à E, est aussi égal à l'unité & à A, B, C, D ensemble. Et par consequent FG sera égal à l'unité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble :

L 1

& puis que FG a été fait de E multiplié par D, par la 4^e com. sent. D mesurera FG ; & partant par la 11. com. sent. l'unité, & les nombres A , B , C , qui par la 11. prop. 9. mesurent D, mesureront le même FG. De rechef puis que L mesure FG ; aussi par la 11. com. sent. les nombres E , HI , K , lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double : mesureront le même FG : ainsi l'unité & tous les nombres A , B , C , D , E , HI , K , L mesurent iceluy FG , lequel ne peut être mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy , comme nous montrerons incontinent : & partant par la 22. def. du 7. il sera nombre parfait , étant égal à toutes ses parties aliquottes.

Que si on pense que FG puisse être mesuré par quelque autre nombre que les susdits ; que O le mesure , s'il est possible , selon P : donc O multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le même FG est aussi produit de E en D. Donc un même nombre est fait de E premier par D 4^e , & de P second en O 3^e , & partant comme E à P , ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A , B , C , D , sont continuellement proportionnaux depuis l'unité , & que A proche de l'unité est premier , par la 13. prop. 9. nul autre nombre que A , B , C mesurera le dernier D : & O est posé n'être le même qu'aucuns d'iceux A , B , C ; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D , ainsi étoit E à P : Donc aussi E ne mesurera P : & puis que E est premier par la 31. prop. 7. E & P seront premiers entr'eux : & partant les moindres en leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. E mesurera O , comme P mesurera D. Mais nul autre que A , B , C mesure iceluy D. Donc P sera le même que l'un d'iceux A , B , C. Soit donc le même que B : & d'autant que B , C , D , & E , HI , K , sont continuellement proportionnaux en raison double , par raison égale comme B sera à D , ainsi E à K , & partant par la 19. prop. 7. le produit de B par K , sera égal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est égal à celui de P en O. Donc un même nombre sera fait de P en O , que de B en K ; & partant par la 19. prop. 7. comme P sera à B , ainsi K à O. Mais P étoit le même que B : Donc aussi K sera le même que O : Ce qui est

absurde, car O a été posé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui mesurent FG, & lequel ils composent. Iceluy est donc nombre parfait. Parquoy si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Il appert de ce Theor. que pour trouver des nombres parfaits, & leurs parties aliquottes, il faut poser d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles depuis l'unité, puis adjoûter tous ces nombres-là ensemble, & si la somme d'iceux est nombre premier, icelle étant multipliée par le dernier nombre, le produit sera nombre parfait. Mais si la susdite somme n'est nombre premier, il faudra poursuivre la position des nombres doubles jusques à ce que ladite somme de tous les nombres posez vienne à être nombre premier, laquelle étant, comme dit est cy-dessus, multipliée par le dernier des nombres doubles sera procréé un nombre parfait. Et si on prend autant de nombres continuellement doubles du susdit nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura posé depuis l'unité, (icelle excluse) tous ces nombres avec ladite unité, seront les parties aliquottes que peut avoir le nombre parfait trouvé. Ce qui est évident par la démonstration de cette prop. & neanmoins nous joindrons encore icy quelques exemples. Ayant posé 1 & 2, leur somme 3 est nombre premier, lequel étant multiplié par 2, produit 6, nombre parfait, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, font ensemble 7, nombre premier: parquoy iceluy étant multiplié par le dernier nombre 4, le produit 28 est nombre parfait, & les parties aliquottes d'iceluy sont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la somme de ces nombres 1, 2, 4, 8, sçavoir 15, n'est pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme 31, est un nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produit le nombre parfait 496, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neuvième Element.