

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES ŒUVRES D'EUCLIDE.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris , aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR , rue de Provence , n° 25 ;
TREUTTEL et WURTZ , libraires à Paris , rue de Lille , n° 17 ;
FIRMIN DIDOT , rue Jacob , n° 24 ;
Madame veuve COURCIER , quai des Augustins , n° 57.

**LES OEUVRES
D'EUCLIDE,**
EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

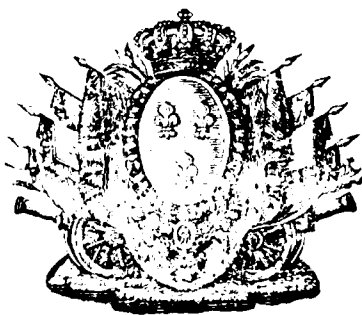
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME SECOND.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

~~~~~  
1816.





# P R É F A C E.

---

# P R Æ F A T I O.

---

**H**oc volumen, quo liber octavus, nonus et decimus continetur, jampridem editum fuisset, nisi plura impedimenta, quæ sane non prævideram, moram aliquam attulissent opusque intermisissent. Tertium et ultimum volumen prelo subjicitur, et sub ortum proximæ æstatis prodibit in lucem.

Malignus quidam rumor percrebuerat me jam non habere in manibus vaticanæ bibliothecæ codicem 190, ac proinde ab incepto destitisse. Quorumore nihil absurdius; rogante enim et impetrante regni interioris administro, codex ille fidei meæ creditus est, ac penes me erit, donec opus meum in lucem sit editum.

Interim, omissâ aliquandiu Euclidis mei curâ, ultimam Apollonio meo manum admovi, quod quidem opus absolutum ac sub judice est, nempe Scientiarum Academiâ. Typis mandabitur græcis, latinis et gallicis: accedent variæ lectiones regiæ bibliothecæ codicum, necnon et Oxoniæ editionis, quæ, fatente ipso editore, confecta est juxta duos græcos codices, scatentes vitiis, ac prorsus iisdem, utpote ex uno et eodem codice exaratos.

Hæc editio complectetur Conicorum Apollonii septem libros qui supersunt, Pappi lemmata, Eutocii commentarios, et Sereni duos libros de cylindro et cono.

Archimedis operibus necnon Eutocii commentariis edendis græce, latine et gallice operam impendo. Quando nitidissima Oxoniæ editio prelo fuit subjecta, jam obierat Torelli, vir magnæ doctrinæ, antequam ultimam manum Archimedi suo admovisset, et ob id maculis scatet. Quod si

---

# P R É F A C E.

---

Ce volume, qui renferme le huitième, le neuvième et le dixième livre, aurait paru depuis long-temps, si plusieurs obstacles qu'il ne m'était pas donné de prévoir, n'eussent retardé et suspendu plusieurs fois l'impression de mon ouvrage. Le troisième et dernier volume est sous presse, et paraîtra au commencement de l'été prochain.

On avait répandu le bruit que n'ayant plus entre mes mains le manuscrit 190 de la bibliothèque du Vatican, j'avais abandonné mon entreprise : ce bruit était sans fondement, ce manuscrit n'est jamais sorti de mes mains ; à la sollicitation du Ministre de l'intérieur, ce volume sera laissé à ma disposition jusqu'à la publication entière de mon ouvrage.

Les interruptions de l'impression de mon Euclide m'ont laissé le temps nécessaire pour mettre la dernière main à mon Apollonius. Mon travail est terminé, et soumis à l'examen de l'Académie des Sciences. Les œuvres d'Apollonius seront imprimées en grec, en latin et en français, avec les variantes des manuscrits grecs de la bibliothèque du Roi et de l'édition d'Oxford, laquelle, de l'aveu même de l'éditeur, ne fut faite que d'après deux manuscrits grecs qui avaient les mêmes défauts, parce qu'ils étaient tous les deux la copie d'un seul et même manuscrit.

Cette édition renfermera les sept livres des Coniques qui nous restent d'Apollonius, les lemmes de Pappus, les commentaires d'Eutocius, et les deux livres du cylindre et du cône de Sérénus.

Je prépare une édition grecque, latine et française des œuvres d'Archimède et des commentaires d'Eutocius. Lorsque la belle édition d'Oxford fut imprimée, le savant Torelli était mort avant d'avoir mis la dernière main à son Archimède, et c'est à cause de cela que cette édition fourmille de

hæc editio Torelli vivente facta fuisset, non equidem hoc ultimum opus aggressus fuisset. Si forte accidit ut mors immatura me quoque prius arripiat, quam Archimedis opera penitus absolverim, tum opus imperfectum ante novissimam diem exuri jubebo, ne quis, me mortuo, illud prelo subicere velit.

Liber decimus Euclidis Elementorum vix quibusdam geometris nostratibus notus est: quin et bene multi illum habent supervacaneum et intellectu perdifficilem.

Utrumque citra manifestam rerum fidem. Hic liber continet et plures propositiones geometris perutiles, et nonnullas illis semper admirandas.

Fateor equidem studentis animum, primo intuitu posse deterreri et avocari, conspectis septemdecim et centum propositionibus hoc in libro contentis; sed unaquæque, velut è fonte communi, derivatur è quibusdam definitionibus ac præcipuis, iisque paucissimis, propositionibus, quarum ope reliqua facillime demonstrantur. Ad hoc hujus libri partes ita inter se dispositæ sunt, ut earum non seriem et juncturam modo, sed concentum et harmoniam oculus, primo conjectu, percipiat. Illic vere notandus est mirabilis ille ordo quem in omnibus suis operibus Euclides constituit.

Hæ vero libri decimi sunt definitiones et propositiones. Hæc tabula synoptica mihi aptissima visa est ad illius comprehensionem acquirendam.

## D E F I N I T I O N E S.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eadem mensurâ mesurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mesurantur.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

fautes. Si cette édition eût été faite de son vivant, je ne me serais certainement pas chargé de ce dernier travail. Il est très-possible qu'une mort prématurée vienne aussi me surprendre avant que j'aie mis la dernière main aux œuvres d'Archimède. Mais si cela arrive, j'ordonnerai, avant mon dernier jour, de livrer aux flammes un travail imparfait, qu'on serait peut-être tenté de publier après ma mort.

Le dixième livre des Éléments d'Euclide est aujourd'hui très-peu connu des géomètres français : ils regardent généralement ce livre comme superflu, et comme étant très-difficile à entendre.

Ces deux reproches me paraissent mal fondés. Ce livre renferme un grand nombre de propositions utiles aux géomètres, et une foule d'autres qui sont dignes de toute leur admiration.

Les cent dix-sept propositions que contient ce dixième livre seraient peut-être capables de décourager, au premier abord, celui qui veut l'étudier ; mais tout dépend dans ce livre de quelques définitions, et d'un très-petit nombre de propositions fondamentales, à l'aide desquelles tout le reste se démontre avec la plus grande facilité. Ajoutons à cela que les parties en sont tellement disposées, que l'œil en saisit l'ensemble sans le moindre effort. C'est là surtout qu'Euclide se fait remarquer par l'ordre admirable qu'il a su établir dans tous ses ouvrages.

Voici les définitions et les propositions du dixième livre. Ce tableau synoptique me paraît très-propre à en faciliter l'étude.

### D É F I N I T I O N S.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocetur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

PROP. I. Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

PROP. II. Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. III. Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

PROP. IV. Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

PROP. V. Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

PROP. VI. Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

PROP. VII. Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

5. Ces choses étant supposées, on démontre qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le quarré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

PROP. I. Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

PROP. II. Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. III. Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. IV. Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. V. Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VI. Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

PROP. VII. Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.



PROP. VIII. Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. IX. A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

PROP. X. Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.

PROP. XI. Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

PROP. XII. Eidem magnitudini commensurabiles et inter se sunt commensurabiles.

PROP. XIII. Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. XIV. Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

PROP. XV. Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

PROP. XVI. Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et

PROP. VIII. Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. IX. Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

PROP. X. Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

PROP. XI. Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

PROP. XII. Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles.

PROP. XIII. Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

PROP. XIV. Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

PROP. XV. Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième; et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

PROP. XVI. Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme

tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

PROP. XVII. Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

PROP. XVIII. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XIX. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XX. Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

sera commensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est commensurable avec une d'elles , les grandeurs proposées seront commensurables.

PROP. XVII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables , leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles , les grandeurs proposées seront incommensurables.

PROP. XVIII. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite , et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur , la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande , et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite , ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

PROP. XIX. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite , et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur , la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite , ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

PROP. XX. Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur , suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé , est rationel.

PROP. XXI. Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationale  $m$ , et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXII. Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationale erit; ea autem vocetur media.

PROP. XXIII. Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXIV. Recta mediæ commensurabilis media est.

PROP. XXV. Sub mediis longitudine commensurabilibus secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

PROP. XXVI. Sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum, vel rationale vel medium est.

PROP. XXVII. Medium non medium superat rationali.

PROP. XXVIII. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

PROP. XXIX. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

PROP. XXX. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXXI. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

PROP. XXXII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXI. Si une surface rationnelle est appliquée à une droite rationnelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

PROP. XXII. Le rectangle compris sous des droites rationnelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appèlera médiale.

PROP. XXIII. Le quarré d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

PROP. XXIV. Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

PROP. XXV. Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

PROP. XXVI. Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationnel ou médial.

PROP. XXVII. Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

PROP. XXVIII. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationnelle.

PROP. XXIX. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale.

PROP. XXX. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXI. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

PROP. XXXII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationnel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXIII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

PROP. XXXIV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

PROP. XXXV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.

PROP. XXXVI. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

PROP. XXXVII. Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis nominibus prima.

PROP. XXXVIII. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

PROP. XL. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium; tota recta irrationalis est, vocetur autem major.

PROP. XLI. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est, vocetur autem rationale et medium potens.

PROP. XLII. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum

PROP. XXXIII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

PROP. XXXIV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

PROP. XXXV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationnel.

PROP. XXXVI. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites.

PROP. XXXVII. Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

PROP. XXXVIII. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

PROP. XXXIX. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

PROP. XL. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

PROP. XLI. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationnel, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut une rationnelle et une médiale.

PROP. XLII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces



sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

PROP. XLIII. Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

PROP. XLIV. Ex binis mediis prima ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLV. Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVI. Major ad idem solùm punctum dividitur.

PROP. XLVII. Recta rationale et medium potens ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVIII. Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

## DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quam minus plus possit quadrato ex recta sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si vero neutrum, sexta.

droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationnelle et sera appelée celle qui peut deux médiales.

PROP. XLIII. La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

PROP. XLIV. La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLV. La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVI. La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVII. La droite qui peut une rationnelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVIII. La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

## SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROP. XLIX. Invenire ex binis nominibus primam.

PROP. L. Invenire ex binis nominibus secundam.

PROP. LI. Invenire ex binis nominibus tertiam.

PROP. LII. Invenire ex binis nominibus quartam.

PROP. LIII. Invenire ex binis nominibus quintam.

PROP. LIV. Invenire ex binis nominibus sextam.

PROP. LV. Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

PROP. LVI. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

PROP. LVII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

PROP. LVIII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

PROP. LIX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

PROP. LX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

PROP. LXI. Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

PROP. LXII. Quadratum primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

PROP. LXIII. Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

PROP. LXIV. Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

PROP. XLIX. Trouver la première de deux noms.

PROP. L. Trouver la seconde de deux noms.

PROP. LI. Trouver la troisième de deux noms.

PROP. LII. Trouver la quatrième de deux noms.

PROP. LIII. Trouver la cinquième de deux noms.

PROP. LIV. Trouver la sixième de deux noms.

PROP. LV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

PROP. LVI. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

PROP. LVII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

PROP. LVIII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure.

PROP. LIX. Si une surface est comprise sous une irrationnelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LX. Si une surface est comprise sous une rationnelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXI. Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

PROP. LXII. Le carré de la première de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la seconde de deux noms.

PROP. LXIII. Le carré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

PROP. LXIV. Le carré d'une majeure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

PROP. LXV. Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

PROP. LXVI. Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

PROP. LXVII. Recta ei quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.

PROP. LXVIII. Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

PROP. LXIX. Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

PROP. LXX. Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

PROP. LXXI. Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

PROP. LXXII. Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

PROP. LXXIII. Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

PROP. LXXIV. Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

PROP. LXXV. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

PROP. LXXVI. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commen-

PROP. LXV. Le quarré d'une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

PROP. LXVI. Le quarré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

PROP. LXVII. La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXVIII. La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXIX. Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

PROP. LXX. Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXI. Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

PROP. LXXII. Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationnelles ; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXIII. Deux surfaces médiales incommensurables entr'elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXXIV. Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière ; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

PROP. LXXV. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le premier apotome de la médiale.

PROP. LXXVI. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensu-

surabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

PROP. LXXVII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum vero sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

PROP. LXXVIII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

PROP. LXXIX. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

PROP. LXXX. Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

PROP. LXXXI. Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

PROP. LXXXII. Mediæ apotomæ secundæ una solùm congruit recta mediâ, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

PROP. LXXXIII. Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex

nable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le second apotome de la médiale.

PROP. LXXVII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

PROP. LXXVIII. Si d'une droite on retranche une droite, qui était incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationnel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. LXXIX. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. LXXX. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

PROP. LXXXI. Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

PROP. LXXXII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

PROP. LXXXIII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de



ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero bis sub ipsis medium.

PROP. LXXXIV. Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit rectâ potentiâ incommensurabilis existens toti; et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale.

PROP. LXXXV. Ei quæ cum medio medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

### DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

ces droites rationnelle , et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXIV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés.

### DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appellera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appellera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera quatrième apotome.

5. Si vero sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

PROP. LXXXVI. Invenire primam apotomen.

PROP. LXXXVII. Invenire secundam apotomen.

PROP. LXXXVIII. Invenire tertiam apotomen.

PROP. LXXXIX. Invenire quartam apotomen.

PROP. XC. Invenire quintam apotomen.

PROP. XCI. Invenire sextam apotomen.

PROP. XCII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

PROP. XCIII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

PROP. XCIV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

PROP. XCV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

PROP. XCVI. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

PROP. XCVII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

PROP. XCVIII. Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

PROP. XCIX. Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

PROP. C. Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appellera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appellera sixième apotome.

PROP. LXXXVI. Trouver un premier apotome.

PROP. LXXXVII. Trouver un second apotome.

PROP. LXXXVIII. Trouver un troisième apotome.

PROP. LXXXIX. Trouver un quatrième apotome.

PROP. XC. Trouver un cinquième apotome.

PROP. XCI. Trouver un sixième apotome.

PROP. XCII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

PROP. XCIII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

PROP. XCIV. Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

PROP. XCV. Si une surface est comprise sous une rationelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

PROP. XCVI. Si une surface est comprise sous une rationelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

PROP. XCVII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. XCVIII. Le quarré d'un apotome appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un premier apotome.

PROP. XCIX. Le quarré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome.

PROP. C. Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

PROP. CI. Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

PROP. CII. Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

PROP. CIII. Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

PROP. CIV. Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est atque ordine eadem.

PROP. CV. Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

PROP. CVI. Recta minori commensurabilis minor est.

PROP. CVII. Recta ei quæ cum rationali medium totum facit oommen-surabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

PROP. CVIII. Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

PROP. CIX. Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

PROP. CX. Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

PROP. CXI. Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum faciens.

PROP. CXII. Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

PROP. CXIII. Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus

PROP. CI. Le quarré d'une mineure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

PROP. CII. Le quarré d'une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

PROP. CIII. Le quarré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

PROP. CIV. Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

PROP. CV. Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

PROP. CVI. Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

PROP. CVII. La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. CVIII. Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CIX. Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationnelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

PROP. CX. Une surface rationnelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationnelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. CXI. Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CXII. Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

PROP. CXIII. Le quarré d'une rationnelle étant appliqué à une droite de

applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

PROP. CXIV. Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

PROP. CXV. Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; recta spatium potens rationalis est.

PROP. CXVI. A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

PROP. CXVII. Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

Hæ sunt definitiones et propositiones libri decimi, quæ omnes propositiones perspicue, simpliciterque demonstrantur.

Hoc volumen permultas lectiones varias continet. Ingens multitudo rerum supervacanearum in textum libri decimi introductæ fuerant; quæ omnes e textu ejectæ sunt.

Aliter demonstrata, corollaria, lemmata et scholia quibus librum decimum expurgavi reperiuntur cum versionibus latinis et gallicis in lectionibus variantibus.

Quæ e textu libri decimi ejecta sunt, illa Euclidi abjudicanda semper fuerunt visa; et quæ ejeci, ea et ex omnibus optimis codicibus fuerunt ejecta. Si quando erravi, hoc erit parvi momenti; adde quod quæ ejecta sunt e textu in lectionibus variantibus reperiuntur. Cæterum mihi erat norma semper fere certa secernendi quæ sunt Euclidis ex illis quæ ab Euclide sunt aliena.

deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

PROP. CXIV. Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

PROP. CXV. Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationnelle.

PROP. CXVI. Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

PROP. CXVII. Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Telles sont les définitions et les propositions du dixième livre : toutes ces propositions sont démontrées d'une manière claire et simple.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes. Une foule de superfluités avaient été introduites dans le texte du dixième livre; je les en ai fait disparaître.

Les *autrement*, les corollaires, les lemmes et les scholies dont j'ai purgé le dixième livre se trouvent dans les variantes avec leur traduction latine et française.

Ce que j'ai supprimé dans le dixième livre a toujours été regardé comme indigne d'Euclide; ajoutez à cela que les suppressions que j'ai faites sont autorisées presque toutes par les meilleurs manuscrits. Si j'ai erré en quelque chose, le mal n'est pas grand; puisque ce que l'on ne trouve pas dans le texte, on le trouve dans les variantes. Au reste, j'avais une règle presque toujours infallible de discerner ce qui appartient à Euclide de ce qui lui est étranger.



Antiqui geometræ, Euclides scilicet, Archimedes et Apollonius, solebant ad propositum directe tendere, nunquam de viâ declinantes demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam ipsis erant necessaria. Quæ cum ita sint, fere impossibile est illum in errorem labi qui argumentum callide animo complectitur. Accedit illud quod in omnibus ejectis nec Euclidis concinitatem agnoscere est, nec verba ipsi familiaria.

Inter ejecta ex decimo libro invenire est aliter demonstrata quæ nullius sunt momenti. Vide *aliter* propositionis 1, et scholium propositionis 22, quod merum est *aliter*.

Invenire est demonstrationes quæ in libris præcedentibus reperiuntur. Vide lemmata propositionum 31, 32, 33.

Invenire quoque est plura futilia et scioli alicujus glossemata. Vide corollarium propositionis 24, scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum.

In pluribus ejectis Euclides loquens introducit, καλεῖ, ἐκάλεσεν; *vocat*, *vocavit*, etc. Vide scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum, etc.

Hæc et plura alia e textu decimi libri sunt ejecta. In textu plura retinui quæ ex ipso fortasse ejicere potuissem; tale est scholium propositionis 19, et *aliter* propositionum 19, 106, 107, 116, et corollarium propositionis 112, necnon *aliter* propositionis 117, cujus haud dubie demonstratio est una ex elegantissimis totius geometriæ.

Retinui quoque in textu plura alia quæ ex illo ejicere fortasse debuissim, et quæ ex illo ejicerem, si quando alteram Euclidis editionem producerem; tale est lemma propositionis 9, talia sunt etiam lemmata propositionum 14, 17, 33; quæ in libris præcedentibus sunt demonstrata, necnon lemma propositionis 20, et corollarium propositionis 24, quæ nihil sunt nisi inutilia glossemata.

E textu ejicere debuissim propositionem 13, quæ eadem est ac propositio 14, et quæ sine dubio Euclidis non est. Retinui tamen, ut propositiones

Les anciens géomètres, je veux dire Euclide, Archimède et Apollonius, avaient pour usage de marcher constamment vers leur but sans s'écarter jamais de leur chemin, pour s'occuper de ce qui ne leur était pas nécessaire pour aller en avant. Cela étant ainsi, il n'est guère possible, pour une personne qui entend bien la matière, de tomber dans l'erreur. Ajoutez à cela que dans toutes les suppressions que j'ai faites, on ne reconnaît ni la manière, ni même les expressions accoutumées d'Euclide.

Parmi les suppressions que j'ai faites au dixième livre, on trouve des *Autrement* qui ne sont d'aucun prix. Voyez l'*Autrement* de la proposition 1, et la Scholie de la proposition 22, qui n'est qu'un pur *Autrement*.

On y rencontre des démonstrations qui se trouvent dans les livres précédents. Voyez les lemmes des propositions 31, 32, 33.

Ici ce sont des futilités, ce sont des gloses de quelque demi-savant en géométrie. Voyez le corollaire de la proposition 24, les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes.

Dans une grande partie des suppressions que j'ai faites, on fait parler Euclide *καλεῖ, ἐκαλεῖ*; *il appelle, il appela*. Voyez les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes, etc.

Telles sont les suppressions importantes que j'ai cru devoir faire au dixième livre; j'ai conservé dans le texte des choses que j'aurais pu supprimer; telle est la scholie de la proposition 19, les *aliter* des propositions 19, 106, 107 et 116; le corollaire de la proposition 112, ainsi que l'*autrement* de la proposition 117, dont la démonstration est certainement une des plus belles de toute la géométrie.

J'en ai conservé d'autres que j'aurais peut-être dû supprimer, et que je supprimerais certainement dans une nouvelle édition, si jamais elle avait lieu. Tel est le lemme de la proposition 9; tels sont aussi les lemmes des propositions 14, 17, 33, qui sont démontrés dans les livres précédents; ainsi que le lemme de la proposition 20, et le corollaire de la proposition 24, qui ne sont que des gloses inutiles.

J'aurais dû supprimer la proposition 13, qui est la même que la proposition 14, et qui n'est certainement pas d'Euclide. Si je ne l'ai

meæ editionis signarentur iisdem numeris quibus propositiones editionis Oxoniæ.

Retinui etiam scholium quod ultimam propositionem subsequitur, quamvis illud supponat plures propositiones quæ in libris tantum subsequentibus demonstrantur. Hoc scholium retinui, quia illud ostendit quomodo, rectis incommensurabilibus inventis, magnitudines duarum et trium dimensionum inveniri possint inter se incommensurabiles.

Corollarium propositionis 73, quod in lectionibus variis adest, in textu adesse deberet.

Nihil amplius dicam de lectionibus variis libri decimi; nunc de propositione 19 libri noni sum locuturus.

Dixi in notâ quæ reperitur in imâ paginâ hujus propositionis Hervagium volentem emendare duos codices græcos quibus usus fuit in Euclide edendo, pro propositione 19 substituisse græcam versionem versionis latinæ Zamberti, quæ concordat cum codicibus 190, 2466, 2342. Vide lectiones varias. Mea editio plane concordat cum omnibus aliis codicibus. Editio Oxoniæ consentanea est cum editione Basilicæ. In imâ paginâ editionis Oxoniæ legere est textum hujus propositionis esse corruptissimum. Textus est corruptus in solis codicibus de quibus mentionem feci; in omnibus vero aliis est maxime purus.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ, et in codicibus 190, 2466, 2362, hoc agitur ut ostendatur esse impossibile invenire quartum numerum integrum  $\Delta$  tribus numeris integris  $A, B, r$  proportionalem, quando numeri  $A, B, r$  non sunt deinceps proportionales, et quando numeri  $A, r$  inter se sunt primi.

Hæc est ratiocinatio :

*Hoc sit possibile, et ut  $A$  ad  $B$  ita sit  $r$  ad  $\Delta$ ; fiat ut  $B$  ad  $r$  ita sit  $\Delta$  ad  $E$ .* Vide secundum *alineam* paginæ 439, et notam propositionis 19.

Atqui evidenter fieri potest ut  $E$  qui numerus integer esse debet vel sit vel non sit integer numerus; hæc ratiocinatio igitur est falsa. Et valde miror quod falsitatem hujus ratiocinationis non animadverterit Commandinus, qui erat unus ex primis ætatis suæ geometris.

pas fait, c'était afin que les propositions de mon édition eussent les mêmes numéros que celle d'Oxford.

J'ai conservé aussi la scholie de la fin du dixième livre, quoiqu'elle suppose plusieurs propositions qui ne sont démontrées que dans les livres suivants. J'ai conservé cette scholie, parce qu'elle fait voir comment des droites incommensurables étant trouvées, on peut trouver des grandeurs de deux et de trois dimensions incommensurables entr'elles.

C'est par erreur que le corollaire de la proposition 73 se trouve parmi les variantes, et non dans le texte.

Je ne parlerai pas davantage des variantes du dixième livre. Il ne me reste plus qu'à parler de la proposition 19 du neuvième livre.

J'ai dit dans la note qui est au bas de cette proposition, qu'Hervage, voulant rectifier les deux manuscrits grecs dont il se servit dans son édition d'Euclide, avait mis à la place de la proposition 19 la version grecque de la version latine de Zamberti, qui est entièrement conforme aux trois manuscrits 190, 2466, 2342. Voyez les variantes. Mon édition est entièrement conforme à tous les autres manuscrits. Celle d'Oxford est calquée sur celle de Basle. On lit, au bas de la page, dans l'édition d'Oxford, que cette proposition est tout-à-fait corrompue. Le texte n'est corrompu que dans les trois manuscrits dont je viens de parler; dans tous les autres, il est dans toute sa pureté.

Dans les éditions de Basle et d'Oxford, et dans les trois manuscrits 190, 2466, 2342, il s'agit de démontrer qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre entier  $\Delta$  proportionnel aux trois nombres entiers  $A, B, r$ , lorsque les nombres  $A, B, r$  ne sont pas successivement proportionnels, et que les nombres  $A, r$  sont premiers entr'eux.

Voici comment on raisonne :

*Que cela soit possible, et que  $A$  soit à  $B$  comme  $r$  est à  $\Delta$ ; faisons en sorte que  $B$  soit à  $r$  comme  $\Delta$  est à  $E$ . Voyez le second alinéa de la page 439, et la note de la proposition 19.*

Or, il est évident que  $E$ , qui doit être un nombre entier, peut ou être ou n'être pas un nombre entier. Ce raisonnement est donc faux. Je suis très-surpris que Commandin, qui était un des premiers géomètres de son temps, n'ait pas aperçu la fausseté de ce raisonnement.

Hæc ratiocinatio non solum falsa est, sed etiam et enuntiatio propositionis demonstrandæ; possibile enim est invenire quartum numerum integrum proportionalem numeris 4, 8, 9, qui quidem non sunt deinceps proportionales, et quorum extremi 4 et 9 primi inter se sunt.

Quod attinet ad partem typographicam summâ diligentia usus sum ut textus hujus voluminis quam maxime emendatus esset. D. Jannet necnon D. Patris, mei operis editor, qui mea specimina accuratissime legerunt, non tenui mihi fuerunt auxilio.

*Nota.* Propositio 7 libri primi detruncata erat in omnibus græcis codicibus. Vide præfationem primi voluminis, pag. 19. Hanc propositionem integram reperi in versione latinâ quam ex arabicâ linguâ fecit Campanus, et quæ edita fuit Venetiis anno 1482. Hæc propositio ex toto Euclidis dignissima mihi videtur. En hîc illa est cum meâ versione græcâ gallicâque : Campani versionem in paucissimis immutavi.

#### BIBAION á. ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εάν ἀπὸ δύο σημείων τῶν εὐθύν εὐθείας πινάτων δύο εὐθεῖαι κατὰ τι σημεῖον συμπίπτουσιν διάχθωσιν, ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη οὐ διαχθῆσονται δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ ἄλλον σημεῖον συμπίπτουσιν ὥστε ἴσας εἶναι ταῖς τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν.

Εστω εὐθεῖα ἡ AB, καὶ ἀπὸ τῶν A, B πινάτων διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ AG, BG κατὰ τι σημεῖον τὸ Γ συμπίπτουσιν· λέγω δὴ ὅτι ἀπὸ πινάτων τῆς AB, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, οὐ διαχθῆσονται ἄλλαι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσιν κατὰ

Si ex duobus punctis rectæ extremitatibus duæ rectæ in unum punctum concurrentes ducantur, ex iisdem punctis et in iisdem partibus non ducantur duæ aliæ rectæ in aliud punctum concurrentes, ita ut æquales sint rectis easdem extremitates habentibus.

Sit recta AB, et ex A, B extremitatibus ducantur duæ rectæ AG, BG in punctum Γ concurrentes; dico ex extremitatibus rectæ AB, et in iisdem partibus, non ducendas fore duas alias rectas in aliud punctum concurrentes, ita ut

#### LIVRE I. PROPOSITION VII.

Si des extrémités d'une droite on mène deux droites qui se rencontrent en un point, il est impossible de mener des mêmes points, et du même côté, deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de manière que les droites qui ont les mêmes extrémités soient égales entr'elles.

Soit la droite AB; des extrémités A, B de cette droite menons deux droites AG, BG qui se rencontrent en un point Γ; je dis qu'on ne peut pas du même côté mener des extrémités de AB deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de

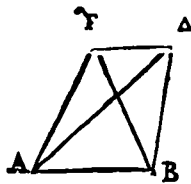
Non seulement ce raisonnement est faux, mais encore l'énoncé de la proposition à démontrer. Car il est très-possible de trouver un quatrième nombre entier proportionnel aux nombres 4, 8, 9, qui ne sont pas successivement proportionnels, et dont les extrêmes 4 et 9 sont premiers entr'eux.

Quant à la partie typographique de ce volume, j'ai fait tous mes efforts pour donner au texte toute la pureté possible. J'ai été puissamment secondé par M. Jannet et M. Patris, éditeur de mon ouvrage, qui ont eu la complaisance de lire les épreuves avec le plus grand soin.

*Nota.* La proposition VII du premier livre était tronquée dans tous les manuscrits grecs. Voyez la Préface du premier volume, pag. 19. J'ai trouvé cette proposition toute entière dans la version latine faite d'après l'arabe par Campan, et publiée à Venise en 1482. Elle me paraît en tout digne d'Euclide. La voici avec ma version grecque et latine. Je n'ai fait que quelques légers changements à la version de Campan.

ἄλλον σημείον, ὥστε εὐθεῖαν μὲν ἀπὸ σημείου τοῦ Α ἡχθῆσαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΓ, ἡχθῆσαν δὲ ἀπὸ σημείου τοῦ Β ἴσην τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ σημείον τὸ Δ συμπίπτουσαι, καὶ ἴστω εὐθεῖα μὲν ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, εὐθεῖα δὲ ΒΔ ἴση τῇ ΒΓ.



Ἦτοι σημείον τὸ Δ εἰντὸς πεσιῖται τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἢ ἐκτὸς· μὴ γάρ τις μίαν τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ

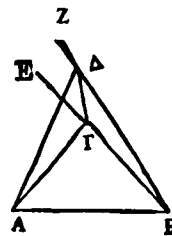
manière que la droite menée du point A soit égale à AG, et que la droite menée du point B soit égale à BG.

Car si cela est possible, menons du même côté deux autres droites qui se rencontrent en un point Δ, de manière que ΑΔ soit égal à ΑΓ, et ΒΔ égal à ΒΓ.

Ou le point Δ tombera en dedans du triangle ΑΒΓ, ou en dehors; car il ne tombera

recta quidem ex puncto Α ducta æqualis sit ipsi ΑΓ, ducta vero ex puncto Β æqualis ipsi ΒΓ.

Si enim possibile, ducantur in eisdem partibus duæ aliæ rectæ in punctum Δ concurrentes; et sit recta quidem ΑΔ æqualis ipsi ΑΓ, recta vero ΒΔ æqualis ipsi ΒΓ.



Vel punctum Δ intra triangulum ΑΒΓ cadet vel extra; non enim in unum laterum ΑΓ, ΒΓ

πιστεύεται· εἰ γὰρ πιστεύεται, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ  
μειζόν ἔσται, ὅπερ ἄτοπον.

Πιπνέτω πρότερον ἑκτός. Ἦτοι μία τῶν ΑΔ,  
ΒΔ μίαν τῶν ΑΓ, ΒΓ τιμῇ, ἢ οὐδέτερα τῶν  
ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τιμῇ.

Τιμνέτω δὴ ἡ ΑΔ τὴν ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  
ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΑΔ, ΑΓ  
τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  
ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶ δύο  
πλευραὶ αἱ ΒΔ, ΒΓ τοῦ ΒΓΔ τριγώνου, ἴση  
ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἀλλὰ  
δὴ μείζων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ·  
γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ·  
ὥστε τὸ μέρος τοῦ ὅλου μείζον ἔστιν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΑΔ  
τίμνῃ.

Ἀλλὰ δὴ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν  
τῶν ΑΓ, ΒΓ τιμνέτω καὶ τὸ Δ σημεῖον ἑκτός  
πιπνέτω τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ἐπιζεύχθω  
ἡ ΔΓ, καὶ προσεκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς  
ΒΓ, ΒΔ εὐθεῖαι αἱ ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ  
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ

cadet; si enim caderet, pars toto major esset,  
quod absurdum.

Cadat primum extra. Vel una ex ΑΔ, ΒΔ  
rectis unam ex ΑΓ, ΒΓ rectis secabit, vel neutra  
ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secabit.

Secet igitur ΑΔ ipsam ΒΓ, et jungatur ΓΔ.  
Quoniam igitur æqualia sunt duo latera ΑΔ, ΑΓ  
trianguli ΑΓΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi  
ΑΔΓ. Rursus, quoniam æqualia sunt duo latera  
ΒΔ, ΒΓ trianguli ΒΓΔ, æqualis est et angulus  
ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Sed et major est angulus ΒΔΓ  
angulo ΑΔΓ; angulus igitur ΒΓΔ major est  
angulo ΑΓΔ; quare pars quam totum major  
est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si ipsa ΒΓ ipsam  
ΑΔ secet.

Sed et neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ip-  
sarum ΑΓ, ΒΓ secet, et punctum Δ cadat extra  
triangulum ΑΒΓ, et jungatur ΔΓ, et produ-  
cantur in directum ipsarum ΒΓ, ΒΔ rectæ  
ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam igitur æquales sunt rectæ ΑΓ, ΑΔ,  
æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ. Rursus,

pas sur un des côtés ΑΓ, ΒΓ de ce triangle, parce que, si cela était, la partie serait  
plus grande que le tout; ce qui est absurde.

Que le point Δ tombe premièrement en dehors; ou l'une des droites ΑΔ, ΒΔ cou-  
pera l'une des droites ΑΓ, ΒΓ, ou aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupera aucune  
des droites ΑΓ, ΒΓ.

Que la droite ΑΔ coupe la droite ΒΓ; joignons ΓΔ. Puisque les deux côtés  
ΑΔ, ΑΓ du triangle ΑΓΔ sont égaux, l'angle ΑΓΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ (5. 1).  
De plus, puisque les deux côtés ΒΔ, ΒΓ du triangle ΒΓΔ sont égaux, l'angle ΒΓΔ  
sera égal à l'angle ΒΔΓ (5. 1). Mais l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΑΔΓ;  
l'angle ΒΓΔ est donc plus grand que l'angle ΑΓΔ; la partie est donc plus grande  
que le tout, ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si la droite ΒΓ coupait la droite ΑΔ.

Mais qu'aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupe aucune des droites ΑΓ, ΒΓ, et que le  
point Δ tombe hors du triangle ΑΒΓ; joignons ΔΓ, et menons les droites ΓΕ, ΔΖ dans  
les directions des droites ΒΓ, ΒΔ.

Puisque les droites ΑΓ, ΑΔ sont égales, l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1).

ἴσαι εἰσὶν αἱ  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $\Gamma\Delta Z$  τῇ ὑπὸ  $E\Gamma\Delta$ . Ἀλλὰ δὴ ἐλάσσων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ  $E\Gamma\Delta$  τῆς ὑπὸ  $A\Gamma\Delta$ . γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ  $\Gamma\Delta Z$  ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ  $A\Delta\Gamma$ . ὥστε καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὴ διχθῆσεται, κἂν τὸ  $\Delta$  σημεῖον ἐντὸς πίπτῃ τοῦ  $AB\Gamma$  τριγώνου. Εἰν ἀπὸ, καὶ τὰ ἐξῆς.

quoniam æquales sunt rectæ  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$ , æqualis est et angulus  $\Gamma\Delta Z$  angulo  $E\Gamma\Delta$ . Sed et minor est angulus  $E\Gamma\Delta$  quam angulus  $A\Gamma\Delta$ ; angulus igitur  $\Gamma\Delta Z$  minor est angulo  $A\Delta\Gamma$ ; quare et totum quam pars minus est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si punctum  $\Delta$  cadat intra triangulum  $AB\Gamma$ . Si ex duobus, etc.

De plus, puisque les droites  $B\Gamma$ ,  $B\Delta$  sont égales, l'angle  $\Gamma\Delta Z$  sera égal à l'angle  $E\Gamma\Delta$  (5. 1). Mais l'angle  $E\Gamma\Delta$  est plus petit que l'angle  $A\Gamma\Delta$ ; l'angle  $\Gamma\Delta Z$  est donc plus petit que l'angle  $A\Delta\Gamma$ ; le tout est donc plus petit que la partie; ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si le point  $\Delta$  tombait en dedans du triangle  $AB\Gamma$ . Donc, etc.

M. Sédillot, membre adjoint du bureau des longitudes, et professeur à la Bibliothèque du Roi, a eu la complaisance de traduire littéralement pour moi cette proposition importante d'Euclide d'après la version arabe de Nassir-Eddin Thoussy, imprimée à Rome en 1594. La version latine de Campan est tout-à-fait conforme à la manière d'Euclide; il n'en est pas de même de la version de Nassir-Eddin Thoussy, quoiqu'elle soit la même pour le fond; il est donc présumable que la version arabe dont s'est servi Campan n'est pas la même que la version arabe imprimée à Rome. Voici la version de M. Sédillot, pour qui la langue arabe est aussi familière que les sciences mathématiques.

Soient menées des deux extrémités d'une ligne droite donnée, deux droites qui se rencontrent en un point quelconque, situé d'un côté déterminé de la ligne donnée, on ne pourra, des deux mêmes points et du même côté de la ligne, mener deux autres droites respectivement égales aux deux premières, chacune à sa corrélatrice, et se rencontrant en un autre point que les deux premières.

Des deux points  $A$  et  $B$  de la droite  $AB$ , je mène les deux droites  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  qui se rencontrent au point  $\Gamma$ . Des deux mêmes points et du même côté  $\Gamma$ , je mène les deux autres droites  $A\Delta$ ,  $B\Delta$ ;  $A\Delta$  étant la corrélatrice de  $A\Gamma$ , et  $B\Delta$  celle de  $B\Gamma$ ; et je dis que les deux lignes  $A\Delta$  et  $B\Delta$  ne peuvent se rencontrer en un autre point que le point  $\Gamma$ .

Supposons qu'elles puissent se rencontrer au point  $\Delta$ ; je joins  $\Delta$  et  $\Gamma$  par la droite  $\Delta\Gamma$ ; les deux



côtés  $AG$ ,  $AD$  sont égaux ; l'angle  $GA$  plus grand que  $GB$  est égal à l'angle  $GA$  par la cinquième proposition ; ainsi  $GA$  est plus grand que  $GB$ .

De même, les deux côtés  $BF$ ,  $BD$  sont égaux ; l'angle  $GB$  plus petit que  $GA$  est égal à l'angle  $GB$  par la cinquième proposition ; l'angle  $GB$  serait donc plus petit que  $GA$ , et celui-ci plus grand que celui-là ; ce qui est absurde. Ainsi la chose proposée est vraie ; ce que nous voulions démontrer.

A l'égard de cette proposition, on peut varier la construction. Ainsi lorsque le point  $A$  tombe au-dehors du triangle  $ABF$ , l'un des deux côtés  $AA$  ou  $AB$  peut être ou n'être pas coupé par l'un des deux autres côtés  $GA$  ou  $GB$  ; ou bien le point  $A$  peut tomber dans le triangle  $ABF$ , ou enfin sur l'un des deux côtés  $GA$  ou  $GB$ .

Nous venons de démontrer l'impossibilité du cas indiqué dans la figure première. Prolongeons dans la seconde les deux lignes  $AD$ ,  $BF$ , selon leur direction respective dans la région du point  $A$ , vers les points  $E$ ,  $Z$  ; puis joignons par une droite les deux points  $G$  et  $A$ .

Comme dans la figure 2, les angles  $BGA$  et  $BAG$  sont égaux par la cinquième proposition, les angles  $EGA$  et  $ZAG$  sont aussi égaux par la même proposition ; l'angle  $EGA$  égal à  $ZAG$ , qui est plus grand que  $BAG$  égal à  $BGA$ , serait plus grand que  $BGA$ , et celui-ci plus petit que celui-là, ce qui est absurde.

On montrerait de même l'absurdité pour le cas où le point  $A$  tomberait dans le triangle  $ABF$ \*\*.

Quant au cas\*\*\* où le point  $A$  tombe sur la ligne  $BF$ , prolongée ou non, il faudrait que de deux lignes égales l'une fût plus grande ou plus petite que l'autre, ce qui est également absurde.

\* Après les points  $E$ ,  $Z$ , la version arabe ajoute : *et vers les points K, E dans la figure 3.*

\*\* Au lieu de où le point  $A$  tomberait dans le triangle  $ABF$ , la version arabe dit simplement : *indiqué dans la figure 3.*

\*\*\* Au lieu de au cas, la version arabe dit à la figure 4.

J'ai fait ces légers changements pour ne pas multiplier les figures sans nécessité.



# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R O C T A V U S.

---

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Εάν ὦσιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἱξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἰχόντων αὐτοῖς.

Ἐστῶσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἱξῆς ἀνάλογον, οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta$ , οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ  $A, \Delta$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta$  ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἰχόντων αὐτοῖς.

#### PROPOSITIO I.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales  $A, B, \Gamma, \Delta$ , extremi autem eorum  $A, \Delta$  primi inter se sint; dico ipsos  $A, B, \Gamma, \Delta$  minimos esse ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis.

## LE HUITIÈME LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### PROPOSITION PREMIÈRE.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient  $A, B, \Gamma, \Delta$  tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que leurs extrêmes  $A, \Delta$  soient premiers entr'eux; je dis que les nombres  $A, B, \Gamma, \Delta$  sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

## 2 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ μὴ, ἕστωσαν ἐλάττωες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλῆθει τῶν Ε, Ζ,

Si enim non, sint minores ipsis Α, Β, Γ, Δ ipsi Ε, Ζ, Η, Θ in eadem ratione existentes cum ipsis. Et quoniam ipsi Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis Ε, Ζ, Η, Θ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipso-

|       |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|
| Α, 8. | Β, 12. | Γ, 18. | Δ, 27. |
| Ε     | Ζ      | Η      | Θ      |

Η, Θ<sup>1</sup>. διίσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>2</sup> ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι<sup>3</sup> ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάνεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστι<sup>4</sup> ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. Ὅπερ εἶδει δειξάμεναι.

rum Ε, Ζ, Η, Θ; ex æquo igitur est ut Α ad Δ ita Ε ad Θ. Ipsi autem Α, Δ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri æqualiter metiuntur ipsos eamdem rationem habentes, major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Ε, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsi Ε, Ζ, Η, Θ minores existentes ipsis Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis; ipsi Α, Β, Γ, Δ igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Car si cela n'est point, que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, soient en même raison que ceux-ci. Puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont en même raison que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Ε, Ζ, Η, Θ, par égalité Α est à Δ comme Ε est à Θ (14. 7). Mais les nombres Α, Δ sont premiers entre eux, et les nombres premiers sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, ne sont pas en même raison que ceux-ci; donc les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ<sup>1</sup>, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quocunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Ἐστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὲ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Sit data ratio in minimis numeris, ratio ipsius Α ad Β; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos, quocunque quis imperaverit, in ipsius Α ad Β ratione.

Ἐπιτετάχθωσαν δὲ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιεῖτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιεῖτω.

Imperentur quidem quatuor; et Α se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ faciat, et adhuc Β se ipsum multiplicans ipsum Ε faciat, et adhuc ipse Α ipsos Γ, Δ, Ε multiplicans ipsos Ζ, Η, Θ faciat, ipse vero Β ipsum Ε multiplicans ipsum Κ faciat.

|       |        |                  |
|-------|--------|------------------|
| Α, 2. | Β, 3.  |                  |
| Γ, 4. | Δ, 6.  | Ε, 9.            |
| Ζ, 8. | Η, 12. | Θ, 18.    Κ, 27. |

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν, ἀριθμὸς δὲ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποιήκειν<sup>2</sup>· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως<sup>3</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ

Et quoniam ipse Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Γ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ fecit, numerus igitur Α duos ipsos Α, Β multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam ipse Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β se ipsum

PROPOSITION II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans une raison donnée.

Que la raison donnée, dans les plus petits nombres, soit celle de Α à Β; il faut trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β.

Qu'on en demande quatre. Que Α se multipliant lui-même fasse Γ, que Α multipliant Β fasse Δ, que Β se multipliant lui-même fasse Ε, que Α multipliant encore Γ, Δ, Ε fasse Ζ, Η, Θ, et que Β multipliant Ε fasse Κ.

Puisque Α se multipliant lui-même a fait Γ, et que Α multipliant Β a fait Δ, le nombre Α multipliant les deux nombres Α, Β a fait Γ, Δ; donc Α est à Β comme Γ est à Δ (17. 7). De plus, puisque Α multipliant Β a fait Δ, et que Β se multipliant

## 4 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποιήκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτιρον τῶν Δ, Ε πεποιήκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποιήκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ

|       |        |               |
|-------|--------|---------------|
| Α, 2. | Β, 3.  |               |
| Γ, 4. | Δ, 6.  | Ε, 9.         |
| Ζ, 8. | Η, 12. | Θ, 18. Κ, 27. |

οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποιήκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογον εἰσιν, ἐν τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Λέγω δὲ ὅτι

multiplicans ipsum E fecit; uterque igitur ipsum A, B ipsum B multiplicans utrumque ipsum Δ, E fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad E. Sed ut A ad B ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Δ ad E. Et quoniam ipse A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Z, H fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Z ad H. Ut autem Γ ad Δ ita A ad B; et

ut igitur A ad B ita Z ad H. Rursus, quoniam ipse A ipsos Δ, E multiplicans ipsos H, Θ fecit; est igitur ut Δ ad E ita H ad Θ. Ut autem Δ ad E ita A ad B; et ut A igitur ad B ita H ad Θ. Et quoniam ipsi A, B, ipsum E multiplicantes ipsos Θ, Κ fecerunt; est igitur ut A ad B ita Θ ad Κ. Sed ut A ad B ita et Z ad H et H ad Θ; et ut igitur Z ad H ita et H ad Θ et Θ ad Κ; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, Κ proportionales sunt, in ipsius A ad B ratione. Dico etiam et minimi. Quoniam enim

lui-même a fait E, les nombres A, B multipliant B ont fait Δ, E; donc A est à B comme Δ est à E (18. 7). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Δ est à E. Et puisque A multipliant Γ, Δ a fait Ζ, Η, le nombre Γ est à Δ comme Ζ est à Η. Mais Γ est à Δ comme A est à B; donc A est à B comme Ζ est à Η. De plus, puisque A multipliant Δ, Ε a fait Η, Θ, le nombre Δ est à Ε comme Η est à Θ. Mais Δ est à Ε comme A est à B; donc A est à B comme Η est à Θ. Et puisque A, B multipliant Ε ont fait Θ, Κ, le nombre A est à B comme Θ est à Κ. Mais A est à B comme Ζ est à Η, et comme Η est à Θ; donc Ζ est à Η comme Η est à Θ, et comme Θ est à Κ; donc Γ, Δ, Ε et Ζ, Η, Θ, Κ sont proportionnels, dans la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits. Car puisque A, B sont les plus petits

καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ  $A, B$  ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ  $A, B$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν  $A, B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν  $\Gamma, E$  ποιοῖκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν  $\Gamma, E$  πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν  $Z, K$  ποιοῖκεν· οἱ  $\Gamma, E$  ἄρα καὶ οἱ  $Z, K$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ᾧσιν ἵσοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ  $\Gamma, \Delta, E$  ἄρα καὶ οἱ  $Z, H, \Theta, K$  ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς  $A, B$ . Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν<sup>ο</sup> τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ᾧσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετραγόνοι εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

$A, B$  minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi autem minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis primi inter se sunt; ipsi  $A, B$  igitur primi inter se sunt. Et uterque quidem ipsorum  $A, B$  se ipsum multiplicans utrumque ipsorum  $\Gamma, E$  fecit; utrumque vero ipsorum  $\Gamma, E$  multiplicans, utrumque ipsorum  $Z, K$  fecit; ipsi  $\Gamma, E$  igitur et  $Z, K$  primi inter se sunt. Si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi  $\Gamma, \Delta, E$  igitur et ipsi  $Z, H, \Theta, K$  minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis  $A, B$ . Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex hoc igitur evidens est, si tres numeri deinceps proportionales minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, extremos eorum quadratos esse; si autem quatuor, cubos.

nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, et que les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux sont premiers entr'eux (23. 7), les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux. Mais les nombres  $A, B$ , se multipliant eux-mêmes, ont fait  $\Gamma, E$ , et les nombres  $A, B$  multipliant  $\Gamma, E$  ont fait  $Z, K$ ; donc les nombres  $\Gamma, E$  et  $Z, K$  sont premiers entr'eux (29. 7). Mais si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (1. 8); donc les nombres  $\Gamma, \Delta, E$  et les nombres  $Z, H, \Theta, K$  sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec  $A, B$ . Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont des quarrés; que si l'on a quatre nombres, les extrêmes sont des cubes.

## 6 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

### PROPOSITIO III.

Εάν ὧσιν ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εστωσαν ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; extremi eorum primi inter se sunt.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi Α, Β, Γ, Δ; dico extremos eorum Α, Δ primos inter se esse.

Sumantur enim duo quidem numeri minimi in ipsorum Α, Β, Γ, Δ ratione, ipsi Ε, Ζ,

|       |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|
| Α, 8. | Β, 12. | Γ, 18. | Δ, 27. |
| Ε, 2. | Ζ, 3.  |        |        |
| Η, 4. | Θ, 6.  | Κ, 9.  |        |
| Λ, 8. | Μ, 12. | Ν, 18. | Ξ, 27. |

οἱ Η, Θ, Κ, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους, ὥς οὗ<sup>3</sup> τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλείθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Α, Μ, Ν, Ξ.

tres autem Η, Θ, Κ, et semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis facta fuerit multitudini ipsorum Α, Β, Γ, Δ. Sumantur, et sint Α, Μ, Ν, Ξ.

### PROPOSITION III.

Si tant de nombres successivement proportionnels que l'on voudra, sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont premiers entr'eux.

Que tant de nombres Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels qu'on voudra, soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que leurs extrêmes Α, Δ sont premiers entr'eux.

Car prenons les deux plus petits nombres qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ (2, 8); que ces nombres soient Ε, Ζ; prenons-en trois, et qu'ils soient Η, Θ, Κ, et ainsi de suite, toujours un de plus jusqu'à ce qu'on en ait pris une quantité égale à celle des nombres Α, Β, Γ, Δ. Qu'ils soient pris, et qu'ils soient Α, Μ, Ν, Ξ.

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 7

Καὶ ἔπει οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἔπει ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν<sup>4</sup> πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ ποιήκειν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν<sup>5</sup> Λ, Ξ ποιήκειν· καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ<sup>6</sup>. Καὶ ἔπει οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἴσιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῇ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἑκάστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστω τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἴστί· ἴσος ἄρα ἴσιν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. Καὶ ἴσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους<sup>7</sup>· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Οπερ ἴδι διῆξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Λόγων δοθέντων ὅσωνοῦν ἐν ἐλάχιστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον<sup>1</sup> ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις.

Puisque les nombres Ε, Ζ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ils sont premiers entr'eux (24. 7). Et puisque les nombres Ε, Ζ se multipliant eux-mêmes ont fait Η, Κ, et que ces mêmes nombres multipliant Η, Κ ont fait Λ, Ξ, les nombres Η, Κ, et les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux (29. 7). Et puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, que les nombres Λ, Μ, Ν, Ξ sont les plus petits qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; chacun des nombres Α, Β, Γ, Δ est égal à chacun des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; donc Α est égal à Λ, et Δ à Ξ. Mais les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux; donc les nombres Α, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION IV.

Tant de raisons qu'on voudra étant données, dans leurs plus petits nombres, trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons données.

Et quoniam Ε, Ζ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Et quoniam uterque ipsorum Ε, Ζ se ipsum quidem multiplicans utrumque ipsorum Η, Κ fecit, utrumque vero ipsorum Η, Κ multiplicans utrumque ipsorum Λ, Ξ fecit; et ipsi Η, Κ igitur et ipsi Λ, Ξ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, sunt autem et Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ, Δ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ; unusquisque igitur ipsorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem Α ipsi Λ, ipse vero Δ ipsi Ξ. Et sunt Α, Ξ primi inter se; et Α, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps proportionales minimos in datis rationibus.



## 8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ, τι τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον<sup>2</sup> ἐλαχίστους, ἐν τοῖς τῶ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

|       |        |        |        |       |       |
|-------|--------|--------|--------|-------|-------|
| Α, 2. | Β, 5.  | Γ, 3.  | Δ, 4.  | Ε, 5. | Ζ, 6. |
| Θ, 6. | Η, 15. | Κ, 20. | Λ, 24. |       |       |
| Ν     | Ξ      | Μ      | Ο      |       |       |

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. Καὶ ὅσκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ<sup>3</sup> ὁ Α τὸν Θ μετρεῖται, ὅσκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρεῖται· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον. Καὶ ὅσκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρεῖται. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον<sup>4</sup> εἰσὶν ἐν τοῖς τῶ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε

Sint datæ rationes in minimis numeris, et ratio ipsius Α ad Β et ea ipsius Γ ad Δ, et adhuc ea ipsius Ε ad Ζ; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos et in ipsius Α ad Β ratione, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

Sumatur enim ab ipsis Β, Γ minimus mensuratus numerus, ipse Η. Et quoties quidem Β ipsum Η metitur toties et Α ipsum Θ metiatur, quoties vero Γ ipsum Η metitur, toties et Δ ipsum Κ metiatur; ipse autem Ε ipsum Κ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties Ε ipsum Κ metitur toties et Ζ ipsum Λ metiatur. Et quoniam æqualiter Α ipsum Θ metitur et Β ipsum Η; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, et adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ; ipsi Θ, Η, Κ, Λ igitur deinceps proportionales sunt in ratione et ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ. Dico etiam

Soient données dans leurs plus petits nombres la raison de Α à Β, celle de Γ à Δ, et celle de Ε à Ζ; il faut trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et enfin dans celle de Ε à Ζ.

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par Β et Γ (36. 7); que ce soit Η. Que Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, et que Δ mesure Κ autant de fois que Γ mesure Η; ou Ε mesurera Κ ou il ne le mesurera pas. Premièrement que Ε mesure Κ; et que Ζ mesure Λ autant de fois que Ε mesure Κ. Puisque Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, Α est à Β comme Θ est à Η (13. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme Η est à Κ, et Ε est à Ζ comme Κ est à Λ; les nombres Θ, Η, Κ, Λ sont donc successivement dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et encore dans celle de Ε à Ζ; et je dis aussi qu'ils sont les plus

πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἐξῆς ἀνάλογον<sup>5</sup> ἐλάχιστοι, ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις<sup>6</sup>. Εἰσὼσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἐπεὶ ἴσθις ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι<sup>7</sup> μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττω τὸν ἐλάττωνα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ<sup>8</sup> μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ μετρούμενός ἐστιν<sup>9</sup>, ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττωνα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς, ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν<sup>10</sup> τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν<sup>11</sup> τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

et minimos. Si enim non sunt ipsi Θ, Η, Κ, Α minimi deinceps proportionales, et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ, erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Α minores numeri in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ. Sint ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο. Et quoniam est ut Α ad Β ita Ν ad Ζ, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Β igitur ipsum Ξ metitur. Propter eadem utique Γ ipsum Ξ metitur; ipsi Β, Γ igitur ipsum Ξ metiuntur, et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ξ metietur. Minimus autem ab ipsis Α, Γ mensuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ξ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Α minores numeri deinceps, et in ratione ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

petits. Car si Θ, Η, Κ, Α ne sont pas les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ, il y aura certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Α dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Que ce soient Ν, Ξ, Μ, Ο. Puisque Α est à Β comme Ν est à Ξ, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit. c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ξ. Par la même raison Γ mesure Ξ; donc Β et Γ mesurent Ξ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesure Ξ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ξ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Α, successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et enfin de Ε à Ζ.

# 10 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μὴ μετρεῖται δὴ ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ εἰλήφθω ὁ<sup>12</sup>  
ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς,  
ὁ Μ. Καὶ ἰσάκεις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαύ-  
τάκεις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν,  
Ξ μετρεῖται, ἰσάκεις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαύ-  
τάκεις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρεῖται. Καὶ<sup>13</sup> ἐπεὶ ἰσάκεις  
ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ  
Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ὡς δὲ ὁ  
Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα  
ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ  
αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς

Non metiatur autem E ipsum K. Et sumatur  
ab ipsis E, K minimus mensuratus numerus,  
ipse M. Et quoties quidem K ipsum M metitur,  
toties et uterque ipsorum Θ, Η utrumque ipso-  
rum Ν, Ξ metiatur; quoties vero E ipsum M  
metitur, toties et Z ipsum O metiatur. Et  
quoniam æqualiter Θ ipsum Ν metitur ac Η  
ipsum Ξ; est igitur ut Θ ad Η ita Ν ad Ξ. Ut  
autem Θ ad Η ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β  
ita Ν ad Ξ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ

|        |        |        |        |       |       |
|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| Α, 4.  | Β, 5.  | Γ, 2.  | Δ, 3.  | Ε, 4. | Ζ, 3. |
| Θ, 8.  | Η, 10. | Κ, 15. |        |       |       |
| Ν, 32. | Ξ, 40. | Μ, 60. | Ο, 45. |       |       |
| Π      | Ρ      | Σ      | Τ      |       |       |

τὸν Μ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ  
καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ  
οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς  
ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε<sup>14</sup> Α πρὸς τὸν Β,  
καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι<sup>15</sup> τοῦ Ε πρὸς τὸν  
Ζ λόγους. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α,  
Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μὴ<sup>16</sup>, ἴσονται τινες  
τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάττωτες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-  
λογον<sup>17</sup> ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις.

ita Z ad M. Rursus, quoniam æqualiter E ipsum  
M metitur ac Z ipsum O; est igitur ut E ad Z ita  
M ad O; ipsi Ν, Ξ, Μ, Θ igitur deinceps pro-  
portionales sunt in rationibus et ipsius Α ad  
Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ.  
Dico etiam et minimos in ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε,  
Ζ rationibus. Si enim non, erunt aliqui ipsius  
Ν, Μ, Ξ, Ο minores numeri deinceps pro-  
portionales in rationibus Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.

Mais que E ne mesure pas K. Soit pris le plus petit nombre mesuré par E, K (36. 7), et que ce soit M. Que les nombres Θ, Η mesurent autant de fois Ν, Ξ que K mesure M, et que Z mesure O autant de fois que E mesure M. Puisque Θ mesure Ν autant de fois que Η mesure Ξ, Θ est à Η comme Ν est à Ξ (13. 7.) Mais Θ est à Η comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Ν est à Ξ. Par la même raison Γ est à Δ comme Ξ est à Μ. De plus, puisque E mesure Μ autant de fois que Z mesure Ο, Ε est à Ζ comme Μ est à Ο; donc les nombres Ν, Ξ, Μ, Ο sont successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Car si cela n'est point, il y aura des nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο qui seront successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Que ces nombres soient

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 11

Ἐστώσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ τε<sup>18</sup> ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἰπόπινος τὸν ἰπόμινον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός, ἴστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Καὶ ἴστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἴστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττωνα, ὅπερ ἴστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον<sup>19</sup> ἐν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς<sup>20</sup> Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Sint H, P, Σ, Τ. Et quoniam est ut Π ad Ρ ita Α ad Β, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse igitur Β ipsum Ρ metitur. Propter eadem utique et Γ ipsum Ρ metitur. Ipsi Β, Γ igitur ipsum Ρ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ρ metietur. Minimus autem ab ipsis Β, Γ mensuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ρ metitur. Et est ut Η ad Ρ ita Κ ad Σ; et Κ igitur ipsum Σ metitur. Metitur autem et Ε ipsum Σ; ipsi Ε, Κ igitur ipsum Σ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis Ε, Κ mensuratus ipsum Σ metietur. Minimus autem ab ipsis Ε, Κ mensuratus, est ipse Μ; ipse Μ igitur ipsum Ζ metitur, major minorem, quod est impossibile. Non igitur erunt aliqui ipsis Ν, Ξ, Μ, Ο minores numeri deinceps proportionales et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ; ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο igitur deinceps proportionales minimi sunt in rationibus Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Quod oportebat ostendere.

Π, Ρ, Σ, Τ. Puisque Π est à Ρ comme Α est Β, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ρ. Par la même raison Γ mesurera Ρ; donc Β, Γ mesurent Ρ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesurera Ρ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ρ. Mais Η est à Ρ comme Κ est à Σ (13. 7); donc Κ mesure Σ (déf. 20. 7); mais Ε mesure Σ; donc Ε, Κ mesurent Σ; donc le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ mesurera Σ. Mais le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ est Μ; donc Μ mesure Σ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc il n'y aura pas certains nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ; donc Ν, Ξ, Μ, Ο sont les plus petits nombres qui soient successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

PROPOSITIO V.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστώσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἕστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ἔν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, εἰληφθώσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, Ε, Δ, Ζ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὥς τε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς

Plani numeri inter se rationem habent compositam ex lateribus.

Sint plani numeri Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ; dico Α ad Β rationem habere compositam ex lateribus.

Rationibus enim datis, et ipsâ quam habet Γ ad Ε, et Δ ad Ζ, sumantur numeri deinceps minimi in rationibus Γ, Ε, Δ, Ζ, ipsi Η, Θ, Κ, ita ut sit ut quidem Γ ad Ε ita Η ad Θ,

Α, 6.

Β, 20.

Α, 12.

Γ, 2.

Δ, 3.

Ε, 4.

Ζ, 5.

Η, 3.

Θ, 6.

Κ, 10.

τὸν Ζ οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. Καὶ ὁ Δ<sup>4</sup> τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Α.

ut vero Δ ad Ζ ita Θ ad Κ. Et ipse Δ ipsum Ε multiplicans ipsum Α faciat. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit; est igitur ut Γ ad Ε ita Α ad Α. Ut autem Γ ad Ε ita Η ad Θ;

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les nombres plans Α, Β; que Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β; je dis que Α a avec Β une raison composée des côtés.

La raison de Γ à Ε, et celle de Δ à Ζ étant données, soient pris les nombres Η, Θ, Κ qui soient successivement les plus petits dans les raisons de Γ, Ε, Δ, Ζ (4. 8), de manière que Γ soit à Ε comme Η est à Θ, et que Δ soit à Ζ comme Θ est à Κ. Que Δ multipliant Ε fasse Α. Puisque Δ multipliant Γ fait Α, et que Δ multipliant Ε fait Α, Γ est à Ε comme Α est à Α (17. 7). Mais

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 13

Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη. δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· διῆσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ο δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ὁπερ εἶδει δεῖξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν ὅσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Εστώσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρίτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

et ut igitur H ad Θ ita A ad Λ. Rursus, quoniam E ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit, sed autem et ipsum Ζ multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Α ad Β. Sed ut Δ ad Ζ ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita Α ad Β. Ostensum est autem ut H ad Θ ita Α ad Λ; ex æquo igitur est ut H ad Κ ita Α ad Β. Ipse autem H ad Κ rationem habet compositam ex lateribus; et Α igitur ad Β rationem habet compositam ex lateribus. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO VI.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, ipse autem Α ipsum Β non metiatur; dico neque alium aliquem ullum mensurum esse.

Γ est à Ε comme Η et à Θ; donc Η est à Θ comme Α est à Λ. De plus, puisque Ε multipliant Δ fait Α, et que Ε multipliant Ζ fait Β, Δ est à Ζ comme Α est à Β. Mais Δ est à Ζ comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Α est à Β. Mais on a démontré que Η est à Θ comme Α est à Λ; donc, par égalité, Η est à Κ comme Α est à Β (14. 7); mais Η a avec Κ une raison composée des côtés; donc Α a avec Β une raison composée des côtés. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION VI.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier ne mesure pas le second, aucun autre n'en mesure un autre.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α ne mesure pas Β; je dis qu'aucun autre n'en mesurera un autre.

# 14 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οτι μὲν οὖν οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  ἐξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν. Οὐδὲ γὰρ ὁ  $A$  τὸν  $B$  μετρεῖ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρήτω ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ὅσοι εἰσιν οἱ  $A, B, \Gamma$  τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς  $A, B, \Gamma$ , οἱ  $Z, H, \Theta$ . Καὶ ἐπεὶ οἱ  $Z, H, \Theta$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς  $A, B, \Gamma$ , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ

Et quidem ipsos  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  deinceps non se se metiri evidens est. Non enim  $A$  ipsum  $B$  metitur. Dico etiam neque alium aliquem ullum mensurum esse. Si enim possibile, metiatur  $A$  ipsum  $\Gamma$ . Et quot sunt  $A, B, \Gamma$  tot sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis  $A, B, \Gamma$ , ipsi  $Z, H, \Theta$ . Et quoniam  $Z, H, \Theta$  in eadem ratione sunt cum

|          |          |               |               |          |
|----------|----------|---------------|---------------|----------|
| $A, 16.$ | $B, 24.$ | $\Gamma, 36.$ | $\Delta, 54.$ | $E, 81.$ |
| $Z, 4.$  | $H, 6.$  | $\Theta, 9.$  |               |          |

πλήθος τῶν  $A, B, \Gamma$  τῷ πλήθει τῶν  $Z, H, \Theta$ . Δίσκου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Theta$ . Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $H$ , οὐ μετρεῖ δὲ ὁ  $A$  τὸν  $B$  οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ  $Z$  τὸν  $H$ . οὐκ ἄρα μονὰς ἔστιν ὁ  $Z$ , ἢ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ εἰσιν οἱ  $Z, \Theta$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ  $Z$  ἄρα τὸν  $\Theta$  μετρεῖ<sup>3</sup>. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Theta$  οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . οὐδὲ ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Gamma$  μετρεῖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsis  $A, B, \Gamma$ , et est æqualis multitudo ipsorum  $A, B, \Gamma$  multitudini ipsorum  $Z, H, \Theta$ ; ex æquo igitur est ut  $A$  ad  $\Gamma$  ita  $Z$  ad  $\Theta$ . Et quoniam est ut  $A$  ad  $B$  ita  $Z$  ad  $H$ , non metitur autem  $A$  ipsum  $B$ ; non metitur igitur et  $Z$  ipsum  $H$ ; non igitur unitas est  $Z$ , unitas enim omnem numerum metitur, et sunt  $Z, \Theta$  primi inter se; neque  $Z$  igitur ipsum  $\Theta$  metitur. Et est ut  $Z$  ad  $\Theta$  ita  $A$  ad  $\Gamma$ ; neque  $A$  igitur ipsum  $\Gamma$  metitur. Similiter utique ostendemus neque alium aliquem ullum metiri. Quod oportebat ostendere.

Il est certainement évident que les nombres  $A, B, \Gamma, \Delta, E$  ne se mesurent point successivement les uns les autres, puisque  $A$  ne mesure pas  $B$ . Je dis de plus qu'aucun autre n'en mesure un autre; car que  $A$  mesure  $\Gamma$ , si cela est possible. Autant qu'il y a de nombres  $A, B, \Gamma$ , autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec  $A, B, \Gamma$  (35. 7), et que ces nombres soient  $Z, H, \Theta$ . Puisque les nombres  $Z, H, \Theta$  sont dans la même raison que  $A, B, \Gamma$ , et que la quantité des nombres  $A, B, \Gamma$  est la même que la quantité des nombres  $Z, H, \Theta$ , par égalité  $A$  est à  $\Gamma$  comme  $Z$  est à  $\Theta$  (14. 7). Et puisque  $A$  est à  $B$  comme  $Z$  est à  $H$ , et que  $A$  ne mesure pas  $B$ ,  $Z$  ne mesure pas  $H$  (20. déf. 7); donc  $Z$  n'est pas l'unité, parce que l'unité mesure tous les nombres (déf. 1. 7); donc  $Z, \Theta$  sont premiers entr'eux; donc  $Z$  ne mesure pas  $\Theta$  (déf. 12. 7.). Mais  $Z$  est à  $\Theta$  comme  $A$  est à  $\Gamma$ ; donc  $A$  ne mesure pas  $\Gamma$ . Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'en mesure un autre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Εάν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἰζῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἴσχατον μετρεῖ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἐστώσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἰζῆς ἀνάλογον, οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta$ , ὁ δὲ  $A$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖται· λέγω ὅτι καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  μετρεῖ.

$A, 2. \quad B, 4. \quad \Gamma, 8. \quad \Delta, 16.$

Εἰ γὰρ οὐκ μετρεῖ ὁ  $A$  τὸν  $B$ , οὐδὲ ἄλλος οὐδὲ τις οὐδένα μετρήσει<sup>2</sup>. Μετρεῖ δὲ ὁ  $A$  τὸν  $\Delta$ · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εάν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς<sup>1</sup> μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

PROPOSITION VII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier mesure le dernier, il mesurera le second.

Soient  $A, B, \Gamma, \Delta$  tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que  $A$  mesure  $\Delta$ ; je dis que  $A$  mesure  $B$ .

Car si  $A$  ne mesure pas  $B$ , aucun autre n'en mesurera un autre (6. 8); mais  $A$  mesure  $\Delta$ ; donc  $A$  mesure  $B$ . Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si entre deux nombres tombent des nombres successivement proportionnels, il tombera autant de nombres moyens proportionnels entre deux autres nombres qui ont la même raison que les premiers, qu'il en tombe entre les deux premiers.

PROPOSITIO VII.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales  $A, B, \Gamma, \Delta$ , ipse autem  $A$  ipsum  $\Delta$  metiatur; dico et  $A$  ipsum  $B$  metiri.

Si enim non metitur  $A$  ipsum  $B$ , neque alius aliquis ullum metietur. Metitur autem  $A$  ipsum  $\Delta$ ; metitur igitur et  $A$  ipsum  $B$ . Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO VIII.

Si duos inter numeros in continuum proportionales cadant numeri, quot inter eos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter illos eandem rationem habentes in continuum proportionales cadent.



## 16 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτειν ἄριθμοι, οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίσυνται.

Duos enim inter numeros Α, Β in continuum proportionales cadant numeri Γ, Δ, et fiat ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; dico quot inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Ε, Ζ in continuum proportionales casuros esse numeros.

|       |       |        |        |
|-------|-------|--------|--------|
| Α, 2. | Γ, 4. | Δ, 8.  | Β, 16. |
| Η, 1. | Θ, 2. | Κ, 4.  | Λ, 8.  |
| Ε, 3. | Μ, 6. | Ν, 12. | Ζ, 24. |

Ὅσοι γὰρ εἰσι τῇ πλήθει οἱ Α, Γ, Δ, Β, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ εἰσὶν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β, οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Β, Δ τῇ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ· διίσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ

Quot enim sunt in multitudine ipsi Α, Γ, Δ, Β totidem sumantur minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, ipsi Η, Θ, Κ, Λ; ergo extremi eorum Η, Λ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Γ, Δ, Β cum ipsis Η, Θ, Κ, Λ in eadem ratione sunt, atque est æqualis multitudo ipsorum Α, Γ, Β, Δ multitudini ipsorum Η, Θ, Κ, Λ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Η ad Λ. Ut autem Α ad Β ita Ε ad Ζ; et ut igitur Η ad Λ ita Ε ad Ζ. Ipsi autem Η, Λ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri metiuntur æqua-

Qu'entre les deux nombres Α, Β tombent les nombres moyens proportionnels Γ, Δ, et soit fait en sorte que Α soit à Β comme Ε est à Ζ; je dis qu'il tombera entre Ε, Ζ autant de nombres moyens proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers Α, Β.

Autant qu'il y a de nombres Α, Γ, Δ, Β, autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (35. 7); et que ces nombres soient Η, Θ, Κ, Λ; leurs extrêmes Η, Λ seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque les nombres Α, Γ, Δ, Β sont en même raison que Η, Θ, Κ, Λ, et que la quantité des nombres Α, Γ, Β, Δ est égale à la quantité des nombres Η, Θ, Κ, Λ, par égalité Α sera à Β comme Η est à Λ (14. 7). Mais Α est à Β comme Ε est à Ζ; donc Η est à Λ comme Ε est à Ζ. Mais les nombres Η, Λ sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus

ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. Ἰσάκεις ἄρα ὁ  $H$  τὸν  $E$  μετρεῖ, καὶ ὁ  $A$  τὸν  $Z$ · ἰσάκεις δὴ<sup>3</sup> ὁ  $H$  τὸν  $E$  μετρεῖ τοσαυτάκεις καὶ ἰκάτερος τῶν  $\Theta$ , Κ ἰκάτερον τῶν  $M$ ,  $N$  μετρεῖται· οἱ  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  ἄρα τοὺς  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  ἰσάκεις μετροῦσιν· οἱ  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  ἄρα τοῖς  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Ἀλλὰ οἱ  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  τοῖς  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· οἱ  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  ἄρα τοῖς  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν<sup>5</sup>. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς  $A$ ,  $B$  μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς  $E$ ,  $Z$  μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

litter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Æqualiter igitur  $H$  ipsum  $E$  metitur ac  $A$  ipsum  $Z$ . Quoties autem  $H$  ipsum  $E$  metitur, toties et uterque ipsorum  $\Theta$ ,  $K$  utrumque ipsorum  $M$ ,  $N$  metiatur; ipsi  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  igitur ipsos  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  æqualiter metiuntur; ergo  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  cum ipsis  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  in eadem ratione sunt. Sed  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  cum ipsis  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  in eadem ratione sunt; ipsi  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  igitur cum ipsis  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  in eadem ratione sunt. Ipsi autem  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  deinceps proportionales sunt; et  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  igitur deinceps proportionales sunt; quot igitur inter  $A$ ,  $B$  in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter et ipsos  $E$ ,  $Z$  in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit; c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc  $H$  mesure  $E$  autant de fois que  $A$  mesure  $Z$ . Que les nombres  $\Theta$ ,  $K$  mesurent les nombres  $M$ ,  $N$  autant de fois que  $H$  mesure  $E$ ; les nombres  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  mesureront également  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$ ; donc les nombres  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  sont en même raison que  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  (déf. 20. 7). Mais les nombres  $H$ ,  $\Theta$ ,  $K$ ,  $A$  sont en même raison que les nombres  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$ ; donc les nombres  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  sont en même raison que  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$ . Mais les nombres  $A$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $B$  sont successivement proportionnels; donc les nombres  $E$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $Z$  sont successivement proportionnels; donc il tombe entre  $E$ ,  $Z$  autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre  $A$ ,  $B$ . Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος<sup>1</sup> μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ<sup>2</sup> κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ

## PROPOSITIO IX.

Si duo numeri primi inter se sunt, et inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter utrumque ipsorum, et unitatem deinceps in continuum proportionales cadent.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, et inter ipsos in continuum proportionales cadant Γ, Δ,

|       |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|
| Α, 8. | Γ, 12. | Δ, 18. | Β, 27. |
|       | Ε, 1.  |        |        |
|       | Ζ, 2.  | Η, 3.  |        |
| Θ, 4. | Κ, 6.  | Λ, 9.  |        |
| Μ, 8. | Ν, 12. | Ξ, 18. | Ο, 27. |

ἑκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς<sup>3</sup> μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

et exponatur Ε unitas; dico quot inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque Α, Β et unitatem in continuum proportionales cadere.

## PROPOSITION IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et s'il tombe entr'eux des nombres successivement proportionnels, il tombera entre chacun de ces nombres et l'unité autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers nombres.

Soient deux nombres Α, Β premiers entr'eux, et qu'entre ces deux nombres il tombe les deux nombres successivement proportionnels Γ, Δ; et soit Ε l'unité; je dis qu'entre chacun des nombres Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre Α, Β et l'unité.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν  $A, \Gamma, \Delta, B$  λόγῳ ὄντες, οἱ  $Z, H$ , τρεῖς δὲ οἱ  $\Theta, K, \Lambda$ , καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους ὥς ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλείθει τῶν  $A, \Gamma, \Delta, B$ , εἰλήφθωσαν, καὶ ἴστωσαν οἱ  $M, N, \Xi, O$  φανερόν δὲ ὅτι ὁ μὲν  $Z$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Theta$  πεποιήκει, τὸν δὲ  $\Theta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $M$  πεποιήκει, καὶ ὁ  $H$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Lambda$  πεποιήκει, τὸν δὲ  $\Lambda$  πολλαπλασιάσας τὸν  $O$  πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ οἱ  $M, N, \Xi, O$  ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς  $Z, H$ , εἰσὶ δὲ καὶ οἱ  $A, \Gamma, \Delta, B$  ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς  $Z, H$ , καὶ ἴσιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν  $M, N, \Xi, O$  τῷ πλείθει τῶν  $A, \Gamma, \Delta, B$ . ἕκαστος ἄρα τῶν  $M, N, \Xi, O$  ἑκάστῳ τῶν  $A, \Gamma, \Delta, B$  ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν  $M$  τῷ  $A$ , ὁ δὲ  $O$  τῷ  $B$ . Καὶ ἐπεὶ ὁ  $Z$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Theta$  πεποιήκιν· ὁ  $Z$  ἄρα τὸν  $\Theta$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $Z$  μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ  $E$  μοιὰς τὸν  $Z$  κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ  $E$  μοιὰς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ  $Z$  τὸν  $\Theta$ · ἴστος ἄρα ὡς ἡ  $E$  μοιὰς πρὸς τὴν  $Z$

Sumantur enim duo quidem numeri minimi  $Z, H$  in ipsorum  $A, \Gamma, \Delta, B$  ratione existentes, tres vero  $\Theta, K, \Lambda$ , et semper deinceps uno plures quoad æqualis fiat multitudo eorum multitudini ipsorum  $A, \Gamma, \Delta, B$ ; sumantur, et sint  $M, N, \Xi, O$ ; evidens est utique  $Z$  quidem se ipsum multiplicantem ipsum  $\Theta$  fecisse, multiplicantem vero  $\Theta$  fecisse  $M$ , et  $H$  se ipsum quidem multiplicantem fecisse  $\Lambda$ , multiplicantem vero  $\Lambda$  fecisse  $O$ . Et quoniam  $M, N, \Xi, O$  minimi sunt eandem rationem habentium cum ipsis  $Z, H$ , sunt autem et  $A, \Gamma, \Delta, B$  minimi eandem rationem habentium cum ipsis  $Z, H$ , et est æqualis multitudo ipsorum  $M, N, \Xi, O$  multitudini ipsorum  $A, \Gamma, \Delta, B$ ; unusquisque igitur ipsorum  $M, N, \Xi, O$  unicuique ipsorum  $A, \Gamma, \Delta, B$  æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem  $M$  ipsi  $A$ , ipse vero  $O$  ipsi  $B$ . Et quoniam  $Z$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Theta$  fecit, ergo  $Z$  ipsum  $\Theta$  metitur per unitates quæ in  $Z$ . Metitur autem et  $E$  unitas ipsum  $Z$  per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur  $E$  unitas ipsum  $Z$  numerum metitur ac  $Z$  ipsum  $\Theta$ ; est igitur ut  $E$

Soient pris les deux plus petits nombres  $Z, H$  dans la raison des nombres  $A, \Gamma, \Delta, B$  (2. 8); ensuite trois  $\Theta, K, \Lambda$ , et toujours successivement un de plus jusqu'à ce que leur quantité soit égale à celle des nombres  $A, \Gamma, \Delta, B$ ; que ces nombres soient pris, et qu'ils soient  $M, N, \Xi, O$ ; il est évident que  $Z$  se multipliant lui-même a fait  $\Theta$ , que  $Z$  multipliant  $\Theta$  a fait  $M$ , que  $H$  se multipliant lui-même a fait  $\Lambda$ , et que  $H$  multipliant  $\Lambda$  a fait  $O$  (2. 8). Puisque les nombres  $M, N, \Xi, O$  sont les plus petits de ceux qui ont la même raison que  $Z, H$ , que les nombres  $A, \Gamma, \Delta, B$  sont aussi les plus petits de ceux qui ont la même raison que  $Z, H$ , et que la quantité des nombres  $M, N, \Xi, O$  est égale à celle des nombres  $A, \Gamma, \Delta, B$ , chacun des nombres  $M, N, \Xi, O$  est égal à chacun des nombres  $A, \Gamma, \Delta, B$ ; donc  $M$  est égal à  $A$  et  $O$  à  $B$ . Et puisque  $Z$  se multipliant lui-même a fait  $\Theta$ ,  $Z$  mesure  $\Theta$  par les unités qui sont en  $Z$ . Mais l'unité  $E$  mesure  $Z$  par les unités qui sont en  $Z$ ; donc l'unité  $E$  mesure  $Z$  autant de fois que  $Z$  mesure  $\Theta$ ; donc l'unité  $E$  est au nombre  $Z$  comme  $Z$  est à  $\Theta$  (déf. 20. 7). De plus, puisque  $Z$  multi-

## 20 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Theta$ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ  $Z^4$  τὸν  $\Theta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $M$  πιποίηκεν· ὁ  $\Theta$  ἄρα τὸν  $M$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $Z^5$  μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ  $E$  μονὰς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ  $E$  μονὰς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ  $\Theta^6$  τὸν  $M$ · ἔστιν· ἄρα ὡς ἡ  $E$  μονὰς πρὸς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $M$ . Εἰδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ  $E$  μονὰς πρὸς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Theta$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $E$  μονὰς πρὸς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν οὕτως

unitas ad  $Z$  numerum ita  $Z$  ad  $\Theta$ . Rursus, quoniam  $Z$  ipsum  $\Theta$  multiplicans ipsum  $M$  fecit; ergo  $\Theta$  ipsum  $M$  metitur per unitates quæ in  $Z$ . Metitur autem et  $E$  unitas ipsum  $Z$  numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur  $E$  unitas ipsum  $Z$  numerum metitur ac  $\Theta$  ipsum  $M$ ; est igitur ut  $E$  unitas ad  $Z$  numerum ita  $\Theta$  ad  $M$ . Ostensum est autem et ut  $E$  unitas ad  $Z$  numerum ita  $Z$  ad  $\Theta$ ; et ut igitur  $E$  unitas

$A$ , 8.       $\Gamma$ , 12.       $\Delta$ , 18.       $B$ , 27.  
 $E$ , 1.  
 $Z$ , 2.       $H$ , 3.  
 $\Theta$ , 4.       $K$ , 6.       $\Lambda$ , 9.  
 $M$ , 8.       $N$ , 12.       $Z$ , 18.       $O$ , 27.

ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Theta$  καὶ ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $M$ . Ἴσος δὲ ὁ  $M$  τῷ  $A^7$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $E$  μονὰς πρὸς τὸν  $Z$  ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $Z$  πρὸς τὸν  $\Theta$  καὶ ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $A$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ  $E$  μονὰς πρὸς τὸν  $H$  ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $H$  πρὸς τὸν  $\Lambda$  καὶ ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $B$ · ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς  $A$ ,  $B$  μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν  $A$ ,  $B$  καὶ μονάδος τῆς  $E$  μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad  $Z$  numerum ita  $Z$  ad  $\Theta$  et  $\Theta$  ad  $M$ . Æqualis autem  $M$  ipsi  $A$ ; est igitur ut  $E$  unitas ad  $Z$  numerum ita  $Z$  ad  $\Theta$  et  $\Theta$  ad  $A$ . Propter eadem utique et ut  $E$  unitas ad  $H$  numerum ita  $H$  ad  $\Lambda$  et  $\Lambda$  ad  $B$ ; quot igitur inter  $A$ ,  $B$  in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque ipsorum  $A$ ,  $B$  et unitatem  $E$  in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

pliant  $\Theta$  a fait  $M$ , le nombre  $\Theta$  mesure  $M$  par les unités qui sont en  $Z$ . Mais l'unité  $E$  mesure le nombre  $Z$  par les unités qui sont en lui; donc l'unité  $E$  mesure  $Z$  autant de fois que  $\Theta$  mesure  $M$ ; donc l'unité  $E$  est au nombre  $Z$  comme  $\Theta$  est à  $M$ . Mais on a démontré que l'unité  $E$  est au nombre  $Z$  comme  $Z$  est à  $\Theta$ ; donc l'unité  $E$  est au nombre  $Z$  comme  $Z$  est à  $\Theta$ , et comme  $\Theta$  est à  $M$ . Mais  $M$  égale  $A$ ; donc l'unité  $E$  est au nombre  $Z$  comme  $Z$  est à  $\Theta$ , et comme  $\Theta$  est à  $A$ . Par la même raison l'unité  $E$  est au nombre  $H$  comme  $H$  est à  $\Lambda$ , et comme  $\Lambda$  est à  $B$ ; il tombe donc entre chacun des nombres  $A$ ,  $B$ , et l'unité  $E$ , autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre  $A$ ,  $B$ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσαν ἀριθμοί οἱ τε Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

|       |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|
| Α, 8. | Κ, 12. | Α, 18. | Β, 27. |
| Ε, 4. | Θ, 6.  | Η, 9.  |        |
|       | Δ, 2.  | Ζ, 3.  |        |
|       | Γ, 1.  |        |        |

Ο Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Α ποιεῖτω.

Si inter duos numeros et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter utrumque ipsorum et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter ipsos in continuum proportionales cadent.

Duos enim inter numeros Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadant numeri et Δ, Ε et Ζ, Η; dico quot inter utrumque ipsorum Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Α, Β numeros in continuum proportionales cadere.

Ipse Δ enim ipsum Ζ multiplicans ipsum Θ faciat, uterque autem ipsorum Δ, Ζ ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum Κ, Α faciat.

PROPOSITION X.

Si entre deux nombres et l'unité il tombe des nombres successivement proportionnels, il tombe entre les deux premiers nombres autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des premiers et l'unité.

Qu'entre les nombres Α, Β, et l'unité Γ, il tombe les nombres successivement proportionnels Δ, Ε et Ζ, Η; je dis qu'entre Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des nombres Α, Β et l'unité Γ.

Car que Δ multipliant Ζ fasse Θ, et que chacun des nombres Δ, Ζ multipliant Θ fasse Κ, Α.

## 22 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ  $\Gamma$  μονὰς πρὸς τὸν  $\Delta$  ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $E$ , ἰσάκεις ἄρα ἡ  $\Gamma$  μονὰς τὸν  $\Delta$  ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ  $\Delta$  τὸν  $E$ . Ἡ δὲ  $\Gamma$  μονὰς τὸν  $\Delta$  ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· καὶ ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $E$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὁ  $\Delta$  ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $E$  πεποίηκε. Πάλιν, ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ  $\Gamma$  μονὰς<sup>5</sup> πρὸς τὸν  $\Delta$  ἀριθμὸν οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $A$ · ἰσάκεις ἄρα ἡ  $\Gamma$  μονὰς τὸν  $\Delta$  ἀριθμὸν μετρεῖ

Et quoniam est ut  $\Gamma$  unitas ad  $\Delta$  numerum ita  $\Delta$  ad  $E$ , æqualiter igitur  $\Gamma$  unitas ipsum  $\Delta$  numerum metitur ac  $\Gamma$  ipsum  $E$ . Unitas autem  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$  numerum metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; et  $\Delta$  igitur ipsum  $E$  metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; ergo  $\Delta$  se ipsum multiplicans ipsum  $E$  fecit. Rursus, quoniam est ut  $\Gamma$  unitas ad  $\Delta$  numerum ita  $E$  ad  $A$ ; æqualiter igitur  $\Gamma$

$A$ , 8.       $K$ , 12.       $\Lambda$ , 18.       $B$ , 27.  
 $E$ , 4.       $\Theta$ , 6.       $H$ , 9.  
 $\Delta$ , 2.       $Z$ , 3.  
 $\Gamma$ , 1.

καὶ ὁ  $E$  τὸν  $A$ . Ἡ δὲ  $\Gamma$  μονὰς τὸν  $\Delta$  ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· καὶ ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ  $\Delta$  μονάδας· ὁ  $\Delta$  ἄρα τὸν  $E$  πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν  $Z$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $H$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $H$  πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποίηκε, καὶ ἐπεὶ ὁ  $\Delta$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $E$  πεποίηκε, τὸν δὲ  $Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Theta$  πεποίηκεν<sup>6</sup>. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Theta$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$  οὕτως ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $H$ . Καὶ ὡς ἄρα ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Theta$

unitas ipsum  $\Delta$  numerum metitur ac  $E$  ipsum  $A$ . Unitas autem  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$  numerum metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; et  $E$  igitur ipsum  $A$  metitur per unitates quæ in  $\Delta$ ; ergo  $\Delta$  ipsum  $E$  multiplicans ipsum  $A$  fecit. Propter eadem utique et  $Z$  quidem se ipsum multiplicans ipsum  $H$  fecit, ipsum vero  $H$  multiplicans ipsum  $B$  fecit, et quoniam  $\Delta$  se ipsum quidem multiplicans ipsum  $E$  fecit, ipsum autem  $Z$  multiplicans ipsum  $\Theta$  fecit; est igitur ut  $\Delta$  ad  $Z$  ita  $E$  ad  $\Theta$ . Propter eadem et ut  $\Delta$  ad  $Z$  ita  $\Theta$  ad  $H$ . Et ut igitur  $E$  ad  $\Theta$  ita  $\Theta$  ad  $H$ .

Puisque l'unité  $\Gamma$  est au nombre  $\Delta$  comme  $\Delta$  est à  $E$ , l'unité  $\Gamma$  mesure le nombre  $\Delta$  autant de fois que  $\Delta$  mesure  $E$ . Mais l'unité  $\Gamma$  mesure le nombre  $\Delta$  par les unités qui sont en  $\Delta$ ; donc  $\Delta$  mesure  $E$  par les unités qui sont en  $\Delta$ ; donc  $\Delta$  se multipliant lui-même fait  $E$ . De plus, puisque l'unité  $\Gamma$  est au nombre  $\Delta$  comme  $E$  est à  $A$ , l'unité  $\Gamma$  mesure le nombre  $\Delta$  autant de fois que  $E$  mesure  $A$ . Mais l'unité  $\Gamma$  mesure le nombre  $\Delta$  par les unités qui sont en  $\Delta$ ; donc  $E$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $\Delta$ ; donc  $\Delta$  multipliant  $E$  fait  $A$ . Par la même raison  $Z$  se multipliant lui-même fait  $H$ , et  $Z$  multipliant  $H$  fait  $B$ . Mais  $\Delta$  se multipliant lui-même fait  $E$ , et  $\Delta$  multipliant  $Z$  fait  $\Theta$ ; donc  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $E$  est à  $\Theta$  (17. 7). Par la même raison  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $\Theta$  est à  $H$ ; donc  $E$  est à  $\Theta$  comme  $\Theta$  est à  $H$ .

οὕτως ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $H$ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ  $\Delta$  ἐκά-  
τερον τῶν  $E$ ,  $\Theta$  πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν  
 $A$ ,  $K$  πεποιήκεν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Theta$   
οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $K$ . Αλλ' ὡς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $\Theta$   
οὕτως ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$ · καὶ ὡς ἄρα ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  
 $Z$  οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $K$ . Πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερες  
τῶν  $\Delta$ ,  $Z$  τὸν  $\Theta$  πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν  
 $K$ ,  $\Lambda$  πεποιήκεν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$   
οὕτως ὁ  $K$  πρὸς τὸν  $\Lambda$ . Αλλ' ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$   
οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $K$ · καὶ ὡς ἄρα ὁ  $A$  πρὸς τὸν  
 $K$  οὕτως ὁ  $K$  πρὸς τὸν  $\Lambda$ . Ἐτι ἐπεὶ ὁ  $Z$  ἐκάτερον  
τῶν  $H$ ,  $\Theta$  πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν  $\Lambda$ ,  $B$   
πεποιήκεν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $H$  οὕτως  
ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $B$ . Ὡς δὲ ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $H$  οὕτως ὁ  
 $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$ · καὶ ὡς ἄρα ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $Z$  οὕτως  
ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $B$ . Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  
 $Z$  οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $K$ , καὶ ὁ  $K$  πρὸς τὸν  
 $\Lambda$ , καὶ ὡς ἄρα ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $K$  οὕτως ὁ  $K$  πρὸς  
τὸν  $\Lambda$ , καὶ ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $B$ · οἱ  $A$ ,  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $B$  ἄρα  
κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα  
ἐκατέρου τῶν  $A$ ,  $B$  καὶ τῆς  $\Gamma$  μοιᾶδες μεταξὺ  
κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἰμπίπτουσιν ἀριθμοὶ,  
τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς  $A$ ,  $B$  μεταξὺ κατὰ τὸ  
συνεχὲς ἀνάλογον ἰμπίπτουσιν. Ὁπερ ἴδει δεῖξαι.

Rursus, quoniam  $\Delta$  utrumque ipsorum  $E$ ,  $\Theta$   
multiplicans utrumque ipsorum  $A$ ,  $K$  fecit; est  
igitur ut  $E$  ad  $\Theta$  ita  $A$  ad  $K$ . Sed ut  $E$  ad  $\Theta$   
ita  $\Delta$  ad  $Z$ ; et ut igitur  $\Delta$  ad  $Z$  ita  $A$  ad  $K$ .  
Rursus, quoniam uterque ipsorum  $\Delta$ ,  $Z$  ipsum  
 $\Theta$  multiplicans utrumque ipsorum  $K$ ,  $\Lambda$  fecit;  
est igitur ut  $\Delta$  ad  $Z$  ita  $K$  ad  $\Lambda$ . Sed ut  $\Delta$   
ad  $Z$  ita  $A$  ad  $K$ ; et ut igitur  $A$  ad  $K$  ita  $K$  ad  $\Lambda$ .  
Præterea, quoniam  $Z$  utrumque ipsorum  $H$ ,  $\Theta$  mul-  
tiplicans utrumque ipsorum  $\Lambda$ ,  $B$  fecit; est igitur  
ut  $\Theta$  ad  $H$  ita  $\Lambda$  ad  $B$ . Ut autem  $\Theta$  ad  $H$  ita  $\Delta$   
ad  $Z$ ; et ut igitur  $\Delta$  ad  $Z$  ita  $\Lambda$  ad  $B$ . Ostensum  
est autem et ut  $\Delta$  ad  $Z$  ita  $A$  ad  $K$ , et  $K$  ad  $\Lambda$ ;  
et ut igitur  $A$  ad  $K$  ita  $K$  ad  $\Lambda$ , et  $\Lambda$  ad  $B$ ;  
ipsi  $A$ ,  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $B$  igitur in continuum deinceps  
sunt proportionales; quot igitur inter utrumque  
ipsorum  $A$ ,  $B$  et  $\Gamma$  unitatem in continuum pro-  
portionales cadunt numeri, totidem et inter  
 $A$ ,  $B$  in continuum proportionales cadent. Quod  
oportebat ostendere.

De plus, puisque le nombre  $\Delta$  multipliant les nombres  $E$ ,  $\Theta$  fait les nombres  $A$ ,  $K$ , le nombre  $E$  est à  $\Theta$  comme  $A$  est à  $K$  (17. 7). Mais  $E$  est à  $\Theta$  comme  $\Delta$  est à  $Z$ ; donc  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $A$  est à  $K$ . De plus, puisque les nombres  $\Delta$ ,  $Z$  multipliant  $\Theta$  font les nombres  $K$ ,  $\Lambda$ , le nombre  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $K$  est à  $\Lambda$  (18. 7). Mais  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $A$  est à  $K$ ; donc  $A$  est à  $K$  comme  $K$  est à  $\Lambda$ . De plus, puisque le nombre  $Z$  multipliant les nombres  $H$ ,  $\Theta$  fait les nombres  $\Lambda$ ,  $B$ , le nombre  $\Theta$  est à  $H$  comme  $\Lambda$  est à  $B$ . Mais  $\Theta$  est à  $H$  comme  $\Delta$  est à  $Z$ ; donc  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $\Lambda$  est à  $B$ . Mais il a été démontré que  $\Delta$  est à  $Z$  comme  $A$  est à  $K$ , comme  $K$  est à  $\Lambda$ ; donc  $A$  est à  $K$  comme  $K$  est à  $\Lambda$ ; et comme  $\Lambda$  est à  $B$ ; donc les nombres  $A$ ,  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $B$  sont successivement proportionnels; donc entre  $A$ ,  $B$  il tombe autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les nombres  $A$ ,  $B$  et l'unité  $\Gamma$ . Ce qu'il fallait démontrer.



## 24 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ  $A, B$ , καὶ τοῦ μὲν  $A$  πλευρὰ ἔστω ὁ  $\Gamma$ , τοῦ δὲ  $B$  ὁ  $\Delta$ . λέγω ὅτι τῶν  $A, B$  εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ .

$A, 4.$        $E, 6.$        $B, 9.$   
 $\Gamma, 2.$        $\Delta, 3.$

Ὁ  $\Gamma$  γὰρ τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $E$  ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ  $A$ , πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἔστιν ὁ  $\Gamma$ . ὁ  $\Gamma$  ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $A$  πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ  $\Delta$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $B$  πεποιήκει· ἐπεὶ οὖν ὁ  $\Gamma$  ἑκάτερον τῶν  $\Gamma, \Delta$  πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν  $A, E$  πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$  οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum duplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint quadrati numeri  $A, B$ , et ipsius quidem  $A$  latus sit  $\Gamma$ , ipsius vero  $B$  ipse  $\Delta$ ; dico ipsorum  $A, B$  unum medium proportionalem esse numerum, et  $A$  ad  $B$  duplam rationem habere ejus quam  $\Gamma$  ad  $\Delta$ .

Ipsa  $\Gamma$  enim  $\Delta$  multiplicans ipsum  $E$  faciat. Et quoniam quadratus est  $A$ , latus autem ipsius est  $\Gamma$ ; ergo  $\Gamma$  se ipsum multiplicans ipsum  $A$  fecit. Propter eadem utique et  $\Delta$  se ipsum multiplicans ipsum  $B$  fecit; quoniam igitur  $\Gamma$  utrumque ipsorum  $\Gamma, \Delta$  multiplicans utrumque ipsorum  $A, E$  fecit; est igitur ut  $\Gamma$  ad  $\Delta$  ita  $A$  ad  $E$ . Propter eadem utique et ut  $\Gamma$  ad  $\Delta$  ita  $E$  ad

### PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrés, il y a un nombre moyen proportionnel, et le quarré est au quarré en raison double de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres quarrés  $A, B$ ; que le côté de  $A$  soit  $\Gamma$ , et que le côté de  $B$  soit  $\Delta$ ; je dis qu'il y a un nombre moyen proportionnel entre  $A$  et  $B$ , et que  $A$  a avec  $B$  une raison double de celle que  $\Gamma$  a avec  $\Delta$ .

Car que  $\Gamma$  multipliant  $\Delta$  fasse  $E$ . Puisque  $A$  est un nombre quarré, et que son côté est  $\Gamma$ , le nombre  $\Gamma$  se multipliant lui-même fait  $A$  (déf. 18. 7). Par la même raison le nombre  $\Delta$  se multipliant lui-même fait  $B$ ; donc puisque  $\Gamma$  multipliant l'un et l'autre nombre  $\Gamma, \Delta$  fait l'un et l'autre nombre  $A, E$ , le nombre  $\Gamma$  est à  $\Delta$  comme  $A$  est à  $E$  (17. 7). Par la même raison  $\Gamma$  est à  $\Delta$  comme  $E$

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 25

τὸν  $B^2$ · καὶ ὥς ἄρα ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $B$ . Τῶν  $A, B$  ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ  $E^3$ .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ . Ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, εἰ  $A, E, B$ · ὁ  $A$  ἄρα πρὸς τὸν  $B$  διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$ . Ὡς δὲ ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $E$  οὕτως ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ · ὁ  $A$  ἄρα πρὸς τὸν  $B$  διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ  $\Gamma$  πλευρὰ πρὸς τὴν  $\Delta$  πλευράν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

$B$ ; et ut igitur  $A$  ad  $E$  ita  $E$  ad  $B$ . Ipsorum  $A, B$  igitur unus medius proportionalis est numerus  $E$ .

Dico etiam et  $A$  ad  $B$  duplam rationem habere ejus quam  $\Gamma$  ad  $\Delta$ . Quoniam enim tres numeri proportionales sunt  $A, E, B$ ; ergo  $A$  ad  $B$  duplam rationem habet ejus quam  $A$  ad  $E$ . Ut autem  $A$  ad  $E$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ ; ergo  $A$  ad  $B$  duplam rationem habet ejus quam  $\Gamma$  latus ad  $\Delta$  latus. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

### PROPOSITIO XII.

Duorum cuborum duo medii proportionales sunt numeri, et cubus ad cubum triplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

|         |               |              |          |
|---------|---------------|--------------|----------|
| $A, 8.$ | $\Theta, 12.$ | $K, 18.$     | $B, 27.$ |
| $E, 4.$ | $Z, 6.$       | $H, 9.$      |          |
|         | $\Gamma, 2.$  | $\Delta, 3.$ |          |

Ἐστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ  $A, B$ , καὶ τοῦ μὲν  $A$  πλευρὰ ἔστω ὁ  $\Gamma$ , τοῦ δὲ  $B$  ὁ  $\Delta$ · λέγω ὅτι

Sint cubi numeri  $A, B$ , et ipsius quidem  $A$  latus sit  $\Gamma$ , ipsius vero  $B$  ipse  $\Delta$ ; dico ip-

est à  $B$ ; donc  $A$  est à  $E$  comme  $E$  est à  $B$ ; donc le nombre  $E$  est moyen proportionnel entre  $A, B$ .

Je dis aussi que  $A$  a avec  $B$  une raison double de celle que  $\Gamma$  a avec  $\Delta$ . Car puisque les trois nombres  $A, E, B$  sont proportionnels, le nombre  $A$  a avec  $B$  une raison double de celle que  $A$  a avec  $E$ . Mais  $A$  est à  $E$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$ ; donc  $A$  a avec  $B$  une raison double de celle que le côté  $\Gamma$  a avec le côté  $\Delta$ . Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels, et le cube a avec le cube une raison triple de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres cubes  $A, B$ , et que  $\Gamma$  soit le côté de  $A$ , et  $\Delta$  le côté de  $B$ ; je

## 26 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιεῖτω.

Α, 8.      Θ, 12.      Κ, 18.      Β, 27.  
Ε, 4.      Ζ, 6.      Η, 9.  
Γ, 2.      Δ, 3.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκε<sup>2</sup>, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πιποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πιποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πε-

sorum Α, Β duos medios proportionales esse numeros, et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ.

Ipse enim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, uterque vero ipsorum Γ, Δ ipsum Ζ multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ faciat.

Et quoniam cubus est Α, latus autem ipsius ipse Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit; ergo Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum Ε, Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Α ita Ε ad Ζ. Propter eadem utique et ut Γ ad Α ita Ζ ad Η. Rursus, quoniam Γ utrumque ipsorum Ε, Ζ multiplicans utrumque ipsorum Α, Θ fecit; est igitur ut Ε

dis qu'il y a deux nombres moyens proportionnels entre Α, Β, et que Α a avec Β une raison triple de celle que le côté Γ a avec le côté Δ.

Car que le côté Γ se multipliant lui-même fasse Ε, que Γ multipliant Δ fasse Ζ, que Δ se multipliant lui-même fasse Η, et que les nombres Γ, Δ multipliant Ζ fassent les nombres Θ, Κ.

Puisque Α est un cube, que son côté est Γ, et que Γ se multipliant lui-même a fait Ε, le nombre Γ se multipliant lui-même fera Ε, et Γ multipliant Ε fera Α (déf. 19. 7). Par la même raison, Δ se multipliant lui-même fait Η, et Δ multipliant Η fait Β. Et puisque Γ multipliant les nombres Γ, Δ a fait les nombres Ε, Ζ, le nombre Γ est à Δ comme Δ est à Ζ (17. 7). Par la même raison, Γ est à Δ comme Ζ est à Η. De plus, puisque Γ multipliant les nombres Ε, Ζ fait les

ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ<sup>3</sup> ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιοῖκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β ποιοῖκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ<sup>4</sup> καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα<sup>5</sup> πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad Z ita A ad Θ. Ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita A ad Θ. Rursus, quoniam utrumque ipsorum Γ, Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum Ζ, Η multiplicans utrumque ipsorum Κ, Β fecit; est igitur ut Ζ ad Η ita Κ ad Β. Ut autem Ζ ad Η ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Κ ad Β. Ostensum autem est et ut Γ ad Δ ita et Α ad Θ, et Θ ad Κ, et Κ ad Β; ipsorum Α, Β igitur duo medii proportionales sunt numeri Θ, Κ.

Dico etiam et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim quatuor numeri Α, Θ, Κ, Β proportionales sunt; ergo Α ad Β triplam rationem habet ejus quam Α ad Θ. Ut autem Α ad Θ ita Γ ad Δ; et Α igitur ad Β triplam rationem habet ejus quam Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

nombres Α, Θ, le nombre Ε est à Ζ comme Α est à Θ. Mais Ε est à Ζ comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Α est à Θ. De plus, puisque les nombres Γ, Δ multipliant Ζ ont fait les nombres Θ, Κ; le nombre Γ est à Δ comme Θ est à Κ (18. 7). De plus, puisque Δ multipliant les nombres Ζ, Η fait les nombres Κ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Κ est à Β. Mais Ζ est à Η comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Κ est à Β. Mais il a été démontré que Γ est à Δ comme Α est à Θ, comme Θ est à Κ, et comme Κ est à Β; donc entre Α, Β il y a deux nombres moyens proportionnels Θ, Κ.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les quatre nombres Α, Θ, Κ, Β sont proportionnels, Α aura avec Β une raison triple de celle que Α a avec Θ. Mais Α est à Θ comme Γ est à Δ; donc Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

## PROPOSITIO XIII.

Εὰν ὥσιν ἰσοδιηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινὰς, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἰὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινὰς, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ αἰτὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Εστωσαν ὅποιοι ἄριθμοι ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιήτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιήτωσαν· λέγω ὅτι οἱ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et se ipsum multiplicans unusquisque faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt; et si ipsi a principio, factos multiplicantes faciant aliquos, et ipsi proportionales erunt, et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ, et ipsi Α, Β, Γ se ipsos quidem multiplicantes ipsos Δ, Ε, Ζ faciant, ipsos vero Δ, Ε, Ζ multiplicantes ipsos Η, Θ, Κ faciant; dico et ipsos Δ, Ε, Ζ et ipsos Η, Θ, Κ deinceps proportionales esse.

|       |        |        |        |         |         |         |
|-------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
|       |        | Α, 2.  | Β, 4.  | Γ, 8.   |         |         |
|       | Δ, 4.  | Δ, 8.  | Ε, 16. | Ε, 32.  | Ζ, 64.  |         |
| Η, 8. | Μ, 16. | Ν, 32. | Θ, 64. | Ο, 128. | Π, 256. | Κ, 512. |

Ο μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιήτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Α πολλαπλα-

Etenim Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Α faciat; uterque vero ipsorum Α, Β

## PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si chacun de ces nombres se multipliant lui-même fait certains nombres, les nombres produits seront proportionnels; et si les premiers nombres multipliant les nombres produits font certains nombres, ceux-ci seront encore proportionnels, et cela arrivera toujours aux derniers produits.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres proportionnels qu'on voudra, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; que les nombres Α, Β, Γ se multipliant eux-mêmes fassent Δ, Ε, Ζ, et que ces mêmes nombres multipliant Δ, Ε, Ζ fassent Η, Θ, Κ; je dis que les nombres Δ, Ε, Ζ, ainsi que Η, Θ, Κ, sont successivement proportionnels.

Car que Α multipliant Β fasse Α; que les nombres Α, Β multipliant Α fassent

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 29

σιάσας ἑκάτερον τῶν  $M, N$  ποιεῖται. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν  $B$  τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Xi$  ποιεῖται, ἑκάτερος δὲ τῶν  $B, \Gamma$  τὸν  $\Xi$  πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν  $O, \Pi$  ποιεῖται.

Ομοίως δὲ τοῖς ἑπάνω δείξομεν ὅτι οἱ  $\Delta, \Lambda, E$  καὶ οἱ  $H, M, N, \Theta$  ἰξῆς εἰσιν ἀνάλογον<sup>2</sup> ἐν τῷ τοῦ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ  $E, \Xi, Z$  καὶ οἱ  $\Theta, O, \Pi, K$  ἰξῆς εἰσιν ἀνάλογον<sup>3</sup> ἐν τῷ τοῦ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  λόγῳ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ · καὶ οἱ  $\Delta, \Lambda, E$  ἄρα τοῖς  $E, \Xi, Z$  ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔτι οἱ  $H, M, N, \Theta$  τοῖς  $\Theta, O, \Pi, K$ . Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν<sup>4</sup>  $\Delta, \Lambda, E$  πλῆθος τῷ τῶν  $E, \Xi, Z$  πλῆθει. Τὸ δὲ τῶν  $H, M, N, \Theta$  τῷ τῶν  $\Theta, O, \Pi, K$  καὶ<sup>5</sup> διήτου ἄρα ἔστιν ὡς μὲν ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $E$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $Z$ , ὡς δὲ ὁ  $H$  πρὸς τὸν  $\Theta$  οὕτως ὁ  $\Theta$  πρὸς τὸν  $K$ . Οἱ οὖν ἴδιαι δείξαι.

ipsum  $\Lambda$  multiplicans utrumque ipsorum  $M, N$  faciat. Et rursus  $B$  quidem ipsum  $\Gamma$  multiplicans ipsum  $\Xi$  faciat, uterque vero ipsorum  $B, \Gamma$  ipsum  $\Xi$  multiplicans utrumque ipsorum  $O, \Pi$  faciat.

Congruenter utique præcedentibus ostendemus ipsos  $\Delta, \Lambda, E$  et ipsos  $H, M, N, \Theta$  deinceps esse proportionales in ratione ipsius  $A$  ad  $B$ , et adhuc ipsos  $E, \Xi, Z$  et ipsos  $\Theta, O, \Pi, K$  deinceps esse proportionales in ratione ipsius  $B$  ad  $\Gamma$ . Atque est ut  $A$  ad  $B$  ita  $B$  ad  $\Gamma$ ; et  $\Delta, \Lambda, E$  igitur in eadem ratione sunt in quâ  $E, \Xi, Z$  et adhuc ipsi  $H, M, N, \Theta$  in quâ ipsi  $\Theta, O, \Pi, K$ . Et est æqualis quidem ipsorum  $\Delta, \Lambda, E$  multitudo ipsorum  $E, \Xi, Z$  multitudini. Ipsorum vero  $H, M, N, \Theta$  multitudo ipsorum  $\Theta, O, \Pi, K$  multitudini; et ex æquo igitur est ut quidem  $\Delta$  ad  $E$  ita  $E$  ad  $Z$ , ut vero  $H$  ad  $\Theta$  ita  $\Theta$  ad  $K$ . Quod oportebat ostendere.

$M, N$ ; et de plus, que  $B$  multipliant  $\Gamma$  fasse  $\Xi$ , et que les nombres  $B, \Gamma$  multipliant  $\Xi$  fassent  $O, \Pi$ .

Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que les nombres  $\Delta, \Lambda, E$  et  $H, M, N, \Theta$  sont successivement proportionnels dans la raison de  $A$  à  $B$ , que les nombres  $E, \Xi, Z$  et  $\Theta, O, \Pi, K$  sont aussi successivement proportionnels dans la raison de  $B$  à  $\Gamma$ . Mais  $A$  est à  $B$  comme  $B$  est à  $\Gamma$ ; donc les nombres  $\Delta, \Lambda, E$  sont en même raison que les nombres  $E, \Xi, Z$ , et les nombres  $H, M, N, \Theta$  en même raison que les nombres  $\Theta, O, \Pi, K$ . Mais la quantité des nombres  $\Delta, \Lambda, E$  est égale à la quantité des nombres  $E, \Xi, Z$ ; et la quantité des nombres  $H, M, N, \Theta$  est égale à la quantité des nombres  $\Theta, O, \Pi, K$ ; donc par égalité  $\Delta$  est à  $E$  comme  $E$  est à  $Z$ , et  $H$  est à  $\Theta$  comme  $\Theta$  est à  $K$  (14. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

### 30 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

#### PROPOSITIO XIV.

Εὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσῃ.

Εστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἴστωσαν· οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Si quadratus quadratum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem eorum sint ipsi Γ, Δ, ipse vero Α ipsum Β metiatur; dico et Γ ipsum Δ metiri.

Α, 4. Ε, 8. Β, 16.  
Γ, 2. Δ, 4.

Ο Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἵπαι οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ<sup>2</sup>.

Ἀλλὰ δὴ μετρίτω ὁ Γ τὸν Δ<sup>3</sup>. λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως διζέομεν ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς<sup>4</sup> ἀνάλογόν εἰσιν

Ipse Γ enim ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat; ipsi Α, Ε, Β igitur deinceps proportionales sunt in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Α, Ε, Β deinceps proportionales sunt, et metitur Α ipsum Β; metitur igitur et Α ipsum Ε. Atque est ut Α ad Ε ita Γ ad Δ; ergo metitur et Γ ipsum Δ.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ; dico et Α ipsum Β metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus Α, Ε, Β deinceps proportionales esse in

#### PROPOSITION XIV.

Si un nombre quarré mesure un nombre quarré, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le quarré mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrés Α, Β; que Γ, Δ soient leurs côtés; que Α mesure Β; je dis que Γ mesure Δ.

Car que Γ multipliant Δ fasse Ε, les nombres Α, Ε, Β seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ; et puisque Α, Ε, Β sont successivement proportionnels, et que Α mesure Β, Α mesurera Ε (7. 8). Mais Α est à Ε comme Γ est à Δ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que.

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Εὰν ἄρα τετράγωνος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Α ad Ε, metitur autem Γ ipsum Δ; ergo metitur Α ipsum Ε. Et sunt Α, Ε, Β deinceps proportionales; ergo metitur et Α ipsum Β. Si igitur quadratus, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΙ.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἴαν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσῃ.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἴστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

### PROPOSITIO XV.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, et cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum Β metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius vero Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ metiri.

|       |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|
| Α, 8. | Θ, 16. | Κ, 32. | Β, 64. |
| Ε, 4. | Ζ, 8.  | Η, 16. |        |
|       | Γ, 2.  | Δ, 4.  |        |

Ο Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, καὶ ἴτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας

Etenim Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, et adhuc Γ ipsum Δ multiplicans

Α, Ε, Β sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ. Et puisque Γ est à Δ comme Α est à Ε, et que Γ mesure Δ, Α mesurera Ε. Mais Α, Ε, Β sont successivement proportionnels; donc Α mesure Β; donc, etc.

### PROPOSITION XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le cube mesurera le cube.

Car que le nombre cube Α mesure le nombre cube Β; que Γ soit le côté de Α et Δ le côté de Β; je dis que Γ mesure Δ.

Que Γ se multipliant lui-même fasse Ε; que Δ se multipliant lui-même fasse Η;



### 32 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸν  $Z^3$ , ἑκάτερος δὲ τῶν  $\Gamma$ ,  $\Delta$  τὸν  $Z$  πολλαπλα-  
σιάσας ἑκάτερον τῶν  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$  ποιήτω. Φανερόν δὲ ἴ  
ὅτι οἱ  $E$ ,  $Z$ ,  $H$  καὶ οἱ  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  ἐξῆς ἀνά-  
λογόν εἰσιν ἐν τῇ τοῦ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$  λόγῳ· καὶ  
ἐπεὶ οἱ  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ  
μετρεῖ ὁ  $A$  τὸν  $B$ · μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν  $\Theta$ . Καὶ  
ἔστιν ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Theta$  οὕτως ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$ ·  
μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$ .

ipsum  $Z$ , uterque vero ipsorum  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ipsum  
 $Z$  multiplicans utrumque ipsorum  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$  faciat.  
Evidens utique est ipsos  $E$ ,  $Z$ ,  $H$  et  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$   
deinceps proportionales esse in ipsius  $\Gamma$  ad  $\Delta$   
ratione; et quoniam  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  deinceps  
proportionales sunt, et metitur  $A$  ipsum  $B$ ;  
ergo metitur et ipsum  $\Theta$ . Atque est ut  $A$  ad  $\Theta$   
ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ ; metitur igitur et  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$ .

$A$ , 8.       $\Theta$ , 16.       $\text{Κ}$ , 32.       $B$ , 64.  
          $E$ , 4.       $Z$ , 8.       $H$ , 16.  
          $\Gamma$ , 2.       $\Delta$ , 4.

ΑΛΛὰ δὲ μετρεῖτω ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$ · λέγω ὅτι καὶ  
ὁ  $A$  τὸν  $B$  μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὲ  
δείξομεν ὅτι οἱ  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  ἐξῆς ἀνάλογόν  
εἰσιν ἐν τῇ τοῦ  $\Gamma$  πρὸς τοῦ  $\Delta$  λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ<sup>5</sup>  
ὁ  $\Gamma$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Delta$   
οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Theta$ · καὶ ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Theta$  μετρεῖ  
ὡς τε καὶ τὸν  $B$  μετρεῖ ὁ  $A$ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Sed et metiatur  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$ ; dico et  $A$  ipsum  
 $B$  mensurum esse.

Isdem enim constructis, similiter utique os-  
tendemus  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  deinceps proportionales  
esse in ipsius  $\Gamma$  ad  $\Delta$  ratione. Et quoniam  $\Gamma$   
ipsum  $\Delta$  metitur, estque ut  $\Gamma$  ad  $\Delta$  ita  $A$  ad  $\Theta$ ;  
et  $A$  igitur ipsum  $\Theta$  metitur; quare et ipsum  $B$   
metitur ipse  $A$ . Quod oportebat ostendere.

que  $\Gamma$  multipliant  $\Delta$  fasse  $Z$ , et que les nombres  $\Gamma$ ,  $\Delta$  multipliant  $Z$  fassent  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ .  
Il est évident que les nombres  $E$ ,  $Z$ ,  $H$  et  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  seront successivement pro-  
portionnels dans la raison de  $\Gamma$  à  $\Delta$ ; et puisque  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  sont successivement  
proportionnels, et que  $A$  mesure  $B$ ,  $A$  mesurera  $\Theta$  (7. 8). Mais  $A$  est à  $\Theta$  comme  
 $\Gamma$  est à  $\Delta$ ; donc  $\Gamma$  mesure  $\Delta$  (déf. 20. 7).

Mais que  $\Gamma$  mesure  $\Delta$ , je dis que  $A$  mesurera  $B$ .

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que les  
nombres  $A$ ,  $\Theta$ ,  $\text{Κ}$ ,  $B$  sont successivement proportionnels dans la raison de  $\Gamma$  à  $\Delta$ .  
Et puisque  $\Gamma$  mesure  $\Delta$ , et que  $\Gamma$  est à  $\Delta$  comme  $A$  est à  $\Theta$ ,  $A$  mesurera  $\Theta$ ; donc  $A$   
mesure  $B$ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

PROPOSITIO XVI.

Εάν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Εστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ<sup>2</sup> οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἴστωσαν<sup>3</sup> οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρεῖται ὁ Α τὸν Β· λέγω<sup>4</sup> ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ<sup>5</sup>.

Α, 9.  
Γ, 3.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem ipsorum sint Γ, Δ, et non metiatur Α ipsum Β; dico neque Γ ipsum Δ metiri.

Β, 16.  
Δ, 4.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖται<sup>6</sup> πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, metietur et Α ipsum Β. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metietur.

Non metiatur rursus Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim metitur Α ipsum Β, metietur et Γ ipsum Δ. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si un nombre quarré ne mesure pas un nombre quarré, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le quarré ne mesurera pas le quarré.

Soient les nombres quarrés Α, Β, que Γ, Δ en soient les côtés, et que Α ne mesure pas Β; je dis que Γ ne mesure pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, Α mesurera Β (14. 8). Mais Α ne mesure pas Β; donc Γ ne mesurera pas Δ.

De plus, que Γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, Γ mesurera Δ (14. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

PROPOSITIO XVII.

Εάν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶν μετρήσει· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρᾶν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρίτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἴστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσῃ.

Α, 8.  
Γ, 2.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β non metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius verò Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ non mensurum esse.

Β, 27.  
Δ, 3.

Εἰ γὰρ μετρίῃ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρίῃ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρίτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρίῃ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ ἴδιαι διῆξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, et Α ipsum Β metietur. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metitur.

Sed et non metiatur Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim Α ipsum Β metiatur, et Γ ipsum Δ metietur. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVII.

Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le cube ne mesurera pas le cube.

Que le nombre cube Α ne mesure pas le nombre cube Β, et que Γ soit le côté de Α, et Δ le côté de Β; je dis que Γ ne mesurera pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, Α mesurera Β (15. 8.) Mais Α ne mesure pas Β; donc Γ ne mesure pas Δ.

Mais que Γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, Γ mesurera Δ (15. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

PROPOSITIO XVIII.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι· οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω οὖν ὅτι τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ταυτίσθαι ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον<sup>2</sup>.

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus; et planus ad planum duplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Sint duo numeri similes plani Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ. Et quoniam similes plani sunt qui proportionalia habent latera, est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Dico igitur ipsorum Α, Β unum medium proportionalem esse numerum, et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam Γ ad Ε, vel Δ ad Ζ, hoc est ejus quam latus homologum ad homologum.

Α, 6.    Η, 12.    Β, 24.  
Γ, 2.    Δ, 3.    Ε, 4.    Ζ, 6.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἐπί-

Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ. Et quo-

PROPOSITION XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un nombre moyen proportionnel, et le nombre plan a avec le nombre plan une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient les deux nombres plans semblables Α, Β, que les nombres Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β. Puisque les nombres plans semblables ont leurs côtés proportionnels, Γ est à Δ comme Ε est Ζ (déf. 21. 7); et je dis qu'entre Α, Β il y a un nombre moyen proportionnel, et que Α a avec Β une raison double de celle que Γ a avec Ε, ou de celle que Δ a avec Ζ, c'est-à-dire de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, par permutation Γ est à Ε comme Δ est

### 36 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πιδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει. Ο Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποιήκει· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποιήκει, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Η, Β ἄρα ἐξ ἧς ἀνάλογόν εἰσι τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

niam planus est Α, latera autem ipsius ipsi Γ, Δ; ergo Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Β fecit. Ipse Δ utique ipsum Ε multiplicans ipsum Η faciat. Et quoniam Δ ipsum Γ quidem multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Η fecit; est igitur ut Γ ad Ε ita Α ad Η. Sed ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ; et ut igitur Δ ad Ζ ita Α ad Η. Rursus, quoniam Ε ipsum quidem Δ multiplicans ipsum Η fecit; ipsum vero Ζ multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Η ad Β. Ostensum est autem et ut Δ ad Ζ ita Α ad Η; et ut igitur Α ad Η ita Η ad Β; ergo Α, Η, Β deinceps proportionales sunt; ipsorum Α, Β igitur unus medius proportionalis est numerus.

Α, 6.    Η, 12.    Β, 24.  
Γ, 2.    Δ, 3.    Ε, 4.    Ζ, 6.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτίστιν ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἐξ ἧς

Dico etiam et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ ad Ε vel Δ ad Ζ. Quoniam enim Α, Η, Β deinceps proportionales

à Ζ (13. 7). Et puisque Α est un nombre plan, et que Γ, Δ en sont les côtés, Δ multipliant Γ fera Α. Par la même raison Ε multipliant Ζ fera Β: Que Δ multipliant Ε fasse Η. Puisque Δ multipliant Γ fait Α, et que Δ multipliant Ε fait Η, Γ est à Ε comme Α est à Η (17. 7). Mais Γ est à Ε comme Δ est à Ζ; donc Δ est à Ζ comme Α est à Η. De plus, puisque Ε multipliant Δ fait Η, et que Ε multipliant Ζ fait Β, Δ est à Ζ comme Η est à Β. Mais on a démontré que Δ est à Ζ comme Α est à Η; donc Α est à Η comme Η est à Β; donc Α, Η, Β sont successivement proportionnels; donc il y a un nombre moyen proportionnel entre Α et Β.

Je dis que Α a avec Β une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que Γ a avec Ε ou de celle que Δ a avec Ζ. Car puisque les nombres Α, Η, Β sont successivement proportionnels, Α a avec Β

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 37

ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sunt, A ad B duplam rationem habet ejus quam ad H. Atque est ut A ad H ita et Γ ad E et Δ ad Z; et A igitur ad B duplam rationem habet ejus quam et Γ ad E vel Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μίσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὁμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

### PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt numeri; et solidus ad similem solidum triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| Α, 30. | Ν, 60. | Ζ, 120. | Β, 240. |
|        | Κ, 6.  | Μ, 12.  | Λ, 24.  |
| Γ, 2.  | Δ, 3.  | Ε, 5.   | Ζ, 4.   |
|        |        | Η, 6.   | Θ, 10.  |

Ἐστώσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστώσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς

Sint duo similes solidi A, B, et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, Ε, ipsius vero B ipsi Ζ, Η, Θ. Et quoniam similes solidi sunt qui proportionalia habent latera; est igitur ut Γ quidem ad

une raison doublée de celle que A a avec H. Mais A est à H comme Γ est à Ε, et comme Δ est à Ζ; donc A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Ε, ou de celle que Δ a avec Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XIX.

Entre deux nombres solides semblables il y a deux nombres moyens proportionnels; et un nombre solide a avec un nombre solide semblable une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient A, B deux nombres solides semblables; que Γ, Δ, Ε soient les côtés de A, et Ζ, Η, Θ les côtés de B. Puisque les nombres solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés homologues proportionnels (déf. 21. 7), Γ est à Δ comme Ζ à Η,

38 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὴν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὥς  
 δι' ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· Αἰτῶ  
 ὅτι τῶν Α, Β δύο μίσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν  
 ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον  
 ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η  
 καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

**Δ ita Z ad H, ut vero Δ ad E ita H ad Θ. Dico  
inter ipsos A, B duos medios proportionales  
cadere numeros, et A ad B triplam rationem  
habere ejus quam Γ ad Z et Δ ad H et adhuc  
E ad Θ.**

A, 30.      N, 60.      Z, 120.      B, 240.  
                  K, 6.      M, 12.      A, 24.  
 Г, 2.      Δ, 3.      E, 5.      Z, 4.      H, 6.      Θ, 10.

Ο Γ γὰρ τὸν μὲν<sup>2</sup> Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιεῖτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῇ αὐτῇ λόγῃ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ· οἱ Κ, Α ἄρα<sup>3</sup> ὅμοιοι ἐπιπίπτει εἰς ἀριθμοί· τῶν Κ, Α ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. Ἐστω ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ ὡς ἐν τῇ πρὸ τούτου θεωρήματι ἰδιόχθ<sup>4</sup>. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποιήκει, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποιήκει· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. Ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως<sup>5</sup> ὁ Μ πρὸς τὸν Λ· οἱ Κ, Μ, Α ἄρα ἐξῆς εἰσὶν<sup>6</sup> ἀνάλογον ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ

Etenim  $\Gamma$  ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $\mathbf{K}$  faciat, ipse vero  $\mathbf{Z}$  ipsum  $\mathbf{H}$  multiplicans ipsum  $\mathbf{A}$  faciat. Et quoniam  $\Gamma$ ,  $\Delta$  cum ipsis  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{H}$  in eadem ratione sunt, et ex quidem ipsis  $\Gamma$ ,  $\Delta$  est  $\mathbf{K}$ , ex ipsis vero  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{H}$  ipse  $\mathbf{A}$ ; ergo  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}$  similes plani sunt numeri; ipsorum  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{A}$  igitur unus medius proportionalis est numerus. Sit  $\mathbf{M}$ ; ergo  $\mathbf{M}$  est ex ipsis  $\Delta$ ,  $\mathbf{Z}$  ut in præcedenti theoremate ostensum est. Et quoniam  $\Delta$  ipsum quidem  $\Gamma$  multiplicans ipsum  $\mathbf{K}$  fecit, ipsum vero  $\mathbf{Z}$  multiplicans ipsum  $\mathbf{M}$  fecit; est igitur ut  $\Gamma$  ad  $\mathbf{Z}$  ita  $\mathbf{K}$  ad  $\mathbf{M}$ . Sed ut  $\mathbf{K}$  ad  $\mathbf{M}$  ita  $\mathbf{M}$  ad  $\mathbf{A}$ ; ipsi  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$  igitur deinceps sunt proportionales in ipsius  $\Gamma$  ad  $\mathbf{Z}$  ratione. Et quoniam est ut  $\Gamma$

et  $\Delta$  est à  $E$  comme  $H$  est à  $\Theta$ ; je dis qu'entre les nombres  $A, B$  il y a deux moyens proportionnels, et que  $A$  a avec  $B$  une raison triple de celle que  $r$  a avec  $z$ , de celle que  $\Delta$  a avec  $H$ , et de celle que  $E$  a avec  $\Theta$ .

Car que  $\Gamma$  multipliant  $\Delta$  fasse  $\kappa$ , et que  $Z$  multipliant  $H$  fasse  $\Lambda$ . Puisque  $\Gamma$ ,  $\Delta$  sont en même raison que  $Z$ ,  $H$ ; que  $\kappa$  est le produit de  $\Gamma$  par  $\Delta$ , et  $\Lambda$  le produit de  $Z$  par  $H$ , les nombres  $\kappa$ ,  $\Lambda$  sont des nombres plans semblables; il y a donc entre  $\kappa$  et  $\Lambda$  un nombre moyen proportionnel (18. 8). Qu'il soit  $M$ ; le nombre  $M$  sera le produit de  $\Delta$  par  $Z$ , ainsi qu'on l'a démontré dans le théorème précédent. Puisque  $\Delta$  multipliant  $\Gamma$  fait  $\kappa$ , et que  $\Delta$  multipliant  $Z$  fait  $M$ , le nombre  $\Gamma$  est à  $Z$  comme  $\kappa$  est à  $M$  (17. 7). Mais  $\kappa$  est à  $M$  comme  $M$  est à  $\Lambda$ ; les nombres  $\kappa$ ,  $M$ ,  $\Lambda$  sont donc successivement proportionnels dans la raison de

λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἡ ἀλλὰ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἡ ἀλλὰ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ<sup>7</sup>. οἱ Κ, Μ, Α ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον<sup>8</sup> ἐν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ<sup>9</sup> καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ<sup>10</sup>. Ἐκάτερος δὲ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ στερεοὶ ἔστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἔστιν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Θ τὸν Α πολλαπλασιάσας<sup>11</sup> τὸν Β πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἐν τῷ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ<sup>12</sup> ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν,

ad Δ ita Z ad H; alterne igitur est ut Γ ad Z ita Δ ad H. Rursus, quoniam est ut Δ ad Ε ita Η ad Θ; alterne igitur est ut Δ ad Η ita Ε ad Θ; ipsi Κ, Μ, Α igitur deinceps sunt proportionales et in ipsius Γ ad Ζ ratione et in ipsius Δ ad Η et adhuc in ipsius Ε ad Θ. Uterque autem ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrumque ipsorum Ν, Ξ faciat. Et quoniam solidus est Α, latera autem ipsius sunt Γ, Δ, Ε; ergo Ε ipsum ex Γ, Δ multiplicans ipsum Α fecit; ipse autem ex Γ, Δ est Κ; ergo Ε ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Θ ipsum Α multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Ε ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit; sed quidem et ipsum Μ multiplicans ipsum Ν fecit; est igitur ut Κ ad Μ ita Α ad Ν. Ut autem Κ ad Μ ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ; et ut igitur Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita Α ad Ν. Rursus, quoniam uterque ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrum-

Γ à Ζ. Et puisque Γ est à Δ comme Ζ est à Η, par permutation Γ est à Ζ comme Δ est à Η (13. 7). De plus, puisque Δ est à Ε comme Η est à Θ, par permutation Δ est à Η comme Ε est à Θ (13. 7); les nombres Κ, Μ, Α sont donc successivement proportionnels dans la raison de Γ à Ζ, de Δ à Η, et de Ε à Θ. Que les nombres Ε, Θ multipliant Μ fassent Ν, Ξ. Puisque Α est un nombre solide, et que ses côtés sont Γ, Δ, Ε, le nombre Ε multipliant le produit de Γ par Δ fera Α; mais le produit de Γ par Δ est Κ; donc Ε multipliant Κ fait Α. Par la même raison, Θ multipliant Α fait Β. Et puisque Ε multipliant Κ fait Α, et que Ε multipliant Μ fait Ν, Κ est à Μ comme Α est à Ν (17. 7). Mais Κ est à Μ comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Γ est à Ζ, et Δ à Η, et Ε à Θ, comme Α est à Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Θ multipliant Μ font Ν, Ξ, le nombre Ε est



## 40 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ξ πεποίνηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ΑΛΛ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς<sup>13</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε<sup>14</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίνηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίνηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ΑΛΛ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς ἑξημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| Α, 30. | Ν, 60. | Ξ, 120. | Β, 240. |
|        | Κ, 6.  | Μ, 12.  | Α, 24.  |
| Γ, 2.  | Δ, 3.  | Ε, 5.   | Ζ, 4.   |
|        |        | Η, 6.   | Θ, 10.  |

Λέγω ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς

que ipsorum Ν, Ξ fecit; est igitur ut Ε ad Θ ita Ν ad Ξ. Sed ut Ε ad Θ ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η; est igitur ut Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita et Α ad Ν et Ν ad Ξ. Rursus, quoniam Θ ipsum Μ multiplicans ipsum Ξ fecit, sed etiam et ipsum Α multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Μ ad Α ita Ξ ad Β. Sed ut Μ ad Α ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ; et igitur ut Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita non solum Ε ad Β sed et Α ad Ν et Ν ad Ξ; ipsi Α, Ν, Ξ, Β igitur deinceps sunt proportionales in dictis laterum rationibus.

Dico et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam habet Γ numerus ad Ζ, vel Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ. Quoniam enim quatuor numeri deinceps proportionales sunt Α, Ν, Ξ,

à Θ comme Ν est à Ξ. Mais Ε est à Θ comme Γ est à Ζ, et comme Δ est à Η; donc Γ est à Ζ, Δ à Η, et Ε à Θ, comme Α est à Ν, et comme Ν est à Ξ. De plus, puisque Θ multipliant Μ fait Ξ, et que Θ multipliant Α fait Β, Μ est à Α comme Ξ est à Β. Mais Μ est à Α comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Γ est à Ζ, Δ à Η, et Ε à Θ, non seulement comme Ξ est à Β, mais encore comme Α est à Ν, et comme Ν est à Ξ; les nombres Α, Ν, Ξ, Β sont donc successivement proportionnels dans lesdites raisons des côtés.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Ζ, ou de celle que Δ a avec Η, et encore de celle que Ε a avec Θ. Car puisque

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 41

ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ΑΛΛ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως εἰδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

B; ergo A ad B triplam rationem habet ejus quam A ad N. Sed ut A ad N ita ostensum est et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ; et Α igitur ad Β triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ numerus ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἴσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτειτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

### PROPOSITIO XX.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β unus medius proportionalis cadat numerus Γ; dico ipsos Α, Β similes planos esse numeros.

|       |        |             |
|-------|--------|-------------|
| Α, 8. | Γ, 12. | Β, 18.      |
| Δ, 2. | Ε, 3.  | Ζ, 4. Η, 6. |

Εἰλήφθωσαν γὰρ<sup>2</sup> ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἴσων

Sumantur enim Δ, Ε minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ;

les quatre nombres Α, Ν, Ξ, Β sont successivement proportionnels, le nombre Α a avec Β une raison triple de celle que Α a avec Ν. Mais on a démontré que Α est à Ν comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Α a avec Β une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Ζ, de celle que Δ a avec Η, et de celle que Ε a avec Θ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres il tombe un nombre moyen proportionnel, ces nombres seront des plans semblables.

Car qu'entre les deux nombres Α, Β il tombe un moyen proportionnel γ; je dis que les nombres Α, Β sont des plans semblables.

Car prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec  
II.

## 42 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δὴ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β<sup>3</sup>. ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. Ὡσάκεις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν<sup>4</sup>. ὥς τε ὁ Α ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, Ε ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὴν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Γ, Β· ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. Ὡσάκεις δὲ<sup>5</sup> ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἢ τῷ Η· καὶ<sup>6</sup> ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ

est igitur Δ ad Ε ita Α ad Γ. Ut autem Α ad Γ ita Γ ad Β; æqualiter igitur Δ ipsum Α metitur ac Ε ipsum Γ. Quoties autem Δ ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ζ; ergo Ζ ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum autem Ε multiplians ipsum Γ fecit; quare Α planus est, latera vero ipsius Δ, Ζ. Rursus, quoniam Δ, Ε minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Γ, Β; æqualiter igitur Δ ipsum Γ metitur ac Ε ipsum Β. Quoties autem Ε ipsum Β metitur, tot unitates sint in Η; ergo Ε ipsum

Α, 8. Γ, 12. Β, 18.  
Δ, 2. Ε, 3. Ζ, 4. Η, 6.

κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει· ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε, Η· οἱ Α, Β ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς

Β metitur per unitates quæ in Η; ergo Η ipsum Ε multiplicans ipsum Β fecit; ergo Β planus est, latera vero ipsius sunt ipsi Ε, Η; ergo Α, Β plani sunt numeri. Dico etiam et similes. Quoniam enim Ζ ipsum quidem Δ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Γ fecit; æqualiter igitur Δ ipsum Α metitur ac Ε ipsum Γ; est igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Γ, hoc est

Α, Γ (35. 7), et qu'ils soient Δ, Ε. Le nombre Δ sera à Ε comme Α est à Γ. Mais Α est à Γ comme Γ est à Β; donc Δ mesure Α autant de fois que Ε mesure Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Ζ que Δ mesure de fois Α. Le nombre Ζ multipliant Δ fera Α, et Ζ multipliant Ε fera Γ; donc Α est un nombre plan, dont les côtés sont Δ, Ζ. De plus, puisque les nombres Δ, Ε sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Β, le nombre Δ mesurera Γ autant de fois que Ε mesure Β. Qu'il y ait autant d'unités dans Η que Ε mesure de fois Β; le nombre Ε mesurera Β par les unités qui sont dans Η, et le nombre Η multipliant Ε fera Β; donc Β est un nombre plan, dont les côtés sont Ε, Η; donc Α, Β sont des nombres plans. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car, puisque Ζ multipliant Δ fait Α, et que Ζ multipliant Ε fait Γ, Δ mesure Α autant de fois que Ε mesure Γ; donc Δ est à Ε comme Α est à Γ, c'est-à-dire comme Γ est à Β. De plus, puisque Ε multipliant

τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Εἰκάτερον τῶν Ζ, Η  
πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν ἔστιν  
ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β.  
Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε·  
καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν  
Η. Καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε  
πρὸς τὸν Η<sup>8</sup>. οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθ-  
μοὶ εἰσιν, αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν<sup>9</sup> ἀνάλογόν  
εἰσιν. Ὅπερ ἴδι διείξαι.

Γ ad Β. Rursus, quoniam Ε utrumque ipsorum  
Ζ, Η multiplicans ipsos Γ, Β fecit, est igitur ut  
Ζ ad Η ita Γ ad Β. Ut autem Γ ad Β ita Δ ad Ε;  
et igitur ut Δ ad Ε ita Ζ ad Η. Et alterne ut Δ  
ad Ζ ita Ε ad Η; ergo Α, Β similes plani nu-  
meri sunt, etenim ipsorum latera sunt propor-  
tionalia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

PROPOSITIO XXI.

Εὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπί-  
πτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον  
ἐμπιπτεύωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ· λίγω ὅτι οἱ Α, Β  
ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν.

Si inter duos numeros duo medii proportio-  
nales cadant numeri, similes solidi sunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β duo medii  
proportionales cadant numeri Γ, Δ; dico ipsos  
Α, Β similes solidos esse.

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| Α, 24. | Γ, 72. | Δ, 216. | Β, 648. |
| Ε, 1.  | Ζ, 3.  | Η, 9.   |         |
| Θ, 1.  | Κ, 1.  | Ν, 24.  | Λ, 3.   |
|        |        |         | Μ, 3.   |
|        |        |         | Ξ, 72.  |

Εἰληφθωσαν γὰρ<sup>2</sup> ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν  
αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, τρεῖς<sup>3</sup> οἱ

Sumantur enim tres minimi numeri ipsorum  
eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ,

Ζ, Η fait Γ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Γ est à Β (18. 7). Mais Γ est à Β comme  
Δ est à Ε; donc Δ est à Ε comme Ζ est à Η. Et par permutation Δ est à Ζ comme  
Ε est à Η (13. 7.) Donc Α, Β sont des nombres plans semblables (déf. 21. 7),  
puisque leurs côtés sont proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Si entre deux nombres il tombe deux nombres moyens proportionnels, ces  
nombres seront des solides semblables.

Qu'entre les nombres Α, Β il tombe deux nombres moyens proportionnels  
Γ, Δ; je dis que les nombres Α, Β sont des solides semblables.

Prenons les trois plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

#### 44 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί<sup>4</sup>. Ἐστῶσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ· φανερόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ προ<sup>5</sup> τούτου ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον<sup>6</sup> ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ· καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ<sup>7</sup>. διῖσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς

Δ, scilicet ipsi Ε, Ζ, Η; ergo extremi eorum Ε, Η primi inter se sunt. Et quoniam inter Ε, Η unus medius proportionalis cecidit numerus Ζ; ergo Ε, Η numeri similes plani sunt numeri. Sint igitur ipsius quidem Ε latera ipsi Θ, Κ, ipsius vero Η ipsi Λ, Μ; evidens igitur est ex antecedente Ε, Ζ, Η deinceps esse proportionales in ipsius Θ ad Λ ratione et in ipsius Κ ad Μ. Et quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ; et est æqualis multitudo ipsorum Ε, Ζ, Η multitudini ipsorum Α, Γ, Δ; ex æquo igitur est

|        |        |         |                    |
|--------|--------|---------|--------------------|
| Α, 24. | Γ, 72. | Δ, 216. | Β, 648.            |
| Ε, 1.  | Ζ, 3.  | Η, 9.   |                    |
| Θ, 1.  | Κ, 1.  | Ν, 24.  | Α, 3. Μ, 3. Ξ, 72. |

τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. Οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. Οσάκεις δὲ

ut Ε ad Η ita Α ad Δ. Ipsi autem Ε, Η primi, primi vero et minimi, minimi autem metiuntur ipsos æqualiter eandem rationem habentes cum ipsis, major maiorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Ε ipsum Α metitur ac Η ipsum Δ. Quoties

Α, Γ, Δ (35. 7); qu'ils soient Ε, Ζ, Η; leurs extrêmes Ε, Η seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque entre Ε, Η il tombe un moyen proportionnel Ζ, les nombres Ε, Η seront des nombres plans semblables (20. 8). Que Θ, Κ soient les côtés de Ε, et Λ, Μ les côtés de Η; il est évident, d'après ce qui précède, que les nombres Ε, Ζ, Η sont successivement proportionnels dans la raison de Θ à Λ et de Κ à Μ. Et puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Ε, Ζ, Η est égale à la quantité des nombres Α, Γ, Δ, par égalité Ε est à Η comme Α est à Δ (14. 7). Mais les nombres Ε, Η sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); le nombre Ε mesure donc le nombre Α autant de fois que Η mesure Δ.

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 44

ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκεν. Ο δὲ Ε ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε· στερεὸς ἄρα ἔστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Γ, Δ, Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. Οσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Γ<sup>8</sup> μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ξ. Καὶ ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκεν. Ο δὲ Η ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Α, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Α, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκε<sup>10</sup>. στερεὸς ἄρα ἔστιν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ<sup>11</sup> εἰσιν οἱ Α, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοὶ εἰσι. Λέγω δὴ<sup>12</sup> ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πιποίηκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτίστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως<sup>13</sup> ὁ Θ πρὸς τὸν Α καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ,

autem Ε ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ν; ergo Ν ipsum Ε multiplicans ipsum Α fecit. Est autem Ε ex ipsis Θ, Κ; ergo Ν ipsum ex Θ, Κ multiplicans ipsum Α fecit; solidus igitur est Α, latera autem ipsius sunt Θ, Κ, Ν. Rursus, quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Γ, Δ, Β; æqualiter igitur Ε ipsum Γ metitur ac Η ipsum Β. Quoties autem Ε ipsum Γ metitur, tot unitates sint in Ξ; ergo Η ipsum Β metitur per unitates quæ in Ξ; ergo Ξ ipsum Η multiplicans ipsum Β fecit. Est autem Η ex Α, Μ; ergo Ξ ipsum ex Α, Μ multiplicans ipsum Β fecit; solidus igitur est Β; latera autem ipsius sunt Α, Μ, Ξ; ergo Α, Β solidi sunt. Dico etiam et similes. Quoniam enim Ν, Ξ ipsum Ε multiplicantes ipsos Α, Γ fecerunt; est igitur ut Ν ad Ξ ita Α ad Γ, hoc est Ε ad Ζ. Sed ut Ε ad Ζ ita Θ ad Α et Κ ad Μ; et ut igitur Θ ad Α ita Κ ad Μ et Ν ad Ξ. Et sunt quidem Θ, Κ, Ν la-

Qu'il y ait autant d'unités dans Ν que Ε mesure de fois Α; le nombre Ν multipliant Ε fera Α. Mais Ε est le produit de Θ par Κ; donc le nombre Ν multipliant le produit de Θ par Κ fait Α; donc Α est un nombre solide, dont les côtés sont Θ, Κ, Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Δ, Β, le nombre Ε mesure Γ autant de fois que Η mesure Β. Qu'il y ait autant d'unités dans Ξ que Ε mesure de fois Γ; le nombre Η mesurera Β par les unités qui sont dans Ξ; donc Ξ multipliant Η fera Β. Mais Η est le produit de Α par Μ; donc Ξ multipliant le produit de Α par Μ fera Β; donc Β est un nombre solide, dont les côtés sont Α, Μ, Ξ; donc Α, Β sont des nombres solides. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car puisque les nombres Ν, Ξ multipliant Ε font Α, Γ, le nombre Ν sera à Ξ comme Α est à Γ, c'est-à-dire comme Ε est à Ζ (17. 7). Mais Ε est à Ζ comme Θ est à Α, et comme Κ est à Μ; donc Θ est à Α comme Κ est à Μ, et comme Ν est à Ξ. Mais Θ, Κ, Ν

## 46 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ν πλευρὰ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Α, Μ πλευρὰ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεικνύειν.

tera ipsius Α, ipsi vero Ξ, Α, Μ latera ipsius Β; ergo Α, Β similes solidi sunt. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

### PROPOSITIO XXII.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾦ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἴσται.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, primus autem quadratus sit, et tertius quadratus erit.

Εστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Sint tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, primus autem Α quadratus sit; dico et tertium Γ quadratum esse.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

Επεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι. Τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεικνύειν.

Quoniam enim ipsorum Α, Γ unus medius proportionalis est numerus Β; ergo Α, Γ similes solidi sunt. Quadratus autem Α; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

sont les côtés de Α, et Ξ, Α, Μ les côtés de Β; donc les nombres Α, Β sont des solides semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXII.

Si trois nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un carré, le troisième sera un carré.

Soient Α, Β, Γ trois nombres successivement proportionnels, et que le premier Α soit un carré; je dis que le troisième Γ est un carré.

Puisque entre les nombres Α, Γ il y a un moyen proportionnel Β, les nombres Α, Γ sont des plans semblables (20.8). Mais Α est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

1. 2. 4

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾦσιν,  
ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾦ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἴσται.

Si quatuor numeri deinceps proportionales  
sint, primus autem cubus sit, et quartus cubus  
erit.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ  
Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἴστω· λίγω ὅτι  
καὶ ὁ Δ κύβος ἴστί.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales  
Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α cubus sit; dico et  
Δ cubum esse.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν  
ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ  
ἀριθμοί. Κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ.  
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Δ duo medii  
proportionales sunt numeri Β, Γ; ergo Α, Δ  
similes sunt solidi numeri. Cubus autem Α; cu-  
bus igitur et Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un cube, le quatrième sera un cube.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres successivement proportionnels, et que Α soit un cube; je dis que Δ est un cube.

Car puisque entre Α, Δ il y a deux nombres moyens proportionnels Β, Γ, les nombres Α, Δ sont des solides semblables (21. 8). Mais Α est un nombre cube; donc Δ est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.



# 48 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχέτωσαν ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α τετράγωνος ἴστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Β τετράγωνός ἐστιν.

Α, 4.  
Γ, 16.

## PROPOSITIO XXIV.

Si duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus sit, et secundus quadratus erit.

Duo enim numeri Α, Β inter se rationem habeant quam quadratus numerus Γ ad quadratum numerum Δ, ipse autem Α quadratus sit; dico et Β quadratum esse.

Β, 9.  
Δ, 36.

Επεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἴστιν ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἴστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ὅπρι εἶδει διέξαι.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati sunt; ergo Γ, Δ similes plani sunt; inter Γ, Δ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Γ ad Δ ita Α ad Β; et inter Α, Β igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est Α quadratus; et Β igitur quadratus est. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XXIV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et si le premier est un quarré, le second sera un quarré.

Car que les deux nombres Α, Β ayent entr'eux la même raison que le nombre quarré Γ a avec le nombre quarré Δ, et que Α soit un quarré; je dis que Β est un quarré.

Car puisque Γ, Δ sont des quarrés, les nombres Γ, Δ sont des plans semblables; il tombe donc entre Γ, Δ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; il tombe donc aussi un nombre moyen proportionnel entre Α et Β (8. 8). Mais Α est un quarré; donc Β est un quarré (22. 8.) Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ  $A, B$  πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχίτωσαν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ  $\Gamma$  πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν  $\Delta$ , κύβος δὲ ἴστω ὁ  $A$ . λέγω' ὅτι καὶ ὁ  $B$  κύβος ἴστί.

Si duo numeri inter se rationem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit.

Duo enim numeri  $A, B$  inter se rationem habeant quam cubus numerus  $\Gamma$  ad cubum numerum  $\Delta$ , cubus autem sit  $A$ ; dico et  $B$  cubum esse.

$A, 8.$        $B, 12.$        $Z, 18.$        $B, 27.$   
 $\Gamma, 64.$                                        $\Delta, 216.$

Ἐπεὶ γὰρ οἱ  $\Gamma, \Delta$  κύβοι εἰσιν, οἱ  $\Gamma, \Delta$  ὅμοιοι στεριοὶ εἰσι τῶν  $\Gamma, \Delta$  ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ὅσοι δὲ εἰς τοὺς  $\Gamma, \Delta$  μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσούτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ὥς τε καὶ τῶν  $A, B$  δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπίπτέτωσαν οἱ

Quoniam enim  $\Gamma, \Delta$  cubi sunt, ipsi  $\Gamma, \Delta$  similes solidi sunt; inter  $\Gamma, \Delta$  igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Quot autem inter  $\Gamma, \Delta$  in continuum proportionales cadunt numeri, tot et inter eos eandem rationem habentes cum ipsis; quare et inter  $A, B$  duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant  $E, Z$ . Quo-

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube, et si le premier est un cube, le second sera aussi un cube.

Car que les nombres  $A, B$  aient entr'eux la même raison que le nombre cube  $\Gamma$  a avec le nombre cube  $\Delta$ , et que  $A$  soit un cube; je dis que  $B$  est aussi un cube.

Car puisque  $\Gamma, \Delta$  sont des cubes, les nombres  $\Gamma, \Delta$  sont des solides semblables; il tombe donc entre  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais autant il tombe entre  $\Gamma$  et  $\Delta$  de nombres successivement proportionnels, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison avec eux (8. 8); il tombera donc entre  $A$  et  $B$  deux nombres moyens proportionnels. Que ces nombres soient  $E, Z$ .

## 50 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ε, Ζ. Ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Ε, Ζ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

niam igitur quatuor numeri Α, Ε, Ζ, Β deinceps proportionales sunt, atque est cubus Α; cubus igitur et Β. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

### PROPOSITIO XXVI.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐστώσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λήγῃ ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Similes plani numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri Α, Β; dico Α ad Β rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

|       |        |        |
|-------|--------|--------|
| Α, 6. | Γ, 12. | Β, 24. |
| Δ, 1. | Ε, 2.  | Ζ, 4.  |

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐμπιπτεύω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Β, οἱ Δ, Ε, Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Quoniam enim Α, Β plani sunt; inter Α, Β igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Cadat, et sit Γ, et sumantur minimi numeri Δ, Ε, Ζ ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Β; extremi igitur eorum Δ, Ζ quadrati sunt. Et quoniam est ut Δ ad Ζ ita Α ad Β,

Puisque les quatre nombres Α, Ε, Ζ, Β sont successivement proportionnels, et que Α est un cube, le nombre Β sera aussi un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXVI.

Les nombres qui sont des plans semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Soient Α, Β des nombres plans semblables; je dis que Α a avec Β la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Car puisque les nombres Α, Β sont des plans, il tombe un nombre moyen proportionnel entre Α et Β (18. 8). Qu'il en tombe un, et qu'il soit Γ. Prenons les plus petits nombres qui ont la même raison avec Α, Γ, Β (35. 7), et qu'ils soient Δ, Ε, Ζ; leurs extrêmes Δ, Ζ seront des quarrés (cor. 2. 8). Et puisque Δ est à Ζ

## LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 51

Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καὶ εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et sunt Δ, Ζ quadrati; ergo Α ad Β rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐστώσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

### PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri Α, Β; dico Α ad Β rationem habere quam cubus numerus ad cubum numerum.

|        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| Α, 16. | Γ, 24. | Δ, 36. | Β, 54. |
| Ε, 8.  | Ζ, 12. | Η, 18. | Θ, 27. |

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπίπτειν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε,

Quoniam enim Α, Β similes solidi sunt; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant Γ, Δ, et sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, æquales ipsis multitudine, Ε, Ζ,

comme Α est à Β, et que Δ, Ζ sont des quarrés, le nombre Α aura avec le nombre Β la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXVII.

Les nombres solides semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Soient Α, Β des nombres solides semblables; je dis que Α a avec Β la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Car puisque les nombres Α, Β sont des solides semblables, il tombe deux moyens proportionnels entre Α, Β (19. 8). Qu'ils soient Γ, Δ. Prenons en même quantité les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (2. 8); qu'ils soient Ε, Ζ, Η, Θ; leurs extrêmes Ε, Θ seront des cubes

## 52 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Z, H, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ E, Θ κύβοι εἰσὶ.  
 Καὶ ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν  
 B· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν κύβος  
 ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

H, Θ; ergo extremi eorum E, Θ cubi sunt.  
 Atque est ut E ad Θ ita A ad B; ergo A ad B  
 rationem habet quam cubus numerus ad cubum  
 numerum. Quod oportebat ostendere.

(cor. 2. 8). Mais E est à Θ comme A est à B; donc A a avec B la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU HUITIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R N O N U S.

---

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Εὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Α, 6.      Β, 54.  
Δ, 36.      Γ, 324.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν

#### PROPOSITIO I.

Si duo similes plani numeri se se multiplicantes faciunt aliquem, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri Α, Β, et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ quadratum esse.

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Quoniam igitur

## LE NEUVIÈME LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### PROPOSITION I.

Si deux nombres plans semblables se multipliant l'un l'autre produisent un nombre, le produit sera un carré.

Soient Α, Β deux nombres plans semblables, et que Α multipliant Β fasse Γ; je dis que Γ est un carré.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un carré.

## 54 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ Α ἑαυτὸν μὲν<sup>2</sup> πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Εὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ<sup>3</sup>

A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam A, B similes plani sunt numeri; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Si autem inter duos numeros in continuum pro-

A, 6.      B, 54.  
Δ, 36.     Γ, 324.

κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥς τε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Οὗτοι ἴδιαι δεικνύονται.

portionales cadunt numeri, quot inter ipsos cadunt totidem et inter eos eandem rationem habentes; quare et inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est quadratus Δ; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

### PROPOSITIO II.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί<sup>1</sup>.

Si duo numeri se se multiplicantes faciunt quadratum, similes plani sunt numeri.

Puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres A, B sont des plans semblables, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si entre deux nombres il tombe des nombres successivement proportionnels, autant il en tombe entre ces deux nombres, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison (8. 8); il tombe donc entre Δ et Γ un nombre moyen proportionnel. Mais Δ est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION II.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un carré, ces nombres seront des plans semblables.

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 55

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ  $A, B$ , καὶ ὁ  $A$  τὸν  $B$  πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν  $\Gamma$  ποιείτω<sup>2</sup>. λέγω ὅτι οἱ  $A, B$  ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

Sint duo numeri  $A, B$ , et  $A$  ipsum  $B$  multiplicans quadratum ipsum  $\Gamma$  faciat; dico  $A, B$  similes planos esse numeros.

$A, 3. \quad B, 12.$   
 $\Delta, 9. \quad \Gamma, 36.$

Ὁ γὰρ  $A$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιείτω<sup>3</sup>. ὁ  $\Delta$  ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἔπει<sup>4</sup> ὁ  $A$  ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  ποιήκει, τὸν δὲ  $B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιήκειν<sup>5</sup> ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως<sup>3</sup> ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Καὶ ἔπει<sup>4</sup> ὁ  $\Delta$  τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ  $\Gamma$ . οἱ  $\Delta, \Gamma$  ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν τῶν  $\Delta, \Gamma$  ἄρα εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός<sup>4</sup>. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $\Gamma$  οὕτως ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$ . καὶ τῶν  $A, B$  ἄρα εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Εἰ δὲ δύο ἀριθμῶν εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί. οἱ ἄρα  $A, B$  ὅμοιοι εἰσιν ἐπίπεδοι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipse enim  $A$  se se multiplicans ipsum  $\Delta$  faciat; ergo  $\Delta$  quadratus est. Et quoniam  $A$  se ipsum quidem multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit; ipsum vero  $B$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; est igitur ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Delta$  ad  $\Gamma$ . Et quoniam  $\Delta$  quadratus est, sed et  $\Gamma$ ; ergo  $\Delta, \Gamma$  similes plani sunt; inter  $\Delta, \Gamma$  igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut  $\Delta$  ad  $\Gamma$  ita  $A$  ad  $B$ ; et inter  $A, B$  igitur unus medius proportionalis cadit. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadit, similes plani sunt numeri; ergo  $A, B$  similes sunt plani. Quod oportebat ostendere.

Soient les deux nombres  $A, B$ , et que  $A$  multipliant  $B$  fasse le carré  $\Gamma$ ; je dis que les nombres  $A, B$  sont des plans semblables.

Car que  $A$  se multipliant lui-même fasse  $\Delta$ ; le nombre  $\Delta$  sera un carré. Et puisque  $A$  se multipliant lui-même fait  $\Delta$ , et que  $A$  multipliant  $B$  fait  $\Gamma$ , le nombre  $A$  est à  $B$  comme  $\Delta$  est à  $\Gamma$  (17. 7). Et puisque  $\Delta$  est un carré ainsi que  $\Gamma$ , les nombres  $\Delta, \Gamma$  sont des plans semblables; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre  $\Delta$  et  $\Gamma$  (8. 8). Mais  $\Delta$  est à  $\Gamma$  comme  $A$  est à  $B$ ; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre  $A$  et  $B$  (18. 8). Mais si un nombre moyen proportionnel tombe entre deux nombres, ces nombres sont des plans semblables (20. 8); donc les nombres  $A, B$  sont plans et semblables. Ce qu'il fallait démontrer.



## 56 LE NEUVIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

### PROPOSITIO III.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans ipsum B faciat; dico B cubum esse.

A, 8.

Δ, 4.

Γ, 2.

B, 64.

1.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω· φανερόν δὲ ἐστίν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας·

Sumatur enim ipsius A latus Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; manifestum igitur est Γ ipsum Δ multiplicans ipsum A facere. Et quoniam Γ se ipsum multiplicantem ipsum Δ fecit; ergo Γ ipsum Δ metitur per unitates quæ in ipso. Sed etiam et unitas ipsum Γ metitur per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit; ergo Δ ipsum Α metitur per unitates quæ in Γ. Metitur autem et unitas ipsum Γ per unitates quæ in ipso; est

### PROPOSITION III.

Si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A se multipliant lui-même fasse B; je dis que B est un cube.

Car prenons le côté Γ de A, et que Γ se multipliant lui-même fasse Δ; il est évident que Γ multipliant Δ fera A (déf. 19. 7). Et puisque Γ se multipliant lui-même a fait Δ, le nombre Γ mesurera Δ par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Γ comme Γ est à Δ (déf. 20. 7.) De plus, puisque Γ multipliant Δ a fait A, le nombre Δ mesure A par les unités qui sont en Γ. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως<sup>2</sup> ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Αλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως<sup>3</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἐμπίπτουσιν<sup>5</sup>· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν<sup>6</sup> ἀριθμοί. Εἰ δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ἦ, καὶ ὁ δεύτερος<sup>7</sup> κύβος ἔσται. Καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἔστί. Οπρὶν εἶδει δεῖξαι.

igitur ut unitas ad Γ ita Δ ad Α. Sed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ; et ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ, et Δ ad Α; ergo inter unitatem et numerum Α duo medii proportionales in continuum cadunt numeri Γ, Δ. Rursus, quoniam Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo Α ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum Α per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Α ita Α ad Β. Sed inter unitatem et Α duo medii proportionales numeri cadunt; et inter Α, Β igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Si autem inter duos numeros duo medii proportionales cadunt, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit. Atque est Α cubus; et Β igitur cubus est. Quod oportebat ostendere.

en lui; l'unité est donc à γ comme Δ est à Α. Mais l'unité est à γ comme γ est à Δ; donc l'unité est à γ comme γ est à Δ, et comme Δ est à Α; il tombe donc entre l'unité et le nombre Α deux nombres moyens γ, Δ successivement proportionnels. De plus, puisque Α se multipliant lui-même fait Β, le nombre Α mesure Β par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Α par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Α comme Α est à Β (déf. 20. 7). Mais entre l'unité et le nombre Α il tombe deux nombres moyens proportionnels; il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais si entre deux nombres il tombe deux moyens proportionnels, et si le premier est un cube, le second sera un cube (23. 8). Mais Α est un cube; donc Β est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

## 58 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

### PROPOSITIO IV.

Εάν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἴσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἴσταιν.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ cubum esse.

Α, 8.            Β, 27.  
Δ, 64.          Γ, 216.

Ο γὰρ Α' ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἴστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν· ἴσταιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ Α, Β<sup>2</sup>. τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὡς τε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουνται ἀριθμοί. Καὶ ἴσται κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ cubus est. Et quoniam Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Et quoniam Α, Β cubi sunt, similes solidi sunt Α, Β; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri; quare et inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Δ; cubus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITION IV.

Si un nombre cube multipliant un nombre cube fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube Α multipliant le nombre cube Β fasse Γ; je dis que Γ est un cube.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ, le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque Α se multipliant lui-même a fait Δ, et que Α multipliant Β fait Γ, le nombre Α est à Β comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres Α, Β sont des cubes, les nombres Α, Β sont des solides semblables. Il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (19. 8); il tombera donc aussi entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Δ est un cube; donc Γ est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλα-  
σιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς  
κύβος ἴσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς<sup>1</sup> ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β  
πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιεῖτω· λέγω ὅτι  
ὁ Β κύβος ἐστίν.

Α, 8.

Δ, 64.

Β, 27.

Γ, 216.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ  
ποιεῖτω κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α  
ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε,  
τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴστιν  
ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως<sup>2</sup> ὁ Δ πρὸς τὸν Γ.  
Καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι·  
τῶν<sup>3</sup> Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν  
ἀριθμοί. Καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α  
πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνά-  
λογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἴσται κύβος ὁ Α·  
κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si cubus numerus numerum aliquem multi-  
plicans cubum facit, et multiplicatus cubus  
erit.

Cubus enim numerus Α numerum aliquem  
ipsum Β multiplicans cubum ipsum Γ faciat;  
dico Β cubum esse.

Ipsa enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ  
faciat; cubus igitur est Δ. Et quoniam Α se  
ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ip-  
sum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est  
igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Et quoniam Δ, Γ  
cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter Δ, Γ  
duo medii proportionales cadunt numeri. Atque  
est ut Δ ad Γ ita Α ad Β; et inter Α, Β igitur  
duo medii proportionales cadunt numeri. Atque  
est cubus Α; cubus igitur est et Β. Quod opor-  
tebat ostendere.

PROPOSITION V.

Si un nombre cube multipliant un nombre fait un cube, le nombre multiplié  
sera un cube.

Car que le nombre cube Α multipliant un nombre Β fasse le cube Γ; je dis  
que Β est un cube.

Que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un cube (3.9). Et  
puisque Α se multipliant lui-même fait Δ, et que Α multipliant Β fait Γ, le  
nombre Α est à Β comme Δ est à Γ (17.7). Et puisque Δ et Γ sont des cubes, ces  
nombres sont des solides semblables; il tombe donc entre Δ et Γ deux nombres  
moyens proportionnels (19.8). Mais Δ est à Γ comme Α est à Β; il tombe donc  
entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8.8). Mais Α est un cube;  
donc Β est un cube (23.8). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὶς κύβος ἴσται.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιεῖτω· λίγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

Α, 8. Β, 64.

Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἵππει ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἴσθιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἵππει ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἴσθιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς

## PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum ipsum B faciat; dico et A cubum esse.

Γ, 512.

Ipse enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat. Quoniam igitur A se ipsum quidem multiplicans ipsum B fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ cubus est. Et quoniam A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; ergo A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita A ad B. Et quoniam A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo B ipsum Γ metitur per unitates quæ in A. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita B ad Γ. Sed ut unitas ad A

## PROPOSITION VI.

Si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre sera un cube.

Que le nombre A se multipliant lui-même fasse le cube B; je dis que A est un cube.

Car que A multipliant B fasse Γ. Puisque A se multipliant lui-même fait B, et que A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque A se multipliant lui-même fait B, le nombre A mesure B par les unités qui sont en lui; mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme A est à B (déf. 20. 7). Et puisque A multipliant B fait Γ, le nombre B mesure Γ par les unités qui sont en A. Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme B est à Γ. Mais l'unité est à A comme

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 61

τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα<sup>2</sup> ὁ Α· πρὸς τὸν Β· οὕτως<sup>3</sup> ὁ Β· πρὸς τὸν Γ· Καὶ ἐπεὶ οἱ<sup>4</sup> Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ἴμοιοι στερεοὶ εἰσὶ τῶν Β, Γ<sup>5</sup> ἄρα δύο μῖσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β· πρὸς τὸν Γ· οὕτως<sup>6</sup> ὁ Α· πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μῖσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἔστι καὶ ὁ Α· Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ita A ad B; et ut igitur A ad B ita B ad Γ. Et quoniam B, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter B, Γ duo medii proportionales sunt numeri. Atque est ut B ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales sunt numeri. Atque est cubus B; cubus igitur est et A. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α· ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεὸς ἔστιν.

### PROPOSITIO VII.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans facit aliquem, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ solidum esse.

$\begin{matrix} & & \bullet & & \\ & A, 6. & & B, 7. & & \Gamma, 42. \\ \Delta, 3. & & E, 2. & & \end{matrix}$

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α· σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. Μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ· καὶ

Quoniam enim A compositus est, a numero aliquo mensurabitur. Mensuretur ab ipso Δ. Et

A est à B; donc A est à B comme B est à Γ. Et puisque B et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il y a donc entre B et Γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais B est à Γ comme A à B; il y a donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais B est un cube; donc A est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION VII.

Si un nombre composé multipliant un nombre en fait un autre, le produit sera un solide.

Car que le nombre composé A multipliant le nombre B fasse Γ; je dis que Γ est un solide.

Car puisque A est un nombre composé, il sera mesuré par quelque nombre

## 62 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅσας ὁ  $\Delta$  τὸν  $A$  μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴσ-  
τωςαν ἐν τῷ  $E$ . Ἐπεὶ οὖν ὁ  $\Delta$  τὸν  $A$  μετρεῖ κατὰ  
τάς ἐν τῷ  $E$  μονάδας<sup>1</sup>· ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $\Delta$  πολλα-  
πλασιάσας τὸν  $A$  πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $A$  τὸν

quoties  $\Delta$  ipsum  $A$  metitur tot unitates sint in  $E$ .  
Quoniam igitur  $\Delta$  ipsum  $A$  metitur per unitates  
quæ in  $E$ ; ergo  $E$  ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  
 $A$  fecit. Et quoniam  $A$  ipsum  $B$  multiplicans

$A$ , 6.       $B$ , 7.       $\Gamma$ , 42.  
 $\Delta$ , 3.       $E$ , 2.

$B$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν, ὁ δὲ  $A$   
ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν  $\Delta$ ,  $E$ · ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $\Delta$ ,  $E$  τὸν  $B$   
πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πεποίηκεν<sup>2</sup>· ὁ  $\Gamma$  ἄρα  
στεριός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ  $\Delta$ ,  $E$ ,  $B$ .  
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum  $\Gamma$  fecit, est autem  $A$  ex ipsis  $\Delta$ ,  $E$ ; ergo ipse  
ex  $\Delta$ ,  $E$  ipsum  $B$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; ergo  
 $\Gamma$  solidus est, latera autem ipsius sunt  $\Delta$ ,  $E$ ,  $B$ .  
Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

### PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-  
λογον ᾧσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τε-  
τράγωνος ἴσται<sup>1</sup> καὶ οἱ ἐνα διαλείποντες παντὶς<sup>2</sup>,  
ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες  
πάντῃς<sup>3</sup>, ὁ δὲ ἑβδομος κύβος ἅμα καὶ τετρά-  
γωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντῃς<sup>4</sup>.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps  
proportionales sunt, tertius quidem ab unitate  
quadratus erit, et unum intermittentes omnes;  
sed quartus cubus, et duos intermittentes om-  
nes; septimus vero cubus simul et quadratus,  
et quinque intermittentes omnes.

(déf. 13. 7). Qu'il soit mesuré par  $\Delta$ ; et qu'il y ait en  $E$  autant d'unités que  $\Delta$   
mesure de fois  $A$ . Puisque  $\Delta$  mesure  $A$  par les unités qui sont en  $E$ , le nombre  $E$   
multipliant  $\Delta$  fera  $A$ . Et puisque  $A$  multipliant  $B$  fait  $\Gamma$ , et que  $A$  est le produit  
de  $\Delta$  par  $E$ , le produit de  $\Delta$  par  $E$  multipliant  $B$  fait  $\Gamma$  (16. 7); le nombre  $\Gamma$  est  
donc un nombre solide (déf. 17. 7), dont les côtés sont  $\Delta$ ,  $E$ ,  $B$ . Ce qu'il fallait  
démontrer.

### PROPOSITION VIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement  
proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un carré, et tous ceux  
qui en laissent un; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux;  
le septième un cube et un carré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq.

Εστώσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες<sup>5</sup>.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ; dico quidem tertium ab unitate, ipsum Β, quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum vero Γ cubum, et duos intermittentes omnes; septimum autem Ζ cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν<sup>6</sup> μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὴ δεῖξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες<sup>7</sup> τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ, καὶ

Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Α ad Β; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur et Α ipsum Β. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in ipso; atque Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in Α; ergo Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; quadratus igitur est Β. Et quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, sed Β quadratus est; et Δ igitur quadratus est. Propter eadem utique et Ζ quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et unum omnes intermittentes quadratos esse. Dico etiam et quartum ab unitate, ipsum Γ, cubum esse, et duos intermit-

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels; je dis que le troisième nombre Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un; que le quatrième Γ est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux; que le septième Ζ est un cube et un carré tout à la fois, ainsi que tous ceux qui en laissent cinq.

Car puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, l'unité mesure Α autant de fois que Α mesure Β (déf. 20. 7). Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en Α; le nombre Α se multipliant lui-même fera donc le nombre Β; le nombre Β est donc un carré. Et puisque Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ sera aussi un carré (22. 8). Par la même raison Ζ est un carré. Nous démontrerons de la même manière que tous ceux qui en laissent un sont des carrés. Je dis aussi que le quatrième, Γ, à partir de l'unité, est un cube, et



## 64 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν. Ἐπεὶ

tentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Β ad Γ; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Γ. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in Α; et Β igitur ipsum Γ metitur per unitates quæ in Α; ergo Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit. Quoniam igitur Α se ipsum

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν<sup>8</sup> πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· κύβος ἄρα ἔστιν ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστὶ<sup>9</sup>· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. Εδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἑξῆς ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. Ομοίως δὲ δείξομεν ἔτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσὶ<sup>10</sup> καὶ τετράγωνοι. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

quidem multiplicans ipsum Β fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; cubus igitur est Γ. Et quoniam Γ, Δ, Ε, Ζ deinceps proportionales sunt, sed Γ cubus est; et Ζ igitur cubus est. Ostensum est autem et quadratum; ergo septimus ab unitate ipse Ζ et cubus est et quadratus. Similiter etiam demonstrabimus et quinque intermittentes omnes cubos esse et quadratos. Quod oportebat ostendere.

tous ceux qui en laissent deux. Car puisque l'unité est à Α comme Β est à Γ, l'unité mesure Α autant de fois que Β mesure Γ. Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en Α; donc Β mesure Γ par les unités qui sont en Α; donc Α multipliant Β fera Γ. Et puisque Α se multipliant lui-même fait Β, et que Α multipliant Β fait Γ, Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque Γ, Δ, Ε, Ζ sont successivement proportionnels, et que Γ est un cube, Ζ est aussi un cube (23. 8). Mais on a démontré qu'il est un carré; donc le septième Ζ, à partir de l'unité, est un cube et un carré tout à la fois. Nous démontrerons semblablement que tous ceux qui en laissent cinq sont des cubes et des carrés tout à la fois. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς<sup>1</sup> ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ ἰὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Εστώσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὅσοιδηποτοῦν<sup>2</sup> ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem quadratus est; et reliqui omnes quadrati erunt. Et si ipse post unitatem cubus est; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate deinceps proportionales quocunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ipse autem Α post unitatem sit quadratus; dico et reliquos omnes quadratos fore.

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256. Ε, 1024. Ζ, 4096.

Οτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἴνα διαλείποντες πάντες, δίδικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν. Επεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα<sup>3</sup> τετράγωνός ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα<sup>4</sup> τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν.

Tertium quidem ab unitate Β quadratum esse, et unum intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim Α, Β, Γ deinceps proportionales sunt, et est Α quadratus; et Γ igitur quadratus est. Rursus, quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est Β quadratus; et ipse Δ igitur quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et reliquos omnes quadratos esse.

PROPOSITION IX.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un carré, tous les autres seront des carrés; si celui qui est après l'unité est un cube, tous les autres seront des cubes.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité soit un carré; je dis que tous les autres seront des carrés.

On a déjà démontré que le troisième Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont des carrés. Car puisque Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et que Α est un carré, Γ est un carré (22. 8). De plus, puisque les nombres Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ est aussi un carré. Nous démontrerons semblablement que tous les autres sont des carrés.

## 66 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλά δὴ<sup>5</sup> ἴστω ὁ Α κύβος· λέγω ὅτι καὶ<sup>6</sup> οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Οτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ

Sed et sit A cubus; dico et reliquos omnes cubos esse.

Quantum quidem ab unitate ipsum Γ cubum esse, et duos intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B; æqualiter igitur unitas ipsam A metitur ac A ipsum B. Sed unitas ipsum A metitur per uni-

1. A, 8. B, 64. Γ, 512. Δ, 4096. E, 52768. Z, 262144.

κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκε, καὶ ἴστω ὁ Α κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί<sup>8</sup>. Καὶ ἵπαι τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἴστω ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστί, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tates quæ in ipso; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso; ergo A se ipsum multiplicans ipsum B fecit, atque est A cubus. Si autem cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus est; et B igitur cubus est. Et quoniam quatuor numeri A, B, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est A cubus; et Δ igitur cubus est. Propter eadem utique et E cubus est, et similiter reliqui omnes cubi sunt. Quod oportebat ostendere.

Mais que A soit un cube; je dis que tous les autres sont des cubes.

On a déjà démontré que le quatrième, à partir de l'unité, est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont aussi des cubes. Car puisque l'unité est à A comme A est à B, l'unité mesure A autant de fois que A mesure B (déf. 21. 7). Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en lui; donc A se multipliant lui-même fait B; mais A est un cube; et si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit est un cube (3. 9); donc B est un cube. Et puisque les quatre nombres A, B, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que A est un cube, Δ est un cube (23. 8). Par la même raison E est aussi un cube, ainsi que tous les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ ἰὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Εστώσαν γάρ<sup>1</sup> ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὁμοειδητοῦν<sup>2</sup> ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς<sup>3</sup> τοῦ τρίτου τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων<sup>4</sup>.

Si ab unitate quotcunque numeri proportionales sunt, ipse autem post unitatem non est quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Et si ipse post unitatem cubus non est, neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint enim ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, sed post unitatem ipse Α non sit quadratus; dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Ἔστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

Si enim possibile, sit Γ quadratus. Est autem et Β quadratus; ergo Β, Γ inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum

PROPOSITION X.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité n'est point un carré, aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent un. Et si celui qui est après l'unité n'est pas un cube, aucun autre ne sera un cube, excepté le quatrième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent deux.

Car soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité ne soit pas un carré, savoir Α; je dis qu'aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Car si cela est possible, que Γ soit un carré. Mais Β est aussi un carré (8. 9); donc Β et Γ ont eutr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre

## 68 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως<sup>5</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὡς τε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπιδοι εἰσι. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἔστι καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειτο<sup>6</sup>· οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι<sup>7</sup>, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἐν αὐτῇ διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. Λέγω δὲ<sup>8</sup> ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

numerum. Et est ut B ad Γ ita A ad B; ergo A, B inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare A, B similes plani sunt. Et est quadratus B; quadratus igitur est et A, quod non supponebatur; non igitur Γ quadratus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Sed et non sit A cubus. Dico etiam neque alium ullum cubum fore, præter quartum ab unitate et duos intermittentes.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>9</sup> ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον<sup>10</sup>. Καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεί ἔστιν ὡς ἡ μονὰς

Si enim possibile, sit Δ cubus. Est autem et Γ cubus, quartus enim est ab unitate, et est ut Γ ad Δ ita Β ad Γ; et Β igitur ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum. Et est Γ cubus; et Β igitur cubus est. Et quoniam

quarré; et Β est à Γ comme Α est à Β; donc Α, Β ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc Α, Β sont des plans semblables (déf. 22. 7). Mais Β est un quarré; donc Α est un quarré, ce qui n'est point supposé; donc Γ n'est point un quarré. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un quarré, si ce n'est le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Mais que Α ne soit pas un cube; je dis qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux.

Car si cela est possible, que Δ soit un cube. Mais Γ est un cube; car c'est le quatrième nombre, à partir de l'unité (8. 9), et Γ est à Δ comme Β est à Γ; donc Β a avec Γ la même raison qu'un cube a avec un cube. Mais Γ est un cube; donc Β est un cube. Et puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, et que l'unité mesure

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 69

πρὸς τὸν Α οὕτως<sup>11</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας·<sup>12</sup> ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποιήκειν. Εάν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδὲς κύβος ἐστὶ, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων<sup>13</sup>. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾗσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατὰ τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστυσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὅποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος<sup>1</sup> ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινα τῶν Γ, Δ.

est ut unitas ad Α ita Α ad Β, sed unitas ipsum Α metitur per unitates quæ in ipso; et Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso; ergo Α se ipsum multiplicans cubum Β fecit. Si autem numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit; cubus igitur et Α, quod non supponitur; non igitur Δ cubus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO XI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate Α quotcunque numeri deinceps proportionales Β, Γ, Δ, Ε; dico eorum Β, Γ, Δ, Ε minimum Β ipsum Ε metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en lui (déf. 21. 7); donc Α se multipliant lui-même fera le cube Β. Mais si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre est un cube (6. 9); Α est donc un cube, ce qui n'est point supposé; donc Δ n'est pas un cube. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'un de ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité Α, tant de nombres qu'on voudra Β, Γ, Δ, Ε successivement proportionnels; je dis que Β, le plus petit des nombres Β, Γ, Δ, Ε, mesure Ε par un des nombres Γ, Δ.

## 70 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γάρ ἔστιν ὡς ἡ Α μονάς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκεις ἄρα ἡ Α μονάς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἵναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ Α μονάς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. Ἡ δὲ Α μονάς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ<sup>3</sup> μονάδας·

Quoniam enim est ut A unitas ad B ita Δ ad E; æqualiter igitur A unitas ipsum B numerum metitur ac Δ ipsum E; alterae igitur æqualiter A unitas ipsum Δ metitur ac B ipsum E. Sed A unitas ipsum Δ metitur per uni-

A, 1. B, 3. Γ, 9. Δ, 27. E, 81.

καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ<sup>3</sup> μονάδας· ὡς τε ὁ ἱλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινὰ ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Οἱ περ ἴδιαι διέξαι<sup>4</sup>.

tates quæ in ipso; et B igitur ipsum E metitur per unitates quæ in Δ; quare minor B majorem ipsum E metitur per aliquem numerum eorum qui sunt in proportionalibus numeris. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς<sup>1</sup> ἀνάλογον ᾖσιν· ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ ἰσχατός πρώτων ἀριθμῶν μετρήται<sup>2</sup>, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς<sup>1</sup> ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λόγῳ ὅτι ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρήται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται.

### PROPOSITIO XII.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt; a quibuscunque ultimus primorum numerorum mensuratur, ab ipsis et proximus unitati mensurabitur.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; dico a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab ipsis et Α mensuratum iri.

Car puisque l'unité Α est à Β comme Δ est à Ε, l'unité Α mesure Β autant de fois que Δ mesure Ε (déf. 20. 7); donc par permutation l'unité Α mesure Δ autant de fois que Β mesure Ε (15. 7.) Mais l'unité Α mesure Δ par les unités qui sont en lui; donc Β mesure Ε par les unités qui sont en Δ; le plus petit Β mesure donc Ε, qui est le plus grand, par un des nombres qui sont dans les nombres proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, tous les nombres premiers qui mesurent le dernier mesurent aussi celui qui est le plus près de l'unité.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels; je dis que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi Α.

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 71

Μετρίσθω γὰρ ὁ Δ ὑπὸ τίνος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ<sup>5</sup> τὸν Α μετρίῃ. Μὴ γὰρ μετρίτω ὁ Ε τὸν Α<sup>6</sup>. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν<sup>7</sup> ὃν μὴ μετρίῃ πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρίῃ, μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α

Mensuretur enim Δ ab aliquo primo numero Ε; dico Ε et ipsum Α metiri. Non enim metiatur Ε ipsum Α. Atque est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Α primi inter se sunt. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur, metiatur eum per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Rursus, quoniam Α ipsum

1.            Α, 4.            Β, 16.            Γ, 64.            Δ, 256.  
Ε, 2.            Θ, 8.            Η, 32.            Ζ, 128.

τὸν Δ μετρίῃ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως<sup>8</sup> ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὁ, σι ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρίῃ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. Μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πιποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πιποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

Δ metitur per unitates quæ in Γ; ergo Α ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; est igitur ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α, Ε primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eamdem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Ε ipsum Γ. Metiatur eum per Η; ergo Ε ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit. Sed et ex antecedente et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α,

Que Δ soit mesuré par un nombre premier Ε; je dis que Α est aussi mesuré par Ε. Que Α ne soit pas mesuré par Ε. Puisque Ε est un nombre premier, et que tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); les nombres Ε, Α sont premiers entr'eux. Et puisque Ε mesure Δ, qu'il le mesure par Ζ; le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. De plus, puisque Α mesure Δ par les unités qui sont en Γ (11. 9), le nombre Α multipliant Γ fera Δ. Mais Ε multipliant Ζ fait Δ; donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Ε mesure Γ. Qu'il le mesure par Η; le nombre Ε multipliant Η fera Γ. Mais par ce qui précède Α multipliant Β fait Γ; donc le produit



## 72 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως<sup>9</sup> ὁ Η πρὸς τὸν Β. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. Μετρεῖ τὸν αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν·

B æqualis est ipsi ex E, H; est igitur ut A ad E ita H ad B. Sed et A, E primi primi autem et minimi, minimi vero numeri metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur E ipsum B. Metiatur ipsum per Θ; ergo E ipsum Θ multiplicans ipsum B fecit. Sed et A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; est igitur ipse ex Θ, E æqualis ipsi

1.            Α, 4.            Β, 16.            Γ, 64.            Δ, 256.  
                 Ε, 2.            Θ, 8.            Η, 32.            Ζ, 128.

ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος<sup>10</sup> τῷ ἀπὸ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως<sup>11</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε<sup>12</sup> ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Ε τὸν Α<sup>13</sup>. Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ πρώτου<sup>14</sup> ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται· οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται<sup>15</sup>.

ab A; est igitur ut E ad A ita A ad Θ. Sed A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ergo metitur et E ipsum A. Sed et non metitur, quod impossibile; non igitur A, E primi inter se sunt; ergo compositi. Sed compositi a primo numero aliquo mensurantur; ergo A, E a primo aliquo numero mensurantur. Et quoniam E primus

de A par B égale le produit de E par H; donc A est à E comme H est à B. Mais les nombres A, E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure B. Qu'il le mesure par Θ; le nombre E multipliant Θ fera B. Mais A se multipliant lui-même fait B; donc le produit de Θ par E égale le carré de A; donc E est à A comme A est à Θ. Mais A et E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure A. Mais il ne le mesure pas, ce qui est impossible; donc les nombres A, E ne sont pas premiers entr'eux; donc ils sont composés. Mais les nombres composés sont mesurés par quelque nombre premier (déf. 15. 7); donc les nombres A, E sont mesurés par quelque nombre premier.

## LE NEUVIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 73

Καὶ ἔπει ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὡς τε καὶ<sup>16</sup> ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὧν ἂν ὁ Δ πρῶτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. Οπιρῖδει δειξάται.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ἢ ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου<sup>1</sup> μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς<sup>2</sup> ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἴστω· λίγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ.

supponitur, primus autem ab alio numero non mensuratur nisi a se ipso; ergo E ipsos A, E metitur; quare et E ipsum A metitur. Metitur autem et ipsum Δ; ergo E ipsos A, Δ metitur. Similiter utique demonstrabimus a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab iisdem et ipsum A mensuratum iri. Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITIO XIII.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem primus est, maximus a nullo alio mensurabitur, nisi ab eis qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse Α autem post unitatem primus sit; dico maximum eorum ipsum Δ a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis Α, Β, Γ.

Et puisque E est supposé être un nombre premier, et qu'un nombre premier n'est mesuré par aucun autre nombre que par lui-même (déf. 12. 7), le nombre E mesurera les nombres Α, Ε; donc Ε mesure Α. Mais il mesure Δ; donc Ε mesure les nombres Α, Δ. Nous démontrerons semblablement que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi le nombre Α. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un nombre premier, aucun autre nombre ne mesurera le plus grand, excepté ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels, et que le nombre Α, qui est après l'unité, soit un nombre premier; je dis que le plus grand Δ ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par les nombres Α, Β, Γ.

## 74 LE NEUVIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρίσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἴστω ὁ αὐτός· φανερόν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. Εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτος ἔστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὥστε ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτος ἔστι· σύνθετος ἄρα· πᾶς<sup>3</sup> δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται<sup>4</sup>. Λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται<sup>5</sup>, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ·

|    |       |        |         |         |
|----|-------|--------|---------|---------|
| 1. | A, 5. | B, 25. | Γ, 125. | Δ, 625. |
|    | E—    | Θ----  | Η----   | Z—      |

καὶ κείνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὥστε ἔστιν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὴν Ζ. Λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἴστω ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Ζ ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἴστω ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἰς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε.

Si enim possibile, mensuretur ab ipso E, et ipse E cum nullo ipsorum A, B, Γ sit idem; evidens est autem E primum non esse. Si enim E primus est, et metitur ipsum Δ, et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur E primus est; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo E a primo aliquo numero mensuratur. Dico etiam ipsum a nullo alio numero mensuratum iri, nisi ab ipso A. Si enim ab alio mensu-

ratur ipse E, sed E ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E ipsum Δ metitur, metiatur ipsum per Z. Dico Z cum nullo ipsorum A, B, Γ esse eundem. Si enim Z cum uno ipsorum A, B, Γ est idem, et metitur ipsum Δ per E; et unus igitur ipsorum A, B, Γ ipsum Δ metitur

Car si cela est possible, que E mesure Δ, et que E ne soit aucun des nombres A, B, Γ; il est évident que E n'est pas un nombre premier. Car si E est un nombre premier, et s'il mesure Δ, il mesurera A, qui est un nombre premier, E n'étant pas le même que A (12. 9), ce qui est impossible; donc E n'est pas un nombre premier; il est donc composé. Mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier (33. 7); donc E est mesuré par quelque nombre premier. Je dis qu'aucun autre nombre premier ne le mesurera, si ce n'est A. Car si E, qui mesure Δ, est mesuré par un autre nombre, cet autre nombre mesurera Δ; il mesurera donc A, qui est un nombre premier, cet autre n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible. Donc A mesure E. Et puisque E mesure Δ, qu'il le mesure par Z; je dis que Z n'est aucun des nombres A, B, Γ. Car si Z est le même qu'un des nombres A, B, Γ, et s'il mesure Δ par E, un des nombres A, B, Γ

Αλλὰ εἷς τῶν  $A, B, \Gamma$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν  $A, B, \Gamma$ · καὶ ὁ  $E$  ἄρα ἐνὶ τῶν  $A, B, \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ  $Z$  ἐνὶ τῶν  $A, B, \Gamma$  ἐστὶν ὁ αὐτός. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ  $Z$  ὑπὸ τοῦ  $A$ , δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ  $Z$  οὐκ ἔστι πρῶτος. Εἰ γὰρ πρῶτος<sup>8</sup>, καὶ μετρεῖ τὸν  $\Delta$ , καὶ τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὡν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτος ἐστὶν ὁ  $Z$ · σύνθετος ἄρα· ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ  $Z$  ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται<sup>9</sup>. Λέγω δὲ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ  $A$ . Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρώτος τὸν  $Z$  μετρεῖ, ὁ δὲ  $Z$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ· καὶ ὁ αὐτὸς ἄρα τὸν  $\Delta$  μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν  $A$  μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὡν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $Z$  μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  μετρεῖ κατὰ τὸν  $Z$ · ὁ  $E$  ἄρα τὸν  $Z$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποιήκειν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Delta$  πεποιή-

et  $\Gamma$   $B$ . Sed unus ipsorum  $A, B, \Gamma$  ipsum  $\Delta$  metitur per aliquem ipsorum  $A, B, \Gamma$ ; et  $E$  igitur cum uno ipsorum  $A, B, \Gamma$  est idem, quod non supponitur; non igitur  $Z$  cum uno ipsorum  $A, B, \Gamma$  est idem. Similiter utique ostendemus ipsum  $Z$  mensuratum iri ab ipso  $A$ , ostendentes rursus  $Z$  non esse primum. Si enim primus, et metitur ipsum  $\Delta$ , et ipsum  $A$  metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur primus est  $Z$ ; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo  $Z$  a primo aliquo numero mensuratur. Dico et ipsum ab alio primo numero non mensuratum iri, nisi ab ipso  $A$ . Si enim alius aliquis primus ipsum  $Z$  metitur, sed  $Z$  ipsum  $\Delta$  metitur; et ille igitur ipsum  $\Delta$  metietur; quare et ipsum  $A$  metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo  $A$  ipsum  $Z$  metitur. Et quoniam  $E$  ipsum  $\Delta$  metitur per  $Z$ ; ergo  $E$  ipsum  $Z$  multiplicans ipsum  $\Delta$  fecit. Sed quidem et  $A$  ipsum  $\Gamma$  multiplicans ipsum

mesurera  $\Delta$  par  $E$ . Mais un des nombres  $A, B, \Gamma$  mesure  $\Delta$  par quelqu'un des nombres  $A, B, \Gamma$  (11. 9); donc  $E$  sera le même que quelqu'un des nombres  $A, B, \Gamma$ , ce qui n'est point supposé; donc  $Z$  n'est aucun des nombres  $A, B, \Gamma$ . Nous démontrerons semblablement que  $Z$  est mesuré par  $A$ , en faisant voir encore que  $Z$  n'est pas un nombre premier. Car s'il l'est, et s'il mesure  $\Delta$ , il mesurera  $A$ , qui est un nombre premier,  $Z$  n'étant pas le même que  $A$  (12. 9); ce qui est impossible;  $Z$  n'est donc pas un nombre premier; il est donc composé; mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier; donc  $Z$  est mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Je dis qu'il ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par  $A$ . Car si  $Z$ , qui mesure  $\Delta$ , est mesuré par tout autre nombre premier, cet autre nombre mesurera  $\Delta$ , et par conséquent  $A$ , qui est un nombre premier,  $Z$  n'étant pas le même que  $A$  (12. 9); ce qui est impossible; donc  $A$  mesure  $Z$ . Et puisque  $E$  mesure  $\Delta$  par  $Z$ , le nombre  $E$  multipliant  $Z$  fera  $\Delta$ . Mais  $A$  multipliant  $\Gamma$  fait  $\Delta$ ;

## 76 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κιν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Ο δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Η. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδὲν τῶν Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκιν.

Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; proportionaliter igitur est ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α ipsum Ε metitur; et Ζ igitur ipsum Γ metitur. Metiatur ipsum per Η. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Η cum nullo ipsorum Α, Β esse eundem, et ipsum mensuratum iri ab ipso Α. Et quoniam Ζ ipsum Γ metitur per Η; ergo Ζ ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit.

|    |       |        |         |         |
|----|-------|--------|---------|---------|
| 1. | Α, 5. | Β, 25. | Γ, 125. | Δ, 625. |
|    | Ε---- | Θ----- | Η-----  | Ζ-----  |

Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκιν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ οὕτως<sup>10</sup> ὁ Η πρὸς τὸν Β. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκιν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκιν· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν<sup>11</sup> Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως<sup>12</sup> ὁ Α πρὸς τὸν Η.

Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α, Β æqualis est ipsi ex Ζ, Η; proportionaliter igitur ut Α ad Ζ ita Η ad Β. Metitur autem Α ipsum Ζ; metitur igitur et Η ipsum Β. Metiatur eum per Θ. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Θ cum ipso Α non esse eundem. Et quoniam Η ipsum Β metitur per Θ; ergo Η ipsum Θ multiplicans ipsum Β fecit. Sed et Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo ipse ex Θ, Η æqualis est ipsi ex Α quadrato; est igitur ut Θ ad Α ita Α

donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais Α mesure Ε; donc Ζ mesure Γ (déf. 21. 7); qu'il le mesure par Η. Nous démontrerons semblablement que Η n'est aucun des nombres Α, Β, et que Α mesure Η. Et puisque Ζ mesure Γ par Η, le nombre Ζ multipliant Η fera Γ. Mais Α multipliant Β fait Γ; donc le produit de Α par Β égale le produit de Ζ par Η; donc Α est à Ζ comme Η est à Β. Mais Α mesure Ζ; donc Η mesure Β. Qu'il le mesure par Θ. Nous démontrerons semblablement que Θ n'est pas le même que Α. Et puisque Η mesure Β par Θ, le nombre Η multipliant Θ fait Β. Mais Α se multipliant lui-même fait Β; donc le produit de Θ par Η égale le carré de Α; donc Θ est à Α comme Α est à Η (20. 7). Mais Α mesure Η;

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 77

Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α  
πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ἕπερ  
ἄττιπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου  
ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ.  
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad H. Metitur autem A ipsum H; metitur igitur  
et Θ ipsum A primum existentem, non existens  
cum ipso idem, quod absurdum; non igitur  
maximus Δ ab alio numero mensurabitur,  
nisi ab ipsis A, B, Γ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

### PROPOSITIO XIV.

Εάν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτων ἀριθμῶν  
μετρεῖται ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου· ἀριθμοῦ  
μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ελάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρῶτων  
ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρίσθω· λέγω ὅτι ὁ Α  
ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθή-  
σεται, πᾶριξ τῶν Β, Γ, Δ.

Si minimus numerus a primis numeris mensu-  
ratur; a nullo alio primo numero mensurabitur,  
nisi ab ipsis a principio metientibus.

Minimus enim numerus A a primis numeris  
B, Γ, Δ mensuretur; dico ipsum A a nullo alio  
primo numero mensuratum iri, nisi ab ipsis B,  
Γ, Δ.

|        |        |        |
|--------|--------|--------|
|        | Α, 30. |        |
| Β, 2.  | Γ, 3.  | Δ, 5.  |
| E----- |        | Z----- |

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρίσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ  
Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἴστω ὁ αὐτός.

Si enim possibile, mensuretur a primo E, et E  
cum nullo ipsorum B, Γ, Δ sit idem. Et quoniam

donc Θ mesure A, qui est un nombre premier, Θ n'étant pas le même que  
A, ce qui est absurde; donc le plus grand nombre Δ n'est mesuré par aucun  
autre nombre, si ce n'est par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XIV.

Si le plus petit nombre est mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré  
par aucun autre nombre premier, si ce n'est par ceux qui le mesureraient d'abord.

Car soit A le plus petit nombre mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ; je  
dis que A ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par B, Γ, Δ.

Car si cela est possible, qu'il soit mesuré par le nombre premier E, et que E ne soit

## 78 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῶν<sup>2</sup> πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἔξ αὐτῶν μετρήῃ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἵνα τῶν ἔξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ

E ipsum A metitur, metiatur eum per Z; ergo E ipsum Z multiplicans ipsum A fecit. Et mensuratur A a primis numeris B, Γ, Δ. Si autem duo numeri sese multiplicantes faciunt aliquem, factum vero ex ipsis metitur aliquis primus numerus, et unum eorum a principio metietur; ergo B, Γ, Δ unum ipsorum E, Z

Α, 30.  
B, 2.            Γ, 3.            Δ, 5.  
E----- Z-----

ἄρα ἵνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδὲν τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν<sup>3</sup> ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑπέκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος<sup>4</sup>. οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, πᾶριξ τῶν Β, Γ, Δ. Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.

metiuntur. Ipsum quidem E non metientur, ipse E enim primus est, et cum nullo ipsorum B, Γ, Δ idem; ipsum Z igitur metientur minorem existentem ipso A, quod est impossibile, ipse enim A ponitur minimus ab ipsis B, Γ, Δ mensuratus; non igitur ipsum A metietur primus numerus, præter ipsos B, Γ, Δ. Quod oportebat ostendere.

aucun des nombres B, Γ, Δ. Puisque E mesure A, qu'il le mesure par z; le nombre E multipliant z fera A. Mais A est mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ, et lorsque deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et qu'un nombre premier mesure le produit, ce nombre mesurera un des nombres qu'on avait d'abord supposés (32. 7); les nombres B, Γ, Δ mesurent donc un des nombres E, z. Mais ils ne mesureront pas E, car E est un nombre premier, et il n'est aucun des nombres B, Γ, Δ; ils mesurent donc z, qui est plus petit que A; ce qui est impossible, car A est supposé le plus petit nombre mesuré par B, Γ, Δ; donc aucun nombre premier, si ce n'est B, Γ, Δ, ne mesurera A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾖσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντιθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ· δύο ὁποιοῦν συντιθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Γ, Α πρὸς τὸν Β.

PROPOSITIO XV.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; duo quicunque compositi ad reliquum primi sunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales, Α, Β, Γ, minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; dico ipsorum Α, Β, Γ duos quoscunque compositos ad reliquum primos esse, ipsos quidem Α, Β ad Γ, ipsos autem Β, Γ ad Α, et adhuc ipsos Γ, Α ad Β.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.  
Δ. . . Ε. . . Ζ.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. Φανερὸν δὴ ἔστι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, καὶ ἔστι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ οἱ

Sumantur enim duo ΔΕ, ΕΖ minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ. Evidens est et quidem ΔΕ se ipsum multiplicantem ipsum Α facere; ipsum vero ΕΖ multiplicantem ipsum Β facere, et adhuc ΕΖ se ipsum multiplicantem ipsum Γ facere. Et

PROPOSITION XV.

Si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux, la somme de deux quelconques de ces nombres sera un nombre premier avec le nombre restant.

Que les trois nombres Α, Β, Γ successivement proportionnels soient les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que la somme de deux des trois nombres Α, Β, Γ est un nombre premier avec le nombre restant, savoir la somme de Α et de Β avec Γ, la somme de Β et de Γ avec Α, et la somme de Γ et de Α avec Β.

Car prenons les deux plus petits nombres ΔΕ, ΕΖ qui ont la même raison avec Α, Β, Γ. Il est évident que ΔΕ se multipliant lui-même fera Α, que ΔΕ multipliant ΕΖ fera Β, et que ΕΖ se multipliant lui-même fera Γ (2. 8). Et puisque



## 80 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι, καὶ συναμφοτέρος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοι

quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi sunt, primi inter se sunt. Si autem duo numeri primi inter se sunt, et uterque ad utrumque primus est; et ΔΖ igitur ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed quidem et ΔΕ ad ΕΖ primus est; ergo ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi sunt. Si autem duo numeri ad

A, 9. B, 12. Γ, 16.  
Δ. . . Ε. . . Ζ.

εἰσιν<sup>3</sup>. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾖσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥς τε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ὡς τε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος<sup>3</sup> πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν<sup>4</sup>. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοι εἰσιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ

aliquem numerum primi sunt, et ex ipsis factus ad reliquum primus est; quare ipse ex ΖΔ, ΔΖ ad ΕΖ primus est. Quare et ipse ex ΖΔ, ΔΕ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Si enim duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus est. Sed ipse ex ΖΔ, ΔΕ est ipse ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ; ipse igitur ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Et ipse quidem ex ΔΕ est Α, ipse vero ex ΔΕ, ΕΖ est Β, ipse autem ex ΕΖ est Γ; ergo Α, Β compositi ad ipsum Γ primi sunt. Similiter utique demonstrabimus et

les nombres ΔΕ, ΕΖ sont les plus petits, ces nombres sont premiers entr'eux (24. 7). Mais si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux (30. 7); donc ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ. Mais ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc ΔΖ et ΔΕ sont premiers avec ΕΖ. Mais si deux nombres sont premiers avec un autre, le produit de ces deux nombres est premier avec cet autre (26. 7); donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec le carré de ΕΖ. Car si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre (27. 7). Mais le produit de ΖΔ par ΔΕ égale le carré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (3. 2); donc le carré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ est un nombre premier avec le carré de ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme de Α et de Β est un nombre premier avec Γ. Nous démontrerons de la même manière que la somme des

οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. λέγω δὲ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὅς τε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσιν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἁπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsos Β, Γ ad Α primos esse. Dico et ipsos Α, Γ ad Β primos esse. Quoniam enim ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est; quare et ipse ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed ipsi ex ΔΖ æquales sunt ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ; et ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso semel ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt; et rursus dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Atque est quidem ipse ex ΔΕ ipse Α, ipse autem ex ΔΕ, ΕΖ ipse Β, ipse vero ex ΕΖ ipse Γ; ergo Α, Γ compositi ad ipsum Β primi sunt. Quod oportebat ostendere.

nombres Β, Γ est un nombre premier avec Α. Je dis aussi que la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Car puisque ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ (30. 7), le carré de ΔΖ sera un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (26 et 27. 7). Mais la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est égale au carré de ΔΖ (4. 2); donc la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec une fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Ce qu'il fallait démontrer.

## 82 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ  $A$ ,  $B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $B$  πρὸς ἄλλον τινά.

### PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri primi iūter se sunt, non erit ut primus ad secundum ita secundus ad alium aliquem.

Duo enim numeri  $A$ ,  $B$  primi inter se sint; dico non esse ut  $A$  ad  $B$  ita  $B$  ad alium aliquem.

$A$ , 5.       $B$ , 8.       $\Gamma$ -----

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Οἱ δὲ  $A$ ,  $B$  πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ<sup>2</sup> μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας<sup>3</sup> ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ  $A$  τὸν  $B$ , ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ  $A$  ἄρα τοὺς  $A$ ,  $B$  μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον<sup>4</sup>. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Gamma$ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim possibile, sit ut  $A$  ad  $B$  ita  $B$  ad  $\Gamma$ . Sed  $A$ ,  $B$  primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eadem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur  $A$  ipsum  $B$ , ut antecedens antecedentem. Metitur autem et se ipsum; ergo  $A$  ipsos  $A$ ,  $B$  metitur, primos existentes inter se, quod absurdum; non igitur erit ut  $A$  ad  $B$  ita  $B$  ad  $\Gamma$ . Quod oportebat ostendere.

### PROPOSITION XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le second est à un autre nombre.

Que les deux nombres  $A$ ,  $B$  soient premiers entr'eux; je dis que  $A$  n'est point à  $B$  comme  $B$  est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que  $A$  soit à  $B$  comme  $B$  est à  $\Gamma$ . Mais  $A$  et  $B$  sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7); et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc  $A$  mesure  $B$ , comme un antécédent mesure un antécédent. Mais  $A$  se mesure lui-même; donc  $A$  mesure  $A$  et  $B$ , qui sont premiers entr'eux; ce qui est absurde; donc  $A$  ne sera pas à  $B$  comme  $B$  est à  $\Gamma$ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

PROPOSITIO XVII.

Εάν ὧσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἰζῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὧσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν διῦτον οὕτως ὁ ἴσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἐστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἰζῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sunt; non erit ut primus ad secundum ita ultimus ad alium aliquem.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; extremi autem eorum ipsi Α, Δ primi inter se sint; dico non esse ut Α ad Β ita Δ ad alium aliquem.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27. Ε-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ<sup>1</sup> μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας<sup>2</sup> ἰσάνεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον μετρεῖ.

Si enim possibile, sit ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Sed Α, Δ primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur

PROPOSITION XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le dernier est à un autre nombre.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, et que leurs extrêmes Α, Δ soient premiers entr'eux; je dis que Α n'est pas à Β comme Δ est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que Α soit à Β comme Δ est à Ε; par permutation Α sera à Δ comme Β est à Ε (13. 7). Mais les nombres Α, Δ sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Β.

## 84 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως<sup>4</sup> ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὡς τε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως<sup>5</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Ἀλλ' ὁ

A ipsum B. Atque est ut A ad B ita B ad Γ; et B igitur ipsum Γ metitur, quare et A ipsum Γ metitur. Et quoniam est ut B ad Γ ita Γ ad Δ, metitur autem B ipsum Γ; metitur igitur et Γ ipsum Δ. Sed A ipsum Γ metitur; quare

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E——

Α τὸν Γ μετρεῖ· ὡς τε ὁ Α καὶ<sup>6</sup> τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. Ὅπερ ἔδει διῆξαι.

A et ipsum Δ metitur. Metitur autem et se ipsum; ergo A ipsos Α, Δ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium aliquem. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἱσικέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· καὶ δεόν ἐσται ἱσικέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

### PROPOSITIO XVIII.

Duobus numeris datis considerare, an possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Sint dati duo numeri Α, Β; et oportebit considerare, an possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Mais A est à B comme B est à Γ; donc B mesure Γ; donc A mesure aussi Γ. Mais B est à Γ comme Γ est à Δ; donc le nombre B mesure Γ, et Γ mesure Δ. Mais A mesure Γ; donc A mesure Δ. Mais il se mesure lui-même; donc A mesure les nombres Α, Δ, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc A n'est pas à B comme Δ est à un autre nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XVIII.

Deux nombres étant donnés, chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

Soient donnés les deux nombres Α, Β; il faut chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 85

Οἱ δὲ  $A, B$  ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

Itaque  $A, B$  vel primi inter se sunt, vel non. Et si primi inter se sunt, demonstratum est impossibile esse ipsis tertium proportionalem invenire.

$A, 4.$        $B, 7.$

Ἀλλὰ δὲ μὴ ἴστωσαν οἱ  $A, B$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  ποιεῖται. Ὁ  $A$  δὲ τὸν  $\Gamma$  ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον κατὰ τὸν  $\Delta$  ὁ  $A$  ἄρα τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πιποίηκεν.

Sed et non sint  $A, B$  primi inter se, et  $B$  se ipsum multiplicans ipsum  $\Gamma$  faciat. Ipse  $A$  igitur ipsum  $\Gamma$  vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum per  $\Delta$ ; ergo  $A$  ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit. Sed quidem et  $B$  se ip-

$A, 4.$        $B, 6.$        $\Delta, 9.$        $\Gamma, 36.$

Ἀλλὰ μὲν καὶ ὁ  $B$  ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν  $\Gamma$  πιποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $A, \Delta$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ  $B$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως ὁ  $B$  πρὸς τὸν  $\Delta$ · τοῖς  $A, B$  ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον<sup>3</sup> προσυρίζεται, ὁ  $\Delta$ .

sum multiplicans ipsum  $\Gamma$  fecit; ipse igitur ex  $A, B$  æqualis est ipsi ex  $B$ ; est igitur ut  $A$  ad  $B$  ita  $B$  ad  $\Delta$ ; ergo ipsis  $A, B$  tertius numerus proportionalis  $\Delta$  inventus est.

Ἀλλὰ δὲ μὴ μετρεῖται ὁ  $A$  τὸν  $\Gamma$ · λέγω ὅτι τοῖς  $A, B$  ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσυρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσυρήσθω ὁ  $\Delta$

Sed et non metiatur  $A$  ipsum  $\Gamma$ ; dico ipsis  $A, B$  impossibile esse tertium proportionalem invenire numerum. Si enim possibile,

Les nombres  $A, B$  sont premiers entr'eux, ou ils ne le sont pas. S'ils sont premiers entr'eux, il est démontré qu'il n'est pas possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel (16. 9).

Que les nombres  $A, B$  ne soient pas premiers entr'eux, et que  $B$  se multiplie lui-même fasse  $\Gamma$ . Le nombre  $A$  mesurera  $\Gamma$  ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure par  $\Delta$ ; le nombre  $A$  multipliant  $\Delta$  fera  $\Gamma$ . Mais  $B$  se multipliant lui-même fait  $\Gamma$ ; donc le produit de  $A$  par  $\Delta$  est égal au carré de  $B$ ; donc  $A$  est à  $B$  comme  $B$  est à  $\Delta$  (20. 7). On a donc trouvé un troisième nombre  $\Delta$  proportionnel aux nombres  $A, B$ .

Mais que  $A$  ne mesure pas  $\Gamma$ ; je dis qu'il est impossible de trouver un troisième nombre proportionnel aux nombres  $A, B$ . Car si cela est possible, que  $\Delta$  soit le

## 86 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥς τε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ

inveniatur ipse Δ; ipse igitur ex Α, Δ æqualis est ipsi ex Β, ipse autem ex Β est ipse Γ; ipse igitur ex Α, Δ æqualis est ipsi Γ; quare Α ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Α

Α, 6. Β, 4. Δ—— Γ, 16.

τὸν Δ. Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσμερεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρή. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

ipsum Γ metitur per Δ. At vero supponitur et non metiri, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis Α, Β tertium proportionalem invenire numerum, quando Α ipsum Γ non metitur. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότῃ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσμερεῖν.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἴστω ἐπισκέψασθαι, πότῃ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσμερεῖν.

### PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis considerare, quando possibile sit ipsis quartum proportionalem invenire.

Sint dati tres numeri Α, Β, Γ, et oporteat considerare, quando possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

nombre trouvé; le produit de Α par Δ sera égal au carré de Β (20. 7); mais le carré de Β est Γ; donc le produit de Α par Δ est égal à Γ; donc Α multipliant Δ fait Γ; donc Α mesure Γ par Δ. Mais on a supposé qu'il ne le mesure pas, ce qui est absurde; il est donc impossible de trouver un nombre troisième proportionnel aux nombres Α, Β, lorsque Α ne mesure pas Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XIX.

Trois nombres étant donnés, chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Soient donnés les trois nombres Α, Β, Γ; il faut chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 87

Οἱ δὲ  $A, B, \Gamma$  ἢ τοὶ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ  $A, \Gamma$  πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν ἢ οὐ\*.

Ipsi vero  $A, B, \Gamma$  vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi  $A, \Gamma$  primi inter se sunt; vel non.

$A, 4. \quad B, 6. \quad \Gamma, 9.$

Εἰ μὲν οὖν οἱ  $A, B, \Gamma$  ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ  $A, \Gamma$  πρῶτοι πρὸς

Si quidem igitur  $A, B, \Gamma$  deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi  $A, \Gamma$  primi

Ou les nombres  $A, B, \Gamma$  sont successivement proportionnels, et leurs extrêmes  $A, \Gamma$  sont premiers entr'eux; ou bien cela n'est point.

Si les nombres  $A, B, \Gamma$  sont successivement proportionnels, et si leurs ex-

\* In margine editionis Basilicæ hoc legere est: *Quia Zambertus græcum sine dubio exemplar secutus, exactâ divisione membrorum hic utitur, singula membra demonstrationibus exequitur, voluimus eam lectionem inserere; est enim pernecessaria, licet neutrum nostrorum exemplarium tale quidquam haberet.*

Editio Parisiensis concordat cum omnibus codicibus bibliothecæ regię, codicibus 190, 2466, 2542 exceptis, qui concordant cum codice græco quem Zambertus secutus est: versio autem latina Zamberti hæc est:

*Jam ipsi  $A, B, \Gamma$ , aut continue sunt proportionales, et eorum extremi  $A, \Gamma$  sunt primi ad invicem; aut non sunt continue proportionales, et eorum extremi primi sunt ad invicem; aut continue sunt proportionales, et eorum extremi non sunt ad invicem primi; vel neque sunt continue proportionales, neque eorum extremi primi sunt ad invicem.*

*Non sint jam ipsi  $A, B, \Gamma$  continue proportionales, extremis rursus primis existentibus ad invicem; dico quod et sic quartum proportionalem invenire est impossibile.*

*Si enim possibile, inveniatur  $\Delta$ , ut sit sicut  $A$  ad  $B$  sic  $\Gamma$  ad  $\Delta$ , fiatque sicut  $B$  ad  $\Gamma$  sic  $\Delta$  ad  $E$ . Et quoniam est sicut quidem  $A$  ad  $B$  sic  $\Gamma$  ad  $\Delta$ , sicut autem  $B$  ad  $\Gamma$  sic  $\Delta$  ad  $E$ ; ex æquali igitur (per 14 septimi) est sicut  $A$  ad  $\Gamma$  sic  $\Gamma$  ad  $E$ . At  $A, \Gamma$  primi sunt, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur eandem rationem habentes, antecedens antecedentem, et sequens sequentem (per 21 septimi); metitur igitur  $A$  ipsum  $\Gamma$ , antecedens antecedentem; metitur autem et se ipsum; igitur  $A$  ipsos  $A, \Gamma$  metitur primos ad invicem existentes, quod est impossibile; ipsis igitur  $A, B, \Gamma$  quartum proportionalem invenire est impossibile.*



## 88 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄλληλους εἰσὶ, δίδικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν inter se sunt, demonstratum est impossibile

A, 4. B, 6. Γ, 9.

αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν ἀριθ-  
μόν.

ipsis quartum proportionalem invenire nu-  
merum.

Εἰ δὲ οὐ, ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν  
Δ ποιεῖτω· ὁ δὲ Ἀ<sup>3</sup> τὸν Δ ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ.

Si autem non, ipse B ipsum Γ multiplicans  
ipsum Δ faciat; ipse igitur A ipsum Δ vel

A, 8. B, 12. Γ, 18. E, 27. Δ, 216.

μετρεῖ. Μετρεῖτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν Ε·  
ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πι-

metitur, vel non metitur. Metiatur eum pri-  
mum per E; ergo A ipsum E multiplicans

trêmes A, Γ sont premiers entr'eux, on a démontré qu'il est impossible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel (17.9).

Si cela n'est point, que B multipliant Γ fasse Δ; le nombre A mesurera le nombre Δ, ou ne le mesurera pas. Qu'il le mesure d'abord par E; le nombre A

*Sed jam rursus sint ipsi A, B, Γ continue proportionales; at A, Γ non sint primi ad invicem; dico quod eis quartum proportionalem invenire est possibile.*

*Sed jam ipsi A, B, Γ neque continue sint proportionales, neque eorum extremi ad invicem sint primi, et B ipsum Γ multiplicans ipsum efficiat Δ. Similiter ostendetur quod si quidem A ipsum Δ metitur, possibile est eis proportionalem invenire; si autem non metitur, est impossibile. Quod ostendere oportebat.*

Divisio editionis Pariensis brevior est, nec tamen minus exacta; etenim quod A, B, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi inter se sunt, vel non; evidens est igitur hanc divisionem comprehendere quatuor casus editionum Basilicæ et Oxoniæ.

Hervagius Euclidis suos codices græcos corrigere voluit, et eos inepte corrumpit; perspicuum est enim secundum alinea esse meram principii petitionem. Vide præfatum et lectiones variantes.

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 89

ποιήκειν. Αλλὰ μὴν<sup>4</sup> καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιά-  
σας τὸν Δ ποιήκειν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ  
τῷ ἐκ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α  
πρὸς τὸν Β οὕτως<sup>5</sup> ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς<sup>6</sup> Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον<sup>7</sup> προστίυρηται ὁ Ε.

ipsum Δ fecit. At vero et Β ipsum Γ mul-  
tiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Ε  
æqualis est ipsi ex Β, Γ; proportionaliter  
igitur est ut Α ad Β ita Γ ad Ε; ergo ipsis  
Α, Β, Γ quartus proportionalis Ε inventus  
est.

Α, 8.    Β, 12.    Γ, 18.    Ε, 27.    Δ, 216.

Αλλὰ δὴ μὴ μετρίτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ὅτι  
ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνά-  
λογον προσυρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δύνατον,

At vero non metiatur Α ipsum Δ; dico  
impossibile esse ipsis Α, Β, Γ quartum pro-  
portionalem invenire numerum. Si enim pos-

Α, 20.    Β, 30.    Γ, 45.    Ε----- Δ, 1350.

προσυρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος  
ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. Αλλ' ὁ ἐκ τῶν Β, Γ  
ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος  
ἐστὶ τῷ Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας  
τὸν Δ ποιήκειν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρίει κατὰ  
τὸν Ε· ὥστε μετρίει ὁ Α τὸν Δ. Αλλὰ καὶ  
οὐ μετρίει, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα δύνατόν

sibile, inveniatur Ε; ipse igitur ex Α, Ε  
æqualis est ipsi ex Β, Γ. Sed ipse ex Β, Γ  
est ipso Δ; et ipse ex Α, Ε igitur æqualis est  
ipsi Δ; ergo Α ipsum Ε multiplicans ipsum  
Δ fecit; ergo Α ipsum Δ metitur per Ε;  
quare metitur Α ipsum Δ. Sed et non metitur,  
quod absurdum; non igitur possibile est ipsis

multipliant Ε fera Δ. Mais Β multipliant Γ fait Δ; donc le produit de Α par Ε est égal au produit de Β par Γ; donc Α est à Β comme Γ est à Ε (19. 7); on a donc trouvé un quatrième nombre proportionnel Ε aux nombres Α, Β, Γ.

Mais que Α ne mesure pas Δ; je dis qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ. Car si cela est possible, soit trouvé Ε; le produit de Α par Ε sera égal au produit de Β par Γ (19. 7). Mais le produit de Β par Γ est Δ; le produit de Α par Ε est donc égal à Δ; donc Α multipliant Ε fera Δ; donc Α mesure Δ par Ε; donc Α mesure Δ. Mais il ne le mesure

## 90 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσ-  
μετρῆν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ.

A, B, Γ quantum proportionalem invenire nu-  
merum, quando A ipsum Δ non metitur.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ  
προτεθέντος πλῆθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἐστῶσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ  
Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ  
πρῶτοι ἀριθμοί.

### PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures sunt omni proposita  
multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri Α, Β, Γ; dico  
quam ipsi Α, Β, Γ plures esse primos nu-  
meros.

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| Α, 2. | Β, 3. | Γ, 5. |
| Ε     | 3ο.   | Α Ζ   |

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος  
μετρούμενος, καὶ ἴστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκεῖσθω τῷ  
ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ· ὁ δὲ ΕΖ ἥτοι πρῶτός ἐστιν,

Sumatur enim ipse ab ipsis Α, Β, Γ minimus  
mensuratus, et sit ΔΕ, et apponatur ipsi ΔΕ uni-  
tas ΔΖ; ipse igitur ΕΖ vel primus est, vel non.

pas, ce qui est absurde; il n'est donc pas possible de trouver un quatrième  
nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ, lorsque Α ne mesure pas Δ.

### PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité pro-  
posée de nombres premiers.

Soient Α, Β, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis  
que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres  
Α, Β, Γ.

Soit pris le plus petit nombre mesuré par les nombres Α, Β, Γ (38. 7), et  
que ce nombre soit ΔΕ; ajoutons à ΔΕ l'unité ΔΖ; le nombre ΕΖ sera un nombre

# LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 91

ἢ οὐ. Ἐστω πρότερον πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰς πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Αλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρεῖσθαι ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω ὅτι ὁ Η οὐδεὶς τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ διαιτὸν, ἔστω'. Οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσι· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ

Sit primum primus; inventi igitur sunt primi numeri Α, Β, Γ, ΕΖ plures quam ipsi Α, Β, Γ.

At vero non sit ΕΖ primus; a primo igitur aliquo numero mensuratur. Mensuretur a primo Η; dico Η cum nullo ipsorum Α, Β, Γ esse eundem. Si enim possibile, sit. Sed Α, Β, Γ ipsum ΔΕ metiuntur; et Η igitur ipsum ΔΕ

$$\begin{array}{rcccl} Α, 3. & Β, 5. & Γ, 7. & & \\ Β & 105. & Δ Ζ & & \\ \hline & Η, 55. & & & \end{array}$$

μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Η ἐν τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός. Ο αὐτὸς δὲ καὶ ὑπόκειται πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰς πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ, οἱ Α, Β, Γ, Η. Ὅπρι ἴδιαι δείξαι.

metietur. Metitur autem et ipsum ΕΖ; et reliquam igitur ipsam ΔΖ unitatem metietur ipse Η numerus existens, quod absurdum; non igitur Η cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Sed ipse et supponitur primus; inventi igitur sunt primi numeri plures Α, Β, Γ, Η propositā multitudine ipsorum Α, Β, Γ. Quod oportebat ostendere.

premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers Α, Β, Γ, ΕΖ qui sont en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ.

Mais que ΕΖ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier Η; je dis que Η n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres Α, Β, Γ mesurent ΔΕ, le nombre Η mesurera ΔΕ. Mais Η mesure ΕΖ; donc Η, qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔΖ, ce qui est absurde; donc Η n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers Α, Β, Γ, Η, que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

## 92 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιὺν συντιθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συγκείμεθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιὺν, οἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὁλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

### PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcunque componuntur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque AB, BG, ΓΔ, ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

A . . . . B . . . . . Γ . . Δ . . . . . Ε

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BG, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὁλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. Ἀρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, BG, ΓΔ, ΔΕ par est, habet partem dimidiam; quare et totus ΑΕ habet partem dimidiam. Par autem numerus est qui bifariam dividitur; par igitur est ΑΕ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ΄.

Εὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιὺν συντιθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁλος ἄρτιος ἐσται.

### PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcunque componuntur, multitudo autem ipsorum par est, totus par erit.

## PROPOSITION XXI.

Si l'on ajoute tant de nombres pairs que l'on voudra, leur somme sera un nombre pair.

Ajoutons tant de nombres pairs AB, BG, ΓΔ, ΔΕ qu'on voudra; je dis que leur somme ΑΕ est un nombre pair.

Puisque chacun des nombres AB, BG, ΓΔ, ΔΕ est un nombre pair, chacun de ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6. 7); donc leur somme ΑΕ peut être partagée en deux parties égales. Mais un nombre pair est celui qui peut être partagé en deux parties égales; le nombre ΑΕ est donc un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION XXII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est paire, leur somme sera paire.

## LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 93

Συγκείμεθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅσοιδη-  
ποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ·  
λέγω ὅτι ὁλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Componantur enim impares numeri quot-  
cunque pares multitudine ipsi AB, BG, ΓΔ,  
ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Α . . . Β . . . . Γ . . . . . Δ . . . . . Ε

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BG, ΓΔ, ΔΕ  
περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάσ-  
του, ἕκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται·  
ᾧστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται.  
Ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ  
ὁλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB,  
BG, ΓΔ, ΔΕ impar est, detracta unitate ab uno-  
quoque, unusquisque igitur reliquorum par erit;  
quare et compositus ex ipsis par erit. Est autem  
et multitudo unitatum par; et totus igitur ΑΕ  
par est. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

### PROPOSITIO XXIII.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιῦν συντεθῶσι, τὸ  
δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾗ· καὶ ὁλος περισσὸς  
ἔσται.

Si impares numeri quotcunque componuntur,  
multitudo autem ipsorum impar est; et totus im-  
par erit.

Συγκείμεθωσαν γὰρ ὅποσοιῦν περισσοὶ ἀριθ-  
μοὶ, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ AB, BG,  
ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὁλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

Componantur enim quotcunque impares nu-  
meri, quorum multitudo impar sit, ipsi AB, BG,  
ΓΔ; dico et totum ΑΔ imparem esse.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, BG, ΓΔ, ΔΕ que l'on voudra, leur  
quantité étant paire; je dis que leur somme ΑΕ est paire.

Car puisque chacun des nombres AB, BG, ΓΔ, ΔΕ est impair, si l'on retranche  
une unité de chacun d'eux, chacun des nombres restants sera pair; leur somme  
sera donc un nombre pair (21. 9). Mais la quantité des unités est paire; donc la  
somme ΑΕ est paire. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXIII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est  
impaire, leur somme sera impaire.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, BG, ΓΔ que l'on voudra, leur quantité  
étant impaire; je dis que leur somme sera impaire.

## 94 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος·      Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ; reliquus igitur ΓΕ par est. Est autem et ΓΑ par; et totus

A. . . . . B. . . . . Γ. . . . . E. Δ

καὶ ὁλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἐστὶν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. Ὅπῃ ἴδῃς δειξαι.      igitur ΑΕ par est. Atque est unitas ΔΕ; impar igitur est ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

### PROPOSITIO XXIV.

Εὰν ἀπὸ ἁρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Si a pari numero par aufertur, reliquus par erit.

Ἀπὸ γὰρ ἁρτίου τοῦ ΑΒ ἀφηρήσθω ἄρτιος<sup>2</sup> ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

A pari enim ipso ΑΒ auferatur par ΒΓ; dico reliquum ΓΑ parem esse.

A. . . . . Γ. . . . B

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ<sup>3</sup>. Ὅπῃ ἴδῃς δειξαι.

Quoniam enim ΑΒ par est, habet partem dimidiam. Propter eadem utique et ΒΓ habet partem dimidiam; quare et reliquus ΓΑ habet partem dimidiam; par igitur est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

Retranchons de ΓΔ l'unité ΔΕ; le reste ΓΕ sera un nombre pair (déf. 7. 7). Mais ΓΑ est un nombre pair (22. 9); donc la somme ΑΕ est un nombre pair (21. 9). Mais ΔΕ est une unité; donc ΑΔ est un nombre impair. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXIV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre pair, le reste sera pair.  
Que du nombre pair ΑΒ soit retranché le nombre pair ΒΓ; je dis que le reste ΓΑ est pair.

Car puisque ΑΒ est un nombre pair, ce nombre a une moitié. Par la même raison, ΒΓ a aussi une moitié; donc le reste ΓΑ a aussi une moitié; donc ΑΓ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

PROPOSITIO XXV.

Εάν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ,  
ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ  
ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ ΓΑ περισσὸς ἔστιν.

Si a pari numero impar aufertur, reliquus  
impar erit.

A pari enim ipso ΑΒ impar auferatur ΒΓ;  
dico reliquum ΓΑ imparem esse.

A . . . . . Γ. Δ. . . . Β

Αφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ  
ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ  
λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστι μονὰς  
ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν. Ὅπρι εἶδει  
δείξαι.

Auferatur ab ipso ΒΓ unitas ΓΔ; ergo ΔΒ  
par est. Est autem et ΑΒ par; et reliquus igitur  
ΑΔ par est. Atque est unitas ΓΔ; ergo ΓΑ  
impar est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

PROPOSITIO XXVI.

Εάν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ,  
ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Απὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω  
ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Si ab impari numero impar aufertur, re-  
liquus par erit.

Ab impari enim ipso ΑΒ impar auferatur ΒΓ;  
dico reliquum ΓΑ parem esse.

PROPOSITION XXV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre impair, le reste sera impair.

Que du nombre pair ΑΒ soit retranché le nombre impair ΒΓ; je dis que le  
reste ΓΑ est impair.

Car que l'unité ΓΔ soit retranchée de ΒΓ, le reste ΔΒ sera pair (déf. 7. 7).  
Mais ΑΒ est pair; donc le reste ΑΔ est pair (24. 9). Mais ΓΔ est l'unité; donc  
ΓΑ est impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre impair, le reste sera pair.

Que de ΑΒ impair soit retranché ΒΓ impair; je dis que le reste ΓΑ est pair.



## 96 LE NEUVIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ὁ AB περισσός ἐστιν, ἀφηρήσθω  
μονὰς ἢ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Διὰ  
Quoniam enim AB impar est, auferatur unitas  
BA; reliquus igitur AA par est. Per eadem

A. . . . Γ. . . . Δ. B

τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ  
λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.  
utique et ΓΔ par est; quare et reliquus ΓΑ  
par est. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

### PROPOSITIO XXVI.

Εάν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρήσῃ,  
ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Απὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ AB ἄρτιος ἀφηρήσθω  
ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Si ab impari numero par aufertur, reliquus  
impar erit.

Ab impari enim ipso AB par auferatur BG;  
dico reliquum ΓΑ imparem esse.

A. Δ. . . . Γ. . . . B

Αφηρήσθω γὰρ<sup>2</sup> μονὰς ἢ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός  
ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα  
ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἢ ΔΑ<sup>3</sup>·  
περισσός ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Auferatur enim unitas AA; ergo AB par est.  
Est autem et BG par; et reliquus igitur ΓΔ par  
est. Est autem et unitas ΔA; impar igitur est  
ΓA. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est impair, retranchons-en l'unité BA, le reste AA sera pair. Par la  
même raison ΓΔ sera pair; donc le reste ΓΑ sera pair (24. 9). Ce qu'il fallait  
démontrer.

### PROPOSITION XXVII.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre pair, le reste sera impair.

Que de AB impair soit retranché BG pair; je dis que le reste ΓΑ est impair.

Car soit retranchée l'unité AA; le nombre ΔB sera pair. Mais BG est pair; donc  
le reste ΓΔ est pair (24. 9). Mais ΔA est une unité; donc ΓΑ est impair (déf. 7. 7).  
Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

PROPOSITIO XXVIII.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιά-  
σας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περὶσσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολ-  
λαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ  
ἄρτιός ἐστιν.

Si impar numerus parem multiplicans facit  
aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem B multiplicans  
ipsum Γ faciat; dico Γ parem esse.

Α. . . . . Β. . . .  
Γ. . . . .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ  
παιποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων  
τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδης. Καὶ ἔστιν ὁ Β  
ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἁρτίων. Εάν δὲ  
ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν<sup>1</sup> συντιθῶσιν, ὁ ὅλος  
ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Ὅπερ ἴδι  
δείξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum  
Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqua-  
libus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est B  
par; ergo Γ componitur ex paribus. Si autem  
pares numeri quotcunque componuntur, totus  
par est; par igitur est Γ. Quod oportebat os-  
tendere.

PROPOSITION XXVIII.

Si un nombre impair multipliant un nombre pair fait un nombre, le produit  
sera pair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre pair B fasse Γ; je dis que Γ  
est pair.

Car puisque A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est composé d'autant  
de nombres égaux à B qu'il y a d'unités dans A. Mais B est pair; donc Γ  
est composé de nombres pairs. Mais la somme de tant nombres pairs que l'on  
voudra est un nombre pair (2. 9); donc Γ est un nombre pair. Ce qu'il fallait  
démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

## PROPOSITIO XXIX.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσῃ ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος περισσὸς ἔσται.

Περὶσσότερὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσὸς ἔστιν.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans facit aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A imparem B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ imparem esse.

A. . . . . B. . . . .  
Γ. . . . .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖται· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris equalibus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar; ergo Γ componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; quare Γ impar est. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XXIX.

Si un nombre impair multipliant un nombre impair fait un nombre, le produit sera impair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre impair B fasse r; je dis que r est impair.

Car puisque A multipliant B fait r, le nombre r est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A. Mais les nombres A, B sont impairs; donc r est composé de nombres impairs, dont la quantité est un nombre impair; donc r est un nombre impair (23. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσῃ.

Περὶσσότερ γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσῃ.

A . . . B . . . . .  
Γ . . .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω. Καὶ ἵππει ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα Β' σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστίν· ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἄρτιάκις, διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσῃ. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.

Si impar numerus parem numerum metitur, et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem B metiatur; dico et dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A ipsum B metitur, metiatur ipsum per Γ; dico Γ non esse imparem. Si enim possibile, sit. Et quoniam A ipsum B metitur per Γ; ergo A ipsum Γ multiplicans ipsum B fecit; ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; ergo B impar est, quod absurdum, supponitur enim par; non igitur Γ impar est; impar igitur est Γ; quare A ipsum B metitur pariter, ob id utique et dimidium ejus metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera sa moitié.

Que le nombre impair A mesure le nombre pair B; je dis qu'il mesurera sa moitié.

Car puisque A mesure B, qu'il le mesure par Γ; je dis que Γ n'est pas un nombre impair. Qu'il le soit, si cela est possible. Puisque A mesure B par Γ, le nombre A multipliant Γ fera B; donc B est composé de nombres impairs dont la quantité est un nombre impair; donc B est impair; ce qui est absurde, puisqu'il est supposé pair; donc Γ n'est pas impair; donc Γ est pair; donc A mesure B par un nombre pair; il mesurera sa donc moitié. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρὸς τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα<sup>1</sup> αὐτοῦ πρῶτος ᾖ.

Περὶ σὺν γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α' πρὸς τινα ἀριθμὸν τὸν Β' πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β' διπλασίον<sup>2</sup> ἔστω ἡ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α' πρὸς τὸν Γ' πρῶτος ἔστιν.

## PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus est, et ad duplum ipsius primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B primus sit, ipsius autem B duplus sit Γ; dico A ad Γ primum esse.

A. . . . . B. . . . .

Γ. . . . .

Δ—

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἔστιν ὁ Α' περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπὶ ὁ Δ' περισσὸς ὢν τὸν Γ' μετρίῃ, καὶ ἔστιν ὁ Γ' ἄρτιος· καὶ τὸν ἡμισυν ἄρα τοῦ Γ' μετρήσει ὁ Δ'. Τοῦ δὲ Γ' ἡμισύς ἐστιν ὁ Β'· ὁ Δ' ἄρα τὸν Β' μετρίῃ. Μετρίῃ δὲ καὶ τὸν Α'· ὁ Δ' ἄρα τοὺς Α, Β μετρίῃ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α' πρὸς τὸν Γ' πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim non sunt A, Γ primi, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et est A impar; impar igitur et Δ. Et quoniam Δ impar existens ipsum Γ metitur, atque est Γ par; et dimidium igitur ipsius Γ metietur ipse Δ. Ipsius autem Γ dimidium est ipse Β; ergo Δ ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Α; ergo Δ ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur Α ad Γ primus non est; ergo Α, Γ primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XXXI.

Si un nombre impair est premier avec un nombre, il sera premier avec son double.

Que le nombre impair A soit premier avec un nombre B, et que Γ soit double de B; je dis que A est premier avec Γ.

Car si les nombres Α, Γ ne sont pas premiers, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Mais Α est impair; donc Δ est impair. Et puisque Δ, qui est impair, mesure Γ, et que Γ est pair, le nombre Δ mesurera la moitié de Γ (30. 9). Mais Β est la moitié de Γ; donc Δ mesure Β. Mais il mesure Α; donc Δ mesure les nombres Α, Β, qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; donc Α ne peut point ne pas être premier avec Γ; donc les nombres Α, Γ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϚ.

PROPOSITIO XXXII.

Τῶν ἀπὸ δυάδος<sup>1</sup> διπλασιοζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυάδος<sup>2</sup> τῆς Α διδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτίοι εἰσι μόνον.

A binario duplatorum numerorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotcunque numeri B, Γ, Δ; dico B, Γ, Δ pariter pares esse tantum.

Ε, 1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ, φανερὸν ἀπὸ γὰρ δυάδος<sup>3</sup> ἐστὶ διπλασιασθείς. Λέγω<sup>4</sup> ὅτι καὶ μόνον. Ἐκείσθω γὰρ μονάς ἢ Ε<sup>5</sup>. Ἐπὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι ἂν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ δὲ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθίσταται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ. Καὶ ἐστὶν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἀρτίος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι<sup>6</sup> ἑκάτερος τῶν Α, Β, Γ ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον. Ὅπρ' ἴδει δείξαι.

At vero unumquemque ipsorum B, Γ, Δ pariter parem esse, manifestum est; a binario enim est duplatus. Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, et post unitatem ipse A primus est, maximus ipsorum Α, Β, Γ, Δ ipse Δ a nullo alio mensurabitur, nisi ab ipsis Α, Β, Γ. Atque est unusquisque ipsorum Α, Β, Γ par; ergo Δ pariter par est tantum. Similiter utique demonstrabimus unumquemque ipsorum Α, Β, Γ pariter parem esse tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXII.

Chacun des nombres doubles, à partir du binaire, est parement pair seulement.

Qu'à partir du binaire Α, soient tant de nombres doubles qu'on voudra Β, Γ, Δ; je dis que les nombres Β, Γ, Δ sont parement pairs seulement.

Il est évident que chacun des nombres Β, Γ, Δ est parement pair (déf. 8. 7); car chacun est double à partir du binaire. Je dis qu'il l'est seulement. Car soit l'unité Ε. Puisqu'à partir de l'unité, on aura autant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α est le premier après l'unité, le plus grand des nombres Α, Β, Γ, Δ, qui est Δ, ne sera mesuré par aucun nombre, si ce n'est par Α, Β, Γ (13. 9). Mais chacun des nombres Α, Β, Γ est pair; donc Δ est parement pair seulement. Nous démontrerons semblablement que chacun des nombres Α, Β, Γ est parement pair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

## PROPOSITIO XXXIII.

Εὰν ἀριθμὸς τὸν ἡμισυν ἔχη περισσὸν, ἀρτιά-  
κισ περισσὸς ἐστὶ μόνον.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἡμισυν ἔχεται περισσόν·  
λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκισ περισσὸς ἐστὶ μόνον.

Si numerus dimidium habet imparem, pariter  
impar est tantum.

Numerus enim A dimidium habeat imparem;  
dico A pariter imparem esse tantum.

A. . . . .

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκισ περισσὸς ἐστὶ, φανερόν·  
ὁ γὰρ ἡμισυν αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν  
ἀρτιάκισ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται  
ὁ Α καὶ ἀρτιάκισ ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὲρ  
ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἡμισυν  
αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὲρ ἀρτίου ἀριθμοῦ, πε-  
ρισσὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπον· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκισ  
περισσὸς ἐστὶ μόνον. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

At vero pariter imparem esse, manifestum  
est; dimidium enim ipsius impar existens meti-  
tur ipsum pariter. Dico utique et tantum. Si enim  
esset A et pariter par, mensuraretur a pari per  
parem numerum; quare et dimidium ipsius  
mensurabitur a pari numero, impar existens,  
quod est absurdum; ergo A pariter impar est  
tantum. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impaire, ce nombre est pairement impair seu-  
lement.

Que la moitié du nombre A soit impaire; je dis que A est pairement impair  
seulement.

Il est évident qu'il est pairement impair (déf. 9. 7); car sa moitié, qui est im-  
paire, le mesure par un nombre pair. Je dis qu'il l'est seulement. Car si A était  
aussi pairement pair, un nombre pair le mesurerait par un nombre pair (déf. 8. 7);  
donc sa moitié qui est impaire, serait mesurée par un nombre pair; ce qui est  
absurde; donc A est pairement impair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Εάν ἄρτιος<sup>1</sup> ἀριθμὸς μῆτε τῶν ἀπὸ δυάδος<sup>2</sup> διπλασιαζομένων ἢ, μῆτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκιςτε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μῆτε τῶν ἀπὸ δυάδος<sup>3</sup> διπλασιαζομένων ἔστω, μῆτε τὸν ἥμισυν ἔχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκιςτε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

A . . . . .

Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερὸν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν<sup>4</sup>. Εὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν<sup>5</sup> δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦμεν<sup>6</sup>, καταστήσομεν εἰς τινα ἀριθμὸν<sup>7</sup> περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ οὐ, καταστήσομεν εἰς δυάδα<sup>8</sup>, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος<sup>9</sup> διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ Α<sup>10</sup> ἀρτιάκις περισσός ἐστίν. Εδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκιςτε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si par numerus neque est a binario unus ex duplatis, neque dimidium habet imparem; et pariter par est, et pariter impar.

Numerus enim A neque sit a binario unus ex duplatis, neque dimidium habeat imparem; dico A pariter esse parem, et pariter imparem.

At vero pariter A esse parem, manifestum est; dimidium enim non habet imparem. Dico utique et pariter imparem esse. Si enim ipsum A secamus bifariam, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper facimus, incidemus in aliquem numerum imparem, qui metietur ipsum A per parem numerum. Si enim non, incidemus in binarium, et erit A a binario unus ex duplatis, quod non supponitur; quare A pariter impar est. Ostensum est autem et pariter parem; ergo A et pariter par est, et pariter impar. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIV.

Si un nombre, à partir du binaire, n'est pas un de ceux qui sont doubles, et si sa moitié n'est point impaire, il est pairement pair et pairement impair.

Que le nombre A, à partir du binaire, ne soit pas un de ceux qui sont doubles, et que sa moitié ne soit point impaire; je dis que A est pairement pair et pairement impair.

Or, il est évident que A est pairement pair (déf. 8. 7), puisque sa moitié n'est pas impaire. Je dis de plus que A est pairement impair; car si nous partageons A en deux parties égales, et sa moitié en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, nous arriverons à quelque nombre impair qui mesurera A par un nombre pair. Car si cela n'est point, nous arriverons au nombre binaire, et A sera, à partir du binaire, un des nombres qui sont doubles, ce qui n'est pas supposé; donc A est pairement impair. Mais on a démontré qu'il est pairement pair; donc A est pairement pair et pairement impair. Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΙ΄.

Εάν ὧσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἰξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἰσχατοῦ ἴσοι τῷ πρώτῳ ἴσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρώτον, οὕτως ἡ τοῦ ἰσχατοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.

Εστωσαν ὅσοιδηποτοῦν<sup>3</sup> ἀριθμοὶ ἰξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ὑπὸ ἱσχοῦ τοῦ Α, καὶ ἀφαιρεθῶσι ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λείψω ἔτι ἴσθιν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Α . . . . .  
Β . . . . Η . . . . . Γ  
Δ . . . . .  
Ε . . . . . Α . . . . . Κ . . . . . Θ . . . . . Ζ

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἴσθιν, ὡς ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος ἴσθιν<sup>4</sup>· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἴσθιν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α,

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, auferuntur autem et a secundo et ab ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, incipientes a minimo Α, et auferatur a ΒΓ et ab ΕΖ ipsi Α æqualis, uterque ipsorum ΗΓ, ΖΘ; dico esse ut ΒΗ ad Α ita ΕΘ ad Α, ΒΓ, Δ.

Ponatur enim ipsi quidem ΒΓ æqualis ΖΚ, ipsi autem Δ æqualis ΖΛ. Et quoniam ΖΚ ipsi ΒΓ æqualis est, quorum ΖΘ ipsi ΗΓ æqualis est; reliquus igitur ΘΚ reliquo ΗΒ est æqualis. Et quoniam est ut ΕΖ ad Α ita Δ ad ΒΓ et ΒΓ

## PROPOSITION XXXV.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ successivement proportionnels, à commencer du plus petit Α, et retranchons de ΒΓ et de ΕΖ les nombres ΗΓ, ΖΘ égaux chacun à Α; je dis que ΒΗ est à Α comme ΕΘ est à la somme des nombres Α, ΒΓ, Δ.

Faisons ΖΚ égal à ΒΓ, et ΖΛ égal à Δ. Puisque ΖΚ est égal à ΒΓ, et que ΖΘ est égal à ΗΓ, le reste ΘΚ est égal au reste ΗΒ. Et puisque ΕΖ est à Δ comme Δ est à ΒΓ

ἴσος δὲ ὁ μὲν  $\Delta$  τῷ  $ΖΑ$ , ὁ δὲ  $ΒΓ$  τῷ  $ΖΚ$ , ὁ δὲ  $Α$  τῷ  $ΖΘ$ · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $ΕΖ$  πρὸς τὸν  $ΑΖ$  οὕτως ὁ  $ΑΖ$  πρὸς τὸν  $ΖΚ$ , καὶ ὁ  $ΚΖ$  πρὸς τὸν  $ΖΘ$ · διελόντι, ὡς ὁ  $ΕΑ$  πρὸς τὸν  $ΑΖ$  οὕτως ὁ  $ΑΚ$  πρὸς τὸν  $ΖΚ$ , καὶ ὁ  $ΚΘ$  πρὸς τὸν  $ΖΘ$ · ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγούμενων πρὸς ἓνα τῶν ἡπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἡπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $ΚΘ$  πρὸς τὸν  $ΖΘ$  οὕτως οἱ  $ΕΑ$ ,  $ΑΚ$ ,  $ΚΘ$  πρὸς τοὺς  $ΑΖ$ ,  $ΚΖ$ ,  $ΘΖ$ . ἴσος δὲ ὁ μὲν  $ΚΘ$  τῷ  $ΒΗ$ , ὁ δὲ  $ΖΘ$  τῷ  $Α$ , οἱ δὲ  $ΑΖ$ ,  $ΚΖ$ ,  $ΖΘ$  τοῖς  $\Delta$ ,  $ΒΓ$ ,  $Α$ · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ  $ΒΗ$  πρὸς τὸν  $Α$  οὕτως ὁ  $ΕΘ$  πρὸς τοὺς  $\Delta$ ,  $ΒΓ$ ,  $Α$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἰσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad  $A$ , æqualis autem  $\Delta$  ipsi  $ΖΑ$ , ipse et  $ΒΓ$  ipsi  $ΖΚ$ , ipse et  $A$  ipsi  $ΖΘ$ ; est igitur ut  $ΕΖ$  ad  $ΑΖ$  ita  $ΑΖ$  ad  $ΖΚ$ , et  $ΚΖ$  ad  $ΖΘ$ ; dividendo, ut  $ΕΑ$  ad  $ΑΖ$  ita  $ΑΚ$  ad  $ΖΚ$ , et  $ΚΘ$  ad  $ΖΘ$ ; est igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut  $ΚΘ$  ad  $ΖΘ$  ita  $ΕΑ$ ,  $ΑΚ$ ,  $ΚΘ$  ad  $ΑΖ$ ,  $ΚΖ$ ,  $ΘΖ$ . Æqualis autem  $ΚΘ$  ipsi quidem  $ΒΗ$ , ipse vero  $ΖΘ$  ipsi  $A$ , et  $ΑΖ$ ,  $ΚΖ$ ,  $ΘΖ$  ipsis  $\Delta$ ,  $ΒΓ$ ,  $A$ ; est igitur ut  $ΒΗ$  ad  $A$  ita  $ΕΘ$  ad  $\Delta$ ,  $ΒΓ$ ,  $A$ ; est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes. Quod oportebat ostendere.

et comme  $ΒΓ$  est à  $A$ ; que  $\Delta$  est égal à  $ΖΑ$ ; que  $ΒΓ$  est égal à  $ΖΚ$ , et  $A$  égal à  $ΖΘ$ , le nombre  $ΕΖ$  est à  $ΖΑ$  comme  $ΑΖ$  est à  $ΖΚ$ , et comme  $ΚΖ$  est à  $ΖΘ$ ; donc par soustraction,  $ΕΑ$  est à  $ΑΖ$  comme  $ΑΚ$  est à  $ΖΚ$ , et comme  $ΚΘ$  est à  $ΖΘ$ ; donc un des antécédents est à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 7); donc  $ΚΘ$  est à  $ΖΘ$  comme la somme des nombres  $ΕΑ$ ,  $ΑΚ$ ,  $ΚΘ$  est à la somme des nombres  $ΑΖ$ ,  $ΚΖ$ ,  $ΘΖ$ . Mais  $ΚΘ$  est égal à  $ΒΗ$ ,  $ΖΘ$  à  $A$ , et la somme des nombres  $ΖΑ$ ,  $ΚΖ$ ,  $ΘΖ$  à la somme des nombres  $\Delta$ ,  $ΒΓ$ ,  $A$ ; donc  $ΒΗ$  est à  $A$  comme  $ΕΘ$  est à la somme des nombres  $\Delta$ ,  $ΒΓ$ ,  $A$ ; donc l'excès du second est au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϚ'.

## PROPOSITIO XXXVI.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτιθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γίνηται, καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τὴν ἰσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γινόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείμενος ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γίνηται, οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta$ , καὶ τῷ σύμπαρτι ἴσος ἔστω ὁ  $E$ , καὶ ὁ  $E$  τὸν  $\Delta$  πολλαπλασιάσας τὸν  $ZH$  ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ  $ZH$  τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γὰρ εἰσιν οἱ  $A, B, \Gamma, \Delta$  τῷ πλείω τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ  $E$  εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ  $E, \Theta K, \Lambda, M$ . Διότου ἄρα ἐστὶν ὥς ὁ  $A$  πρὸς τὸν  $\Delta$  οὕτως ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $M$ . ὁ ἄρα ἐκ τῶν  $E, \Delta$  ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν  $A, M$ . Καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν  $E, \Delta$  ὁ  $ZH$ · καὶ ὁ ἐκ τῶν  $A, M$

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri  $A, B, \Gamma, \Delta$  in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et toti æqualis sit ipse  $E$ , et  $E$  ipsum  $\Delta$  multiplicans ipsum  $ZH$  faciat; dico  $ZH$  perfectum esse.

Quot enim sunt  $A, B, \Gamma, \Delta$  multitudine tot ab ipso  $E$  sumantur ipsi  $E, \Theta K, \Lambda, M$  in duplâ analogiâ; ex æquo igitur est ut  $A$  ad  $\Delta$  ita  $E$  ad  $M$ ; ipse igitur ex  $E, \Delta$  æqualis est ipsi ex  $A, M$ . Et est ipse ex  $E, \Delta$  ipse  $ZH$ ; et

## PROPOSITION XXXVI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra  $A, B, \Gamma, \Delta$  successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme devienne un nombre premier; que  $E$  soit égal à leur somme, et que  $E$  multipliant  $\Delta$  fasse  $ZH$ ; je dis que  $ZH$  est un nombre parfait.

Car, à partir de  $E$ , prenons une quantité de nombres, en raison double, qui soit égale à celle des nombres  $A, B, \Gamma, \Delta$ ; que ces nombres soient  $E, \Theta K, \Lambda, M$ ; par égalité,  $A$  sera à  $\Delta$  comme  $E$  est à  $M$  (14. 7); donc le produit de  $E$  par  $\Delta$  sera égal au produit de  $A$  par  $M$  (19. 7). Mais le produit de  $E$  par  $\Delta$  est  $ZH$ ; donc le

# LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 107

ἄρα ἴσιν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλα-  
 σιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ με-  
 τρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Καὶ ἴστι δυὰς  
 ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἴστιν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἰσὶ δὲ  
 καὶ οἱ Μ, Α, ΘΚ, Ε ἱξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων·  
 οἱ Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ ἄρα ἱξῆς ἀνάλογόν εἰσιν

ipse ex Α, Μ igitur est ΖΗ; ergo Α ipsum Μ  
 multiplicans ipsum ΖΗ fecit; ergo Μ ipsum  
 ΖΗ metitur per unitates quæ in Α. Atque est  
 binarius Α; duplus igitur est ΖΗ ipsius Μ. Sunt  
 autem et Μ, Α, ΘΚ, Ε deinceps dupli inter se;  
 ergo Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ deinceps proportionales

|        |       |        |       |                 |
|--------|-------|--------|-------|-----------------|
| 1.     | Α, 2. | Β, 4.  | Γ, 8. | Δ, 16.          |
|        |       | 62     |       |                 |
| Ε, 31. | Θ     | Ν      | Κ     | Α, 124. Μ, 248. |
|        | 31    | 31     |       |                 |
| Ζ      | Ξ     | 496    |       | Η               |
| 31     |       | 465    |       |                 |
| Π----- |       | Ο----- |       |                 |

ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Αφηρέσθω δὴ ἀπὸ  
 τοῦ διυτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἴσχατοῦ τοῦ ΖΗ  
 τῶ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ·  
 ἴστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ διυτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ  
 πρὸς τὸν πρώτον οὕτως ἡ τοῦ ἴσχατος ὑπεροχὴ  
 πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτῷ πάντας· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ  
 ΝΚ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Α,  
 ΘΚ, Ε. Καὶ ἴστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ  
 ἄρα ἴσος ἴστί τοῖς Μ, Α, ΘΚ, Ε. Εστί δὲ καὶ

sunt in duplâ analogiâ. Auferatur igitur a se-  
 cundo ΘΚ et ab ultimo ΖΗ ipsi primo Ε  
 æqualis, uterque ipsorum ΘΝ, ΖΞ; est igitur ut  
 secundi numeri excessus ad primum ita ex-  
 cessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes;  
 est igitur ut ΝΚ ad Ε ita ΞΗ ad Μ, Α, ΘΚ, Ε.  
 Et est ΝΚ æqualis ipsi Ε; et ΞΗ igitur æqualis  
 est ipsis Μ, Α, ΘΚ, Ε. Est autem et ΞΖ ipsi

produit de Α par Μ est aussi ΖΗ; donc Α multipliant Μ fait ΖΗ; donc Μ mesure ΖΗ  
 par les unités qui sont en Α. Mais Α est le nombre binaire; donc ΖΗ est double  
 de Μ; mais les nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε sont successivement doubles les uns des autres;  
 donc Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ sont successivement proportionnels en raison double. Retran-  
 chons du second ΘΚ et du dernier ΖΗ, les nombres ΘΝ, ΖΞ égaux chacun  
 au premier Ε; l'excès du second nombre sera au premier comme l'excès du  
 dernier est à la somme des nombres qui sont avant lui (35. 9); donc ΝΚ est à Ε  
 comme ΞΗ est à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΝΚ est égal à Ε; donc  
 ΞΗ est égal à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΞΖ est égal à Ε, et Ε

# 108 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ΕΖ τῶ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Α, Μ καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Δείξω ὅτι ὁ καὶ<sup>3</sup> ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶρεξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖται τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ ἴστω ὁ αὐτός. Καὶ

E æqualis, sed E ipsis Α, Β, Γ, Δ et unitati; totus igitur ZH æqualis est et ipsis Ε, ΘΚ, Α, Μ et ipsis Α, Β, Γ, Δ et unitati, et mensuratur ab ipsis. Dico et ZH a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ et ab unitate. Si enim possibile, metiatur aliquis Ο ipsum ZH, et ipse Ο cum nullo ipsorum Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ sit idem. Et quoties Ο ipsum

|        |       |       |        |                 |
|--------|-------|-------|--------|-----------------|
| 1.     | Α, 2. | Β, 4. | Γ, 8.  | Δ, 16.          |
|        |       | 62    |        |                 |
| Ε, 31. | Θ     | Ν     | Κ      | Α, 124. Μ, 248. |
|        |       | 31    | 31     |                 |
| Ζ      | Ε     | 496   |        | Η               |
|        | 31    |       | 465    |                 |
| Π----- |       |       | Ο----- |                 |

ἴσakis ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάζας τὸν ΖΗ πεποιήκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάζας τὸν ΖΗ πεποιήκεν· ἐστὶν ἄρα ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἐστίν<sup>5</sup>· ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ με-

ZH metitur tot unitates sint in Π; ergo Π ipsum Ο multiplicans ipsum ZH fecit. At vero quidem Ε ipsum Δ multiplicans ipsum ZH fecit; est igitur ut Ε ad Π ita Ο ad Δ. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt Α, Β, Γ, Δ, sed post unitatem ipse Α primus est; ergo Δ a nullo alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis

égal à la somme des nombres Α, Β, Γ, Δ augmentée de l'unité; donc ΖΗ tout entier égale la somme des nombres Ε, ΘΚ, Α, Μ augmentée de la somme des nombres Α, Β, Γ, Δ et de l'unité, et ΖΗ est mesuré par tous ces nombres (11. 9). Je dis que ΖΗ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par les nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ et par l'unité. Car si cela est possible, que quelque nombre Ο mesure ΖΗ, et que Ο ne soit aucun des nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ. Qu'il y ait dans Π autant d'unités que Ο mesure de fois ΖΗ; le nombre Π multipliant Ο fera ΖΗ. Mais Ε multipliant Δ fait ΖΗ; donc Ε est à Π comme Ο est à Δ (19. 7). Et puisque, à partir de l'unité, les nombres Α, Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que le premier nombre après l'unité est Α, le nombre Δ n'est mesuré par aucun

τρηθήσεται, πάρειξ τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. Αλλ' ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>6</sup> ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμοὺς<sup>7</sup> ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν<sup>8</sup>. οἱ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς<sup>9</sup> ἰσάκεις, ὁ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ο δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρειξ τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Εστω τῷ Β ὁ αὐτός. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε, οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καὶ εἰσὶν οἱ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διίτου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>10</sup> ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β, Α ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Ε. Αλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Α· ἔστιν ἄρα

Α, Β, Γ; et supponitur Ο cum nullo ipsorum Α, Β, Γ idem; non igitur metietur Ο ipsum Δ. Sed ut Ο ad Δ ita Ε ad Π; neque Ε igitur ipsum Π metitur. Et est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Π primi inter se sunt. Sed primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; et est ut Ε ad Π ita Ο ad Δ; æqualiter igitur Ε ipsum Ο metitur atque Π ipsum Δ. Sed Δ a nullo alio mensuratur, nisi ab ipsis Α, Β, Γ; ergo Π cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Sit cum ipso Β idem. Et quot sunt Β, Γ, Δ multitudine tot sumantur Ε, ΘΚ, Λ ab ipso Ε. Et sunt Ε, ΘΚ, Λ cum ipsis Β, Γ, Δ in eadem ratione; ex æquo igitur est ut Β ad Δ ita Ε ad Α; ipse igitur ex Β, Α æqualis est ipsi ex Δ, Ε. Sed ipse ex Δ, Ε æqualis est ipsi ex Π, Ο; et ipse ex Π, Ο igitur æqualis est ipsi ex Β, Α; est igitur ut Π ad Β ita Α ad Ο.

autre nombre que par Α, Β, Γ (13. 9); mais on a supposé que Ο n'est aucun des nombres Α, Β, Γ; donc Ο ne mesure pas Δ. Mais Ο est à Δ comme Ε est à Π; donc Ε ne mesure pas Π (déf. 21. 7). Mais Ε est un nombre premier, et tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); donc les nombres Ε, Π sont premiers entre eux. Mais les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), et Ε est à Π comme Ο est à Δ; donc Ε mesure Ο autant de fois que Π mesure Δ. Mais Δ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par Α, Β, Γ; donc Π est un des nombres Α, Β, Γ. Qu'il soit Β. A partir de Ε, prenons les nombres Ε, ΘΚ, Λ égaux en quantité aux nombres Β, Γ, Δ. Mais les nombres Ε, ΘΚ, Λ sont en même raison que les nombres Β, Γ, Δ; donc, par égalité, Β est à Δ comme Ε est à Α; donc le produit de Β par Α est égal au produit de Δ par Ε (19. 7). Mais le produit de Δ par Ε est égal au produit de Π par Ο; donc le produit de Π par Ο est égal au produit

## 110 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ὁ  $\Pi$  πρὸς τὸν  $B$  οὕτως<sup>11</sup> ὁ  $\Lambda$  πρὸς τὸν  $O$ . Καὶ ἴσθιν ὁ  $\Pi$  τῇ  $B$  ὁ αὐτός· καὶ ὁ  $\Lambda$  ἄρα τῇ  $O$  ἴσθιν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὃ γὰρ  $O$  ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν  $ZH$  μετρεῖ τις ἀριθμός, πᾶσιξ τῶν  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$  καὶ τῆς μονάδος. Καὶ εἰδείχθη ὁ  $ZH$  τοῖς  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ , καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τέλειος δὲ ἀριθμός ἐσθιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρειν ἴσος ὢν· τέλειος ἄρα ἐσθιν ὁ  $ZH$ . Οὔπερ εἰδὲ διῆξαι.

Et est  $\Pi$  cum ipso  $B$  idem; et  $\Lambda$  igitur cum ipso  $O$  est idem, quod impossibile, etenim  $O$  supponitur cum nullo ipsorum expositorum idem; non igitur ipsum  $ZH$  metitur aliquis numerus, præter ipsos  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$  et unitatem. Et ostensus est  $ZH$  ipsis  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ , et unitati æqualis; perfectus autem numerus est suis ipsius partibus æqualis existens; perfectus igitur est  $ZH$ . Quod oportebat ostendere.

de  $B$  par  $\Lambda$ ; donc  $\Pi$  est à  $B$  comme  $\Lambda$  est à  $O$  (19. 7). Mais  $\Pi$  est le même que  $B$ ; donc  $\Lambda$  est le même que  $O$ , ce qui est impossible; car on a supposé que  $O$  n'était aucun des nombres  $A, B, \Gamma$ ; donc aucun nombre ne mesure  $ZH$ , si ce ne sont les nombres  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$  et l'unité. Mais on a démontré que  $ZH$  égale la somme des nombres  $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$  augmentée de l'unité, et un nombre parfait est celui qui est égal à ses parties (déf. 23. 7); donc  $ZH$  est un nombre parfait. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU NEUVIÈME LIVRE.

# E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

### L I B E R D E C I M U S .

---

#### ΟΡΟΙ.

α. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β. Ασύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γινέσθαι.

γ. Εὐθεΐαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ἔταν τὰ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρήται.

#### DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eâdem mensurâ mesurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mesurantur.

## LE DIXIÈME LIVRE

## DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

---

#### DÉFINITIONS.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.



δ'. Ασύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον ᾗσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει· καλεῖσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα, ῥητή.

ς'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει, εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλεῖσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῃ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῃ ἀσύμμετρα<sup>3</sup>, ἄλογα καλεῖσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμει αὐτὰ, ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνα<sup>4</sup> εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἑτέρα τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα<sup>5</sup> αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocentur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le quarré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

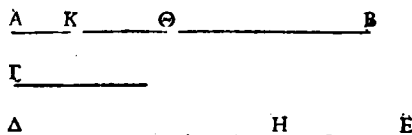
PROPOSITIO I.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἰὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπεμένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίγνηται· λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἴσται ἔλαστον τοῦ ἐκκειμένου ἔλαττονος μεγέθους.

Ἐστω δύο μεγέθη ἀνίστα τὰ AB, Γ, ὧν μείζον τὸ AB· λέγω ὅτι ἰὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίγνηται, λειφθήσεται τι μέγεθος ὃ ἴσται<sup>2</sup> ἔλαστον τοῦ Γ μεγέθους.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB; dico si ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relictum iri quamdam magnitudinem quæ erit minor magnitudine Γ.



Τὸ Γ γὰρ<sup>3</sup> πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὲ τοῦ AB<sup>4</sup> μείζον. Πιπολλαπλασιάσθω, καὶ ἴστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ

Etenim Γ multiplicata erit aliquando ipsâ AB minor. Multiplicetur, et sit ΔΕ ipsius quidem Γ multiplex, ipsâ autem AB major, et dividatur ΔΕ in partes ipsi Γ æquales ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, et auferatur ab AB quidem ipsa BΘ major quam

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

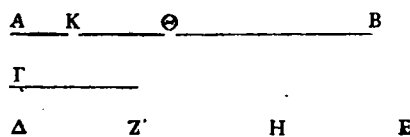
Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.

Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔΕ soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔΕ en parties ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie BΘ

# 114 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο αἰὲς γιγνέσθω ἕως αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γίνωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσειν· ἴστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὕτως ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

dimidium ΒΘ, ab ΑΘ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium, et hoc semper fiat quoad divisiones ipsius ΑΒ multitudine æquales fiant ipsius ΔΕ divisionibus; sint igitur divisiones ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ multitudine æquales ipsis ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.



Καὶ ἐπεὶ μείζον ἴστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφ' ἧται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεως<sup>5</sup> τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ<sup>6</sup> τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μείζον ἴστι. Καὶ ἐπεὶ μείζον ἴστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφ' ἧται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ<sup>7</sup> τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μείζον ἴστιν. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μείζον ἴστιν. Ἐλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μέγεθος τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὅν τοῦ ἐκκειμένου ἑλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam major est ΔΕ quam ΑΒ, et ablata est ab ΔΕ quidem ipsa ΕΗ minor quam dimidium, ab ΑΒ autem ipsa ΒΘ major quam dimidium; reliquum igitur ΗΔ reliquo ΘΑ majus est. Et quoniam major est ΗΔ quam ΘΑ, et ablatum est ab ipsâ quidem ΗΔ dimidium ΗΖ, ab ΘΑ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium; reliquum igitur ΔΖ reliquo ΑΚ majus est. Æqualis autem ΔΖ ipsi Γ; et Γ igitur quam ΑΚ major est. Minor igitur ΑΚ quam Γ; relicta est igitur ex magnitudine ΑΒ magnitudo ΑΚ minor existens expositâ minore magnitudine Γ. Quod oportebat ostendere.

plus grande que sa moitié, de ΑΘ une partie ΘΚ plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de ΑΒ soit égal au nombre des divisions de ΔΕ; que le nombre des divisions ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ soit donc égal au nombre des divisions ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Puisque ΔΕ est plus grand que ΑΒ, et qu'on a retranché de ΔΕ une partie ΕΗ plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de ΑΒ une partie ΒΘ plus grande que sa moitié, le reste ΗΔ est plus grand que le reste ΘΑ. Et puisque ΗΔ est plus grand que ΘΑ, qu'on a retranché de ΗΔ sa moitié ΗΖ, et que de ΘΑ on a retranché ΘΚ plus grand que sa moitié, le reste ΔΖ sera plus grand que le reste ΑΚ. Mais ΔΖ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que ΑΚ; donc ΑΚ est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur ΑΒ une grandeur ΑΚ plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 115

Ομοίως δὲ διχθύσεται, καὶ ἡμίση<sup>8</sup> ἢ τὰ ἀφαιρούμενα<sup>9</sup>.

Similiter autem demonstrabitur, et si dimidia essent ablata.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

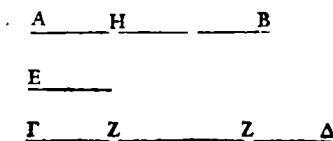
Εὰν δύο μεγέθων ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου αὐτὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρήῃ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθων ὄντων<sup>1</sup> ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ<sup>2</sup> ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου αὐτὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖται τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

## PROPOSITIO II.

Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

Duabus enim magnitudinibus existentibus inæqualibus ΑΒ, ΓΔ, et minore ΑΒ, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metiatur præcedentem; dico incommensurabiles esse ΑΒ, ΓΔ magnitudines.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ<sup>3</sup> Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω

Si enim sunt commensurabiles, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, si possibile, et sit Ε; et ΑΒ quidem ipsam ΔΖ metiens relinquat

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

## PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

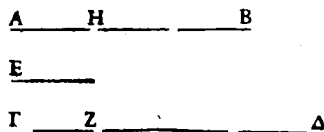
Soient les deux grandeurs inégales ΑΒ, ΓΔ; que ΑΒ soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; je dis que les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables.

Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit Ε; que ΑΒ mesurant ΔΖ

## 116 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ κατα-  
μετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ  
τοῦτο αἰεὶ γιγνέσθω, ὥς οὗ λειφθῇ τι μέγεθος,  
ὃ ἴσθιν ἔλασσον τοῦ Ε. Γεγονέντω, καὶ λελείφθω  
τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ  
μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα

se ipsâ minorem ΓΖ; sed ΓΖ ipsam ΒΗ metiens  
relinquat se ipsâ minorem ΑΗ, et hoc semper  
fiat, quoad relinquatur aliqua magnitudo, quæ  
sit minor quam Ε. Fiat, et relinquatur ΑΗ minor  
quam Ε. Quoniam igitur Ε ipsam ΑΒ metitur, sed  
ΑΒ ipsam ΔΖ metitur; et Ε igitur ipsam ΔΖ



τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ  
λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ  
μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ  
καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει,  
τὸ μᾶλλον τὸ ἔλασσον, ὅπρι ἴσθιν ἄδύνατον.  
Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος·  
ἀσύμμετρα ἄρα ἴσθιν τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam  
igitur ΓΖ metietur. Sed ΓΖ ipsam ΒΗ metitur;  
et Ε igitur ipsam ΒΗ metitur. Metitur autem et  
totam ΑΒ; et reliquam igitur ΑΗ metietur,  
major minorem, quod est impossibile. Non  
igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ metietur aliqua  
magnitudo; incommensurabiles igitur sunt mag-  
nitudines ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Si igitur duabus magnitudinibus, etc.

laisse ΓΖ plus petit que lui; que ΓΖ mesurant ΒΗ laisse ΑΗ plus petit que lui; que  
l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui  
soit plus petite que Ε. Que cela soit fait, et qu'il reste ΑΗ plus petit que Ε  
(1. 10). Puisque Ε mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΔΖ, Ε mesurera ΔΖ. Mais Ε  
mesure ΓΔ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΓΖ. Mais ΓΖ mesure ΒΗ; donc  
Ε mesure ΒΗ. Mais Ε mesure ΑΒ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΑΗ, le plus  
grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les  
grandeurs ΑΒ, ΓΔ; donc les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

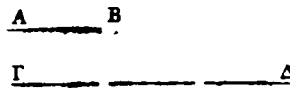
PROPOSITIO III.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Ἐστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα<sup>1</sup> τὰ AB, ΓΔ, ὧν ἴλασσον τὸ AB· δεῖ δὲ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB; oportet igitur ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.



Τὸ AB γὰρ μέγεθος ἤτοι<sup>2</sup> μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὐ.  
Εἰ μὲν οὐ<sup>3</sup> μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ AB ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερόν ἐστι καὶ μέγιστόν<sup>4</sup>· μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Etenim AB magnitudo vel metitur ΓΔ vel non. Si quidem metitur, metitur autem et se ipsam; ergo AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est, et manifestum est etiam maximam; major enim magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Μὴ μετρεῖται δὲ τὸ AB τὸ ΓΔ· καὶ ἀνθυφαιρουμένου αὐτὸ τοῦ ἱλάσσονος<sup>5</sup> ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ,

Non metiatur autem AB ipsam ΓΔ; et deductâ semper minore de maiore, reliqua metietur aliquando præcedentem, propterea

PROPOSITION III.

Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (2. 10), parce que les

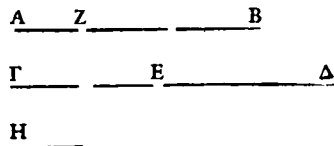
# 118 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΕΔ<sup>6</sup> καταμετροῦν λιπέτω ἑαυτοῦ ἕλασεν τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λιπέτω ἑαυτοῦ ἕλασεν τὸ ΑΖ, τὸ ΑΖ δὲ<sup>7</sup> τὸ ΓΕ μετρεῖται.

Επεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ ΑΖ. Αλλὰ τὸ AB τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ

quod non sint incommensurabiles AB, ΓΔ; et AB quidem ipsam ΕΔ metiens relinquat se ipsā minorem ΕΓ, sed ΕΓ ipsam ΖΒ metiens relinquat se ipsā minorem ΑΖ, et ΑΖ ipsam ΓΕ metiatur.

Quoniam igitur ΑΖ ipsam ΓΕ metitur, sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΖΒ metitur. Metitur autem et se ipsam; et totam igitur AB metietur ipsa ΑΖ. Sed AB ipsam ΔΕ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΔΕ metietur. Metitur autem et ipsam ΓΕ; et totam igitur ΓΔ me-



AB, ΓΔ μετρεῖ<sup>8</sup>· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἴστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ, ἴσται τι μέγιστος μείζων τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ AB, ΓΔ. Εστω<sup>9</sup> τὸ Η. Επεὶ οὖν τὸ Η τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ<sup>10</sup> λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Αλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB· καὶ λοιπὸν<sup>11</sup> τὸ

titur; ergo ΑΖ ipsas AB, ΓΔ metitur; ergo ΑΖ ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non, erit aliqua magnitudo major ipsā ΑΖ, quæ metietur ipsas AB, ΓΔ. Sit Η. Quoniam igitur Η ipsam AB metitur, sed AB ipsam ΕΔ metitur; et Η igitur ipsam ΕΔ metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam igitur ΓΕ metietur Η. Sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et Η igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et totam AB; et reliquam

grandeurs AB, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que AB mesurant ΕΔ laisse ΕΓ plus petit que lui; que ΕΓ mesurant ΖΒ laisse ΑΖ plus petit que lui, et enfin que ΑΖ mesure ΓΕ.

Puisque ΑΖ mesure ΓΕ, et que ΓΕ mesure ΖΒ, ΑΖ mesurera ΖΒ. Mais ΑΖ se mesure lui-même; donc ΑΖ mesurera AB tout entier. Mais AB mesure ΔΕ; donc ΑΖ mesurera ΔΕ. Mais il mesure ΓΕ; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc ΑΖ mesure les grandeurs AB, ΓΔ; donc ΑΖ est une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que ΑΖ qui mesurera AB et ΓΔ. Qu'elle soit Η. Puisque Η mesure AB, et que AB mesure ΕΔ, Η mesurera ΕΔ. Mais Η mesure ΓΔ tout entier; donc Η mesurera le reste ΓΕ. Mais ΓΕ mesure ΖΒ; donc Η mesurera ΖΒ. Mais il mesure AB tout entier; il mesurera donc le reste ΑΖ, le plus grand le



## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 119

ΑΖ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μείζον τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ<sup>12</sup> μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

igitur ΑΖ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur major aliqua magnitudo ipsâ ΑΖ ipsas ΑΒ, ΓΔ metietur; ergo ΑΖ ipsarum ΑΒ, ΓΔ maxima communis mensura est.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis ΑΒ, ΓΔ, maxima communis mensura inventa est ΑΖ. Quod oportebat facere.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἰὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρίσκει.

### COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

### PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que ΑΖ ne mesurera pas ΑΒ et ΓΔ; donc ΑΖ est la plus grande commune mesure des grandeurs ΑΒ, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure ΑΖ des deux grandeurs commensurables données ΑΒ, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

### C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

### PROPOSITION IV.

Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.



# 120 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ  
Α, Β, Γ· δι' δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν  
μέτρον εὑρεῖν.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles  
Α, Β, Γ; oportet igitur ipsarum Α, Β, Γ maximam  
communem mensuram invenire.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_

Εἰλήφθω γὰρ δύοι τῶν Α, Β τὸ μέγιστον  
κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ  
ἥτοι μετρεῖ ἢ οὐ<sup>2</sup>. Μετρεῖται πρότερον. Επεὶ  
εὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β·  
τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ<sup>3</sup>. τὸ Δ ἄρα τῶν  
Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερόν ὅτι  
καὶ μέγιστον, μᾶλλον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ  
Α, Β οὐ μετρεῖ<sup>5</sup>.

Μὴ μετρεῖται δὴ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον  
ἔτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. Επεὶ γὰρ σύμ-  
μετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέ-  
γεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε  
καὶ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ με-  
τρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον  
μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστί

Sumatur enim duarum Α, Β maxima com-  
munis mensura, et sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel  
metitur vel non. Metiatur primum. Quoniam  
igitur Δ ipsam Γ metitur, metitur autem et ipsas  
Α, Β; ergo Δ ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Δ  
ipsarum Α, Β, Γ communis mensura est. Mani-  
festum est etiam et maximam, major enim mag-  
nitudine Δ ipsas Α, Β non metitur.

Sed non metiatur Δ ipsam Γ. Dico primum  
commensurabiles esse Γ, Δ. Quoniam enim  
commensurabiles sunt Α, Β, Γ, metietur aliqua  
eas magnitudo, quæ scilicet et ipsas Α, Β me-  
tietur; quare et ipsarum Α, Β maximam com-  
munem mensuram Δ metietur. Metitur autem  
et Γ; quare dicta magnitudo metietur ipsas Γ, Δ;

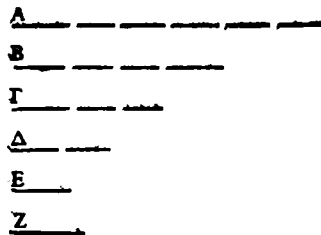
Soient Α, Β, Γ les trois grandeurs commensurables données; il faut trouver la  
plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ.

Prenons la plus grande commune mesure de Α et de Β (3. 10), et qu'elle soit Δ;  
Δ mesure Γ ou ne le mesure pas. Qu'il le mesure d'abord. Puisque Δ mesure  
Γ, et qu'il mesure aussi Α et Β, Δ mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Δ  
est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Et il est évident qu'il en est  
la plus grande, car une grandeur plus grande que Δ ne mesure pas Α et Β.

Mais que Δ ne mesure pas Γ; je dis d'abord que les grandeurs Γ, Δ sont  
commensurables. Car puisque les grandeurs Α, Β, Γ sont commensurables,  
quelque grandeur les mesurera; mais cette même grandeur mesurera Α et Β;  
elle mesurera donc leur plus grande commune mesure Δ. Mais cette même  
grandeur mesure Γ; donc elle mesure Γ et Δ; donc Γ et Δ sont commensurables

τὰ Γ, Δ. Εἰλήφθω οὖν<sup>6</sup> αὐτῶν τὸ μίγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει<sup>7</sup>. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ<sup>8</sup>. τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν ἐστὶ μέτρον<sup>9</sup>. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μίγιστον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε

commensurabiles igitur sunt Γ, Δ. Sumatur itaque ipsarum maxima communis mensura, et sit Ε. Quoniam igitur Ε ipsam Δ metitur, sed Α ipsas Α, Β metitur; et Ε igitur ipsas Α, Β metietur. Metitur autem et Γ. Ergo Ε ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ communis est mensura. Dico et maximam. Si enim possibile, sit



μείζον μίγιστος τὸ Ζ, καὶ μετρεῖται τὰ Α, Β, Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα<sup>10</sup> μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β<sup>11</sup> μίγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μίγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μίγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μίγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ<sup>12</sup>, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅπρι ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

aliqua ipsa Ε major magnitudo Ζ, et metietur ipsas Α, Β, Γ. Et quoniam Ζ ipsas Α, Β, Γ metitur, et ipsas Α, Β igitur metietur; et ipsarum Α, Β maximam communem mensuram metietur. Sed ipsarum Α, Β maxima communis mensura est Δ; ergo Ζ ipsam Δ metitur. Metitur autem et ipsam Γ; ergo Ζ ipsas Γ, Δ metitur; et igitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram metietur Ζ. Sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ergo Ζ ipsam Ε metitur, major minorem, quod est

(déf. 1. 10). Prenons donc leur plus grande commune mesure (3. 10), et qu'elle soit Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure Α et Β, Ε mesurera Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Je dis aussi qu'elle en est la plus grande. Car que ce soit Ζ plus grand que Ε, si cela est possible, et que Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ. Puisque Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ, il mesurera Α et Β; il mesurera donc la plus grande commune mesure de Α et Β (cor. 3. 10). Mais la plus grande commune mesure de Α et de Β est Δ; donc Ζ mesure Δ; mais il mesure Γ; donc Ζ mesure Γ et Δ; donc Ζ mesurera la plus grande commune mesure de Γ et de Δ. Mais la plus grande commune mesure de Γ et de Δ est Ε; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc une

## 122 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀρα μείζον τι τοῦ Ε μεγέθους μέγεθος τὰ Α, Β, Γ μεγίστη<sup>13</sup> μετρεῖ τὸ Ε ἀρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέ- impossible; non igitur major aliqua ipsâ Ε magnitudine magnitudo ipsas Α, Β, Γ magnitudines

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Ε \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

γιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἰὰν<sup>14</sup> μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ· ἰὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.

Τριῶν ἀρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων<sup>15</sup>, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἰὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσῃ<sup>16</sup>.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλείονων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσῃ<sup>17</sup>.

metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ maxima communis mensura est, si non metitur Δ ipsam Γ; si autem metitur, ipsa Δ.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima communis mensura inventa est. Quod oportebat facere.

### COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

Similiter autem et in pluribus maxima communis mensura invenietur, et corollarium procedet.

grandeur plus grande que la grandeur Ε ne mesurera pas les grandeurs Α, Β, Γ; donc Ε sera la plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ, si Δ ne mesure pas Γ; et s'il le mesure, ce sera Δ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure de trois grandeurs commensurables données. Ce qu'il fallait faire.

### C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si une grandeur mesure trois grandeurs, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

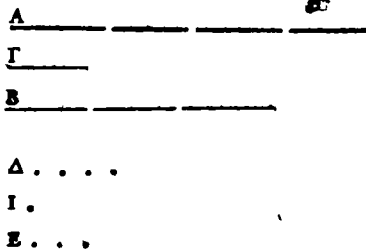
On trouvera semblablement la plus grande commune mesure d'un plus grand nombre de grandeurs, et le même corollaire s'en suivra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λίσσω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Καὶ ὅσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὅσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν

PROPOSITIO V.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem habere, quam numerus ad numerum.

Quoniam enim commensurabiles sunt Α, Β, metietur aliqua ipsas magnitudo. Metiatur, et sit Γ. Et quoties Γ ipsam Α metitur tot unitates sint in Δ, quoties autem Γ ipsam Β metitur tot unitates sint in Ε.

Quoniam igitur Γ ipsam Α metitur per unitates quæ in Δ, metitur autem et unitas ipsum Δ per unitates quæ sunt in ipso; æqualiter igitur

PROPOSITION V.

Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs commensurables Α, Β; je dis que Α a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

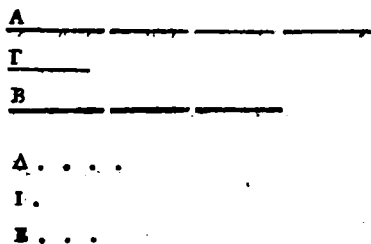
Car puisque les grandeurs Α, Β sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Δ que Γ mesure de fois Α; qu'il y ait aussi autant d'unités dans Ε que Γ mesure de fois Β.

Puisque Γ mesure Α par les unités qui sont en Δ, et que l'unité mesure Δ par les unités qui sont en lui, l'unité mesure le nombre Δ autant de fois que la

# 124 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δ μετρεῖ ἀριθμὸν<sup>1</sup> καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·

unitas ipsum Δ metitur numerum atque Γ magnitudo ipsam Α; est igitur ut Γ ad Α ita unitas ad Δ; convertendo igitur, ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem. Rursus, quoniam Γ ipsam Β metitur per unitates quæ in Ε, metitur autem et unitas ipsum Ε per unitates quæ in ipso; æqualiter



ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως<sup>2</sup> ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διῆτου ἄρα ἴσθιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὅν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

igitur unitas ipsum Ε metitur atque Γ ipsam Β; est igitur ut Γ ad Β ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Δ numerus ad Ε.

Commensurabiles igitur magnitudines Α, Β inter se rationem habent quam Δ numerus ad numerum Ε. Quod oportebat ostendere.

grandeur Γ mesure Α; donc Γ est à Α comme l'unité est à Δ; donc, par conversion, Α est à Γ comme Δ est à l'unité. De plus, puisque Γ mesure Β par les unités qui sont en Ε, et que l'unité mesure Ε par les unités qui sont en lui, l'unité mesure Ε autant de fois que Γ mesure Β; donc Γ est à Β comme l'unité est à Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc, par égalité, Α est à Β comme le nombre Δ est à Ε.

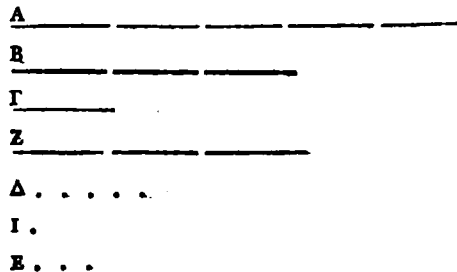
Donc les grandeurs commensurables Α, Β ont entr'elles la raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εάν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται<sup>1</sup> τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα<sup>2</sup> λόγον ἔχεται ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐν αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ὅσαι εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ τὸ αὐτό<sup>3</sup> μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α

Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Δ ad numerum Ε; dico commensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Quot enim sunt in Δ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Γ; quot autem sunt in Ε unitates, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi Γ componatur Ζ.

Quoniam igitur quot sunt in Δ unitates, tot sunt et in Α magnitudines æquales ipsi Γ; quæ pars igitur est unitas ipsius Δ, eadem pars est et Γ ipsius Α; est igitur ut Γ ad Α ita

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β aient entr'elles la même raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε; je dis que les grandeurs Α, Β sont commensurables.

Car que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Δ; que Γ soit égal à une de ces parties; et que Ζ soit composé d'autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε.

Puisqu'il y a dans Α autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Δ, Γ sera la même partie de Α que l'unité l'est de Δ; donc Γ est à Α comme

## 126 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Γ<sup>5</sup> πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν<sup>6</sup>· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ<sup>7</sup> ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε<sup>8</sup>. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ

unitas ad Δ. Metitur autem unitas ipsum Δ numerum; metitur igitur et Γ ipsam Α. Et quoniam est ut Γ ad Α ita unitas ad Δ numerum; convertendo igitur ut Α ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. Rursus, quoniam quot sunt in Ε unitates, tot sunt et in Ζ partes æquales ipsi Γ; est igitur ut Γ ad Ζ ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo

A \_\_\_\_\_  
 B \_\_\_\_\_  
 Γ \_\_\_\_\_  
 Ζ \_\_\_\_\_  
 Δ . . . . .  
 Ι .  
 Ε . . . . .

οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δίττου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Αλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ἔστι<sup>9</sup> τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α<sup>10</sup> πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἔστι τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Αλλὰ μετρεῖ<sup>11</sup> καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ Α τῷ Β.

igitur est ut Α ad Ζ ita Δ ad Ε. Sed ut Δ ad Ε ita est Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita et Α ad Ζ; ergo Α ad utramque ipsarum Β, Ζ eandem habet rationem; æqualis igitur est Β ipsi Ζ. Metitur autem Γ ipsam Ζ; metitur igitur et Β. Sed metitur et Α; ergo Γ ipsas Α, Β metitur; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

Εάν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

l'unité est à Δ. Mais l'unité mesure le nombre Δ; donc Γ mesure Α. Et puisque Γ est à Α comme l'unité est au nombre Δ, par conversion Α est à Γ comme le nombre Δ est à l'unité. De plus, puisqu'il y a en Ζ autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε, Γ sera à Ζ comme l'unité est au nombre Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc par égalité Α est à Ζ comme Δ est à Ε. Mais Δ est à Ε comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Α est à Ζ; donc Α a la même raison avec Β et avec Ζ; donc Β égale Ζ (9. 5). Mais Γ mesure Ζ; donc il mesure Β. Mais Γ mesure Α; donc Γ mesure Α et Β; donc Α est commensurable avec Β (déf. 1. 10). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντες ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρα ἔστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσὶν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρέσθω τὸ Α, καὶ ἐν αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως<sup>1</sup> τὸ Ε πρὸς τὸ<sup>2</sup> Α. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς

ALITER.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ; dico commensurabiles esse magnitudines.

Quot enim sunt in Γ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Ε; est igitur ut unitas ad Γ numerum ita Ε ad Α. Est autem et ut Γ ad Δ ita Α ad Β; ex æquo

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_  
Γ . . . . .  
Δ . . . .  
Ι .

τὸν Δ οὕτως<sup>3</sup> τὸ Α πρὸς τὸ Β· διίσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>4</sup> τὸ Ε πρὸς τὸ<sup>5</sup> Β. Μετρεῖ δὲ καὶ<sup>6</sup> ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ὥστε<sup>7</sup> καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρα ἔστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>8</sup>.

igitur est ut unitas ad Δ ita Ε ad Β. Metitur autem et unitas ipsum Δ; metitur igitur et Ε ipsam Β. Metitur autem et Ε ipsam Α, quoniam et unitas ipsum Γ; ergo Ε utramque ipsarum Α, Β metitur; ergo Α, Β commensurabiles sunt, et est ipsarum communis mensura Ε. Quod oportebat ostendere.

AUTREMENT.

Que les deux grandeurs Α et Β aient entr'elles la même raison que le nombre Γ avec le nombre Δ; je dis que ces grandeurs sont commensurables.

Que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Γ, et que Ε soit égal à une de ces parties; l'unité sera au nombre Γ comme Ε est à Α. Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; donc, par égalité, l'unité est à Δ comme Ε est à Β. Mais l'unité mesure Δ; donc Ε mesure Β. Mais Ε mesure Α, puisque l'unité mesure Γ; donc Ε mesure Α et Β; donc Α et Β sont commensurables, et Ε est leur commune mesure. Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἰὰν ᾖσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεία ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν. Εὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μίση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ

A \_\_\_\_\_  
 B \_\_\_\_\_  
 Z \_\_\_\_\_  
 Δ . . . . .  
 Ε . . . . .

ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Αλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν γίγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας<sup>2</sup>.

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo numeri ut Δ, Ε, et recta ut Α, possibile esse fieri ut Δ numerus ad Ε numerum ita rectam ad rectam. Si autem et ipsarum Α, Ζ media proportionalis sumatur ut Β, erit ut Α ad Ζ ita

quadratum ex Α ad ipsum ex Β, hoc est ut prima ad tertiam ita figura ex primâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam. Sed ut Α ad Ζ ita est Δ numerus ad Ε numerum; factum est igitur et ut Δ numerus ad Ε numerum ita figura ex rectâ Α ad ipsam ex rectâ Β.

## C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si l'on a deux nombres comme Δ et Ε, et une droite comme Α, il sera possible de faire en sorte que le nombre Δ soit au nombre Ε comme la droite Α est à une autre droite. Mais si l'on prend une moyenne proportionnelle comme Β entre Α et Ζ (cor. 20. 6), Α sera à Ζ comme le carré de Α est au carré de Β; c'est-à-dire que la première sera à la troisième, comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et semblablement décrite sur la troisième (cor. 20. 6). Mais Α est à Ζ comme le nombre Δ est au nombre Ε; on a donc fait de telle manière que le nombre Δ est au nombre Ε comme la figure décrite sur la droite Α est à la figure décrite sur la droite Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem non habere quam numerus ad numerum.

A  
B

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἴσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἴσται δὲ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Si enim habet Α ad Β rationem quam numerus ad numerum, commensurabilis erit Α ipsi Β. Non est autem; non igitur Α ad Β rationem habet quam numerus ad numerum.

Incommensurabiles igitur, etc.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs incommensurables Α, Β; je dis que Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car si Α avait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre, Α serait commensurable avec Β (6. 10). Mais il ne l'est pas; donc Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἴσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχεται ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

## PROPOSITIO VIII.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum; dico incommensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Α \_\_\_\_\_  
Β \_\_\_\_\_

Εἰ γὰρ ἴσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δὲ ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si enim fuerit commensurabilis Α ipsi Β, rationem habebit quam numerus ad numerum. Non habet autem; incommensurabiles igitur sunt Α, Β magnitudines.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

## PROPOSITION VIII.

Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β n'aient pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre; je dis que les grandeurs Α, Β sont incommensurables.

Car si elles étaient commensurables, Α aurait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais il ne l'a pas; donc les grandeurs Α, Β sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

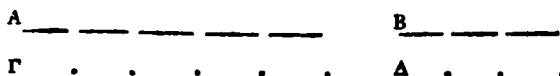
PROPOSITIO IX.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετρά-  
γωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος  
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τε-  
τράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὃν  
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ  
τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει σύμμετρος· τὰ δὲ ἀπὸ  
τῶν μήκει ἀσύμμετρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς  
ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὅτι τετράγωνος ἀριθμὸς  
πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα  
τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὃν<sup>2</sup> τετρά-  
γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ  
τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμέτρος.

Εστώσαν γάρ<sup>3</sup> αἱ  $A$ ,  $B$  μήκει σύμμετροι·

$A$  rectis longitudine commensurabilibus qua-  
drata inter se rationem habent quam quadratus  
numerus ad quadratum numerum, et quadrata  
inter se rationem habentia quam quadratus nu-  
merus ad quadratum numerum et latera habe-  
bunt longitudine commensurabilia; sed a rec-  
tis longitudine incommensurabilibus quadrata  
inter se rationem non habent quam quadratus  
numerus ad quadratum numerum, et quadrata  
inter se rationem non habentia quam quadratus  
numerus ad quadratum numerum neque latera  
habebunt longitudine commensurabilia.

Sint enim  $A$ ,  $B$  longitudine commensurabiles;



λίγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τετράγωνον πρὸς τὸ  
ἀπὸ τῆς  $B$  τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν<sup>4</sup> τετράγωνος  
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

dico ex  $A$  quadratum ad quadratum ex  $B$  ra-  
tionem habere quam quadratus numerus ad qua-  
dratum numerum.

PROPOSITION IX.

Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Car que les droites  $A$ ,  $B$  soient commensurables en longueur; je dis que le quarré de  $A$  a avec le quarré de  $B$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Επει γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. Ἐχέτω ὅν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Επει οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ<sup>5</sup>, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ<sup>6</sup> λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετραγώνος πρὸς τὸν τετραγώνον ἀριθμὸν<sup>7</sup> διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ πλευρά πρὸς τὴν πλευράν· ἐστὶν ἄρα καὶ<sup>8</sup> ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνον<sup>9</sup>.

Ἀλλὰ δὴ ἐστὼ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνον<sup>10</sup> οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνον<sup>11</sup>. λέγω ὅτι σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. Επει γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine; ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat eam quam Γ ad Δ. Quoniam igitur est ut A ad B ita Γ ad Δ, sed ipsius quidem ex A ad B rationis duplicata est ratio quadrati ex A ad quadratum ex B; similes enim figuræ in duplicatâ ratione sunt homologorum laterum; ipsius autem Γ ad Δ rationis duplicata est ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ, duorum enim quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum numerum duplicatam rationem habet ejus quam latus ad latus; est igitur et ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ.

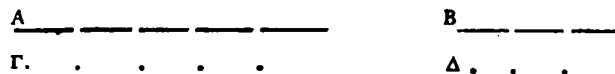
At vero sit ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Quoniam enim est ut ex A

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, A aura avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Qu'il ait celle que Γ a avec Δ. Puisque A est à B comme Γ est à Δ; que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A avec B, car les figures semblables sont en raison double de leurs côtés homologues (20. 6); que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double de celle de Γ à Δ, car il y a un moyen proportionnel entre deux nombres quarrés (11. 8); et que le quarré d'un nombre a avec le quarré d'un nombre une raison double de celle d'un côté à un côté, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ.

Mais que le quarré de A soit au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car puisque

γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B<sup>12</sup> οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ<sup>13</sup>. ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B<sup>14</sup> λόγος διπλασίων ἐστὶ<sup>15</sup> τοῦ

quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratus ad ipsum ex Δ; sed quidem ex A quadrati ad ipsum ex B ratio duplicata est ipsius ex



τῆς A πρὸς τὴν B λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ<sup>16</sup> τετραγώνου<sup>17</sup> πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ<sup>18</sup> τετράγωνον<sup>19</sup> λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ<sup>20</sup> πρὸς τὸν Δ λόγου<sup>21</sup>. ἔστιν ἄρα καὶ ὥς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ Γ<sup>22</sup> πρὸς τὸν Δ<sup>23</sup>. ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει<sup>24</sup>.

A ad B rationis, quadrati autem ex Γ ad quadratum ex Δ ratio duplicata est ipsius Γ ad ipsum Δ rationis; est igitur et ut A ad B ita Γ ad Δ; ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad numerum Δ; commensurabilis igitur est A ipsi B longitudine.

Ἀλλὰ δὴ<sup>25</sup> ἀσύμμετρος ἔστω ἡ A τῇ B μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B<sup>26</sup> λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον<sup>27</sup> λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ A τῇ B μήκει<sup>28</sup>. Οὐκ ἐστὶ δὲ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A

At vero incommensurabilis sit A ipsi B longitudine; dico ex A quadratum ad ipsum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim habet ex A quadratum ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. Non est autem; non

le carré de A est au carré de B comme le carré de Γ est au carré de Δ, que la raison du carré de A au carré de B est double de la raison de A à B (20. 6), et que la raison du carré de Γ au carré de Δ est double aussi de la raison de Γ à Δ (11. 8), A sera à B comme Γ est à Δ; donc A a avec B la raison que le nombre Γ a avec le nombre Δ; donc A est commensurable en longueur avec B (6. 10).

Mais que A soit incommensurable en longueur avec B; je dis que le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Car si le carré de A avait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, A serait commensurable en longueur avec B. Mais

# 134 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον<sup>29</sup> λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ<sup>30</sup> τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον<sup>31</sup> λόγον μὴ ἔχεται ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

igitur ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus denique ex A quadratum ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; dico

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \hline \Gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{B} \\ \hline \Delta \end{array}$$

λέγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ ἔσται<sup>32</sup> σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει<sup>33</sup>, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει, καὶ τὰ ἕξῃς.

incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim fuerit commensurabilis A ipsi B longitudine, habebit ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Non habet autem; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine.

Ergo a rectis longitudine, etc.

cela n'est point; donc le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

De plus, que le carré de A au carré de B n'ait pas la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Car si A était commensurable en longueur avec B, le carré de A aurait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Mais il ne l'a pas; donc A n'est pas commensurable en longueur avec B; donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Επεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει<sup>1</sup>, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εχέτω ὅν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ<sup>2</sup> πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω. Επεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ

A — — — — —  
Γ. . . . .  
Ε. . . . .  
. . . . .  
. . . . .  
. . . . .  
. . . . .

Z. . .  
. . .  
. . .  
. . .  
. . .

B — — — — —  
Δ. . .  
Η. . .  
. . .  
. . .

πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τοῦτίστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως<sup>3</sup> ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ<sup>4</sup> πολλαπλασιάσας τὸν Ζ

Quoniam enim commensurabilis est Α ἰpsi Β longitudine, rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Γ ad Δ, et Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε faciat, ipse autem Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Ζ faciat, et Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat. Quoniam itaque Γ se ipsum quidem multiplicans

ipsum Ε fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ, hoc est ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. Sed ut Α ad Β ita ex Α quadratum ad rectangulum sub Α, Β; est igitur ut ex Α quadratum ad rectangulum sub Α, Β ita Ε ad Ζ. Rursus, quoniam Δ se ipsum multiplicans ipsum Η fecit, ipse vero Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Ζ fecit; est igitur ut Γ ad

AUTREMENT.

Car puisque Α est commensurable en longueur avec Β, il a avec lui la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Que ce soit celle que Γ a avec Δ; que Γ se multipliant lui-même fasse Ε, que Γ multipliant Δ fasse Ζ, et que Δ se multipliant lui-même fasse Η. Puisque Γ se multipliant lui-même fait Ε, et que Γ multipliant Δ fait Ζ, Γ est à Δ, c'est-à-dire Α est à Β comme Ε est à Ζ (17. 7). Mais Α est à Β comme le quarré de Α est au rectangle sous Α, Β (1. 6); donc le quarré de Α est au rectangle sous Α, Β comme Ε est à Ζ. De plus, puisque Δ se multipliant lui-même a fait Η, et que Δ multipliant Γ a fait Ζ, Γ est à Δ,



# 136 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, του-  
τέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν  
Η. ΑΛΛ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ  
τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς  
τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ  
πρὸς τὸν Η. ΑΛΛ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ  
ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· διόσου  
ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως  
ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Εἰσι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η  
τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἔστιν, ὁ δὲ  
Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ  
τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς  
τετράγωνον ἀριθμὸν.

Δ, hoc est ut A ad B, ita Z ad H. Sed ut  
A ad B ita sub A, B rectangulum ad qua-  
dratum ex B; est igitur ut sub A, B rectangulum  
ad quadratum ex B ita Z ad H. Sed ut ex A  
quadratum ad rectangulum sub A, B, ita erat  
E ad Z; ex æquo igitur ut ex A quadratum ad  
ipsum ex B ita erat E ad H. Est autem uterque ipso-  
rum E, H quadratus, ipse quidem enim E ex Γ est,  
ipse vero H ex Δ; ergo ex A quadratum ad  
ipsum ex B rationem habet quam quadratus nu-  
ad quadratum numerum.

|    |         |    |         |         |
|----|---------|----|---------|---------|
| A  | — — — — |    | B       | — — — — |
| Γ. | . . . . |    | Δ.      | . . . . |
| Ε. | . . . . | Ζ. | . . . . | Η.      |
| .  | . . . . | .  | . . . . | .       |
| .  | . . . . | .  | . . . . | .       |
| .  | . . . . | .  | . . . . | .       |
| .  | . . . . | .  | . . . . | .       |

Αλλά δὲ ἔχεται τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ  
τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς  
τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμι-  
τρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει<sup>5</sup>. Εἰσὶ γὰρ τοῦ  
μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ

At vero habeat ex A quadratum ad ipsum  
ex B rationem quam quadratus numerus E ad  
quadratum numerum H; dico commensura-  
bilem esse A ipsi B longitudine. Sit enim ipsius  
quidem E latus ipse Γ, ipsius autem H ipse Δ,

c'est-à-dire A est à B comme Z est à H (17. 7). Mais A est à B comme le rec-  
tangle sous A, B est au carré de B (1. 6); donc le rectangle sous A, B est au  
carré de B comme Z est à H. Mais le carré de A est au rectangle sous A, B  
comme E est à Z; donc par égalité le carré de A est au carré de B comme E  
est à H. Mais les nombres E, H sont des carrés, car E est le carré de r, et  
H le carré de Δ; donc le carré de A a avec le carré de B la raison qu'un  
nombre carré a avec un nombre carré.

Mais que le carré de A ait avec le carré de B la raison que le nombre  
carré E a avec le nombre carré H; je dis que A est commensurable en lon-  
gueur avec B. Car que r soit le côté de E, et Δ le côté de H, et que r multi-

τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μίσεων ἀνάλογόν ἐστι<sup>6</sup> τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η<sup>7</sup>, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί· εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτίστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>8</sup> ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως<sup>9</sup> ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ<sup>10</sup>. Ὅπρι  
ἵδει διῆξαι.

et Γ ipsum Α multiplicans ipsum Ζ faciat; ergo Ε, Ζ, Η deinceps sunt proportionales in ratione ipsius Γ ad Δ. Et quoniam ipsorum ex Α, Β medium proportionale est rectangulum sub Α, Β, ipsorum autem Ε, Η ipse Ζ; est igitur ut ex Α quadratum ad rectangulum sub Α, Β ita Ε ad Ζ. Ut autem sub Α, Β rectangulum ad quadratum ex Β ita Ζ ad Η, sed ut ex Α quadratum ad rectangulum sub Α, Β ita Α ad Β; ergo Α, Β commensurabiles sunt, rationem enim habent quam numerus Ε ad numerum Ζ, hoc est quam Γ ad Δ; ut enim Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; etenim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum autem Δ multiplicans ipsum Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Quod oportebat ostendere.

pliant Δ fasse Ζ, les nombres Ε, Ζ, Η seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ (17. 7). Et puisque le rectangle sous Α, Β est moyen proportionnel entre les quarrés de Α et de Β (1. 6), et que Ζ l'est entre Ε et Η (11. 8), le quarré de Α sera au rectangle sous Α, Β comme Ε est à Ζ. Mais le rectangle sous Α, Β est au quarré de Β comme Ζ est à Η, et le quarré de Α est au rectangle sous Α, Β comme Α est à Β; donc Α et Β sont commensurables, car ils ont la raison qu'a le nombre Ε avec le nombre Ζ, c'est-à-dire la raison que Γ a avec Δ; car Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, puisque Γ se multipliant lui-même fait Ε, et que Γ multipliant Α a fait Ζ; donc Γ est à Δ comme Ε est à Ζ (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν<sup>1</sup> ἐκ τῶν διδειγμένων ἵσταται<sup>2</sup> ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι<sup>3</sup> οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει<sup>4</sup>.

Εἴπερ γάρ<sup>5</sup> τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ<sup>6</sup> μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ οὖν<sup>7</sup> ὅσα τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει εἰδέχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῶ τὰ τετράγωνα

## COROLLARIUM.

Et manifestum ex demonstratis erit, rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ, rectas autem potentiâ commensurabiles non semper et longitudine, et rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ incommensurabiles, rectas autem potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

Quoniam enim ex commensurabilibus longitudine rectis quadrata rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, magnitudines autem rationem habentes quam numerus ad numerum commensurabiles sunt; quare longitudine commensurabiles rectæ non solum sunt longitudine commensurabiles, sed etiam potentiâ.

Rursus, quoniam igitur quæcumque quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, longitudine ostensa sunt commensurabilia, et potentiâ latera existentia commensurabilia, cum ipsorum qua-

## COROLLAIRE.

D'après ce qui a été démontré, il est évident que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance; que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur; que celles qui sont incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, et que celles qui sont incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

Car puisque les carrés des droites commensurables en longueur ont la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que les grandeurs qui ont la raison qu'un nombre a avec un nombre sont commensurables, les droites commensurables en longueur sont commensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance.

De plus, puisqu'on a démontré que les carrés qui sont entr'eux comme un nombre carré est à un nombre carré, ont leurs côtés commensurables en longueur, et que des droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés

λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ' ἀπλῶς ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει<sup>8</sup>, οὐκίτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα<sup>9</sup> πάντως καὶ δυνάμει, τὰ<sup>10</sup> δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ<sup>11</sup> αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει<sup>12</sup>. Ἐπεὶ δὲ γὰρ<sup>13</sup> αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς<sup>14</sup> πρὸς ἀριθμὸν<sup>15</sup>, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὔσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ τῷ<sup>16</sup> μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύνανται<sup>17</sup> οὔσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει

drata rationem habeant quam numerus ad numerum; quæcumque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam numerus ad numerum, commensurabilia quidem erunt eadem quadrata potentiâ, non autem et longitudine; quare quadrata quidem longitudine commensurabilia omnino et potentiâ, quadrata autem potentiâ non semper et longitudine, nisi et rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico etiam rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ. Quoniam igitur rectæ potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere quam numerus ad numerum, et idcirco potentiâ sunt commensurabiles, longitudine vero incommensurabiles; quare rectæ longitudine incommensurabiles non omnino et potentiâ, sed longitudine incommensurabiles existentes possunt potentiâ esse et commensurabiles et incommensurabiles.

Rectæ autem potentiâ incommensurabiles,

ont la raison qu'un nombre a avec un nombre, les quarrés qui n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et qui n'ont simplement que la raison qu'un nombre a avec un nombre, ont leurs côtés commensurables en puissance, mais non en longueur; donc les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, et les droites commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur, à moins que leurs puissances n'ayent entre elles la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Je dis aussi que les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance; car elles peuvent n'avoir pas la raison qu'un nombre a avec un nombre, et elles sont à cause de cela commensurables en puissance et incommensurables en longueur; donc les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, mais les droites incommensurables en longueur peuvent être commensurables et incommensurables en puissance.

Mais les droites incommensurables en puissance sont toujours incommensu-

# 140 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει<sup>18</sup> σύμμετροι, ἴσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει<sup>19</sup>.

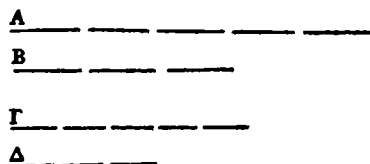
omnino et longitudine incommensurabiles; si enim commensurabiles, erunt et potentiâ commensurabiles. Supponuntur autem et incommensurabiles, quod est absurdum; rectæ igitur potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾤ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ διυτέρῳ σύμμετρον ᾤ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἴσται· καὶ τὸ πρῶτον τῷ διυτέρῳ ἀσύμμετρον ᾤ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ<sup>1</sup> ἀσύμμετρον ἴσται.

## PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.



Εστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἴσται· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἴσται<sup>2</sup>.

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa Α autem ipsi Β commensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ commensurabilem fore.

rables en longueur; car si elles étaient commensurables en longueur, elles seraient commensurables en puissance. Mais on les suppose incommensurables, ce qui est absurde; donc les droites incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

## PROPOSITION X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; et que Α soit commensurable avec Β; je dis que Γ sera commensurable avec Δ.

Επει γὰρ σύμμετρον ἔστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α  
ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς  
ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ  
Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον  
ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα  
ἔστι τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω  
ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται<sup>3</sup>. Επει  
γὰρ ἀσύμμετρον ἔστι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα  
πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθ-  
μόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ  
πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον  
ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν<sup>4</sup>· ἀσύμμετρον ἄρα  
ἔστι τὸ Γ τῷ Δ.

Εὰν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΛΗΜΜΑ.

Δίδικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι  
ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν  
ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B,  
ergo A ad B rationem habet quam numerus ad  
numerus. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ;  
et Γ igitur ad Δ rationem habet quam nu-  
merus ad numerum; commensurabilis igitur est  
Γ ipsi Δ.

At vero A ipsi B incommensurabilis sit;  
dico et Γ ipsi Δ incommensurabilem fore. Quo-  
niam enim incommensurabilis est A ipsi B; ergo  
A ad B rationem non habet quam numerus  
ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad  
Δ; neque Γ igitur ad Δ rationem habet quam  
numerus ad numerum; incommensurabilis igitur  
est Γ ipsi Δ.

Si igitur quatuor, etc.

LEMMA.

Ostensum est in arithmeticiis similes planos  
numeros inter se rationem habere quam qua-  
dratus numerus ad quadratum numerum; et si

Car puisque A est commensurable avec B, A a avec B la même raison qu'un  
nombre a avec un nombre (5. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc  
Γ a avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est commensurable avec Δ (6. 10.)

Mais que A soit incommensurable avec B; je dis que Γ sera incommensurable  
avec Δ. Car puisque A est incommensurable avec B, A n'a pas avec B la  
raison qu'un nombre a avec un nombre (7. 10). Mais A est à B comme Γ est  
à Δ; donc Γ n'a pas avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc  
Γ est incommensurable avec Δ; donc, etc.

LEMME.

On a démontré dans les livres d'arithmétique (26. 8) que les nombres plans  
semblables ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

## 142 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μόν· καὶ ὅτι ἰὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁμοιοὶ εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὁμοιοὶ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχουσιν, ὁμοιοὶ ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὁμοιοὶ ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes esse planos. Et manifestum est ex his, non similes planos numeros, hoc est non proportionalia habentes latera, inter se rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim haberent, similes plani essent, quod non supponitur; ergo non similes plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Εστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὲ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

### PROPOSITIO XI.

Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

Sit proposita recta A; oportet igitur ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine solum, alteram autem et potentiâ.

et que si deux nombres ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ces nombres sont des plans semblables. De là il est évident que des nombres plans non semblables, c'est-à-dire des nombres plans qui n'ont pas leurs côtés proportionnels, n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car s'ils l'avaient, ils seraient des plans semblables, ce qui n'est pas supposé; donc des plans non semblables n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

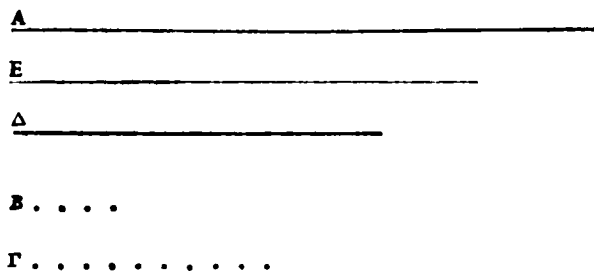
### PROPOSITION XI.

Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

Soit A la droite proposée; il faut trouver deux droites incommensurables avec A, l'une en longueur seulement, et l'autre en longueur et en puissance.

Εκκείσθωσαν γάρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τουτέστι μὴ ὁμοιοὶ ἐπίπεδοι, καὶ γεγόνιτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

Exponentur enim duo numeri Β, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est non similes plani, et fiat ut Β ad Γ ita ex Α quadratum ad quadratum ex Δ, hoc enim tradidimus; commensurabile igitur ex Α quadratum ipsi ex Δ. Et quoniam Β ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non igitur ex Α quadratum ad ipsum ex Δ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommen-



ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. Εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ

surabilis igitur est Α ipsi Δ longitudine. Sumatur ipsarum Α, Δ media proportionalis Ε; est igitur ut Α ad Δ ita ex Α quadratum ad ipsum ex Ε. Incommensurabilis autem est Α ipsi Δ longitudine; incommensurabile igitur est

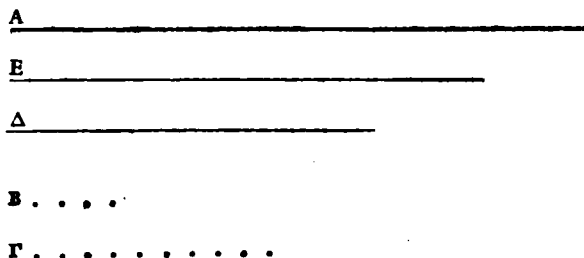
Car soient deux nombres Β, Γ qui n'ayent pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, c'est-à-dire qui soient deux plans non semblables; et faisons en sorte que Β soit à Γ comme le quarré de Α est au quarré de Δ, ce que nous avons déjà enseigné (cor. 6. 10); le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de Δ. Et puisque Β n'a pas avec Γ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de Α n'aura pas avec le quarré de Δ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc Α est incommensurable en longueur avec Δ (9. 10). Prenons une moyenne proportionnelle Ε entre Α et Δ, Α sera à Δ comme le quarré de Α est au quarré de Ε (cor. 2. 6). Mais Α est incommensurable en longueur avec Δ; donc le quarré de Α est incommensurable avec le quarré



# 144 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετρα-  
γώνῳ ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει·

et ex A quadratum ipsi ex E quadrato ; incom-  
mensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ ; ergo



τῇ ἄρα προτεινείῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσιύρηνται  
δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν  
μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε<sup>3</sup>.  
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

propositæ rectæ A inventæ sunt duæ rectæ  
incommensurabiles ipsæ Δ, Ε ; longitudine  
quidem tantum ipsa Δ, potentiâ autem et longi-  
tudine scilicet ipsa Ε. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

## PROPOSITIO XII.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις  
ἐστὶ σύμμετρα.

Ἐκότερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμε-  
τρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α  
ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς

Eidem magnitudini commensurabiles et  
inter se sunt commensurabiles.

Utraque enim ipsarum Α, Β ipsi Γ sit commen-  
surabilis ; dico et Α ipsi Β esse commensurabilem.

Quoniam enim commensurabilis est Α ipsi Γ,  
ergo Α ad Γ rationem habet quam numerus ad

de Ε (10. 10) ; donc Α est incommensurable en puissance avec Ε. On a donc  
trouvé pour la droite proposée Α deux droites incommensurables Δ, Ε, savoir  
la droite Δ en longueur seulement, et la droite Ε en puissance et en longueur.  
Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION XII.

Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont com-  
mensurables entr'elles.

Que chacune des grandeurs Α, Β soit commensurable avec Γ ; je dis que Α est  
commensurable avec Β.

Car puisque Α est commensurable avec Γ, Α a avec Γ la raison qu'un nombre

ἀριθμόν. Εἰσὶν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, πρὶν σύμμετρον ἔστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εἰσὶν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων δοθέντων ὁποῦν, τοῦτε ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰληφθῶσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

numerus. Habeat quam Δ ad Ε. Rursus, quoniam commensurabilis est Β ipsi Γ, ergo Γ ad Β rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Ζ ad Η. Et rationibus datis quibuscumque, et ipsā quam habet Δ ad Ε et Ζ ad Η, sumantur numeri Θ, Κ, Λ deinceps in datis rationibus, et sit ut quidem Δ ad Ε ita Θ ad Κ, ut autem Ζ ad Η ita Κ ad Λ.

|         |             |             |             |
|---------|-------------|-------------|-------------|
| A _____ | Δ . . . . . | Ζ . . . . . | Θ . . . . . |
| Γ _____ | Ε . . . . . | Η . . . . . | Κ . . . . . |
| Β _____ |             |             | Λ . . . . . |

Επεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Εἰσὶν δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· διόσου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει

Quoniam igitur est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, sed ut Δ ad Ε ita Θ ad Κ; est igitur et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam est ut Γ ad Β ita Ζ ad Η, sed ut Ζ ad Η ita Κ ad Λ; et ut igitur Γ ad Β ita Κ ad Λ. Est autem et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Θ ad Λ; ergo Α ad Β rationem habet

a avec un nombre (5. 10.); qu'il ait celle que Δ a avec Ε. De plus, puisque Β est commensurable avec Γ, Γ a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre. Qu'il ait celle que Ζ a avec Η. La raison que Δ a avec Ε, et celle que Ζ a avec Η étant données, prenons les nombres Θ, Κ, Λ successivement proportionnels dans les raisons données, de manière que Δ soit à Ε comme Θ est à Κ, et que Ζ soit à Η comme Κ est à Λ.

Puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que Δ est à Ε comme Θ est à Κ, Α sera à Γ comme Θ est à Κ. De plus, puisque Γ est à Β comme Ζ est à Η, et que Ζ est à Η comme Κ est à Λ, Γ est à Β comme Κ est à Λ. Mais Α est à Γ comme Θ est à Κ; donc, par égalité, Α est à Β comme Θ est à Λ (23.5); donc Α a avec Β la raison que le

# 146 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Α· σύμμετρον  
ἄρα ἴστί τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξῆς.

quam numerus Θ ad numerum Α; commensu-  
rabilis igitur est Α ipsi Β.

Ergo eidem; etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

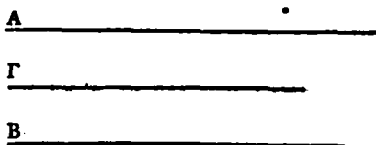
Εάν ᾗ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾗ  
τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα  
ἔσται τὰ μεγέθη.

Εστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ,  
καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β  
τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β  
ἀσύμμετρόν ἐστιν.

## PROPOSITIO XIII.

Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem  
commensurabilis est eidem, altera autem incom-  
mensurabilis; incommensurabiles erunt magni-  
tudines.

Sint enim duæ magnitudines Α, Β, alia  
autem Γ, et quidem Α ipsi Γ commensurabilis  
sit, sed Β ipsi Γ incommensurabilis; dico et  
Α ipsi Β incommensurabilem esse.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὰ Α τῷ Β, ἔστι δὲ  
καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν  
ἐστίν. Ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Si enim est commensurabilis Α ipsi Β, est  
autem et Γ ipsi Α; et Γ igitur ipsi Β commen-  
surabilis est. Quod non supponitur.

nombre Θ a avec le nombre Α; donc Α est commensurable avec Β (6. 10).  
Donc, etc.

## PROPOSITION XIII.

Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une  
troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs  
seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs Α, Β, et une autre grandeur Γ; que Α soit commensurable avec Γ, et que Β soit incommensurable avec Γ; je dis que Α est incommensurable avec Β.

Car si Α était commensurable avec Β, à cause que Γ est commensurable avec Α, Γ serait commensurable avec Β (12. 10). Ce qui n'est pas supposé.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

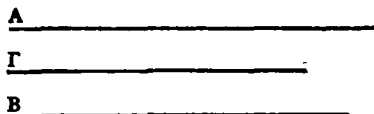
PROPOSITIO XIV.

Εάν ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾗ· καὶ τὸ λοιπὸν τῇ αὐτῇ ἀσύμμετρον ἴσται.

Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Εστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῃ τινὶ τῇ Γ ἀσύμμετρον ἴσται· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῇ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Sint duæ magnitudines commensurabiles Α, Β; altera autem ipsarum Α alii alicui Γ incommensurabilis sit; dico et reliquam Β ipsi Γ incommensurabilem esse.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῇ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῇ Β σύμμετρόν ἐστι· καὶ τὸ Α ἄρα τῇ Γ σύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῇ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Si enim est commensurabilis Β ipsi Γ, sed et Α ipsi Β commensurabilis est; et Α igitur ipsi Γ commensurabilis est. Sed et incommensurabilis, quod impossibile; non igitur commensurabilis est Β ipsi Γ; incommensurabilis igitur.

Εάν ἄρα ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur sunt duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

Soient les deux grandeurs commensurables Α, Β, et que l'une d'elles soit incommensurable avec Γ; je dis que la grandeur restante Β sera aussi incommensurable avec Γ.

Car si Β était commensurable avec Γ, à cause que Α est commensurable avec Β, Α serait commensurable avec Γ (12. 10). Mais Α est incommensurable avec Γ, ce qui est impossible; donc Β n'est pas commensurable avec Γ; donc il lui est incommensurable. Donc, etc.

## ΛΗΜΜΑ.

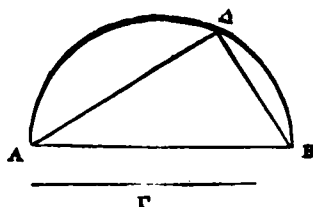
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὐρεῖν τίνι μείζον δύναται ἢ μείζων τῆς ἰσάσσοτος.

Ἐστωσαν αἱ δοθεισῶν δύο ἀνισοὶ εὐθεῖαι, αἱ  $AB$ ,  $\Gamma$ , ὧν μείζων ἴστω ἡ  $AB$ . δεῖ δὲ εὐρεῖν τίνι μείζον δύναται ἡ  $AB$  τῆς  $\Gamma$ .

## LEMMA.

Duabus datis rectis inæqualibus, invenire id quo plus potest major quam minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ  $AB$ ,  $\Gamma$ , quarum major sit  $AB$ ; oportet igitur invenire id quo plus potest  $AB$  quam  $\Gamma$ .



Γιγράφω ἐπὶ τῆς  $AB$  ἡμικύκλιον, τὸ  $A\Delta B$ , καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ  $\Gamma$  ἴση ἡ  $A\Delta$ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ  $\Delta B$ . Φανερὸν δὲ ὅτι ὀρθὴ ἴστιν ἡ ὑπὸ  $A\Delta B$  γωνία, καὶ ὅτι ἡ  $AB$  τῆς  $A\Delta$ , τουτίστι τῆς  $\Gamma$ , μείζον δύναται τῇ  $\Delta B$ .

Ὀμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμὴν αὐτὰς εὐρίσκειται οὕτως.

Describatur super rectam  $AB$  semicirculus  $A\Delta B$ , et in eo aptetur ipsi  $\Gamma$  æqualis  $A\Delta$ , et jungatur  $\Delta B$ . Evidens igitur rectum esse  $A\Delta B$  angulum, et  $AB$  quam  $A\Delta$ , hoc est quam  $\Gamma$ , plus posse quadrato ex  $\Delta B$ .

Similiter autem et datis rectis, quæ potest ipsas invenietur hoc modo.

## L E M M E.

Deux droites inégales étant données, trouver ce dont le puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite.

Soient  $AB$ ,  $\Gamma$  les deux droites inégales données; que  $AB$  soit la plus grande; il faut trouver ce dont la puissance de  $AB$  surpasse la puissance de  $\Gamma$ .

Décrivons sur  $AB$  le demi-cercle  $A\Delta B$ , adaptons dans ce demi-cercle une droite  $A\Delta$  égale à  $\Gamma$  (1. 4), et joignons  $\Delta B$ . Il est évident que l'angle  $A\Delta B$  est droit (31. 3), et que la puissance de  $AB$  surpasse la puissance de  $A\Delta$ , c'est-à-dire de  $\Gamma$ , du quarré de  $\Delta B$  (47. 1).

On trouvera de la même manière la droite dont la puissance égale la somme des puissances de deux droites données.

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 149

Εστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι<sup>3</sup> αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ · καὶ δὶόν ἴστω εὐρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτάς. Κείσθωσαν<sup>1</sup> γάρ, ὅσπερ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουν τὴν ὑπὸ  $ΑΔΒ$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $ΑΒ$ · φανερόν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  δυναμένη ἴστί· ἡ  $ΑΒ$ .

Sint duæ rectæ datæ  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ ; et oporteat invenire rectam quæ possit ipsas. Ponantur enim, ut rectum angulum  $ΑΔΒ$  contineant, et jungatur  $ΑΒ$ ; perspicuum est rursus, ipsas  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  rectam posse  $ΑΒ$ .

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μῖζον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ<sup>1</sup>· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μῖζον δυήσεται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ<sup>2</sup>. Καὶ εἰ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μῖζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ<sup>3</sup>· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μῖζον δυήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ<sup>4</sup>.

Εστωσαν δὴ<sup>5</sup> τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ  $Α$ ,  $Β$ ,  $Γ$ ,  $Δ$ , ὥς ἡ  $Α$  πρὸς τὴν  $Β$  οὕτως ἡ  $Γ$  πρὸς τὴν  $Δ$ , καὶ ἡ  $Α$  μὲν τῆς  $Β$  μῖζον δυνάσθω τῷ

### PROPOSITIO XV.

Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda, quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

Sint igitur quatuor rectæ proportionales  $Α$ ,  $Β$ ,  $Γ$ ,  $Δ$ , ut  $Α$  ad  $Β$  ita  $Γ$  ad  $Δ$ , et  $Α$  quidem quam  $Β$  plus possit quadrato ex  $Ε$ , sed  $Γ$  quam  $Δ$  plus

Soient  $ΑΔ$  et  $ΔΒ$  les deux droites données, il faut trouver la droite dont la puissance égale la somme des puissances de ces deux droites; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle droit  $ΑΔΒ$ , et joignons  $ΑΒ$ ; il est évident encore que la puissance de  $ΑΒ$  égale la somme des puissances des droites  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  (47. 1).

### PROPOSITION XV.

Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

Soient les quatre droites proportionnelles  $Α$ ,  $Β$ ,  $Γ$ ,  $Δ$ , de manière que  $Α$  soit à  $Β$  comme  $Γ$  est à  $Δ$ ; que la puissance de  $Α$  surpasse la puissance de  $Β$  du

# 150 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς Ε, ἢ δὲ Γ τῆς Δ μείζον δυνάσθω τῷ  
ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι εἴτε σύμμετρος ἔστιν ἡ Α  
τῇ Ε, σύμμετρος ἔστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμ-  
μετρος ἔστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρος ἔστι καὶ ἡ Γ  
τῇ Ζ.

A \_\_\_\_\_  
B \_\_\_\_\_  
E \_\_\_\_\_

Γ \_\_\_\_\_  
Δ \_\_\_\_\_  
Ζ \_\_\_\_\_

Επὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως  
ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς  
Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ  
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α  
ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν Α, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  
Γ ἴσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς  
τὸ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ  
ἀπὸ τῶν Ζ, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι  
ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  
Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ·  
ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ζ  
πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς  
τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς  
ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διίσου  
ἄρα ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς

possit quadrato ex Z; dico et si commensurabi-  
lis sit A ipsi E, commensurabilem esse et Γ  
ipsi Z; et si incommensurabilis sit A ipsi E  
incommensurabilem esse et Γ ipsi Z.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ;  
est igitur et ut ex A quadratum ad ipsum ex B  
ita ex Γ quadratum ad ipsum ex Δ. Sed ipsi qui-  
dem quadrato ex A æqualia sunt ex E, B qua-  
drata, sed ex Γ quadrato æqualia sunt ex Z, Δ  
quadrata; sunt igitur ut ex E, B quadrata ad  
ipsum ex B ita ex Z, Δ quadrata ad ipsum  
ex Δ; dividendo igitur est ut ex E quadratum  
ad ipsum ex B ita ex Z quadratum ad ipsum  
ex Δ; est igitur et ut E ad B ita Z ad Δ;  
convertendo igitur est ut B ad E ita Δ ad Z.  
Est autem et ut A ad B ita Γ ad Δ; ex æquo  
igitur est ut A ad E ita Γ ad Z; et si igitur

quarré de la droite Ε, et que la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du  
quarré de la droite Ζ; je dis que si Α est commensurable avec Ε, Γ le sera  
avec Ζ; et que si Α est incommensurable avec Ε, Γ le sera aussi avec Ζ.

Car puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, le quarré de Α sera au quarré de Β  
comme le quarré de Γ est au quarré de Δ (cor. 1. 22. 6). Mais la somme des  
quarrés de Ε et de Β est égale au quarré de Α, et la somme des quarrés de Ζ  
et de Δ est égale au quarré de Γ; donc la somme des quarrés de Ε et de Β est au  
quarré de Β comme la somme des quarrés de Ζ et de Δ est au quarré de Δ; donc,  
par soustraction, le quarré de Ε est au quarré de Β comme le quarré de Ζ est au  
quarré de Δ (17. 5); donc Ε est à Β comme Ζ est à Δ (22. 6); donc, par con-  
version, Β est à Ε comme Δ est à Ζ (4. 5). Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc,  
par égalité, Α est à Ε comme Γ est à Ζ (22. 5); donc si Α est commensurable avec

τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρος ἴσθιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρος ἴσθι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρος ἴσθιν<sup>10</sup> ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρος ἴσθι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Εὰν ἄρα τίσπαρις, καὶ τὰ ἐξῆς.

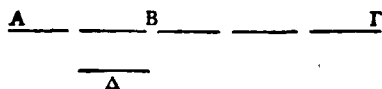
commensurabilis est A ipsi E, commensurabilis est et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis est A ipsi E, incommensurabilis est et Γ ipsi Z.

Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντιθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἴσθαι· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾗ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἴσθαι.

Συγκείμεθα γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσθι σύμμετρον<sup>1</sup>.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἴσθι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖτω, καὶ ἴστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ

Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles ΑΒ, ΒΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ esse commensurabilem.

Quoniam enim commensurabiles sunt ΑΒ, ΒΓ, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur, et totam ΑΓ metietur. Metitur autem et ΑΒ, ΒΓ;

E, la droite Γ le sera avec Z; et si A est incommensurable avec E, la droite Γ le sera avec Z (10. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme sera commensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est commensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront commensurables.

Ajoutons les deux grandeurs commensurables ΑΒ, ΒΓ; je dis que la grandeur entière ΑΓ est commensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

Car, puisque les grandeurs ΑΒ, ΒΓ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera (déf. 1. 10). Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΑΒ et ΒΓ, il mesurera leur somme ΑΓ. Mais il mesure ΑΒ et ΒΓ,



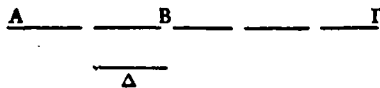
# 152 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB, BG· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG, AG<sup>2</sup> μετρεῖ·  
σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AG ἑκατέρῃ τῶν AB, BG.

Ἀλλὰ δὴ τὸ AG ἐνὶ τῶν AB, BG ἴστω σύμμετρον, ἴστω δὴ τῷ AB<sup>3</sup>. λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ AB, BG σύμμετρά ἐστιν.

ergo Δ ipsas AB, BG, AG metitur; commensurabilis igitur est AG utrique ipsarum AB, BG.

At vero AG uni ipsarum AB, BG sit commensurabilis, sit igitur ipsi AB; dico et AB, BG commensurabiles esse.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ AG, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται, καὶ ἴστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BG μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG μετρήσει· σύμμετρά ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BG.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim comensurabiles sunt AG, AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, AB metitur, et reliquam igitur BG metietur. Metitur autem et AB; ergo Δ ipsas AB, BG metietur; commensurabiles igitur sunt AB, BG.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῃ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἴσται. Καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἴσται.

## PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

donc Δ mesure les grandeurs AB, BG, AG; donc AG est commensurable avec AB et BG.

Mais que AG soit commensurable avec une des grandeurs AB, BG; qu'il le soit avec AB; je dis que les grandeurs AB, BG sont commensurables.

Car puisque les grandeurs AG, AB sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure GA et AB, il mesurera le reste BG. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et BG; donc les grandeurs AB, BG sont commensurables. Donc, etc.

## PROPOSITION XVII.

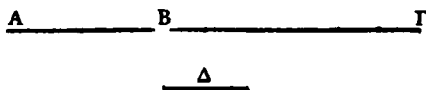
Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

Συγκρίσθω<sup>1</sup> γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ AB, BG· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ AG ἑκατέρῃ τῶν AB, BG ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἴστω, εἰ δυνατόν, τὸ Δ<sup>2</sup>. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BG μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BG· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον<sup>3</sup>. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, AB μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, AB. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ AG, GB ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ AG ἄρα ἑκατέρῃ τῶν AB, BG ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles AB, BG; dico et totam AG utrique ipsarum AB, BG incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles ΓΑ, AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit, si possibile, ipsa Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, AB metitur, et reliquam igitur BG metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas AB, BG metitur; commensurabiles igitur sunt AB, BG. Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas ΓΑ, AB metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt ΓΑ, AB. Similiter utique demonstrabimus et AG, GB incommensurabiles esse; ergo AG utrique ipsarum AB, BG incommensurabilis est.



Ἀλλὰ δὴ τὸ AG ἐνὶ τῶν AB, BG ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ<sup>4</sup> πρῶτον τῷ AB· λέγω ὅτι καὶ τὰ AB, BG ἀσύμμετρά ἐστιν. Εἰ γὰρ ἴσται<sup>5</sup> σύμ-

At vero AG uni ipsarum AB, BG incommensurabilis sit, et primum ipsi AB; dico et AB, BG incommensurabiles esse. Si enim essent

Soient ajoutées les deux grandeurs incommensurables AB, BG; je dis que leur somme AG est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, BG.

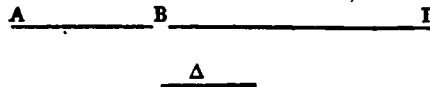
Car si les grandeurs ΓΑ, AB ne sont pas incommensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ, si cela est possible. Puisque Δ mesure ΓΑ et AB, il mesurera le reste BG. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et BG; donc AB et BG sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas ΓΑ et AB; donc ΓΑ et AB sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que AG et GB sont incommensurables; donc AG est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, BG.

Mais que AG soit incommensurable avec une des grandeurs AB, BG, et qu'il le soit d'abord avec AB; je dis que AB et BG sont incommensurables. Car s'ils étaient

# 154 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μίγεθος. Μετρίτω, καὶ ἴστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ AB, BΓ μετρίῃ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ AΓ μετρήσει. Μετρίῃ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓA, AB μετρίῃ· σύμμετρα ἄρα ἴσθι τὰ ΓA, AB. Ὑπὲρκεῖτο δὲ

commensurabiles, metiretur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas AB, BΓ metitur, et totam igitur AΓ metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas ΓA, AB metitur; commensurabiles igitur sunt ΓA, AB.



καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ AB, BΓ μετρήσει τι μίγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἴσθι τὰ AB, BΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ AΓ τῷ ΓB ἀσύμμετρόν ἴσθι, καὶ AB, BΓ ἀσύμμετρα ἴσθαι.

Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas AB, BΓ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt AB, BΓ. Similiter utique demonstrabimus si AΓ ipsi ΓB incommensurabilis sit, etiam AB, BΓ incommensurabiles fore.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

A H M M A.

L E M M A.

Ἐὰν παρὰ τινὰ εὐθείαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἡλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἴσθι τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γνομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Si ad aliquam rectam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; applicatum æquale est rectangulo sub factis ex applicatione partibus rectæ.

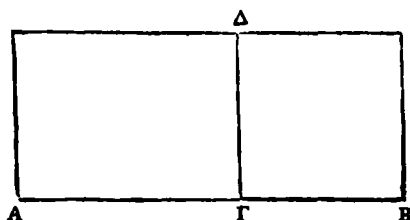
commensurables, quelque grandeur les mesurerait. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure AB et BΓ, il mesurera leur somme AΓ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure ΓA et AB; donc ΓA et AB sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas AB et BΓ; donc AB et BΓ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que si AΓ est incommensurable avec ΓB, les grandeurs AB, BΓ seront aussi incommensurables. Donc, etc.

L E M M E.

Si à une droite quelconque on applique un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, le parallélogramme appliqué est égal au rectangle compris sous les parties de la droite faites par l'application.

Παρά γάρ τινα εὐθείαν τὴν  $AB$  παραβέβλησθαι  
παρὰλληλόγραμμον τὸ  $AD$ , ἡλλείπον εἶδει τε-  
τραγώνῳ τῷ  $DB$ · λέγω ὅτι ἴσον ἴστί τὸ  $AD$  τῷ  
ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$ .

Ad aliquam enim rectam  $AB$  applicetur pa-  
rallelogrammum  $AD$ , deficiens figurâ quadratâ  
 $DB$ ; dico æquale esse parallelogrammum  $AD$   
rectangulo sub  $AG$ ,  $GB$ .



Καὶ ἴστιν αὐτίθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετρα-  
γώνον ἴστι τὸ  $DB$ , ἴση ἐστὶν ἡ  $ΔΓ$  τῇ  $GB$ , καὶ  
ἴστι τὸ  $AD$  τὸ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $ΓΔ$ , τουτίστι τὸ  
ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$ .

Atque est hoc evidens; quoniam enim quadra-  
tum est  $DB$ , æqualis est  $ΔΓ$  ipsi  $GB$ , atque est  
rectangulum  $AD$  sub  $AG$ ,  $ΓΔ$ , hoc est sub  
 $AG$ ,  $GB$ .

Εὰν ἄρα παρὰ τινα εὐθείαν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur ad aliquam rectam, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

PROPOSITIO XVIII.

Εὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῇ δὲ τετάρτῃ  
μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰλληλό-  
γραμμον<sup>1</sup> παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἡλλείπον  
εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ  
μήκει<sup>2</sup>· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνησεται

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem  
parti quadrati ex minori æquale parallelogram-  
mum ad majorem applicetur deficiens figurâ  
quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam  
dividat longitudine, major quam minor plus

Appliquons à une droite quelconque  $AB$  un parallélogramme  $AD$  qui soit  
défaillant d'une figure quarrée  $DB$ ; je dis que le parallélogramme  $AD$  est égal au  
rectangle compris sous  $AG$ ,  $GB$ .

Cela est évident; car puisque  $DB$  est un quarré,  $ΔΓ$  est égal à  $GB$ , et  $AD$  est  
égal au rectangle sous  $AG$ ,  $ΓΔ$ , c'est-à-dire sous  $AG$ ,  $GB$ . Donc, etc.

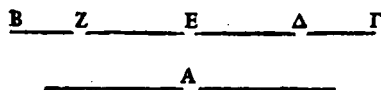
PROPOSITION XVIII.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallé-  
logramme qui soit défaillant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième  
partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus  
grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus  
grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui

# 156 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ μήκει<sup>3</sup>. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάττωτος μείζον δύνηται<sup>4</sup> τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει<sup>5</sup>, τῷ δὲ τετάρτῳ<sup>6</sup> τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττωτος ἴσον παραλληλόγραμμον<sup>7</sup> παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει<sup>8</sup>.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττωτος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον<sup>9</sup> παραβελήσθω ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἴστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει<sup>10</sup>.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημειῖον, καὶ κείσθω τῇ<sup>11</sup> ΔΕ ἴση ἢ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἴστέ τῇ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμεται εἰς

poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati, hoc est quadrato ex dimidiâ Α, æquale ad ΒΓ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ, commensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Secetur enim ΒΓ bifariam in puncto Ε, et ponatur ipsi ΔΕ æqualis ΕΖ; reliqua igitur ΔΓ æqualis est ipsi ΒΖ. Et quoniam recta ΒΓ secatur

sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ; que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'un quarré, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite Α, c'est-à-dire au quarré de la moitié de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit commensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Partageons ΒΓ en deux parties égales au point Ε, et faisons ΕΖ égal à ΔΕ; le reste ΔΓ sera égal à ΒΖ. Et puisque la droite ΒΓ est coupée en deux parties

μὴν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν<sup>12</sup> ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλάσιου τοῦ<sup>13</sup> ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλάσιῳ τοῦ<sup>14</sup> ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλάσιῳ τοῦ<sup>15</sup> ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίῳ γάρ ἐστι ἡ ΖΔ<sup>16</sup> τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλάσιῳ τοῦ<sup>17</sup> ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίῳ γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μείζον ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῇ ΖΔ. Διεκτίον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός

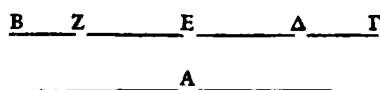
in partes quidem æquales ad Ε, in partes autem inæquales ad Δ; ergo sub ΒΔ, ΔΓ contentum rectangulum cum quadrato ex ΕΔ æquale est quadrato ex ΕΓ, et quadrupla; ergo quater sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum cum quadruplo ex ΔΕ æquale est quater quadrato ex ΕΓ. Sed quidem quadruplo ipsius sub ΒΔ, ΔΓ æquale est ex Α quadratum, quadruplo autem ipsius ex ΔΕ æquale est ex ΔΖ quadratum, dupla enim est ΖΔ ipsius ΔΕ; et quadruplo quadrati ex ΕΓ æquale est ex ΒΓ quadratum, dupla enim est rursus ΒΓ ipsius ΕΓ; ergo ex Α, ΔΖ quadrata æqualia sunt ex ΒΓ quadrato; quare ex ΒΓ quadratum quam quadratum ex Α majus est quadrato ex ΔΖ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et commensurabilem esse ΒΓ ipsi ΖΔ. Quoniam enim commensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, commensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΓΔ longitudine. Sed ΓΔ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ; et ΒΓ igitur commensurabilis est

égales en Ε, et en deux parties inégales en Δ, le rectangle compris sous ΒΔ, ΔΓ avec le quarré de ΕΔ sera égal au quarré de ΕΓ (5. 2). Mais les quadruples sont égaux aux quadruples; donc quatre fois le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ avec le quadruple quarré de ΔΕ est égal au quadruple quarré de ΕΓ. Mais le quarré de Α est quadruple du rectangle sous ΒΔ, ΔΓ, et le quarré de ΔΖ est égal au quadruple quarré de ΔΕ, car ΖΔ est double de ΔΕ; et de plus, le quarré de ΒΓ est égal au quadruple du quarré de ΕΓ; car ΒΓ est double de ΕΓ; donc la somme des quarrés des droites Α, ΔΖ est égale au quarré de ΒΓ; donc le quarré de ΒΓ surpasse le quarré de Α du quarré de ΔΖ; donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est commensurable avec ΖΔ. Car puisque ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (16. 10). Mais ΓΔ est commensurable en longueur avec la somme de ΓΔ et de ΒΖ; car ΓΔ égale ΒΖ (6. 10); donc ΒΓ est commen-

158 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι ταῖς BZ, ΓΔ μήκει<sup>18</sup>. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει<sup>19</sup>.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει<sup>20</sup>, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβέβλησθω, ἐλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτίον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δύναται δὲ ἡ ΒΓ μείζον τῆς Α<sup>21</sup> τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ<sup>22</sup>. σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. Ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμ-

ipsis BZ, ΓΔ longitudine; quare et reliquæ ΖΔ commensurabilis est ΒΓ longitudine; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

At vero ΒΓ quam Α plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est commensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed plus potest ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi commensurabili; commensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ commensurabilis est ΒΓ longitudine. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ commen-

surable en longueur avec la somme de BZ et de ΓΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste ΖΔ (16. 10); donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite qui soit commensurable en longueur avec ΒΓ, et appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ. Il faut démontrer que ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite qui est commensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (16. 10). Mais la somme des droites ΒΖ et ΔΓ est commensurable avec ΔΓ;

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 159

μητρός ἐστὶ τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμητρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ σύμμητρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ᾖσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

surabilis est ipsi ΔΓ; quare et ΒΓ ipsi ΓΔ commensurabilis est longitudine; et dividendo igitur ΒΔ ipsi ΔΓ est commensurabilis longitudine.

Si igitur duæ rectæ, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Ἐὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῇ δὲ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἠλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμητρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει<sup>1</sup>· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνῃται<sup>2</sup> τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῇ δὲ τετάρτῃ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἠλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμητρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει<sup>3</sup>.

### PROPOSITIO XIX.

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (12. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ (16. 10). Donc, etc.

### PROPOSITION XIX.

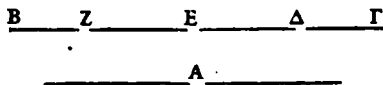
Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.



160 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἀνισοίαι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῇ δὲ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβέβλησθω ἠλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἴστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζων δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ.

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum, incommensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευαθέντων τῇ πρότερον<sup>4</sup>, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζων δύναται τῇ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ<sup>5</sup> ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει<sup>6</sup>, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α

Iisdem enim constructis quæ suprâ, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et incommensurabilem esse ΒΓ ipsi ΔΖ longitudine. Quoniam enim incommensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, incommensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine. Sed ΔΓ commensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; et ΒΓ igitur incommensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; quare et reliquæ ΖΔ incommensurabilis est ΒΓ longitudine, et ΒΓ quam Α

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit incommensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Ayant fait la même construction qu'auparavant, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΖ. Car puisque ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Mais ΔΓ est commensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (14. 10); donc ΒΓ est incommensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec le reste ΖΔ (17. 10); mais

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἢ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ.

Διυάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἀλλ' ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ<sup>8</sup>. ἀσύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. Ἀλλὰ συναμφοτέρως ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἢ θ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Εὰν ἄρα ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, καὶ τὰ ἐξ ἧς<sup>10</sup>.

plus potest quadrato ex ΖΔ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

At plus possit rursus ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit quod sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est incommensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; incommensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ incommensurabilis est ΒΓ. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine; ergo ΒΓ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine; quare et dividendo ΒΔ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine.

Si igitur sunt duæ rectæ inæquales, etc.

la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ; donc la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; et que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ; il faut démontrer que ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est incommensurable avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (17. 10). Mais la somme de ΒΖ et de ΔΓ est commensurable avec ΔΓ (6. 10); donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (14. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Donc, etc.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπὶ δὲ δίδικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει ἴσιν σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει<sup>2</sup> οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει<sup>3</sup> σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερόν ὅτι ἰὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἵπὲρ αἱ<sup>4</sup> μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὔσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ<sup>5</sup> ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος<sup>6</sup>.

## SCHOLIUM.

Quoniam demonstratum est rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ esse commensurabiles, rectas autem potentiâ non semper et longitudine, at vero posse longitudine commensurabiles esse et incommensurabiles; evidens est si expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit longitudine, vocari rationalem et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam rectæ longitudine commensurabiles omnino et potentiâ. Si autem expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit potentiâ, si quidem et longitudine, dicitur et sic rationalis et commensurabilis ipsi longitudine et potentiâ. Si autem expositæ rursus rationali commensurabilis aliqua existens potentiâ, longitudine ipsi fuerit incommensurabilis, dicitur et sic rationalis potentiâ solum commensurabilis.

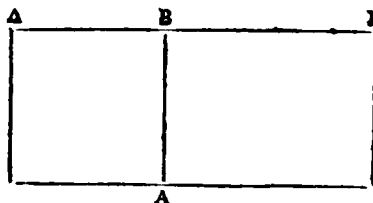
## S C H O L I E.

Puisqu'on a démontré que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur, quoiqu'elles puissent être commensurables et incommensurables en longueur (cor. 9. 10), il est évident que si une droite est commensurable en longueur avec la rationnelle proposée, elle est appelée rationnelle, et elle est commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance avec la rationnelle proposée, puisque les grandeurs commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable non seulement en puissance, mais encore en longueur, avec la rationnelle proposée, elle est dite rationnelle et commensurable en longueur et en puissance avec la rationnelle proposée. Et si enfin une droite commensurable en puissance avec la rationnelle proposée lui est incommensurable en longueur, elle est dite rationnelle commensurable en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μῆκει συμμέτρων κατὰ τινα τῶν εἰρημένων<sup>1</sup> τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB, BG ὀρθογώνιον περιέχισθαι τὸ AG· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ AG.



Αναγεγράφθαι γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AD· ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ AD. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ BG μῆκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ AB τῇ BD· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BD τῇ BG μῆκει. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BD πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ DA πρὸς τὸ AG· σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ BD τῇ BG<sup>2</sup>· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>3</sup> τὸ DA τῷ AG. Ρητόν δὲ τὸ DA· ῥητόν ἄρα ἐστὶ<sup>4</sup> καὶ τὸ AG.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

PROPOSITIO XX.

Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis AB, BG rectangulum contineatur AG; dico rationale esse AG.

Describatur enim ex AB quadratum AD; rationale igitur est AD. Et quoniam commensurabilis est AB ipsi BG longitudine, æqualis autem est AB ipsi BD; commensurabilis igitur est BD ipsi BG longitudine. Atque est ut BD ad BG ita DA ad AG; commensurabilis autem est BD ipsi BG, commensurabile igitur est et DA ipsi AG. Rationale autem DA; rationale igitur est et AG.

Ergo sub rationalibus, etc.

PROPOSITION XX.

Le rectangle compris sous des droites rationnelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

Que le rectangle AG soit compris sous les droites rationnelles AB, BG commensurables en longueur; je dis que AG est rationel.

Car décrivons sur AB le quarré AD; le quarré AD sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Puisque AB est commensurable en longueur avec BG, et que AB égale BD, BD est commensurable en longueur avec BG. Mais BD est à BG comme DA est à AG (1. 6), et BD est commensurable avec BG; donc DA est commensurable avec AG (10. 10). Mais DA est rationel; donc AG est aussi rationel (déf. 9 et pr. 12. 10). Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

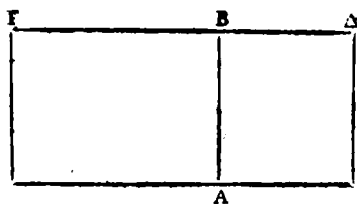
Εὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιῇ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γάρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατὰ τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβελήσθω, πλάτος ποιούῃ ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

## PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

Rationale enim ΑΓ ad rationalem ΑΒ secundum aliquem rursus prædictorum modorum applicetur, latitudinem faciens ΒΓ; dico rationalem esse ΒΓ, et commensurabilem ipsi ΑΒ longitudine.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἔστι τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Rationale autem et ΑΓ; commensurabile igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Atque est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ; commensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ. Æqualis autem ΔΒ

## PROPOSITION XXI.

Si une surface rationnelle est appliquée à une droite rationnelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

Que la surface rationnelle ΑΓ soit appliquée, suivant quelqu'un des modes dont nous avons encore parlé, à la rationnelle ΑΒ, faisant la largeur ΒΓ; je dis que ΒΓ est rationel et commensurable en longueur avec ΑΒ.

Car décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ; ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Mais ΑΓ est rationel; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (déf. 9 et pr. 12. 10). Mais ΔΑ est à ΑΓ comme ΔΒ est à ΒΓ (1. 6); donc ΔΒ est commensurable avec ΒΓ (10. 10). Mais

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 165

ἴση δὲ ἢ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα<sup>2</sup> καὶ ἢ ΑΒ  
τῇ ΑΓ. Ρητὴ δὲ ἐστὶν ἢ ΑΒ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ  
ἢ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Εὰν ἄρα ρητὸν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi BA; commensurabilis igitur et AB ipsi AG.  
Rationalis autem est AB; rationalis igitur est et  
BG, et commensurabilis ipsi AB longitudine.

Si igitur rationale, etc.

## ΛΗΜΜΑ.

Ἡ δυνάμειν ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυστάθω γάρ ἢ Α ἄλογον χωρίον, τοῦτίστι  
τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἴστω ἄλόγῳ  
χωρίῳ· λέγω ὅτι ἢ Α ἄλογός ἐστιν.

## LEMMA.

Recta quæ potest irrationale spatium, irra-  
tionalis est.

Possit enim recta A irrationale spatium, hoc  
est ex A quadratum æquale sit irrationali spatio;  
dico A irrationalem esse.

A

Εἰ γὰρ ἴσται ρητὴ ἢ Α, ρητὸν ἴσται καὶ τὸ  
ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, οὕτως γὰρ ἐστὶν<sup>2</sup> ἐν  
τοῖς ὅροις. Οὐκ ἴσται δὲ ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ Α<sup>3</sup>.  
Ὅπερ εἶδει διῆξαι<sup>4</sup>.

Si enim esset rationalis A, rationale esset ex  
ipsâ quadratum, sic enim est in definitionibus.  
Non est autem; irrationalis igitur est A. Quod  
oportebat ostendere.

ΔΒ est égal à ΒΑ; donc ΑΒ est commensurable avec ΑΓ. Mais ΑΒ est rationel; donc ΒΓ  
est aussi rationel, et commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. 6 et pr. 12. 10).  
Donc, etc.

## LEMME.

La droite dont la puissance est une surface irrationnelle, est irrationnelle.

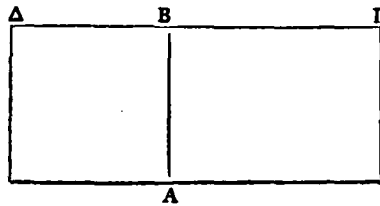
Que la puissance de A soit une surface irrationnelle, c'est-à-dire que le carré  
de A soit égal à une surface irrationnelle; je dis que A est irrationnel.

Car si A était rationel, le carré de A serait rationel, ainsi que cela est dit  
dans les définitions (déf. 8 et cor. 9. 10). Mais il ne l'est pas; donc A est irrationnel.  
Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογος ἔσται· καλεῖσθω δὲ μέση.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχίσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι· καλεῖσθω δὲ μέση.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως

Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationalis est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ quadratum continetur ΑΓ; dico irrationalis esse ΑΓ, et rectam quæ potest ipsum irrationalem esse; ea autem vocetur media.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationalis igitur est ΑΔ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, potentiâ enim solùm ex supponuntur commensurabiles, æqualis autem ΑΒ ipsi ΒΔ; incommensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ longitudine. Atque est ut ΒΔ ad

## PROPOSITION XXII.

Le rectangle compris sous des droites rationnelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appellera médiale.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites rationnelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en puissance seulement; je dis que le rectangle ΑΓ est irrationnel, et que la droite dont la puissance est égale à ce rectangle est irrationnelle; que cette droite soit appelée médiale.

Car décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ; ΑΔ sera irrationnel. Et puisque ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΒΓ; car on a supposé que ces deux droites étaient commensurables en puissance seulement, et que de plus ΑΒ est égal à ΒΔ, ΑΒ sera incommensurable en longueur avec ΒΓ. Mais ΒΔ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΑΓ

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 167

τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῇ ΑΓ. Πητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ, τουτίστιν ἡ ἴσον αὐτῇ τετράγωνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση<sup>2</sup>. Οπερ εἶδει δείξαι<sup>3</sup>.

ΒΓ ita ΑΔ ad ΑΓ; incommensurable igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Rationale autem ΔΑ; irrationale igitur est ΑΓ; quare et recta quæ potest ipsum ΑΓ, hoc est recta quæ potest æquale ipsi quadratum, irrationalis est. Ea autem vocetur media. Quod oportebat ostendere.

## ΛΗΜΜΑ.

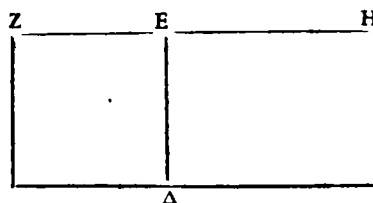
Εὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι, ἴστιν<sup>1</sup> ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ· λίγω ὅτι ἴστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.

## LEMMA.

Si sint duæ rectæ, est ut prima ad secundam ita quadratum ex primâ ad rectangulum sub duabus rectis.

Sint duæ rectæ ΖΕ, ΕΗ; dico esse ut ΖΕ ad ΕΗ ita ex ΖΕ quadratum ad rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΗΔ. Επεὶ οὖν ἴστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΗ, καὶ ἴστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ

Describatur enim ex ΖΕ quadratum ΔΖ, et compleatur ΗΔ. Quoniam igitur est ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΖΔ ad ΔΗ, atque est quidem ΖΔ quadratum ex ΖΕ, ΔΗ vero rectangulum sub

(1. 6); donc ΔΑ est incommensurable avec ΑΓ (10. 10); mais ΔΑ est rationel; donc ΑΓ est irrationnel (déf. 10 et pr. 13. 10); donc la droite dont la puissance égale ΑΓ, c'est-à-dire la droite dont la puissance est un carré égal à ΑΓ est irrationnelle (déf. 11. 10). Cette droite sera appelée médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

## LEMME.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le carré de la première est au rectangle compris sous ces deux droites.

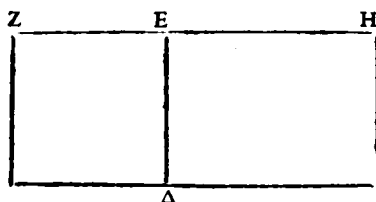
Soient les deux droites ΖΕ, ΕΗ; je dis que ΖΕ est à ΕΗ comme le carré de ΖΕ est au rectangle compris sous ΖΕ, ΕΗ.

Décrivons sur ΖΕ le carré ΔΖ, et achevons ΗΔ. Puisque ΖΕ est à ΕΗ comme ΖΔ est à ΔΗ (1. 6); que ΖΔ est le carré de ΖΕ, et que ΔΗ est le rectangle sous ΔΕ



# 168 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, hoc est sub ZE, EH; est igitur ZE, EH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ut ZE ad EH ita ex ZE quadratum ad rectan-



τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, ΕΗ. Ομοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν HE, EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EZ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ. Ὅπρι εἶδει δείξαι<sup>2</sup>.

gulum sub ZE, EH. Similiter autem et ut sub HE, EZ rectangulum ad quadratum ex EZ, hoc est ut HΔ ad ΖΔ ita HE ad EZ. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον· πλάτος ποιῇ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Εστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβελήσθω χωρίον ὀρθογώνιον<sup>2</sup> τὸ ΒΔ πλάτος ποιούν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

## PROPOSITIO XXIII.

Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

Sit media quidem Α, rationalis autem ΓΒ; et quadrato ex Α æquale ad ΒΓ applicetur spatium rectangulum ΒΔ latitudinem faciens ΓΔ; dico rationalem esse ΓΔ, et incommensurabilem ipsi ΓΒ longitudine.

ΕΗ, c'est-à-dire sous ZE, ΕΗ, la droite ZE est à EH comme le carré de ZE est au rectangle sous ZE, ΕΗ. Semblablement le rectangle sous HE, EZ est au carré de EZ, c'est-à-dire ΗΔ est à ΖΔ comme HE est à EZ. Ce qu'il fallait démontrer.

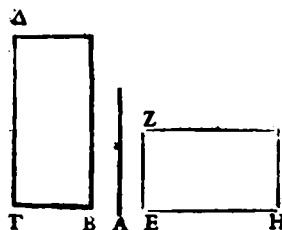
## PROPOSITION XXIII.

Le carré d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

Soit la médiale Α, et la rationnelle ΓΒ; appliquons à ΒΓ un rectangle ΒΔ, qui soit égal au carré de Α, et qui fasse la largeur ΓΔ; je dis que la droite ΓΔ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΒ.

Επει γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. Δυνασθὼ τὸ ΗΖ. Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΒ τῷ ΗΖ. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς

Quoniam enim media est Α, potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus. Possit ΗΖ. Potest autem et ΔΒ; æquale igitur est ΔΒ ipsi ΗΖ. Est autem illi et æquiangulum, æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos; proportionaliter igitur est ut ΒΓ ad ΕΗ ita ΕΖ ad ΓΔ; est igitur et ut ex ΒΓ quadratum



τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρᾳ αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ

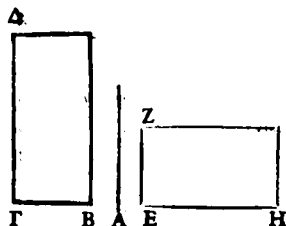
ad ipsum ex ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΓΔ. Commensurable autem est ex ΓΒ quadratum quadrato ex ΕΗ, rationalis enim est utraque ipsarum; commensurable igitur est et ex ΕΖ quadratum quadrato ex ΓΔ. Rationale autem est quadratum ex ΕΖ; rationale igitur est et quadratum ex ΓΔ; rationalis igitur est ΓΔ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΖ ipsi ΕΗ longitudine, potentiâ enim solùm sunt commensurabiles, ut autem ΕΖ ad ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum

Car, puisque la droite Α est médiale, sa puissance égale une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement (22. 10). Que sa puissance soit égale à ΗΖ; mais sa puissance égale aussi ΔΒ; donc ΔΒ égale ΗΖ. Mais ΔΒ est équiangle avec ΗΖ; et dans les parallélogrammes équiangles et égaux, les côtés qui comprennent des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ΒΓ est à ΕΗ comme ΕΖ est à ΓΔ; donc le quarré de ΒΓ est au quarré de ΕΗ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de ΓΔ (22. 6). Mais le quarré de ΓΒ est commensurable avec le quarré de ΕΗ; car chacune de ces droites est rationnelle (22. 10); donc le quarré de ΕΖ est aussi commensurable avec le quarré de ΓΔ (10. 10). Mais le quarré de ΕΖ est rationel; donc le quarré de ΓΔ est rationel aussi; donc ΓΔ est rationel. Et puisque la droite ΕΖ est incommensurable en longueur avec ΕΗ; car celle-ci ne lui est commensurable qu'en puissance, et que

# 170 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, EH· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ὑπὸ τῶν ZE, EH. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς EZ σύμμετρον ἐστὶ<sup>4</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ZE, EH ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσα γάρ

ad rectangulum sub ZE, EH; incommensurable igitur est ex EZ quadratum rectangulo sub ZE, EH. Sed quadrato quidem ex EZ commensurable est quadratum ex ΓΔ, rationales enim sunt potentia, rectangulo autem sub ZE, EH commensurable est rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ;



ἐστὶ<sup>5</sup> τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιχομίνῳ<sup>6</sup>. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

æqualia enim sunt quadrato ex Α; incommensurable igitur est et ex ΓΔ quadratum rectangulo sub ΔΓ, ΓΒ contento. Ut autem ex ΓΔ quadratum ad rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ ita est ΔΓ ad ΓΒ; incommensurabilis igitur est ΔΓ ipsi ΓΒ longitudine; rationalis igitur est ΓΔ et incommensurabilis ipsi ΓΒ longitudine. Quod oportebat ostendere.

EZ est à EH comme le carré de EZ est au rectangle sous ZE, EH (lem. 22. 10), le carré de EZ est incommensurable avec le rectangle sous ZE, EH (10. 10). Mais le carré de ΓΔ est commensurable avec le carré de EZ, car ces droites sont rationnelles en puissance, et le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ZE, EH, car ils sont égaux chacun au carré de Α; donc le carré de ΓΔ est incommensurable avec le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ (13. 10). Mais le carré de ΓΔ est au rectangle sous ΔΓ, ΓΒ comme ΔΓ est à ΓΒ (lem. 22); donc ΔΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ; donc ΓΔ est rationnel et incommensurable en longueur avec ΓΒ (déf. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Ἡ τῇ μίση σύμμετρος μίση ἐστίν.

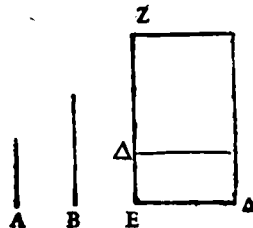
Ἐστω μίση ἡ  $A$ , καὶ τῇ  $A$  σύμμετρος ἔστω ἡ  $B$ · λέγω ὅτι καὶ ἡ  $B$  μίση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Gamma\Delta$  παρατελλέσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ  $\Gamma E$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $E\Delta$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ  $E\Delta$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $\Gamma\Delta$  μήκει. Τῇ δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Delta\Gamma$  παρατελλέσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ  $\Gamma Z$  πλάτος ποιοῦν

Recta mediæ commensurabilis media est.

Sit media  $A$ , et ipsi  $A$  commensurabilis sit  $B$ ; dico et  $B$  mediam esse.

Exponatur enim rationalis  $\Gamma\Delta$ , et quadrato quidem ex  $A$  æquale ad  $\Gamma\Delta$  applicetur spatium rectangulum  $\Gamma E$  latitudinem faciens  $E\Delta$ ; rationalis igitur est  $E\Delta$ , et incommensurabilis ipsi  $\Gamma\Delta$  longitudine. Quadrato autem ex  $B$  æquale ad  $\Delta\Gamma$  applicetur spatium rectangulum  $\Gamma Z$  lati-



τὴν  $Z\Delta$ . Ἐπὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ  $A$  τῇ  $B$ , σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τῇ ἀπὸ τῆς  $B$ . Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον ἐστὶ τὸ  $E\Gamma$ , τῇ δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον ἐστὶ τὸ  $\Gamma Z$ · σύμ-

tudinem faciens  $Z\Delta$ . Quoniam igitur commensurabilis est  $A$  ipsi  $B$ , commensurable est et ex  $A$  quadratum quadrato ex  $B$ . Sed quadrato quidem ex  $A$  æquale est  $E\Gamma$ , quadrato autem

PROPOSITION XXIV.

Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

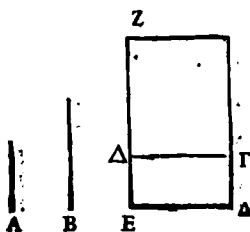
Soit la médiale  $A$ , et que  $B$  soit commensurable avec  $A$ ; je dis que la droite  $B$  est médiale.

Car soit la rationnelle  $\Gamma\Delta$ , et soit appliqué à  $\Gamma\Delta$  un rectangle  $\Gamma E$  qui, faisant la largeur  $E\Delta$ , soit égal au carré de  $A$ ; la droite  $E\Delta$  sera rationnelle et incommensurable en longueur avec  $\Gamma\Delta$  (23. 10). Soit aussi appliqué à  $\Delta\Gamma$  un rectangle  $\Gamma Z$  qui, faisant la largeur  $Z\Delta$ , soit égal au carré de  $B$ . Puisque  $A$  est commensurable avec  $B$ , le carré de  $A$  sera commensurable avec le carré de  $B$  (cor. 9. 10). Mais  $E\Gamma$  est égal au carré de  $A$ , et  $\Gamma Z$  est égal au carré de  $B$ ;

172 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μικρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. Καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. Πρὶν δὲ ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι, δυνάμει

ex B æquale ΓΖ; commensurable igitur est ΕΓ ipsi ΓΖ. Atque est ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΕΔ ad ΔΖ; commensurabilis igitur est ΕΔ ipsi ΔΖ longitudine. Rationalis autem est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; rationalis igitur est et ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; ergo ΓΔ, ΔΖ rationales sunt, potentiâ.



μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ τὸ<sup>2</sup> ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυνάμειν μέση ἐστίν<sup>3</sup>. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυνάμειν μέση ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

solum commensurabiles. Recta autem quæ potest rectangulum sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus media est; recta igitur quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ media est, et potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ ipsa B; media igitur est B.

donc ΕΓ est commensurable avec ΓΖ. Mais ΕΓ est à ΓΖ comme ΕΔ est à ΔΖ (1. 6); donc ΕΔ est commensurable en longueur avec ΔΖ (10. 10). Mais la droite ΕΔ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (23. 10); donc la droite ΔΖ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (13. 10); donc les droites ΓΔ, ΔΖ sont rationelles et commensurables en puissance seulement. Mais la droite dont la puissance égale un rectangle sous des rationelles commensurables en puissance seulement, est une médiale (22. 10); donc la droite, dont la puissance égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ, est une médiale; mais la puissance de B égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ; donc la droite B est une médiale.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ex δὲ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῇ μίσει  
χωρὶς σύμμετρον μέσον ἐστί. Δύνανται γὰρ  
αὐτὰ εὐθεῖαι αἱ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ  
ἑτέρα μίση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μίση ἐστίν.  
Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ  
ἐπὶ τῶν μίσεων ἑξακολουθεῖ τὴν τῇ μίσει μήκει  
σύμμετρον λήγισθαι μίσην, καὶ σύμμετρον αὐτῇ  
μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἰσχυρὰ  
καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνά-  
μει. Ἐὰν δὲ τῇ μίσει σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει,  
εἰ μὲν καὶ μήκει, λήγονται καὶ οὕτως μίσαι καὶ  
σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει<sup>2</sup>. Εἰ δὲ δυνάμει  
μόνον, λήγονται μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι<sup>3</sup>.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio  
commensurabile medium esse. Possunt enim  
ipsa rectæ quæ sunt potentiâ commensurabiles,  
quarum altera media; quare et reliqua me-  
dia est. Congruenter autem ipsis in rationalibus  
dictis, et in mediis quoque colligetur, rectam  
mediæ longitudine commensurabilem dici me-  
diam, et commensurabilem ipsi non solum lon-  
gitudine sed et potentiâ, quoniam universè rectæ  
longitudine commensurabiles semper et poten-  
tiâ. Si autem mediæ commensurabilis aliqua  
recta fuerit potentiâ, siquidem et longitudine,  
dicuntur et sic mediæ et commensurabiles lon-  
gitudine et potentiâ. Si autem potentiâ solum,  
dicuntur mediæ potentiâ solum commensura-  
biles.

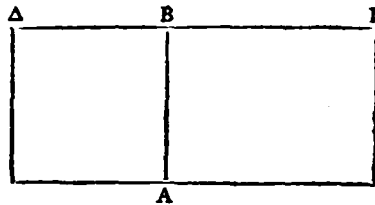
COROLLAIRE.

De là il est évident qu'une surface commensurable avec une surface médiale est médiale. Car les droites dont les puissances sont égales à ces surfaces sont commensurables en puissance, et l'une de ces droites est médiale; donc la droite restante est médiale. Mais d'après ce qui a été dit dans les rationelles, on peut conclure dans les médiales qu'une droite commensurable à une médiale est une médiale, cette droite lui étant commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance; car généralement les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable en puissance avec une médiale, et si elle l'est aussi en longueur, les médiales sont dites commensurables en longueur et en puissance. Mais si elles ne sont commensurables qu'en puissance, elles sont dites médiales commensurables en puissance seulement.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατὰ  
τινα τῶν εἰρημένων τρόπων<sup>1</sup> περιχόμενον ὀρθο-  
γώνιον, μέσον ἐστίν.

Υπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν  
AB, BG περιχίσθω ὀρθογώνιον τὸ AG· λέγω ὅτι  
τὸ AG μέσον ἐστίν.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον  
τὸ AD· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AD. Καὶ ἵπαι σύμ-  
μετρός ἐστι<sup>2</sup> ἡ AB τῇ BG μήκει, ἴση δὲ ἡ AB  
τῇ BD· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ BG  
μήκει· ὥστε καὶ τὸ DA τῷ AG σύμμετρόν ἐστι.  
Μέσον δὲ τὸ DA· μέσον ἄρα καὶ τὸ AG. Ὅπρι  
ἴδει δείξαι.

## PROPOSITIO XXV.

Sub mediis longitudine commensurabilibus  
secundum aliquem dictorum modorum conten-  
tum rectangulum, medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabi-  
libus rectis AB, BG contineatur rectangulum  
AG; dico AG medium esse.

Describatur enim ex AB quadratum AD;  
medium igitur est AD. Et quoniam commensu-  
rabilis est AB ipsi BG longitudine, æqualis  
autem AB ipsi BD; commensurabilis igitur est  
est et AB ipsi BG longitudine; quare et DA ipsi  
AG commensurabile est. Medium autem DA;  
medium igitur et AG. Quod oportebat ostendere.

## PROPOSITION XXV.

Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

Que le rectangle AG soit compris sous les droites médiales AB, BG commensurables en longueur; je dis que AG est médial.

Décrivons sur AB le carré AD, AD sera médial (cor. 24. 10). Et puisque AB est commensurable en longueur avec BG, et que AB est égal à BD, la droite DB est commensurable en longueur avec BG; donc DA est commensurable avec AG. Mais DA est médial (cor. 24. 10); donc AG est aussi médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

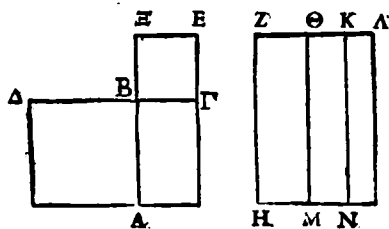
PROPOSITIO XXVI.

Τὸ ὑπὸ μίσεων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐ-  
θειῶν<sup>1</sup> περιχόμενον ὀρθογώνιον, ἥτοι ῥητὸν ἢ  
μέσον ἐστίν.

Υπὸ γὰρ μίσεων δυνάμει μόνον συμμέτρων  
εὐθειῶν τῶν AB, BG περιχέσθω ὀρθογώνιον<sup>2</sup> τὸ  
AG· λέγω ὅτι τὸ AG ἥτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν<sup>3</sup>.

Sub mediis potentiâ solùm commensurabi-  
libus rectis contentum rectangulum, vel ratio-  
nale vel medium est.

Sub mediis enim potentiâ solùm commensura-  
bilibus rectis AB, BG contineatur rectangulum  
AG; dico AG vel rationale vel medium esse.



Αναγινώσκω γὰρ ἀπὸ τῶν AB, BG τιτράζονα  
τὰ AΔ, BE· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  
AΔ, BE. Καὶ ἐκτίσθω ῥητὴ ἡ ZH, καὶ τῇ μὲν  
AΔ ἴσον παρὰ τὴν ZH παρατελλέσθω ὀρθογώνιον  
παραλληλόγραμμον τὸ HΘ πλάτος ποιοῦν τὴν  
ZΘ, τῇ δὲ AG ἴσον παρὰ τὴν ΘM παρατε-  
λλέσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ MK

Describantur enim ex AB, BG quadrata AΔ,  
BE; medium igitur est utrumque ipsorum AΔ,  
BE. Et exponatur rationalis ZH, et ipsi quidem  
AΔ æquale ad ZH applicetur rectangulum pa-  
rallelogrammum HΘ latitudinem faciens ZΘ,  
ipsi autem AG æquale ad ΘM applicetur rectan-  
gulum parallelogrammum MK latitudinem fa-

PROPOSITION XXVI.

Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationel ou médial.

Que le rectangle AG soit compris sous les droites médiales AB, BG, commensurables en puissance seulement; je dis que AG est ou rationel ou médial.

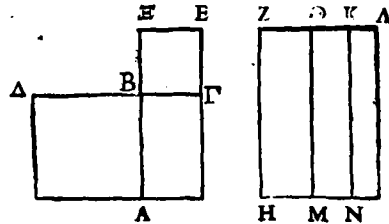
Car décrivons sur les droites AB, BG les quarrés AΔ, BE; chacun des quarrés AΔ, BE sera médial. Soit la rationelle ZH; appliquons à ZH le parallélogramme rectangle HΘ, qui ayant ZΘ pour largeur, soit égal à AΔ; appliquons aussi à ΘM le parallélogramme rectangle MK, qui ayant ΘK pour largeur, soit égal à



176 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἴτι τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβλεψθῶ τὸ ΝΑ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' οὗθιαις ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ

ciens ΘΚ, et adhuc ipsi BE æquale similiter ad ΚΝ applicetur ΝΑ latitudinem faciens ΚΛ; in rectâ igitur sunt ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΔ, ΒΕ, atque est æquale quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum



ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΑ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερα τῶν ΖΘ, ΚΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ<sup>5</sup> σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΑ. Καὶ ἴστιν<sup>6</sup> ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει· αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΒΓ· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς

autem ΕΕ ipsi ΝΑ; medium igitur et utrumque ipsorum ΗΘ, ΝΑ, et ad rationalem ΖΗ applicatur; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΖΘ, ΚΛ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Et quoniam commensurabile est ΑΔ ipsi ΒΕ; commensurabile igitur est et ΗΘ ipsi ΝΑ. Atque est ut ΗΘ ad ΝΑ ita ΖΘ ad ΚΛ; commensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΚΑ longitudine; ergo ΖΘ, ΚΛ rationales sunt longitudine commensurabiles; rationale igitur est rectangulum sub ΖΘ, ΚΛ. Et quoniam æqualis est quidem ΒΔ ipsi ΒΑ, ipsa autem ΕΒ ipsi ΒΓ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΕ. Sed ut ΔΒ ad ΒΓ

ΑΓ, et enfin appliquons semblablement à ΚΝ le parallélogramme rectangle ΝΑ, qui ayant ΚΛ pour largeur, soit égal à ΒΕ (45. 1); les droites ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ seront en ligne droite (14. 1). Puisque chacun des carrés ΑΔ, ΒΕ est médial; que ΑΔ est égal à ΗΘ, et ΒΕ égal à ΝΑ, chacun des rectangles ΗΘ, ΝΑ sera médial; mais ils sont appliqués sur la rationelle ΖΗ; donc chacune des droites ΖΘ, ΚΛ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10). Mais ΑΔ est commensurable avec ΒΕ; donc ΗΘ est commensurable avec ΝΑ. Mais ΗΘ est à ΝΑ comme ΖΘ est à ΚΛ (1. 6); donc ΖΘ est commensurable en longueur avec ΚΛ (10. 10); donc les droites ΖΘ, ΚΛ sont des rationelles commensurables en longueur; le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est donc rationel. Et puisque ΒΔ est égal à ΒΑ, et ΕΒ égal à ΒΓ, ΔΒ sera à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΕ; mais ΔΒ est à ΒΓ

τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ οὕτως τὸ ΑΓ  
πρὸς τὸ ΓΞ· ἴσθι ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ  
οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἴσον δὲ ἴσθι τὸ μὲν  
ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ  
ΝΛ· ἴσθι ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ οὕτως τὸ  
ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἴσθι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς  
τὴν ΘΚ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ  
τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἴσθι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ρητὸν  
δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ρητὸν ἄρα ἴσθι καὶ  
τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ρητὴ ἄρα ἴσθι ἡ ΘΚ. Καὶ εἰ  
μὲν σύμμετρος ἴσθι τῇ ΖΗ μήκει, ρητὸν ἴσθι  
τὸ ΘΝ. Εἰ δὲ ἀσύμμετρος ἴσθι τῇ ΖΗ μήκει,  
αἱ ΚΘ, ΘΜ<sup>8</sup> ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-  
μετροι· μείζον ἄρα ἴσθι τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα  
ἢ τοι ρητὸν ἢ μείζον ἴσθιν<sup>9</sup>. Ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ  
ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἢ τοι ρητὸν ἢ μείζον ἴσθι.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μίσεων, καὶ τὰ ἰζῆς.

ita ΔΑ ad ΑΓ; ut autem ΑΒ ad ΒΞ ita ΑΓ  
ad ΓΞ; est igitur ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad  
ΓΞ. Æquale autem est quidem ΑΔ ipsi ΗΘ,  
ipsum vero ΑΓ ipsi ΜΚ, ipsum et ΓΞ  
ipsi ΝΛ; est igitur ut ΗΘ ad ΜΚ ita ΜΚ ad  
ΝΛ; est igitur et ut ΖΘ ad ΘΚ ita ΘΚ ad  
ΚΛ; rectangulum igitur sub ΖΘ, ΚΛ æquale  
est quadrato ex ΘΚ. Rationale autem rectan-  
gulum sub ΖΘ, ΚΛ; rationale igitur est et qua-  
dratum ex ΘΚ; rationalis igitur est ΘΚ. Et  
si quidem commensurabilis est ipsi ΖΗ longitu-  
dine, rationale est ΘΝ. Si autem incommensu-  
rabilis est ipsi ΖΗ longitudine, ipsæ ΚΘ, ΘΜ  
rationales sunt potentiâ solum commensura-  
biles; medium igitur est ΘΝ; ergo ΘΝ vel ra-  
tionale vel medium est. Æquale autem ΘΝ  
ipsi ΑΓ; ergo ΑΓ vel rationale vel medium est.

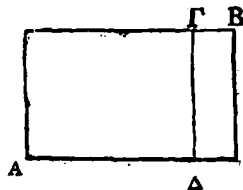
Ergo sub mediis, etc.

comme ΔΑ est à ΑΓ, et ΑΒ est à ΒΞ comme ΑΓ est à ΓΞ (1. 6); donc ΔΑ est  
à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΞ. Mais ΑΔ est égal à ΗΘ, ΑΓ égal à ΜΚ, et ΓΞ égal  
à ΝΛ; donc ΗΘ est à ΜΚ comme ΜΚ est à ΝΛ; donc ΖΘ est à ΘΚ comme ΘΚ est  
à ΚΛ; le rectangle compris sous ΖΘ, ΚΛ est donc égal au quarré de ΘΚ (17. 6).  
Mais le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est rationel (20. 10); donc le quarré de ΘΚ est  
rationnel; donc la droite ΘΚ est rationelle. Et si ΘΚ est commensurable en lon-  
gueur avec ΖΗ, la surface ΘΝ sera rationelle. Mais si ΘΚ est incommensurable en  
longueur avec ΖΗ, les droites ΚΘ, ΘΜ seront des rationelles commensurables en  
puissance seulement, et la surface ΘΝ sera médiale (22. 10); donc ΘΝ est rationel  
ou médial. Mais ΘΝ est égal à ΑΓ; donc ΑΓ est ou rationel ou médial. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερίχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπεριχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὰ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρά τὴν ΕΖ παραβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιῶν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφαιρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἴσθιν ἴσον<sup>1</sup>. Ῥητὸν δὲ ἴσθι τὸ ΔΒ· ῥητὸν

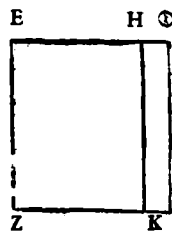


ἄρα ἴσθι καὶ τὸ ΚΘ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἴσθιν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἴσθι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. Καὶ παρά ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται<sup>2</sup> ῥητὴ ἄρα ἴσθιν ἑκατέρω τῶν ΕΘ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ

## PROPOSITIO XXVII.

Medium non medium superat rationali.

Si enim possibile, medium ΑΒ medium ΑΓ superet rationali ΔΒ, et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi ΑΒ æquale ad ΕΖ applicetur parallelogrammum rectangulum ΖΘ latitudinem faciens ΕΘ, ipsi autem ΑΓ æquale auferatur ΖΗ; reliquum igitur ΒΔ reliquo ΚΘ est æquale. Rationale autem est ΔΒ; rationale igitur est et



ΚΘ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΒ, ΑΓ, atque est quidem ΑΒ ipsi ΖΘ æquale, ipsum autem ΑΓ ipsi ΖΗ; medium igitur et utrumque ipsorum ΖΘ, ΖΗ. Et ad rationalem ΕΖ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΕΘ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam rationale est

## PROPOSITION XXVII.

Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

Car, que la surface médiale ΑΒ, s'il est possible, surpasse la surface médiale ΑΓ d'une surface rationnelle ΔΒ; soit la rationnelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ le parallélogramme rectangle ΖΘ, qui, étant égal à ΑΒ, ait ΕΘ pour largeur (45. 1); et de ΖΘ retranchons ΖΗ égal à ΑΓ; le reste ΒΔ sera égal au reste ΚΘ. Mais ΔΒ est rationnel donc ΚΘ est rationnel. Et puisque chacune des surfaces ΑΒ, ΑΓ est médiale, que ΑΒ est égal à ΖΘ, et que ΑΓ est égal à ΖΗ, chacune des surfaces ΖΘ, ΖΗ sera médiale. Mais ces surfaces sont appliquées à ΕΖ; donc chacune des droites ΕΘ, ΕΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Et puisque ΔΒ est

ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καὶ ἴσιν ἴσον τῇ ΚΘ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Αλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐστὶν ὥς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετραγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γὰρ ἐστὶν αὐτοῦ<sup>3</sup>. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τάτι ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ<sup>4</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. Αλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ΔΒ, atque est æquale ipsi ΚΘ; rationale igitur est et ΚΘ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΗΘ, et commensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Sed et ΕΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine; incommensurabilis igitur est ΕΗ ipsi ΗΘ longitudine. Atque est ut ΕΗ ad ΗΘ ita ex ΕΗ quadratum ad rectangulum sub ΕΗ, ΗΘ; incommensurable igitur est ex ΕΗ quadratum rectangulo sub ΕΗ, ΗΘ. Sed quadrato quidem ex ΕΗ commensurabilia sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, rationalia enim utraque, rectangulo autem sub ΕΗ, ΗΘ commensurable est rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, duplum enim est ipsius; incommensurabilia igitur sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata rectangulo bis sub ΕΗ, ΗΘ; et utraque igitur ex ΕΗ, ΗΘ quadrata et rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, quod est quadratum ex ΕΘ, incommensurabilia sunt quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. Rationalia autem quadrata ex ΕΗ, ΗΘ; irrationalis igitur est quadratum ex ΕΘ; irrationalis igitur est ΕΘ. Sed et rationalis, quod est impossibile.

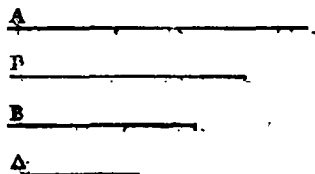
Medium igitur medium, etc.

rationel, et qu'il est égal à ΚΘ, ΚΘ sera rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΗΘ est rationel et commensurable en longueur avec ΕΖ (21. 10). Mais ΕΗ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ; donc ΕΗ est incommensurable en longueur avec ΗΘ (13. 10). Mais ΕΗ est à ΗΘ comme le carré de ΕΗ est au rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (1. 6); donc le carré de ΕΗ est incommensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le carré de ΕΗ, car ces carrés sont rationels et le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, car il en est le double; donc la somme des carrés de ΕΗ et de ΗΘ est incommensurable avec le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (14. 10); donc la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ, du double du rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, qui est le carré de ΕΘ (4. 2), est incommensurable avec la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ (17. 10). Mais les carrés de ΕΗ et de ΗΘ sont rationels; donc le carré de ΕΘ est irrational (déf. 10. 10); donc ΕΘ est irrational. Mais il est rationel, ce qui est impossible. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

Μέσας εὐρίειν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιχοῦσας.

Εκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ  $A, B$ , καὶ εἰλήθω τῶν  $A, B$  μέση ἀνάλογον ἡ  $\Gamma$ , καὶ γεγενέτω ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Delta$ .



Καὶ ἐπεὶ αἱ  $A, B$  ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A, B$ , τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$ , μέσον ἐστὶ· μέση ἄρα ἡ  $\Gamma$ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Delta$ , αἱ δὲ  $A, B$  δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ  $\Gamma, \Delta$  ἄρα δυνάμει μόνον εἰσι σύμμετροι. Καὶ ἐστὶ μέση ἡ  $\Gamma$ · μέση ἄρα καὶ ἡ  $\Delta$ · αἱ  $\Gamma, \Delta$  ἄρα μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον

## PROPOSITIO XXVIII.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

Exponentur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles  $A, B$ , et sumatur ipsarum  $A, B$  media proportionalis  $\Gamma$ , et fiat ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ .

Et quoniam  $A, B$  rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub  $A, B$ , hoc est quadratum ex  $\Gamma$ , medium est; media igitur  $\Gamma$ . Et quoniam est ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ , ipsæ autem  $A, B$  potentiâ solùm commensurabiles; et  $\Gamma, \Delta$  igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Atque est media  $\Gamma$ ; media igitur et  $\Delta$ ; ergo  $\Gamma, \Delta$  mediæ sunt potentiâ

## PROPOSITION XXVIII.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationelle.

Soient  $A, B$  deux rationnelles commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle  $\Gamma$  entre  $A$  et  $B$  (13. 6), et faisons en sorte que  $A$  soit à  $B$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$  (12. 6).

Puisque les rationnelles  $A, B$  sont commensurables en puissance seulement, le rectangle sous  $A, B$  (22. 10), c'est-à-dire le carré de  $\Gamma$ , est médial (17. 6); donc  $\Gamma$  est médial. Et puisque  $A$  est à  $B$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$ , et que les droites  $A, B$  ne sont commensurables qu'en puissance; les droites  $\Gamma, \Delta$  ne sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais  $\Gamma$  est médial; donc  $\Delta$  est médial (24. 10); donc les droites  $\Gamma, \Delta$  sont des médiales commensurables en puissance

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 181

σύμμετροι. Λέγω δὴ<sup>2</sup> ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἴστιν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Delta$ , ἐναλλάξ ἄρα ἴστιν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $\Gamma$  οὕτως<sup>3</sup> ἡ  $B$  πρὸς τὴν  $\Delta$ . Ἀλλὰ ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $\Gamma$  οὕτως<sup>4</sup> ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $B$  καὶ ὡς ἄρα ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἡ  $B$  πρὸς τὴν  $\Delta$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $B$ . Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $B$  ῥητὸν ἄρα ἴστί<sup>5</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$ .

Εὕρηται ἄρα μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι<sup>6</sup>.

solum commensurabiles. Dico et ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut  $A$  ad  $B$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ , permutando igitur est ut  $A$  ad  $\Gamma$  ita  $B$  ad  $\Delta$ . Sed ut  $A$  ad  $\Gamma$  ita  $\Gamma$  ad  $B$ ; et ut igitur  $\Gamma$  ad  $B$  ita  $B$  ad  $\Delta$ ; rectangulum igitur sub  $\Gamma, \Delta$  æquale est quadrato ex  $B$ . Rationale autem quadratum ex  $B$ ; rationale igitur est et rectangulum sub  $\Gamma, \Delta$ .

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solum commensurabiles. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσας εὐρεῖν δυνάμεις μόνον συμμέτρους, μέσον περιχοῦσας.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς<sup>1</sup> ῥηταὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ  $A, B, \Gamma$ , καὶ εἰλήφθω τῶν  $A, B$  μέση ἀνάλογον ἡ  $\Delta$ , καὶ γεγονέτω ὡς ἡ  $B$  πρὸς τὴν  $\Gamma$  οὕτως<sup>2</sup> ἡ  $\Delta$  πρὸς τὴν  $E$ .

Ἐπεὶ αἱ  $A, B$  ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $A, B$ , τουτίστι

### PROPOSITIO XXIX.

Medias invenire potentiâ solum commensurabiles, medium continentes.

Exponentur tres rationales potentiâ solum commensurabiles  $A, B, \Gamma$ , et sumatur ipsarum  $A, B$  media proportionalis  $\Delta$ , et fiat ut  $B$  ad  $\Gamma$  ita  $\Delta$  ad  $E$ .

Quoniam  $A, B$  rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, rectangulum igitur sub  $A, B$ ,

seulement (24. 10). Je dis aussi qu'elles comprennent une surface rationnelle. Car puisque  $A$  est à  $B$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$ , par permutation  $A$  est à  $\Gamma$  comme  $B$  est à  $\Delta$  (16. 5). Mais  $A$  est à  $\Gamma$  comme  $\Gamma$  est à  $B$ ; donc  $\Gamma$  est à  $B$  comme  $B$  est à  $\Delta$ ; donc le rectangle sous  $\Gamma, \Delta$  est égal au carré de  $B$  (17. 6). Mais le carré de  $B$  est rationel; le rectangle sous  $\Gamma, \Delta$  est donc aussi rationel.

On a donc trouvé des médiales commensurable en puissance seulement. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XXIX.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement; qui comprennent une surface médiale.

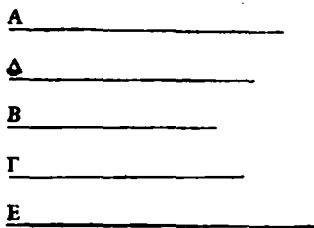
Soient les trois rationnelles  $A, B, \Gamma$  commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle  $\Delta$  entre  $A$  et  $B$  (13. 6), et faisons en sorte que  $B$  soit à  $\Gamma$  comme  $\Delta$  est à  $E$  (12. 6).

Puisque les droites  $A, B$  sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le rectangle sous  $A, B$  (22. 10), c'est-à-dire le carré de  $\Delta$  (17. 6)

182 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστὶ· μέση ἄρα ἡ Δ.  
Καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι,  
καὶ ἔστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως<sup>3</sup> ἡ Δ πρὸς  
τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον  
εἰσὶ<sup>4</sup>. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ,  
Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.  
Λέγω δὲ ὅτι μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν

hoc est quadratum ex Δ, medium est; media  
igitur Δ. Et quoniam Β, Γ potentiā solūm  
sunt commensurabiles, atque est ut Β ad Γ  
ita Δ ad Ε; ergo Δ, Ε commensurabiles po-  
tentiā solūm sunt. Media autem Δ; media igitur  
et Ε; ergo Δ, Ε mediæ sunt potentiā solūm  
commensurabiles. Dico etiam ipsas medium con-



ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως<sup>5</sup> ἡ Δ πρὸς τὴν Ε,  
ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως<sup>6</sup> ἡ Γ  
πρὸς τὴν Ε. Ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως<sup>7</sup> ἡ Δ  
πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως<sup>8</sup>  
ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον  
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ  
τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμε-  
τροι, μέσον περιέχουσιν. Ὅπερ ἴδιαι ποιεῖσαι<sup>9</sup>.

tinere. Quoniam enim est ut Β ad Γ ita Δ ad  
Ε, permutando igitur ut Β ad Δ ita Γ ad Ε.  
Ut autem Β ad Δ ita Δ ad Α, et ut igitur  
Δ ad Α ita Γ ad Ε; rectangulum igitur sub  
Α, Γ æquale est rectangulo sub Δ, Ε. Me-  
dium autem rectangulum sub Α, Γ; medium  
igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiā solūm  
commensurabiles, medium continentes. Quod  
oportebat facere.

sera médial; donc la droite Δ est médiale. Et puisque les droites Β, Γ ne sont com-  
mensurables qu'en puissance, et que Β est à Γ comme Δ est à Ε, les droites Δ, Ε ne  
sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Δ est médial; donc Ε est  
médial (24. 10); donc les droites Δ, Ε sont des médiæ commensurables en  
puissance seulement. Je dis aussi qu'elles comprennent une surface médiale; car  
puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, par permutation Β est à Δ comme Γ est à Ε.  
Mais Β est à Δ comme Δ est à Α; donc Δ est à Α comme Γ est à Ε; donc le rec-  
tangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε (16. 6). Mais le rectangle sous  
Α, Γ est médial (22. 10); donc le rectangle sous Δ, Ε est médial.

On a donc trouvé des médiæ commensurables en puissance seulement, qui  
comprennent une surface médiale. Ce qu'il fallait faire.

ΛΗΜΜΑ Α.

Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὅσπερ καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ  $AB$ ,  $ΒΓ$ , ἑστώσαν δὲ ἢ τοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ εἴαντε ἀπὸ ἄρτιου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, εἴαντε ἀπὸ περιττοῦ περιττός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ  $ΑΓ$  ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω ὁ  $ΑΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $Δ$ . Εστώσαν δὲ καὶ οἱ  $AB$ ,  $ΒΓ$  ἢ τοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἱ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί

$A . . . . Δ . . . . Γ . . . . . Β$

εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ<sup>2</sup> τῶν  $AB$ ,  $ΒΓ$  κατὰ τοῦ<sup>3</sup> ἀπὸ τοῦ  $ΓΔ$  τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ  $ΔΒ$  τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν  $AB$ ,  $ΒΓ$ , ἐπειδὴ περὶ ἐδείχθη ὅτι εἴαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὐρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅ, τε ἐκ τῶν  $AB$ ,  $ΒΓ$ , καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ  $ΓΔ$ , οἱ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ  $ΒΔ$  τετράγωνον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι<sup>4</sup>.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut et compositus ex ipsis sit quadratus.

Exponentur duo numeri  $AB$ ,  $ΒΓ$ , sint autem vel pares vel impares. Et quoniam sive à pari par auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est; reliquus igitur  $ΑΓ$  par est. Secetur  $ΑΓ$  bifariam in  $Δ$ . Sint autem et  $AB$ ,  $ΒΓ$  vel similes plani vel quadrati, qui et ipsi similes

plani sunt; ergo sub  $AB$ ,  $ΒΓ$  numerus cum quadrato ex  $ΓΔ$  æqualis est ex  $ΔΒ$  quadrato. Atque est quadratus ex  $AB$ ,  $ΒΓ$  numerus, quoniam ostensum est si duo similes plani sese multiplicantes faciant aliquem, factum quadratum esse; inventi sunt igitur duo quadrati numeri, et quadratus ex  $AB$ ,  $ΒΓ$ , et quadratus ex  $ΓΔ$ , qui compositi faciunt ex  $ΒΔ$  quadratum. Quod oportebat facere.

Λ Ε Μ Μ Ε Ι.

Trouver deux nombres quarrés, de manière que leur somme soit un quarré.

Soient les deux nombres  $AB$ ,  $ΒΓ$ ; qu'ils soient ou pairs ou impairs. Puisque si d'un nombre pair on ôte un nombre pair, ou si d'un nombre impair on ôte un impair, le reste est pair (24, et 26. 9); le reste  $ΑΓ$  est donc pair. Partageons  $ΓΑ$  en deux parties égales en  $Δ$ . Que les nombres  $AB$ ,  $ΒΓ$  soient ou des plans semblables ou des quarrés qui sont eux-mêmes des plans semblables; le produit de  $AB$  par  $ΒΓ$  avec le quarré de  $ΓΔ$  sera égal au quarré de  $ΔΒ$  (6. 2). Mais le produit de  $AB$  par  $ΒΓ$  est un quarré; car on a démontré que si deux plans semblables se multipliant eux-mêmes font un nombre, le produit est un quarré (1. 9); on a donc trouvé deux nombres quarrés, savoir le produit de  $AB$  par  $ΒΓ$ , et le quarré de  $ΓΔ$ , dont la somme égale le quarré de  $ΒΔ$ . Ce qu'il fallait faire.



## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν ὅτι εὕρηται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὃ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ᾖσιν ἐπίπεδοις<sup>2</sup>. Ὅταν δὲ μὴ ᾖσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηται δύο τετράγωνοι, ὃ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ<sup>3</sup> ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος<sup>4</sup>.

## ΛΗΜΜΑ Β'.

Εὕρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἕξ αὐτῶν συγχείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Εστω γάρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαιμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ<sup>1</sup>. φανερόν δὲ ὅτι ὁ<sup>2</sup> ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>3</sup>

## COROLLARIUM.

Et manifestum est inventos esse rursus duos quadratos, et quadratum ex ΒΔ et quadratum ex ΓΔ, ita ut excessus ipsorum sub ΑΒ, ΒΓ sit quadratus, quando ΑΒ, ΒΓ similes sunt plani. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et quadratus ex ΒΔ et quadratus ex ΓΔ, quorum excessus sub ΑΒ, ΒΓ non est quadratus.

## LEMMA II.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut ex ipsis compositus non sit quadratus.

Sit enim sub ΑΒ, ΒΓ, ut dicebamus, quadratus, et par ipse ΓΑ, et secetur ΓΑ bifariam in Δ; evidens est utique ex ΑΒ, ΒΓ quadratum

## COROLLAIRE.

Il est évident de plus qu'on a trouvé deux quarrés, savoir le quarré de ΒΑ et celui de ΓΔ, de manière que leur différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, est un quarré, lorsque les nombres ΑΒ, ΒΓ sont des plans semblables. Mais lorsque ces nombres ne sont pas des plans semblables, on trouve deux quarrés, celui de ΒΔ et celui de ΓΔ, dont la différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, n'est pas un quarré.

## LEMME II.

Trouver deux nombres quarrés, dont la somme ne soit pas un quarré.

Que le produit de ΑΒ par ΒΓ soit un quarré, comme nous l'avons dit; que ΓΑ soit un nombre pair; partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Il est évident que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré

ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>4</sup> ΒΔ τετραγώνῳ. Αἰρησθῶ<sup>5</sup> μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος<sup>6</sup> μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>7</sup> ΓΕ ἰλάσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>8</sup> ΒΔ τετραγώνου. Λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>9</sup> ΓΕ οὐκ ἐστὶ<sup>10</sup> τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἴσται τετράγωνος, ἥτοι ἴσος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>11</sup> ΒΕ ἡ ἰλάσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ<sup>12</sup>, οὐκίτι δὲ καὶ μίζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἢ μονὰς<sup>13</sup>.

cum quadrato ex ΓΔ æqualem esse quadrato ex ΒΔ. Auferatur unitas ΔΕ; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ minor est quadrato ex ΒΔ. Dico igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratum cum quadrato ex ΓΕ non esse quadratum.

Si enim fuerit quadratus, vel æqualis est quadrato ex ΒΕ vel minor quadrato ex ΒΕ, non autem et major, ut ne secetur unitas. Sit, si pos-

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ . . . . . Β

Εστω εἰ δυνατόν πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῇ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίον ὁ ΗΑ<sup>14</sup>. Επεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίον, ὁ δὲ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίον<sup>15</sup>, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίον· δίχα ἄρα τέμνεται ὁ ΗΓ τῇ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>16</sup> ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>17</sup> ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ,

sibile, primum ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΒΕ, et sit ipsius ΔΕ unitatis duplus ΗΑ. Quoniam igitur totus ΑΓ totius ΓΔ est duplus, ipse autem ΑΗ ipsius ΔΕ est duplus; et reliquus igitur ΗΓ reliqui ΕΓ est duplus; bifariam igitur secatur ΗΓ in Ε; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Sed et ex ΑΒ, ΒΓ

de ΓΔ est égal au quarré de ΒΔ (6. 2). Retranchons l'unité ΔΕ; le quarré qui résultera du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ sera plus petit que le quarré de ΒΔ. Et je dis que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas un quarré.

Car si ce nombre est un quarré, ou il est égal au quarré de ΒΕ, ou il est plus petit que lui; mais il ne peut pas être plus grand; car, si cela était, l'unité serait partagée. Que le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ soit d'abord égal au quarré de ΒΕ, si cela est possible, et que ΗΑ soit double de l'unité ΔΕ. Puisque ΑΓ tout entier est double de ΓΔ tout entier, et que ΑΗ est double de ΔΕ, le reste ΗΓ sera double du reste ΕΓ; donc ΗΓ est partagé en deux parties égales en Ε; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est égal au quarré de ΒΕ (6. 2).

ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>18</sup> ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῇ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>19</sup> ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐκ τῶν<sup>20</sup> ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>21</sup> ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιρέθεις τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>22</sup> ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῇ ΗΒ<sup>23</sup>, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>24</sup> ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>25</sup> ΒΕ. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>26</sup> ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>27</sup> ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ

quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis supponitur quadrato ex ΒΕ; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ. Et detracto communi quadrato ex ΓΕ, concludetur ΑΒ æqualis ipsi ΗΒ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Dico etiam neque minorem quadrato ex ΒΕ. Si enim possibile, sit quadrato ex ΒΖ æqualis, et ipsius

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ . . . . . Β

διπλασίῳ<sup>28</sup> ὁ ΘΑ. Καὶ<sup>29</sup> συναχθήσεται πάλιν διπλασίῳ<sup>30</sup> ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμήσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἑκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>31</sup> ΖΓ ἴσον γινέσθαι τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>32</sup> ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>33</sup> ΓΕ ἴσος τῇ ἀπὸ τοῦ<sup>34</sup> ΖΒ· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῇ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ<sup>35</sup>, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα

ΔΖ duplus ΘΑ. Et concludetur rursus duplus ΘΓ ipsius ΓΖ, ita ut et ΓΘ bifariam dividatur in Ζ; et ob id ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΖΓ æqualis fit quadrato ex ΒΖ. Supponitur autem et ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΖΒ; quare et ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΖ æqualis erit quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus

Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est supposé égal au carré de ΒΕ; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ. Le carré commun de ΓΕ étant retranché, on conclura que ΑΒ est égal à ΗΒ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ n'est pas égal au carré de ΒΕ. Je dis, de plus, qu'il n'est pas plus petit que le carré de ΒΕ. Car, si cela est possible, qu'il soit égal au carré de ΒΖ, et que ΘΑ soit double de ΔΖ. On conclura encore que ΘΓ est double de ΓΖ, de manière que ΓΘ sera partagé en deux parties égales en Ζ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le carré de ΖΓ sera égal au carré de ΒΖ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est supposé égal au carré de ΖΒ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΖ sera égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ

ὁ ἐκ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>36</sup>  $ΓΕ$  ἴσος ἐστὶ τῷ<sup>37</sup> ἐλάττονι τοῦ ἀπὸ  $ΒΕ$ . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ<sup>38</sup> τῷ ἀπὸ τοῦ  $ΒΕ$ , οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· <sup>39</sup>οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ<sup>40</sup>  $ΓΕ$  τετράγωνός ἐστι. Δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος<sup>41</sup>, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπιπλείον αὐτὴν μηκύνωμεν.

cum quadrato ex  $ΓΕ$  æqualis est quadrato minori quam est ipse ex  $ΒΕ$ . Ostensum est autem neque ipsi quadrato ex  $ΒΕ$ , neque majori quam est ipse; non igitur ex  $AB$ ,  $BΓ$  quadratus cum quadrato ex  $ΓΕ$  quadratus est. Cum autem possibile sit, et in pluribus modis quod dictum demonstrare, sufficiat nobis expositus, ut ne longam tractationem longiùs producamus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ'.

Εὐρίῃ δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ  $AB$ , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ  $ΓΔ$ ,  $ΔΕ$ , ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν<sup>1</sup>  $ΓΕ$  μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $AB$  ἡμικύκλιον τὸ  $AZB$ , καὶ

PROPOSITIO XXX.

Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Exponentur enim aliqua rationalis  $AB$ , et duo quadrati numeri  $ΓΔ$ ,  $ΔΕ$ , ita ut excessus ipsorum  $ΓΕ$  non sit quadratus, et describatur super rectam  $AB$  semicirculus  $AZB$ , et fiat

par  $BΓ$  avec le quarré de  $ΓΕ$  n'est pas égal à un plus petit quarré que celui de  $ΒΕ$ . Mais on a démontré qu'il n'est pas égal au quarré de  $ΒΕ$ , ni à un quarré plus grand. Donc le produit de  $AB$  par  $BΓ$  avec le quarré de  $ΓΕ$  n'est pas un quarré. Ce lemme peut se démontrer de plusieurs manières; je me contenterai de celle que je viens d'exposer, afin de ne pas être trop long.

PROPOSITION XXX.

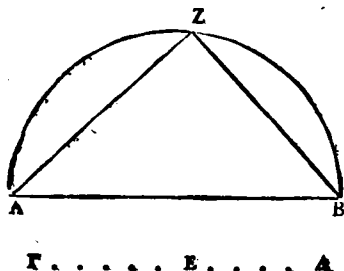
Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient une rationnelle  $AB$ , et deux nombres quarrés  $ΓΔ$ ,  $ΔΕ$ , de manière que leur excès  $ΓΕ$  ne soit pas un quarré (cor. 29. 10). Sur  $AB$  décrivons le demi-

# 188 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πιπονήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον<sup>2</sup>, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΒ.

ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad quadratum ex ΑΖ, et jungatur ΖΒ.



Ἐπεὶ οὖν<sup>3</sup> ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Πητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει

Quoniam igitur est ut ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ, ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam numerus ΔΓ ad numerum ΓΕ; commensurable igitur est ex ΒΑ quadratum quadrato ex ΑΖ. Rationale autem quadratum ex ΑΒ; rationale igitur et quadratum ex ΑΖ; rationalis igitur et ΑΖ. Et quoniam ΔΓ ad ΓΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΑ ipsi ΑΖ longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm

cercle AZB; faisons en sorte que ΔΓ soit à ΓΕ comme le carré de ΒΑ est au carré de ΑΖ (6. 10), et joignons ΖΒ.

Car, puisque le carré de ΒΑ est au carré de ΑΖ comme ΔΓ est à ΓΕ, le carré de ΒΑ aura avec le carré de ΑΖ la raison que le nombre ΔΓ a avec le nombre ΓΕ; le carré de ΒΑ sera donc commensurable avec le carré de ΑΖ (6. 10). Mais le carré de ΑΒ est rationel (déf. 8. 10); donc le carré de ΑΖ est rationel (déf. 9. 10); donc la droite ΑΖ est rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque ΔΓ n'a pas avec ΓΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΑ n'aura pas avec le carré de ΑΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc ΒΑ est incommensurable en longueur avec ΑΖ (9. 10); donc les rationnelles ΒΑ, ΑΖ ne sont commensurables qu'en puissance (déf. 3. 10). Et

μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπὶ ἐστίν<sup>4</sup> ὡς ὁ  $\Delta\Gamma$  πρὸς τὸν  $\Gamma\epsilon$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $AZ$ · ἀναστρίψαντι ἄρα ὡς ὁ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὸν  $\Delta\epsilon$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $BZ$ . Ὁ δὲ  $\Gamma\Delta$  πρὸς τὸν  $\Delta\epsilon$  λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $BZ$  λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AB$  τῇ  $BZ$  μήκει. Καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZB$ · ἡ  $AB$  ἄρα τῆς  $AZ$  μείζον δύναται τῇ  $BZ$  συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ  $BA$ ,  $AZ$ , ὥστε τὴν μείζονα τὴν  $AB$  τῆς ἐλάσσονος τῆς  $AZ$  μείζον<sup>6</sup> δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς  $BZ$  συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει. Ὅπερ ἴδι ποιῆται<sup>7</sup>.

commensurabiles. Et quoniam est ut  $\Delta\Gamma$  ad  $\Gamma\epsilon$  ita ex  $BA$  quadratum ad ipsum ex  $AZ$ ; convertendo igitur ut  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\epsilon$  ita ex  $AB$  quadratum ad ipsum ex  $BZ$ . Ipse autem  $\Gamma\Delta$  ad  $\Delta\epsilon$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ex  $AB$  igitur quadratum ad ipsum ex  $BZ$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est  $AB$  ipsi  $BZ$  longitudine. Atque est quadratum ex  $AB$  æquale quadratis ex  $AZ$ ,  $ZB$ ; ipsa  $AB$  igitur quam  $AZ$  plus potest quadrato ex recta  $BZ$  sibi commensurabili longitudine.

Inventæ sunt igitur duæ rationales potentiæ solum commensurabiles  $BA$ ,  $AZ$ , ita ut major  $AB$  quam minor  $AZ$  plus possit quadrato ex recta  $BZ$  sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

puisque  $\Delta\Gamma$  est à  $\Gamma\epsilon$  comme le quarré de  $AB$  est au quarré de  $AZ$ ; par conversion  $\Gamma\Delta$  est à  $\Delta\epsilon$  comme le quarré de  $AB$  est au quarré de  $BZ$  (19. 5 et 47. 1). Mais  $\Gamma\Delta$  a avec  $\Delta\epsilon$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc le quarré de  $AB$  a avec le quarré de  $BZ$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc  $AB$  est commensurable en longueur avec  $BZ$  (9. 10). Mais le quarré de  $AB$  est égal à la somme des quarrés de  $AZ$  et de  $ZB$  (47. 1); donc la puissance de  $AB$  surpasse la puissance de  $AZ$  du quarré de la droite commensurable en longueur avec  $AB$ .

On a donc trouvé deux rationnelles  $BA$ ,  $AZ$  commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande  $BA$  surpasse la puissance de la plus petite  $AZ$  du quarré de la droite  $BZ$  commensurable en longueur avec  $AB$ . Ce qu'il fallait faire.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

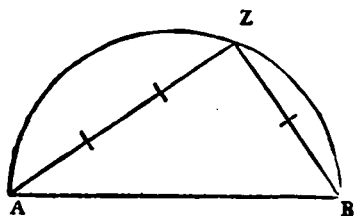
Εὐρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἰλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ  $AB$ , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ  $ΓΕ$ ,  $ΕΔ$ , ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν  $ΓΔ$  μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γιγράσθω ἐπὶ τῆς  $AB$  ἡμικύκλιον τὸ  $AZB$ , καὶ

## PROPOSITIO XXXI.

Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

Exponentur rationalis  $AB$ , et duo quadrati numeri  $ΓΕ$ ,  $ΕΔ$ , ita ut  $ΓΔ$  compositus ex ipsis non sit quadratus, et describatur super rectam  $AB$  semicirculus  $AZB$ , et fiat ut  $ΓΔ$  ad  $ΓΕ$  ita ex



Γ. . . . . Ε. . . . Δ

πιποιείσθω ὥς ὁ  $ΓΔ$  πρὸς τὸν  $ΓΕ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $AZ$ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ  $BZ$ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὥς ἐν τῷ πρό τούτου, ἔτι αἱ  $BA$ ,  $AZ$  ῥηταὶ εἶσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὥς ὁ  $ΔΓ$  πρὸς τὸν  $ΓΕ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $BA$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $AZ$ . ἀναστρέψαντι ἄρα ὥς ὁ  $ΓΔ$  πρὸς τὸν

$AB$  quadratum ad ipsum ex  $AZ$ , et jungatur  $BZ$ ; similiter utique demonstrabimus, ut in antecedente, rectas  $BA$ ,  $AZ$  rationales esse potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam est ut  $ΔΓ$  ad  $ΓΕ$  ita ex  $BA$  quadratum ad ipsum ex  $AZ$ ; convertendo igitur ut  $ΓΔ$  ad  $ΔΕ$  ita

## PROPOSITION XXXI.

Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

Soient la rationnelle  $AB$ , et les deux nombres carrés  $ΓΕ$ ,  $ΕΔ$ , de manière que leur somme  $ΓΔ$  ne soit pas un carré (lem. 2. 29. 10); sur la droite  $AB$ , décrivons le demi-cercle  $AZB$ ; faisons en sorte que  $ΓΔ$  soit à  $ΓΕ$  comme le carré de  $AB$  est au carré de  $AZ$  (cor. 6. 10), et joignons  $BZ$ . Nous démontrerons semblablement comme auparavant que les rationnelles  $BA$ ,  $AZ$  ne sont commensurables qu'en puissance. Puisque  $ΔΓ$  est à  $ΓΕ$  comme le carré de  $BA$  est au carré de  $AZ$ , par conversion

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 191

ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. Καὶ δύναται ἡ AB τῆς AZ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ AB, BZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῇ<sup>3</sup> ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ex AB quadratum ad ipsum ex BZ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est AB ipsi BZ longitudine. Et plus potest AB quam AZ quadrato ex rectâ ZB sibi incommensurabili; ipsæ AB, BZ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et AB quam AZ plus potest quadrato ex rectâ ZB sibi incommensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ.

Εὕρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εκκείσθωσαν γάρ' δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-

### PROPOSITIO XXXIX

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Exponentur enim duæ rationales potentiâ solum

ΓΔ sera à ΔΕ comme le quarré de AB est au quarré de BZ. Mais ΓΔ n'a pas avec ΔΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc le quarré de de AB n'a pas avec le quarré de BZ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc AB est incommensurable en longueur avec BZ (9. 10); donc la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré d'une droite ZB incommensurable avec AB; donc les rationnelles AB, BZ ne sont commensurables qu'en puissance, et la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré de la droite ZB incommensurable en longueur avec AB. Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION XXXII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

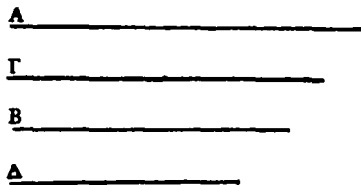
Soient les deux rationnelles A, B commensurables en puissance seulement,



192 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετροι αἱ  $A, B$ , ὅστε τὴν  $A$  μείζονα οὔσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς  $B$  μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $A, B$  ἴσον ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$ . Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $A, B$ · μείσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$ · μίση ἄρα καὶ ἡ  $\Gamma$ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$ , ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $B$ · ῥητὸν ἄρα ἴστι<sup>3</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$ . Καὶ ἐπὶ ἴστιν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν  $A, B$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $B$ , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν

commensurabiles  $A, B$ , ita ut  $A$  major existens quam minor  $B$  plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine. Et rectangulo sub  $A, B$  æquale sit quadratum ex  $\Gamma$ . Medium autem rectangulum sub  $A, B$ ; medium igitur et quadratum ex  $\Gamma$ ; media igitur et  $\Gamma$ . Quadrato autem ex  $B$  æquale sit rectangulum sub  $\Gamma, \Delta$ , rationale autem quadratum ex  $B$ ; rationale igitur est et rectangulum sub  $\Gamma, \Delta$ . Et quoniam est ut  $A$  ad  $B$  ita sub  $A, B$  rectangulum ad quadratum



$A, B$  ἴσον ἴστι τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$ · ὡς ἄρα ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$ . Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma, \Delta$  οὕτως ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Delta$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ἡ  $\Gamma$  πρὸς τὴν  $\Delta$ . Σύμμετρος δὲ ἡ  $A$  τῇ  $B$  δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ

ex  $B$ ; sed rectangulo quidem sub  $A, B$  æquale est quadratum ex  $\Gamma$ , quadrato autem ex  $B$  æquale rectangulum sub  $\Gamma, \Delta$ ; ut igitur  $A$  ad  $B$  ita ex  $\Gamma$  quadratum ad rectangulum sub  $\Gamma, \Delta$ . Ut autem ex  $\Gamma$  quadratum ad rectangulum sub  $\Gamma, \Delta$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ ; et ut igitur  $A$  ad  $B$  ita  $\Gamma$  ad  $\Delta$ . Commensurabilis autem  $A$  ipsi  $B$  potentiâ solum;

de manière que la puissance de la plus grande  $A$  surpasse la puissance de la plus petite  $B$  du carré d'une droite commensurable en longueur avec  $A$  (30. 10). Que le carré de  $\Gamma$  soit égal au rectangle sous  $A, B$ . Mais le rectangle sous  $A, B$  est médial (22. 10); donc le carré de  $\Gamma$  est médial; donc la droite  $\Gamma$  est médiale. Que le rectangle sous  $\Gamma, \Delta$  soit égal au carré de  $B$ ; puisque le carré de  $B$  est rationel, le rectangle sous  $\Gamma, \Delta$  sera rationel. Et puisque  $A$  est à  $B$  comme le rectangle sous  $A, B$  est au carré de  $B$  (1. 6), que le carré de  $\Gamma$  est égal au rectangle sous  $A, B$ , et que le rectangle sous  $\Gamma, \Delta$  est égal au carré de  $B$ , la droite  $A$  sera à la droite  $B$  comme le carré de  $\Gamma$  est au rectangle sous  $\Gamma, \Delta$ . Mais le carré de  $\Gamma$  est au rectangle sous  $\Gamma, \Delta$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$ ; donc  $A$  est à  $B$  comme  $\Gamma$  est à  $\Delta$ . Mais  $A$  n'est commensurable avec  $B$  qu'en puissance; donc  $\Gamma$  n'est

η Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου<sup>5</sup> ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μείζον δύναται<sup>6</sup> τῇ ἀπὸ συμμέτρου<sup>7</sup> ἑαυτῇ.

Εὕρηται ἄρα δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ, ῥητὸν περιέχουσai, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ<sup>8</sup> μήκει. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι<sup>9</sup>.

Ομοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσύμμετρου, ὅταν τῆς Β μείζον δύνῃται ἡ Α τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ<sup>10</sup>.

commensurabilis igitur et Γ ipsi Δ potentiâ solum. Atque est media Γ; media igitur et Δ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa autem Α quam Β plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Γ igitur quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles Γ, Δ, rationale continentes, et Γ quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

Similiter utique ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando quam Β plus potest ipsa Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

commensurable avec Δ qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10). Et puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Β du quarré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré d'une droite commensurable avec Γ (15. 10).

On a donc trouvé deux médiales Γ, Δ commensurables en puissance seulement, qui comprennent un rectangle rationel; et la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec Γ. Ce qu'il fallait faire.

Si la puissance de Α surpassait la puissance de Β du quarré d'une droite incommensurable avec Α, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λγ'.

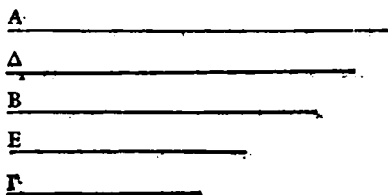
Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμεις μόνον συμμέτρους, μέσον περιχοῦσας· ὅστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ  $A, B, \Gamma$ , ὥστε τὴν  $A$  τῆς  $\Gamma$  μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῇ μὲν ὑπὸ τῶν  $A, B$  ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta^2$ · μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta$ · καὶ ἡ  $\Delta$  ἄρα μέση ἔστί. Τῇ δὲ ὑπὸ τῶν  $B, \Gamma$  ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ

## PROPOSITIO XXXIII.

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Exponantur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles  $A, B, \Gamma$ , ita ut  $A$  quam  $\Gamma$  plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et rectangulo quidem sub  $A, B$  æquale sit quadratum ex  $\Delta$ ; medium igitur quadratum ex  $\Delta$ ; et  $\Delta$  igitur media est. Rectangulo autem sub  $B, \Gamma$  æquale sit rectangulum sub  $A, B$ .



τῶν  $\Delta, B$ . Καὶ ἡπεὶ ἴστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν  $A, B$  πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν  $B, \Gamma$  οὕτως ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $\Gamma$ , ἀλλὰ τῇ μὲν ὑπὸ τῶν  $A, B$  ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Delta$ , τῇ δὲ ὑπὸ τῶν  $B, \Gamma$  ἴσον τὸ ὑπὸ

Et quoniam est ut sub  $A, B$  rectangulum ad ipsum sub  $B, \Gamma$  ita  $A$  ad  $\Gamma$ , sed rectangulo quidem sub  $A, B$  æquale est quadratum ex  $\Delta$ , rectangulo autem sub  $B, \Gamma$  æquale

## PROPOSITION XXXIII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

Soient les trois rationnelles  $A, B, \Gamma$  commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de  $A$  surpasse la puissance de  $\Gamma$  du carré d'une droite commensurable avec  $A$  (30. 10); que le carré de  $\Delta$  soit égal au rectangle sous  $A, B$  (14. 2); le carré de  $\Delta$  sera médial (22. 10), et la droite  $\Delta$  médiale. Que le rectangle sous  $\Delta, E$  soit égal au rectangle sous  $B, \Gamma$  (45. 1). Puisque le rectangle sous  $A, B$  est au rectangle sous  $B, \Gamma$  comme  $A$  est à  $\Gamma$  (1. 6), que le carré de  $\Delta$  est égal au rectangle sous  $A, B$ , et que le rectangle sous  $\Delta, E$  est égal au rectangle

τῶν Δ, Ε· ἴσθιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δύναμιν μόνον<sup>5</sup>. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δύναμιν μόνον. Μίσση δὲ ἡ Δ· μίσση ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως<sup>6</sup> ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μείζον δύνηται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Λίγω δὲ ὅτι καὶ μίσση ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ<sup>8</sup> ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μίσση δὲ τὸ<sup>9</sup> ὑπὸ τῶν Β, Γ· αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι<sup>10</sup>. μίσση ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηται ἄρα δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μίσση περιέχουσιν· ὥστε τὴν μείζονα<sup>11</sup> τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ὅπρι ἴδιαι ποιῆσαι<sup>12</sup>.

rectangulum sub Δ, Ε; est igitur ut Α ad Γ ita ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε. Ut autem ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε ita Δ ad Ε; et ut igitur Α ad Γ ita Δ ad Ε. Commensurabilis autem Α ipsi Γ potentiā solūm; commensurabilis igitur et Δ ipsi Ε potentiā solūm. Media autem Δ; media igitur et Ε. Et quoniam est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, ipsa autem Α quam Γ plus potest quadrato ex rectā sibi commensurabili; et Δ igitur quam Ε plus poterit quadrato ex rectā sibi commensurabili. Dico etiam et medium esse rectangulum sub Δ, Ε. Quoniam enim æquale est sub Β, Γ rectangulum rectangulo sub Δ, Ε, medium autem rectangulum sub Β, Γ; ipsæ enim Β, Γ rationales sunt potentiā solūm commensurabiles; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiā solūm commensurabiles Δ, Ε, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectā sibi commensurabili. Quod oportebat facere.

sous Β, Γ, la droite Α est à Γ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε. Mais le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε comme Δ est à Ε (32. 10); donc Α est à Γ comme Δ est à Ε. Mais Α n'est commensurable avec Γ qu'en puissance; donc Δ n'est commensurable avec Ε qu'en puissance (10. 10); mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10). Et puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Δ surpassera la puissance de Ε du carré d'une droite commensurable avec Δ (15. 10). Je dis aussi que le rectangle sous Δ, Ε est médial. Car puisque le rectangle sous Β, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε, et que le rectangle sous Β, Γ est médial, parce que les rationnelles Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, le rectangle sous Δ, Ε sera médial.

On a donc trouvé deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande. Ce qu'il fallait faire.

# 196 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ομοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ  $A$  τῆς  $\Gamma$  μίζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ<sup>13</sup>.

## ΛΗΜΜΑ.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ  $AB\Gamma$ , ὅρθον ἔχον τὴν ὑπὸ  $BA\Gamma$  γωνίαν, καὶ ἥχθω<sup>1</sup> κάθετος ἡ  $AD$ . λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν  $\Gamma B$ ,  $BD$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $BA$ , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν  $B\Gamma$ ,  $\Gamma D$  ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  $\Gamma A$ , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $BD$ ,  $\Delta\Gamma$  ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  $AD$ , καὶ ἴτι τὸ<sup>2</sup> ὑπὸ τῶν  $B\Gamma$ ,  $AD$  ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $BA$ ,  $A\Gamma$ <sup>3</sup>. Καὶ πρῶτον τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma B$ ,  $BD$  ἴσον ἐστὶ<sup>4</sup> τῷ ἀπὸ τῆς  $BA$ .

Επεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἥκται ἡ  $AD$ , τὰ  $ABD$ ,  $AD\Gamma$  ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ  $AB\Gamma$  καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ  $AB\Gamma$  τρίγωνον τῷ  $ABD$  τριγώνῳ, ἴστιν ἄρα ὡς ἡ  $\Gamma B$  πρὸς τὴν  $BA$  οὕτως

Similiter utique rursus ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando  $A$  quam  $\Gamma$  plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

## LEMMA.

Sit triangulum rectangulum  $AB\Gamma$ , rectum habens sub  $BA\Gamma$  angulum, et ducatur perpendicularis  $AD$ ; dico rectangulum quidem sub  $\Gamma B$ ,  $BD$  æquale esse quadrato ex  $BA$ , rectangulum autem sub  $B\Gamma$ ,  $\Gamma D$  æquale quadrato ex  $\Gamma A$ , et rectangulum sub  $BD$ ,  $\Delta\Gamma$  æquale quadrato ex  $AD$ , et adhuc rectangulum sub  $B\Gamma$ ,  $AD$  æquale esse rectangulo sub  $BA$ ,  $A\Gamma$ . Et primum rectangulum sub  $\Gamma B$ ,  $BD$  æquale esse quadrato ex  $BA$ .

Quoniam enim in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducitur  $AD$ , ipsa  $ABD$ ,  $AD\Gamma$  igitur triangula similia sunt et toti triangulo  $AB\Gamma$  et inter se. Et quoniam simile est  $AB\Gamma$  triangulum triangulo  $ABD$ , est igitur ut  $\Gamma B$  ad  $BA$  ita  $BA$  ad  $BD$ ; rectangulum

Si la puissance de  $A$  surpassait la puissance de  $r$  du carré d'une droite incommensurable avec  $A$ , on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

## LEMME.

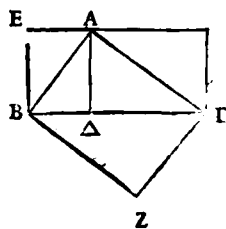
Soit le triangle rectangle  $AB\Gamma$ , dont l'angle droit est  $BA\Gamma$ ; menons la perpendiculaire  $AD$ ; je dis que le rectangle sous  $\Gamma B$ ,  $BD$  est égal au carré de  $BA$ , que le rectangle sous  $B\Gamma$ ,  $\Gamma D$  est égal au carré de  $\Gamma A$ , que le rectangle sous  $BD$ ,  $\Delta\Gamma$  est égal au carré de  $AD$ , et enfin que le rectangle sous  $B\Gamma$ ,  $AD$  est égal au rectangle sous  $BA$ ,  $A\Gamma$ . Je dis d'abord que le rectangle sous  $\Gamma B$ ,  $BD$  est égal au carré de  $BA$ .

Car puisque dans un triangle rectangle on a mené de l'angle droit la droite  $AD$  perpendiculaire à la base, les deux triangles  $ABD$ ,  $AD\Gamma$  sont semblables au triangle entier  $AB\Gamma$ , et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle  $AB\Gamma$  est semblable au triangle  $ABD$ ,  $\Gamma B$  est à  $BA$  comme  $BA$  est à  $BD$  (déf. 1. 6); donc le

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 197

ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ εἰάν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστιν· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

igitur sub ΓΒ, ΒΔ æquale est quadrato ex ΑΒ. Propter eadem utique et rectangulum sub ΒΓ, ΓΔ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam si in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducatur, ducta inter basis segmenta media proportionalis est; est igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΑΔ ad ΔΓ; rectangulum igitur sub ΒΔ, ΔΓ æquale est quadrato ex ΔΑ. Dico



λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Εἰάν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Καὶ ὅτι<sup>5</sup> εἰάν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπλη-

et rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quoniam enim, ut dicebamus, simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Si autem quatuor rectæ proportionales sunt, rectangulum sub extremis æquale est rectangulo sub mediis; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Dico et si describamus ΕΓ rectangulum parallelogrammum, et com-

rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au carré de ΑΒ (17. 6). Par la même raison, le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au carré de ΑΓ. Et puisque si de l'angle droit d'un triangle rectangle on mène une perpendiculaire à la base, la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segments de la base (cor. 8. 6), la droite ΒΔ est à ΔΑ comme ΑΔ est à ΔΓ (18. 6); donc le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au carré de ΔΑ. Je dis enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Car puisque, comme nous l'avons dit, ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΒΓ est à ΓΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle sous les extrêmes est égal au rectangle sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ sera égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis encore que, si nous décrivons le parallélogramme rectangle ΕΓ, et si nous

## 198 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ρώσομεν τὸ AZ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῇ AZ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ABΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν<sup>6</sup> ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

pleamus AZ, æquale fore ΕΓ ipsi AZ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ABΓ; atque est rectangulum quidem ΕΓ sub ΒΓ, ΑΔ, rectangulum autem AZ sub ΒΑ, ΑΓ; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὐρεῖν δύο ὑθείας δυνάμεις ἀσυμμέτρους, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Εκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ AB, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῇ ἀφ' ἑποτίρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ

### PROPOSITIO XXXIV.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

Exponentur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles AB, ΒΓ, ita ut major AB quam minor ΒΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et secetur ΒΓ bifariam ad Δ, et quadrato ab alterutrâ ipsarum ΒΔ, ΔΓ æquale ad rectam AB applicetur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et describatur super

achevons AZ, le rectangle ΕΓ sera égal au rectangle AZ, car chacun d'eux est double du triangle ABΓ; mais ΕΓ est le rectangle compris sous ΒΓ, ΑΔ, et AZ le rectangle compris sous ΒΑ, ΑΓ; donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XXXIV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

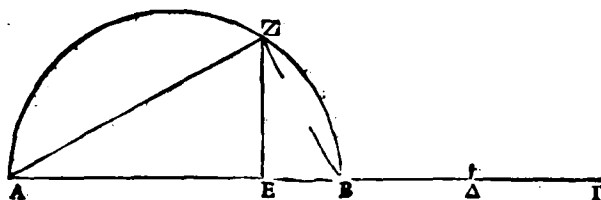
Soient les deux rationnelles AB, ΒΓ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande AB surpasse la puissance de la plus petite ΒΓ du carré d'une droite incommensurable avec AB (31, 10); coupons ΒΓ en deux parties égales en Δ; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal à l'un ou à l'autre des carrés des droites ΒΔ, ΔΓ, soit défailant d'une figure carrée (26. 6), et que ce soit le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ; décrivons

τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ EZ, καὶ ἐπιζεύχουσιν αἱ AZ, ZB.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ AB, BG, καὶ ἡ AB τῆς BG μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς BG, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE, ἴσον δὲ τὸ

rectam AB semicirculus AZB, et ducatur ipsi AB ad rectos angulos ipsa EZ, et jungantur AZ, ZB.

Et quoniam duæ rectæ inæquales sunt AB, BG, et AB quam BG plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; quartæ autem parti quadrati ex BG, hoc est quadrato dimidiæ ipsius, æquale ad AB applicatur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et facit rectangulum sub AE, EB; incommensurabilis igitur est AE ipsi EB. Et quoniam est ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE, sed æquale quidem sub AB, AE rec-



μὲν ὑπὸ τῶν AB, AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· αἱ AZ, ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ρητὴ ἐστὶ, ρητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ

tangulum quadrato ex AZ, ipsum autem sub AB, BE rectangulum quadrato ex BZ; incommensurable igitur est ex AZ quadratum quadrato ex ZB; ergo AZ, ZB potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam AB rationalis est, rationale igitur est et

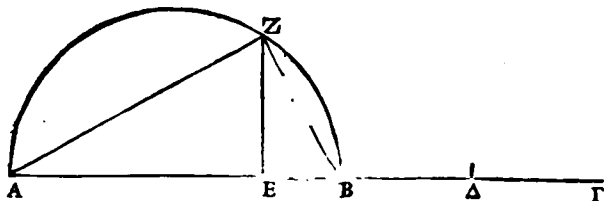
sur la droite AB le demi-cercle AZB; menons la droite EZ perpendiculaire à AB, et joignons AZ, ZB.

Puisque les deux droites AB, BG sont inégales; que la puissance de AB surpasse la puissance de BG du carré d'une droite incommensurable avec AB; qu'on a appliqué à AB un parallélogramme qui, étant égal à la quatrième partie du carré de BG, c'est-à-dire au carré de la moitié de cette droite, est défaillant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme est contenu sous AE, EB, la droite AE sera incommensurable avec EB (19. 10). Et puisque AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE (1. 6), que le rectangle sous AB, AE est égal au carré de AZ, que le rectangle sous AB, BE est égal au carré de BZ, le carré de AZ sera incommensurable avec le carré de ZB; donc les droites AZ, ZB sont incommensurables en puissance. Et puisque la droite AB est ratio-



τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZB$  ῥητὸν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EZ$ , ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $BA$  ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ  $ZE$  τῇ  $BA$ . διπλῇ ἄρα ἡ  $BΓ$  τῆς  $EZ$ · ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ

quadratum ex  $AB$ ; quare et compositum ex quadratis ipsarum  $AZ$ ,  $ZB$  rationale est. Et quoniam rursus rectangulum sub  $AE$ ,  $EB$  æquale est quadrato ex  $EZ$ , supponitur autem sub  $AE$ ,  $EB$  rectangulum et quadrato ex  $BA$  æquale; æqualis igitur est  $ZE$  ipsi  $BA$ ; dupla igitur  $BΓ$



τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  σύμμετρον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $EZ$ . Μείζον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  μέζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $EZ$ . Ἰσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $EZ$  τῷ ὑπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZB$ · μέζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZB$ . Εδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ  $AZ$ ,  $ZB$ , ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέζον. Ὅπερ ἴδει ποιεῖσαι.

ipsius  $EZ$ ; quare et rectangulum sub  $AB$ ,  $BΓ$  commensurabile est rectangulo sub  $AB$ ,  $EZ$ . Medium autem rectangulum sub  $AB$ ,  $BΓ$ ; medium igitur et rectangulum sub  $AB$ ,  $EZ$ . Æquale autem sub  $AB$ ,  $EZ$  rectangulum rectangulo sub  $AZ$ ,  $ZB$ ; medium igitur et rectangulum sub  $AZ$ ,  $ZB$ . Ostensum est autem et rationale compositum ex ipsarum quadratis.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles  $AZ$ ,  $ZB$ , facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium. Quod oportebat facere.

nelle, le carré de  $AB$  est rationel; donc la somme des carrés de  $AZ$  et de  $ZB$  est rationelle. Et de plus, puisque le rectangle sous  $AE$ ,  $EB$  est égal au carré de  $EZ$ , et que le rectangle sous  $AE$ ,  $EB$  est supposé égal au carré de  $BA$ , la droite  $ZE$  est égale à  $BA$ ; donc  $BΓ$  est double de  $EZ$ ; donc le rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est commensurable avec le rectangle sous  $AB$ ,  $EZ$  (1. 6). Mais le rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est médial (22. 10); donc le rectangle sous  $AB$ ,  $EZ$  est médial. Mais le rectangle sous  $AB$ ,  $EZ$  est égal au rectangle sous  $AZ$ ,  $ZB$  (lem. 1. 35); donc le rectangle sous  $AZ$ ,  $ZB$  est médial. Mais on a démontré que la somme des carrés de  $AZ$  et de  $ZB$  est rationelle.

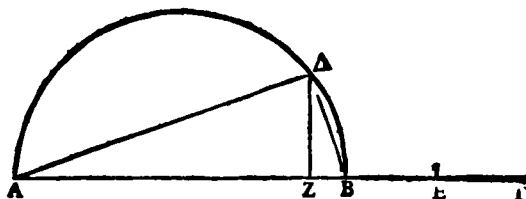
On a donc trouvé deux droites  $AZ$ ,  $ZB$  incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés est rationelle, et que le rectangle sous ces mêmes droites est médial. Ce qu'il fallait faire.

**ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.**

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους,  
ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν  
τετραγώνων μῖσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

**PROPOSITIO XXXV.**

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.



Ἐκκείσθωσαν δύο μίσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ  $AB$ ,  $BΓ$ , ῥητὸν περιέχουσai τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν  $AB$  τῆς  $BΓ$  μιᾶζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $AB$  τὸ  $ΑΔΒ$  ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ  $BΓ$  δίχα κατὰ τὸ  $Ε$ , καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν  $AB$  τῇ ἀπὸ τῆς  $BE$  ἴσον παραλληλόγραμμον ἑλλείπον ἰδεῖ τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZB$ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$  μήκει. Καὶ ᾗχθω ἀπὸ τοῦ  $Z$  τῇ  $AB$  πρὸς ὀρθὰς ἡ  $ZΔ$ , καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΔB$ .

Exponantur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles  $AB$ ,  $B\Gamma$ , rationales continentes sub ipsis, ita ut  $AB$  quam  $B\Gamma$  plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam  $AB$  semicirculus  $A\Delta B$ , et secetur  $B\Gamma$  bifariam in  $E$ , et applicetur ad  $AB$  quadrato ex  $BE$  æquale parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub  $AZ$ ,  $ZB$ ; incommensurabilis igitur est  $AZ$  ipsi  $ZB$  longitudine. Et ducatur à puncto  $Z$  ipsi  $AB$  ad rectos angulos ipsa  $Z\Delta$ , et jungantur  $A\Delta$ ,  $\Delta B$ .

**PROPOSITION XXXV.**

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationnel.

Soient deux médiales  $AB, BR$  commensurables en puissance seulement, et comprenant un rectangle rationel, de manière que la puissance de  $AB$  surpasse la puissance de  $BR$  du carré d'une droite incommensurable avec  $AB$  (32. 10); sur  $AB$  décrivons le demi-cercle  $A\delta B$ ; coupons  $BR$  en deux parties égales en  $E$ ; appliquons à  $AB$  un parallélogramme qui, étant égal au carré de  $BE$ , soit défailant d'une figure carrée (28. 6), et que ce soit le rectangle sous  $AZ, ZB$ ; la droite  $AZ$  sera incommensurable en longueur avec  $ZB$  (19. 10). Du point  $Z$  menons  $Z\delta$  perpendiculaire à  $AB$ , et joignons  $A\delta, \delta B$ .

Ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. Ἰσὸν δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ<sup>2</sup>. Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μείζον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ διπλῶν<sup>3</sup> ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ<sup>4</sup>. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ<sup>5</sup>· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ<sup>6</sup>· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν ἐστίν.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν<sup>7</sup> συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μείζον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν. Ὅπρι ἴδει ποιῆσαι.

Quoniam incommensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΒ, incommensurable igitur est et sub ΒΑ, ΑΖ rectangulum rectangulo sub ΑΒ, ΒΖ. Sed æquale quidem sub ΒΑ, ΑΖ rectangulum quadrato ex ΑΔ, sed sub ΑΒ, ΒΖ rectangulum quadrato ex ΔΒ; incommensurable igitur est et ex ΑΔ quadratum quadrato ex ΔΒ. Et quoniam medium est quadratum ex ΑΒ, medium igitur et compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis. Et quoniam dupla est ΒΓ ipsius ΔΖ, duplum igitur et sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum rectanguli sub ΑΒ, ΖΔ. Rationale autem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; rationale igitur et rectangulum sub ΑΒ, ΖΔ. Rectangulum autem sub ΑΒ, ΖΔ æquale rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ rationale est.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles ΑΔ, ΔΒ, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale. Quod oportebat facere.

Puisque ΑΖ est incommensurable avec ΖΒ, le rectangle sous ΒΑ, ΑΖ est incommensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΖ (1. 6, et 10. 10). Mais le rectangle sous ΒΑ, ΑΖ est égal au carré de ΑΔ, et le rectangle sous ΑΒ, ΒΖ est égal au carré de ΔΒ (34. lem. 1. 10); le carré de ΑΔ est donc incommensurable avec le carré de ΔΒ. Mais le carré de ΑΒ est médial; donc la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ est médiale. Et puisque ΒΓ est double de ΔΖ, le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΖΔ (1. 6). Mais le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est rationel; donc le rectangle sous ΑΒ, ΖΔ est rationel. Mais le rectangle sous ΑΒ, ΖΔ est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (34. lem. 3. 10); le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ est donc rationel.

On a donc trouvé deux droites ΑΔ, ΔΒ incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΣ'.

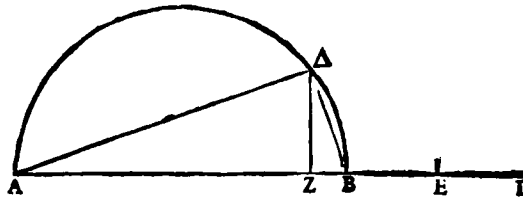
PROPOSITIO XXXVI.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιοῦσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ  $AB$ ,  $BΓ$ , μέσον περιέχουσai, ὥστε τὸν  $AB$  τῆς  $BΓ$  μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς  $AB$  ἡμικύκλιον τὸ  $ΑΔΒ$ , καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως<sup>2</sup> εἰρημίνοις.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponentur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles  $AB$ ,  $BΓ$ , medium continentes, ita ut  $AB$  quam  $BΓ$  plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam  $AB$  semicirculus  $ΑΔΒ$ , et reliqua fiant congruenter iis superiùs dictis.



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν<sup>3</sup> ἡ  $AZ$  τῇ  $ZB$  μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΔΒ$  δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$ , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ<sup>4</sup> τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZB$  ἴσον

Et quoniam incommensurabilis est  $AZ$  ipsi  $ZB$  longitudine, incommensurabilis est et  $ΑΔ$  ipsi  $ΔΒ$  potentiâ. Et quoniam medium est quadratum ex  $AB$ , medium igitur et compositum ex quadratis ipsarum  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ . Et quoniam rectangulum sub  $AZ$ ,  $ZB$  æquale est quadrato

PROPOSITION XXXVI.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites.

Soient deux médiales  $AB$ ,  $BΓ$  commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale, de manière que la puissance de  $AB$  surpasse la puissance de  $BΓ$  du quarré d'une droite incommensurable avec  $AB$  (33. 10); et sur  $AB$  décrivons le demi-cercle  $ΑΔΒ$ , et faisons le reste comme il a été dit auparavant.

Puisque  $AZ$  est incommensurable en longueur avec  $ZB$ , la droite  $ΑΔ$  est incommensurable en puissance avec  $ΔΒ$ . Et puisque le quarré de  $AB$  est médial, la somme des quarrés de  $ΑΔ$  et de  $ΔΒ$  est médiale. Et puisque le rectangle sous  $AZ$ ,  $ZB$  est

204 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι<sup>5</sup> τῇ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE, ΔZ, ἴση ἄρα ἔστιν ἡ BE τῇ ΔZ<sup>6</sup>. διπλὴ ἄρα ἡ BG τῆς ZΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG διπλασίον ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ· καὶ ἔστιν ἴσον τῇ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB, μέσον ἄρα<sup>7</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BG μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓB τῇ BE· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῇ ὑπὸ τῶν AB, BE ἀσύμμετρον ἐστιν. ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB, τῇ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τῇ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB<sup>8</sup>.

Εὐρίηται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ AΔ, ΔB δύναμι ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων<sup>10</sup> μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῇ σύγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

égal au carré de l'une ou de l'autre des droites BE, ΔZ, la droite BE est égale à ΔZ; donc BG est double de ZΔ; le rectangle sous AB, BG est donc double du rectangle sous AB, ZΔ. Mais le rectangle sous AB, BG est médial; le rectangle sous AB, ZΔ est donc médial; mais il est égal au rectangle sous AΔ, ΔB (34. lem. 1. 10.); le rectangle sous AΔ, ΔB est donc médial. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec BG, et que ΓB est commensurable avec BE, la droite AB est incommensurable en longueur avec BE; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BE (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de AΔ et de ΔB est égale au carré de AB, et le rectangle sous AB, ZΔ, c'est-à-dire le rectangle sous AΔ, ΔB, est égal au rectangle sous AB, BE; la somme des carrés de AΔ et de ΔB est donc incommensurable avec le rectangle sous AΔ, ΔB.

On a donc trouvé deux droites AΔ, ΔB incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites. Ce qu'il fallait faire.

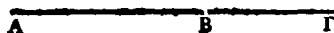
ex alterutra ipsarum BE, ΔZ, æqualis igitur est BE ipsi ΔZ; dupla igitur BG ipsius ZΔ; quare et rectangulum sub AB, BG duplum est rectanguli sub AB, ZΔ. Medium autem rectangulum sub AB, BG; medium igitur et rectangulum sub AB, ZΔ; atque est æquale rectangulo sub AΔ, ΔB, medium igitur et rectangulum sub AΔ, ΔB. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BG longitudine, commensurabilis autem ΓB ipsi BE; incommensurabilis igitur et AB ipsi BE longitudine; quare et ex AB quadratum rectangulo sub AB, BE incommensurable est. Sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quadrata ex AΔ, ΔB, rectangulo autem sub AB, BE æquale est rectangulum sub AB, ZΔ, hoc est rectangulum sub AΔ, ΔB; incommensurable igitur est compositum ex ipsarum AΔ, ΔB quadratis rectangulo sub AΔ, ΔB.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ AΔ, ΔB potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

Εάν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συν-  
τιθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ  
δύο ὀνομάτων.

Συγκρίσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον  
σύμμετροι αἱ  $AB$ ,  $BΓ$ . λέγω ὅτι ὅλη ἡ  $ΑΓ$   
ἄλογός ἐστιν.



Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $BΓ$   
μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὥς  
δὲ ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $BΓ$  οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$   
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $BΓ$ . ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ  
ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  τῷ ἀπὸ τῆς  $BΓ$ . Ἀλλὰ τῷ  
μὲν ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  σύμμετρόν ἐστι τὸ δις  
ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $BΓ$  σύμμετρά  
ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ . αἱ γὰρ  $AB$ ,  $BΓ$  ῥηταὶ  
εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ἀσύμμετρον ἄρα

PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentiâ solùm commensu-  
rabiles componantur, tota irrationalis est, vo-  
cetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ  
solùm commensurabiles  $AB$ ,  $BΓ$ ; dico totam  $ΑΓ$   
irracionalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est  $AB$   
ipsi  $BΓ$  longitudine, potentiâ enim solùm sunt  
commensurabiles, ut autem  $AB$  ad  $BΓ$  ita sub  
 $AB$ ,  $BΓ$  rectangulum ad quadratum ex  $BΓ$ ; in-  
commensurable igitur est sub  $AB$ ,  $BΓ$  rectan-  
gulum quadrato ex  $BΓ$ . Sed rectangulo quidem  
sub  $AB$ ,  $BΓ$  commensurable est rectangulum bis  
sub  $AB$ ,  $BΓ$ , quadrato autem ex  $BΓ$  commensu-  
rabilia sunt quadrata ex  $AB$ ,  $BΓ$ ; ipsæ enim  $AB$ ,  
 $BΓ$  rationales sunt potentiâ solùm commensura-  
biles; incommensurable igitur est bis sub  $AB$ ,

PROPOSITION XXXVII.

Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur  
somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

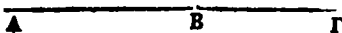
Ajoutons les deux rationnelles  $AB$ ,  $BΓ$  commensurables en puissance seulement;  
je dis que leur somme  $ΑΓ$  est irrationnelle.

Car puisque  $AB$  est incommensurable en longueur avec  $BΓ$ , ces deux droites  
n'étant commensurables qu'en puissance, et que  $AB$  est à  $BΓ$  comme le rectangle  
sous  $AB$ ,  $BΓ$  est au carré de  $BΓ$  (1. 6), le rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est incommen-  
surable avec le carré de  $BΓ$  (10. 10). Mais le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est  
commensurable avec le rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  (6. 10), et la somme des carrés  
de  $AB$  et de  $BΓ$  est commensurable avec le carré de  $BΓ$  (16. 10), car les droites  
 $AB$ ,  $BΓ$  sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; le double

## 206 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  τοῖς ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ^3$ , καὶ συνθέντι τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  μιτὰ τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ , τουτίστί τὸ

$BΓ$  rectangulum quadratis ex  $AB$ ,  $BΓ$ , et componendo, rectangulum bis sub  $AB$ ,  $BΓ$  cum quadratis ex  $AB$ ,  $BΓ$ , hoc est quadratum ex  $AG$



ἀπὸ τῆς  $AG$  ἀσύμμετρόν ἐστι τῇ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ . Ρητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AG$  ὥστε καὶ ἡ  $AG$  ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων<sup>5</sup>.

incommensurable est composito ex ipsarum  $AB$ ,  $BΓ$  quadratis. Rationale autem compositum ex ipsarum  $AB$ ,  $BΓ$  quadratis; irrationalis igitur est quadratum ex  $AG$ ; quare et  $AG$  irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Εὰν δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντιθῶσι, ρητὸν περιέχουσιν· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μίσων πρώτη.

Συγκείμεσαν γὰρ δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ  $AB$ ,  $BΓ$ , ρητὸν περιέχουσιν· λέγω ὅτι ὅλη ἡ  $AG$  ἄλογός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ  $AB$  τῇ  $BΓ$  μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἄρα ἀσύμ-

### PROPOSITIO XXXVIII.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles  $AB$ ,  $BΓ$ , rationale continentes; dico totam  $AG$  irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est  $AB$  ipsi  $BΓ$  longitudine, et quadrata ex  $AB$ ,  $BΓ$  igitur

rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est donc incommensurable avec la somme des quarrés de  $AB$  et de  $BΓ$ ; donc, par addition, le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  avec la somme des quarrés de  $AB$  et de  $BΓ$ , c'est-à-dire le quarré de  $AG$  (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de  $AB$  et de  $BΓ$  (17. 10). Mais la somme des quarrés de  $AB$ ,  $BΓ$  est rationnelle; le quarré de  $AG$  est donc irrationnel (déf. 10. 10); la droite  $AG$  est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et sera appelée droite de deux noms.

### PROPOSITION XXXVIII.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales  $AB$ ,  $BΓ$ , qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle; je dis que leur somme  $AG$  est irrationnelle.

Car, puisque  $AB$  est incommensurable en longueur avec  $BΓ$ , la somme des

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 207

μιστρά ἐστι τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ συν- incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AB, θίγτι<sup>2</sup> τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μιστὰ τοῦ δις BG; et componendo, quadrata ex AB, BG cum



ὑπὸ τῶν AB, BG, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῇ ὑπὸ τῶν AB, BG. Πητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG, ὑπόκειται γὰρ αἱ AB, BG ῥητὸν περιέχουσai<sup>3</sup>. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη<sup>4</sup>.

rectangulo bis sub AB, BG, quod est quadratum ex ΑΓ, incommensurabile est rectangulo sub AB, BG. Rationale autem rectangulum sub AB, BG, supponuntur enim ipsæ AB, BG rationale continere; irrationale igitur quadratum ex ΑΓ; irrationalis igitur ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis prima.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Εὰν δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι συν-  
τιθῶσι, μέσον περιέχουσai· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι,  
καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων διυτίρα.

Συγκείμεθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμεις μόνον  
σύμμετροι αἱ AB, BG, μέσον περιέχουσai· λέγω  
ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

## PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensura-  
biles componantur, medium continentes, tota  
irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis  
secunda.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ so-  
lùm commensurabiles AB, BG, medium conti-  
nentes; dico irrationalem esse ΑΓ.

quarrés de AB et de BG est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (13. 10); donc, par addition, la somme des quarrés de AB et de BG avec le double rectangle sous AB, BG, c'est-à-dire le quarré de ΑΓ (4. 2), est incommensurable avec le rectangle sous AB, BG. Mais le rectangle sous AB, BG est rationel, car les droites AB, BG sont supposées comprendre un rectangle rationel; le quarré de ΑΓ est donc irrationnel; la droite ΑΓ sera donc irrationnelle, et sera appelée la première de deux médiales.

## PROPOSITION XXXIX.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

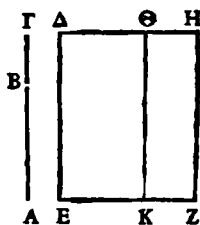
Ajoutons les deux médiales AB, BG, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale; je dis que la droite ΑΓ est irrationnelle.



208 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εκτίσθω γάρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβελήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβελήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ<sup>2</sup> ἴσον τὸ ΕΘ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ μίση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μίσα ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Μίσην δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν

Exponatur enim rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΓ æquale ad ΔΕ applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ. Et quoniam quadratum ex ΑΓ æquale est et quadratis ex ΑΒ, ΒΓ et rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, applicetur etiam quadratis ex ΑΒ, ΒΓ ad ΔΕ æquale ΕΘ; reliquum igitur ΖΘ æquale est rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ. Et quoniam media est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ; media igitur sunt et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ. Medium autem supponitur et rectangulum



ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἴστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῇ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μίσην ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΖΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται<sup>4</sup> ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Ἐπεὶ οὖν<sup>5</sup> ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ

bis sub ΑΒ, ΒΓ, atque est quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ΕΘ, rectangulo verò bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ΖΘ; medium igitur utrumque ipsorum ΕΘ, ΘΖ, et ad rationalem ΔΕ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΔΘ, ΘΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Quoniam igitur incommensurabilis est

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un parallélogramme ΔΖ, qui étant égal au carré de ΑΓ, ait ΔΗ pour largeur (45. 1). Puisque le carré de ΑΓ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et du double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (4. 2), appliquons à ΔΕ un rectangle ΕΘ égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, le rectangle restant ΖΘ sera égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Mais chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, les carrés de ΑΒ et de ΒΓ sont donc médiaux. Et puisque, par supposition, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, que ΕΘ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΖΘ est égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, chacun des rectangles ΕΘ, ΖΘ est médial, et ils sont appliqués à la rationnelle ΔΕ; chacune des droites ΔΘ, ΘΗ est donc rationnelle (23. 10) et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΒ est incom-

AB τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΟΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Εδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυναμίαι μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΔΗ ἀλογός ἐστι. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἐστιν· ἀλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον· <sup>8</sup>καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸν ἀλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἀλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρ<sup>10</sup>.

AB ipsi BG longitudine, atque est ut AB ad BG ita ex AB quadratum ad rectangulum sub AB, BG; incommensurabile igitur est ex AB quadratum rectangulo sub AB, BG. Sed quadrato quidem ex AB commensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AB, BG, rectangulo autem sub AB, BG commensurabile est rectangulum bis sub AB, BG; incommensurabile igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB, BG rectangulo bis sub AB, BG. Sed quadratis quidem ex AB, BG æquale est ipsum ΕΘ, rectangulo autem bis sub AB, BG æquale est ipsum ΟΖ; incommensurabile igitur est ΕΘ ipsi ΟΖ; quare et ΔΘ ipsi ΘΗ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem rationales; ipsæ ΔΘ, ΘΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare ΔΗ irrationalis est. Rationalis autem ΔΕ, sed sub irrationali et rationali contentum rectangulum irrationalis est; irrationalis igitur est ΔΖ spatium; et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΖ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis secunda.

mesurable en longueur avec BG, et que AB est à BG comme le carré de AB est au rectangle sous AB, BG (1. 6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous AB, BG (10. 10). Mais la somme des carrés de AB et de BG est commensurable avec le carré de AB, et le double rectangle sous AB, BG est commensurable avec le rectangle sous AB, BG; la somme des carrés de AB et de BG est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (14. 10). Mais ΕΘ est égal à la somme des carrés de AB et de BG, et ΟΖ est égal au double rectangle sous AB, BG; donc ΕΘ est incommensurable avec ΟΖ; la droite ΔΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΔ. Mais on a démontré que ces droites sont rationelles; les droites ΔΘ, ΘΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΔΗ est donc irrationnelle (37. 10). Mais la droite ΔΕ est rationelle, et un rectangle compris sous une irrationnelle et sous une rationelle est irrationnel; la surface ΔΖ est donc irrationnelle, et par conséquent la droite qui peut cette surface. Mais la puissance de ΑΓ est égale à ΔΖ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée la seconde de deux médiales.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Μ'.

Εὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντι-  
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'  
αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν  
μείσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω  
δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-  
μετροι, αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα·  
λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG.

A ————— B ————— Γ

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον ἐστὶ,  
καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον ἐστὶ.  
Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ῥητόν·  
ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG  
τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ὥστε  
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ  
τῶν AB, BG, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG, ἀσύμ-  
μετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  
AB, BG· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG·  
ὥστε καὶ ἡ AG ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείζων.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles  
componantur, facientes quidem compositum ex  
ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem  
sub ipsis medium; tota recta irrationalis est,  
vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-  
commensurabiles AB, BG, facientes proposita;  
dico irrationalem esse AG.

Quoniam enim rectangulum sub AB, BG me-  
dium est, et rectangulum igitur bis sub AB,  
BG medium est. Sed compositum ex quadratis  
ipsarum AB, BG rationale; incommensurable  
igitur est rectangulum bis sub AB, BG compo-  
sito ex quadratis ipsarum AB, BG; quare et  
ex AB, BG quadrata cum rectangulo bis sub  
AB, BG, quod est quadratum ex AG, incommen-  
surabilia sunt composito ex quadratis ipsarum  
AB, BG; irrationale igitur est quadratum ex AG;  
quare et AG irrationalis est, vocetur autem major.

## PROPOSITION XL.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs  
quarrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la  
droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites  
faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Puisque le rectangle sous AB, BG est médial, le double rectangle sous AB, BG  
sera médial (24. cor. 10). Mais la somme des quarrés de AB et de BG est rationnelle;  
le double rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec la somme des  
quarrés de AB et de BG; donc la somme des quarrés de AB et de BG avec le double  
rectangle sous AB, BG, c'est-à-dire le quarré de AG (4. 2), est incommensurable  
avec la somme des quarrés de AB et de BG (17. 10); le quarré de AG est donc irra-  
tionnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle sera appelée majeure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

PROPOSITIO XLI.

Εάν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-  
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'  
αὐτῶν τετραγώνων μίσην, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν  
ῤητόν· ἡ ἅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ  
ῤητὸν καὶ μίσην δυναμένην.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-  
μετροι αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα·  
λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles  
componantur, facientes quidem compositum ex  
ipsarum quadratis medium, rectangulum autem  
sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est,  
vocetur autem rationale et medium potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-  
commensurabiles AB, BG, facientes proposita;  
dico irrationalem esse AG.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  
AB, BG μίσην ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG  
ῤητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ  
τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG·  
ὥστε καὶ συνθίγεται τὸ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν  
ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG. ῤητόν δὲ τὸ δις  
ὑπὸ τῶν AB, BG· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG·  
ἄλογός ἄρα ἡ AG, καλεῖσθω δὲ ῤητὸν καὶ μίσην  
δυναμένην.

Quoniam enim compositum ex quadratis ip-  
sarum AB, BG medium est, rectangulum autem  
his sub AB, BG rationale; incommensurable  
igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB,  
BG rectangulo bis sub AB, BG; quare et compo-  
nendo, quadratum ex AG incommensurable est  
rectangulo bis sub AB, BG. Rationale autem rec-  
tangulum bis sub AB, BG; irrationalis igitur  
quadratum ex AG; irrationalis igitur AG, vo-  
cetur autem rationale et medium potens.

PROPOSITION XLI.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs  
quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel, la droite  
entière sera irrationelle, et sera appelée celle qui peut une rationelle et une  
médiale.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites  
faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationelle.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BG est médiale, et que le  
double rectangle sous AB, BG est rationel, la somme des quarrés de AB et de BG  
sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG; donc, par addition,  
le quarré de AG est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (17. 10).  
Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; le quarré de AG est donc irra-  
tionel; la droite AG est donc irrationelle, et elle est appelée celle qui peut une  
rationelle et une médiale.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ΄.

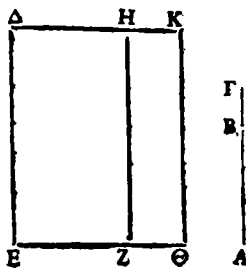
## PROPOSITIO XLII.

Εὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιῶσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μείσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μείσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκείμενῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων<sup>1</sup>. ἡ ὅλη εὐθεῖα ἀλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ δύο μίσα δυναμίνη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα<sup>2</sup>. λήγῃ ὅτι ἡ AG ἀλογός ἐστιν.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media pôtens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AB, BG, facientes proposita; dico AG irrationalem esse.



Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ. Καὶ ἵπαι μείσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB,

Exponatur rationalis ΔΕ, et applicetur ad ΔΕ quadratis quidem ex AB, BG æquale ipsum ΔΖ, rectangulo autem bis sub AB, BG æquale ipsum ΗΘ; totum igitur ΔΘ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam medium est compositum ex qua-

## PROPOSITION XLII.

Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un rectangle ΔΖ égal à la somme des quarrés de AB et de BG, et que ΗΘ soit égal au double rectangle sous AB, BG; le rectangle entier ΔΘ sera égal au quarré de ΑΓ (4. 2). Et puisque la somme des

ΒΓ, καὶ ἴστιν<sup>3</sup> ἴσον τῷ ΔΖ· μίσην ἄρα ἴστί καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἴστιν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητὴ ἴστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτίστι τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρά ἴστι τὰ ἄ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα<sup>5</sup> ἴστί τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἴστι. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἴστιν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῤητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἴστί τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἴστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἴστιν ἡ ΑΓ, καλεῖσθαι δὲ δύο μίσην δυναμένη<sup>6</sup>.

dratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, atque est æquale ipsi ΔΖ; medium igitur est et ΔΖ; et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Propter eadem utique et ΗΚ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΗΖ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurable igitur est ΔΖ ipsi ΗΘ; quare et ΔΗ ipsi ΗΚ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΔΗ, ΗΚ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; irrationalis igitur est ΔΚ quæ appellatur ex binis nominibus. Rationalis autem ΔΕ; irrationalis igitur est ΔΘ, et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΘ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem bina media potens.

quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΖ, le rectangle ΔΖ est médial, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; donc ΔΗ est rationel (23. 10), et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Par la même raison, la rationelle ΗΚ est incommensurable en longueur avec ΗΖ, c'est-à-dire avec ΔΕ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le rectangle ΔΖ est incommensurable avec ΗΘ; donc ΔΗ est incommensurable avec ΗΚ (1. 6, et 10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΗ, ΗΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; donc ΔΚ est la droite irrationelle appelée de deux noms (37. 10). Mais ΔΕ est rationel; donc ΔΘ est irrationel (39. 10), et par conséquent la droite qui peut ΔΘ. Mais ΑΓ peut ΔΘ; donc ΑΓ est irrationel, et cette droite est appelée celle qui peut deux médiales.

## ΛΗΜΜΑ.

Εκκείσθω εὐθεία ἡ  $AB$ , καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἀνισα καθ' ἑκατέρα τῶν  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , καὶ ὑποκείσθω μείζων ἢ  $ΑΓ$  τῆς  $\DeltaΒ$ . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$ .

Τετμήσθω γὰρ ἡ  $AB$  δίχα κατὰ τὸ  $E$ . Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῆς  $\DeltaΒ$ , κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ  $\DeltaΓ$ . καὶ<sup>2</sup> λοιπὴ ἄρα ἡ  $ΑΔ$  λοιπῆς τῆς  $ΓΒ$  μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ  $ΑΕ$  τῇ  $ΕΒ$ . ἐλάττων ἄρα

## LEMMA.

Exponatur recta  $AB$ , et secetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , et supponatur major  $ΑΓ$  quam  $\DeltaΒ$ ; dico quadrata ex  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  majora esse quadratis ex  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$ .

Secetur enim  $AB$  bifariam in  $E$ . Et quoniam major est  $ΑΓ$  quam  $\DeltaΒ$ , communis auferatur  $\DeltaΓ$ ; et reliqua igitur  $ΑΔ$  quam reliqua  $ΓΒ$  major est.  $\text{Æqualis}$  autem  $ΑΕ$  ipsi  $ΕΒ$ ; minor



ἐστίν<sup>3</sup> ἡ  $\DeltaΕ$  τῆς  $ΕΓ$ . τὰ  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $ΕΒ$ , ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $\DeltaΕ$  ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς  $ΕΒ$ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΓ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$  μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς  $\DeltaΕ$ . Ὡν τὸ ἀπὸ τῆς  $\DeltaΕ$  ἑλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς  $ΕΓ$ . καὶ λοιπὸν ἄρα

igitur est  $\DeltaΕ$  quam  $ΕΓ$ ; ergo  $\Gamma$ ,  $\Delta$  puncta non æqualiter distant à bipartitâ sectione. Et quoniam sub  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  rectangulum cum quadrato ex  $ΕΓ$  æquale est quadrato ex  $ΕΒ$ , sed et sub  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$  rectangulum cum quadrato ex  $\DeltaΕ$  æquale quadrato ex  $ΕΒ$ ; ergo sub  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  rectangulum cum quadrato ex  $ΕΓ$  æquale est sub  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$  rectangulo cum quadrato ex  $\DeltaΕ$ . Quorum quadratum ex  $\DeltaΕ$  minus est quadrato ex  $ΕΓ$ ; et

## LEMME.

Soit la droite  $AB$ , que cette droite entière soit coupée en parties inégales aux points  $\Gamma$ ,  $\Delta$ , et supposons  $ΑΓ$  plus grand que  $\DeltaΒ$ ; je dis que la somme des carrés  $ΑΓ$  et de  $ΓΒ$  est plus grande que la somme des carrés de  $ΑΔ$  et de  $\DeltaΒ$ .

Coupons  $AB$  en deux parties égales en  $E$ . Puisque  $ΑΓ$  est plus grand que  $\DeltaΒ$ , retranchons la partie commune  $\DeltaΓ$ ; le reste  $ΑΔ$  sera plus grand que le reste  $ΓΒ$ . Mais  $ΑΕ$  est égal à  $ΕΒ$ ; donc  $\DeltaΕ$  est plus petit que  $ΕΓ$ ; les points  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ne sont donc pas également éloignés du point qui coupe  $AB$  en deux parties égales. Et puisque le rectangle sous  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  avec le carré de  $ΕΓ$  est égal au carré de  $ΕΒ$ , et que le rectangle sous  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$  avec le carré de  $\DeltaΕ$  est égal au carré de  $ΕΒ$  (5. 2), le rectangle sous  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  avec le carré de  $ΕΓ$  sera égal au rectangle sous  $ΑΔ$ ,  $\DeltaΒ$  avec le carré de  $\DeltaΕ$ . Mais le carré de  $\DeltaΕ$  est plus petit que le carré de  $ΕΓ$ ; le rec-

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζον ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Οπερ ἔδει δείξαι<sup>5</sup>.

reliquum igitur rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; et reliquum igitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ majus est composito ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητάς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

PROPOSITIO XLIII.

Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus recta ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ergo ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solùm commensurabiles.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητάς εἶναι δυνάμει μόνον

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ rationales sint potentiâ solùm com-

tangle restant sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme restante des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ est donc plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIII.

La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

Que la droite ΑΒ de deux noms soit divisée en ses noms au point Γ; les droites rationnelles ΑΓ, ΓΒ ne seront commensurables qu'en puissance; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être coupée en un autre point en deux rationnelles commensurables en puissance seulement.

Car si cela se peut, qu'elle soit coupée au point Δ, de manière que les ra-



## 216 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

συμμέτρουσ. Φανερόν δὲ ὅτι ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΒ$  οὐκ ἴσθιν ἡ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω ἴσθαι δὴ καὶ ἡ  $ΑΔ$  τῇ  $ΓΒ$  ἡ αὐτή· καὶ ἴσθαι ὥς ἡ  $ΑΓ$  πρὸς τὴν  $ΓΒ$  οὕτως ἡ  $ΒΔ$  πρὸς τὴν  $ΔΑ$ , καὶ ἴσθαι ἡ  $ΑΒ$  κατὰ τὸ αὐτὸ τμήμα κατὰ τὸ  $Γ^2$  διαιρίσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ  $Δ$ , ὕπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΔΒ$  ἴσθιν ἡ αὐτή· διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὰ  $Γ, Δ$  σημεία οὐκ

mensurabiles. Evidens utique est  $ΑΓ$  cum ipsâ  $ΔΒ$  non esse eadem. Si enim possibile, sit; erit igitur et  $ΑΔ$  cum ipsâ  $ΓΒ$  eadem; et erit ut  $ΑΓ$  ad  $ΓΒ$  ita  $ΒΔ$  ad  $ΔΑ$ , et erit  $ΑΒ$  in idem segmentum divisa in puncto  $Γ$  atque in puncto  $Δ$ , quod non supponitur; non igitur  $ΑΓ$  cum ipsâ  $ΔΒ$  est eadem; ob id igitur et  $Γ, Δ$  puncta non æqualiter distant



ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας<sup>3</sup>. ὅ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΓ, ΓΒ$  τῶν<sup>4</sup> ἀπὸ τῶν  $ΑΔ, ΔΒ$ , τούτῃ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΔ, ΔΒ$  τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ, ΓΒ$ , διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΓ, ΓΒ$  μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ, ΓΒ$  καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΔ, ΔΒ$  μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΔ, ΔΒ$  ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς  $ΑΒ$ . Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΓ, ΓΒ$  τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΔ, ΔΒ$  διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν  $ΑΔ, ΔΒ$  τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΓ, ΓΒ$

à bipartitâ sectione; quo igitur differunt ex  $ΑΓ, ΓΒ$  quadrata à quadratis ex  $ΑΔ, ΔΒ$ , hoc differt et rectangulum bis sub  $ΑΔ, ΔΒ$  à rectangulo bis sub  $ΑΓ, ΓΒ$ , propterea quod et ex  $ΑΓ, ΓΒ$  quadrata cum rectangulo bis sub  $ΑΓ, ΓΒ$  et ex  $ΑΔ, ΔΒ$  quadrata cum rectangulo bis sub  $ΑΔ, ΔΒ$  æqualia sunt quadrato ex  $ΑΒ$ . Sed ex  $ΑΓ, ΓΒ$  quadrata à quadratis ex  $ΑΔ, ΔΒ$  differunt rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis igitur sub  $ΑΔ, ΔΒ$  à rectangulo

tionelles  $ΑΔ, ΔΒ$  ne soient commensurables qu'en puissance. Il est évident que  $ΑΓ$  n'est pas égal à  $ΔΒ$ . Car que cela soit, si c'est possible; la droite  $ΑΔ$  sera alors égale à  $ΓΒ$ , la droite  $ΑΓ$  sera à la droite  $ΓΒ$  comme  $ΒΔ$  est à  $ΔΑ$ , et la droite  $ΑΒ$  sera coupée en segments égaux au point  $Δ$  qu'au point  $Γ$ , ce qui n'est pas supposé; donc  $ΑΓ$  n'est pas égale à  $ΔΒ$ ; donc les points  $Γ, Δ$  ne sont pas également éloignés du point qui coupe  $ΑΒ$  en deux parties égales; donc la différence de la somme des quarrés de  $ΑΓ$  et de  $ΒΓ$ , à la somme des quarrés de  $ΑΔ$  et de  $ΔΒ$ , est égale à la différence du double rectangle sous  $ΑΔ, ΔΒ$ , au double rectangle sous  $ΑΓ, ΓΒ$ ; parce que la somme des quarrés de  $ΑΓ$  et de  $ΓΒ$  avec le double rectangle sous  $ΑΓ, ΓΒ$ , et la somme des quarrés de  $ΑΔ$  et  $ΔΒ$  avec le double rectangle sous  $ΑΔ, ΔΒ$ , sont égales chacune au quarré de  $ΑΒ$  (4. 2). Mais la différence de la somme des quarrés de  $ΑΓ$  et de  $ΓΒ$ , à la somme des quarrés de  $ΑΔ$  et de  $ΔΒ$ , est une surface rationnelle; car ces deux sommes sont rationnelles; donc la différence du double rectangle sous  $ΑΔ, ΔΒ$  au double rectangle sous  $ΑΓ, ΓΒ$  est une surface

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 217

ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μίσα ὄντα, ἔπερ ἄτοπον· μίσην γάρ<sup>5</sup> μίσην οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· οὐκ ἄρα ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἐν ἄρα μόνον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

bis sub  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  differt rationali, media existentia, quod absurdum; medium enim non medium superat rationali; non igitur recta ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solū. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

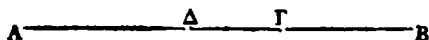
Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἐν μόνον σημείον διαιρεῖται'.

Εστω<sup>2</sup> ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ  $ΑΒ$  διηρημένη κατὰ τὸ  $Γ$ , ὥστε τὰς  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ  $ΑΒ$  κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται.

### PROPOSITIO XLIV.

Ex binis mediis prima ad unum solū punctum dividitur.

Sit ex binis mediis prima  $ΑΒ$  divisa in puncto  $Γ$ , ita ut  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  mediæ sint potentiâ solū commensurabiles, rationale continentes; dico  $ΑΒ$  in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ  $Δ$ , ὥστε καὶ τὰς  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  τοῦ δις

Si enim possibile, dividatur et in  $Δ$ , ita ut et  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  mediæ sint potentiâ solū commensurabiles, rationale continentes. Quoniam igitur quo differt rectangulum his sub  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$

rationelle, ces surfaces étant médiales, ce qui est absurde; car une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une rationelle (27. 10); une droite de deux noms ne peut donc pas être divisée en plus d'un point; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XLIV.

La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite  $ΑΒ$ , première de deux médiales, soit divisée en  $Γ$ , de manière que les médiales  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ , commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle; je dis que la droite  $ΑΒ$  ne peut être divisée en un autre point.

Car, si cela est possible, qu'elle soit divisée au point  $Δ$ , de manière que les médiales  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ , commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle. Puisque la différence du double rectangle sous  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  au

## 218 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὕπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῃ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῇ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· ῥητῇ ἄρα δια-

à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, rationali autem differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, rationalia enim utraque;



φέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μίσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον. Οὔτε ἴδι διείξαι.

rationali igitur differunt et ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, media existentia, quod absurdum; non igitur ex binis mediis prima ad aliud et aliud punctum dividitur in nomina; ad unum igitur solùm. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΕ.

### PROPOSITIO XLV.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μίσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μίσον περιχούσας· φα-

Sit ex binis mediis secunda ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes;

double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ à la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ, et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ diffèrent d'une surface rationnelle; car l'une et l'autre de ces grandeurs sont rationnelles; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ diffère donc d'une surface rationnelle de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est absurde (27. 10); donc une première de deux médiales ne peut pas être divisée en ses noms en deux points différents; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XLV.

La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

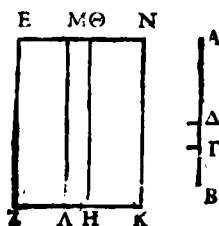
Que ΑΒ, seconde de deux noms, soit divisée au point Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, qui comprennent une surface médiale, ne soient commensu-

γερόν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ<sup>2</sup> οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ<sup>3</sup> κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. Δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ<sup>4</sup>, ὥς ἑπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς

evidens est utique punctum Γ non esse in bi-partitā sectione, quoniam non sunt longitudine commensurabiles; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut ΑΓ cum ipsā ΔΒ non sit eadem, sed ΑΓ major ex hypothesi. Evidens est utique quadrata ex ΑΔ, ΔΒ minora esse quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, ut suprā ostendimus, et ΑΔ, ΔΒ medias esse potentiā



ΑΔ, ΔΒ μείζονες εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιχούσας. Καὶ<sup>5</sup> ἐκκείσθω ῥητὴ ΕΖ, καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον<sup>6</sup> παρατελέσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῇ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπασιν

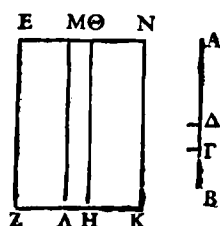
solūm commensurabiles, medium continentes. Et exponatur rationalis ΕΖ, et quadrato quidem ex ΑΒ æquale ad ΕΖ parallelogrammum rectangulum applicetur ΕΚ, quadratis autem ex ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΕΗ; reliquum igitur ΕΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rursus et quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, quæ minora os-

rables qu'en puissance. Il est évident que le point Γ n'est pas le milieu de ΑΒ, parce que les droites ΑΓ, ΓΒ ne sont pas commensurables en longueur; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ; de manière que ΑΓ ne soit pas égal à ΔΒ, et supposons que ΑΓ est plus grand que ΔΒ. Il est évident que la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus petite que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme nous l'avons démontré plus haut (lem. 43. 10), et que les médiales ΑΔ, ΔΒ, qui comprennent une surface mediale, ne sont commensurables qu'en puissance (43. 10). Soit la rationnelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ un rectangle ΕΚ égal au quarré de ΑΒ, et retranchons ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; le reste ΕΚ sera égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (4. 2). De plus, retranchons ΕΛ égal à la somme des quarrés de ΑΔ et ΔΒ, qui est plus petite que

ἰλάσσονα ἰδείχθῃ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἔστι<sup>7</sup> τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἵπτι μίσα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μίσην ἄρα καὶ<sup>8</sup> τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἔστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἵπτι αἱ ΑΓ, ΓΒ μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-

tensa sunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, æquale auferatur ΕΛ; et reliquum igitur ΜΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam media sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; incommensu-



τρος ἄρα ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Αλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρον ἔστι τὸ δις ὑπὸ

rabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, potentiâ enim sunt commensurabiles ΑΓ, ΓΒ; rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis

la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme on l'a démontré; le reste ΜΚ sera égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, le rectangle ΕΗ sera médial; mais ce rectangle est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΕΘ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais les médiales ΑΓ, ΓΒ ne sont commensurables qu'en puissance; donc ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le quarré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (1. 6); le quarré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (10. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le quarré de ΑΓ (16. 10), car les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commen-

τῶν ΑΒ, ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἴσι ρηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εὰν δὲ δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ἔλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα<sup>10</sup> ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ διχθῆσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτὴ, ἵπιδήπερ<sup>11</sup> τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῶ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτίεστι τὸ ΕΗ, μείζον ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτίεστι τοῦ ΜΚ·

sub ΑΓ, ΓΒ; et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ igitur incommensurabilia sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale est ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale est ΘΚ; incommensurable igitur est ΕΗ ipsi ΘΚ; quare et ΕΘ ipsi ΘΝ incommensurabilis est longitudine; et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus; recta ΕΝ igitur ex binis nominibus est divisa in Θ. Propter eadem utique ostenduntur et ΕΜ, ΜΝ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et erit ΕΝ ex binis nominibus ad aliud et aliud divisa, et ad Θ et ad Μ, et non est ΕΘ cum ipsâ ΜΝ eadem, quoniam quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt quadratis ex ΑΔ, ΔΒ. Sed quadrata ex ΑΔ, ΔΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; multò igitur et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΕΗ, majus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc est

surable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable en longueur avec ΘΝ; mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si l'on ajoute deux rationelles commensurables en puissance seulement, leur somme est irrationelle, et est appelée droite de deux noms (37. 10); la droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. On démontrera semblablement que les rationelles ΕΜ, ΜΝ sont commensurables en puissance seulement, et que la droite ΕΝ de deux noms sera divisée en deux points; savoir, en Θ et en Μ; mais ΕΘ n'est pas égal à ΜΝ, puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (43. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΕΗ, est donc plus grande que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; c'est-à-dire,

## 222 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ  
τῇ ΜΝ οὐκ ἐστίν ἡ αὐτή. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipso MK; quare et EΘ quàm MN major est;  
ergo EΘ cum ipsâ MN non est eadem. Quod  
oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον δια-  
ριῖται'.

Ἐστω μείζων ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ,  
ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμεις ἀσύμμετρος εἶναι,  
ποιοῦσας τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  
ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ,  
ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον  
οὐ διαιρεῖται.

### PROPOSITIO XLVI.

Major ad idem solùm punctum dividitur.

Sit major AB divisa in puncto Γ, ita ut  
ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, fa-  
cientes quidem compositum ex quadratis ip-  
sarum ΑΓ, ΓΒ rationale, rectangulum autem  
sub ΑΓ, ΓΒ medium; dico AB in alio puncto  
non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ,  
ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμεις ἀσύμμετρος  
εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ  
τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Καὶ

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita  
ut ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint,  
facientes quidem compositum ex quadratis ip-  
sarum ΑΔ, ΔΒ rationale, rectangulum autem

que le rectangle MK; donc EΘ est plus grand que MN; donc EΘ n'est pas égal à MN.  
Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XLVI.

La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite majeure soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ  
soient incommensurables en puissance seulement, la somme des quarrés de  
ΑΓ et de ΒΓ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant médial; je dis que  
la droite AB ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée au point Δ, si cela est possible, de manière que les  
droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés  
de ΑΔ et de ΔΒ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant médial.

ἐπὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῃ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερίχει ῥητῶν, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶν<sup>5</sup>, μίσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον διαιρεῖται. Ὅπερ εἶναι δεῖξαι.

sub ipsis medium. Et quoniam quo differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadrata ex ΑΔ, ΔΒ superant rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur major ad aliud et aliud punctum dividitur; ad idem solum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

PROPOSITIO XLVII.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται<sup>1</sup>.

Recta rationalis et medium potens ad unum solum punctum dividitur.

Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμεις ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμε-

Sit rationalis et medium potens ipsa ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex

Puisque la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (4. 2), est égale à la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, et que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ surpasse d'une surface rationnelle la somme des quarrés de ΑΔ, et de ΔΒ, car ces surfaces sont rationnelles, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse d'une surface rationnelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une majeure ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVII.

La droite qui peut une rationnelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un point.

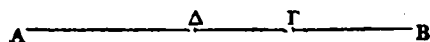
Que la droite ΑΒ, pouvant une rationnelle et une médiale, soit divisée au point Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puis-



## 224 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

νον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δις<sup>2</sup> ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium; rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δις<sup>3</sup> ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ<sup>5</sup>, μίσα ὄντα, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim possibile, dividatur in puncto Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ medium, rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc differunt et ex ΑΔ, ΔΒ quadrata à quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur rationale et medium potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

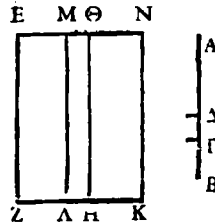
sance, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que les droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant rationel. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (4. 2) est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ à la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ, et que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ surpassera d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; mais ces surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une droite pouvant une rationelle et une médiale ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μί.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται'.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη<sup>2</sup> ἡ  $AB$  διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ὥστε τὰς  $AG$ ,  $GB$  δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὰ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν λέγω ὅτι ἡ  $AB$  κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ προκείμενα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ  $\Delta$ , ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν  $AG$  τῇ  $\Delta B$  μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν  $AG$ , καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ  $EZ$ , καὶ παρατελείσθω παρὰ τὴν  $EZ$  τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  ἴσον τὸ  $EH$ ,

Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

Sit bina media potens  $AB$  divisa in  $\Gamma$ , ita ut  $AG$ ,  $GB$  potentiâ incommensurabiles sint, facientes et compositum ex ipsarum  $AG$ ,  $GB$  quadratis medium, et rectangulum sub  $AG$ ,  $GB$  medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum quadratis composito ex binis rectangulis sub ipsis; dico  $AB$  ad aliud punctum non dividi, faciens proposita.

Si enim possibile, dividatur in  $\Delta$ , ita ut rursus scilicet  $AG$  cum ipsâ  $\Delta B$  non sit eadem, sed major ex hypothesi  $AG$ , et exponatur rationalis  $EZ$ , et applicetur ad  $EZ$  quadratis quidem ex  $AG$ ,  $GB$  æquale  $EH$ , rectangulo autem bis sub

PROPOSITION XLVIII.

La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

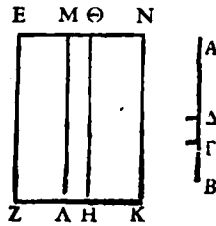
Que la droite  $AB$ , qui peut deux médiales, soit divisée en  $\Gamma$ , de manière que les droites  $AG$ ,  $GB$  soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de  $AG$  et de  $GB$  étant médiale; le rectangle sous  $AG$ ,  $GB$  étant ausssi médial; la somme de leurs quarrés étant incommensurable avec le double rectangle compris sous ces droites; je dis que la droite  $AB$  n'est pas divisée en un autre point, en faisant ce qui est proposé.

Car, qu'elle soit divisée en  $\Delta$ , si cela est possible, de manière que  $AG$  ne soit pas égal à  $\Delta B$ , et supposons que  $AG$  soit la plus grande. Soit la rationnelle  $EZ$ , et appliquons à  $EZ$  un parallélogramme  $EH$  égal à la somme des quarrés de

## 226 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὲ παραβελήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται ῥητὴ ἄρα

ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΚ ; totum igitur ΕΚ æquale est quadrato ex ΑΒ. Rursus et applicetur ad ΕΖ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ æquale ΕΛ ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ reliquo ΜΚ æquale est. Et quoniam medium superponitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ ; medium igitur est et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur ; rationalis igitur est ΘΕ, et



ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί· εἴσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διήρηται,

incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ ; et ΕΗ igitur ipsi ΘΚ incommensurable est ; quare et ΕΗ ipsi ΘΝ incommensurabilis est. Et sunt rationales ; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles ; ergo ΕΝ ex binis nominibus est divisa in Θ. Similiter utique ostendemus et

ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ ; le parallélogramme entier ΕΗ sera égal au carré de ΑΒ (4. 2). De plus, appliquons à ΕΖ le parallélogramme ΕΛ égal à la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ ; le double rectangle restant sous ΑΔ, ΔΒ sera égal au reste ΜΚ (4. 2). Et puisque on a supposé que la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, ΕΗ sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ ; donc ΘΕ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΝ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles ; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance ; le droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. Nous démontrerons semblablement qu'elle est divisée au point Μ ; mais

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 227

καὶ οὐκ ἴστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ τῶν<sup>3</sup> δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρεται, ὅπερ ἴστιν ἀτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπερ ἴδιαι διῆξαι.

ipsam in M dividi, et non est ΕΘ cum ipsa ΜΝ eadem; recta igitur ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur, quod est absurdum; non igitur bina media potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solum punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

### ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

### DEFINITIONES SECUNDÆ.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μῆζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μῆζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ μήκει· εἰ μὲν τὸ μῆζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθαι ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

β. Εὰν δὲ τὸ ἐλάττονον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθαι ἐκ δύο ὀνομάτων δεύτερα.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secundâ.

ΕΘ n'est pas égal avec ΜΝ; la droite de deux noms est donc divisée en un point et encore en un autre point, ce qui est absurde (43. 10); une droite qui peut deux médiales n'est donc pas divisée en un point et encore en un autre point; elle n'est donc divisée qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

### SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du carré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

## 228 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γ'. Εάν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἢ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὲ εἰὰ τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος<sup>1</sup> μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἐαυτῇ μήκει· εἰὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ἢ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε'. Εάν δὲ τὸ ἐλάττω, πέμπτη.

ς'. Εάν δὲ μηδέτερον, ἑκτη<sup>2</sup>.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quàm minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si verò neutrum, sexta.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν<sup>1</sup> τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

### PROPOSITIO XLIX.

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ipsum quidem ΒΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΓΑ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur quædam rationalis Δ, et ipsi Δ

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

### PROPOSITION XLIX.

Trouver la première de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme n'ait pas avec ΓΑ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (30. lem. 1. 10); soit exposée une rationelle Δ, et que ΕΖ soit commen-

τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα  
ἐστὶ καὶ ἡ EZ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ BA ἀριθμὸς  
πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ  
ἀπὸ τῆς ZH. Ο δὲ AB πρὸς τὸν ΑΓ λόγον  
ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  
EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν  
ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; ratio-  
nalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus  
ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH.  
Ipse autem AB ad ΑΓ rationem habet quam  
numerus ad numerum; et quadratum ex EZ  
igitur ad quadratum ex ZH rationem habet  
quam numerus ad numerum; quare commen-

A . . . . . Γ . . . . B

Δ —————

E ————— H  
                    Z

Θ —————

ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ZH. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ  
ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. Καὶ ἐπεὶ ὁ BA  
πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος  
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ  
τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει  
ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-  
μόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει·  
αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-  
μετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. Λέγω  
ὅτι καὶ πρώτη.

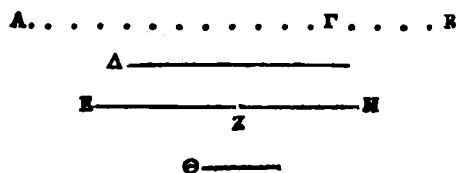
surabile est ex EZ quadratum quadrato ex  
ZH. Atque est rationalis EZ; rationalis igitur  
et ZH. Et quoniam BA ad ΑΓ rationem non  
habet quam quadratus numerus ad quadratum  
numerus; neque quadratum ex EZ igitur ad  
quadratum ex ZH rationem habet quam qua-  
dratus numerus ad quadratum numerum; in-  
commensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitu-  
dine; ergo EZ, ZH rationales sunt potentia solum  
commensurabiles; ex binis igitur nominibus est  
EH. Dico et primam esse.

nable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationelle (déf. 6. 10). Faisons en sorte  
que le nombre BA soit à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH (cor. 6. 6).  
Mais AB a avec ΑΓ la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de EZ a  
donc avec le carré de ZH la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré  
de EZ est donc commensurable avec le carré de ZH (6. 10). Mais EZ est rationel;  
donc ZH est rationel. Et puisque BA n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré  
a avec un nombre carré, le carré de EZ n'aura pas avec le carré de ZH la  
raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc  
incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc  
rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite EH est donc de  
deux noms (37. 10); et je dis qu'elle est la première de deux noms.

## 230 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσθιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῇ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἴσθιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ

Quoniam enim est ut BA numerus ad ipsum AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quàm AG; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ. Et quoniam est ut BA ad AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; convertendo igitur est ut AB ad BG ita



τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἴσθιν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μείζων δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἰαυτῇ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἴσθι πρώτη. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad BG rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH, et commensurabilis EZ ipsi Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est prima. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le nombre BA est à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que AG; le carré de EZ sera plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés des droites ZH, Θ soit égale au carré de EZ. Puisque BA est à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH, par conversion, AB sera à BG comme le carré de EZ est au carré de Θ. Mais AB a avec BG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (g. 10); la puissance de EZ surpasse la puissance de ZH du carré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont rationelles, et EZ est commensurable en longueur avec Δ; la droite EH est donc la première de deux noms (déf. secondes. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 1.

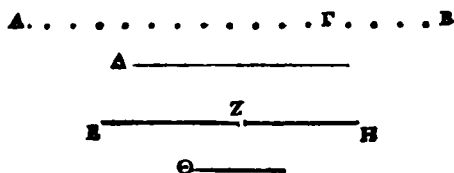
**Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.**

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἰξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ

**PROPOSITIO L.**

**Invenire ex binis nominibus secundam.**

Exponantur duo numeri  $\Delta\Gamma$ ,  $\Gamma\Theta$ , ita ut  $\Delta\Theta$  compositus ex ipsis ad  $\Theta\Gamma$  quodam rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad  $\Delta\Gamma$  verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis  $\Delta$ , et ipsi  $\Delta$  com-



Δ σύμμετρος ἴστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ἡτὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετραγώνois ἀριθμοῖς πρὸς τετραγώνων ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ

mensurabilis sit  $ZH$  longitudine ; rationalis igitur est  $ZH$ . Fiat et ut  $\Gamma A$  numerus ad ipsum  $AB$  ita ex  $HZ$  quadratum ad ipsum ex  $ZE$  ; commensurable igitur est ex  $HZ$  quadratum quadrato ex  $ZE$  ; rationalis igitur est et  $ZE$ . Et quoniam  $\Gamma A$  numerus ad ipsum  $AB$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum , neque igitur ex  $HZ$  quadratum ad ipsum ex

### PROPOSITION L.

**Trouver la seconde de deux noms.**

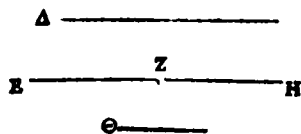
Soient les deux nombres  $AR$ ,  $RB$ , de manière que leur somme  $AB$  ait avec  $BR$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (30 lem. 1. 10), et que  $AB$  n'ait pas avec  $AR$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit la rationnelle  $\Delta$ , et que  $ZH$  soit commensurable en longueur avec  $\Delta$ ; la droite  $ZH$  sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre  $RA$  soit au nombre  $AB$  comme le carré de  $HZ$  est au carré de  $ZE$  (6. cor. 10); le carré de  $HZ$  sera commensurable avec le carré de  $ZE$  (6. 10); la droite  $ZE$  est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque le nombre  $RA$  n'a pas avec le nombre  $AB$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de  $HZ$  n'aura pas non plus avec le carré de  $ZE$  la raison



τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. Δεικνύον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα.

ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est HZ ipsi ZE longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ipsa EH. Ostendendum est et secundam esse.

A . . . . . Γ . . . . . Β



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μείζων δὲ ὁ BA τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. Ἐστω τῇ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἀλλ' ὁ AB πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει·

Quoniam enim invertendo est ut AB numerus ad ipsum ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam ΑΓ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB ad ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Sed AB ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare

qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite HZ est donc incommensurable en longueur avec ZE (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la seconde de deux noms.

Car puisque, par inversion, le nombre AB est à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que ΑΓ, le carré de EZ est plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés des droites ZH, Θ soit égale au carré de EZ; par conversion, AB sera à ΒΓ comme le carré de EZ est au carré de Θ. Mais AB a avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10);

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 233

ὥστε ἡ EZ τῇ ZH μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ EZ, ZH δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἑλάττων ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ<sup>3</sup> τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Ὅπρι ἰδίαι δεῖξαι.

EZ quam ZH plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH potentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus nomen commensurabile est expositæ rationali Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ νά.

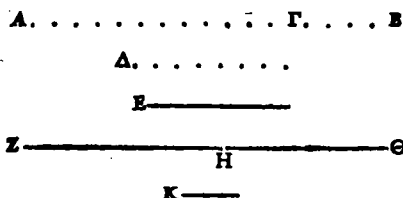
Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκέμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

### PROPOSITIO LI.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum



γωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχει ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δὲ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον

numerum, ad ΑΓ autem rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; exponatur autem quidam et alius non quadratus numerus Δ, et ad utrumque ipsorum

(9. 10); la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du quarré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite EH est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION LI.

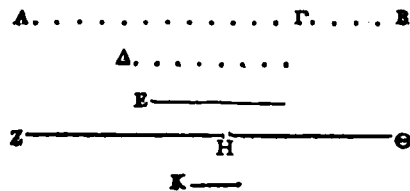
Trouver une troisième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un quarré, et que ce nombre n'ait pas avec chacun des nom.

## 234 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μή ἔχεται ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ ἐκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γιγνέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ Ε<sup>2</sup>· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον

BA, AG rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur quædam rationalis recta E, et fiat ut Δ ad AB ita ex E quadratum ad ipsum ex ZH; commensurable igitur est ex E quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis E; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam Δ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex E quadratum ad ipsum ex



ἔχει ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γιγνέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi ZH longitudine. Fiat autem rursus ut BA numerus ad ipsum AG ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; commensurable igitur est quadratum ex ZH ad ipsum ex HΘ. Rationalis autem ZH; rationalis igitur et HΘ. Et quoniam AB ad AG rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ ratio-

bres BA, AG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit enfin une droite rationnelle E, et faisons en sorte que Δ soit à AB comme le carré de E est au carré de ZH; le carré de E sera commensurable avec le carré de ZH. Mais la droite E est rationnelle; la droite ZH est donc rationnelle (6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de E n'a pas non plus avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, la droite E sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à AG comme le carré de ZH est au carré de HΘ; le carré de ZH sera commensurable avec le carré de HΘ. Mais la droite ZH est rationnelle; la droite HΘ est donc rationnelle. Et puisque AB n'a pas avec AG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de ZH

τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ἑνομάτων ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διῶσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Εστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν<sup>4</sup> ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

nem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΘ ex binis nominibus est. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut autem ΑΒ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint igitur quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad

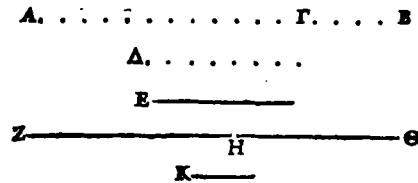
n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une troisième de deux noms.

Car, puisque Δ est à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ, et que ΑΒ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le carré de Ε est au carré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et le carré de Ε n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera plus grand que le carré de ΗΘ. Que la somme des carrés de ΗΘ et de Κ soit égale au carré de ΖΗ; par conversion ΑΒ sera à ΒΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ. Mais ΑΒ a avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

## 236 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν<sup>5</sup> ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον

quadratum numerum; et quadratum ex  $ZH$  igitur ad quadratum ex  $\kappa$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est  $ZH$  ipsi  $\kappa$  longitudine; ergo  $ZH$  quam  $H\Theta$  plus potest quadrato



δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδενίαν αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt  $ZH$ ,  $H\Theta$  rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est ipsi  $E$  longitudine; ergo  $Z\Theta$  ex binis nominibus est tertiâ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

### PROPOSITIO LII.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Invenire ex hincis nominibus quartam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ρητὴ ἡ Δ, καὶ

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad ΒΓ rationem non habeat, neque quidem ad ΑΓ, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponentur rationalis Δ, et ipsi Δ

quarré; le quarré de  $ZH$  a donc avec le quarré de  $\kappa$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite  $ZH$  est donc commensurable en longueur avec  $\kappa$ ; la puissance de  $ZH$  surpasse donc la puissance de  $H\Theta$  du quarré d'une droite commensurable avec  $ZH$ . Mais les droites  $ZH$ ,  $H\Theta$  sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec  $E$ ; la droite  $Z\Theta$  est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

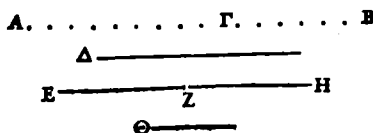
### PROPOSITION LII.

Trouver une quatrième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec ΒΓ ni avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationelle Δ,

τῇ Δ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς<sup>3</sup> πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad ipsum ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; commensurabile igitur est ex EZ quadratum quadrato ex ZH; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam BA ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare EH ex binis nominibus est. Dico et quartam esse.



Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Εστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ

Quoniam enim est ut BA ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam ΑΓ; majus igitur ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur ut

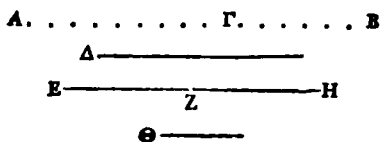
et que la droite EZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre BA soit à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH; le carré de EZ sera commensurable avec le carré de ZH; la droite ZH est donc rationnelle. Et puisque BA n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de EZ n'a pas non plus avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec nombre carré, la droite EZ sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une quatrième de deux noms.

Car, puisque BA est à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que ΑΓ, le carré de EZ est plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés de ZH et de Θ soit égale au carré de EZ; par con-

## 238 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς<sup>5</sup> πρὸς τε-

AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



τράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν<sup>6</sup>. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον συμμέτροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Οπρὶν ἴδῃ ποιῆται.

tum numerum; neque igitur ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΕΖ ipsi Θ longitudine; ergo ΕΖ quàm ΖΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΕΖ, ΖΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΕΖ ipsi Δ commensurabilis est longitudine; ergo ΕΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat facere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν

### PROPOSITIO LIII.

Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat

version, le nombre AB sera à ΒΓ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de Θ. Mais AB n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΕΖ n'a donc pas avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de ΕΖ surpasse donc la puissance de ΖΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΕΖ. Mais les droites ΕΖ, ΖΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et ΕΖ est commensurable en longueur avec Δ; la droite ΕΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait faire.

### PROPOSITION LIII.

Trouver une cinquième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que AB n'ait pas avec chacun de ces

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ τις εὐθεΐα<sup>1</sup> ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ HZ<sup>2</sup>. ῥητὴ ἄρα ἡ HZ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ῥητὴ ἄρα ἴστί καὶ ἡ ZE. Καὶ ἐπεὶ ὁ<sup>3</sup> ΓΑ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἄρα<sup>4</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα<sup>5</sup> ὀνομάτων ἴστιν ἡ EH. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη.

quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta Δ, et ipsi Δ commensurabilis sit longitudine ipsa HZ; rationalis igitur HZ. Et fiat ut ΓΑ ad AB ita ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE; rationalis igitur est et ZE. Et quoniam ΓΑ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentia solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est EH. Dico et quintam esse.

A. . . . . Γ. . . . B

Δ —————

E ————— Z ————— H

Θ —————

Ἐπεὶ γάρ ἴστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ἀνάπαλιν ἄρα<sup>6</sup> ὡς ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

Quoniam enim est ut ΓΑ ad AB ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ZE; invertendo igitur ut BA ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; majus igitur ex EZ quadratum quadrato

nombres la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit une droite rationelle Δ, et que HZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite HZ sera rationelle. Faisons en sorte que ΓΑ soit à AB comme le quarré de HZ est au quarré de ZE; la droite ZE sera rationelle. Et puisque ΓΑ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de HZ n'a pas non plus avec le quarré de ZE la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, les droites EZ, ZH seront des rationelles commensurables en puissance seulement (9. 10); EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une cinquième de deux noms.

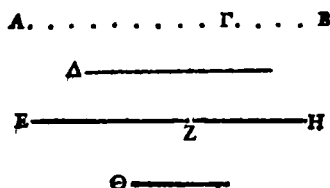
Car puisque ΓΑ est à AB comme le quarré de ZH est au quarré de ZE, par inversion, BA est à ΑΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH; le quarré de EZ



240 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστὼ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἰστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ

ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex EZ quadratum ad



ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἰστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἢ ΕΖ τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare EZ quàm ΖΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΕΖ, ΖΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΖΗ minus nomen commensurable est expositæ rationali Δ longitudine; ergo ΕΗ ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat facere.

est donc plus grand que le carré de ΖΗ. Que la somme des carrés de ΖΗ et de Θ soit égale au carré de ΕΖ; par conversion, le nombre ΑΒ sera au nombre ΒΓ comme le carré de ΕΖ est au carré de Θ. Mais ΑΒ n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΕΖ n'a donc pas avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de ΕΖ surpasse donc la puissance de ΖΗ du carré d'une droite incommensurable avec ΕΖ. Mais les droites ΕΖ, ΖΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ΖΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite ΕΗ est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

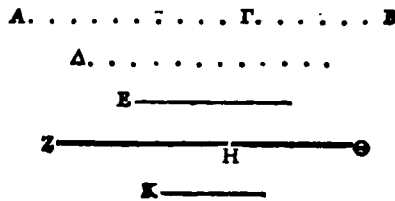
PROPOSITIO LIV.

Εὐρίν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἱκτὴν.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Ἐκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν, μήτε' πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκείσθω τις ῥητὴ εὐθεία ἡ Ε,

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; sit autem et alius numerus Δ non quadratus existens, et non ad utrumque ipsorum ΒΑ, ΑΓ rationem habens quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur



καὶ γιγνέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ<sup>2</sup>. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

quædam rationalis recta Ε, et fiat ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurable igitur est ex Ε quadratum quadrato ex ΖΗ. Atque est rationalis Ε; rationalis igitur et ΖΗ. Et quoniam non habet Δ ad ΑΒ rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum,

PROPOSITION LIV.

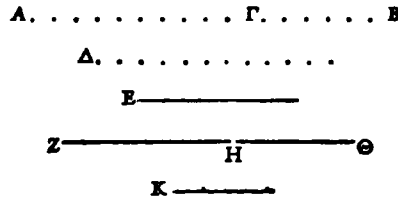
Trouver la sixième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec chacun de ces nombres la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un carré, et qui n'ait pas avec chacun des nombres ΒΑ, ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit aussi la droite rationnelle Ε; et faisons en sorte que Δ soit à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ; le carré de Ε sera commensurable avec le carré de ΖΗ. Mais la droite Ε est rationnelle; la droite ΖΗ est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

242 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονίτω δὴ πάλιν ὥς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ

neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΖΗ longitudine. Fiat igitur rursus ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Commensurabile igitur ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum



ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἵπαι ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ. Δεικνύον δὲ ὅτι καὶ ἔκτε.

ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ; rationalis igitur ΗΘ. Et quoniam ΒΑ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΖΗ igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΖΘ. Ostendendum est et sextam esse.

quarré, le quarré de Ε n'aura pas avec le quarré de ΖΗ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, faisons en sorte que ΒΑ soit à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; le quarré de ΖΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΘ. Mais le quarré de ΖΗ est rationel; le quarré de ΗΘ est donc rationel; la droite ΗΘ est donc rationnelle. Et puisque ΒΑ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΖΗ n'aura pas non plus avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la sixième de deux noms.

Επὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $AB$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $E$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$ , ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ  $BA$  πρὸς τὸν  $AG$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$ . διῶσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $AG$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $E$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$ . Ο δὲ  $\Delta$  πρὸς τὸν  $AG$  λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $E$  ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$  λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ  $E$  τῇ  $H\Theta$  μήκει. Εδείχθη δὲ καὶ τῇ  $ZH$  ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν  $ZH$ ,  $H\Theta$  ἀσύμμετρος ἔστι τῇ  $E$  μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ  $BA$  πρὸς τὸν  $AG$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$ · μίζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $Z\Theta$  τοῦ ἀπὸ τῆς  $H\Theta$ . Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς  $ZH$  ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν  $H\Theta$ ,  $K$ · ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ  $AB$  πρὸς τὸν  $B\Gamma$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $K$ . Ο δὲ  $AB$  πρὸς τὸν  $B\Gamma$  λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $K$  λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

Quoniam enim est ut  $\Delta$  ad  $AB$  ita ex  $E$  quadratum ad ipsum ex  $ZH$ , est autem et ut  $BA$  ad  $AG$  ita ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $H\Theta$ ; ex æquo igitur est ut  $\Delta$  ad  $AG$  ita ex  $E$  quadratum ad ipsum ex  $H\Theta$ . Ipse autem  $\Delta$  ad  $AG$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex  $E$  igitur ad quadratum ex  $H\Theta$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est  $E$  ipsi  $H\Theta$  longitudine. Ostensa est autem et ipsi  $ZH$  incommensurabilis; utraque igitur ipsarum  $ZH$ ,  $H\Theta$  incommensurabilis est ipsi  $E$  longitudine. Et quoniam est ut  $BA$  ad  $AG$  ita ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $H\Theta$ ; majus igitur ex  $Z\Theta$  quadratum quadrato ex  $H\Theta$ . Sint itaque quadrato ex  $ZH$  æqualia quadrata ex  $H\Theta$ ,  $K$ ; convertendo igitur ut  $AB$  ad  $B\Gamma$  ita ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $K$ . Ipse autem  $AB$  ad  $B\Gamma$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare neque ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $K$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum nume-

Car puisque  $\Delta$  est à  $AB$  comme le quarré de  $E$  est au quarré de  $ZH$ , et que  $BA$  est à  $AG$  comme le quarré de  $ZH$  est au quarré de  $H\Theta$ ; par égalité,  $\Delta$  sera à  $AG$  comme le quarré de  $E$  est au quarré de  $H\Theta$ . Mais  $\Delta$  n'a pas avec  $AG$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de  $E$  n'a donc pas avec le quarré de  $H\Theta$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite  $E$  est donc incommensurable en longueur avec  $H\Theta$  (9.10). Mais on a démontré qu'elle est incommensurable avec  $ZH$ ; chacune des droites  $ZH$ ,  $H\Theta$  est donc incommensurable en longueur avec  $E$ . Et puisque  $BA$  est à  $AG$  comme le quarré de  $ZH$  est au quarré de  $H\Theta$ , le quarré de  $Z\Theta$  sera plus grand que le quarré de  $H\Theta$ . Que la somme des quarrés de  $H\Theta$  et de  $K$  soit égale au quarré de  $ZH$ ; par conversion,  $AB$  sera à  $B\Gamma$  comme le quarré de  $ZH$  est au quarré de  $K$ . Mais  $AB$  n'a pas avec  $B\Gamma$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de  $ZH$  n'a donc pas avec le quarré de  $K$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

## 244 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ  $ZH$  τῇ  $K$  μήκει· ἡ  $ZH$  ἄρα τῆς  $H\Theta$  μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἰαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ  $ZH$ ,  $H\Theta$  ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδεντέρα αὐτῶν<sup>8</sup> σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ  $E$ · ἡ  $Z\Theta$  ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτη. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

rum; incommensurabilis igitur est  $ZH$  ipsi  $K$  longitudine; ergo  $ZH$  quam  $H\Theta$  plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt  $ZH$ ,  $H\Theta$  rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est longitudine expositæ rationali  $E$ ; ergo  $Z\Theta$  ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat facere.

### ΛΗΜΜΑ.

Εστω δύο τετράγωνα τὰ  $AB$ ,  $BΓ$ , καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν  $ΔB$  τῇ  $BE$ · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $ZB$  τῇ  $BH$ . Καὶ συμπληρώσθω τὸ  $ΑΓ$  παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ  $ΑΓ$ , καὶ ὅτι τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ  $ΔH$ , καὶ ἔτι τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ  $ΔΓ$ .

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν  $ΔB$  τῇ  $BZ$ , ἡ δὲ  $BE$  τῇ  $BH$ · ὅλη ἄρα ἡ  $ΔE$  ὅλη τῇ  $ZH$  ἐστὶν ἴση. Αλλ' ἡ μὲν  $ΔE$  ἑκατέρα τῶν  $ΑΘ$ ,  $KΓ$  ἐστὶν

### LEMMA.

Sint duo quadrata  $AB$ ,  $BΓ$ , et ponantur ita ut in directum sit  $ΔB$  ipsi  $BE$ ; in directum igitur est et  $ZB$  ipsi  $BH$ . Et compleatur  $ΑΓ$  parallelogrammum; dico quadratum esse  $ΑΓ$ , et ipsorum  $AB$ ,  $BΓ$  medium proportionale esse  $ΔH$ , et adhuc ipsorum  $ΑΓ$ ,  $ΓB$  medium proportionale esse  $ΔΓ$ .

Quoniam enim æqualis est quidem  $ΔB$  ipsi  $BZ$ , ipsa verò  $BE$  ipsi  $BH$ ; tota igitur  $ΔE$  toti  $ZH$  est æqualis. Sed quidem  $ΔE$  utrique

la droite  $ZH$  est donc incommensurable en longueur avec  $K$ ; la puissance de  $ZH$  surpasse donc la puissance de  $H\Theta$  du carré d'une droite incommensurable avec  $ZH$ ; mais les droites  $ZH$ ,  $H\Theta$  sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée  $E$ ; la droite  $Z\Theta$  est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait faire.

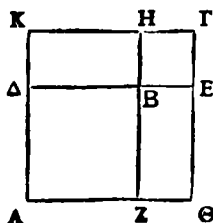
### LEMME.

Soient les deux carrés  $AB$ ,  $BΓ$ ; plaçons-les de manière que la droite  $ΔB$  soit dans la direction de  $BE$ ; la droite  $ZB$  sera dans la direction de  $BH$ . Achévon le parallélogramme  $ΑΓ$ ; je dis que  $ΑΓ$  est un carré, que  $ΔH$  est moyen proportionnel entre  $AB$  et  $BΓ$ , et que  $ΔΓ$  est aussi moyen proportionnel entre  $ΑΓ$  et  $ΓB$ .

Puisque la droite  $ΔB$  est égale à  $BZ$ , et que  $BE$  est égale à  $BH$ , la droite entière  $ΔE$  sera égale à la droite entière  $ZH$ . Mais la droite  $ΔE$  est égale à chacune des

ἴση· ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση·  
καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρα τῶν  
ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ  
παραλληλόγραμμον. Ἐστὶ δὲ καὶ ῥηθόγωνιον·  
τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν  
ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν  
ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως

ipsarum ΑΘ, ΚΓ est æqualis; ipsa verò ΖΗ utrique  
ipsarum ΑΚ, ΘΓ est æqualis; et utraque igitur  
ipsarum ΑΘ, ΚΓ utrique ipsarum ΑΚ, ΘΓ  
est æqualis; æquilaterum igitur est ΑΓ paralle-  
logrammum. Est autem et rectangulum; qua-  
dratum igitur est ΑΓ. Et quoniam est ut ΖΒ ad  
ΒΗ ita ΔΒ ad ΒΕ, sed ut quidem ΖΒ ad ΒΗ



τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ  
οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ  
πρὸς τὸ ΔΗ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν  
ΑΒ, ΒΓ ἄρα μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ. Λέγω δὲ  
ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίσην ἀνάλογόν ἐστι<sup>3</sup> τὸ ΔΓ.  
Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ  
ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ·  
καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς  
τὴν ΓΗ<sup>5</sup>. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως τὸ  
ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ

ita ΑΒ ad ΔΗ, ut verò ΔΒ ad ΒΕ ita ΔΗ  
ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΗ ita ΔΗ ad  
ΒΓ; ipsorum ΑΒ, ΒΓ igitur medium propor-  
tionale est ΔΗ. Dico et ipsorum ΑΓ, ΓΒ me-  
dium proportionale esse ΔΓ. Quoniam enim  
est ut ΑΔ ad ΔΚ ita ΚΗ ad ΗΓ, æqualis enim est  
utraque utrique; et componendo ut ΑΚ ad ΚΔ  
ita ΚΓ ad ΓΗ. Sed ut quidem ΑΚ ad ΚΔ ita ΑΓ  
ad ΓΔ, ut verò ΚΓ ad ΓΗ ita ΔΓ ad ΓΒ; et ut

droites ΑΘ, ΚΓ, et la droite ΖΗ est aussi égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; chacune des droites ΑΘ, ΚΓ est donc égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; donc ΑΓ est un parallélogramme équilatéral. Mais il est aussi rectangle; donc ΑΓ est un carré. Et puisque ΖΒ est à ΒΗ comme ΔΒ est à ΒΕ, que ΖΒ est à ΒΗ comme ΑΒ est à ΔΗ (1. 6), et que ΔΒ est à ΒΕ comme ΔΗ est à ΒΓ, le carré ΑΒ est à ΔΗ comme ΔΗ est à ΒΓ; donc ΔΗ est moyen proportionnel entre ΑΒ et ΒΓ. Je dis aussi que ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Car puisque ΑΔ est à ΔΚ comme ΚΗ est à ΗΓ, à cause que chacune des droites ΑΔ, ΔΚ est égale à chacune des droites ΚΗ, ΗΓ, par addition, ΑΚ sera à ΚΔ comme ΚΓ est à ΓΗ. Mais ΑΚ est à ΚΔ comme ΑΓ est à ΓΔ (1. 6), et ΚΓ est à ΓΗ comme ΔΓ est à ΓΒ; donc

## 246 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΓ πρὸς τὴν<sup>6</sup> ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μείσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. Οπερ προύκειτο δεῖξαι.

igitur ΑΓ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΒΓ; ipsorum ΑΓ, ΓΒ igitur medium proportionale est ΔΓ. Quod proponebatur demonstrandum.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ νί.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γάρ τὸ ΑΒΓΔ' περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ<sup>2</sup> πρώτη ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερόν δὲ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου αὐτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus primâ ΑΔ; dico rectam quæ potest spatium ΑΓ irrationalem esse, quæ appellatur ex binis nominibus.

Quoniam enim ex binis nominibus est prima ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, et sit majus nomen ΑΕ. Evidens utique est ΑΕ, ΕΔ rationales esse potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΑΕ commensura-

ΑΓ est à ΔΓ comme ΔΓ est à ΒΓ; donc ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Ce qu'on s'était proposé de démontrer.

### PROPOSITION LV.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la droite ΑΔ première de deux noms; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Puisque la droite ΑΔ est première de deux noms; qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom. Il est évident que les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, que la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et que ΑΕ sera commensurable en longueur avec la rationnelle

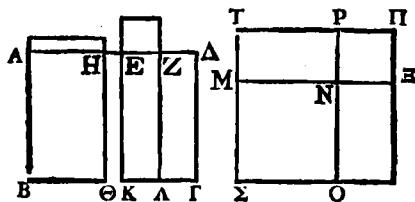




## 248 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

NO. Καὶ συμπληρώσω τὸ ΣΠ παραλληλό-  
 γραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ  
 ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ  
 τῆς ΕΖ· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ  
 ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ<sup>10</sup> καὶ ἄς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ  
 οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὴν ΚΗ<sup>11</sup>. τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα  
 μίσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ  
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ<sup>12</sup>, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ

NO. Et compleatur ΣΠ parallelogrammum; qua-  
 dratum igitur est ΣΠ. Et quoniam rectangulum  
 sub ΑΗ, ΗΕ æquale est quadrato ex ΕΖ; est  
 igitur ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ; et ut igitur  
 ΑΘ ad ΕΛ ita ΕΛ ad ΚΗ; ipsorum ΑΘ, ΗΚ  
 igitur medium proportionale est ΕΛ. Sed qui-  
 dem ΑΘ æquale est ipsi ΣΝ, ipsum verò ΗΚ



ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μίσον ἀνάλογόν ἐστι  
 τὸ ΕΛ. Ἐστὶ δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μίσον  
 ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ  
 τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστὶν<sup>13</sup>. Ἐστὶ δὲ  
 καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα  
 τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ  
 ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἢ  
 ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.  
 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμ-  
 μετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ.

æquale est ipsi ΝΠ; ipsorum ΣΝ, ΝΠ igitur  
 medium proportionale est ΕΛ. Est autem eo-  
 rundem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale et  
 ΜΡ; æquale igitur est ΕΛ ipsi ΜΡ; quare et  
 ipsi ΟΞ æquale est. Sunt autem et ΑΘ, ΗΚ ipsis  
 ΣΝ, ΝΠ æqualia; totum igitur ΑΓ æquale est  
 toti ΣΠ, hoc est quadrato ex ΜΞ; ipsum ΑΓ  
 igitur potest ipsa ΜΞ; dico ΜΞ ex binis nomi-  
 nibus esse. Quoniam enim commensurabilis est  
 ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique

de NO (14. 1). Achevons le parallélogramme ΣΠ, le parallélogramme ΣΠ sera un  
 carré (lem. précéd.). Puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΕ est égal au carré de ΕΖ,  
 la droite ΑΗ sera à ΕΖ comme ΕΖ est à ΕΗ (17. 6); donc ΑΘ est à ΕΛ comme ΕΛ est  
 à ΚΗ (1. 6); donc ΕΛ est moyen proportionnel entre ΑΘ et ΗΚ. Mais ΑΘ est égal  
 à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; donc ΕΛ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ. Mais  
 ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ (lem. précéd.); donc ΕΛ est égal  
 à ΜΡ, et par conséquent à ΟΞ (4. 3. 1). Mais la somme des rectangles  
 ΑΘ, ΗΚ est égale à la somme des carrés ΣΝ, ΝΠ; donc ΑΓ tout entier est  
 égal à ΣΠ tout entier, c'est-à-dire au carré de ΜΞ; la droite ΜΞ peut donc le  
 parallélogramme ΑΓ; je dis que ΜΞ est une droite de deux noms. Car puisque ΑΗ  
 est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des

Υπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει<sup>14</sup>. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ<sup>15</sup> καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτίστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ<sup>16</sup>. ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν<sup>17</sup>. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλ' ὥς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ<sup>18</sup>. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμ-

ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Supponitur autem et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis longitudine; et ΑΗ, ΗΕ igitur ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. Atque est rationalis ΑΒ; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; rationale igitur est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, et est commensurabile ΑΘ ipsi ΗΚ. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ æquale est, ipsum verò ΗΚ ipsi ΝΠ; et ΣΝ, ΝΠ igitur, hoc est quadrata ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, sed quidem ΑΕ ipsi ΑΗ est commensurabilis, ipsa verò ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis; incommensurabilis igitur et ΑΗ ipsi ΕΖ; quare et ΑΘ ipsi ΕΛ incommensurabile est. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ est æquale, ipsum verò ΕΛ ipsi ΜΡ; et ipsum ΣΝ igitur ipsi ΜΡ incommensurabile est. Sed ut ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ; incommensurabilis igitur est ΟΝ ipsi ΝΡ. Æqualis utique quidem ΟΝ ipsi ΝΜ, ipsa verò ΝΡ ipsi ΝΞ; incommensurabilis igitur est ΜΝ ipsi ΝΞ. Atque est quadratum ex ΜΝ commensurabile

droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais on a supposé que ΑΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΕ sont donc commensurables avec ΑΒ (12. 10). Mais la droite ΑΒ est rationnelle; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationnelle; chacun des parallélogrammes ΑΘ, ΗΚ est donc rationnel (20. 10); ΑΘ est donc commensurable avec ΗΚ (10. 10). Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; les carrés ΣΝ, ΝΠ, c'est-à-dire les carrés des droites ΜΝ, ΝΞ, sont donc rationnels et commensurables. Et puisque ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ (37. 10), que ΑΕ est commensurable avec ΑΗ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΑΗ sera incommensurable avec ΕΖ; donc ΑΘ est incommensurable avec ΕΛ. Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΕΛ égal à ΜΡ; donc ΣΝ est incommensurable avec ΜΡ. Mais ΣΝ est à ΜΡ comme ΟΝ est à ΝΡ; donc ΟΝ est incommensurable avec ΝΡ (10. 10). Mais la droite ΟΝ est égale à ΝΜ, et ΝΡ est égal à ΝΞ; donc ΜΝ est incommensurable avec ΝΞ. Mais le carré de ΜΝ est commensurable avec le carré de ΝΞ, et ils sont rationnels l'un et l'autre;

## 250 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μτρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.

quadrato ex ΝΞ, et rationale utrumque; ergo ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΜΞ ex binis nominibus est, et potest ipsum ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΝΣ'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου

### PROPOSITIO LVI.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

Contineatur enim spatium ΑΒΓΔ sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus secundâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ex binis nominibus secunda est ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ

les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΜΞ est donc une droite de deux noms (37. 10), et elle peut le parallélogramme ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION LVI.

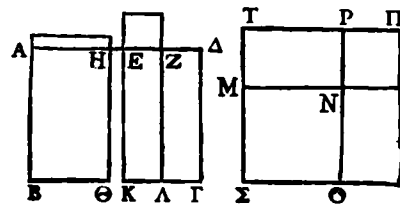
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la seconde de deux noms ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est la première de deux médiales.

Car puisque ΑΔ est la seconde de deux noms, divisons cette droite en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et

ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἑλάττωον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρὸν<sup>2</sup> ἴσθι τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρά τὴν ΑΕ παραβελύσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνιστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ

sibi commensurabili, et minus nomen ΕΔ commensurabile est ipsi ΑΒ longitudine. Secetur ipsa ΕΔ bifariam in Ζ, et quadrato ex ΕΖ æquale ad ΑΕ applicetur deficiens figurâ quadratâ, parallelogrammo sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. Et per puncta Η, Ε, Ζ parallelæ ducantur ipsis ΑΒ, ΔΓ ipsæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, et parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum constituatur ΣΝ, ipsi verò ΗΚ æquale



ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἴσθι<sup>3</sup> καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὲ ἐκ τοῦ προειρημένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἴσθι τῶν<sup>4</sup> ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ· δεικνύον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἴσθι πρώτη.

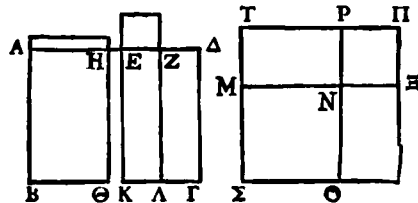
quadratum ΝΠ, et ponatur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΡΝ ipsi ΝΟ. Et compleatur ΣΠ quadratum; evidens utique est ex iis demonstratis, ipsum ΜΡ medium proportionale esse ipsorum ΣΝ, ΝΠ, et æquale ipsi ΕΛ, et ΑΓ spatium posse ipsam ΜΞ; ostendendum est et ΜΞ ex binis mediis esse

le plus petit nom ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 2. 10). Coupons ΕΔ en deux parties égales en Ζ, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΖ, soit défailant d'une figure quarrée; que ce soit le parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec ΗΕ (18. 10). Par les points Η, Ε, Ζ menons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles aux droites ΑΒ, ΔΓ; faisons le quarré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ; le quarré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et plaçons ΜΝ dans la direction de ΝΞ; la droite ΡΝ sera dans la direction de ΝΟ. Achevons le quarré ΣΠ; il est évident, d'après ce qui a été démontré (5<sup>e</sup>. 10), que le rectangle ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ; que ΜΡ est égal à ΕΛ, et que ΜΞ peut la surface ΑΓ; il faut démontrer que ΜΞ est la première de deux médiales. Car puisque ΑΕ est incommensurable en

252 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ<sup>5</sup> ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ<sup>6</sup> σύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρος ἔστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἔστι ρητὴ ἡ ΑΕ· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μείζον ἔστιν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μείζον ἔστι καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-

primam. Quoniam enim incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, commensurabilis autem ΕΔ ipsi ΑΒ; incommensurabilis igitur ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Atque est rationalis ΑΕ; rationalis igitur et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ, commensurabilis autem ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ; ergo ΑΗ, ΗΕ incommensurabiles sunt ipsi ΑΒ longitudine; ergo ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare medium est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ; quare utrumque ipsorum ΣΝ, ΝΠ medium est; et ΜΝ,



μετρος ἔστιν<sup>8</sup> ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρον ἔστι καὶ τὸ ΑΘ τῇ<sup>9</sup> ΗΚ, τοῦτί ἐστι τὸ ΣΝ τῇ ΝΠ, τοῦτί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῇ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ<sup>10</sup>.

ΝΞ igitur mediæ sunt. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine, commensurable est et ΑΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; quare potentiâ

longueur avec ΕΔ (37. 10), et que ΕΔ est commensurable avec ΑΒ, la droite ΑΕ sera incommensurable en longueur avec ΑΒ (14. 10). Et puisque ΑΗ est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais ΑΕ est rationel; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationnelle. Et puisque ΑΕ est incommensurable avec ΑΒ, et que ΑΕ est commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ, les droites ΑΗ, ΗΕ seront incommensurables en longueur avec ΑΒ; les droites ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; chacun des rectangles ΑΘ, ΗΚ est donc médial (22. 10); chacun des carrés ΣΝ, ΝΠ est donc médial; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc médiales. Et puisque ΑΗ est commensurable en longueur avec ΗΕ, le rectangle ΑΘ sera commensurable avec le rectangle ΗΚ (1. 6, et 10. 10), c'est-à-dire le carré ΣΝ avec le carré ΝΠ; c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ; les droites ΜΝ,

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος<sup>11</sup>· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτίστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτίστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτίστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει. Εδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μίσαι οὔσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Επεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ<sup>12</sup> καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν ῥητὸν ἄρα καὶ<sup>13</sup> τὸ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Εὰν δὲ δύο μίσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ ἄρα ΜΞ<sup>14</sup> ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sunt commensurabiles MN, NX. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, sed quidem AE commensurabilis est ipsi AH, ipsa verò AE ipsi EZ commensurabilis; incommensurabilis igitur AH ipsi EZ; quare et AO ipsi EL incommensurable est, hoc est SN ipsi MP, hoc est ON ipsi NP, hoc est MN ipsi NX incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem MN, NX et mediæ existentes et potentiâ commensurabiles; ergo MN, NX mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et eas rationale continere. Quoniam enim DE supponitur utrique ipsarum AB, EZ commensurabilis; commensurabilis igitur est et ZE ipsi EK. Et rationalis utraque ipsarum; rationale igitur et EL, hoc est MP, sed MP est rectangulum sub MN, NX. Si verò duæ mediæ potentiâ commensurabiles componantur rationale continentes, tota irrationalis est, appellatur autem ex binis mediis prima; ergo MX ex binis mediis est prima. Quod oportebat ostendere.

NX sont donc commensurables en puissance. Et puisque AE est incommensurable en longueur avec ED, que AE est commensurable avec AH, et que DE l'est avec EZ, la droite AH sera incommensurable avec EZ; le rectangle AO est donc incommensurable avec le rectangle EL, c'est-à-dire le carré SN avec MP, c'est-à-dire la droite ON avec la droite NP, c'est-à-dire que la droite MN est incommensurable en longueur avec NX (1. 6). Mais on a démontré que les droites MN, NX sont et médiales et commensurables en puissance; les droites MN, NX sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis enfin qu'elles comprennent une surface rationnelle. Car puisque DE est supposé commensurable avec chacune des droites AB, EZ, la droite ZE sera commensurable avec EK. Mais chacune d'elles est rationnelle; le rectangle EL est donc rationnel (20. 10), c'est-à-dire le rectangle MP qui est compris sous MN, NX. Mais si l'on ajoute deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme est irrationnelle, et s'appelle première de deux médiales (38. 10); donc MX est une première de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμὴν ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μείζον ἴστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμὴν ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Κατισκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἴσθι τρίτη ἢ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Ομοίως δὲ τοῖς πρότερον διειγμένοις δείξομεν ὅτι ἢ ΜΕ ἴσθι

## PROPOSITIO LVII.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus tertiâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ ΑΓ spatium potest, irrationalem esse, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis nominibus est tertiâ ΑΔ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΑΕ, ΕΔ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine. Congruenter utique suprâ ostensis ostendemus

## PROPOSITION LVII.

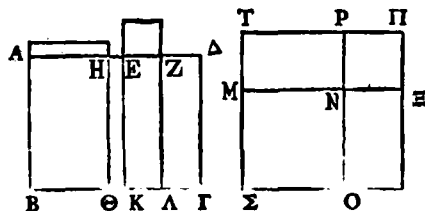
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la troisième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite ΑΔ est la troisième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la droite ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et de plus aucune des droites ΑΕ, ΕΔ ne sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 3. 10). Nous démontrerons de la même

ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυνάμει, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ  
μέσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι ὥστε ἡ ΜΞ  
ἐκ δύο μέσων ἐστὶ<sup>3</sup>. Διεκτίον δὲ ὅτι καὶ δευ-  
τέρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ  
ΑΒ μήκει, τοῦτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ

rectam ΜΞ esse quæ spatium ΑΓ potest; et ΜΝ,  
ΝΞ medias esse potentiâ solùm commensura-  
biles; quare ΜΞ ex binis mediis est. Osten-  
dendum est et secundam esse. Et quoniam  
incommensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine,  
hoc est ipsi ΕΚ, commensurabilis autem ΔΕ



ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ  
ΕΚ μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα  
ρηταί εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα  
ἐστὶ<sup>5</sup> τὸ ΕΛ, τοῦτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται  
ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ  
τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ<sup>7</sup>  
δεύτερα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsi ΕΖ; incommensurabilis igitur est ΕΖ ipsi  
ΕΚ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΖΕ, ΕΚ  
igitur rationales sunt potentiâ solùm commensu-  
rabiles; medium igitur est ΕΛ, hoc est ΜΡ, et  
continetur sub ΜΝ, ΝΞ. Medium igitur est rec-  
tangelum sub ΜΝ, ΝΞ; ergo ΜΞ ex binis mediis  
est secunda. Quod oportebat ostendere.

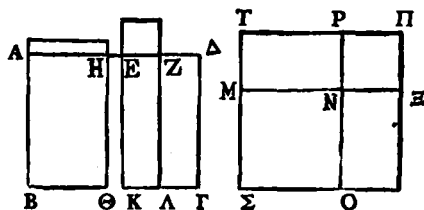
manière que nous l'avons déjà fait que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ (3. 10), et que  
les droites ΜΝ, ΝΞ sont des médiales commensurables en puissance seulement; la  
droite ΜΞ est donc une droite de deux médiales. Il faut démontrer qu'elle en  
est la seconde. Puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-  
à-dire avec ΕΚ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera incom-  
mensurable en longueur avec ΕΚ. Mais ces droites sont rationelles; les droites  
ΖΕ, ΕΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rec-  
tangle ΕΛ, c'est-à-dire le rectangle ΜΡ, est donc médial; mais il est compris sous  
ΜΝ, ΝΞ; le rectangle compris sous ΜΝ, ΝΞ est donc médial (39. 10); la droite  
ΜΞ est donc une seconde de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ νή.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὡς μείζων ἴστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζων δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὲ ἡ ΔΕ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus quartâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, irrationalem esse, quæ appellatur major.

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus est quarta, ipsæ ΑΕ, ΕΔ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quam ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis est longitudine. Secetur utique ΔΕ bifariâ

## PROPOSITION LVIII.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure.

Que la surface ΑΓ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ, et sous la quatrième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée majeure.

Car, puisque ΑΔ est la quatrième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, et de plus ΑΕ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 4. 10). Coupons ΔΕ en

δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβέβλησθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Ηχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυνάμει ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικνύον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. Ἐπεὶ<sup>3</sup> ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἴστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ<sup>5</sup> καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν<sup>6</sup> ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρος ἐστὶ τῇ<sup>7</sup> ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ, ΕΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΔΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται

in Z, et quadrato ex EZ æquale ad AE applicetur parallelogrammum sub AH, HE; incommensurabilis igitur est AH ipsi HE longitudine. Ducantur ipsi AB parallelæ HΘ, ΕΚ, ΖΛ, et reliqua eadem quæ suprâ fiant; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est utique ΜΞ irrationalem esse, quæ vocatur maior. Quoniam incommensurabilis est AH ipsi EH longitudine, incommensurable est et ΑΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam commensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine, rationale est ΑΚ, atque est æquale quadratis ex ΜΝ, ΝΞ; rationale igitur est et compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam incommensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ commensurabilis est ipsi ΕΖ; incommensurabilis igitur ΕΖ ipsi ΕΚ longitudine; ipsæ ΚΕ, ΕΖ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; medium igitur ΑΕ, hoc est ΜΡ, et continetur sub ΜΝ, ΝΞ.

deux parties égales en Z, et appliquons à AE un parallélogramme sous AH, HE qui soit égal au carré de EZ; la droite AH sera incommensurable en longueur avec HE (19. 10). Conduisons les droites HΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles à AB, et faisons le reste comme auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que ΜΞ est l'irrationnelle appelée majeure. Puisque AH est incommensurable en longueur avec EH, la surface ΑΘ sera incommensurable avec ΗΚ, c'est-à-dire le carré ΣΝ avec le carré ΝΠ (1. 6, et 10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque AE est commensurable en longueur avec AB, le rectangle ΑΚ sera rationel; mais il est égal à la somme des carrés des droites ΜΝ, ΝΞ; la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ est donc rationnelle. Et puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec AB, c'est-à-dire avec ΕΚ; et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ; la droite ΕΖ sera incommensurable en longueur avec ΕΚ; les droites ΚΕ, ΕΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΑΕ, c'est-à-dire ΜΡ, est donc médial (22. 10);

## 258 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ τῶν  $MN$ ,  $NΞ$  μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $MN$ ,  $NΞ$ , καὶ ῥητὸν τὸ συγχείμενον<sup>8</sup> ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $MN$ ,  $NΞ$ , καὶ εἶσιν ἀσύμμετροι αἱ  $MN$ ,  $NΞ$  δυνάμει. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἢ ὅλη ἀλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων· ἡ  $MΞ$  ἄρα ἀλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ  $ΑΓ$  χωρίον. Οὐκ ἴδιαι δείξαι.

medium igitur est rectangulum sub  $MN$ ,  $NΞ$ , et rationale compositum ex quadratis ipsarum  $MN$ ,  $NΞ$ , et sunt incommensurabiles  $MN$ ,  $NΞ$  potentiâ. Si verò duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium, tota irrationalis est. Vocatur autem major; ergo  $MΞ$  irrationalis est quæ appellatur major, et potest spatium  $ΑΓ$ . Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ  $ΑΓ$  περιεχίσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς  $ΑΒ$ , καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς  $ΑΔ$ , διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ  $Ε$ ,

### PROPOSITIO LIX.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

Spatium enim  $ΑΓ$  contineatur sub rationali  $ΑΒ$ , et ex binis nominibus quintâ  $ΑΔ$ , divisâ in nomina ad  $Ε$ , ita ut majus nomen sit

mais il est contenu sous les droites  $MN$ ,  $NΞ$ ; le rectangle sous  $MN$ ,  $NΞ$  est donc médial, la somme des quarrés de  $MN$  et de  $NΞ$  étant rationnelle, et les droites  $MN$ ,  $NΞ$  étant incommensurables en puissance. Mais si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la somme de ces droites sera irrationnelle. Mais cette somme est appelée majeure (40. 10); la droite  $MΞ$  est donc l'irrationnelle appelée majeure, et elle peut la surface  $ΑΓ$ . Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION LIX.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

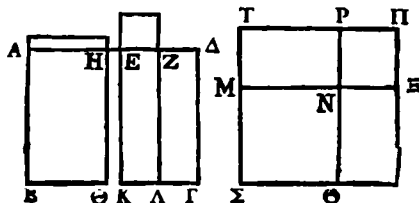
Que la surface  $ΑΓ$  soit comprise sous la rationnelle  $ΑΒ$  et sous une cinquième de deux noms  $ΑΔ$ , divisée en ses noms au point  $Ε$ , de manière que  $ΑΕ$  soit le plus

ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδιδεδυμένοις· φανερόν δὲ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμε-

ΑΕ; dico rectam, quæ potest spatium ΑΓ, irrationalem esse, quæ vocatur rationale et medium potens.

Construantur enim eadem quæ supra; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est autem ΜΞ esse quæ rationale et medium potest. Quoniam enim incommen-



τρὸς ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἐστὶν ἑλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει<sup>3</sup>. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει<sup>4</sup>, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα<sup>5</sup> ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμε-

surabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, incommensurable igitur est et ΑΘ ipsi ΘΕ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam ΑΔ ex binis nominibus est quinta, atque est minor ipsius portio ΕΔ; commensurabilis igitur ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine. Sed ΑΕ ipsi ΕΔ est incommensurabilis longitudine, et ΑΒ igitur ipsi ΑΕ est incommensurabilis longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΕ igitur rationales sunt potentiâ solum com-

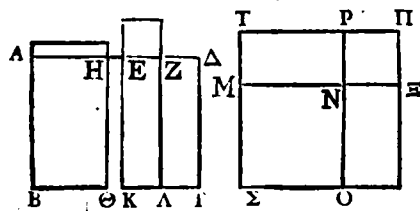
grand nom ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Faisons la même construction qu'auparavant ; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que la droite ΜΞ est celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale. Car puisque ΑΗ est incommensurable avec ΗΕ, ΑΘ sera incommensurable avec ΘΕ, c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ (10. 10) ; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque la droite ΑΔ est la cinquième de deux noms, et que ΕΔ en est le plus petit segment, la droite ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 5. 10). Mais ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ ; donc ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΑΕ (13. 10) ; les droites ΒΑ, ΑΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement ; le rec-

260 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτίστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτίστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρος ἐστὶ. Καὶ

mensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis est; et ΕΖ igitur ipsi ΕΚ com-



ῥητῇ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυνάμει ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mensurabilis est. Et rationalis ΕΚ; rationale igitur et ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; ipsa ΜΞ igitur rationale et medium potest, et potest spatium ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

tangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des quarrés de ΜΝ et de ΝΞ, est donc médiale (22. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ; que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera commensurable avec ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est rationelle, le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire ΜΡ (20. 10), c'est-à-dire le rectangle sous ΜΝ, ΝΞ, est donc rationel; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle compris sous ces droites étant rationel; donc ΜΞ est la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale (41. 10), et elle peut la surface ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ'.

PROPOSITIO LX.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστί.

Κατισκυιάσθω γάρ· τὰ αὐτὰ τοῖς προειρημένους. Φανερόν δὲ ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἢ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτίστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus sextâ ΑΔ, divisâ in nomina ad Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; dico rectam, quæ potest ipsum ΑΓ, bina media posse.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Evidens est utique ipsum ΑΓ posse ΜΞ, et incommensurabilem esse ΜΝ ipsi ΝΞ potentiâ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΑ ipsi ΑΒ longitudine; ipsæ ΕΑ, ΑΒ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine, incommensu-

PROPOSITION LX.

Si une surface est comprise sous une rationelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut deux médiales.

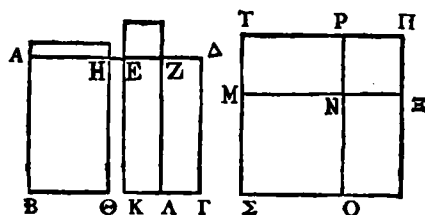
Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous une sixième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit le plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est celle qui peut deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Il est évident que ΜΞ peut la surface ΑΓ, et que ΜΝ est incommensurable en puissance avec ΝΞ. Et puisque ΕΑ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, les droites ΕΑ, ΑΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des quarrés de ΜΝ et de ΝΞ, sera donc médial (22. 10). De plus, puisque ΕΔ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, la droite ΕΖ sera incommensurable

262 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΕΚ· καὶ<sup>5</sup> αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταὶ εἰς δυνάμεις μόνον σύμμετροι· μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ.

rabilis igitur est et EZ ipsi EK; et ipsæ ZE, EK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est



Καὶ ἵπὲ ἀσύμμετρός ἐστιν<sup>6</sup> ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῇ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῇ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐστὶ μίσην ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ<sup>7</sup> δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μίσην δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

rectangulum sub MN, NΞ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΖ, et ΑΚ ipsi ΕΛ incommensurable est. Sed quidem ΑΚ est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ, ipsum verò ΕΛ est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; incommensurable igitur est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ rectangulo sub ΜΝ, ΝΞ. Atque est medium utrumque ipsorum, et ΜΝ, ΝΞ potentiâ sunt incommensurabiles; ergo ΜΞ bina media potest, et potest ipsum ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

avec EK, les droites ZE, EK sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rectangle EA, c'est-à-dire MP, c'est-à-dire le rectangle sous MN, NΞ, sera donc médial. Et puisque AE est incommensurable avec EZ, le rectangle AK sera incommensurable avec EA. Mais AK est composé de la somme des quarrés de MN, NΞ, et EA est le rectangle sous MN, NΞ; la somme des quarrés de MN, NΞ est donc incommensurable avec le rectangle sous MN, NΞ. Mais l'une et l'autre de ces grandeurs est médiale; les droites MN, NΞ sont donc incommensurables en puissance; donc ΜΞ est la droite qui peut deux médiales, et elle peut la surface ΑΓ (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

Εάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τιτράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Εστω εὐθεῖα ἡ AB, καὶ τιτμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ AG· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG, GB.



Τιτμήσθω γάρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἐπὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τίτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AG, GB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB ἑλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΔ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AG, GB ἑλαττόν ἢ διπλασίον ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΔ<sup>4</sup>. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB διπλασιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΔΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AG, GB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν<sup>5</sup> AG, GB. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

Si recta linea secetur in partes inæquales, ipsarum inæqualium quadrata majora sunt rectangulo bis contento sub ipsis inæqualibus.

Sit recta linea AB, et secetur in partes inæquales ad punctum Γ, et sit major AG; dico quadrata ex AG, GB majora esse rectangulo bis sub AG, GB.

Secetur enim AB bifariam in Δ. Quoniam igitur recta linea secatur in partes quidem æquales ad Δ, in partes verò inæquales ad Γ; rectangulum igitur sub AG, GB cum quadrato ex ΔΓ æquale est quadrato ex ΔΔ; quare rectangulum sub AG, GB minus est quadrato ex ΔΔ; rectangulum igitur bis sub AG, GB minus est quàm duplum quadrati ex ΔΔ. Sed quadrata ex AG, GB dupla sunt quadratorum ex ΔΔ, ΔΓ; ergo quadrata ex AG, GB majora sunt rectangulo bis sub AG, GB. Quod oportebat ostendere.

LEMME.

Si une ligne droite est coupée en parties inégales, la somme des quarrés de ces parties inégales est plus grande que le double rectangle compris sous ces parties.

Soit la droite AB; coupons-la en parties inégales au point Γ, et que AG soit la plus grande; je dis que la somme des quarrés de AG et de GB est plus grande que le double rectangle sous AG, GB.

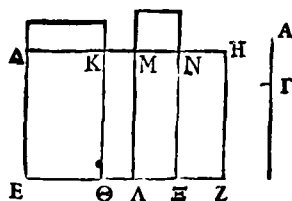
Que la droite AB soit coupée en deux parties égales en Δ. Puisque la ligne droite AB est coupée en parties égales au point Δ, et en parties inégales au point Γ, le rectangle sous AG, GB avec le quarré de ΔΓ sera égal au quarré de ΔΔ (5. 2); le rectangle sous AG, GB est donc plus petit que le quarré de ΔΔ; le double rectangle sous AG, GB est donc plus petit que le double quarré de ΔΔ. Mais la somme des quarrés de AG et de GB est double de la somme des quarrés de ΔΔ et de ΔΓ (9. 2); la somme des quarrés de AG et de GB est donc plus grande que le double rectangle sous AG, GB. Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΑ΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ  $AB$ , διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ  $AG$ , καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ  $\Delta E$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Delta E$  παραβεβλήσθω τὸ  $\Delta EZH$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta H$ . λήγῃ ὅτι ἡ  $\Delta H$  ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.



Παραβεβλήσθω γάρ παρὰ τὴν  $\Delta E$  τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AG$  ἴσον τὸ  $\Delta\Theta$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $B\Gamma$  ἴσον τὸ  $ΚΛ$ . λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $\Gamma B$  ἴσον ἐστὶ τῷ  $MZ$ . Τετμήσθω ἡ  $MH$  δίχα κατὰ τὸ  $N$ , καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ  $NΞ$  ἐκατέρῃ τῶν  $ML$ ,  $HΞ$ . ἐκατέρον ἄρα τῶν  $MΞ$ ,  $NZ$  ἴσον ἐστὶ τῷ

Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus ipsa  $AB$ , divisa in nomina ad  $\Gamma$ , ita ut majus nomen sit  $AG$ , et exponatur rationalis  $\Delta E$ , et quadrato ex  $AB$  æquale ad  $\Delta E$  applicetur ipsum  $\Delta EZH$ , latitudinem faciens  $\Delta H$ ; dico  $\Delta H$  ex binis nominibus esse primam.

Applicetur enim ad  $\Delta E$  quadrato quidem ex  $AG$  æquale  $\Delta\Theta$ , ipsi verò ex  $B\Gamma$  æquale  $ΚΛ$ ; reliquum igitur rectangulum bis sub  $AG$ ,  $\Gamma B$  æquale est ipsi  $MZ$ . Secetur  $MH$  bifariam in  $N$ , et parallela ducatur ipsa  $NΞ$  alterutri ipsarum  $ML$ ,  $HΞ$ ; utrumque igitur ipsorum  $MΞ$ ,

## PROPOSITION LXI.

Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

Soit la droite  $AB$  de deux noms, divisée en ses noms au point  $\Gamma$ , de manière que  $AG$  soit son plus grand nom; soit exposée la rationnelle  $\Delta E$ , et appliquons à la rationnelle  $\Delta E$  un rectangle  $\Delta EZH$  égal au carré de  $AB$ , et faisant la largeur  $\Delta H$ ; je dis que la droite  $\Delta H$  est une première de deux noms.

Appliquons à la rationnelle  $\Delta E$  un rectangle  $\Delta\Theta$  égal au carré de  $AG$  (45. 1), et un rectangle  $ΚΛ$  égal au carré de  $B\Gamma$ ; le double rectangle restant sous  $AG$ ,  $\Gamma B$  sera égal au rectangle  $MZ$  (4. 2). Coupons  $MH$  en deux parties égales en  $N$ , et menons à l'une ou à l'autre des droites  $ML$ ,  $HΞ$  la parallèle  $NΞ$ ; chacun des rectangles

ἀπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἰστὶν ἡ ΔΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταὶ εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητὰ ἴστί<sup>2</sup> καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ<sup>3</sup>. Καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταὶ εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτίστι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΑ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἴστί<sup>4</sup>, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΑ, τουτίστι τῇ ΔΕ, μήκει. Εἴστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἴστιν ἡ ΔΗ. Δεικτέον

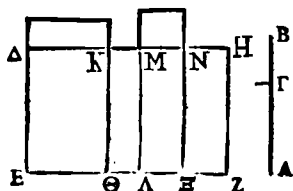
NZ æquale est rectangulo semel sub ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam ex binis nominibus est ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationalia sunt et commensurabilia inter se; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ commensurabile est quadratis ex ΑΓ, ΓΒ. Atque est æquale ipsi ΔΛ; rationale igitur est ΔΛ, et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ. Et ad rationalem ΜΑ applicatur; rationalis igitur et ΜΗ est, et incommensurabilis ipsi ΜΑ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Est autem et ΜΔ rationalis, et ipsi ΔΕ longitudine commensurabilis; incommensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΔΗ. Ostendendum est

ΜΞ, ΝΖ sera égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Et puisque la droite ΑΒ de deux noms est divisée en ses noms au point Γ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10); les carrés de ΑΓ et de ΓΒ sont donc rationels, et commensurables entre eux; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc commensurable avec la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ (16. 10). Mais elle est égale au rectangle ΔΛ; le rectangle ΔΛ est donc rationel, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10). De plus, puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΜΖ, sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΜΑ; la droite ΜΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΜΑ, c'est-à-dire avec ΔΕ (23. 10). Mais la droite ΜΔ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ (13. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer

## 266 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δη ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ<sup>5</sup> τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως<sup>6</sup> ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς

et primam esse. Quoniam enim quadratorum ex ΑΓ, ΓΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ipsorum ΔΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΜΞ; est igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΛ, hoc est ut ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ; rectangulum igitur sub ΔΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ. Et quoniam commensurable est ex ΑΓ quadratum quadrato



ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΑ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἴστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει<sup>8</sup> τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐὰν δὲ ᾧσι δύο εὐθείαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ex ΓΒ, commensurable est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est longitudine. Et quoniam majora sunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΑ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsâ ΜΗ major est. Atque est æquale rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΗ, et commensurabilis ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine. Si autem sunt duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex mi-

qu'elle est aussi une première de deux noms. Car puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est moyen proportionel entre les quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ (55. lem. 10), le rectangle ΜΞ sera moyen proportionel entre les rectangles ΔΘ, ΚΛ; le rectangle ΔΘ est donc à ΜΞ comme ΜΞ est à ΚΛ, c'est-à-dire ΔΚ est à ΜΝ comme ΜΝ est à ΜΚ; le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΜΝ (17. 6). Et puisque le quarré de ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec le rectangle ΚΛ (14. 10); la droite ΔΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (61. lem. 10), le rectangle ΔΑ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΜΗ, et la droite ΔΚ est commensurable en longueur avec ΚΜ; or, si l'on a deux droites inégales,

ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παρα-  
βληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμ-  
μετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάττονος  
μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ· ἡ  
ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-  
μετρου ἑαυτῇ<sup>10</sup>. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ,  
καὶ ἡ ΔΜ μείζον ὄνομα οὕσα σύμμετρος ἐστὶ  
τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ  
δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

nori æquale ad majorem applicetur deficiens  
figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles  
ipsam dividat, major quàm minor plus potest  
quadrato ex rectâ sibi commensurabili; ipsa ΔΜ  
igitur quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ  
sibi commensurabili. Et sunt rationales ΔΜ,  
ΜΗ, et ΔΜ majus nomen existens commensu-  
rabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine;  
ergo ΔΗ ex binis nominibus est prima. Quod  
oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΒ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν  
παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνο-  
μάτων δευτέραν.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διηρημένη  
εἰς τὰς μέσας<sup>1</sup> κατὰ τὸ Γ, ὣν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ  
ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παρα-

PROPOSITIO LXII.

Quadratum primæ ex binis mediis ad ra-  
tionalem applicatum latitudinem facit ex binis  
nominibus secundam.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ, divisa in  
medias ad Γ, quarum major sit ΑΓ, et expo-  
natur rationalis ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ applicetur

si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du  
quarré de la plus petite, si ce parallélogramme est détaillant d'une figure quarrée,  
et s'il partage la plus grande en parties commensurables, la puissance de la plus  
grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commen-  
surable en longueur avec la plus grande (18. 10); la puissance de ΔΜ surpasse  
donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ. Mais les  
droites ΔΜ, ΜΗ sont rationelles, et ΔΜ, qui est le plus grand nom, est com-  
mensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une  
première de deux noms (déf. sec. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXII.

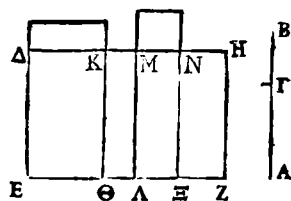
Le quarré de la première de deux médiales appliqué à une rationelle fait une  
largeur qui est la seconde de deux noms.

Soit ΑΒ la première de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ; que la  
droite ΑΓ soit la plus grande; soit exposée la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un

## 268 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐκβλήσθω τῇ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τὸ<sup>2</sup> παραλλη-  
λόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω  
ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔΖ;  
latitudinem faciens ΔΗ; dico ΔΗ ex binis nomi-  
nibus esse secundam.



Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου.  
Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διηρη-  
μένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυ-  
νάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε  
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστὶ· μέσον ἄρα  
τὸ ΔΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβηται<sup>3</sup>·  
ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ  
μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  
ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἐστὶ<sup>4</sup> καὶ τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ  
ῥητὴν τὴν ΜΑ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ<sup>5</sup> καὶ  
ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΑ, τουτίστι  
τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quo-  
niam AB ex binis mediis est prima, divisa  
ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur mediæ sunt po-  
tentiâ solùm commensurabiles rationale conti-  
nentes; quare et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ media  
sunt; medium igitur ΔΑ, et ad rationalem ΔΕ  
applicatur; rationalis igitur est ΜΔ, et incom-  
mensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursûs, quo-  
niam rationale est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ,  
rationale est et ΜΖ, et ad rationalem ΜΑ appli-  
catur; rationalis igitur est et ΜΗ, et longitu-  
dinæ eommensurabilis ipsi ΜΑ, hoc est ipsi ΔΕ;  
incommensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longi-

parallélogramme ΔΖ égal au carré de AB, ce parallélogramme ayant ΔΗ pour  
largeur; je dis que ΔΗ est une seconde de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB, qui est  
divisée au point Γ, est la première de deux médiales, les droites ΑΓ, ΓΒ seront des mé-  
diales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface ra-  
tionnelle (38. 10); les carrés de ΑΓ et de ΓΒ sont donc médiaux; le rectangle ΔΑ est  
donc médial, et il est appliqué à la rationnelle ΔΕ; la droite ΜΔ est donc rationnelle,  
et incommensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10). De plus, puisque le double  
rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est rationel, le rectangle ΜΖ sera rationel, et il est ap-  
pliqué à la rationnelle ΜΑ; la droite ΜΗ est donc rationnelle, et commensurable  
en longueur avec ΜΑ (21. 10), c'est-à-dire avec ΔΕ; la droite ΔΜ est donc in-  
commensurable en longueur avec ΜΗ (13. 10). Mais ces droites sont rationnelles;

μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ρηταὶ  
εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνο-  
μάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα.  
Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ  
δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ  
ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-  
μετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμ-  
μετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ  
τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν  
ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς  
ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.  
Καὶ ἐστὶν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ  
ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ ἴδει  
δεῖξαι.

tudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur  
rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;  
ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum  
est et secundam esse. Quoniam enim quadrata  
ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ,  
ΓΒ; majus igitur et ΔΛ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ  
ipsâ ΜΗ. Et quoniam commensurable est ex  
ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ, commensurable  
est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ com-  
mensurabilis est. Atque est rectangulum sub  
ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ  
quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi  
commensurabili. Atque est ΜΗ commensurabilis  
ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus  
est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

PROPOSITIO LXIII.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ  
ρῆτὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο  
ὀνομάτων τρίτην.

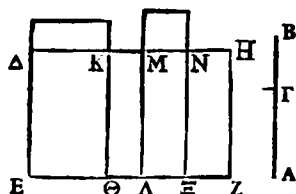
Quadratum secundæ ex binis mediis ad ratio-  
nalem applicatum latitudinem facit ex binis no-  
minibus tertiam.

les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seule-  
ment; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi  
la seconde de deux noms. Car puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus  
grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (lem. 61. 10), le rectangle ΔΛ sera plus  
grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Et puisque le quarré de  
ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commen-  
surable avec ΚΛ; la droite ΔΚ est donc commensurable avec ΚΜ. Mais le  
rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ surpasse  
donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10).  
Mais la droite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc  
une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIII.

Le quarré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une  
largeur qui est la troisième de deux noms.

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ  $AB$ , διηρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ὥστε τὸ μείζον τμήμα εἶναι τὸ  $AG$ , ῥητὴ δὲ τις ἔστω ἡ  $DE$ , καὶ παρὰ τὴν  $DE$  τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ  $DZ$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta H$ . λέγω ὅτι ἡ  $\Delta H$  ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.



Κατισκυιάσθω γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς προειρημένοις. Καὶ ἐπὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα<sup>2</sup> ἡ  $AB$ , διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ . αἱ  $AG$ ,  $GB$  ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσιν· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  μέσον ἐστὶ. Καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ  $\Delta A$ · μέσον ἄρα καὶ τὸ  $\Delta A$ · καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν  $DE$ <sup>3</sup>. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>4</sup> ἡ  $\Delta M$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $DE$  μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ  $MH$  ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $MA$ , τουτίστι τῇ  $DE$ , μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα

Sit ex binis mediis secunda  $AB$ , divisa in medias ad  $\Gamma$ , ita ut majus segmentum sit  $AG$ , rationalis autem aliqua sit  $DE$ , et ad ipsam  $DE$  quadrato ex  $AB$  æquale parallelogrammum applicetur  $DZ$ , latitudinem faciens  $\Delta H$ ; dico  $\Delta H$  ex binis nominibus esse tertiam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis mediis est secunda  $AB$ , divisa ad  $\Gamma$ ; ipsæ  $AG$ ,  $GB$  igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, medium continentes; quare et compositum ex quadratis ipsarum  $AG$ ,  $GB$  medium est. Atque est æquale ipsi  $\Delta A$ ; medium igitur et  $\Delta A$ ; et applicatur ad rationalem  $DE$ ; rationalis igitur est et  $\Delta M$ , et incommensurabilis ipsi  $DE$  longitudine. Propter eadem utique et  $MH$  rationalis est, et incommensurabilis ipsi  $MA$ , hoc est ipsi  $DE$ , longitudine; rationalis igitur est utraque ipsa-

Soit  $AB$  la seconde de deux médiales, divisée en ses médiales au point  $\Gamma$ , de manière que  $AG$  soit son plus grand segment; soit aussi la rationnelle  $DE$ ; appliquons à  $DE$  un parallélogramme  $DZ$  égal au carré de  $AB$ , ce parallélogramme ayant  $\Delta H$  pour largeur; je dis que  $\Delta H$  est une troisième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque  $AB$  est une seconde de deux médiales, divisée au point  $\Gamma$ ; les droites  $AG$ ,  $GB$  seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface médiale (39. 10); la somme des carrés de  $AG$  et de  $GB$  est donc médiale. Mais elle est égale au rectangle  $\Delta A$ ; le rectangle  $\Delta A$  est donc médial; et il est appliqué à la rationnelle  $DE$ ; la droite  $\Delta M$  est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec  $DE$  (25. 10). Par la même raison, la droite  $MH$  est rationnelle, et incommensurable en longueur avec  $MA$ , c'est-à-dire avec  $DE$ ; chacune des droites  $\Delta M$ ,  $MH$

τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὥς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτί ἐστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ<sup>5</sup> ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρος ἐστὶ. Καὶ εἴσι ρηταί· ἐκ δύο ἄρα ἰσολόγων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικνύον δὲ<sup>6</sup> ὅτι καὶ τρίτη. Ομοίως δὲ τοῖς προτέροις<sup>7</sup> ἐπιλογισμὲθα, ὅτι μείζων ἐστὶν<sup>8</sup> ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ἰσολόγων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rum ΔΜ, ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Et quoniam incommensurabilis est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur et ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ incommensurabile est, hoc est ΔΛ ipsi ΜΖ; quare et ΔΜ ipsi ΜΗ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et tertiam esse. Congruenter utique præcedentibus concludemus maiorem esse ΔΜ ipsâ ΜΗ, et commensurabilem ΔΚ ipsi ΚΜ. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, le carré de ΑΓ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΔΛ avec ΜΖ; la droite ΔΜ est donc incommensurable avec ΜΗ. Mais ces droites sont rationnelles; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi une troisième de deux noms. Nous concluons comme auparavant que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que ΔΚ est commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ est donc plus grande que la puissance de ΜΗ du carré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ'.

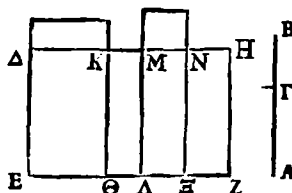
## PROPOSITIO LXIV.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐστὼ μείζων ἡ  $AB$ , διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν  $AG$  τῆς  $GB$ , ῥητὴ δέ τις ἴστω ἡ  $\Delta E$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Delta E$  παραβεβλήσθω τὸ  $\Delta Z$  παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta H$ ; λέγω ὅτι ἡ  $\Delta H$  ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major  $AB$ , divisa ad  $\Gamma$ , ita ut major sit  $AG$  quam  $GB$ , rationalis autem aliqua sit  $\Delta E$ , et quadrato ex  $AB$  æquale ad ipsam  $\Delta E$  applicetur  $\Delta Z$  parallelogrammum, latitudinem faciens  $\Delta H$ ; dico  $\Delta H$  ex binis nominibus esse quartam.



Κατεσκευάσθω γάρ<sup>2</sup> τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπὶ μείζων ἐστὶν ἡ  $AB$  διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ , αἱ  $AG$ ,  $GB$  δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam major est  $AB$  divisa ad  $\Gamma$ , ipsæ  $AG$ ,  $GB$  potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium.

## PROPOSITION LXIV.

Le carré d'une majeure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

Soit la majeure  $AB$ , divisée en  $\Gamma$ , la droite  $AG$  étant plus grande que  $GB$ ; soit aussi une rationelle  $\Delta E$ ; appliquons à  $\Delta E$  un parallélogramme  $\Delta Z$ , qui étant égal au carré de  $AB$ , ait la droite  $\Delta H$  pour largeur; je dis que  $\Delta H$  est une quatrième de deux noms.

Faisons la même construction qu'au paravant. Puisque la majeure  $AB$  est divisée au point  $\Gamma$ , les droites  $AG$ ,  $GB$  seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites

μέσον. Ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ<sup>2</sup> τὸ ΔΑ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτίεστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΑ παράκειται<sup>4</sup> ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα<sup>5</sup> ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτίον δὲ<sup>6</sup> ὅτι καὶ τετάρτη. Ομοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον<sup>7</sup>, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ<sup>8</sup> καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ<sup>9</sup>. Εἰάν δὲ ὡς δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μίρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ<sup>10</sup> ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ

Quoniam igitur rationale est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, rationale igitur et ΔΑ; rationalis igitur est et ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ, et ad rationalem ΜΑ applicatur; rationalis igitur est et ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendum est et quartam. Congruenter utique præcedentibus ostendemus, maiorem esse ΔΜ quam ΜΗ, et rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΜΝ. Quoniam igitur incommensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ; incommensurabile igitur est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare incommensurabilis est et ΚΔ ipsi ΚΜ. Si autem sint duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommen-

médial (40. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est rationelle, le rectangle ΔΑ sera rationel; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΜΖ, est médial, et qu'il est appliqué à la rationelle ΜΑ, la droite ΜΗ sera rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10); la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer qu'elle est aussi la quatrième de deux noms. Nous démontrerons, comme auparavant, que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ. Et puisque le quarré de ΑΓ est incommensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera incommensurable avec ΚΛ (10. 10); la droite ΚΔ est donc incommensurable avec ΚΜ. Mais si deux droites sont inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme, étant défailant d'une figure quarrée, partage la plus grande droite en parties incommen-

# 274 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήκει<sup>11</sup>, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

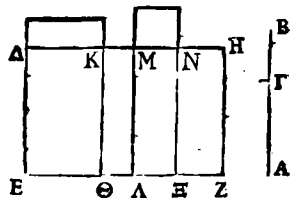
surabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΔΜ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ΄.

## PROPOSITIO LXV.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Εστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διηρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ

Sit rationale et medium potens ΑΒ, divisa in rectas ad Γ, ita ut major sit ΑΓ, et exponatur rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΒ

mensurables en longueur, la puissance de la plus grande droite surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la plus grande droite (19. 10); la puissance de ΔΜ surpassera donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΔΜ. Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et ΔΜ est commensurable avec la rationnelle exposée ΔΕ; ΔΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION LXV.

Le quarré d'une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, pouvant une surface rationnelle et une surface médiale, soit divisée en ses droites au point Γ, la droite ΑΓ étant la plus grande; soit exposée la

ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Delta E$  παραβελήσθω τὸ  $\Delta Z$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta H$ . λέγω ὅτι ἡ  $\Delta H$  ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γάρ<sup>1</sup> τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ  $AB$ , διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ . αἱ  $AG$ ,  $GB$  ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $\Delta A$ . ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ  $\Delta M$ , καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ  $\Delta E$ . Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$ , τουτέστι τὸ  $MZ$ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν<sup>2</sup> ἡ  $MH$ , καὶ σύμμετρος τῇ  $\Delta E$  μήκει<sup>3</sup>. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ  $\Delta M$  τῇ  $MH$ . αἱ  $\Delta M$ ,  $MH$  ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ  $\Delta H$ . Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ διγυθίσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta K$ ,  $KM$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $MN$ , καὶ ἀσύμμετρος ἡ  $\Delta K$  τῇ  $KM$

æquale ad ipsam  $\Delta E$  applicetur  $\Delta Z$ , latitudinem faciens  $\Delta H$ ; dico  $\Delta H$  ex binis nominibus esse quintam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Quoniam igitur rationale et medium potens est  $AB$ , divisa ad  $\Gamma$ ; ergo  $AG$ ,  $GB$  potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex quadratis ipsarum  $AG$ ,  $GB$ ; medium igitur est et  $\Delta A$ ; quare rationalis est  $\Delta M$ , et longitudine incommensurabilis ipsi  $\Delta E$ . Rursus, quoniam rationale est rectangulum bis sub  $AG$ ,  $GB$ , hoc est  $MZ$ ; rationalis igitur est  $MH$ , et commensurabilis ipsi  $\Delta E$  longitudine; incommensurabilis igitur  $\Delta M$  ipsi  $MH$ ; ipsæ  $\Delta M$ ,  $MH$  igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est  $\Delta H$ . Dico et quintam esse. Similiter enim demonstrabitur rectangulum sub  $\Delta K$ ,  $KM$  æquale esse quadrato ex  $MN$ , et incommensurabilem  $\Delta K$  ipsi  $KM$  longitu-

rationnelle  $\Delta E$ , et appliquons à  $\Delta E$  un parallélogramme  $\Delta Z$  égal au carré de  $AB$ , ce parallélogramme ayant  $\Delta H$  pour largeur; je dis que  $\Delta H$  est une cinquième de deux noms.

Car faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite  $AB$ , qui est divisée au point  $\Gamma$ , peut une surface rationnelle et une surface médiale, les droites  $AG$ ,  $GB$  seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Puisque la somme des carrés des droites  $AG$ ,  $GB$  est médiale, le rectangle  $\Delta A$  sera médial; la droite  $\Delta M$  est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec  $\Delta E$  (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous  $AG$ ,  $GB$ , c'est-à-dire  $MZ$ , est rationel, la droite  $MH$  sera rationnelle et commensurable en longueur avec  $\Delta E$  (21. 10); la droite  $\Delta M$  est donc incommensurable avec  $MH$  (13. 10); les droites  $\Delta M$ ,  $MH$  sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement;  $\Delta H$  est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis qu'elle est aussi une cinquième de deux noms. Car nous démontrerons semblablement que le rectangle sous  $\Delta K$ ,  $KM$  est égal au carré de  $MN$ , et que  $\Delta K$  est in-

## 276 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήκει· ἢ  $\Delta M$  ἄρα τῆς  $MH$  μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἴσιν αἱ  $\Delta M$ ,  $MH$  ῥηταὶ<sup>5</sup> δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἢ  $MH$  σύμμετρος τῇ  $\Delta E$  μήκει· ἢ  $\Delta H$  ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

dine; ergo  $\Delta M$  quam  $MH$  plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt  $\Delta M$ ,  $MH$  rationales potentiâ solùm commensurabiles, et minor  $MH$  commensurabilis ipsi  $\Delta E$  longitudine; ergo  $\Delta H$  ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΣ'.

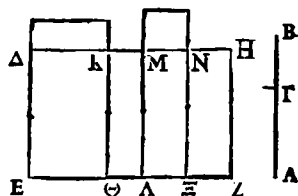
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτὴν.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ  $AB$ , διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ , ῥητὴ δὲ ἴστω ἡ  $\Delta E$ , καὶ παρὰ τὴν

### PROPOSITIO LXVI.

Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens  $AB$ , divisa ad  $\Gamma$ , rationalis autem sit  $\Delta E$ , et ad ipsam  $\Delta E$



$\Delta E$  τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον παραβελήσθω τὸ  $\Delta Z$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta H$ . λέγω ὅτι ἡ  $\Delta H$  ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτὴ.

quadrato ex  $AB$  æquale applicetur  $\Delta Z$ , latitudinem faciens  $\Delta H$ ; dico  $\Delta H$  ex binis nominibus esse sextam.

commensurable en longueur avec  $KM$ ; la puissance de  $\Delta M$  surpasse donc la puissance de  $MH$  du carré d'une droite incommensurable avec  $\Delta M$  (19. 10). Mais les droites  $\Delta M$ ,  $MH$  sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la plus petite  $MH$  est commensurable en longueur avec  $\Delta E$ ; la droite  $\Delta H$  est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10) Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION LXVI.

Le carré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

Que la droite  $AB$ , divisée au point  $\Gamma$ , puisse deux médiales; soit la rationnelle  $\Delta E$ , et appliquons à  $\Delta E$  le parallélogramme  $\Delta Z$  égal au carré de  $AB$ , et ayant  $\Delta H$  pour largeur; je dis que  $\Delta H$  est une sixième de deux noms.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἡ  $AB$  δύο μῖσα δυναμένη ἐστὶ, διηρημένη κατὰ τὸ  $\Gamma$ . αἱ  $AG$ ,  $GB$  ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μῖσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μῖσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν  $\Delta\Lambda$ ,  $MZ$ , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν  $\Delta E$  παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν  $\Delta M$ ,  $MH$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $\Delta E$  μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$  τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AG$ ,  $GB$ , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ  $\Delta\Lambda$  τῷ  $MZ$ . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $\Delta M$  τῇ  $MH$ . αἱ  $\Delta M$ ,  $MH$  ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ  $\Delta H$ . Λέγω ὅτι καὶ ἔκτη. Ομοίως δὲ πάλιν<sup>3</sup> δεῖξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν  $\Delta K$ ,  $KM$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $MN$ , καὶ ὅτι ἡ  $\Delta K$  τῇ  $KM$  μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ διη

Construuntur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam  $AB$  bina media potens est, divisa ad  $\Gamma$ ; ipsæ  $AG$ ,  $GB$  igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile ex ipsarum quadratis compositum composito ex rectangulis sub ipsis; quare ex jam demonstratis medium est utrumque ipsorum  $\Delta\Lambda$ ,  $MZ$ , et ad rationalem  $\Delta E$  applicantur; rationalis igitur est et utraque ipsarum  $\Delta M$ ,  $MH$ , et incommensurabilis ipsi  $\Delta E$  longitudine. Et quoniam incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum  $AG$ ,  $GB$  rectangulo bis sub  $AG$ ,  $GB$ , incommensurabile igitur est  $\Delta\Lambda$  ipsi  $MZ$ ; incommensurabilis igitur est et  $\Delta M$  ipsi  $MH$ ; ipsæ  $\Delta M$ ,  $MH$  igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est  $\Delta H$ . Dico et sextam esse. Similiter utique rursus ostendemus rectangulum sub  $\Delta K$ ,  $KM$  æquale esse quadrato ex  $MN$ , et  $\Delta K$  ipsi  $KM$  longitudine esse incommensurabilem; et propter

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite  $AB$ , divisée au point  $\Gamma$ , peut deux médiales, les droites  $AG$ ,  $GB$  seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme de leurs quarrés étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces droites (42. 10), chacun des rectangles  $\Delta\Lambda$ ,  $MZ$  sera médial, d'après ce qui a été démontré; mais ils sont appliqués à la rationnelle  $\Delta E$ ; chacune des droites  $\Delta M$ ,  $MH$  est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec  $\Delta E$  (23. 10). Et puisque la somme quarrés de  $AG$  et de  $GB$  est incommensurable avec le double rectangle sous  $AG$ ,  $GB$ , le rectangle  $\Delta\Lambda$  sera incommensurable avec  $MZ$ ; la droite  $\Delta M$  est donc incommensurable avec  $MH$  (10. 10); les droites  $\Delta M$ ,  $MH$  sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement;  $\Delta H$  est donc une droite de deux noms. Je dis qu'elle est aussi une sixième de deux noms. Nous démontrerons encore de la même manière que le rectangle sous  $\Delta K$ ,  $KM$  est égal au quarré de  $MN$ , et que  $\Delta K$  est incommensurable en longueur avec  $KM$ ; par la

## 278 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΜ τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου αὐτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἢ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

eadem utique ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectā sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΖ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρῶσω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταὶ εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γιγνέτω ὡς ἡ ΑΒ

### PROPOSITIO LXVII.

Recta quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem.

Sit ex binis nominibus ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico ΓΔ ex binis nominibus esse et ordine eandem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis nominibus est ΑΒ, dividatur in nomina ad Ε, et sit majus nomen ΑΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Fiat ut

même raison, la puissance de ΔΜ surpassera la puissance de ΜΗ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΔΜ (19. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION LXVII.

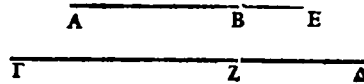
La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

Soit ΑΒ une droite de deux noms, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux noms, et qu'elle est du même ordre que ΑΒ.

Car, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10). Faisons en sorte que

πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἴστί· ὥς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἢ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἴστί καὶ ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ρηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴστί· ὥς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν

ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; et reliqua igitur ΕΒ ad reliquam ΖΔ est ut ΑΒ ad ΓΔ. Commensurabilis verò ΑΒ ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur est et quidem ΑΕ ipsi ΓΖ, ipsa verò ΕΒ ipsi ΖΔ. Et sunt rationales ΑΕ, ΕΒ; rationales igitur sunt et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΒ ad ΖΔ; permutando



ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἴστί· ὥς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ<sup>1</sup>. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ<sup>2</sup> σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἴσι ρηταὶ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἴστί· ἢ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι τῇ τάξει ἴστί· ἢ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται ἢ τοῖς<sup>3</sup> τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἢ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἢ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν

igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et sunt rationales; ex binis igitur nominibus est ΓΔ. Dico et ordine esse eandem ipsi ΑΒ.

Vel enim ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Si quidem igitur ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si

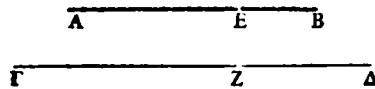
ΑΒ soit à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ; la droite restante ΕΒ sera à la droite restante ΖΔ comme ΑΒ est à ΓΔ (19. 5). Mais ΑΒ est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite ΑΕ est donc commensurable avec ΓΖ, et ΕΒ avec ΖΔ (10. 10). Mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont rationnelles; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc rationnelles. Et puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΕΒ est à ΖΔ; par permutation, ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais les droites ΑΕ, ΕΒ ne sont commensurables qu'en puissance; les droites ΓΖ, ΖΔ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais elles sont rationnelles; ΓΔ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que ΑΒ.

Car la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΑΕ. Si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΓΖ (15. 10);



σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται<sup>5</sup>. καὶ διὰ τοῦτο ἑκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τούτεστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκάτερα γὰρ αὐτῶν ἔσται<sup>6</sup> ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ

quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis eidem erit; et ob id utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. Si verò ΕΒ commensurabilis est expositæ rationali, et ΖΔ commensurabilis est eidem, et ob id rursus ordine eadem erit ipsi ΑΒ, utraque enim ipsarum erit ex binis nominibus secunda. Si autem



οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδέτερα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται<sup>7</sup> τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τετάρτη.

neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ commensurabilis sit expositæ rationali, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ commensurabilis eidem erit, et est utraque tertia. Si verò ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΑΕ commensurabilis est expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis est eidem, et est utraque quarta. Si autem

et si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera aussi commensurable avec elle (12. 10). Chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donc la première de deux noms, c'est-à-dire que ces droites sont du même ordre. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΖΔ sera aussi commensurable avec elle, et la droite ΓΔ sera encore du même ordre que ΑΒ, car chacune d'elles sera une seconde de deux noms. Mais si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une troisième de deux noms. Si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΖ (15. 10). Si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une quatrième de deux noms. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la

Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἴσται ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καὶ ἴσται ἑκατέρα ἑκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύοθ, καὶ τὰ ἐξῆς.

EB, et ZΔ, et erit utraque quinta. Si verò neutra ipsarum AE, EB, et ipsarum ΓΖ, ΖΔ neutra commensurabilis est expositæ rationali, et erit utraque sexta.

Quare recta ei quæ est ex binis, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΗ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγνηέντω ὥς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ<sup>3</sup>· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν

PROPOSITIO LXVIII.

Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis ipsa AB, et ipsi AB commensurabilis sit longitudine ipsa ΓΔ; dico ΓΔ ex binis mediis esse, et ordine eadem ipsi AB.

Quoniam enim ex binis mediis est AB, dividatur in medias ad E; ipsæ AE, EB igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Et fiat ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΖΔ est ut AB ad ΓΔ.

rationnelle exposée, la droite ΖΔ le sera aussi, et chacune d'elles sera une cinquième de deux noms; et enfin si aucune des droites AE, EB n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une sixième de deux noms. Donc, etc.

PROPOSITION LXVIII.

La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

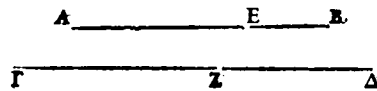
Soit AB une droite de deux médiales, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB; je dis que ΓΔ est une droite de deux médiales, et que cette droite est du même ordre que AB.

Car puisque AB est une droite de deux médiales, qu'elle soit divisée en ses médiales au point E; les droites AE, EB seront des médiales commensurables en puissance seulement (38 et 39. 10). Faisons en sorte que AB soit à ΓΔ comme AE est à ΓΖ; la droite restante EB sera à la droite restante ΖΔ comme AB est à ΓΔ.

282 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΖΔ ἴσθιν ὥς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ<sup>4</sup>. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ<sup>5</sup>· μίσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὥς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ<sup>6</sup>, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι<sup>7</sup>· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν<sup>8</sup>. Εδείχθησαν δὲ καὶ μίσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἴσθι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἴσθι τῇ ΑΒ.

Commensurabilis autem ΑΒ ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et utraque ipsarum ΑΕ, ΕΒ utrique ipsarum ΓΖ, ΖΔ; mediæ verò ΑΕ, ΕΒ; mediæ igitur et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ, ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ potentiâ solùm commensurabiles sunt; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm commensurabiles sunt. Ostensæ sunt verò et mediæ; ergo ΓΔ ex binis mediis est. Dico et ordine eamdem esse ipsi ΑΒ.



Επεὶ γάρ ἴσθιν ὥς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ<sup>9</sup>· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα<sup>10</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἴσθι τὸ

Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; et ut igitur ex ΑΕ quadratum ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; permutando igitur ex ΑΕ quadratum ad ipsum ex ΓΖ ita sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum ad ipsum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurable igitur et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Sive

Mais ΑΒ est commensurable en longueur avec ΓΔ; chacune des droites ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec chacune des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont médiales; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc médiales (24. 10). Et puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, et que les droites ΑΕ, ΕΒ ne sont commensurables qu'en puissance, les droites ΓΖ, ΖΔ ne seront commensurables qu'en puissance. Mais on a démontré qu'elles sont médiales; la droite ΓΔ est donc une droite de deux médiales (38 et 39. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, le quarré de ΑΕ sera au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le quarré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (11. 5, et 1. 6); donc, par permutation, le quarré de ΑΕ est au quarré de ΓΖ comme le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le quarré de ΑΕ est commensurable avec le quarré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est rationel, le rectangle

ὕπὸ τῶν  $AE, EB$ , καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma Z, Z\Delta$  ῥητὸν ἔστι· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. Ἐῖτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν  $AE, EB$ , μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν  $\Gamma Z, Z\Delta$ . Καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ  $\Gamma\Delta$  τῇ  $AB$  τῇ τάξει ἡ αὐτή<sup>11</sup>. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

igitur rationale est rectangulum sub  $AE, EB$ , et rectangulum sub  $\Gamma Z, Z\Delta$  rationale est; et ob id est ex binis mediis prima. Sive medium rectangulum sub  $AE, EB$ , medium et rectangulum sub  $\Gamma Z, Z\Delta$ . Atque est utraque secunda; et ob id  $\Gamma\Delta$  ipsi  $AB$  ordine eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἔστιν.

Ἐστω μείζων ἡ  $AB$ , καὶ τῇ  $AB$  σύμμετρος ἔστω ἡ  $\Gamma\Delta$ · λέγω ὅτι καὶ ἡ  $\Gamma\Delta$  μείζων ἔστί.

Διηρήσθω ἡ  $AB$  κατὰ τὸ  $E$ · αἱ  $AE, EB$  ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. Γιγνέτω γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ  $AB$  πρὸς τὴν  $\Gamma\Delta$  οὕτως ἥτε  $AE$  πρὸς τὴν  $\Gamma Z$  καὶ ἡ  $EB$  πρὸς τὴν  $Z\Delta$ <sup>3</sup>· καὶ ὡς ἄρα ἡ  $AE$  πρὸς τὴν  $\Gamma Z$

PROPOSITIO LXIX.

Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

Sit major  $AB$ , et ipsi  $AB$  commensurabilis sit  $\Gamma\Delta$ ; dico et  $\Gamma\Delta$  majorem esse.

Dividatur  $AB$  ad  $E$ ; ipsæ  $AE, EB$  igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium. Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam est ut  $AB$  ad  $\Gamma\Delta$  ita et  $AE$  ad  $\Gamma Z$  et  $EB$  ad  $Z\Delta$ ; et ut igitur  $AE$  ad  $\Gamma Z$  ita  $EB$  ad  $Z\Delta$ .

sous  $\Gamma Z, Z\Delta$  sera rationel; et  $\Gamma\Delta$  sera, par conséquent, une première de deux médiales (38. 10). Si le rectangle sous  $AE, EB$  est médial, le rectangle sous  $\Gamma Z, Z\Delta$  sera médial. Mais les droites  $\Gamma\Delta, \Delta B$  sont l'une et l'autre la seconde de deux médiales (39. 10); la droite  $\Gamma\Delta$  sera, par conséquent aussi, du même ordre que la droite  $AB$ . Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIX.

Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

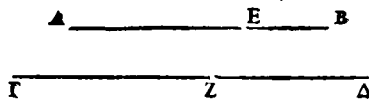
Soit la majeure  $AB$ ; et que  $\Gamma\Delta$  soit commensurable avec  $AB$ ; je dis que  $\Gamma\Delta$  est une droite majeure.

Divisons  $AB$  au point  $E$ ; les droites  $AE, EB$  seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (40. 10). Car faisons les mêmes choses qu'au paravant. Puisque  $AB$  est à  $\Gamma\Delta$  comme  $AE$  est à  $\Gamma Z$ , et comme  $EB$  est à  $Z\Delta$ , la droite

284 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ἡ EB πρὸς τὴν ZΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ ΓΔ· σύμμετροις ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AE, EB ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ZΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ EB πρὸς τὴν ZΔ<sup>4</sup>, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB<sup>5</sup> οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν<sup>6</sup> ZΔ· καὶ συνθίγντι ἄρα ἐστὶν<sup>7</sup> ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ<sup>8</sup>. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE, EB utrique ipsarum ΓΖ, ZΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓΖ ita EB ad ZΔ, et permutando ut AE ad EB ita ΓΖ ad ZΔ; et componendo igitur est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔΖ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BE ita ex ΓΔ



ἀπὸ τῆς BE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ZΔ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ZΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ,

quadratum ad ipsum ex ΔΖ. Similiter utique demonstrabimus et ut ex AB quadratum ad ipsum ex AE ita esse ex ΓΔ quadratum ad ipsum ex ΓΖ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsa ex AE, EB ita ex ΓΔ quadratum ad ipsa ex ΓΖ, ZΔ; et permutando igitur est ut ex AB quadratum ad ipsum ex ΓΔ ita ex AE, EB quadrata ad ipsa ex ΓΖ, ZΔ. Commensurable autem ex AB quadratum quadrato ex ΓΔ; commensurabilia igitur et ex AE, EB quadrata

AE sera à ΓΖ comme EB est à ZΔ (11.5). Mais AB est commensurable avec ΓΔ; chacune des droites AE, EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓΖ, ZΔ. Et puisque AE est à ΓΖ comme EB est à ZΔ; par permutation, AE sera à EB comme ΓΖ est à ZΔ; donc, par addition, AB est à BE comme ΓΔ est à ΔΖ; le carré de AB est donc au carré de BE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΔΖ (22.6). Nous démontrerons semblablement que le carré de AB est au carré de AE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΓΖ; le carré de AB est donc à la somme des carrés des droites AE, EB comme le carré de ΓΔ est à la somme des carrés des droites ΓΖ, ZΔ; donc, par permutation, le carré de AB est au carré de ΓΔ comme la somme des carrés des droites AE, EB est à la somme des carrés des droites ΓΖ, ZΔ. Mais le carré de AB est commensurable avec le carré de ΓΔ; la somme des carrés des droites AE, EB est donc com-

ΖΔ. Καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἄμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἄμα ῥητόν ἐστιν. Ομοίως δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστι μέσον τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δύναμις ἀσύμμετροί εἰσι<sup>9</sup>, ποιεῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἄμα<sup>10</sup> ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἀλογός ἐστιν, ἣ καλουμένη μείζων.

Η ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Η τῇ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη σύμμετρος καὶ αὐτῇ<sup>1</sup> ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

quadratis ex ΓΖ, ΖΔ. Et sunt quadrata ex ΑΕ, ΕΒ simul rationalia; et quadrata ex ΓΖ, ΖΔ simul rationalia sunt. Similiter verò et rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ commensurable est rectangulo bis sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est medium rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur et rectangulum bis sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; tota igitur ΓΔ irrationalis est, quæ vocatur major.

Recta igitur majori commensurabilis major est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LXX.

Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

mesurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais la somme des carrés des droites ΑΕ, ΕΒ est rationnelle (40. 10); la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc rationnelle (déf. 9. 10). Par la même raison, le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est commensurable avec le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial (40. 10); le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial (24. 10); les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial; la droite entière ΓΔ est donc l'irrationnelle appelée la droite majeure (40. 10).

Une droite commensurable avec la majeure, est donc elle-même une droite majeure. Ce qu'il fallait démontrer.

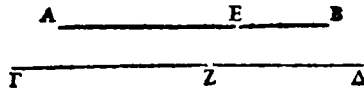
PROPOSITION LXX.

Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

286 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἴτω ῥητὸν καὶ μείσον δυναμένη ἡ  $AB$ , καὶ τῇ  $AB$  σύμμετρος ἴστω ἡ  $\Gamma\Delta$ . δεικτέον ὅτι καὶ ὁ  $\Gamma\Delta$  ῥητὸν καὶ μείσον δυναμένη ἴστί.

Sit rationale et medium potens  $AB$ , et ipsi  $AB$  commensurabilis sit  $\Gamma\Delta$ ; ostendendum est et  $\Gamma\Delta$  rationale et medium potentem esse.



Διηρήσθω ἡ  $AB$  εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ  $E$ · αἱ  $AE$ ,  $EB$  ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μείσον, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. Ομοίως δὲ διίξομεν ὅτι καὶ αἱ  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  τῷ συγκείμενῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν  $AE$ ,  $EB$  τῷ ὑπὸ τῶν  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ . ὥστε καὶ τὸ μὲν<sup>3</sup> συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  τετραγώνων ἴστί μείσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  ῥητόν· ῥητὸν ἄρα καὶ μείσον δυναμένη ἴστί ἡ  $\Gamma\Delta$ . Οὔτε διίξαι.

Dividatur  $AB$  in rectas ad  $E$ ; ipsæ  $AE$ ,  $EB$  igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; et eadem construantur quæ suprâ. Similiter utique demonstrabimus et  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  potentiâ esse incommensurabiles, et commensurable quidem compositum ex quadratis ipsarum  $AE$ ,  $EB$  composito ex quadratis ipsarum  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ , rectangulum verò sub  $AE$ ,  $EB$  rectangulo sub  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ ; quare et quidem compositum ex ipsarum  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  quadratis est medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; rationale igitur et medium potens est  $\Gamma\Delta$ . Quod oportebat ostendere.

Que la droite  $AB$  puisse une surface rationnelle et une surface médiale, et que  $\Gamma\Delta$  soit commensurable avec  $AB$ ; il faut démontrer que la droite  $\Gamma\Delta$  peut aussi une surface rationnelle et une surface médiale.

Divisons  $AE$  en ses droites au point  $E$ ; les droites  $AE$ ,  $EB$  seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Faisons la même construction qu'auparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  sont incommensurables en puissance, que la somme des quarrés des droites  $AE$ ,  $EB$  est commensurable avec la somme des quarrés des droites  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ , et que le rectangle sous  $AE$ ,  $EB$  l'est aussi avec le rectangle sous  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$ ; la somme des quarrés des droites  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  est donc médiale, et le rectangle sous  $\Gamma Z$ ,  $Z\Delta$  rationel (24. 10); la droite  $\Gamma\Delta$  peut donc une surface rationnelle et une surface médiale (41. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οά.

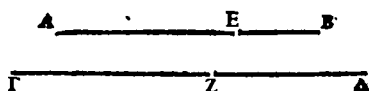
PROPOSITIO LXXI.

Ἡ τῇ δύο μίσα δυναμένη σύμμετρος δύο μίσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐστω δύο μίσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεκτικόν δὲ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μίσα δυναμένη ἐστίν.

Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

Sit bina media potens AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; ostendendum est et ΓΔ bina media potentem esse.



Ἐπεὶ γὰρ δύο μίσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB, διηρήσθω εἰς τὰς ὑθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ AE, EB, ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων<sup>2</sup> μίσην, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μίσην, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE, EB· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ὀμοίως δὲ δείξμεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas ad E; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum AE, EB quadratis rectangulo sub AE, EB; et construantur eadem quæ suprâ. Similiter utique demonstrabimus et ΓΖ, ΖΔ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurabile quidem

PROPOSITION LXXI.

Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

Que la droite AB puisse deux surfaces médiales, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; il faut démontrer que ΓΔ peut aussi deux surfaces médiales.

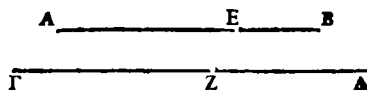
Car, puisque la droite AB peut deux surfaces médiales, qu'elle soit divisée en ses droites au point E; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés des droites AE, EB étant incommensurable avec le rectangle sous les droites AE, EB (42. 10). Faisons la même construction qu'auparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓΖ, ΖΔ sont incommensurables en puissance; que la somme des carrés des droites AE, EB est



## 288 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ  
τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ,  
ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ὥστε καὶ τὸ συγ-

compositum ex quadratis ipsarum ΑΕ, ΕΒ com-  
posito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangu-  
lum verò sub ΑΕ, ΕΒ rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ;



κείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων  
μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον, καὶ  
ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  
ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἡ  
ἄρα ΓΔ δὺο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ὅπερ ἔδει  
δείξαι.

quare et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ qua-  
dratis medium est, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ  
medium, et adhuc incommensurable compo-  
situm ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis rectangulo  
sub ΓΖ, ΖΔ; ergo ΓΔ bina media potens est.  
Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 65.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες  
ἄλλοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ  
δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ  
μέσον δυναμένη.

Ἐστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ·  
λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χαρίον δυναμένη, ἥτοι ἐκ

### PROPOSITIO LXXII.

Rationali et medio compositis, quatuor irra-  
tionales fiunt, vel ex binis nominibus recta,  
vel ex binis mediis prima, vel major, vel et  
rationale et medium potens.

Sit rationale quidem ipsum ΑΒ, medium verò  
ΓΔ; dico rectam, quæ ΑΔ spatium potest, vel

commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle  
sous ΑΕ, ΕΒ l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; la somme des quarrés des  
droites ΓΖ, ΖΔ est donc médiale, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ médial aussi, et la somme  
des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ incommensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ  
(24. 10); la droite ΓΔ peut donc deux surfaces médiales (42. 10). Ce qu'il fallait  
démontrer.

### PROPOSITION LXXII.

Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre  
droites irrationnelles; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux  
médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle  
et une surface médiale.

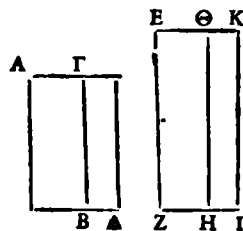
Soit la surface rationnelle ΑΒ, et la surface médiale ΓΔ; je dis que la droite qui

δύο ὀνομάτων ἴσθιν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ  $AB$  τοῦ  $\Gamma A$  ἥτοι μείζων ἴσθιν, ἢ ἔλασσον. Ἐστω πρότερον μείζων· καὶ ἐκείσθω ῥητὴ ἡ  $EZ$ , καὶ παραβελήσθω παρὰ τὴν  $EZ$  τῷ  $AB$  ἴσον τὸ  $EH$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $E\Theta$ · τῷ δὲ  $\Gamma A$  ἴσον παρὰ τὴν  $EZ$ , τουτίσθι τὴν  $\Theta H'$ ,

ex binis nominibus esse, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale et medium potentem.

Etenim  $AB$  quam  $\Gamma A$  vel majus est, vel minus. Sit primum majus; et exponatur rationalis  $EZ$ , et applicetur ad ipsam  $EZ$  ipsi  $AB$  æquale  $EH$ , latitudinem faciens  $E\Theta$ ; ipsi autem  $\Gamma A$  æquale ad  $EZ$ , hoc est  $\Theta H$ , applicetur  $\Theta I$  latitu-



παραβελήσθω τὸ  $\Theta I$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Theta K$ . Καὶ ἐπὶ ῥητόν ἴσθι τὸ  $AB$ , καὶ ἴσθιν ἴσον τῷ  $EH$ <sup>2</sup>· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ  $EH$ , καὶ παρὰ ῥητὴν<sup>3</sup> τὴν  $EZ$  παραβέλνεται πλάτος ποιοῦν τὴν  $E\Theta$ · ἡ  $E\Theta$  ἄρα ῥητὴ ἴσθι<sup>4</sup> καὶ σύμμετρος τῇ  $EZ$  μήκει. Πάλιν, ἐπὶ μέσον ἴσθι<sup>5</sup> τὸ  $\Gamma A$ , καὶ ἴσθιν ἴσον τῷ  $\Theta I$ <sup>6</sup>· μέσον ἄρα ἴσθι καὶ τὸ  $\Theta I$ , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν  $EZ$  παράκειται, τουτίσθι τὴν  $\Theta H'$ <sup>7</sup>, πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Theta K$ · ῥητὴ ἄρα

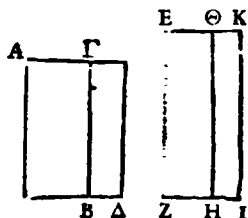
dinem faciens  $\Theta K$ . Et quoniam rationale est  $AB$ , et est æquale ipsi  $EH$ ; rationale igitur et  $EH$ , et ad rationalem  $EZ$  applicatur latitudinem faciens  $E\Theta$ ; ipsa  $E\Theta$  igitur rationalis est et commensurabilis ipsi  $EZ$  longitudine. Rursus, quoniam medium est  $\Gamma A$ , et est æquale ipsi  $\Theta I$ ; medium igitur est et  $\Theta I$ , et ad rationalem  $EZ$  applicatur, hoc est ad  $\Theta H$ , latitudinem faciens  $\Theta K$ ; rationalis igitur

peut la surface  $AB$ , est ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou une droite majeure, ou la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

Car la surface  $AB$  est ou plus grande ou plus petite que  $\Gamma A$ . Qu'elle soit d'abord plus grande. Soit exposée la rationnelle  $EZ$ ; appliquons à  $EZ$  un parallélogramme  $EH$  égal à  $AB$ , ce parallélogramme ayant la droite  $E\Theta$  pour largeur; appliquons aussi à  $EZ$ , c'est-à-dire à  $\Theta H$ , un parallélogramme  $\Theta I$  égal à  $\Gamma A$ , ce parallélogramme ayant la droite  $\Theta K$  pour largeur. Puisque  $AB$  est rationnel et égal à  $EH$ , le parallélogramme  $EH$  sera rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle  $EZ$ , et il a pour largeur la droite  $E\Theta$ ; la droite  $E\Theta$  est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec  $EZ$  (21. 10). De plus, puisque  $\Gamma A$  est médial, et qu'il est égal à  $\Theta I$ , le parallélogramme  $\Theta I$  sera médial; mais il est appliqué à la rationnelle  $EZ$ , c'est-à-dire

ἴσθιν ἡ  $\Theta\text{K}$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $\text{EZ}$  μήκει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἴσθι τὸ  $\Gamma\Delta$ , ῥητὸν δὲ τὸ  $\text{AB}$ , ἀσύμμετρον ἄρα ἴσθι τὸ  $\text{AB}$  τῇ  $\Gamma\Delta$ , ὥστε καὶ τὸ  $\text{EH}$  ἀσύμμετρον ἴσθι τῇ  $\Theta\text{I}$ . Ὡς δὲ τὸ  $\text{EH}$  πρὸς τὸ  $\Theta\text{I}$  οὕτως ἴσθιν ἡ  $\text{E}\Theta$  πρὸς τὴν  $\Theta\text{K}$ , ἀσύμμετρος ἄρα ἴσθι καὶ ἡ  $\text{E}\Theta$  τῇ  $\Theta\text{K}$  μήκει· καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ  $\text{E}\Theta$ ,  $\Theta\text{K}$  ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων

est  $\Theta\text{K}$ , et incommensurabilis ipsi  $\text{EZ}$  longitudine. Et quoniam medium est  $\Gamma\Delta$ , rationale autem  $\text{AB}$ ; incommensurabile igitur est  $\text{AB}$  ipsi  $\Gamma\Delta$ ; quare et  $\text{EH}$  incommensurabile est ipsi  $\Theta\text{I}$ . Ut autem  $\text{EH}$  ad  $\Theta\text{I}$  ita est  $\text{E}\Theta$  ad  $\Theta\text{K}$ ; incommensurabilis igitur est et  $\text{E}\Theta$  ipsi  $\Theta\text{K}$  longitudine; et sunt ambæ rationales; ipsæ  $\text{E}\Theta$ ,  $\Theta\text{K}$  igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est  $\text{EK}$  divisæ



ἴσθιν ἡ  $\text{EK}$  διηρημένη κατὰ τὸ  $\Theta$ . Καὶ ἐπεὶ μείζον ἴσθι τὸ  $\text{AB}$  τοῦ  $\Gamma\Delta$ , ἴσον δὲ τὸ μὲν  $\text{AB}$  τῷ  $\text{EH}$ , τὸ δὲ  $\Gamma\Delta$  τῷ  $\Theta\text{I}$ , μείζον ἄρα καὶ τὸ  $\text{EH}$  τοῦ  $\Theta\text{I}$ , καὶ ἡ  $\text{E}\Theta$  ἄρα μείζων ἴσθι τῆς  $\Theta\text{K}$ . Ἥτοι οὖν ἡ  $\text{E}\Theta$  τῆς  $\Theta\text{K}$  μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἴσθιν ἡ  $\text{E}\Theta$  μείζων ἡ  $\Theta\text{K}$  σύμμετρος

ad  $\Theta$ . Et quoniam majus est  $\text{AB}$  quam  $\Gamma\Delta$ , æquale verò  $\text{AB}$  quidem ipsi  $\text{EH}$ , ipsum verò  $\Gamma\Delta$  ipsi  $\Theta\text{I}$ ; majus igitur et  $\text{EH}$  quam  $\Theta\text{I}$ ; et  $\text{E}\Theta$  igitur major est quam  $\Theta\text{K}$ . Vel igitur  $\text{E}\Theta$  quam  $\Theta\text{K}$  plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et est major

à  $\Theta\text{H}$ , et il a pour largeur la droite  $\Theta\text{K}$ ; la droite  $\Theta\text{K}$  est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec  $\text{EZ}$  (23. 10). Et puisque  $\Gamma\Delta$  est médial, et que  $\text{AB}$  est rationnel,  $\text{AB}$  sera incommensurable avec  $\Gamma\Delta$ ; le parallélogramme  $\text{EH}$  est donc incommensurable avec  $\Theta\text{I}$ . Mais  $\text{EH}$  est à  $\Theta\text{I}$  comme  $\text{E}\Theta$  est à  $\Theta\text{K}$ ; la droite  $\text{E}\Theta$  est donc incommensurable en longueur avec  $\Theta\text{K}$  (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites  $\text{E}\Theta$ ,  $\Theta\text{K}$  sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite  $\text{EK}$  divisée au point  $\Theta$  est donc une droite de deux noms. Et puisque  $\text{AB}$  est plus grand que  $\Gamma\Delta$ , que  $\text{AB}$  est égal à  $\text{EH}$ , et que  $\Gamma\Delta$  est égal à  $\Theta\text{I}$ , le parallélogramme  $\text{EH}$  est plus grand que  $\Theta\text{I}$ ; la droite  $\text{E}\Theta$  sera par conséquent plus grande que  $\Theta\text{K}$ . La puissance de  $\text{E}\Theta$  surpasse donc celle de  $\Theta\text{K}$  du carré d'une droite commensurable ou incommensurable en longueur avec  $\text{E}\Theta$ . Que la puissance de  $\text{E}\Theta$  surpasse d'abord la puissance de  $\Theta\text{K}$  du carré d'une droite commensurable

τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΓ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ ΕΘ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἔλασσον ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,

ΘΕ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est prima, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ, recta igitur ipsum ΕΙ potens ex binis nominibus est; quare et recta ipsum ΑΔ potens ex binis nominibus est. Sed ΕΘ quam ΘΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est major ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quarta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus quartâ, recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major; recta igitur spatium ΕΙ potens major est; quare et recta ipsum ΑΔ potens major est.

Sed et sit minus ΑΒ quam ΓΔ; et ΕΗ igitur minus est quam ΘΙ; quare et ΕΘ minor est quam ΘΚ; vel autem ΘΚ quam ΕΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-

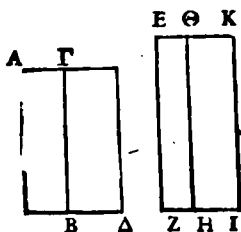
avec ΕΘ; mais ΕΕ, plus grand que ΘΚ, est commensurable avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite de deux noms; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ, puisque ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure (58. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite majeure; la droite qui peut la surface ΑΔ est donc aussi une droite majeure.

Mais que la surface ΑΒ soit plus petite que la surface ΓΔ; la surface ΕΗ sera plus petite que la surface ΘΙ; la droite ΕΘ sera par conséquent plus petite que ΘΚ; or, la puissance de ΘΚ surpasse la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite commen-

292 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἰαυτῇ μήκει, καὶ ἔστιν<sup>10</sup> ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διυτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται<sup>11</sup> ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυνάμειν ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυνάμειν ἐκ δύο μέσων

drato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est secunda, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus secundâ, recta spatium potens ex binis mediis est prima; recta igitur spatium ΕΙ



ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον<sup>12</sup> δυνάμειν ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἰαυτῇ, καὶ ἔστιν<sup>13</sup> ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων

potens ex binis mediis est prima; quare et recta spatium ΑΔ potens ex binis mediis est prima. Sed et ΚΘ quam ΕΘ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quinta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis

surable ou incommensurable en longueur avec ΕΚ. Que la puissance de ΕΚ surpasse d'abord la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΕΚ, puisque la droite ΕΘ, plus petite que ΕΚ, est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous une seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est la première de deux médiales (56. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc la première de deux médiales; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la première de deux médiales. Mais que la puissance de ΚΘ surpasse la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ΚΘ; puisque ΕΘ, plus petit que ΚΘ, est commensurable avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la cinquième de deux

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 293

πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν· ἢ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν.

Ρητοῦ ἄρα καὶ μίσην, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μίσην ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἥτοι ἡ ἐκ δύο μίσην διυτέρα, ἢ ἡ δύο μίσην δυναμένη.

Συγκείμεθωσαν γὰρ δύο μίσην ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἥτοι ἐκ δύο μίσην ἐστὶ διυτέρα, ἢ ἡ δύο μίσην δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἥτοι μείζον ἐστίν, ἢ ἴσασον. Ἐστὶ<sup>3</sup> πρότερον μείζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείμεθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῇ μὲν ΑΒ ἴσον

nomibus quintâ, recta spatium potens rationale et medium potens est; recta igitur spatium EI potens rationale et medium potens est; quare et recta spatium ΑΔ potens rationale et medium potens est.

Rationali igitur et medio, etc.

### PROPOSITIO LXXIII.

Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se ΑΒ, ΓΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis esse secundam, vel bina media potentem.

Etenim ΑΒ quam ΓΔ vel majus est, vel minus. Sit primum majus ΑΒ quam ΓΔ; et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi quidem ΑΒ

noms, la droite qui peut cette surface est celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale (59. 10); la droite qui peut la surface EI est donc celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale. Donc, etc.

### PROPOSITION LXXIII.

Deux surfaces médiales incommensurables entre elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

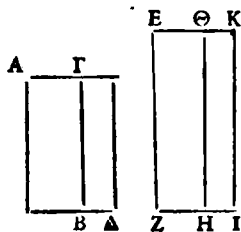
Ajoutons les deux surfaces médiales ΑΒ, ΓΔ qui sont incommensurables entre elles; je dis que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Car la surface ΑΒ est ou plus grande ou plus petite que la surface ΓΔ. Que ΑΒ soit d'abord plus grand que ΓΔ; soit exposée la rationnelle ΕΖ; et appliquons à ΕΖ un

294 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παρὰ τὴν EZ παραβλήσθω τὸ EH πλάτος  
 ποιοῦν τὴν EΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος  
 ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπὶ μέσον ἔστιν ἑκάτερον  
 AB, ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν EH, ΘΙ,  
 καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος  
 ποιοῦν τὰς EΘ, ΘΚ· ἑκάτερα ἄρα τῶν EΘ, ΘΚ  
 ῥητὴ ἔστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ  
 ἐπὶ ἀσύμμετρον ἔστι τὸ AB τῷ ΓΔ, καὶ ἔστιν

æquale ad EZ applicetur EH latitudinem faciens  
 EΘ, ipsi verò ΓΔ æquale ΘΙ latitudinem fa-  
 ciens ΘΚ. Et quoniam medium est utrumque  
 ipsorum AB, ΓΔ; medium igitur et utrumque  
 ipsorum EH, ΘΙ, et ad rationalem EZ appli-  
 cantur, quæ latitudinem faciunt EΘ, ΘΚ; utraque  
 igitur ipsarum EΘ, ΘΚ rationalis est, et incom-  
 mensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam  
 incommensurable est AB ipsi ΓΔ, et est æquale



ἴσον τὸ μὲν AB τῷ EH, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμ-  
 μετρον ἄρα ἔστι καὶ τὸ EH τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ  
 τὸ EH πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἔστιν ἡ EΘ πρὸς τὴν  
 ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ EΘ τῇ ΘΚ μήκει·  
 αἱ EΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-  
 μετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἔστιν ἡ ΕΚ. Ἦτοι  
 δὲ ἡ EΘ τῆς ΘΚ μᾶλλον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-  
 μέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυ-

quidem AB ipsi EH, ipsum verò ΓΔ ipsi ΘΙ; in-  
 commensurable igitur est et EH ipsi ΘΙ. Ut au-  
 tem EH ad ΘΙ ita est EΘ ad ΘΚ; incommensura-  
 bilis igitur est EΘ ipsi ΘΚ longitudine; ipsæ EΘ,  
 ΘΚ igitur rationales sunt potentiâ solum com-  
 mensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΕΚ.  
 Vel autem EΘ quam ΘΚ plus potest quadrato ex  
 rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ

parallélogramme EH égal à AB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EΘ;  
 appliquons aussi à EZ un parallélogramme ΘΙ égal à ΓΔ, ce parallélogramme ayant  
 pour largeur la droite ΘΚ. Puisque les surfaces AB, ΓΔ sont médiales l'une et l'autre,  
 les surfaces EH, ΘΙ seront aussi médiales l'une et l'autre; mais ces surfaces sont  
 appliquées à EZ, et elles ont pour largeur les droites EΘ, ΘΚ; les droites EΘ, ΘΚ  
 sont donc rationnelles l'une et l'autre (23. 10), et incommensurables en longueur  
 avec EZ. Et puisque AB est incommensurable avec ΓΔ, que AB est égal à EH, et  
 que ΓΔ est égal à ΘΙ, la surface EH sera incommensurable avec ΘΙ. Mais EH est à ΘΙ  
 comme EΘ est à ΘΚ; la droite EΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΚ;  
 les droites EΘ, ΘΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seule-  
 ment; ΕΚ est donc une droite de deux noms. Or, la puissance de EΘ surpasse  
 la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable

νάσθω πρότερον τῇ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΕΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἢ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. Αλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΕΚ μίῳζον δυνάσθω τῇ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΕΚ τῇ ΕΖ μήκει, ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δυναμένη ἐστὶν ὥστε καὶ<sup>5</sup> ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δυναμένη ἐστὶν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι, κἄν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ, δύο ἢ μία δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων, καὶ τὰ ἐξῆς?

incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΕΘ, ΕΚ commensurabilis est expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est tertia, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens ex binis mediis est secunda; recta igitur ipsum ΕΙ, hoc est ΑΔ potens, ex binis mediis est secunda. Sed ΕΘ quam ΕΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et incommensurabilis est utraque ipsarum ΕΘ, ΕΚ ipsi ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est sexta. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens bina media potens est; quare et spatium ΑΔ potens bina media potens est. Similiter utique demonstrabimus, et si minus sit ΑΒ quam ΓΔ, rectam quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

Duobus igitur mediis, etc.

avec ΕΘ. Que la puissance de ΕΘ surpasse d'abord la puissance de ΕΚ d'une droite commensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΕΚ ne sont ni l'une ni l'autre commensurables en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la troisième de deux noms; mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la seconde de deux médiales (57. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ, c'est-à-dire ΑΔ, est donc la seconde de deux médiales. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΕΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΕΚ sont l'une et l'autre incommensurables en longueur avec ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Mais si une surface est comprise sous une rationelle et sous une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la droite qui peut deux médiales (60. 10); la droite qui peut la surface ΑΔ est donc la droite qui peut deux médiales. Si ΑΒ était plus petit que ΓΔ, nous démontrerions semblablement que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales. Donc, etc.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

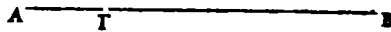
Εάν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἀλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἀποτομή.

Απὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφαιρήσθαι ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή.

## PROPOSITIO LXXIV.

Si à rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

A rationali enim ΑΒ rationalis auferatur ΒΓ, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, quæ vocatur apotome.



Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῇ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ

Quoniam enim incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, atque est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΑΒ quadratum ad rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, incommensurable igitur est ex ΑΒ quadratum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ; sed quadrato quidem ex ΑΒ commensurabilia sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata, rectangulo verò sub ΑΒ, ΒΓ commensurable est rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ; quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ incommensurabilia sunt rec-

## PROPOSITION LXXIV.

Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

Que la rationnelle ΒΓ, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, soit retranchée de la droite ΑΒ; je dis que la droite restante ΑΓ, appelée apotome, est irrationnelle.

Car puisque ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ est à ΒΓ comme le carré de ΑΒ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (1.6), le carré de ΑΒ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; mais la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ est commensurable avec le carré de ΑΒ (16.10), et le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est commensurable avec le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec le double rec-

λοιπὴ ἄρα τῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ². Πητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλεῖσθαι δὲ ἀποτομὴ.

tangulo bis sub AB, BG; et reliquo igitur quadrato ex AG incommensurabilia sunt quadrata ex AB, BG; quoniam et quadrata ex AB, BG æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BG cum quadrato ex AG. Rationalia autem sunt quadrata ex AB, BG; irrationalis igitur est AG, vocetur autem apotomè.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ σί.

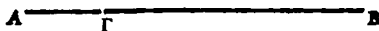
Εὰν ἀπὸ μέσης μίση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Απὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μίση ἀφηρήσθαι ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ΑΒ,

PROPOSITIO LXXV.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim AB media auferatur BG, potentiâ solùm commensurabilis existens ipsi AB,



μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιούσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

et cum eâ AB rationale faciens rectangulum sub AB, BG; dico reliquam AG irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

tangle sous AB, BG (14. 10); la somme des quarrés des droites AB, BG est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite AG (17. 10), parce que la somme des quarrés des droites AB, BG est égale au double rectangle sous AB, BG, conjointement avec le quarré de AG (7. 2). Mais la somme des quarrés des droites AB, BG est rationnelle; la droite AG est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et elle sera appelée apotome.

PROPOSITION LXXV.

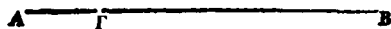
Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le premier apotome de la médiale.

De la médiale AB retranchons la médiale BG, commensurable en puissance seulement avec AB, et faisant avec AB le rectangle sous AB, BG rationel; je dis que la droite restante AG est irrationnelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

## 298 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ γὰρ αἱ  $AB$ ,  $BΓ$  μέσαι ἰσὶ, μία ἴστι<sup>2</sup>  
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ . Ρητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ  
τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  
 $BΓ$  τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ

Quoniam enim  $AB$ ,  $BΓ$  mediæ sunt, media  
sunt et quadrata ex  $AB$ ,  $BΓ$ . Rationale autem  
rectangulum bis sub  $AB$ ,  $BΓ$ ; incommensura-  
bilia igitur ex  $AB$ ,  $BΓ$  quadrata rectangulo bis  
sub  $AB$ ,  $BΓ$ ; et reliquo igitur quadrato ex  $AΓ$



ἀπὸ τῆς  $AΓ$  ἀσύμμετρόν ἴστι τὸ δις ὑπὸ τῶν<sup>3</sup>  
 $AB$ ,  $BΓ$ · ἐπεὶ καὶ τὸ ὅλον ἐν αὐτῶν ἀσύμμετρον  
ἔ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἴσται.  
Ρητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἄλογον ἄρα  
τὸ ἀπὸ τῆς  $AΓ$  ἄλογος ἄρα ἴστιν<sup>4</sup> ὁ  $AΓ$ , κα-  
λείσθω δὲ<sup>5</sup> μίσσης ἀποτομὴ πρώτη.

incommensurable est rectangulum bis sub  $AB$ ,  
 $BΓ$ ; quoniam et si tota magnitudo cum unâ ip-  
sarum incommensurabilis sit, et quæ à principio  
magnitudines incommensurabiles erunt. Ratio-  
nale autem bis rectangulum sub  $AB$ ,  $BΓ$ ; irratio-  
nale igitur quadratum ex  $AΓ$ ; irrationalis igitur  
est  $AΓ$ , vocetur autem mediæ apotome prima.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ᾠς'.

### PROPOSITIO LXXVI.

Εὰν ἀπὸ μίσσης μίσση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον  
σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μί-  
σον περιέχῃ<sup>1</sup>· ἡ λοιπὴ ἄλογος ἴστι, καλείσθω δὲ  
μίσσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Si a mediâ mediâ auferatur, potentiâ solum  
commensurabilis existens toti, quæ cum totâ  
medium continet; reliqua irrationalis est, vo-  
cetur autem mediæ apotome secunda.

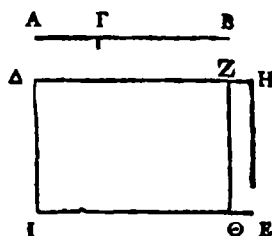
Car, puisque les droites  $AB$ ,  $BΓ$  sont médiales, les quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  seront médiaux. Mais le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est rationel; la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  est donc incommensurable avec le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$ ; le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite  $AΓ$  (7.2); parce que si une grandeur entière est incommensurable avec l'une de celles qui la composent, les grandeurs composantes sont incommensurables (17.10). Mais le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est rationel; le quarré de  $AΓ$  est donc irrationel; la droite  $AΓ$  est donc irrationnelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

### PROPOSITION LXXVI.

Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le second apotome de la médiale.

Απὸ γὰρ μείσεως τῆς ΑΒ μείση ἀφαιρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς<sup>2</sup> ὅλης τῆς ΑΒ μείσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείσεως ἀποτομὴ διευτίρα.

A mediâ enim AB media auferatur BG, potentiâ solùm commensurabilis existens toti AB, et cum totâ AB medium continens rectangulum sub AB, BG; dico reliquam AG irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome secunda.



Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβιβάσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβιβάσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ μίση ἐστὶ<sup>3</sup> τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μείσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μείσον

Exponatur enim rationalis ΔΙ, et quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ad ipsam ΔΙ applicetur ΔΕ latitudinem faciens ΔΗ, rectangulo verò bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ad ipsam ΔΙ applicetur ΔΘ latitudinem faciens ΔΖ; reliquum igitur ΖΕ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam media sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; medium igitur et ΔΕ. Et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΗ; rationalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine.

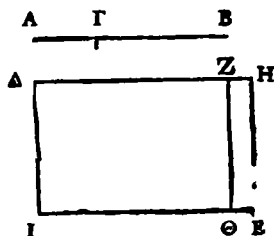
De la médiale AB retranchons la médiale BG, commensurable en puissance seulement avec la droite entière AB, et comprenant avec la droite entière AB le rectangle médial sous AB, BG; je dis que la droite restante AG est irrationnelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

Soit exposée la rationnelle ΔΙ; appliquons à ΔΙ un parallélogramme ΔΕ égal à la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΔΗ; appliquons aussi à la droite ΔΙ un parallélogramme ΔΘ égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΔΖ; le reste ΖΕ sera égal au quarré de ΑΓ (7. 2). Et puisque les quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ sont médiaux, le parallélogramme ΔΕ sera médial (24. cor. 10). Mais il est appliqué à la rationnelle ΔΙ, et il a pour largeur la droite ΔΗ; la droite ΔΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΙ (23. 10). De plus, puisque le

### 300 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν  $AB, BG$ · καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  μίσον ἔστί. Καὶ ἴσιν ἴσον τῷ  $\Delta\Theta$ · καὶ τὸ  $\Delta\Theta$  ἄρα μίσον ἔστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν  $\Delta I$  παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta Z$ · ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ  $\Delta Z$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $\Delta I$  μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ  $AB, BG$  δυάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ  $AB$  καὶ τῇ  $BG$  μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  τιτράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν  $AB,$

Rursus, quoniam medium est rectangulum sub  $AB, BG$ ; et rectangulum bis igitur sub  $AB, BG$  medium est. Atque est æquale ipsi  $\Delta\Theta$ ; et  $\Delta\Theta$  igitur medium est, et ad rationalem  $\Delta I$  applicatur latitudinem faciens  $\Delta Z$ ; rationalis igitur est  $\Delta Z$ , et incommensurabilis ipsi  $\Delta I$  longitudine. Et quoniam  $AB, BG$  potentiâ solum commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est  $AB$  et ipsi  $BG$  longitudine; incommensurable igitur et ex  $AB$  quadratum rectangulo sub



$BG$ . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AB$  σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν  $AB, BG$ , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AB, BG$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἔστί τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  τοῖς ἀπὸ τῶν  $AB, BG$   $\Delta E$ . Ἰσὸν δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $AB, BG$  τὸ  $\Delta E$ , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν  $AB, BG$  τὸ  $\Delta\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἔστί<sup>6</sup> τὸ  $\Delta E$  τῷ

$AB, BG$ . Sed quadrato quidem ex  $AB$  commensurabilia sunt quadrata ex  $AB, BG$ , rectangulo autem sub  $AB, BG$  commensurable est rectangulum bis sub  $AB, BG$ ; incommensurable igitur est rectangulum bis sub  $AB, BG$  quadratis ex  $AB, BG$ . Æquale verò quadratis quidem ex  $AB, BG$  ipsum  $\Delta E$ , rectangulo autem bis sub  $AB, BG$  ipsum  $\Delta\Theta$ ; incommensurable igitur est  $\Delta E$  ipsi

rectangle sous  $AB, BG$  est médial, le double rectangle sous  $AB, BG$  sera médial (24. cor. 10). Mais il est égal à  $\Delta\Theta$ ; le parallélogramme  $\Delta\Theta$  est donc médial, et il est appliqué à la rationelle  $\Delta I$ , sa largeur étant la droite  $\Delta Z$ ; la droite  $\Delta Z$  est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec  $\Delta I$ . Et puisque les droites  $AB, BG$  ne sont commensurables qu'en puissance, la droite  $AB$  sera incommensurable en longueur avec  $BG$ ; le carré de  $AB$  est donc incommensurable avec le rectangle sous  $AB, BG$  (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés des droites  $AB, BG$  est commensurable avec le carré de  $AB$  (16. 10), et le double rectangle sous  $AB, BG$  est commensurable avec le rectangle sous  $AB, BG$  (6. 10); le double rectangle sous  $AB, BG$  est donc incommensurable avec la somme des carrés des droites  $AB, BG$ . Mais  $\Delta E$  est égal à la somme des carrés des droites  $AB, BG$ , et  $\Delta\Theta$  égal au double rectangle sous  $AB, BG$ ; le parallélogramme  $\Delta E$  est donc incommensurable avec  $\Delta\Theta$ . Mais

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 301

**ΔΘ.** Ως δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει<sup>7</sup>. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ρηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον<sup>8</sup> ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυνάμειν ἄρα<sup>9</sup> αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μέσης<sup>10</sup> ἀποτομὴν δευτέραν.

**ΔΘ.** Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita ΗΔ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΗΔ ipsi ΔΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ergo ΗΔ, ΔΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΗ apotome est. Rationalis autem ΔΙ, et sub rationali et irrationali contentum rectangulum irrationalis est; et recta potens igitur ipsum irrationalis est. Et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ'.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθείᾳ ἀφαιρηθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ρητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἐλάσσων.

Απὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθείᾳ ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα

### PROPOSITIO LXXVII.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

A rectâ enim ΑΒ recta auferatur ΒΓ, potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum

ΔΕ est à ΔΘ comme ΗΔ est à ΔΖ; la droite ΗΔ est donc incommensurable en longueur avec ΔΖ. Mais ces droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΗ est donc un apotome (74. 10). Mais la droite ΔΙ est rationnelle, et le rectangle compris sous une rationnelle et sous une irrationnelle est irrationnel (39. 10); la droite qui peut ce rectangle est donc irrationnelle. Mais ΑΓ peut ΖΕ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

### PROPOSITION LXXVII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

De la droite ΑΒ retranchons la droite ΒΓ, qui étant incommensurable en puissance

## 302 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετὰ τῆς ὅλης τῆς  $AB$  τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἅμα μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ  $ΑΓ$  ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἰλάσσων.

totā  $AB$  compositum quidem ex quadratis ipsarum  $AB$ ,  $BΓ$  simul rationale, rectangulum verò bis sub  $AB$ ,  $BΓ$  simul medium; dico reliquam  $ΑΓ$  irrationalem esse, vocetur autem minor.



Επεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  τετραγώνων ῥητὸν ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  τῇ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$ · καὶ ἀναστρέφαντι ἀσύμμετρόν ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  τῇ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$ <sup>3</sup>. Ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BΓ$  ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $ΑΓ$  ἄλογος ἄρα ἡ  $ΑΓ$ <sup>4</sup>, καλεῖσθω δὲ ἰλάσσων.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum  $AB$ ,  $BΓ$  quadratis rationale est, rectangulum verò bis sub  $AB$ ,  $BΓ$  medium; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex  $AB$ ,  $BΓ$  rectangulo bis sub  $AB$ ,  $BΓ$ ; et convertendo incommensurabilia sunt ex  $AB$ ,  $BΓ$  quadrata quadrato ex  $ΑΓ$ . Rationalia autem quadrata ex  $AB$ ,  $BΓ$ ; irrationalia igitur quadratum ex  $ΑΓ$ ; irrationalis igitur  $ΑΓ$ , vocetur autem minor.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ οή.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθείᾳ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν

### PROPOSITIO LXXVIII.

Si a rectā recta auferatur, potentiā incommensurabilis existens toti, et cum totā faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium,

avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  rationnelle, et le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  médial; je dis que la droite restante  $ΑΓ$  est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

Car puisque la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  est rationnelle, et que le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$  est médial, la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  sera incommensurable avec le double rectangle sous  $AB$ ,  $BΓ$ ; donc, par conversion, la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  est incommensurable avec le quarré de  $ΑΓ$  (17. 10). Mais la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BΓ$  est rationnelle; le quarré de  $ΑΓ$  est donc irrationnel; la droite  $ΑΓ$  est donc irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

### PROPOSITION LXXVIII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de

τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἀλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρέσθω ἡ BG, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ AB, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ AG ἀλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα<sup>2</sup>.

rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur BG, potentiâ incommensurabilis existens toti AB, faciens quidem compositum ex ipsarum AB, BG quadratis medium, rectangulum verò bis sub AB, BG rationale; dico reliquam AG irrationalem esse, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μίσην ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG<sup>3</sup> τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG. Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG ἀλογόν ἐστιν· ἀλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AG, καλεῖσθαι δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, BG quadratis medium est, rectangulum verò bis sub AB, BG rationale; incommensurabilia igitur sunt ex AB, BG quadrata rectangulo bis sub AB, BG; et reliquum igitur quadratum ex AG incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BG. Atque est rectangulum bis sub AB, BG rationale; quadratum igitur ex AG irrationale est; irrationalis igitur est AG, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite BG, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB, fasse la somme des quarrés de AB et de BG médiale, et le double rectangle sous AB, BG rationel; je dis que la droite restante AG est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, puisque la somme des quarrés des droites AB, BG est médiale, et que le double rectangle sous AB, BG est rationel, la somme des quarrés des droites AB, BG sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG; le quarré restant de la droite AG est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (17. 10). Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; le quarré de AG est donc irrationnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΘΒ'.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν ἢ λοιπῇ ἀλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς  $AB$  εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ  $BF$ , δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ  $AB$ , ποιοῦσα τὰ προκείμενα<sup>3</sup>. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ  $AF$  ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα<sup>4</sup>.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ  $\Delta I$ , καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν  $AB$ ,  $BF$  ἴσον παρὰ ῥητὴν<sup>5</sup> τὴν  $\Delta I$  παραβέβλησθαι τὸ  $\Delta E$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Delta H$ , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν  $AB$ ,  $BF$  ἴσον ἀφηρήσθαι τὸ  $\Delta \Theta$

## PROPOSITIO LXXIX.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

A rectâ enim  $AB$  recta auferatur  $BF$ , potentiâ incommensurabilis existens ipsi  $AB$ , faciens proposita; dico reliquam  $AF$  irrationalem esse, quæ vocatur cum medio medium totum faciens.

Exponatur enim rationalis  $\Delta I$ , et quadratis quidem ex  $AB$ ,  $BF$  æquale ad rationalem  $\Delta I$  applicetur  $\Delta E$  latitudinem faciens  $\Delta H$ , rectangulo autem bis sub  $AB$ ,  $BF$  æquale auferatur  $\Delta \Theta$

## PROPOSITION LXXIX.

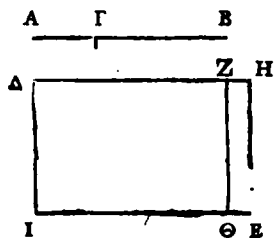
Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

De la droite  $AB$  retranchons la droite  $BF$ , qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière  $AB$ , fasse ce qui est proposé; je dis que la droite restante  $AF$  est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car soit exposée la rationnelle  $\Delta I$ ; appliquons à la rationnelle  $\Delta I$  un parallélogramme  $\Delta E$  égal à la somme des quarrés des droites  $AB$ ,  $BF$ , ce parallélogramme ayant pour largeur la droite  $\Delta H$ ; retranchons de  $\Delta E$  un parallélogramme  $\Delta \Theta$  égal au double rectangle compris sous  $AB$ ,  $BF$ , ce parallélogramme ayant pour largeur la

πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ<sup>6</sup>. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μίσην ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΕ· μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ πα-  
ράκειται πλάτος ποιοῦν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ

latitudinem faciens ΔΖ; reliquum igitur ΖΕ æquale est quadrato ex ΑΓ; quare ipsa ΑΓ potest ipsum ΖΕ. Et quoniam compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, atque est æquale ipsi ΔΕ; medium igitur est ΔΕ, et ad rationalem ΔΙ applicatur, latitudinem faciens ΔΗ; ratio-



ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μίσην ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μίσην ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ<sup>8</sup> καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ<sup>9</sup>. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἐστὶ<sup>10</sup> ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ<sup>11</sup>. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἰσιν

nalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Rursus, quoniam rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ medium est, atque est æquale ipsi ΔΘ; ergo ΔΘ medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, incommensurable igitur est et ΔΕ ipsi ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita est et ΔΗ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΔΗ

droite ΔΖ, le parallélogramme restant ΖΕ sera égal au carré de ΑΓ (7. 2); la droite ΑΓ peut donc la surface ΖΕ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΕ, le parallélogramme ΔΕ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΗ pour largeur; la droite ΔΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, et qu'il est égal à ΔΘ, le parallélogramme ΔΘ sera médial; mais il est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΖ pour largeur; la droite ΔΖ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le parallélogramme ΔΕ sera incommensurable avec le parallélogramme ΔΘ. Mais ΔΕ est à ΔΘ comme ΔΗ est à ΔΖ (1. 6); la droite ΔΗ est donc incommensurable

## 306 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἔστιν ἡ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον<sup>12</sup> ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἢ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλίσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιῶσα.

ipsi ΔΖ. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΗΔ, ΔΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΗ, rationalis autem ΖΘ. Sed sub rationali et apotome contentum rectangulum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον<sup>1</sup> προσαρμόζει εὐθείᾳ ῥητῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Ἐστω ἀποτομή ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζεται ἡ ΒΔ· καὶ<sup>2</sup> αἱ

### PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Sit apotome ΑΒ, congruens autem eidem ipsa ΒΓ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti.

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ,

avec ΔΖ (10. 10). Mais ces deux droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΖΗ est donc un apotome (74. 10), et ΖΘ une rationnelle. Puisque le rectangle compris sous une rationnelle et un apotome est irrationnel (14. 10), que la droite qui peut ce rectangle est irrationnelle, et que ΑΓ peut la surface ΖΕ (39. 10), la droite ΑΓ sera irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

### PROPOSITION LXXX.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

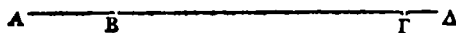
Soit l'apotome ΑΒ, et que ΒΓ lui convienne; les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10); je dis qu'une autre rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière ne convient pas avec ΑΒ.

Que la droite ΒΔ, si cela est possible, convienne avec ΑΒ; les droites ΑΔ, ΔΒ

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 307

ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἵπαι ὅ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφοτέρω ὑπερίχει· ἐναλλάξ ἄρα ὅ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν

ΔΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; eodem enim quadrato ex ΑΒ utraque superant; permutando igitur quo su-



ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ<sup>3</sup> τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ταῖ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ· ῥητὴ γὰρ ἀμφοτέρω<sup>5</sup>· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἀμφοτέρω, μείσον δὲ μείσου οὐχ ὑπερίχει ῥητῶ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλη.

perant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali; rationalis enim utraque; et rectangulum bis igitur sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali; ergo ipsi ΑΒ altera non congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Μία ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Media igitur, etc.

seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ de la même grandeur dont la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces deux excès sont égaux chacun au quarré de ΑΒ (7. 2), par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle, car ces deux sommes sont rationnelles; le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse donc le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle; ce qui est impossible, parce que ces deux grandeurs sont médiales, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle (27. 10); une autre rationnelle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, ne peut donc pas convenir avec ΑΒ. Donc, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

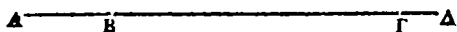
## PROPOSITIO LXXXI.

Τῇ μίση ἀποτομῇ πρώτη μία μόνον<sup>1</sup> προσαρμόζει εὐθεία μίση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἐστω γάρ μίση ἀποτομή πρώτη ἡ  $AB$ , καὶ τῇ  $AB$  προσαρμόζιτω ἡ  $BΓ$ . αἱ  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  ἄρα<sup>2</sup> μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ . λέγω ὅτι τῇ  $AB$  ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μίση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim media apotome prima  $AB$ , et ipsi  $AB$  congruat  $BΓ$ ; ipsæ  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ ; dico ipsi  $AB$  alteram non congruere mediam, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ rationale contineat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω καὶ ἡ  $ΔΒ$ . αἱ ἄρα  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ . Καὶ ἐπεὶ ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  τοῦ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ , τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὰ

Si enim possibile, congruat et  $ΔΒ$ ; ergo  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ . Et quoniam quo superant quadrata ex  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  rectangulum bis sub  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$ , hoc

## PROPOSITION LXXXI.

Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

Soit  $AB$  un premier apotome médial, et que  $BΓ$  conviène avec  $AB$ ; les droites  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  (75. 10); je dis qu'une autre médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec  $AB$ .

Que la droite  $ΔΒ$  conviène avec  $AB$ , si cela est possible; les droites  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface rationnelle sous  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  (75. 10). Et puisque la somme des carrés des droites  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  surpasse le double rectangle sous  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  de la même grandeur dont

ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ·  
τῷ γὰρ αὐτῷ<sup>3</sup> ὑπερίχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ·  
ἐναλλάξ ἄρα ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ  
τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὸ  
δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.  
Τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν  
ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα·  
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν  
ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον,  
μία γὰρ ἀμφότερα, μίσην δὲ μίσου οὐχ  
ὑπερίχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μίση, καὶ τὰ ἰζῆς.

superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangu-  
lum bis sub ΑΓ, ΓΒ; superant enim eodem  
ex ΑΒ quadrato; permutando igitur quo su-  
perant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ,  
ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ,  
ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rectangu-  
lum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis  
sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim  
utraq; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur qua-  
drata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est  
impossibile, media enim utraq;, medium au-  
tem medium non superat rationali.

Mediæ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς.

Τῇ μίση<sup>1</sup> ἀποτομῇ διυτέρα μία μόνον προσ-  
αρμόζει εὐθεῖα μίση, δυνάμει μόνον σύμμετρος  
οὕσα<sup>2</sup> τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μίσην πε-  
ριέχουσα.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ apotomæ secundæ una solùm con-  
gruit recta media, potentiâ solùm commen-  
surabilis existens toti, et cum totâ medium  
continens.

la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces excès sont chacun le quarré de ΑΒ (7. 2); par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces surfaces sont rationelles l'une et l'autre; la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse donc la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible, parce que ces surfaces sont médiales l'une et l'autre, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationelle (27. 10). Il n'y a donc, etc.

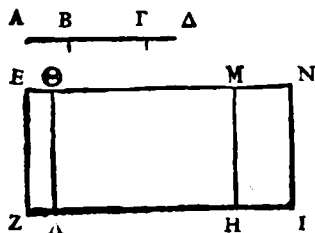
PROPOSITION LXXXII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome mé-  
dial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la  
droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

### 310 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἶτω μίση<sup>3</sup> ἀποτομή δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μίσαι εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μίσην περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει εὐθείᾳ μίση δυνάμει μόνον σύμμετρος εὔσα τῇ ἔλῃ, μετὰ δὲ τῆς ἔλης μίσην περιέχουσα.

Sit media apotome secunda ΑΒ, et ipsi ΑΒ congruat ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rectam mediam quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ medium contineat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω καὶ ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μίσαι εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μίσην περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν<sup>5</sup> ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ igitur ΑΔ, ΔΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ. Et exponatur rationalis ΕΖ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΗ, latitudinem faciens ΕΜ; rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur ΕΛ æquale est quadrato ex ΑΒ; quare ΑΒ potest ipsum ΕΛ. Rursus utique quadratis ex ΑΔ, ΔΒ

Soit un second apotome médial ΑΒ, et que la droite ΒΓ conviène avec ΑΒ; les droites ΑΓ, ΓΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous ΑΓ, ΓΒ (76. 10); je dis qu'une autre droite médiale commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec ΑΒ.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous ΑΔ, ΔΒ (76. 10). Soit exposée la rationnelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, qui ait pour largeur la droite ΕΜ, et retranchons de ΕΗ un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘΜ; le reste ΕΛ sera égal au quarré de ΑΒ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc la surface ΕΛ. De plus, appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΙ égal à la somme des quarrés des

τὴν ΕΖ παραβέβλησθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἴστί δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἵπτι μίσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μίσα ἄρα ἴστί καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἴστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἴστί ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἵπτι μέσον ἴστί τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἴστί. Καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἴστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἴστί καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἵπτι αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν<sup>6</sup>, ἀσύμμετρος ἄρα ἴστί ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἴστί<sup>7</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί<sup>8</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμ-

æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΙ, latitudinem faciens ΕΝ; est autem et ΕΛ æquale ex ΑΒ quadrato; reliquum igitur ΘΙ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam mediæ sunt ΑΓ, ΓΒ, media igitur sunt et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ. Et sunt æqualia ipsi ΕΗ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ, et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ medium est. Atque est æquale ipsi ΘΗ; et ΘΗ igitur medium est, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur est et ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita est ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurable igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem

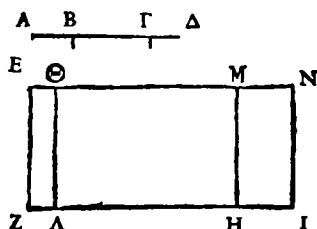
droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΝ; mais ΕΛ est égal au carré de ΑΒ; le reste ΘΙ est donc égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (7. 2). Et puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont médiales, les carrés des droites ΑΓ, ΓΒ seront médiaux. Mais la somme de ces carrés est égale au parallélogramme ΕΗ; le parallélogramme ΕΗ est donc médial (cor. 24. 10), et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΕΜ, est appliqué à ΕΖ; la droite ΕΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). De plus, puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ sera médial (cor. 24. 10). Mais ce rectangle est égal au parallélogramme ΘΗ; le parallélogramme ΘΗ est donc médial; et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΘΜ, est appliqué à la rationnelle ΕΖ; la droite ΘΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Et puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΓ sera incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le carré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est commen-



### 312 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μικρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος

ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Atque est quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΗ; incommensurabile igitur est ΕΗ ipsi ΘΗ. Ut autem ΕΗ ad ΘΗ ita est



ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ, ΘΜ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτεμὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτεμῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει· εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

ΕΜ ad ΘΜ; incommensurabilis igitur est ΕΜ ipsi ΘΜ longitudine. Et sunt utræque rationales; ipsæ ΕΜ, ΘΜ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus et ΘΝ ipsi congruere; apotomæ igitur alia et alia congruit recta, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quod est impossibile.

Τῇ ἄρα μέσῃ, καὶ τὰ ἐξῆς.

Mediæ igitur, etc.

surable avec le carré de ΑΓ (16. 10); et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et ΘΗ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ. Mais ΕΗ est à ΘΗ comme ΕΜ est à ΘΜ (1. 6); la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΘΜ. Mais ces deux droites sont rationnelles; les droites ΕΜ, ΘΜ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome, et ΘΜ convient avec cet apotome (74. 10). Nous démontrerions semblablement que ΘΝ lui convient aussi; deux droites différentes, commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui est impossible (80. 10). Il n'y a donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

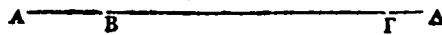
PROPOSITIO LXXXIII.

Τῇ ἱλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐστω ἱλάσσων ἡ  $AB$ , καὶ τῇ  $AB$  προσαρμόζουσα ἔστω ἡ  $BΓ$ . αἱ ἄρα  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ  $AB$  ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium.

Sit minor  $AB$ , et ipsi  $AB$  congruens sit  $BΓ$ ; ipsæ igitur  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; dico ipsi  $AB$  alteram rectam non congruere, quæ eadem faciat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζτω ἡ  $ΒΔ$ · καὶ αἱ  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ προειρημένα<sup>2</sup>. Καὶ ἵπτοι ὅ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  τῶν ἀπὸ τῶν  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ , τοῦτ' ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$

Si enim possibile, congruat  $ΒΔ$ ; et ipsæ  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt. Et quoniam quo superant quadrata ex  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  quadrata ex  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$ , hoc superat et rectangulum bis sub  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$

PROPOSITION LXXXIII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des carrés de ces droites rationnelle, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Soit la mineure  $AB$ , et que  $BΓ$  conviène avec  $AB$ ; les droites  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant médial (77. 10); je dis qu'aucune autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec  $AB$ .

Que  $ΒΔ$  conviène avec  $AB$ , si cela est possible; les droites  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  seront incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui vient d'être dit (77. 10). Et puisque la somme des carrés des droites  $ΑΔ$ ,  $ΔΒ$  surpasse la somme des carrés des droites  $ΑΓ$ ,  $ΓΒ$  de la même grandeur dont le double rectangle sous

# 314 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων<sup>3</sup> ὑπερέχει ῥητῶ, ῥητὰ γὰρ ἴστιν<sup>4</sup> ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ὅπερ ἴστιν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἴστιν<sup>5</sup> ἀμφοτέρω.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι, καὶ τὰ ἐξῆς<sup>6</sup>.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ'. αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μίσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιούσα.

ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (7. 2), et que la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpassera d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce qui est impossible (27. 10); car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre. Donc, etc.

## PROPOSITION LXXXIV.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Que ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel (78. 10); je dis qu'une autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec ΑΒ.

rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, rationalia enim sunt utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, quod est impossibile, media enim sunt utraque.

Minori igitur, etc.

## PROPOSITIO LXXXIV.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una solum congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale.

Sit recta ΑΒ cum rationali medium totum faciens, congruens autem ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere eadem facientem.

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μῖσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν<sup>2</sup>. Ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀκαλούθως τοῖς<sup>3</sup> πρὸ

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ, ΔΒ igitur rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, congrueuter præ-



αὐτοῦ· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μῖσα γάρ ἐστιν<sup>4</sup> ἀμφοτέρω· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει<sup>5</sup>. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

cedentibus; rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim sunt utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile; media enim sunt utraque; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens ea quæ dicta sunt; una igitur solùm congruet. Quod oportebat ostendere.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ rationel (78. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, comme dans ce qui précède (7. 2), et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible; car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre (27. 10). Il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière ce qu'on a dit; il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΙ.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον<sup>1</sup> προσαρμόζει εὐθεῖα δύναμις ἀσύμμετρος οὕτα τῇ ἔλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Εστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὰ προειρημένα<sup>2</sup>. λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα<sup>3</sup> οὐ προσαρμόσει, ποιούσα τὰ προειρημένα<sup>4</sup>.

Εἰ γάρ δυνατόν, προσαρμόζετω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμεις ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων<sup>5</sup> ἅμα μέσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα<sup>6</sup> τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ,

## PROPOSITIO LXXXV.

Ei quæ cum medio medium totum facit una solum congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta ΑΒ cum medio medium totum faciens, ipsi autem congruens ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt; dico ipsi ΑΒ alteram rectam non congruere, facientem ea quæ dicta sunt.

Si enim possibile, congruat ΒΔ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata simul media, et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ medium, et adhuc quadrata ex ΑΔ, ΔΒ incommensurabilia rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et exponatur ra-

## PROPOSITION LXXXV.

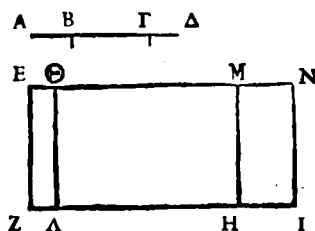
Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et commensurable avec la somme de leurs quarrés.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ; les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, et feront ce qui vient d'être dit (79. 10); je dis qu'une autre droite, faisant ce qui vient d'être dit, ne convient point avec ΑΒ.

Que ΒΔ, s'il est possible, conviène avec ΑΒ, les droites ΑΔ, ΔΒ étant incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés médiale, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ médial, et la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ incommensurable avec le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Soit exposée la rationnelle ΕΖ;

καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφελήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ὅρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς μὲν<sup>8</sup> ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω τὸ ΕΙ,

tionalis EZ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam EZ applicetur EH, latitudinem faciens EM, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur quadratum ex ΑΒ æquale est ipsi ΕΛ; ipsa igitur ΑΒ potest ipsum ΕΛ. Rursus, quadratis quidem ex ΑΔ, ΔΒ æquale ad ipsam EZ applicetur EI, latitudinem



πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ὅρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΙ. Καὶ ἐπεὶ μείσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μείσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· Πάλιν, ἐπεὶ μείσον ἐστὶ τὸ

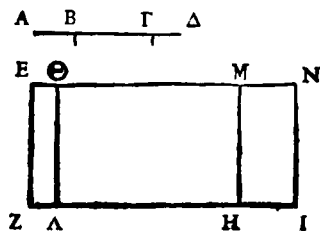
faciens EN. Est autem et quadratum ex ΑΒ æquale ipsi ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsi ΕΙ. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΕΗ; medium igitur est et ΕΗ; et ad rationalem EZ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis

appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EM; et retranchons de EH un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant ΘΜ pour largeur; le carré restant de ΑΒ sera égal au parallélogramme ΕΛ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc le parallélogramme ΕΛ. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme EI égal à la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EN. Mais le carré de ΑΒ est égal au parallélogramme ΕΛ; le double parallélogramme restant compris sous ΑΔ, ΔΒ est donc égal à ΕΙ (7. 2). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est médiale, et que cette somme est égale à ΕΗ, le parallélogramme EH sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à EZ, et il a pour largeur la droite EM; la droite EM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, et qu'il

### 318 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΘΗ·  
μίσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ  
παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα  
ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ  
ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ  
δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα<sup>10</sup> ἐστὶ καὶ  
τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ

sub ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΘΗ; me-  
dium igitur et ΘΗ, et ad rationalem ΕΖ appli-  
catur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur  
est ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitu-  
dine. Et quoniam incommensurabilia sunt qua-  
drata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ,  
incommensurabile igitur est et ΕΗ ipsi ΘΗ; in-



τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ  
ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-  
τροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα  
δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ  
πάλιν ἀποτομή ἐστὶ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ  
ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρ-  
μόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος<sup>11</sup> οὔσα τῇ  
ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ  
ἐτέρᾳ προσαρμόσει εὐθεΐᾳ· τῇ ἄρα ΑΒ μία

commensurabilis igitur est et ΕΜ ipsi ΜΘ longi-  
tudine. Et sunt utraq̃ue rationales; ipsæ igitur  
ΕΜ, ΜΘ rationales sunt potentiâ solùm com-  
mensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et  
ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demons-  
trabimus ΕΘ rursus apotomen esse, et ΘΝ  
congruentem ipsi; apotomæ igitur alia et alia  
congruit rationalis, potentiâ solùm commen-  
surabilis existens toti, quod demonstratum est  
impossible; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet

est égal à ΘΗ, le parallélogramme ΘΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationnelle ΕΖ, et il a pour largeur la droite ΘΜ; la droite ΘΜ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Mais la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ; la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΘ (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΕΜ, ΜΘ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome (74. 10), et ΘΜ convient avec ΕΘ. Nous démontrerions semblablement que ΕΘ est encore un apotome, et que ΘΝ convient avec ΕΘ; des rationnelles différentes commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui a été démontré impossible (80. 10); une autre droite ne convient donc pas avec ΑΒ;

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δύναμι ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων<sup>12</sup> ἅμα μείσον, καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μείσον, καὶ ἔτι<sup>13</sup> τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

recta; ipsi igitur AB una solùm congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et ex ipsis quadrata simul media, et rectangulum bis sub ipsis medium, et adhuc ex ipsis quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis. Quod oporteb at ostendere.

### ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

### DEFINITIONES TERTIÆ.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμόζουσας μείζον δύνῃται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾗ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β. Εὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾗ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμόζουσας μείζον δύνῃται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ. Εὰν δὲ μηδενίᾳ σύμμετρος ᾗ τῇ ἐκκει-

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit ex-

il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec AB, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière AB, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial, et la somme des quarrés incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites. Ce qu'il fallait démontrer.

### ΔΕΦΙΝΙΤΙΟΝΣ ΤΡΟΙΣΙΕΜΕΣ.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appellera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la



## 320 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μένη ρητῇ μήκει, ἢ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης  
μειζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, κα-  
λείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

Δ'. Πάλιν, εἰάν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης  
μειζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μή-  
κει, εἰάν μὲν ὅλη σύμμετρος ᾗ τῇ ἐκκειμένη ρητῇ  
μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

εἰ. Εἰάν δὲ ᾗ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς. Εἰάν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.

Εὐρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ρητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει  
σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  
ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ  
οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΖΔ' μὴ ἔστω

positæ rationali longitudine, et tota quam  
congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi  
commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus pos-  
sit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili lon-  
gitudinæ, si quidem tota commensurabilis sit ex-  
positæ rationali longitudine, vocetur apotome  
quarta.

5. Si verò sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

### PROPOSITIO LXXXVI.

Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine  
commensurabilis sit ΒΗ; rationalis igitur est et  
ΒΗ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔΕ,  
ΕΖ, quorum excessus ΖΔ non sit quadratus;

rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de  
la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le  
reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la  
congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite  
entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle  
exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste  
s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationnelle exposée,  
le reste s'appèlera sixième apotome.

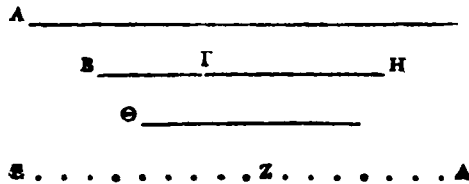
### PROPOSITION LXXXVI.

Trouver un premier apotome.

Soit exposée la rationnelle Α, et que ΒΗ soit commensurable en longueur avec Α, la  
droite ΒΗ sera rationnelle. Soient exposés deux nombres quarrés ΔΕ, ΕΖ, dont l'ex-  
cès ΖΔ ne soit pas un nombre quarré (30. lem. 1. 10), le nombre ΔΕ n'aura pas avec ΔΖ

τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πιποισθῶ ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον<sup>2</sup>· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ·

neque igitur ΕΔ ad ΔΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad quadratum ex ΗΓ; commensurable igitur est ex ΒΗ quadratum quadrato ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum



ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη. Ὡς γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν

ex ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et quoniam ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et primam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ.

la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Faisons en sorte que ΕΔ soit à ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ; le quarré de ΒΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΓ (6. 10). Mais le quarré de ΒΗ est rationel; le quarré de ΗΓ est donc aussi rationel; la droite ΗΓ est donc rationnelle. Et puisque ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (9. 10); la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un premier apotome. Car que l'excès du quarré de ΒΗ sur le quarré de ΗΓ soit le

### 322 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ<sup>3</sup>. καὶ ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὥς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἐκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μῆζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μῆζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Οπερ ἔδει ποιῆσαι<sup>5</sup>.

Et quoniam est ut ΔΕ ad ΖΔ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ; et convertendo igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΗΒ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, uterque enim quadratus est; et quadratum ex ΗΒ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΗΒ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est prima.

Inventa est igitur prima apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de Θ. Puisque ΔΕ est à ΖΔ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΔΕ sera à ΕΖ comme le quarré de ΗΒ est au quarré de Θ (19. cor. 5). Mais le nombre ΔΕ a avec le nombre ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, car ces nombres sont des quarrés l'un et l'autre; le quarré de ΗΒ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΗΒ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10).

On a donc trouvé un premier apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.

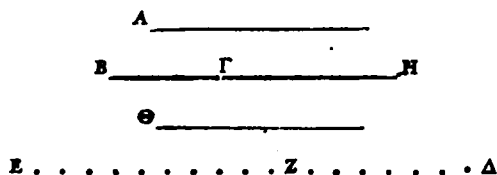
PROPOSITIO LXXXVII.

Εὕρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Invenire secundam apotomen.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ  $A$ , καὶ τῇ  $A$  σύμμετρος μήκει ἡ  $HΓ$ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $HΓ$ . Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ  $ΔΕ$ ,  $ΕΖ$ , ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ  $ΔΖ$  μὴ ἴστω τετράγωνος. Καὶ πεποιέσθω ὡς ὁ  $ΖΔ$  πρὸς τὸν  $ΔΕ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓΗ$  τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΗΒ$ .

Exponatur rationalis  $A$ , et ipsi  $A$  commensurabilis longitudine ipsa  $HΓ$ ; rationalis igitur est et  $HΓ$ . Et exponantur duo quadrati numeri  $ΔΕ$ ,  $ΕΖ$ , quorum excessus  $ΔΖ$  non sit quadratus. Et fiat ut  $ΖΔ$  ad  $ΔΕ$  ita ex  $ΓΗ$  quadratum ad



σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓΗ$  τετράγωνον<sup>3</sup> τῷ ἀπὸ τῆς  $ΗΒ$  τετράγωνῳ. ῤητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΓΗ$ . ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ΗΒ$ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΗΒ$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ<sup>5</sup> τῆς  $ΓΗ$  τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ΗΒ$  λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ  $ΓΗ$  τῇ  $ΗΒ$  μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ  $ΓΗ$ ,  $ΗΒ$  ἄρα<sup>6</sup>

ipsum ex  $ΗΒ$ ; commensurable igitur est ex  $ΓΗ$  quadratum quadrato ex  $ΗΒ$ . Rationale autem quadratum ex  $ΓΗ$ ; rationale igitur est et ex  $ΗΒ$ ; rationalis igitur est  $ΗΒ$ . Et quoniam ex  $ΓΗ$  quadratum ad ipsum ex  $ΗΒ$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis est  $ΓΗ$  ipsi  $ΗΒ$  longitudine. Et sunt utraque rationales; ipsæ  $ΓΗ$ ,

PROPOSITION LXXXVII.

Trouver un second apotome.

Soit exposée la rationnelle  $A$ , et que la droite  $HΓ$  soit commensurable en longueur avec  $A$ ; la droite  $HΓ$  sera rationnelle (30. lem. 1. 10). Soient exposés deux nombres quarrés  $ΔΕ$ ,  $ΕΖ$ , dont l'excès  $ΔΖ$  ne soit pas un quarré. Faisons en sorte que  $ΖΔ$  soit à  $ΔΕ$  comme le quarré de  $ΓΗ$  est au quarré de  $ΗΒ$ ; le quarré de  $ΓΗ$  sera commensurable avec le quarré de  $ΗΒ$  (6. 10). Mais le quarré de  $ΓΗ$  est rationel; le quarré de  $ΗΒ$  est donc rationel; la droite  $ΗΒ$  est donc rationnelle. Et puisque le quarré de  $ΓΗ$  n'a pas avec le quarré de  $ΗΒ$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite  $ΓΗ$  sera incommensurable en longueur avec  $ΗΒ$  (9. 10). Mais ces droites sont

## 324 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστίν. Λέγω δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Ὡς γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμὸν ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἐστὶν ἑκά-  
 τερὸς τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-  
 μέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμό-  
 ζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εὔρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

HB igitur rationales sunt potentiâ solùm com-  
 mensurabiles; ergo BG apotome est. Dico et  
 secundam. Quo enim majus est quadratum  
 ex BH quadrato ex HG, sit quadratum ex Θ.  
 Quoniam igitur est ut ex BH quadratum ad ip-  
 sum ex HG ita EA numerus ad numerum AZ;  
 convertendo igitur est ut ex BH quadratum  
 ad ipsum ex Θ ita DE ad EZ. Atque est uterque  
 ipsorum DE, EZ quadratus; quadratum igitur ex  
 BH ad quadratum ex Θ rationem habet quam qua-  
 dratus numerus ad quadratum numerum; com-  
 mensurabilis igitur est BH ipsi Θ longitudine. Et  
 BH quam HG plus potest quadrato ex Θ; ergo  
 BH quam HG plus potest quadrato ex rectâ sibi  
 commensurabili longitudine. Atque est con-  
 gruens GH commensurabilis expositæ rationali  
 A longitudine; ergo BG apotome est secunda.

Inventa est igitur secunda apotome BG. Quod  
 oportebat facere.

rationnelles l'une et l'autre; les droites GH, HB sont donc des rationnelles commen-  
 surables en puissance seulement; la droite BG est donc un apotome (74. 10). Je  
 dis aussi que cette droite est un second apotome. Car que l'excès du quarré de  
 BH sur le quarré de HG soit le quarré de Θ. Puisque le quarré de BH est au quarré  
 de HG comme le nombre EA est au nombre AZ, par conversion, le quarré de  
 BH sera au quarré de Θ comme DE est à EZ. Mais DE et EZ sont des quarrés l'un  
 et l'autre; le quarré de BH a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre  
 quarré a avec un nombre quarré; la droite BH est donc commensurable en  
 longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de BH surpasse la puissance de HG  
 du quarré de Θ; la puissance de BH surpasse donc la puissance de HG du quarré  
 d'une droite commensurable en longueur avec BH. Mais la congruente GH est  
 commensurable en longueur avec la rationnelle exposée A; la droite BG est donc  
 un second apotome (déf. trois. 2. 10).

On a donc trouvé un second apotome BG. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη.

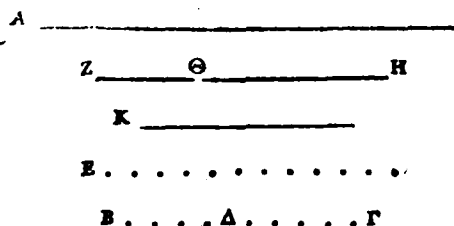
PROPOSITIO LXXXVIII.

Εὐρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Invenire tertiam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ  $A$ , καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ  $E$ ,  $BΓ$ ,  $ΓΔ$ , λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ  $ΓΒ$  πρὸς τὸν  $ΒΔ$  λόγον ἔχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $ΒΓ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τετράγωνον πρὸς τὸ

Exponatur rationalis  $A$ , et exponantur tres numeri  $E$ ,  $BΓ$ ,  $ΓΔ$ , rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ipse autem  $ΓΒ$  ad  $ΒΔ$  rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et fiat ut quidem  $E$  ad  $BΓ$  ita ex



ἀπὸ τῆς  $ZH$  τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ  $BΓ$  πρὸς τὸν  $ΓΔ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $HΘ$  τετράγωνον<sup>1</sup>. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς  $ZH$  τετραγώνῳ<sup>2</sup>. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τετράγωνον<sup>3</sup>. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ  $ZH$ . Καὶ ἵππει ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $BΓ$  λόγον οὐχ ἔχει

$A$  quadratum ad quadratum ex  $ZH$ , ut verò  $BΓ$  ad  $ΓΔ$  ita ex  $ZH$  quadratum ad quadratum ex  $HΘ$ ; commensurable igitur est ex  $A$  quadratum quadrato ex  $ZH$ . Rationale autem ex  $A$  quadratum; rationale igitur et quadratum ex  $ZH$ ; rationalis igitur est  $ZH$ . Et quoniam  $E$  ad  $BΓ$  rationem non habet quam quadratus

PROPOSITION LXXXVIII.

Trouver un troisième apotome.

Soient exposés la rationelle  $A$ , et les trois nombres  $E$ ,  $BΓ$ ,  $ΓΔ$ , qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; que  $ΓΒ$  ait avec  $ΒΔ$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; faisons en sorte que  $E$  soit à  $BΓ$  comme le carré de  $A$  est au carré de  $ZH$ , et que  $BΓ$  soit à  $ΓΔ$  comme le carré de  $ZH$  est au carré de  $HΘ$ ; le carré de  $A$  sera commensurable avec le carré de  $ZH$  (6. 10). Mais le carré de  $A$  est rationel; le carré de  $ZH$  est donc rationel; la droite  $ZH$  est donc rationnelle. Et puisque  $E$  n'a pas

### 326 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

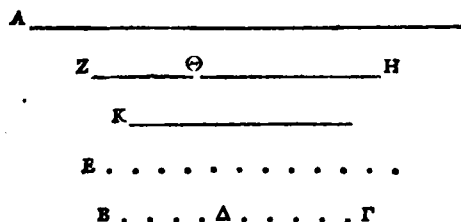
ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον<sup>4</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον<sup>5</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ρηταί. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διίσου ἄρα ἐστὶν

numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Α ipsi ΖΗ longitudine. Rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; commensurabile igitur est ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ; rationalis igitur est ΗΘ. Et quoniam ΒΓ ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΘ. Dico et tertiam. Quoniam enim est ut quidem Ε ad ΒΓ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita

avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de Α n'aura pas avec le carré de ΖΗ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera commensurable avec le carré de ΗΘ. Mais le carré de ΖΗ est rationel; le carré de ΗΘ est donc rationel; la droite ΗΘ est donc rationnelle. Et puisque ΒΓ n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΖΗ n'aura pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΖΗ, ΗΘ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΘ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi qu'elle est un troisième apotome. Car puisque Ε est à ΒΓ comme le carré de Α est au carré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Ε sera à ΓΔ

ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει<sup>8</sup>. Ω οὖν μίζιν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

ex A quadratum ad ipsum ex ΘΗ. Ipse autem E ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur A ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine. Quo igitur majus est quadratum ex ΖΗ quadrato



τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον<sup>9</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex ΖΗ igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur

comme le carré de A est au carré de ΘΗ (22. 5); mais E n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de A n'a donc pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée A. Que le carré de Κ soit la grandeur dont le carré de ΖΗ surpasse le carré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ (19. 5). Mais ΓΒ a avec ΒΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΖΗ a donc avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite



## 328 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μίξον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μίξον δύναται τῷ ἀπὸ τοῦ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Εὕρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἐκάτερον τὸν ΔΖ, ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ

est ΖΗ ipsi Κ longitudine. Et ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex Κ; ergo ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali Α longitudine; ergo ΖΘ apotome est tertia.

Inventa est igitur tertia apotome ΖΘ. Quod oportebat facere.

### PROPOSITIO LXXXIX.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine commensurabilis ΒΗ; rationalis igitur est et ΒΗ. Et exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ; ita ut totus ΔΕ ad utrumque ipsorum ΔΖ, ΖΕ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ; commensurabile igitur

ΖΗ est donc commensurable en longueur avec Κ (9. 10). Mais la puissance de ΖΗ surpasse la puissance de ΗΘ du carré de Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du carré d'une droite commensurable avec ΖΗ; mais aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΖΘ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10).

On a donc trouvé un troisième apotome ΖΘ. Ce qu'il fallait faire.

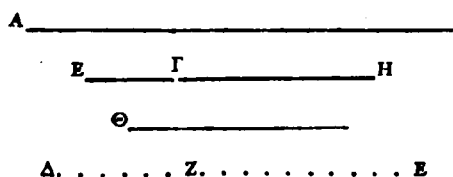
### PROPOSITION LXXXIX.

Trouver un quatrième apotome.

Soit exposée la rationnelle Α, et que ΒΗ soit commensurable en longueur avec Α; la droite ΒΗ sera rationnelle. Soient exposés les deux nombres ΔΖ, ΖΕ, de manière que le nombre entier ΔΕ n'ait pas avec chacun des nombres ΔΖ, ΖΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; et faisons en sorte que ΔΕ soit à ΕΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ; le carré de ΒΗ sera commensurable

τῆς ΒΗ τῇ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος

est quadratum ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΓ; rationalis igitur est ΗΓ. Et quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum



ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη'. Ὡς οὖν μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ<sup>3</sup> ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

num; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΒΓ. Dico et quartam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, et convertendo igitur est ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-

avec le quarré de ΗΓ (6. 10). Mais le quarré de ΒΗ est rationel, le quarré de ΗΓ est donc rationel; la droite ΗΓ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un quatrième apotome. Que le quarré de Θ soit ce dont le quarré de ΒΗ surpasse le quarré de ΗΓ. Puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le quarré ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le quarré de

### 330 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ<sup>5</sup> ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΒΓ<sup>6</sup> ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ΒΓ<sup>7</sup> τετάρτη ἀποτομή. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

tum numerum; neque igitur ex BH quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est BH ipsi Θ longitudine; et BH quam HG plus potest quadrato ex Θ; ergo BH quam HG plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili longitudine. Atque est tota BH commensurabilis expositæ rationali A longitudine; ergo BG apotome est quarta.

Inventa est igitur BG quarta apotome. Quod oportebat facere.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4'.

Εὕρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει<sup>1</sup> σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν<sup>2</sup> ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς

#### PROPOSITIO XC.

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A, et ipsi A longitudine commensurabilis sit ΓΗ; rationalis igitur est ΓΗ. Et exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut ΔΕ ad utrumque ipsorum ΔΖ, ΖΕ rationem rursus non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut ΖΕ ad ΕΑ

Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite BH est donc incommensurable en longueur avec Θ (g. 10); mais la puissance de BH surpasse la puissance de HG du quarré de Θ; la puissance de BH surpasse donc la puissance de HG du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec BH. Mais la droite entière BH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée A; la droite BG est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10).

On a donc trouvé un quatrième apotome BG. Ce qu'il fallait faire.

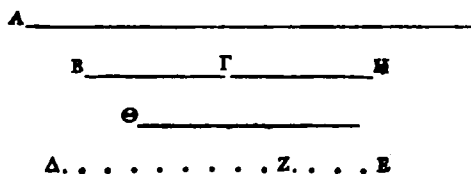
#### PROPOSITION XC.

Trouver un cinquième apotome.

Soit exposée la rationelle A, et que ΓΗ soit commensurable en longueur avec A; la droite ΓΗ sera rationelle. Soient exposés aussi deux nombres ΔΖ, ΖΕ, de manière que ΔΕ n'ait ni avec l'un ni avec l'autre des nombres ΔΖ, ΖΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; et faisons en sorte que ΖΕ soit à

τὸν<sup>3</sup> ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

ita ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ; commensurable igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΒ; rationalis igitur est et ΒΗ. Et quoniam est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



μόν· οὐδ' ἄρα<sup>5</sup> τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ὡς γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ

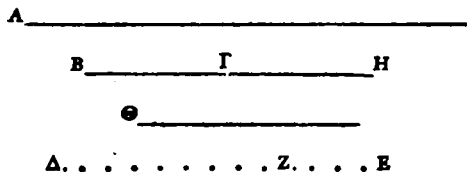
tum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et quintam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex

ΕΔ comme le carré de ΓΗ est au carré de ΗΒ; le carré de ΓΗ sera commensurable avec le carré de ΗΒ (6. 10). Mais le carré de ΓΗ est rationel; le carré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΒΗ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ, et que ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais elles sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΗ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un cinquième apotome. Que le carré de Θ soit ce dont le carré de ΒΗ surpasse le carré de ΗΓ. Puisque le

### 332 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀνα-  
στρέφαντι ἄρα ἰστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως  
τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΕΔ πρὸς  
τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς  
πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  
ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος

ΗΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, convertendo igitur est ut  
ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum  
ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet  
quam quadratus numerus ad quadratum nume-  
rum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum  
ex Θ rationem habet quam quadratus numerus



ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος  
ἄρα ἰστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ  
ΒΗ τῆς ΗΓ μίζον<sup>6</sup> τῇ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ  
ἄρα τῆς ΗΓ μίζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμ-  
μέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἰστὶν ἡ προσαρμό-  
ζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ  
Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἴστι πέμπτη.

Εὑρίσκεται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Οπερ  
ἔδει ποιῆσαι.

ad quadratum numerum; incommensurabilis  
igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam  
ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam  
ΗΓ plus potest quadrato ex rectā sibi incommensurabili longitudine. Atque est congruens  
ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α lon-  
gitudine; ergo ΒΓ apotome est quinta.

Inventa est igitur quinta apotome ΒΓ. Quod  
oportebat facere.

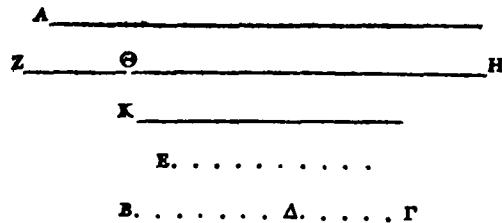
quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ comme ΔΕ est à ΕΖ; par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10).

On a donc trouvé un cinquième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

Εὕρεῖν τὴν ἕκτῃν ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ  $A$ , καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ  $E$ ,  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ  $ΓΒ$  πρὸς τὸν  $ΒΔ$  λόγον μὴ ἔχίτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὥς μὲν ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $BΓ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH^2$ , ὥς δὲ ὁ  $BΓ$  πρὸς τὸν  $ΓΔ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $HΘ$ .



Επεὶ οὖν ἴστιν ὥς ὁ  $E$  πρὸς τὸν  $BΓ$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $ZH$ · σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τῷ ἀπὸ τῆς  $ZH$ . Πρὸς τὸν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς  $A$  ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ

Invenire sextam apotomen.

Exponatur rationalis  $A$ , et tres numeri  $E$ ,  $BΓ$ ,  $ΓΔ$  rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum; adhuc autem et  $ΓΒ$  ad  $ΒΔ$  rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut quidem  $E$  ad  $BΓ$  ita ex  $A$  quadratum ad ipsum ex  $ZH$ , ut verò  $BΓ$  ad  $ΓΔ$  ita ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $HΘ$ .

Quoniam igitur est ut  $E$  ad  $BΓ$  ita ex  $A$  quadratum ad ipsum ex  $ZH$ ; commensurable igitur ex  $A$  quadratum quadrato ex  $ZH$ . Rationale autem quadratum ex  $A$ ; rationale igitur et

PROPOSITION XCI.

Trouver un sixième apotome.

Soient exposés la rationelle  $A$ , et trois nombres  $E$ ,  $BΓ$ ,  $ΓΔ$ , qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; de plus, que  $ΓΒ$  n'ait pas avec  $ΒΔ$  la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; faisons en sorte que  $E$  soit à  $BΓ$  comme le carré de  $A$  est au carré de  $ZH$ , et que  $BΓ$  soit à  $ΓΔ$  comme le carré de  $ZH$  est au carré de  $HΘ$ .

Puisque  $E$  est à  $BΓ$  comme le carré de  $A$  est au carré de  $ZH$ , le carré de  $A$  sera commensurable avec le carré de  $ZH$ . Mais le carré de  $A$  est rationel; le

### 334 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

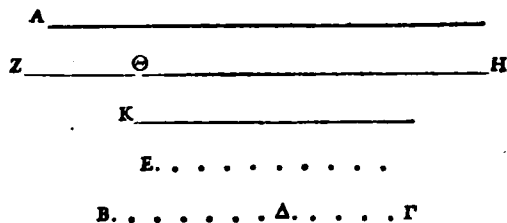
ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λόγῳ δὲ ὅτι καὶ ἔκτῃ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ

quadratum ex  $ZH$ ; rationalis igitur est et  $ZH$ . Et quoniam  $E$  ad  $B\Gamma$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex  $A$  quadratum ad ipsum ex  $ZH$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est  $A$  ipsi  $ZH$  longitudine. Rursus, quoniam est ut  $B\Gamma$  ad  $\Gamma\Delta$  ita ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $H\Theta$ ; commensurable igitur ex  $ZH$  quadratum quadrato ex  $H\Theta$ . Rationale autem quadratum ex  $ZH$ ; rationale igitur et quadratum ex  $H\Theta$ ; rationalis igitur et  $H\Theta$ . Et quoniam  $B\Gamma$  ad  $\Gamma\Delta$  rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex  $ZH$  quadratum ad ipsum ex  $H\Theta$  rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est  $ZH$  ipsi  $H\Theta$  longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ  $ZH$ ,  $H\Theta$  igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo  $Z\Theta$  apotome est. Dico et sextam. Quoniam enim est ut quidem  $E$  ad  $B\Gamma$  ita ex  $A$  quadratum ad ipsum ex

quarré de  $ZH$  est donc rationel; la droite  $ZH$  est donc rationelle. Et puisque  $E$  n'a pas avec  $B\Gamma$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de  $A$  n'aura pas non plus avec le quarré de  $ZH$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite  $A$  est donc incommensurable en longueur avec  $ZH$  (9. 10). De plus, puisque  $B\Gamma$  est à  $\Gamma\Delta$  comme le quarré de  $ZH$  est au quarré de  $H\Theta$ ; le quarré de  $ZH$  sera commensurable avec le quarré de  $H\Theta$ . Mais le quarré de  $ZH$  est rationel; le quarré de  $H\Theta$  est donc rationel (6. 10); la droite  $H\Theta$  est donc rationelle. Et puisque  $B\Gamma$  n'a pas avec  $\Gamma\Delta$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de  $ZH$  n'aura pas non plus avec le quarré de  $H\Theta$  la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite  $ZH$  est donc incommensurable en longueur avec  $H\Theta$  (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites  $ZH$ ,  $H\Theta$  sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite  $Z\Theta$  est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un sixième apotome. Car puisque  $E$  est à  $B\Gamma$  comme le quarré de  $A$  est au

ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δίδου ἄρα ἴσιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἴσιν ἡ

ZH, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Ε ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur



Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδενίᾳ ἄρα<sup>3</sup> τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἴσιν τῇ Α ῥητῇ μήκει. Ω οὖν μείζον ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἴσιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἴσιν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

est Α ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est rationali Α longitudine. Quo enim majus est quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ, convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ qua-

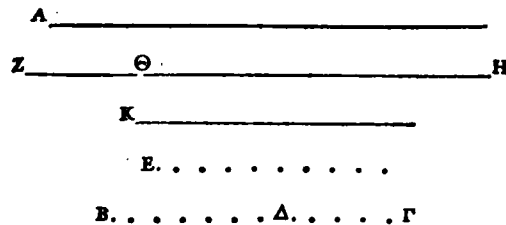
quarré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, par égalité, Ε sera à ΓΔ comme le quarré de Α est au quarré de ΗΘ. Mais Ε n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de Α n'aura donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec Α. Que le quarré de Κ soit ce dont le quarré de ΖΗ surpasse le quarré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΓΒ n'a pas avec ΒΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de



# 336 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύνатаι ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ

dratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi Κ longi-



μῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μῖζον δύνатаι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδέντερά τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτη.

tudine. Et ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex Κ; ergo ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali Α longitudine; ergo ΖΘ apotome est sexta.

Εὑρηται ἄρα ἡ ἑκτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Οὔτε ποιεῖται.

Inventa est igitur sexta apotome ΖΘ. Quod oportebat facere.

## ΣΧΟΛΙΟΝ.

## SCHOLIUM.

Εἶσι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρησιν τῶν εἰρημένων ἑξ ἀποτομῶν. Καὶ δὴ ἔστω εὐρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὁμο-

Licet autem et expeditius demonstrare inventionem dictarum sex apotomarum. Et igitur oporteat invenire primam apotomen, exponatur

ΖΗ n'a donc pas non plus avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec Κ (9. 10). Mais la puissance de la droite ΖΗ surpasse la puissance de la droite ΗΘ du carré de Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΖΗ. Mais aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΖΗ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10).

On a donc trouvé un sixième apotome ΖΘ. Ce qu'il fallait faire.

## SCHOLIE.

On peut démontrer plus brièvement la recherche des six apotomes dont nous venons de parler. Car qu'il faille trouver un premier apotome; soit exposé

μάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἥς μείζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ. αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτίστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτίστι τῆς

ex binis nominibus prima ΑΓ, cujus majus nomen ipsa ΑΒ, et ipsi ΒΓ æqualis ponatur ΒΔ; ergo ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΑΒ quam ΒΓ, hoc

A — Δ — B — Γ

ΒΔ, μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει· ἀποτομή ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΒ<sup>2</sup>. Ομοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὐρήσομεν, ἐκθί-  
μνοι τὰς ἰσαριθμούς ἐκ δύο ὀνομάτων.

est quam ΒΔ, plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et ΑΒ commensurabilis est expositæ rationali longitudine; apotome igitur prima est ΑΒ. Similiter utique et reliquas apotomas inveniemus, exponendo eas quæ sunt ejusdem ordinis ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 46.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-  
τομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀπο-  
τομή ἐστίν.

Περιέχεται γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς  
τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω  
ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

PROPOSITIO XCII.

Si spatium contineatur sub rationali et apo-  
tome primâ, recta spatium potens apotome  
est.

Contineatur enim spatium ΑΒ sub rationali  
ΑΓ et apotome primâ ΑΔ; dico rectam quæ  
spatium ΑΒ potest apotomen esse.

la première de deux noms ΑΓ; que son plus grand nom soit ΑΒ (49. 10), et faisons ΒΔ égal à ΒΓ; les droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire ΑΒ, ΒΔ, seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10); la puissance de ΑΒ surpassera la puissance de ΒΓ, c'est-à-dire de ΒΔ, du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΒ; mais la droite ΑΒ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée; la droite ΑΒ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Nous trouverons semblablement les autres apotomes en exposant les droites de deux noms qui sont du même ordre (50, 51, 52, 53, et 54. 10).

PROPOSITION XCII.

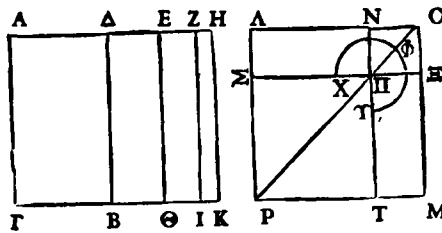
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une ra ionelle ΑΓ et sous un premier apo-  
tome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un apotome.

### 338 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμίζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἰὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλό-

Quoniam enim apotome est prima ΑΔ, sit ipsi congruens ΔΗ; ipsæ ΑΗ, ΗΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et tota ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, et ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale



γραμμον<sup>2</sup> παραβληθῇ ἑλλειπτον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελί<sup>3</sup>. Τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελήσθω ἑλλειπτον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ

ad ΑΗ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ. Et per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine; et

Car, puisque ΑΔ est un premier apotome, que ΔΗ lui conviène; les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. trois. 1. 10). Mais la droite entière ΑΗ est commensurable avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ; si donc on applique à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties commensurables (18. 10). Que ΔΗ soit coupé en deux parties égales au point Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle compris sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera commensurable avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque ΑΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ,

AZ τῇ ZH μήκει· καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. Καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ ΑΓ· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν AI, ZK ρητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστὶ. Κείσθω δὴ τῶ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῶ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῶν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῶ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ<sup>4</sup>, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν<sup>5</sup> ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ZH. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ AI πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ<sup>6</sup>

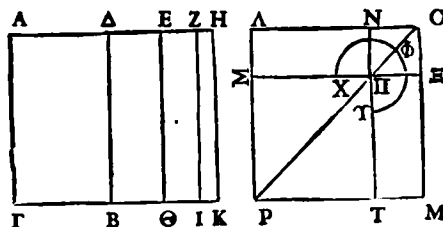
AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Sed AH commensurabilis est ipsi ΑΓ; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH commensurabilis est ipsi ΑΓ longitudine. Atque est rationalis ΑΓ; rationalis igitur et utraque ipsarum AZ, ZH; quare et utrumque ipsorum AI, ZK rationale est. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Ponatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ZK æquale quadratum ΝΞ auferatur, communem angulum ΑΟΜ habens cum ipso; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur æquale est sub AZ, ZH contentum rectangulum quadrato ex ΕΗ, est igitur ut AZ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ZH. Sed ut quidem AZ ad ΕΗ ita AI ad ΕΚ, ut verò

la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est commensurable avec ΑΓ; chacune de droites AZ, ZH est donc commensurable en longueur avec ΑΓ (12. 10). Mais ΑΓ est rationelle; les droites AZ, ZH sont donc rationelles l'une et l'autre; les parallélogrammes AI, ZK sont donc aussi rationels l'un et l'autre (20. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ, la droite ΔΗ est donc commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des rectangles ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme AI (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal au parallélogramme ZK, le carré ΝΞ ayant l'angle commun ΑΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que ΟΡ soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ, ZH est égal au carré de ΕΗ, la droite AZ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ZH (17. 6). Mais AZ est à ΕΗ comme AI est

### 340 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ μίσην ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἑμ-  
προσθεν εἰδείχθη, καὶ ἴσος τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ  
τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ  
ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ  
ΔΘ ἴσος ἴσος<sup>8</sup>, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΑΞ· τὸ ἄρα ΔΚ

EH ad ZH ita est EK ad KZ; ipsorum igitur  
AI, KZ medium proportionale est EK. Est  
autem et ipsorum AM, NZ medium propor-  
tionale MN, ut superius demonstratum est,  
atque est quidem AI quadrato AM æquale, ip-  
sum verò ZK ipsi NZ; et MN igitur ipsi EK  
æquale est. Sed quidem EK ipsi ΔΘ est æquale,  
ipsum verò MN ipsi ΑΞ; ergo ΔΚ æquale est



ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἐστὶ  
δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ τετραγώνοις·  
λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ  
τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἐστὶ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ  
τῆς ΑΝ τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΑΝ ἄρα  
δύναται τὸ ΑΒ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ ΑΝ ἀπο-  
τομή ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκατέρων τῶν  
ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἴσος ἐστὶν τοῖς ΑΜ, ΝΞ· καὶ ἑκά-  
τερον ἄρα τῶν ΑΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τοῦτέστι

gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ. Est autem et ΑΚ  
æquale quadratis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ  
æquale est ipsi ΣΤ; sed ΣΤ ex ΑΝ est qua-  
dratum; ergo ex ΑΝ quadratum æquale est ipsi  
ΑΒ; ipsa ΑΝ igitur potest ipsum ΑΒ. Dico et  
ΑΝ apotomen esse. Quoniam enim rationale est  
utrumque ipsorum ΑΙ, ΖΚ, atque est æquale  
quadratis ΑΜ, ΝΞ; et utrumque igitur ipsorum  
ΑΜ, ΝΞ rationale est, hoc est quadratum ex

à EK, et EH est à ZH comme EK est à KZ (1.6); le parallélogramme EK est donc  
moyen proportionel entre les parallélogrammes AI, KZ. Et puisque MN est moyen  
proportionel entre AM et ΝΞ, ainsi qu'on l'a démontré plus haut (55. 10), que AI  
est égal au quarré AM, et que ΖΚ l'est à ΝΞ, le parallélogramme MN sera égal à EK.  
Mais EK est égal à ΔΘ (37. 1), et MN à ΑΞ (43. 1); le parallélogramme ΔΚ est  
donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais le parallélogramme ΑΚ  
est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc  
égal à ΣΤ. Mais ΣΤ est le quarré de ΑΝ; le quarré de ΑΝ est donc égal à ΑΒ; la  
droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis aussi que ΑΝ est un apotome. Car puis-  
que chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ est rationel, et qu'ils sont égaux aux  
quarrés ΑΜ, ΝΞ, chacun des quarrés ΑΜ, ΝΞ, c'est-à-dire chacun des quarrés des

τὸ ἀπὸ ἑκατέρων<sup>11</sup> τῶν  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  καὶ ἑκατέρα  
 ἄρα τῶν  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  ῥητὴ ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ  
 μίσην ἐστὶ τὸ  $\Delta\Theta$ , καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ  $\Lambda\Xi$ .  
 μίσην ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ  $\Lambda\Xi$ . Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν  
 $\Lambda\Xi$  μίσην ἐστὶ, τὸ δὲ  $\text{N}\Xi$  ῥητόν, ἀσύμμετρον  
 ἄρα ἐστὶ καὶ<sup>12</sup> τὸ  $\Lambda\Xi$  τῷ  $\text{N}\Xi$ . ὥς δὲ τὸ  $\Lambda\Xi$   
 πρὸς τὸ  $\text{N}\Xi$  οὕτως ἐστὶν ἡ  $\Lambda\Theta$  πρὸς τὴν  $\text{ON}$ .  
 ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Lambda\Theta$  τῇ  $\text{ON}$  μήκει. Καὶ  
 εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  ἄρα ῥηταί  
 εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα  
 ἐστὶν ἡ  $\text{AN}$ . Καὶ δύναται τὸ  $\text{AB}$  χωρίον· ἡ ἄρα  
 τὸ  $\text{AB}$  χωρίον δυνάμειν ἀποτομὴ ἐστὶν.  
 Ἐὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς<sup>13</sup>.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 47.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-  
 τομῆς διυτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυνάμειν μίσης  
 ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ  $\text{AB}$  περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς  
 τῆς  $\text{AT}$  καὶ ἀποτομῆς διυτέρας τῆς  $\text{AD}$ . λέγω  
 ὅτι ἡ τὸ  $\text{AB}$  χωρίον δυνάμειν μίσης ἀποτομὴ  
 ἐστὶ πρώτη.

droites  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  sera rationel ; les droites  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  sont donc rationnelles l'une et l'autre. De plus, puisque le parallélogramme  $\Delta\Theta$  est médial, et qu'il est égal à  $\Lambda\Xi$ , le parallélogramme  $\Lambda\Xi$  sera aussi médial. Et puisque  $\Lambda\Xi$  est médial, et que  $\text{N}\Xi$  est rationel, le parallélogramme  $\Lambda\Xi$  sera incommensurable avec le carré  $\text{N}\Xi$  ; mais  $\Lambda\Xi$  est à  $\text{N}\Xi$  comme  $\Lambda\Theta$  est à  $\text{ON}$  (1.6) ; la droite  $\Lambda\Theta$  est donc incommensurable en longueur avec  $\text{ON}$  (10. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre ; les droites  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement ; la droite  $\text{AN}$  est donc un apotome (74. 10). Mais cette droite peut la surface  $\text{AB}$  ; la droite qui peut la surface  $\text{AB}$  est donc un apotome. Si donc, etc.

PROPOSITION XCIII.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

Que la surface  $\text{AB}$  soit comprise sous la rationnelle  $\text{AT}$  et sous le second apotome  $\text{AD}$  ; je dis que la droite qui peut la surface  $\text{AB}$  est un premier apotome d'une médiale.

utrisque  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  ; et utraque igitur ipsarum  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  rationalis est. Rursus, quoniam medium est  $\Delta\Theta$ , atque est æquale ipsi  $\Lambda\Xi$  ; medium igitur est et  $\Lambda\Xi$ . Quoniam igitur quidem  $\Lambda\Xi$  medium est, ipsum verò  $\text{N}\Xi$  rationale, incommensurable igitur est et  $\Lambda\Xi$  ipsi  $\text{N}\Xi$  ; ut autem  $\Lambda\Xi$  ad  $\text{N}\Xi$  ita est  $\Lambda\Theta$  ad  $\text{ON}$  ; incommensurabilis igitur est  $\Lambda\Theta$  ipsi  $\text{ON}$  longitudine. Et sunt ambæ rationales ; ipsæ  $\Lambda\Theta$ ,  $\text{ON}$  igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles ; apotome igitur est  $\text{AN}$ . Et potest spatium  $\text{AB}$  ; recta igitur spatium  $\text{AB}$  potens apotome est. Si igitur spatium, etc.

PROPOSITIO XCIII.

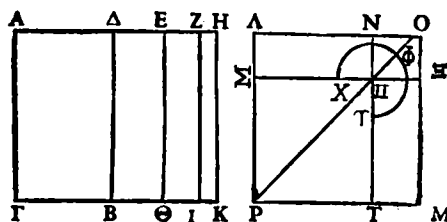
Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

Spatium enim  $\text{AB}$  contineatur sub rationali  $\text{AT}$  et apotome secundâ  $\text{AD}$  ; dico rectam quæ spatium  $\text{AB}$  potest mediæ apotomen esse primam.

### 342 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

! Εἴτω γὰρ τῇ  $\Lambda\Delta$  προσαρμόζουσα ἡ  $\Delta\text{H}$ . αἱ ἄρα  $\Lambda\text{H}$ ,  $\text{H}\Delta$  ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ  $\Delta\text{H}$  σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ  $\Lambda\Gamma$ , ἢ δὲ ὅλη ἡ  $\Lambda\text{H}$  τῆς προσαρμόζουσας τῆς  $\text{H}\Delta$  μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐπεὶ οὖν ἡ  $\Lambda\text{H}$  τῆς  $\text{H}\Delta$  μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· εἰάν ἄρα τῷ τετάρτῳ

Sit enim ipsi  $\Lambda\Delta$  congruens  $\Delta\text{H}$ ; ipsæ igitur  $\Lambda\text{H}$ ,  $\text{H}\Delta$  rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et congruens  $\Delta\text{H}$  commensurabilis est expositæ rationali  $\Lambda\Gamma$ , sed tota  $\Lambda\text{H}$  quam congruens  $\text{H}\Delta$  plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; quoniam igitur  $\Lambda\text{H}$  quam  $\text{H}\Delta$  plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si



μήκει τοῦ ἀπὸ τῆς  $\text{H}\Delta$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Lambda\text{H}$  παραβλήσθαι ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελί<sup>3</sup>. Τετμήσθω οὖν ἡ  $\Delta\text{H}$  δίχα κατὰ τὸ  $\text{E}$ · καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\text{EH}$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Lambda\text{H}$  παραβλήσθαι ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν  $\Lambda\text{Z}$ ,  $\text{ZH}$ · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Lambda\text{Z}$  τῇ  $\text{ZH}$  μήκει. Καὶ διὰ τῶν  $\text{E}$ ,  $\text{Z}$ ,  $\text{H}$  σημείων τῇ  $\Lambda\Gamma$  παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ  $\text{E}\Theta$ ,

igitur quartæ parti quadrati ex  $\text{H}\Delta$  æquale parallelogrammum ad ipsam  $\Lambda\text{H}$  applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur  $\Delta\text{H}$  bifariam in  $\text{E}$ ; et quadrato ex  $\text{EH}$  æquale parallelogrammum ad ipsam  $\Lambda\text{H}$  applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub  $\Lambda\text{Z}$ ,  $\text{ZH}$ ; commensurabilis igitur est  $\Lambda\text{Z}$  ipsi  $\text{ZH}$  longitudine. Et per puncta  $\text{E}$ ,  $\text{Z}$ ,  $\text{H}$  ipsi  $\Lambda\Gamma$  paral-

Que la droite  $\Delta\text{H}$  conviène avec  $\Lambda\Delta$ , les droites  $\Lambda\text{H}$ ,  $\text{H}\Delta$  seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la congruente  $\Delta\text{H}$  sera commensurable avec la rationnelle exposée  $\Lambda\Gamma$ , et la puissance de la droite entière  $\Lambda\text{H}$  surpassera la puissance de la congruente  $\text{H}\Delta$  du quarré d'une droite commensurable en longueur avec  $\Lambda\text{H}$  (déf. trois. 2. 10), puisque la puissance de  $\Lambda\text{H}$  surpassera la puissance de  $\text{H}\Delta$  du quarré d'une droite commensurable en longueur avec  $\Lambda\text{H}$ , si nous appliquons à  $\Lambda\text{H}$  un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de  $\text{H}\Delta$ , soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite  $\Lambda\text{H}$  en parties commensurables (18. 10). Coupons  $\Delta\text{H}$  en deux parties égales au point  $\text{E}$ ; appliquons à  $\Lambda\text{H}$  un parallélogramme qui étant égal au quarré de  $\text{EH}$  soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous  $\Lambda\text{Z}$ ,  $\text{ZH}$ ; la droite  $\Lambda\text{Z}$  sera commensurable en longueur avec  $\text{ZH}$ . Par les points  $\text{E}$ ,  $\text{Z}$ ,  $\text{H}$  menons les

ΖΙ, ΗΚ. Καὶ ἐπὶ σύμμετρος ἐστὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει<sup>5</sup>· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ρητὴ δὲ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ρητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκτέρων ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσων ἐστὶ. Πάλιν, ἐπὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρος ἐστὶν. Ἀλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει<sup>6</sup>· ἑκτέρον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ρητόν ἐστι. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὃν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ τῶν ΑΟΜ<sup>7</sup>· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις<sup>8</sup>, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ἄρα<sup>9</sup>

lelae ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine; et ΑΗ igitur utrique ipsarum ΑΖ, ΖΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΑΗ et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utraque igitur ipsarum ΑΖ, ΖΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΑΙ, ΖΚ medium est. Rursus, quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est. Sed ΔΗ commensurabilis est ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ rationale est. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, circa eundem angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur ΑΙ, ΖΚ media sunt, et commensurabilia inter se, et sunt æqualia quadratis ex ΑΟ, ΟΝ; et qua-

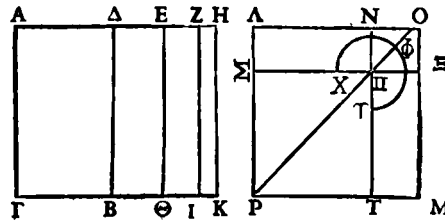
droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque ΑΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΑΗ sera aussi commensurable en longueur avec chacune des droites ΑΖ, ΖΗ (16. 10). Mais ΑΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΑΖ, ΖΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ sera par conséquent médial (22. 10). De plus, puisque ΔΕ est commensurable avec ΕΗ, la droite ΔΗ sera commensurable avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais la droite ΔΗ est commensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΔΘ, ΕΚ est donc rationnel. Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal au parallélogramme ΖΚ, ce carré étant dans le même angle que ΑΜ; savoir, dans l'angle ΑΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ sont médiaux et commensurables entre eux, et qu'ils sont égaux aux carrés des droites ΑΟ, ΟΝ, les carrés des droites ΑΟ, ΟΝ



### 344 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μία ἐστὶ καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μίσαι ἐστί.  
 Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπεὶ  
 γάρ<sup>10</sup> τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ  
 τῆς ΕΗ, ἴσθι ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως  
 ἢ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν  
 ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ. Ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς  
 τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ<sup>11</sup> τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα  
 ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ

drata ex ΛΟ, ΟΝ igitur mediae sunt; et ΛΟ, ΟΝ igitur mediae sunt. Dico et potentiâ solùm commensurabiles. Quoniam enim rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ; sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ. Ut autem ΕΗ ad ΖΗ, ita est ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et



τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἴσθι ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ<sup>12</sup> τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ἔλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΜ, ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι

quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, atque est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ, ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΜΝ igitur æquale est ipsi ΕΚ. Sed ipsi quidem ΕΚ æquale est ΔΘ, ipsi verò ΜΝ æquale ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ. Quoniam igitur totum ΑΚ æquale est quadratis ΑΜ, ΝΞ, quorum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est

seront médiaux ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales. Je dis que ces droites sont commensurables en puissance seulement. Car puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au carré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ. Mais ΜΝ est aussi moyen proportionnel entre ΑΜ et ΝΞ (55. 10), et ΑΙ est égal à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ ; le parallélogramme ΜΝ est donc égal à ΕΚ. Mais ΔΘ est égal à ΕΚ (37. 1), et ΛΞ égal à ΜΝ (43. 1), le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Et puisque le parallélogramme ΑΚ tout entier est égal à la somme des carrés ΑΜ, ΝΞ, et que la partie ΔΚ est égale au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ, le parallélogramme restant

τῷ<sup>13</sup> ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ<sup>14</sup> ἴσον ἔστι τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ<sup>15</sup> ΑΒ χωρίον. Λέγω δὴ<sup>16</sup> ὅτι ἡ ΑΝ μέσης<sup>17</sup> ἀποτομὴ ἔστι πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΜΝ, τουτίστι<sup>18</sup> τῷ ΑΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ<sup>19</sup> τὸ ΑΞ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ. Μίσην δὲ ἰδέχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ<sup>20</sup> τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΑΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομὴ ἔστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἔστι πρώτη. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

quadrato ex AN; quadratum igitur ex AN æquale est spatio AB; ergo AN potest spatium AB. Dico et AN mediæ apotomen esse primam. Quoniam enim rationale est ΕΚ, atque est æquale ipsi ΜΝ, hoc est ipsi ΑΞ; rationale igitur est ΑΞ, hoc est rectangulum sub ΑΟ, ΟΝ. Medium autem ostensum est ΝΞ; incommensurable igitur est ΑΞ ipsi ΝΞ; ut verò ΑΞ ad ΝΞ ita est ΑΟ ad ΟΝ; ipsæ ΑΟ, ΟΝ igitur incommensurabiles sunt longitudine; ipsæ igitur ΑΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes; ergo AN mediæ apotome est prima, et potest spatium AB; recta igitur spatium AB potens mediæ apotome est prima. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

PROPOSITIO XCIV.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἔστι δευτέρα.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

AB sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de AN; le carré de AN est donc égal à la surface AB; la droite AN peut donc la surface AB. Or, je dis que AN est un premier apotome d'une médiale. Car, puisque le parallélogramme ΕΚ est rationel et égal à ΜΝ, c'est-à-dire à ΑΞ, le parallélogramme ΑΞ, c'est-à-dire le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ, sera rationel. Mais on a démontré que ΝΞ est médial; le parallélogramme ΑΞ est donc incommensurable avec ΝΞ; mais ΑΞ est à ΝΞ comme ΑΟ est à ΟΝ (1.6); les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc incommensurables en longueur; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle; la droite AN est donc un premier apotome d'une médiale (75. 10), et elle peut la surface AB; la droite qui peut la surface AB est donc un premier apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCIV.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

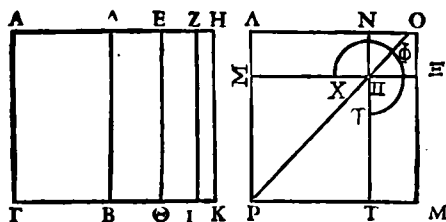
## 346 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μίσης ἀποτομῆ ἴστί διυτέρα.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρος ἴστί μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΔΗ μείζον δύναται

Spatium enim AB contineatur sub rationali AB et apotome tertiâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, mediæ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AD congruens DH; ipsæ AH, HD igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum AH, HD commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG, tota autem AH quam congruens DH plus



τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἴαν ἄρα τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελύσθω

potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quoniam igitur AH quam DH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex DH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur DH bifariam in E, et quadrato ex EH æquale

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un troisième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est un second apotome d'une médiale.

Car que DH convienne avec AD; les droites AH, HD seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune des droites AH, HD ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente DH du carré d'une droite commensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 3. 10). Et puisque la puissance de AH surpasse la puissance de DH du carré d'une droite commensurable avec AH, si nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de DH, soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera AH en parties commensurables (18. 10). Coupons DH en deux parties égales au point E, et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant

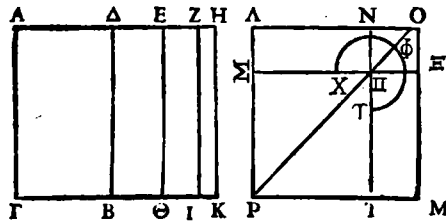
ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ AG παράλληλοι αἱ EΘ, ZI, HK· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ AZ, ZH· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK. Καὶ ἐπεὶ αἱ AZ, ZH σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ AH ἄρα ἑκάτερα τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ AH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν AZ, ZH ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκάτερα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει<sup>2</sup>. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκάτερα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ AZ σύμμετρός ἐστι μήκει,

ad AH applicetur deficiens figura quadratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH. Et ducantur per puncta E, Z, H ipsi AG parallelæ EΘ, ZI, HK; commensurabiles igitur sunt AZ, ZH; commensurabile igitur et AI ipsi ZK. Et quoniam AZ, ZH commensurabiles sunt longitudine, et AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem AH et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH rationalis est et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utrumque igitur ipsorum AI, ZK medium est. Rursus, quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔΗ et incommensurabilis ipsi AG longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi AG longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Et quoniam ΑΗ, ΗΔ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΗ ipsi ΔΗ. Sed quidem ΑΗ ipsi AZ commen-

égal au carré de EH, soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous AZ, ZH. Par les points E, Z, H menons les droites EΘ, ZI, HK parallèles à AG; les droites AZ, ZH seront commensurables; le parallélogramme AI sera donc commensurable avec ZK. Et puisque les droites AZ, ZH sont commensurables en longueur, la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacune des droites AZ, ZH est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacun des parallélogrammes AI, ZK est donc médial (22. 10). De plus, puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ; la droite ΔΗ sera commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec AG; chacun des parallélogrammes ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΔ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en longueur avec ΔΗ. Mais ΑΗ est commensurable en longueur

### 348 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ<sup>3</sup>. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρέσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ ΑΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΑΜ, ΝΞ.



Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγυράσθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὲρ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ<sup>5</sup>. τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ

surabilis est longitudine, ipsa verò ΔΗ ipsi ΗΕ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΕΗ longitudine. Ut autem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ; incommensurable igitur est ΑΙ ipsi ΕΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, eundem angulum habens cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem dia-

metrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. Sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ, ut verò ΕΗ ad ΖΗ ita est ΕΚ ad ΖΚ; et ut igitur ΑΙ ad ΕΚ ita ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, et est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ,

avec ΑΖ, et ΔΗ avec ΗΕ; la droite ΑΖ est donc incommensurable en longueur avec ΕΗ (13. 10). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme le parallélogramme ΑΙ est au parallélogramme ΕΚ (1. 6); le parallélogramme ΑΙ est donc incommensurable avec le parallélogramme ΕΚ. Faisons le carré ΑΜ égal à ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ le carré ΝΞ égal à ΖΚ, ce carré étant dans le même angle que ΑΜ, les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au carré de ΕΗ; la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΑΙ est donc à ΕΚ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionnel entre ΑΙ et ΖΚ. Puisque ΜΝ est moyen proportionnel entre les carrés ΑΜ, ΝΞ, que le parallélogramme ΑΙ est égal

ΖΚ τῷ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα. Ἐπεὶ γὰρ μίσα εἰδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· μίσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· μίση ἄρα ἑκάτερα τῶν ΑΟ, ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρον ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΑΟ ἀσύμμετρος ἐστὶ μὲν τῇ ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μίσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ μίσον εἰδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν

ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ, et ΕΚ igitur æquale est ipsi ΜΝ. Sed quidem ΜΝ æquale est ipsi ΑΞ, ipsum verò ΕΚ æquale est ipsi ΔΘ; et totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ; est autem et ΑΚ æquale ipsis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est ex ΑΝ quadrato; ergo ΑΝ potest spatium ΑΒ. Dico ΑΝ mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim media ostensa sunt ΑΙ, ΖΚ, et sunt æqualia quadratis ex ΑΟ, ΟΝ; medium igitur et utrumque ex ΑΟ, ΟΝ quadratorum; media igitur utraque ipsarum ΑΟ, ΟΝ. Et quoniam commensurable est ΑΙ ipsi ΖΚ, commensurable igitur et ex ΑΟ quadratum quadrato ex ΟΝ. Rursus, quoniam incommensurable demonstratum est ΑΙ ipsi ΕΚ, incommensurable igitur est et ΑΜ ipsi ΜΝ, hoc est quadratum ex ΑΟ rectangulo sub ΑΟ, ΟΝ; quare et ΑΟ incommensurabilis est longitudine ipsi ΟΝ; ipsæ ΑΟ, ΟΝ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico et medium eas continere. Quoniam enim medium ostensum est ΕΚ, atque est æquale rectangulo sub ΑΟ, ΟΝ;

à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ, le parallélogramme ΕΚ sera égal à ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΑΞ (43. 1), et ΕΚ égal à ΔΘ (37. 1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais ΑΚ est égal à la somme des carrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de ΑΝ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis que ΑΝ est un second apotome d'une médiale. Car puisqu'on a démontré que les surfaces ΑΙ, ΖΚ sont médiales, et qu'elles sont égales aux carrés des droites ΑΟ, ΟΝ, chacun des carrés des droites ΑΟ, ΟΝ sera médial; chacune des droites ΑΟ, ΟΝ est donc médiale. Et puisque ΑΙ est commensurable avec ΖΚ, le carré de ΑΟ sera commensurable avec le carré de ΟΝ. De plus, puisqu'on a démontré que ΑΙ est incommensurable avec ΕΚ, le carré ΑΜ sera incommensurable avec ΜΝ, c'est-à-dire le carré de ΑΟ avec le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ; la droite ΑΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis que ces droites comprennent une surface médiale. Car puisqu'on a démontré que ΕΚ est médial, et qu'il est égal au rectangle sous ΑΟ, ΟΝ, le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ

## 350 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΛΟ, ΟΝ<sup>8</sup>· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε<sup>9</sup> αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον<sup>10</sup>· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

medium igitur est et rectangulum sub ΛΟ, ΟΝ; quare ΛΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ergo ΑΝ mediæ apotome est secunda, et potest spatium ΑΒ; recta igitur spatium ΑΒ potens mediæ apotome est secunda. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 46.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶ.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμολούσης τῆς ΗΔ μείζων δύναται<sup>2</sup> τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Επεὶ οὖν ἡ ΑΗ

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome quartâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΒ potest, minorem esse.

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quo-

sera médial; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface médiale; la droite ΑΝ est donc un second apotome d'une médiale (76. 10), et elle peut la surface ΑΒ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un second apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XCV.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

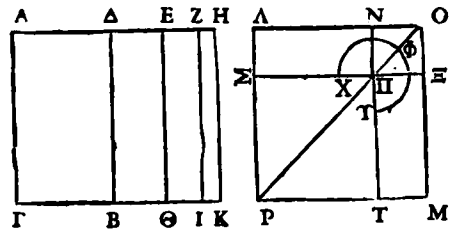
Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un quatrième apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est une mineure.

Car que ΔΗ convienne à ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du carré d'une droite incommensurable en longueur

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 351

τῆς ΗΔ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου  
ἐαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μίρει τοῦ  
ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ  
ἑλλεῖπον ἴδιαι τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν  
διελίῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχῃ κατὰ τὸ Ε,  
καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παρα-  
βεβλήσθω ἑλλεῖπον ἴδιαι τετραγώνῳ, καὶ ἴστω  
τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ

niam igitur  $AH$  quam  $HA$  plus potest quadrato  
ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si  
igitur quartæ parti quadrati ex  $\Delta H$  æquale ad  
 $AH$  applicetur deficiens figurâ quadratâ, in  
partes incommensurabiles ipsam dividet. Se-  
cetur igitur  $\Delta H$  bifariam in  $E$ , et quadrato ex  
 $EH$  æquale ad  $AH$  applicetur deficiens figurâ  
quadratâ, et sit rectangulum sub  $AZ$ ,  $ZH$ ;



μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ<sup>3</sup>. Ηχθωσαν οὖν διὰ τῶν  
Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ,  
ΖΙ, ΗΚ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΑΗ, καὶ σύμ-  
μετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ  
ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ  
ΑΓ μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μίσην  
ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν

incommensurabilis igitur est longitudine ipsa  $AZ$   
ipsi  $ZH$ . Ducantur igitur per puncta  $E$ ,  $Z$ ,  $H$   
parallelae  $EΘ$ ,  $ZΙ$ ,  $ΗΚ$  ipsis  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ . Quoniam  
igitur rationalis est  $AH$ , et commensurabilis  
ipsi  $ΑΓ$  longitudine; rationale igitur est totum  
 $ΑΚ$ . Rursus, quoniam incommensurabilis est  $\Delta H$   
ipsi  $ΑΓ$  longitudine, et sunt ambæ rationales;  
medium igitur est  $\DeltaΚ$ . Rursus, quoniam incom-

avec  $AH$  (déf. trois. 4. 10). Puisque la puissance de  $AH$  surpasse la puissance de  $HA$  du  
quarré d'une droite incommensurable en longueur avec  $AH$ ; si nous appliquons à  
 $AH$  un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de  $\Delta H$ , soit  
défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite  $AH$  en parties  
incommensurables (18. 10). Coupons  $\Delta H$  en deux parties égales en  $E$ ; appliquons à  
 $AH$  un parallélogramme, qui étant égal au quarré de  $EH$ , soit défaillant d'une figure  
quarrée; que ce soit le rectangle sous  $AZ$ ,  $ZH$ ; la droite  $AZ$  sera incommen-  
surable en longueur avec  $ZH$ . Par les points  $E$ ,  $Z$ ,  $H$  menons les droites  $EΘ$ ,  $ZΙ$ ,  $ΗΚ$  paral-  
lèles aux droites  $ΑΓ$ ,  $ΒΔ$ . Puisque  $AH$  est rationnelle et commensurable en longueur avec  
 $ΑΓ$ , le parallélogramme entier  $ΑΚ$  sera rationel (20. 10). De plus, puisque  $\Delta H$  est in-  
commensurable en longueur avec  $ΑΓ$ , et que ces droites sont rationnelles l'une  
et l'autre, le parallélogramme  $\DeltaΚ$  sera médial (22. 10). De plus, puisque  $AZ$  est



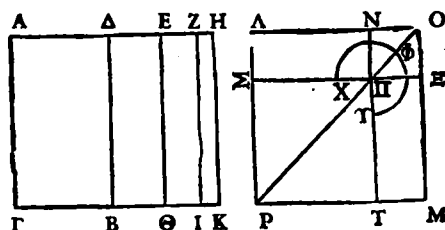
ἡ AZ τῇ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετραγώνον τὸ AM, τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρήσθω τὸ NΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅτι τῷ AM, τὴν ὑπὸ AOM<sup>4</sup>. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ<sup>5</sup> τὰ AM, NΞ τετραγώνια. Εἰσὼ αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Επεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν<sup>6</sup> EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν HZ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK, ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ<sup>7</sup> τὸ EK πρὸς τὸ ZK· τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK. Εἰσὶ δὲ καὶ τῶν AM, NΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ AM, τὸ δὲ ZK τῷ NΞ· καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN. Ἀλλὰ τῷ<sup>8</sup> μὲν EK ἴσον ἐστὶ τὸ<sup>9</sup> ΔΘ, τὸ δὲ MN ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ NΞ. Επεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἐστὶ τοῖς AM, NΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ NΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ,

mensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine, incommensurable igitur et AI ipsi ZK. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM, ipsi verò ZK æquale auferatur NΞ, eundem habens angulum AOM cum ipso AM; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata AM, NΞ. Sit ipsorum diameter OP, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub AZ, ZH æquale est quadrato ex EH, proportionale igitur est ut AZ ad EH ita EH ad HZ. Sed ut quidem AZ ad EH ita est AI ad EK, ut verò EH ad ZH ita est EK ad ZK; ipsorum igitur AI, ZK medium proportionale est EK. Est autem et quadratorum AM, NΞ medium proportionale MN, et est æquale quidem AI ipsi AM, et ZK ipsi NΞ; et EK igitur æquale est ipsi MN. Sed ipsi quidem EK æquale est ΔΘ, et MN æquale est ipsi ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi NΞ. Quoniam igitur totum AK æquale est quadratis AM, NΞ, quorum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et quadrato NΞ; reliquum igitur AB æquale est ipsi ΣΤ,

incommensurable en longueur avec ZH, le parallélogramme AI sera incommensurable avec ZK (1.6). Faisons le carré AM égal à AI, et retranchons de AM un carré NΞ égal à ZK, ce carré étant autour d'un même angle AOM que le carré AM; les carrés AM, NΞ seront autour de la même diagonale (26.6). Que OP soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ, ZH est égal au carré de EH, la droite AZ sera à EH comme EH est à HZ (17.6). Mais AZ est à EH comme AI est à EK, et EH est à ZH comme EK est à ZK (1.6); le parallélogramme EK est donc moyen proportionnel entre AI et ZK. Et puisque MN est moyen proportionnel entre les carrés AM, NΞ, que le parallélogramme AI est égal à AM, et ZK égal à NΞ, le parallélogramme EK sera égal à MN. Mais ΔΘ est égal à EK (37.1), et MN égal à ΛΞ (43.1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec NΞ. Et puisque le parallélogramme entier AK est égal à la somme des carrés AM, NΞ, et que ΔΚ est égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec le carré NΞ, le parallélogramme restant AB sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de

τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{N}$  τετραγώνῳ· ἡ  $\Lambda\text{N}$  ἄρα δύναται τὸ  $\text{AB}$  χωρίον. Λέγω δὴ<sup>10</sup> ὅτι ἡ  $\Lambda\text{N}$  ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ  $\text{AK}$ , καὶ ἴστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  ῥητόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $\Delta\text{K}$  μέσον ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ  $\Delta\text{K}$  τῷ δις ὑπὸ τῶν  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$ · τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν

hoc est ex  $\Lambda\text{N}$  quadrato; ergo  $\Lambda\text{N}$  potest spatium  $\text{AB}$ . Dico et  $\Lambda\text{N}$  irrationalem esse quæ appellatur minor. Quoniam enim rationale est  $\text{AK}$ , et est æquale quadratis ex  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$ ; compositum igitur ex quadratis ipsarum  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  rationale est. Rursus, quoniam  $\Delta\text{K}$  medium est, et est æquale  $\Delta\text{K}$  rectangulo bis sub  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$ ; rectan-



$\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  μέσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ  $\text{AI}$  τῷ  $\text{ZK}$ , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\text{AO}$  τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς  $\text{ON}$  τετραγώνῳ<sup>11</sup>. αἱ  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ  $\Lambda\text{N}$  ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ  $\text{AB}$  χωρίον· ἢ ἄρα τὸ  $\text{AB}$  χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tangulum igitur bis sub  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  medium est. Et quoniam incommensurable demonstratum est  $\text{AI}$  ipsi  $\text{ZK}$ , incommensurable igitur et ex  $\text{AO}$  quadratum quadrato ex  $\text{ON}$ ; ipsæ  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; ergo  $\Lambda\text{N}$  irrationalis est, quæ appellatur minor, et potest spatium  $\text{AB}$ ; recta igitur spatium  $\text{AB}$  potens minor est. Quod oportebat ostendere.

$\Lambda\text{N}$ ; la droite  $\Lambda\text{N}$  peut donc la surface  $\text{AB}$ . Or, je dis que  $\Lambda\text{N}$  est l'irrationnelle qu'on nomme mineure. Car, puisque le parallélogramme  $\text{AK}$  est rationel, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$ , la somme des quarrés des droites  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  sera rationelle. De plus, puisque  $\Delta\text{K}$  est médial, et qu'il est égal au double rectangle compris sous  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$ , le double rectangle sous  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  sera médial. Et puisque on a démontré que  $\text{AI}$  est incommensurable avec  $\text{ZK}$ , le quarré de  $\text{AO}$  sera incommensurable avec le quarré de  $\text{ON}$ ; les droites  $\text{AO}$ ,  $\text{ON}$  sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant rationelle la somme de leurs quarrés, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite  $\Lambda\text{N}$  est donc l'irrationnelle qu'on appelle mineure (77. 10); mais cette droite peut la surface  $\text{AB}$ ; la droite qui peut la surface  $\text{AB}$  est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 45'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ μετὰ ἡτοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιέχισθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λίγω ὅτι ἢ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἢ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ· εἰ γὰρ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελήσθω ἑλλείπον

## PROPOSITIO XCVI.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome quintâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΒ potest, esse eam quæ cum rationali medium totum facit.

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et congruens ΔΗ commensurabilis est longitudine expositæ rationali ΑΓ, et tota ΑΗ quam congruens ΔΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in puncto Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ qua-

## PROPOSITION XCVI.

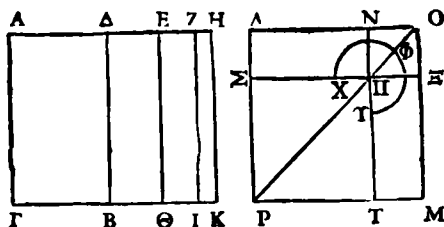
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et un cinquième apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, que la droite ΔΗ conviène avec ΑΔ; les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la congruente ΔΗ sera incommensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΔΗ du quarré d'une droite incommensurable avec la droite entière ΑΗ (déf. trois. 5. 10); si donc nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔΗ en deux parties égales en Ε, et appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit

εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ·  
ἀσύμμετρος ἄρα ἴστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ  
ἡχθῶσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι  
αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ'. Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρός ἴστιν ἡ  
ΑΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί·  
μείσον ἄρα ἴστί τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ρητή ἴστιν  
ἡ ΔΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ρητόν ἴστί

dratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; incom-  
mensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine.  
Et ducantur per Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ΕΘ,  
ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΗ  
ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales;  
medium igitur est ΑΚ. Rursus, quoniam ratio-  
nalis est ΔΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longi-



τὸ ΑΚ. Συνιστάτω οὖν τῇ μὲν ΑΙ ἴσον τετρά-  
γωνον τὸ ΑΜ, τῇ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφ-  
ήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῇ ΑΜ γωνίαν, τὴν  
ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ<sup>2</sup>· περὶ τὴν, αὐτὴν ἄρα διά-  
μετρόν ἴστί τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Εστω  
αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ  
σχῆμα. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται  
τὸ ΑΒ χωρίον<sup>3</sup>. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἡ μὲν ρητοῦ  
μείσον τὸ ὅλον ποιούσα ἴστιν. Επεὶ γὰρ μείσον

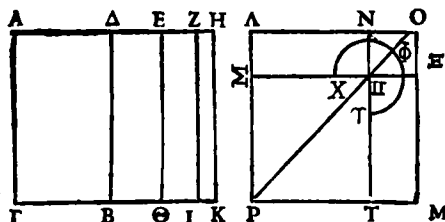
tudine, rationale est ΑΚ. Constituatur igitur  
ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi  
verò ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, eum-  
dem habens angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo  
circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ,  
ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur  
figura. Similiter utique demonstrabimus rectam  
ΑΝ posse spatium ΑΒ. Dico ΑΝ esse eam quæ  
cum rationali medium totum facit. Quoniam

défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la  
droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η  
menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque la droite ΑΗ est incommensu-  
rable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre,  
le parallélogramme ΑΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque la droite ΔΗ est  
rationnelle, et qu'elle est incommensurable en longueur avec ΑΓ, la surface ΑΚ sera  
rationnelle (20. 10). Faisons le quarré ΑΜ égal à ΑΙ, et retranchons de ΑΜ un quarré  
ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant autour du même angle ΑΟΜ que ΑΜ; les quarrés  
ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diamètre soit ΟΡ,  
et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière que la droite ΑΝ  
peut la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ fait avec une surface rationnelle un tout  
médial. Car, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΑΚ est médial, et

### 356 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δείχθη τὸ  $\Delta\mathbf{K}$ , καὶ ἴσιν τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$ · τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ  $\Delta\mathbf{K}$ , καὶ ἴσιν τῷ δις ὑπὸ τῶν  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$ · καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ  $\mathbf{AI}$  τῷ  $\mathbf{ZK}$ , ἀσύμ-

enim medium ostensum est  $\Delta\mathbf{K}$ , et est æquale quadratis ex  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$ ; compositum igitur ex quadratis ipsarum  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  medium est. Rursus, quoniam rationale est  $\Delta\mathbf{K}$ , et est æquale rectangulo bis sub  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$ ; et rectangulum bis igitur sub  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  rationale est. Et quoniam incommensurable est  $\mathbf{AI}$  ipsi  $\mathbf{ZK}$ , incom-



μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\mathbf{O}$  τῷ ἀπὸ τῆς  $\mathbf{ON}$ · αἱ  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον· τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ<sup>5</sup>  $\mathbf{AN}$  ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον<sup>6</sup> τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ  $\mathbf{AB}$  χωρίον· ἢ τὸ  $\mathbf{AB}$  ἄρα<sup>7</sup> χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἐστίν. Ὅπερ ἴδι διείξαι.

mensurable igitur est et ex  $\Lambda\mathbf{O}$  quadratum quadrato ex  $\mathbf{ON}$ ; ipsæ  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium; rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua igitur  $\mathbf{AN}$  irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum faciens, et potest spatium  $\mathbf{AB}$ ; recta igitur spatium  $\mathbf{AB}$  potens est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

puisque ce parallélogramme est égal à la somme des quarrés des droites  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$ , la somme des quarrés des droites  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  sera médiale. De plus, puisque le parallélogramme  $\Delta\mathbf{K}$  est rationel, et qu'il est égal au double rectangle sous  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$ , le double rectangle sous  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  sera rationel. Mais le parallélogramme  $\mathbf{AI}$  est incommensurable avec  $\mathbf{ZK}$ ; le quarré de  $\Lambda\mathbf{O}$  est donc incommensurable avec le quarré de  $\mathbf{ON}$ ; les droites  $\Lambda\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{ON}$  sont donc incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites étant rationel; la droite restante  $\mathbf{AN}$  est donc l'irrationnelle qui est dite pouvant avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Mais cette droite peut la surface  $\mathbf{AB}$ ; la droite qui peut la surface  $\mathbf{AB}$  est donc celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 47.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχίσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς τῆς AD· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ AD προσαρμοζούσα ἡ DH· αἱ ἄρα AH, HD ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέντερά αὐτῶν· σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς DH μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπὶ οὖν ἡ AH τῆς HD μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς DH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ<sup>2</sup> ἑλλείπον εἶδω τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελίῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ DH δίχα κατὰ

PROPOSITIO XCVII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AG et apotome sextâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum medio medium totum facit.

Sit enim ipsi AD congruens DH; ipsæ igitur AH, HD rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali AG longitudine, et tota AH quam congruens DH plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quoniam igitur AH quam HD plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti ex DH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur

PROPOSITION XCVII.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

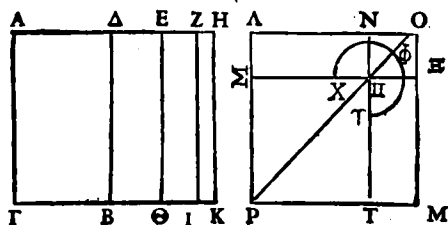
Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AR et un sixième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que DH convienne avec AD, les droites AH, HD seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune de ces droites ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AR, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente DH du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec AH (déf. trois. 6. 10). Puisque la puissance de AH surpassera la puissance de HD du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec AH; si on applique à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de DH, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite AH en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite DH en deux parties

# 358 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ  $E^3$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $EH$  ἴσον παρὰ τὴν  $AH$  παραβελήσθω ἐλλείπον εἶδος τετραγώνου, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν  $AZ$ ,  $ZH$  ἀσύμμετρος ἄρα ἴστιν ἡ  $AZ$  τῇ  $ZH$  μήκει. Ὡς δὲ ἡ  $AZ$  πρὸς τὴν  $ZH$  οὕτως ἴστί τὸ  $AI$  πρὸς τὸ  $ZK$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ  $AI$  τῷ  $ZK$ . Καὶ ἐπεὶ αἱ  $AH$ ,  $AG$  ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἴστί τὸ  $AK$ . Πάλιν, ἐπεὶ αἱ  $AG$ ,  $\Delta H$  ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἴστί

igitur  $\Delta H$  bifariam in  $E$ , et quadrato ex  $EH$  æquale ad  $AH$  applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub  $AZ$ ,  $ZH$ ; incommensurabilis igitur est  $AZ$  ipsi  $ZH$  longitudine. Ut autem  $AZ$  ad  $ZH$  ita est  $AI$  ad  $ZK$ ; incommensurabile igitur est  $AI$  ipsi  $ZK$ . Et quoniam  $AH$ ,  $AG$  rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium est  $AK$ . Rursus, quoniam  $AG$ ,  $\Delta H$  rationales sunt et incommensu-



καὶ τὸ  $\Delta K^4$ . Ἐπεὶ οὖν αἱ  $AH$ ,  $HA$  δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἴστιν ἡ  $AH$  τῇ  $HA$  μήκει. Ὡς δὲ ἡ  $AH$  πρὸς τὴν  $HA$  οὕτως ἴστί τὸ  $AK$  πρὸς τὸ  $KA$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ  $AK$  τῷ  $KA$ . Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν  $AI$  ἴσον τετράγωνον τὸ  $\Lambda M$ , τῷ δὲ  $ZK$  ἴσον ἀφ-

rabiles longitudine, medium est et  $\Delta K$ . Quoniam igitur  $AH$ ,  $HA$  potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est  $AH$  ipsi  $HA$  longitudine. Ut autem  $AH$  ad  $HA$  ita est  $AK$  ad  $KA$ ; incommensurabile igitur est  $AK$  ipsi  $KA$ . Constituatur igitur ipsi quidem  $AI$  æquale quadratum  $\Lambda M$ , ipsi verò  $ZK$  æquale auferatur  $N\Xi$ ,

égales en  $E$ , et appliquons à  $AH$  un parallélogramme, qui étant égal au carré de  $AH$ , soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le rectangle sous  $AZ$ ,  $ZH$ ; la droite  $AZ$  sera incommensurable en longueur avec  $ZH$ . Mais  $AZ$  est à  $ZH$  comme  $AI$  est à  $ZK$  (1. 6); le parallélogramme  $AI$  est donc incommensurable avec  $ZK$  (10. 10). Et puisque les droites  $AH$ ,  $AG$  sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le parallélogramme  $AK$  sera médial (22. 10). De plus, puisque les droites  $AG$ ,  $\Delta H$  sont rationnelles, et incommensurables en longueur, le parallélogramme  $\Delta K$  sera médial. Puisque les droites  $AH$ ,  $HA$  sont commensurables en puissance seulement, la droite  $AH$  sera incommensurable en longueur avec  $HA$ . Mais  $AH$  est à  $HA$  comme  $AK$  est à  $KA$  (1. 6); le parallélogramme  $AK$  est donc incommensurable avec  $KA$  (10. 10). Faisons le carré  $\Lambda M$  égal à  $AI$  (14. 2), et retranchons de  $\Lambda M$  un carré  $N\Xi$  égal à  $ZK$ , ce carré

ρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ  $\Lambda\text{M}$  γωνίαν τὸ  $\text{N}\epsilon^5$ .  
περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὰ  $\Lambda\text{M}$ ,  $\text{N}\epsilon$   
τετράγωνα. Ἐστὼ αὐτῶν διάμετρος ἡ  $\text{OP}$ , καὶ  
καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπάνω  
δείξομεν ὅτι ἡ  $\Lambda\text{N}$  δύναται τὸ  $\text{AB}$  χωρίον. Λέγω  
ὅτι ἡ  $\Lambda\text{N}$  ἢ 7 μετὰ μίσου μίσον τὸ ὅλον ποιοῦσά  
ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ μίσον εἰδείχθη τὸ  $\Delta\text{K}$ , καὶ ἔστιν  
ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ . τὸ ἄρα συγκρί-  
μινον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  μίσον ἐστί.  
Πάλιν, ἐπεὶ μίσον εἰδείχθη τὸ  $\Delta\text{K}$ , καὶ ἔστιν  
ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ . καὶ τὸ δις  
ἄρα<sup>8</sup> ὑπὸ τῶν  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  μίσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ  
ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ  $\Delta\text{K}$  τῷ  $\Delta\text{K}$ , ἀσύμμετρα  
ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  τετράγωνα  
τῷ δις ὑπὸ τῶν  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ . Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμε-  
τρόν ἐστι τὸ  $\text{AI}$  τῷ  $\text{ZK}$ , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ  
τὸ ἀπὸ τῆς  $\Lambda\text{O}$  τῷ ἀπὸ τῆς  $\text{ON}$ . αἱ  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$   
ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τὸ  
συνκρίμινον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον,  
καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μίσον, ἵτις τε τὰ ἀπ'  
αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν.

eundem angulum habens cum ipso  $\Lambda\text{M}$ ; ergo  
circa eandem diametrum sunt quadrata  $\Lambda\text{M}$ ,  
 $\text{N}\epsilon$ . Sit ipsorum diameter  $\text{OP}$ , et describatur  
figura. Congruenter utique præcedentibus osten-  
demus rectam  $\Lambda\text{N}$  posse spatium  $\text{AB}$ . Dico  $\Lambda\text{N}$  esse  
eam quæ cum medio medium totum facit. Quo-  
niam enim medium ostensum est  $\Delta\text{K}$ , atque est  
æquale quadratis ex  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ ; compositum igitur  
ex quadratis ipsarum  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  medium est.  
Rursus, quoniam medium ostensum est  $\Delta\text{K}$ , et  
est æquale rectangulo bis sub  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ ; et rec-  
tangulum bis igitur sub  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  medium est.  
Et quoniam incommensurable ostensum est  $\Delta\text{K}$   
ipsi  $\Delta\text{K}$ , incommensurabilia igitur sunt et ex  
 $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  quadrata rectangulo bis sub  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ .  
Et quoniam incommensurable est  $\text{AI}$  ipsi  $\text{ZK}$ ,  
incommensurable igitur et ex  $\Lambda\text{O}$  quadratum  
quadrato ex  $\text{ON}$ ; ipsæ  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  igitur potentiâ  
sunt incommensurabiles, facientes et compo-  
situm ex ipsarum quadratis medium, et rectan-  
gulum bis sub ipsis medium, et adhuc ipsarum  
quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub

étant autour du même angle que  $\Lambda\text{M}$ ; les quarrés  $\Lambda\text{M}$ ,  $\text{N}\epsilon$  seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit  $\text{OP}$ , et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que la droite  $\Lambda\text{N}$  peut la surface  $\text{AB}$ . Je dis que la droite  $\Lambda\text{N}$  est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Car, puisque nous avons démontré que le parallélogramme  $\Delta\text{K}$  est médial, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ , la somme des quarrés des droites  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  sera médiale. De plus, puisqu'on a démontré que le parallélogramme  $\Delta\text{K}$  est médial, et puisqu'il est égal au double rectangle sous  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ , le double rectangle sous  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  sera médial. Et puisqu'on a démontré que  $\Delta\text{K}$  est incommensurable avec  $\Delta\text{K}$ , la somme des quarrés des droites  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  sera incommensurable avec le double rectangle sous  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$ . Et puisque  $\text{AI}$  est incommensurable avec  $\text{ZK}$ , le quarré de  $\Lambda\text{O}$  sera incommensurable avec le quarré de  $\text{ON}$ ; les droites  $\Lambda\text{O}$ ,  $\text{ON}$  sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le



## 360 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἄρα  $\Lambda\text{N}$  ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα, καὶ δύναται τὸ  $\text{AB}$  χωρίον· ἡ ἄρα τὸ  $\text{AB}$  χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν. Ὅπρι ἴδι διῆξαι.

ipsis; ergo  $\Lambda\text{N}$  irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum faciens, et potest spatium  $\text{AB}$ ; recta igitur spatium  $\text{AB}$  potens est quæ cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομή ἡ  $\text{AB}$ , ῥητὴ δὲ ἡ  $\Gamma\Delta$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\text{AB}$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Gamma\Delta$  παραβλήσθω τὸ  $\Gamma\text{E}$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Gamma\text{Z}$ · λέγω ὅτι ἡ  $\Gamma\text{Z}$  ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ  $\text{AB}$  προσαρμόζουσα ἡ  $\text{BH}$ · αἱ ἄρα  $\text{AH}$ ,  $\text{HB}$  ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $\text{AH}$  ἴσον παρὰ τὴν  $\Gamma\Delta$  παραβλήσθω τὸ  $\Gamma\Theta$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $\text{BH}$  τὸ  $\text{KL}$ · ὅλον ἄρα τὸ  $\Gamma\Lambda$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ

### PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome  $\text{AB}$ , rationalis autem  $\Gamma\Delta$ , et quadrato ex  $\text{AB}$  æquale ad ipsam  $\Gamma\Delta$  applicetur  $\Gamma\text{E}$ , latitudinem faciens  $\Gamma\text{Z}$ ; dico  $\Gamma\text{Z}$  apotomen esse primam.

Sit enim ipsi  $\text{AB}$  congruens  $\text{BH}$ ; ipsæ igitur  $\text{AH}$ ,  $\text{HB}$  rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato quidem ex  $\text{AH}$  æquale ad  $\Gamma\Delta$  applicetur  $\Gamma\Theta$ , quadrato autem ex  $\text{BH}$  ipsum  $\text{KL}$ , totum igitur  $\Gamma\Lambda$  æquale est qua-

double rectangle sous ces mêmes droites; la droite  $\Lambda\text{N}$  est donc l'irrationnelle appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (79. 10); mais cette droite peut la surface  $\text{AB}$ ; la droite qui peut la surface  $\text{AB}$  est donc celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION XCVIII.

Le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome.

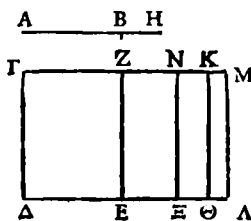
Soit l'apotome  $\text{AB}$ , et la rationnelle  $\Gamma\Delta$ ; appliquons à  $\Gamma\Delta$  un parallélogramme  $\Gamma\text{E}$  égal au carré de  $\text{AB}$ , ce parallélogramme ayant  $\Gamma\text{Z}$  pour largeur; je dis que  $\Gamma\text{Z}$  est un premier apotome.

Car que  $\text{BH}$  convienne avec  $\text{AB}$ , les droites  $\text{AH}$ ,  $\text{HB}$  seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Appliquons à  $\Gamma\Delta$  un parallélogramme  $\Gamma\Theta$  égal au carré de  $\text{AH}$ , et un parallélogramme  $\text{KL}$  égal au carré de  $\text{BH}$  (45. 1); le parallélogramme entier  $\Gamma\Lambda$  sera égal à la somme des carrés

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 361

τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ὡν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἴσται τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ

dratis ex ΑΗ, ΗΒ. Quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΔ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΑΝ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt, atque est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale ΔΜ; rationale igitur



ΔΜ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴσται<sup>2</sup> τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΑΖ· μέσον ἄρα τὸ ΑΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν

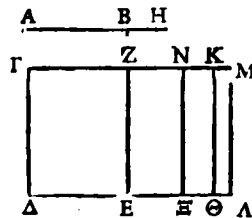
est ΔΜ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ, et est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΑΖ; medium igitur ΑΖ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata quidem ex ΑΗ,

des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais ΓΕ est égal au carré de ΑΒ; le parallélogramme restant ΖΔ est donc égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΑΝ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sont rationels, et que ΔΜ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΔΜ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, et que le parallélogramme ΑΖ est égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΑΖ sera médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΖΜ, la droite ΖΜ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque

# 362 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὰ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον<sup>5</sup>, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ<sup>6</sup> τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀπο-

HB rationalia sunt, rectangulum verò bis sub AH, HB medium, incommensurabilia igitur quadrata ex AH, HB rectangulo bis sub AH, HB. Et quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB ipsum ΖΛ; incommensurable igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensura-



τομή ἐστι. Λίγω δὲ<sup>7</sup> ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ<sup>8</sup>. καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἐστὶν

biles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et primam. Quoniam enim quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ; quadrato verò ex BH æquale ΚΛ, quadrato autem ex AH, HB ipsum ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est

les quarrés des droites AH, HB sont rationels, et que le double rectangle sous AH, HB est médial, la somme des quarrés des droites AH, HB sera incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB. Mais ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et ΖΛ égal au double rectangle sous AH, HB; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un premier apotome. Car, puisque le rectangle sous AH, HB est moyen proportionnel entre les quarrés des droites AH, HB (55. 10), que ΓΘ est égal au quarré de AH, que ΚΛ est égal au quarré de BH, et que ΝΛ est égal au quarré de AH, HB, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre les parallélogrammes ΓΘ, ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ

ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἐστὶν<sup>9</sup> ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ<sup>10</sup>. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι<sup>11</sup> καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἡλλεῖπον ἰδίῃ τετραγώνῳ τὸ<sup>12</sup> ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ut  $\Gamma\Theta$  ad  $NA$  ita  $NA$  ad  $KA$ . Sed ut quidem  $\Gamma\Theta$  ad  $NA$  ita est  $ΓΚ$  ad  $NM$ ; ut verò  $NA$  ad  $KA$  ita est  $NM$  ad  $KM$ ; ut igitur  $ΓΚ$  ad  $NM$  ita est  $NM$  ad  $KM$ ; rectangulum igitur sub  $ΓΚ$ ,  $KM$  æquale est quadrato ex  $MN$ , hoc est quartæ parti quadrati ex  $ZM$ . Et quoniam commensurabile est ex  $AH$  quadratum quadrato ex  $HB$ , commensurabile est et  $\Gamma\Theta$  ipsi  $KA$ . Ut autem  $\Gamma\Theta$  ad  $KA$  ita  $ΓΚ$  ad  $KM$ ; commensurabilis igitur est  $ΓΚ$  ipsi  $KM$ . Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt  $ΓΜ$ ,  $MZ$ , et quartæ parti quadrati ex  $ZM$  æquale ad  $ΓΜ$  applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub  $ΓΚ$ ,  $KM$ , et est commensurabilis  $ΓΚ$  ipsi  $KM$ ; ergo  $ΓΜ$  quam  $MZ$  plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est  $ΓΜ$  commensurabilis expositæ rationali  $ΓΔ$  longitudine; ergo  $ΓΖ$  apotome est prima.

Quadratum igitur, etc.

comme  $NA$  est à  $KA$ . Mais  $\Gamma\Theta$  est à  $NA$  comme  $ΓΚ$  est à  $NM$ , et  $NA$  est à  $KA$  comme  $NM$  est à  $KM$ ; la droite  $ΓΚ$  est donc à  $NM$  comme  $NM$  est à  $KM$ ; le rectangle sous  $ΓΚ$ ,  $KM$  est donc égal au carré de  $MN$ , c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de  $ZM$  (17. 6). Et puisque le carré de  $AH$  est commensurable avec le carré de  $HB$ , le parallélogramme  $\Gamma\Theta$  sera commensurable avec  $KA$ . Mais  $\Gamma\Theta$  est à  $KA$  comme  $ΓΚ$  est à  $KM$ ; la droite  $ΓΚ$  est donc commensurable avec  $KM$  (10. 10). Et puisque les deux droites  $ΓΜ$ ,  $MZ$  sont inégales, qu'on a appliqué à  $ΓΜ$  un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de  $ZM$ , est défailant d'une figure carrée, que ce parallélogramme est celui qui est compris sous  $ΓΚ$ ,  $KM$ , et que  $ΓΚ$  est commensurable avec  $KM$ , la puissance de  $ΓΜ$  surpassera la puissance de  $MZ$  du carré d'une droite commensurable en longueur avec  $ΓΜ$  (18. 10). Mais  $ΓΜ$  est commensurable en longueur avec la rationelle exposée  $ΓΔ$ ; la droite  $ΓΖ$  est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Le carré, etc.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Εστω μέσης ἀποτομῆς πρώτης ἡ  $AB$ , ῥητὴ δὲ ἡ  $ΓΔ$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον παρὰ τὴν  $ΓΔ$  παραβεβλήσθω τὸ  $ΓΕ$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $ΓΖ$ . λέγω ὅτι ἡ  $ΓΖ$  ἀποτομὴ ἐστὶ δευτέρα.

Εστω γὰρ τῇ  $AB$  προσαρμύζουσα ἡ  $BH$ . αἱ ἄρα  $AH$ ,  $HB$  μέσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AH$  ἴσον παρὰ τὴν  $ΓΔ$  παραβεβλήσθω τὸ  $ΓΘ$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $ΓΚ$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $HB$  ἴσον τὸ  $ΚΛ$ , πλάτος ποιοῦν τὴν  $ΚΜ$ . ὅλον ἄρα τὸ  $ΓΛ$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$  μέσοις οὔσι. μέσον ἄρα καὶ τὸ  $ΓΛ$ . Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν  $ΓΔ$  παραβέβηται, πλάτος ποιοῦν τὴν  $ΓΜ$ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ  $ΓΜ$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $ΓΔ$  μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ  $ΓΛ$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς  $AB$  ἴσον ἐστὶ τῷ

## PROPOSITIO XCIX.

Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima  $AB$ , rationalis autem  $ΓΔ$ , et quadrato ex  $AB$  æquale ad  $ΓΔ$  applicetur  $ΓΕ$ , latitudinem faciens  $ΓΖ$ ; dico  $ΓΖ$  apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi  $AB$  congruens  $BH$ ; ipsæ igitur  $AH$ ,  $HB$  mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes. Et quadrato quidem ex  $AH$  æquale ad  $ΓΔ$  applicetur  $ΓΘ$ , latitudinem faciens  $ΓΚ$ , quadrato verò ex  $HB$  æquale  $ΚΛ$ , latitudinem faciens  $ΚΜ$ ; totum igitur  $ΓΛ$  æquale est quadratis ex  $AH$ ,  $HB$  quæ media sunt; medium igitur et  $ΓΛ$ . Et ad rationalem  $ΓΔ$  applicatur, latitudinem faciens  $ΓΜ$ ; rationalis igitur est  $ΓΜ$ , et incommensurabilis ipsi  $ΓΔ$  longitudine. Et quoniam  $ΓΛ$  æquale est quadratis ex  $AH$ ,  $HB$ , quorum quadratum ex  $AB$

## PROPOSITION XCIX.

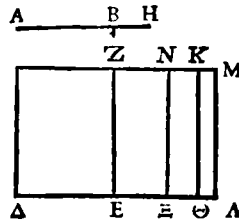
Le carré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second apotome.

Soient un premier apotome d'une médiale  $AB$ , et la rationnelle  $ΓΔ$ ; appliquons à  $ΓΔ$  un parallélogramme  $ΓΕ$ , qui étant égal au carré de  $AB$ , ait pour largeur la droite  $ΓΖ$ ; je dis que  $ΓΖ$  est un second apotome.

Car que  $BH$  convienne avec  $AB$ , les droites  $AH$ ,  $HB$  seront des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprendront une surface rationnelle (75. 10). Appliquons à  $ΓΔ$  un parallélogramme  $ΓΘ$ , qui étant égal au carré de  $AH$ , ait la droite  $ΓΚ$  pour largeur; appliquons aussi à  $ΓΔ$  un parallélogramme  $ΚΛ$ , qui étant égal au carré de  $HB$ , ait  $ΚΜ$  pour largeur (45. 1); le parallélogramme entier  $ΓΛ$  sera égal à la somme des carrés des droites  $AH$ ,  $HB$ , ces carrés étant médiaux; le parallélogramme  $ΓΛ$  sera donc médial. Mais il est appliqué à  $ΓΔ$ , et il a  $ΓΜ$  pour largeur; la droite  $ΓΜ$  est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec  $ΓΔ$  (23. 10). Et puisque  $ΓΛ$  est égal à la somme des carrés des droites  $AH$ ,  $HB$ , et que

ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἵστί τῷ ΖΑ. Ρητὸν δὲ ἵστί τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ρητὸν ἄρα τὸ ΖΑ, καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ρητὴ ἄρα ἵστί<sup>3</sup> καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μῆκει. Ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὰ ΓΑ, μέσον ἵστί· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ,

æquale est ipsi ΓΕ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ipsi ΖΛ. Rationale autem est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ; rationale igitur ΖΑ, et ad rationalem ΖΕ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quoniam igitur quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΓΑ, medium est; rectangulum verò bis



τουτέστι τὸ ΖΑ, ρητὸν· ἀσύμμετρον ἄρα ἵστί τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἵστί<sup>4</sup> ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἵστί<sup>4</sup> ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μῆκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἵστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον

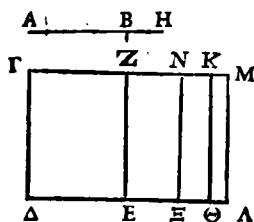
sub ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΖΑ, rationale; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et secundam. Secetur enim ΖΜ bifariam in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ

le carré de AB est égal à ΓΕ, le double rectangle restant compris sous ΑΗ, ΗΒ sera égal à ΖΑ (7. 2). Mais le double rectangle compris sous ΑΗ, ΗΒ est rationel; le parallélogramme ΖΑ est donc rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a pour largeur ΖΜ; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire le parallélogramme ΓΑ, est médiale, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire ΖΑ, est rationel; le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Or, je dis que cette droite est un second apotome. Car coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ,

# 366 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τῶ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ  
 τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι  
 τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν  
 ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ  
 τῶ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῶ<sup>5</sup> ΚΛ· καὶ τῶν  
 ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἴστιν  
 ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς  
 τὸ ΚΛ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως  
 ἴστιν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς  
 τὸ ΚΛ οὕτως ἴστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα  
 ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἴστιν ἡ ΝΜ πρὸς

æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniata  
 quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportio-  
 nale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est  
 æquale quadratum quidem ex ΑΗ ipsi ΓΘ, rec-  
 tangulum verò sub ΑΗ, ΗΒ ipsi ΝΛ, quadra-  
 tum autem ex ΗΒ ipsi ΚΛ; et ipsorum ΓΘ,  
 ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est  
 igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut  
 quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut  
 verò ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur  
 ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum



τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ  
 τῶ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τούτέστι τῶ τετάρτῳ μέρει  
 τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ δὲ σύμμετρόν ἐστι τὸ  
 ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι  
 καὶ τὸ ΓΘ τῶ ΚΛ, τούτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ<sup>6</sup>.  
 Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ,  
 καὶ τῶ<sup>7</sup> τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον

igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex  
 ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et  
 quoniam commensurable est ex ΑΗ quadratum  
 quadrato ex ΗΒ, commensurable est et ΓΘ ipsi  
 ΚΛ, hoc est ΓΚ ipsi ΚΜ. Quoniam igitur duæ  
 rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti

ΝΛ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est  
 moyen proportionnel entre les quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, que le quarré de ΑΗ  
 est égal à ΓΘ, que le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est égal à ΝΛ; et que le quarré  
 de ΒΗ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et  
 ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais le parallélogramme ΓΘ  
 est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite  
 ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal  
 au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et  
 puisque le quarré de ΑΗ est commensurable avec le quarré de ΗΒ, le parallélo-  
 gramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ, c'est-à-dire ΓΚ avec ΚΜ. Et puisque les deux  
 droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, et que l'on a appliqué à la plus grande ΓΜ un paral-  
 lélogramme compris sous ΓΚ, ΚΜ, qui étant égal à la quatrième partie du quarré

παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ.

Τὸ ἀπὸ μείσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Εἰσὼ μείση ἀποτομή δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εἰσὼ γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσai. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΘ

quadrati ex ΜΖ æquale ad maiorem ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ΖΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est secunda.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO C.

Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit media apotome secunda ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse tertiam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes. Et quadrato quidem ex ΑΗ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ

de ΜΖ, est défailant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties commensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓΜ (18. 10). Mais la congruente ΖΜ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION C.

Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

Soient un second apotome médial ΑΒ, et une rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait pour largeur la droite ΓΖ; je dis que ΓΖ est un troisième apotome.

Que ΒΗ convienne avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΒ seront des médiales, qui étant incommensurables en puissance seulement, comprendront une surface médiale (76. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au quarré



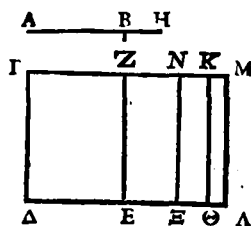
πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβέβλησθαι τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐστὶ μίσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μίσον ἄρα καὶ τὸ ΓΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Μίσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μίσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα

latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex ΒΗ æquale ad ΚΘ applicetur ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. Et sunt media quadrata ex ΑΗ, ΗΒ; medium igitur et ΓΑ, et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Medium autem rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ; medium igitur est et ΖΑ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles, incommensurabilis igitur est longi-

de ΑΗ, ait pour largeur la droite ΓΚ; appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au carré de ΒΗ, ait pour largeur la droite ΚΜ (45. 1); le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est médiale; le parallélogramme ΓΑ est donc médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que le parallélogramme ΓΕ est égal au carré de ΑΒ, le parallélogramme restant ΖΑ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial; le parallélogramme ΖΑ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en

ἴστί μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί  
καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ.  
Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἴστί τὰ  
ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ  
σύμμετρον ἴστί· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ·  
ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ  
δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ<sup>2</sup>. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ  
τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἴστί τὸ ΓΑ, τῷ δὲ δὲ ὑπὸ  
τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἴστί τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα

tudine ipsa ΑΗ ipsi ΗΒ; incommensurable igitur  
est et ex ΑΗ quadratum rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ.  
Sed quadrato quidem ex ΑΗ commensurabilia  
sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ, rectangulo verò  
sub ΑΗ, ΗΒ commensurable est rectangulum  
bis sub ΑΗ, ΗΒ; incommensurabilia igitur sunt  
ex ΑΗ, ΗΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ.  
Sed quadratis quidem ex ΑΗ, ΗΒ æquale est  
ΓΑ, rectangulo verò bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale



ἴστί τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ  
οὕτως ἴστί ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος  
ἄρα ἴστί ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμ-  
φότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΖΜ ῥηταί εἰσι δυ-  
νάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἴστί ἡ  
ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-

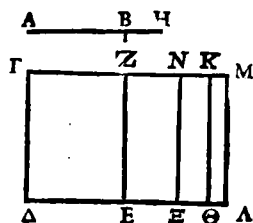
est ΖΑ; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi  
ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ;  
incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longi-  
tudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur  
ΓΜ, ΖΜ rationales sunt potentiâ solùm com-  
mensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et  
tertiam. Quoniam enim commensurable est ex

longueur avec ΗΒ; le carré de ΑΗ est donc incommensurable avec le rec-  
tangle sous ΑΗ, ΗΒ (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de ΑΗ et de  
ΗΒ est commensurable avec le carré de ΑΗ, et le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ  
commensurable avec le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; la somme des carrés de ΑΗ et  
de ΗΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais  
le parallélogramme ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et le  
parallélogramme ΖΑ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΑ  
est donc incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ;  
la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10).  
Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΖΜ sont donc des  
rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un  
apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un troisième apotome. Car puisque

### 370 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρήν ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ<sup>3</sup> τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴσιν τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἴσιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ.

ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, commensurable igitur et ΓΘ ipsi ΚΛ; quare et ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad



ΑΛΛ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἴσιν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἴσιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὥς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἴσιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati

le carré de ΑΗ est commensurable avec le carré de ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ; la droite ΓΚ est donc aussi commensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ (17. 10). Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 371

ἀπὸ τῆς ZM ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρά.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Εστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ

ex ZM æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΓΜ, ΜΖ commensurabilis est longitudine expositâ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est tertia.

Quadratum igitur, etc.

### PROPOSITIO CI.

Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad rationalem ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quartam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΗ,

étant égal à la quatrième partie du carré de ZM, est défailant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties commensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΓΜ (18. 10); aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10). Le carré, etc.

### PROPOSITION CI.

Le carré d'une mineure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

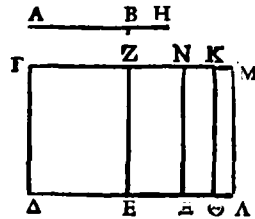
Soient une mineure ΑΒ, et une rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un quatrième apotome.

Car que ΒΗ convienne avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΒ seront incommensurables en puissance; la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera rationelle, et le

### 372 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσην. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθαι τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον<sup>2</sup> τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρὰ-

HB quadratis rationale, rectangulum verò bis sub AH, HB medium. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex BH æquale ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB. Atque est compositum ex quadratis ipsarum ΑΗ, ΗΒ rationale; rationale igitur est et ΓΛ, et ad ra-



καὶ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὲρ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν καὶ<sup>3</sup> ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΑ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν

tionalem ΓΔ applicatur latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur et ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΛ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΛ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur et ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν alterutri ipsarum ΓΔ, ΜΑ paral-

double rectangle sous AH, HB sera médial (77. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au carré de AH, ait ΓΚ pour largeur, et appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au carré de BH, ait ΚΜ pour largeur (45. 1), le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des carrés des droites AH, HB. Mais la somme des carrés des droites AH, HB est rationnelle; le parallélogramme ΓΛ est donc rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΛ est égal à la somme des carrés des droites AH, HB, et que ΓΕ est égal au carré de AB; le parallélogramme restant ΖΛ sera égal au double rectangle sous AH, HB (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle aux droites ΓΔ, ΜΑ; chacun des parallélo-

ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ.  
Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μείσον ἐστὶ,  
καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΖΑ· καὶ τὸ ΖΑ ἄρα μείσον  
ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλά-  
τος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ,  
καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν  
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν  
ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μείσον, ἀσύμ-  
μετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ  
τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἰσον δὲ ἐστὶ<sup>5</sup> τὸ ΓΑ τοῖς ἀπὸ  
τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ  
ἴσον ἐστὶ<sup>6</sup> τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ  
τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ  
ΓΜ<sup>7</sup> πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ  
ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί·  
αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-  
μετροί· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ  
ὅτι καὶ τετάρτη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυ-  
νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ  
ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Καὶ ἴστι τῷ

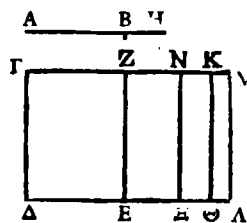
lela NZ; utrumque igitur ipsorum ZZ, NA  
æquale est rectangulo sub AH, HB. Et quoniam  
rectangulum bis sub AH, HB medium est, et est  
æquale ipsi ZA; et ZA igitur medium est, et ad  
rationalem ZE applicatur latitudinem faciens  
ZM; rationalis igitur est ZM, et incommen-  
surabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam qui-  
dem compositum ex quadratis ipsarum AH, HB  
rationale est, rectangulum verò bis sub AH, HB  
medium, incommensurabilia sunt quadrata ex  
AH, HB rectangulo bis sub AH, HB. Æquale  
autem est ΓΑ quadratis ex AH, HB, rectangulo  
verò bis sub AH, HB æquale est ΖΑ; incommen-  
surabile igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem  
ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensu-  
rabilis igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine. Et sunt  
ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ ratio-  
nales sunt potentiâ solùm commensurabiles;  
apotome igitur est ΓΖ. Dico et quartam. Quoniam  
enim ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles;  
incommensurabile igitur et ex ΑΗ quadratum  
quadrato ex ΗΒ. Atque est quadrato quidem

grammes ΖΞ, ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial et égal à ΖΑ, le parallélogramme ΖΑ sera médial. Mais il est appliqué à la rationnelle ΖΕ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est rationnelle, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le parallélogramme ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et ΖΑ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΑ est donc incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un quatrième apotome. Car, puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le carré de ΑΗ sera incommensurable avec le

### 374 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ

ex AH æquale ΓΘ, quadrato verò ex HB æquale ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadrato quidem ex ΑΗ ipsum ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ ipsum ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ ipsum ΝΛ; ipsorum igitur ΓΘ, ΚΛ medium proportionale est ΝΛ;



πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτί ἐστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς

est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ. Ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ.

quarré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, et ΚΛ égal au quarré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre le quarré de ΑΗ et le quarré de ΗΒ (55. lemm. 10), que le parallélogramme ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, le parallélogramme ΚΛ égal au quarré de ΗΒ, et le parallélogramme ΝΛ égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 375

ZM. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη. Τὸ ἄρα ἀπὸ θ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΜΖ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens signâ quadratâ, rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est tota ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quarta. Quadratum igitur, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ.

Τὸ ἀπὸ τῆς μιτὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτῃν.

Ἐστω ἡ μιτὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ πλάτος. ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτῃν.

### PROPOSITIO CII.

Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit recta ΑΒ quæ cum rationali medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quintam.

puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΜΖ, est défailant d'une figure quarrée, que ce rectangle est celui qui est compris sous ΓΚ, ΚΜ, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΜ (19. 10). Mais la droite entière ΓΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10). Le carré, etc.

### PROPOSITION CII.

Le carré d'une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface rationnelle un tout médial, et soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un cinquième apotome.



### 376 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

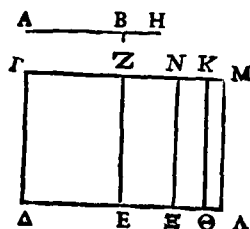
Εστω γάρ τῇ  $AB$  προσαρμοζοῦσα ἡ  $BH$ · αἱ ἄρα  $AH$ ,  $HB$  εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AH$  ἴσον παρά τὴν  $ΓΔ$  παραβεβλήσθω τὸ  $ΓΘ$ · τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $HB$  ἴσον τὸ  $ΚΛ$ · ἔλον ἄρα τὸ  $ΓΛ$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ . Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$  ἅμα μέσον ἐστὶ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ  $ΓΛ$ . Καὶ παρά ῥητὴν τὴν  $ΓΔ$  παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν  $ΓΜ$ · ῥητὴ ὅρα ἐστὶν ἡ  $ΓΜ$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $ΓΔ$ . Καὶ ἐπεὶ ἔλον τὸ  $ΓΛ$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ , ὧν τὸ  $ΓΕ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$ · λοιπὸν ἄρα τὸ  $ΖΛ$  ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ . Τιμήσθω οὖν ἡ  $ZM$  δίχα κατὰ τὸ  $N$ , καὶ ἄχθω διὰ τοῦ  $N$  ὁποτέρᾳ τῶν  $ΓΔ$ ,  $ΜΛ$  παράλληλος ἡ  $NΞ$ · ἑκάτερον ἄρα τῶν  $ZΞ$ ,  $ΝΛ$  ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ . Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$  ῥητόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ

Sit enim ipsi  $AB$  congruens  $BH$ ; ipsæ igitur  $AH$ ,  $HB$  rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale. Et quadrato quidem ex  $AH$  æquale ad  $ΓΔ$  applicetur  $ΓΘ$ ; quadrato verò ex  $HB$  æquale  $ΚΛ$ ; totum igitur  $ΓΛ$  æquale est quadratis ex  $AH$ ,  $HB$ . Compositum autem ex quadratis ipsarum  $AH$ ,  $HB$  simul medium est; medium igitur est  $ΓΛ$ . Et ad rationalem  $ΓΔ$  applicatur latitudinem faciens  $ΓΜ$ ; rationalis igitur est  $ΓΜ$ , et incommensurabilis ipsi  $ΓΔ$ . Et quoniam totum  $ΓΛ$  æquale est quadratis ex  $AH$ ,  $HB$ , quorum  $ΓΕ$  æquale est quadrato ex  $AB$ ; reliquum igitur  $ΖΛ$  æquale est rectangulo bis sub  $AH$ ,  $HB$ . Secetur igitur  $ZM$  bifariam in  $N$ , et ducatur per  $N$  alterutri ipsarum  $ΓΔ$ ,  $ΜΛ$  parallela  $NΞ$ ; utrumque igitur ipsorum  $ZΞ$ ,  $ΝΛ$  æquale est rectangulo sub  $AH$ ,  $HB$ . Et quoniam rectangulum bis sub  $AH$ ,  $HB$  rationale est, et est æquale ipsi  $ΖΛ$ ;

Car que  $BH$  conviène avec  $AB$ ; les droites  $AH$ ,  $HB$  seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Appliquons à  $ΓΔ$  un parallélogramme  $ΓΘ$ , qui soit égal au quarré de  $AH$ ; appliquons aussi à cette droite un parallélogramme  $ΚΛ$ , qui soit égal au quarré de  $HB$  (45. 1), le parallélogramme entier  $ΓΛ$  sera égal à la somme des quarrés des droites  $AH$ ,  $HB$ . Mais la somme des quarrés des droites  $AH$ ,  $HB$  est médiale; le parallélogramme  $ΓΛ$  est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle  $ΓΔ$ , et il a  $ΓΜ$  pour largeur; la droite  $ΓΜ$  est donc rationelle et incommensurable avec  $ΓΔ$  (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier  $ΓΛ$  est égal à la somme des quarrés des droites  $AH$ ,  $HB$ , et que  $ΓΕ$  est égal au quarré de  $AB$ , le parallélogramme restant  $ΖΛ$  sera égal au double rectangle sous  $AH$ ,  $HB$  (7. 2). Coupons la droite  $ZM$  en deux parties égales en  $N$ , et par le point  $N$  menons la droite  $NΞ$  parallèle à l'une ou à l'autre des droites  $ΓΔ$ ,  $ΜΛ$ ; chacun des parallélogrammes  $ZΞ$ ,  $ΝΛ$  sera égal au rectangle sous  $AH$ ,  $HB$ . Et puisque le double rectangle sous  $AH$ ,  $HB$  est rationel, et qu'il est égal à  $ΖΛ$ ,

ΖΛ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-

rationale igitur est ΖΛ. Et ad rationalem ΕΖ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quidem ΓΛ medium est, ipsum verò ΖΛ rationale; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentia solum commensurabiles; apotome igitur



μετροί· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ

est ΓΖ. Dico et quintam. Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam incommensurable est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, æquale autem quadratum ex ΑΗ ipsi ΓΘ, quadratum verò ex ΗΒ ipsi ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ;

le parallélogramme ΖΛ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque ΓΛ est médial, et ΖΛ rationel, le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un cinquième apotome. Nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ. Puisque le quarré de ΑΗ est incommensurable avec le quarré de ΗΒ, que le quarré de ΑΗ est égal à ΓΘ, et que le quarré de ΗΒ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΓΘ sera incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ

### 378 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΚΑ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀντιστοίχουσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἡλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη. Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

incommensurabilis igitur ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est congruens ΖΜ commensurabilis expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quinta.

Quadratum igitur, etc.

#### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἑκτην.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτην.

#### PROPOSITIO CIII.

Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit recta ΑΒ quæ cum medio medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse sextam.

est à ΚΑ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΖΜ, est défailant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ (19. 10). Mais la congruente ΖΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10). Le carré, etc.

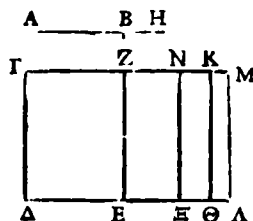
#### PROPOSITION CIII.

Le carré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial; soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un sixième apotome.

Εστω γάρ τῇ  $AB$  προσαρμόζουσα ἡ  $BH$ · αἱ ἄρα  $AH$ ,  $HB$  δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$  μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν<sup>2</sup>  $AH$ ,  $HB$  τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ . Παραβελήσθω οὖν παρὰ τὴν  $\Gamma\Delta$  τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $AH$  ἴσον τὸ  $\Gamma\Theta$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Gamma K$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς

Sit enim ipsi  $AB$  congruens  $BH$ ; ipsæ igitur  $AH$ ,  $HB$  potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum bis sub  $AH$ ,  $HB$  medium, adhuc autem incommensurabilia ex  $AH$ ,  $HB$  quadrata rectangulo bis sub  $AH$ ,  $HB$ . Applicetur igitur ad  $\Gamma\Delta$  quadrato quidem ex  $AH$  æquale  $\Gamma\Theta$  latitudinem faciens  $\Gamma K$ , quadrato



$BH$  τὸ  $ΚΛ$ · ὅλον ἄρα τὸ  $\Gamma\Lambda$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ · μίσον ἄρα ἐστὶ<sup>3</sup> καὶ τὸ  $\Gamma\Lambda$ . Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν  $\Gamma\Delta$  παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν  $\Gamma M$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Gamma M$ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ  $\Gamma\Delta$  μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ  $\Gamma\Lambda$  ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ , ὧν τὸ  $\Gamma E$  ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $AB$ · λοιπὸν ἄρα τὸ  $Z\Lambda$  ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$ . Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν  $AH$ ,  $HB$  μίσον· καὶ τὸ  $Z\Lambda$  ἄρα

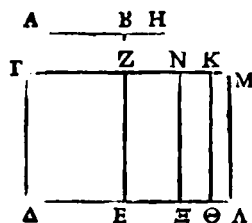
verò ex  $BH$  ipsum  $ΚΛ$ ; totum igitur  $\Gamma\Lambda$  æquale est quadratis ex  $AH$ ,  $HB$ ; medium igitur est et  $\Gamma\Lambda$ . Et ad rationalem  $\Gamma\Delta$  applicatur latitudinem faciens  $\Gamma M$ ; rationalis igitur est  $\Gamma M$ , et incommensurabilis ipsi  $\Gamma\Delta$  longitudine. Quoniam igitur  $\Gamma\Lambda$  æquale est quadratis ex  $AH$ ,  $HB$ , quorum  $\Gamma E$  æquale est quadrato ex  $AB$ ; reliquum igitur  $Z\Lambda$  æquale est rectangulo bis sub  $AH$ ,  $HB$ . Atque est rectangulum bis sub  $AH$ ,  $HB$  medium;

Car que  $BH$  conviène avec  $AB$ ; les droites  $AH$ ,  $HB$  seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces mêmes droites étant incommensurable avec le double rectangle sous  $AH$ ,  $HB$  (79. 10). Appliquons à  $\Gamma\Delta$  un parallélogramme  $\Gamma\Theta$ , qui étant égal au quarré de  $AH$ , ait  $\Gamma K$  pour largeur; appliquons à  $K\Theta$  un parallélogramme  $ΚΛ$  égal au quarré de  $BH$ ; le parallélogramme entier  $\Gamma\Lambda$  sera égal à la somme des quarrés des droites  $AH$ ,  $HB$ ; le parallélogramme  $\Gamma\Lambda$  sera donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle  $\Gamma\Delta$ , et il a  $\Gamma M$  pour largeur; la droite  $\Gamma M$  est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec  $\Gamma\Delta$  (23. 10). Et puisque  $\Gamma\Lambda$  est égal à la somme des quarrés des droites  $AH$ ,  $HB$ , et que  $\Gamma E$  est égal au quarré de  $AB$ , le parallélogramme restant  $Z\Lambda$  sera égal au double rectangle sous  $AH$ ,  $HB$  (7. 2). Mais le double rectangle sous  $AH$ ,  $HB$  est médial; le parallélogramme

380 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μείον ἴστί. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα ἴστί· ἡ ZM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἵπτι τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB ἀσύμμετρά ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB, καὶ ἴστί τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν<sup>5</sup> AH, HB ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί<sup>6</sup> τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἴστί· ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἴστί· ἡ ΓΜ

et ZA igitur medium est. Et ad rationalem ZE applicatur latitudinem faciens ZM; rationalis igitur est ZM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata ex AH, HB incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AH, HB, atque est quadratis quidem ex AH, HB æquale ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale ΖΛ; incommensurable igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ;



τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἴστί· ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἔκτι. Ἐπεὶ γάρ τὸ ΖΛ ἴσον ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB, τιμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἴστί τῷ

incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΓΜ, ΜΖ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et sextam. Quoniam enim ΖΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB, secetur bifariam ΖΜ in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ æquale est rectangulo

ZA est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ZE, et il a ZM pour largeur; la droite ZM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ. Et puisque la somme des quarrés des droites AH, HB est incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB, que ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ΖΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un sixième apotome. Car puisque ΖΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ, chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΛ sera

ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δύ-  
νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι; ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ  
τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ  
μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ<sup>8</sup> ΓΘ, τῷ δὲ  
ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα  
ἐστὶ<sup>9</sup> τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ  
ΚΛ οὕτως ἐστὶν<sup>10</sup> ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμ-  
μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν  
ἀπὸ τῶν<sup>11</sup> ΑΗ, ΗΒ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ  
ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  
ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ  
ΚΛ, τῷ δὲ ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ<sup>12</sup> τὸ  
ΝΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ  
ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ<sup>13</sup>. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς  
ΜΖ μίλλον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.  
Καὶ οὐδέτερά αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκυ-  
μένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἑκτὴ.  
Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt  
incommensurabiles, incommensurable igitur est  
ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Sed qua-  
drato quidem ex ΑΗ æquale est ΓΘ, quadrato  
verò ex ΗΒ æquale est ΚΛ; incommensurable  
igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita  
est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est  
ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ,  
ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub  
ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ  
æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ,  
rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΝΛ;  
est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Et  
eâdem ratione ΓΜ quam ΜΖ plus potest qua-  
drato ex rectâ sibi incommensurabili. Et neutra  
ipsarum commensurabilis est expositæ rationali  
ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est sexta.

Quadratum igitur, etc.

égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le carré de ΑΗ sera incommensurable avec le carré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, et ΚΛ égal au carré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc incommensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. lem. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Par la même raison, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ; aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Le carré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

PROPOSITIO CIV.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

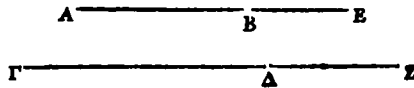
Ἐστω ἀποτομή ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γιγνέτω ὁ τῆς

Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit apotome ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ apotomen esse atque ordine eamdem quæ ΑΒ.

Quoniam enim apotome est ΑΒ, sit ipsi congruens ΒΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quæ est ipsius ΑΒ ad ΓΔ ratio eadem fiat ipsius ΒΕ ad ΔΖ;



ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἐν ἄρα ἐστὶ<sup>2</sup> πρὸς ἐν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν<sup>3</sup> τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. Καὶ αἱ<sup>4</sup> ΑΕ, ΕΒ ῥηταὶ εἰσι δυ-

et ut una igitur est ad unam, omnes sunt ad omnes; est igitur et ut tota ΑΕ ad totam ΓΖ ita ΑΒ ad ΓΔ. Commensurabilis autem ΑΒ ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et ΑΕ quidem ipsi ΓΖ, ipsa verò ΒΕ ipsi ΔΖ. Et ΑΕ, ΕΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;

PROPOSITION CIV.

Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

Soit l'apotome ΑΒ, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est un apotome, et que cet apotome est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΒ est un apotome, que ΒΕ lui conviène; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Faisons en sorte que la raison de ΒΕ à ΔΖ soit la même que celle de ΑΒ à ΓΔ. Un antécédent est donc à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12.5); la droite entière ΑΕ est donc à la droite entière ΓΖ comme ΑΒ est à ΓΔ. Mais ΑΒ est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite ΑΕ est donc commensurable avec ΓΖ, et la droite ΒΕ avec ΔΖ (10. 10). Mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; les

νάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα  
ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή  
ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ  
αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ<sup>5</sup> ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς  
τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐπαλλάξ  
ἄρα ἐστὶν<sup>6</sup> ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ  
ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἦτοι δὲ<sup>7</sup> ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ  
μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ  
τῷ ἀπὸ ἀσυσμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς  
ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,  
καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-  
μέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ  
ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ  
δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδενίᾳ τῶν ΑΕ, ΕΒ,  
καὶ οὐδενίᾳ<sup>8</sup> τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς  
ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυσμέτρου ἑαυτῇ,  
καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ  
ἀσυσμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν  
ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ

et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur rationales sunt potentia  
solum commensurabiles; apotome igitur est  
ΓΔ. Dico et ordine eandem quæ ΑΒ. Quo-  
niam enim est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΒΕ ad ΖΔ;  
permutando igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad  
ΖΔ. Vel autem ΑΕ quam ΕΒ plus potest qua-  
drato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-  
drato ex rectâ incommensurabili. Si quidem  
igitur ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ  
sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest  
quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si  
quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ ratio-  
nali longitudine, et ipsa ΓΖ. Si autem ΕΒ, et ΔΖ.  
Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et neutra  
ipsarum ΓΖ, ΖΔ. Si autem ΑΕ quam ΕΒ plus  
possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili,  
et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ  
sibi incommensurabili. Et si quidem commen-  
surabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine,

droites ΓΖ, ΖΔ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement (10. 10); la droite ΓΔ est donc un apotome (74. 10). Je dis que cet apotome est du même ordre que ΑΒ. Car puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΒΕ est à ΖΔ, par permutation ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable, ou incommensurable avec ΑΕ. Si donc la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΓΖ. Si ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle. Si ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΔΖ le sera aussi; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable en longueur avec elle; et si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΖ. Si la droite ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle; si ΒΕ est commensurable avec la rationnelle exposée,



# 384 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δι' ἢ BE, καὶ ἢ ZΔ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, οὐδετέρα τῶν ΓZ, ZΔ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB. Ὅπερ εἶδει δέξαι.

et ipsa ΓZ. Si autem BE, et ZΔ. Si autem neutra ipsarum AE, EB, neutra ipsarum ΓZ, ZΔ; apotome igitur est ΓΔ et ordine eadem quæ AB. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρέ.

Ἡ τῇ μίσης ἀποτομῇ σύμμετρος μίσης ἀποτομὴ ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω μίσης ἀποτομὴ ἢ AB, καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἐστω ἢ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἢ ΓΔ μίσης ἀποτομὴ ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB.

Ἐπεὶ γὰρ μίσης ἀποτομὴ ἐστὶν ἢ AB, ἐστω αὐτῇ προσαρμίζουσα ἢ BE· αἱ AE, EB ἄρα μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γιγνίτω ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ BE πρὸς τὴν ΔZ, σύμμετρος ἄρα καὶ ἢ AE τῇ ΓZ, ἢ δὲ BE τῇ ΔZ· αἱ δὲ AE, EB μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα

## PROPOSITIO CV.

Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB, et ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ mediæ apotomen esse et ordine eandem quæ AB.

Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit ipsi congruens BE; ipsæ AE, EB igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Et fiat ut AB ad ΓΔ ita BE ad ΔZ, commensurabilis igitur et AE ipsi ΓZ, ipsa verò BE ipsi ΔZ; ipsæ autem AE, EB mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles; et ΓZ, ZΔ igitur mediæ sunt

ZΔ le sera aussi; et si aucune des droites AE, EB n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓZ, ZΔ ne sera commensurable avec elle; la droite ΓΔ est donc une apotome, et cet apotome est du même ordre que AB (déf. trois. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION CV.

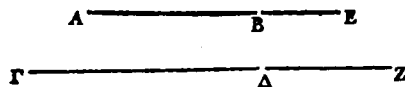
Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

Que AB soit un apotome d'une médiale, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB; je dis que ΓΔ est un apotome d'une médiale, et que cet apotome est du même ordre que AB.

Car, puisque AB est un apotome d'une médiale, que BE conviène avec la droite AB, les droites AE, EB seront des médiales commensurables en puissance seulement (76. 10). Faisons en sorte que AB soit à ΓΔ comme BE est à ΔZ; la droite AE sera commensurable avec ΓZ, et la droite BE commensurable avec ΔZ; mais les droites AE, EB sont des médiales commensurables en puissance seulement; les

μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι<sup>2</sup>· μίσης ἄρα ἀποτομή ἐστίν ἡ ΓΔ. Λίγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστίν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ<sup>3</sup> ἐστίν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ<sup>4</sup>· ἐστίν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς

potentiâ solùm commensurabiles; mediæ igitur apotome est ΓΔ. Dico et ordine esse eandem quæ ΑΒ. Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; est igitur et ut ex ΑΕ quadratum



τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ<sup>5</sup>. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ<sup>6</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητόν ἐσται<sup>7</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ<sup>8</sup> τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ<sup>9</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσης ἄρα ἀποτομή ἐστίν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurable igitur est et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Et si igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, rationale erit et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; et si medium est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, medium est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

droites ΓΖ, ΖΗ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement ; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale. Je dis que cette droite est un apotome du même ordre que ΑΒ. Car, puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, le quarré de ΑΕ sera au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le quarré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (1. 6); mais le quarré de ΑΕ est commensurable avec le quarré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est rationel, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρς'.

PROPOSITIO CVI.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

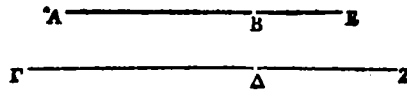
Ἐστω γάρ<sup>1</sup> ἐλάσσων ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέντω γάρ τὰ αὐτὰ τῷ προτέρῳ<sup>2</sup>. Καὶ ἐπεὶ αἱ AE, EB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim minor AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ minorem esse.

Fiant enim eadem quæ supra. Et quoniam AE, EB potentiâ sunt incommensurabiles, et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Quoniam igitur est ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ; est igitur et ut ex AE quadratum ad ip-



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν<sup>3</sup> AE, EB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ<sup>4</sup>. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BE τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Ρητὸν

sum ex EB ita ex ΓΖ quadratum ad ipsum ex ΖΔ; componendo igitur est ut ex AE, EB quadrata ad ipsum ex EB ita ex ΓΖ, ΖΔ quadrata ad ipsum ex ΖΔ. Commensurable autem est ex BE quadratum quadrato ex ΔΖ; commensurable igitur et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis. Rationale autem est compositum ex

PROPOSITION CVI.

Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

Soit AB une mineure, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ est une mineure.

Car faisons les mêmes choses qu'auparavant. Puisque les droites AE, EB sont incommensurables en puissance, les droites ΓΖ, ΖΔ seront incommensurables en puissance. Et puisque AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ, le carré de AE sera au carré de EB comme le carré de ΓΖ est au carré de ΖΔ (22.6); donc, par addition, la somme des carrés des droites AE, EB est au carré de EB comme la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est au carré de ΖΔ (18.5). Mais le carré de BE est commensurable avec le carré de ΖΔ; la somme des carrés des droites AE, EB est donc commensurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites AE, EB est rationnelle; la somme

δί' ἴστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν<sup>5</sup> ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἴστι καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Πάλιν, ἵπεί ἴστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ<sup>6</sup>. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ<sup>7</sup>, σύμμετρον ἄρα ἴστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Μείσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ<sup>8</sup> μείσον ἄρα ἴστι<sup>8</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μείσον· ἐλάττωγ ἄρα ἴστιν ἡ ΓΔ. Οἷον ἴδει δίδξαι.

A Λ Λ Ω Σ'.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἴστω<sup>2</sup> ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἴστιν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητῇ<sup>3</sup>, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ πλά-  
τις ποιεῖν τὴν ΓΖ· ἀποτομή ἄρα ἴστι τετάρτη<sup>4</sup>

ipsarum ΑΕ, ΕΒ quadratis; rationale igitur est et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis. Rursus, quoniam est ut ex ΑΕ quadratum ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ, commensurable igitur est et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Medium autem rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; minor igitur est ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit minor Α, et ipsi Α commensurabilis sit Β; dico Β minorem esse.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, et quadrato ex Α æquale ad ipsam ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quarta ΓΖ.

des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc aussi rationnelle. De plus, puisque le carré de ΑΕ est au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le carré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, et que le carré de ΑΕ est commensurable avec le carré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ sera commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial; le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (24. 10); la droite ΓΔ est donc une mineure (77. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

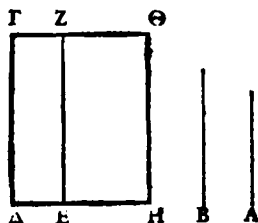
Soit Α une mineure, et que Β soit commensurable avec Α; je dis que la droite Β est une mineure.

Soit exposée la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de Α, ait ΓΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un quatrième

# 388 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

$\Gamma Z$ . Τῷ<sup>5</sup> δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον παρὰ τὴν  $ZE$  παραβιβάσθω τὸ  $ZH$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $Z\Theta$ . Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ  $A$  τῇ  $B$ · σύμμετρον ἄρα ἐστὶ<sup>6</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τῷ ἀπὸ τῆς  $B$ . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον ἐστὶ<sup>7</sup> τὸ  $\Gamma E$ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον ἐστὶ<sup>8</sup> τὸ  $ZH$ · σύμμετρον ἄρα

Quadrato autem ex  $B$  æquale ad  $ZE$  applicetur  $ZH$  latitudinem faciens  $Z\Theta$ . Quoniam igitur commensurabilis est  $A$  ipsi  $B$ ; commensurabile igitur est et ex  $A$  quadratum quadrato ex  $B$ . Sed quadrato quidem ex  $A$  æquale est  $\Gamma E$ , quadrato verò ex  $B$  æquale est  $ZH$ ; commensurabile igitur est  $\Gamma E$



ἐστὶ τὸ  $\Gamma E$  τῷ  $ZH$ . Ὡς δὲ τὸ  $\Gamma E$  πρὸς τὸ  $ZH$  οὕτως ἐστὶν<sup>9</sup> ἡ  $\Gamma Z$  πρὸς τὴν  $Z\Theta$ · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν<sup>10</sup> ἡ  $\Gamma Z$  τῇ  $Z\Theta$  μήκει. Αποτομή δὲ ἐστὶ τετάρτη ἡ  $\Gamma Z$ · ἀποτομή ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ  $Z\Theta$  τετάρτη· τὸ  $ZH$  ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς<sup>11</sup> καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης<sup>12</sup>· ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμὴν ἰλάσσαν ἐστὶ. Δύναται δὲ τὸ  $ZH$  ἡ  $B$ · ἰλάττων ἄρα<sup>13</sup> ἐστὶν ἡ  $B$ . Ὅπρι εἶδει δείξαι.

ipsi  $ZH$ . Ut autem  $\Gamma E$  ad  $ZH$  ita est  $\Gamma Z$  ad  $Z\Theta$ ; commensurabilis igitur est  $\Gamma Z$  ipsi  $Z\Theta$  longitudine. Apotome autem est quarta  $\Gamma Z$ ; apotome igitur est et  $Z\Theta$  quarta; spatium  $ZH$  igitur continetur sub rationali et apotome quartâ. Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ; recta spatium igitur potens minor est. Potest autem ipsum  $ZH$  ipsa  $B$ ; minor igitur est  $B$ . Quod oportebat ostendere.

apotome (101. 10). Appliquons à  $ZE$  un parallélogramme  $ZH$ , qui étant égal au carré de  $B$ , ait  $Z\Theta$  pour largeur. Puisque  $A$  est commensurable avec  $B$ , le carré de  $A$  sera commensurable avec le carré de  $B$ . Mais  $\Gamma E$  est égal au carré de  $A$ , et  $ZH$  égal au carré de  $B$ ; le parallélogramme  $\Gamma E$  est donc commensurable avec  $ZH$ . Mais  $\Gamma E$  est à  $ZH$  comme  $\Gamma Z$  est à  $Z\Theta$  (1.6); la droite  $\Gamma Z$  est donc commensurable en longueur avec  $Z\Theta$  (10. 10); mais la droite  $\Gamma Z$  est un quatrième apotome; la droite  $Z\Theta$  est donc un quatrième apotome (104. 10); la surface  $ZH$  est donc comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome. Mais si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure (95. 10). Mais la droite  $B$  peut la surface  $ZH$ ; la droite  $B$  est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ.

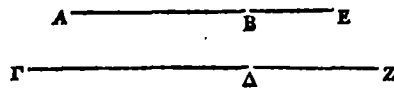
PROPOSITIO CVII.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούση  
σύμμετρος καὶ αὐτὴ<sup>1</sup> μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ  
ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιῶσα ἡ  
AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ<sup>2</sup>  
ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Recta ei quæ cum rationali medium totum  
facit commensurabilis et ipsa cum rationali me-  
dium totum faciens est.

Sit cum rationali medium totum faciens AB,  
et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ  
cum rationali medium totum facere.



Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE· αἱ  
AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιού-  
σαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE,  
EB τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν.  
Καὶ τὰ αὐτὰ κατισκυιάσθω. Ὁμοίως δὲ δει-  
ξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ<sup>3</sup> ΓΖ, ΖΔ ἐν τῇ  
αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ ταις AE, EB, καὶ σύμμετρον  
ἐστὶ τὸ<sup>4</sup> συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB  
τετραγώνων τῇ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν  
ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῇ

Sit enim ipsi AB congruens BE; ipsæ AE, EB  
igitur potentiâ sunt incommensurabiles, fa-  
cientes quidem compositum ex ipsarum AE,  
EB quadratis medium, rectangulum verò sub  
ipsis rationale. Et eadem construantur. Con-  
gruenter præcedentibus utique ostendemus,  
rectas ΓΖ, ΖΔ in eâdem ratione esse cum ipsis  
AE, EB, et commensurabile esse compositum  
ex ipsarum AE, EB quadratis composito  
ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis, rectangulum

PROPOSITION CVII.

La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationelle un tout médial.

Que la droite AB fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car que BE convienne avec AB, les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Faisons la même construction. Nous démontrerons comme auparavant que les droites ΓΖ, ΖΔ sont en même raison que les droites AE, EB; que la somme des quarrés des droites AE, EB est commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le

### 390 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὅστι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

verò sub  $AE$ ,  $EB$  rectangulo sub  $GZ$ ,  $ZA$ ; quare et  $GZ$ ,  $ZA$  potentià sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum  $GZ$ ,  $ZA$  quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; recta  $GA$  igitur est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΑΛΛΩΣ'.

Εστω<sup>3</sup> μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ  $A$ , σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ  $B$ . λέγω ὅτι ἡ  $B$  μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ  $ΓΔ$ , καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον παρὰ τὴν  $ΓΔ$  παραβελήσθω τὸ  $ΓΕ$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $ΓΖ$ . ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ  $ΓΖ$ . Τῇ δὲ ἀπὸ τῆς  $B$  ἴσον παρὰ τὴν  $ΖΕ$  παραβελήσθω τὸ  $ΖΗ$  πλάτος ποιοῦν τὴν  $ΖΘ$ . Επεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ  $A$  τῇ  $B$ , σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τῷ ἀπὸ τῆς  $B$ . Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον τὸ  $ΓΕ$ , τῇ δὲ

ALITER.

Sit cum rationali medium totum faciens  $A$ , et  $B$  commensurabilis ipsi; dico  $B$  cum rationali medium totum facere.

Exponatur rationalis  $GA$ , et quadrato quidem ex  $A$  æquale ad  $GA$  applicetur  $GE$  latitudinem faciens  $GZ$ ; spotome igitur est quinta  $GZ$ . Quadrato autem ex  $B$  æquale ad ipsam  $ZE$  applicetur  $ZH$  latitudinem faciens  $ZΘ$ . Quoniam igitur commensurabilis est  $A$  ipsi  $B$ , commensurable est et ex  $A$  quadratum quadrato ex  $B$ . Sed quadrato quidem ex  $A$  æquale  $GE$ ; quadrato

rectangle sous  $AE$ ,  $EB$  l'est aussi avec le rectangle sous  $GZ$ ,  $ZA$ ; les droites  $GZ$ ,  $ZA$  sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant médiale la somme de leurs quarrés, et rationel le rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite  $GA$  fait donc avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

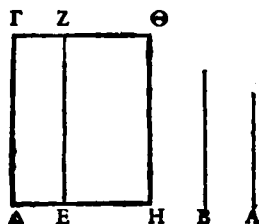
Que  $A$  fasse avec une rationelle un tout médial, et que  $B$  soit commensurable avec  $A$ ; je dis que  $B$  fait avec une surface rationelle un tout médial.

Soit exposée la rationelle  $GA$ ; appliquons à  $GA$  un parallélogramme  $GE$ , qui étant égal au quarré de  $A$ , ait  $GZ$  pour largeur; la droite  $GZ$  sera un cinquième apotome (102. 10). Appliquons à  $ZE$  un parallélogramme  $ZH$ , qui étant égal au quarré de  $B$ , ait  $ZΘ$  pour largeur. Puisque  $A$  est commensurable avec  $B$ , le quarré de  $A$  sera commensurable avec le quarré de  $B$ . Mais  $GE$  est égal au quarré de  $A$ ,

# LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 391

ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῇ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Αποτομή δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ.

autem ex B æquale ZH; commensurable igitur est GE ipsi ZH; commensurabilis igitur et GZ ipsi ZΘ longitudine. Apotome autem quinta GZ; apotome igitur est quinta et ZΘ, rationalis verò ZE.



Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens cum rationali medium totum facit. Potest autem ipsum ZH ipsa B; ipsa igitur B cum rationali medium totum faciens est. Quod oportebat ostendere.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρή.

## PROPOSITIO CVIII.

Ἡ τῇ μετὰ μίσην μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μίσην μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

et ZH au carré de B; le parallélogramme GE est donc commensurable avec ZH; la droite rZ est donc commensurable en longueur avec zΘ. Mais rZ est un cinquième apotome; la droite zΘ est donc un cinquième apotome (104. 10). Mais la droite ZE est rationnelle: or, si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface fait avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10). Mais la droite B peut la surface ZH; la droite B fait donc avec une surface rationnelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITION CVIII.

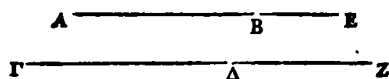
Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.



392 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἴτω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, καὶ τῇ AB ἴστω<sup>1</sup> σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ<sup>2</sup> ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Sit cum medio medium totum faciens ipsa AB, et ipsi AB sit commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ cum medio medium totum facere.



Εἴτω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἴσιν, ὥς εἰδείχθη, αἱ AE, EB σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκείμενῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε<sup>3</sup> συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'

Sit enim ipsi AB congruens BE, et eadem construantur; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum quadratis rectangulo sub ipsis. Et sunt, ut ostensum est, AE, EB commensurabiles ipsis ΓΖ, ΖΔ, et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangulum autem sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsa-

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que la droite ΓΔ fait aussi avec une surface médiale un tout médial.

Que BE convienne avec AB, et faisons la même construction; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces mêmes droites (79. 10). Et puisque les droites AE, EB sont commensurables avec les droites ΓΖ, ΖΔ, ainsi qu'on l'a démontré; que la somme des quarrés des droites AE, EB est aussi commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, les droites ΓΖ, ΖΔ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces droites étant aussi incommensurable avec

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

αὐτῶν τετραγώνων ἡ τῷ ὑπ' αὐτῶν ἢ ΓΔ ἄρα  
μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν. Ὅπρι  
διείξαι.

rum quadratis rectangulo sub ipsis; ipsa igitur  
ΓΔ cum medio medium totum facit. Quod  
oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν  
χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι  
ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφαιρήσθω τὸ  
ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη τὸ  
ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι ἀποτομή, ἢ  
ἐλάττων.

Ἐκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ  
ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβελήσθω ἑρθογώνιον πα-  
ραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφαι-  
ρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ  
ΛΘ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὴν μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓ, μέσον δὲ  
τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ  
τῷ ΗΚ· ῥητὴν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον

### PROPOSITIO CIX.

Medio a rationali detracto, recta reliquum  
spatium potens una duarum irrationalium fit,  
vel apotome, vel minor.

A rationali enim ΒΓ medium auferatur ΒΔ;  
dico rectam, quæ reliquum spatium ΕΓ potest,  
unam duarum irrationalium fieri, vel apoto-  
men, vel minorem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et ipsi quidem  
ΒΓ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum paral-  
lelogrammum ΗΘ, ipsi verò ΒΔ æquale auferatur  
ΗΚ; reliquum igitur ΕΓ æquale est ipsi ΛΘ.  
Quoniam igitur rationale quidem est ΒΓ; me-  
dium verò ΒΔ, æquale ΒΓ quidem ipsi ΗΘ, ipsum  
verò ΒΔ ipsi ΗΚ; rationale quidem igitur est ΗΘ,

Le rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite ΓΔ fera avec une surface médiale un tout médial (79. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION CIX.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

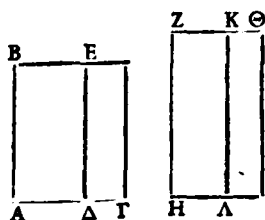
Qu'une surface médiale ΒΔ soit retranchée d'une surface rationelle ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Car soit exposée une rationelle ΖΗ; appliquons à ΖΗ un parallélogramme rectangle ΗΘ qui soit égal à ΒΓ, et retranchons ΗΚ égal à ΒΔ; le reste ΕΓ sera égal à ΛΘ. Puisque ΒΓ est rationel, que ΒΔ est médial, que ΒΓ est égal à ΗΘ, et que ΒΔ est égal à ΗΚ, le parallélogramme ΗΘ sera rationel, et le parallélogramme ΗΚ mé-

### 394 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὲ τὸ ΗΚ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα μὲν<sup>3</sup> ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰς δύναμις μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. Ἡτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου<sup>4</sup>. Δυνάσθω πρότερον τῷ

medium verò ΗΚ; et ad rationalem ΖΗ applicatur; rationalis igitur quidem ΖΘ et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine, rationalis verò ΖΚ et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; incommensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΖΘ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, ipsi autem congruens ΚΖ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili.



ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιέχον<sup>5</sup> ἡ δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν· ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτίστι τὸ ΓΒ, δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ

Possit primum quadrato ex rectâ incommensurabili. Atque est tota ΘΖ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur prima est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome primâ contentum recta potens apotome est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΓΕ, apotome est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus

dial. Mais ces parallélogrammes sont appliqués à la rationelle ΖΗ; la droite ΖΘ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10), et la droite ΖΚ rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10); la droite ΖΘ est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (13. 10); les droites ΖΘ, ΖΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΚΖ est la droite qui convient à ΚΘ (74. 10): or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite ou commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Qu'elle la surpasse d'abord du quarré d'une droite incommensurable. Mais la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ; la droite ΚΘ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un premier apotome est elle-même un apotome (92. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΓΕ, est donc un apotome. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 395

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἔστιν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιέχομενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἔστιν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἔστιν<sup>7</sup>. Οὕτως δὲ δειξάμεθα.

possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et est tota ΖΘ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur quarta est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome quartâ contentum recta potens minor est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, minor est. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρί'.

Απὸ μίσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλλοι γίνονται, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Απὸ γὰρ μίσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφαιρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβελήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὲ ἀκαλούθως ῥητὴ

### PROPOSITIO CX.

Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

A medio enim ΒΓ rationale auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam cum rationali medium totum facientem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et applicentur similiter spatia; est igitur consequenter rationalis

d'une droite incommensurable avec ΘΖ, la droite ΚΘ sera un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10), parce que la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ. Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un quatrième apotome est une mineure (95. 10); la droite qui peut la surface ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION CX.

Une surface rationelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationnelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

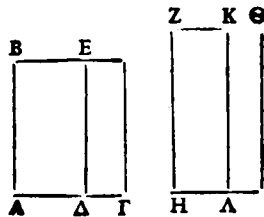
Retranchons la surface rationelle ΒΔ de la surface mediale ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car soit exposée une rationelle ΖΗ; appliquons semblablement des surfaces à ΖΗ;

### 396 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν

quidem ΖΘ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Rationalis autem ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, et ipsi congruens ΖΚ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi



ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ρητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ δευτέρα<sup>2</sup> ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΕΓ, δυναμένη, μέσης ἀποτομῇ πρώτη ἐστίν<sup>3</sup>. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον<sup>4</sup> δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ<sup>5</sup>, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ρητῇ μήκει τῇ

commensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur est secunda ΚΘ. Rationalis autem ΖΗ; quare ipsa potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome prima est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine;

la droite ΖΘ sera conséquemment une rationnelle, et cette droite sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10); mais la droite ΖΚ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΖΚ convient avec cette droite (74. 10). Or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un second apotome (déf. trois. 2. 10). Mais ΖΗ est une rationnelle; la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc un premier apotome d'une médiale (93. 10). Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 397

ΖΗ· ἀποτομή ἀρα<sup>δ</sup> πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ  
τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον  
ποιοῦσα ἐστίν. Οἷον ἴδει δειξάται.

apotome igitur quinta est ΚΘ; quare recta po-  
tens spatium ΕΓ cum rationali medium totum  
facit. Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριά.

Ἀπὸ μίσου μίσου ἀφαιρουμένου ἀσύμμετρου  
τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἥτοι  
μῆς ἀποτομή διυτέρα, ἢ μετὰ μίσου μίσην  
τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῆρθεω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων κατα-  
γραφῶν ἀπὸ μίσου τοῦ ΒΓ μίσην τὸ ΒΔ, ἀσύμ-  
μετρον τῷ ὅλῳ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη  
μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἥτοι μῆς ἀποτομή διυ-  
τέρα, ἢ μετὰ τοῦ<sup>1</sup> μίσου μίσην τὸ ὅλον  
ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μίσην ἔστιν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ,  
καὶ ἀσύμμετρόν ὅτι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ<sup>2</sup>, τουτέστι  
τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι<sup>3</sup> καὶ ἡ ΘΖ

### PROPOSITIO CXI.

Medio a medio detracto incommensurabili  
toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ  
apotome secunda, vel cum medio medium to-  
tum faciens.

Auferatur enim ut in propositis figuris a  
medio ΒΓ medium ΒΔ, incommensurabile toti;  
dico rectam, quæ potest spatium ΕΓ, unam esse  
duarum irrationalium, vel mediæ apotomen se-  
cundam, vel cum medio medium totum fa-  
cientem.

Quoniam enim medium est utrumque ipso-  
rum ΒΓ, ΒΔ, et incommensurabile est ΒΓ ipsi  
ΒΔ, hoc est ΗΘ ipsi ΗΚ, incommensurabilis

ΖΗ, la droite ΚΘ sera un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10) ; la droite qui  
peut la surface ΕΓ fait donc avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10).  
Ce qu'il fallait démontrer.

### PROPOSITION CXI.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable  
avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un  
second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface mé-  
diale un tout médial.

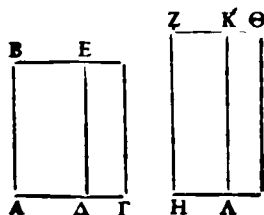
Retranchons, comme dans les figures précédentes, de la surface médiale ΒΓ  
la surface médiale ΒΔ, incommensurable avec la surface entière; je dis que la  
droite qui peut ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un second  
apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un  
tout médial.

Car puisque chacun des parallélogrammes ΒΓ, ΒΔ est médial, et que ΒΓ est  
incommensurable avec ΒΔ, c'est-à-dire ΗΘ avec ΗΚ, la droite ΘΖ sera incom-

### 398 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Εἰ μὲν δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστὶν ἄρα τρίτη ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΚΑ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης

est et ΘΖ ipsi ΖΚ; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΘΚ. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome est igitur tertia ΚΘ. Rationalis autem ΚΑ, rectangulum verò sub ratio-



περιχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μίσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ δυνάμειν μίσης ἀποτομὴ ἐστὶ δευτέρα. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστὶν ἄρα ἑκτὴ ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ

nali et apotome tertiâ contentum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, vocatur autem mediæ apotome secunda; quare recta potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome est secunda. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine; apotome est igitur sexta ΚΘ. Rectangulum autem sub rationali et apotome

mesurable avec ΖΚ (1. 6 et 10. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc de rationnelles commensurables eu puissance seulement (23. 10); la droite ΘΚ est donc un apotome (74. 10). Si donc la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un troisième apotome (déf. 3. 10). Puisque ΚΑ est une rationnelle, que le rectangle compris sous une rationnelle et un troisième apotome est irrationnel (94. 10), que la droite qui peut cette surface est irrationnelle, et que cette droite est appelée second apotome d'une médiale, la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, sera un second apotome d'une médiale. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΚΘ sera un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Mais la droite qui peut un rectangle

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 399

ἀποτομῆς ἑκτῆς ἡ δυναμένη ἴστιν ἡ<sup>10</sup> μετὰ μέ-  
σου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα· ἡ τὸ  $\Lambda\Theta$  ἄρα<sup>11</sup>,  
τουτίστι τὸ  $\text{ΕΓ}$ , δυναμένη μετὰ μέσου μέσον  
τὸ ὅλον ποιούσα ἴστιν. Ὅπερ ἴδι διζῆαι.

sexlā recta potens est quæ cum medio medium  
totum facit; ipsa igitur potens spatium  $\Lambda\Theta$ ,  
hoc est  $\text{ΕΓ}$ , cum medio medium totum facit.  
Quod oportebat ostendere.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριζ'.

Ἡ ἀποτομή οὐκ ἴστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο  
ὀνομάτων.

Ἐστω ἀποτομή ἡ  $\text{ΑΒ}$ · λέγω ὅτι ἡ  $\text{ΑΒ}$  οὐκ  
ἴστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ  
ἡ  $\Delta\Gamma$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $\text{ΑΒ}$  ἴσον παρά ῥητὴν τὴν  
 $\Delta\Gamma$  παραβελήσθω ὀρθογώνιον τὸ  $\Gamma\text{Ε}$ , πλάτος  
ποιοῦν τὴν  $\Delta\text{Ε}$ . Ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἴστιν ἡ  $\text{ΑΒ}$ ,  
ἀποτομή πρώτη ἴστιν ἡ  $\Delta\text{Ε}$ . Ἐστω αὐτῇ προσαρ-  
μύζουσα ἡ  $\text{ΕΖ}$ · αἱ  $\Delta\text{Ζ}$ ,  $\text{ΖΕ}$  ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυ-  
νάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ  $\Delta\text{Ζ}$  τῆς  $\text{ΖΕ}$  μείζον  
δύναται τὸ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ  $\Delta\text{Ζ}$

### PROPOSITIO CXII.

Apotome non est eadem quæ ex binis no-  
minibus.

Sit apotome  $\text{ΑΒ}$ ; dico  $\text{ΑΒ}$  non esse eandem  
quæ ex binis nominibus.

Si enim possibile, sit; et exponatur ratio-  
nalis  $\Delta\Gamma$ , et quadrato ex  $\text{ΑΒ}$  æquale ad ratio-  
nalem  $\Delta\Gamma$  applicetur rectangulum  $\Gamma\text{Ε}$ , latitudi-  
nem faciens  $\Delta\text{Ε}$ . Quoniam igitur apotome est  
 $\text{ΑΒ}$ , apotome prima est  $\Delta\text{Ε}$ . Sit ipsi congruens  
 $\text{ΕΖ}$ ; ipsæ  $\Delta\text{Ζ}$ ,  $\text{ΖΕ}$  igitur rationales sunt poten-  
tiâ solùm commensurabiles, et  $\Delta\text{Ζ}$  quam  $\text{ΖΕ}$   
plus potest quadrato ex rectâ sibi commensu-

compris sous une rationnelle et un sixième apotome, est une droite qui fait avec  
une surface médiale un tout médial (97. 10); la droite qui peut  $\Lambda\Theta$ , c'est-à-dire  
 $\text{ΕΓ}$ , est donc une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il  
fallait démontrer.

### PROPOSITION CXII.

Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Soit l'apotome  $\text{ΑΒ}$ ; je dis que  $\text{ΑΒ}$  n'est pas la même droite que celle de  
deux noms.

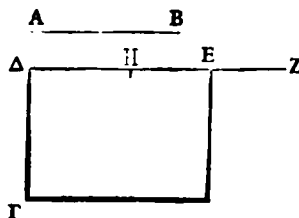
Car que cela soit, si c'est possible; soit exposée une rationnelle  $\Delta\Gamma$ , et appliquons  
à la rationnelle  $\Delta\Gamma$  un rectangle  $\Gamma\text{Ε}$ , qui étant égal au carré de  $\text{ΑΒ}$ , ait  $\Delta\text{Ε}$  pour largeur  
(45. 1). Puisque la droite  $\text{ΑΒ}$  est un apotome, la droite  $\Delta\text{Ε}$  sera un premier apo-  
tome (98. 10). Que  $\text{ΕΖ}$  convienne avec  $\Delta\text{Ε}$ ; les droites  $\Delta\text{Ζ}$ ,  $\text{ΖΕ}$  seront des rationnelles  
commensurables en puissance seulement; la puissance de  $\Delta\text{Ζ}$  surpassera la puis-  
sance de  $\text{ΖΕ}$  du carré d'une droite commensurable avec  $\Delta\text{Ζ}$ , et  $\Delta\text{Ζ}$  sera com-



## 400 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ<sup>2</sup> ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν<sup>3</sup> ἡ ΔΕ. Διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἡ ΔΗ

rabili, et ΔΖ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine. Rursus, quoniam ex binis nominibus est ΑΒ; ex binis igitur nominibus prima est ΔΕ. Dividatur in nomina ad punctum Η, et sit majus nomen ΔΗ; ipsæ ΔΗ, ΗΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et ΔΗ quam ΗΕ plus potest



τῆς ΗΕ μείζον δύταται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα τῇ ΖΗ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει<sup>7</sup>, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ

quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et major ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine; et ΔΖ igitur ipsi ΔΗ commensurabilis est longitudine; et reliquæ igitur ΖΗ commensurabilis est ΔΖ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ, rationalis autem est ΔΖ; rationalis igitur est et ΖΗ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ longitudine, incommensurabilis autem ΔΖ ipsi ΖΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΖΗ

mesurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΓ (déf. trois. 1. 10). De plus, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, la droite ΔΕ sera une première de deux noms (61. 10). Que ΔΕ soit divisée en ses noms au point Η, et que ΔΗ soit son plus grand nom; les droites ΔΗ, ΗΕ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10). Mais la puissance de ΔΗ surpasse la puissance de ΗΕ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΗ, et la plus grande droite ΔΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΓ; la droite ΔΖ est donc commensurable en longueur avec ΔΗ (12. 10); la droite ΔΖ est donc commensurable avec la droite restante ΗΖ. Et puisque ΔΖ est commensurable avec ΖΗ, et que ΔΖ est rationelle, la droite ΖΗ sera rationelle. Et puisque ΔΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, et que la droite ΔΖ est incommensurable en longueur avec ΖΕ, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec la

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 401

μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί<sup>8</sup>. αἱ HZ, ZE ἄρα ρηταί  
εἴτι<sup>9</sup> δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα  
ἔστιν ἡ HE. Ἀλλὰ καὶ ρητὴ, ὅπερ ἐστίν<sup>10</sup>  
ἀδύνατον.

Η ἄρα ἀποτομή, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi EZ. Et sunt rationales; ipsæ HZ, ZE igitur  
rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;  
apotome igitur est HE. Sed et rationalis, quod  
est impossibile.

Apotome igitur, etc.

### ΠΟΡΙΣΜΑ.

Η ἀποτομή καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε  
τῇ μίσει οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν  
γὰρ ἀπὸ μίσεως παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον  
πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ'  
ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς  
παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀπο-  
τομὴν πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως ἀποτομῆς  
πρώτης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος  
ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως  
ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλό-  
μενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. Τὸ δὲ  
ἀπὸ ἐλάττωτος παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον

### COROLLARIUM.

Apotome et quæ post ipsam irrationales neque  
mediæ neque inter se sunt eædem; quadratum  
quidem enim ex mediâ ad rationalem applicatum  
latitudinem facit rationalem et incommensura-  
bilem ipsi ad quam applicatur longitudine. Qua-  
dratum autem ex apotome ad rationalem appli-  
catum latitudinem facit apotomen primam. Qua-  
dratum autem ex mediâ apotome primâ ad  
rationalem applicatum latitudinem facit apo-  
tomen secundam. Quadratum autem ex mediâ  
apotome secundâ ad rationalem applicatum lati-  
tudinem facit apotomen tertiam. Quadratum  
autem ex minori ad rationalem applicatum

droite EZ; mais ces droites sont rationnelles; les droites HZ, ZE sont donc des  
rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite HE est donc un  
apotome (74. 10). Mais elle est aussi rationnelle, ce qui est impossible. Un  
apotome, etc.

### C O R O L L A I R E.

L'apotome et les irrationnelles qui la suivent ne sont ni médiales, ni les mêmes  
entr'elles; car le carré d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une  
largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est  
appliquée (23. 10). Le carré d'un apotome étant appliqué à une rationnelle fait une  
largeur qui est un premier apotome (98. 10); le carré d'un premier apotome  
d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second  
apotome (99. 10); le carré d'un second apotome d'une mediale étant appliqué  
à une rationnelle fait une largeur qui est un troisième apotome (100. 10); le carré  
d'une mineure étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un qua-

## 402 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πλάτος ποιῇ ἀποτομὴν τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρά ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ ἀποτομὴν πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρά ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ ἀποτομὴν ἑκτὴν. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦτε<sup>1</sup> πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἐστίν· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ<sup>2</sup> τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὔσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρά ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μὲν<sup>3</sup> μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολουθῶς ἐκάστη τῇ τάξει τῇ<sup>4</sup> καθ' αὐτήν· αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολουθῶς· ἴτεροι ὅρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἴτεροι αἱ μετὰ<sup>5</sup> τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους 19',

latitudinem facit apotomen quartam. Quadratum verò ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam. Quadratum autem ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter se; a primâ quidem, quod rationalis sit; inter se verò, quod ordine non sint eadem; manifestum et ipsas irrationales differre inter se. Et quoniam demonstratum est apotomen non esse eandem quæ ex binis nominibus; faciunt autem latitudines ad rationalem applicatæ post apotomen apotomas consequenter eodem ordine quæ post ipsam; ipsæ verò post ipsam ex binis nominibus latitudines ex binis nominibus, et quæ sunt eodem ordine congruenter; aliæ igitur sunt quæ post apotomen, et aliæ quæ post ipsam ex binis nominibus, ita ut sint ordine omnes irrationales tredecim,

trième apotome (101. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un cinquième apotome (102. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un sixième apotome (103. 10). Puis donc que les largeurs dont nous venons de parler diffèrent de la première droite et entr'elles; qu'elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle, et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre, il est évident que ces irrationelles sont différentes entr'elles. Et puisqu'on a démontré que l'apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms (112. 10), que les carrés de l'apotome et des droites qui viennent ensuite étant appliqués à une rationelle font des largeurs qui sont des apotomes du même ordre que les droites qui suivent l'apotome, et que les carrés de la droite de deux noms, et des droites qui viennent ensuite, étant appliqués à une rationelle, font des largeurs qui sont des droites de deux noms du même ordre que celles qui suivent la droite de deux noms (61, 62, 63, 64, 65 et 66. 10); les droites qui suivent l'apotome et la droite de deux noms sont donc différentes entr'elles, de manière que toutes ces irrationelles sont au nombre de treize.

- α. Μέσην.  
 β. Εκ δύο ὀνομάτων.  
 γ. Εκ δύο μέσων πρώτην.  
 δ. Εκ δύο μέσων δευτέραν.  
 ε. Μείζονα.  
 ς. Ρητὸν καὶ μέσον δυναμένην.  
 ζ. Δύο μέσα δυναμένην.  
 η. Αποτομήν.  
 θ. Μίσης<sup>6</sup> ἀποτομήν πρώτην.  
 ι. Μίσης<sup>7</sup> ἀποτομήν δευτέραν.  
 ια. Ελάττωνα.  
 ιβ. Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.  
 ιγ. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

1. Media.  
 2. Recta ex binis nominibus.  
 3. Ex binis mediis prima.  
 4. Ex binis mediis secunda.  
 5. Major.  
 6. Rationale et medium potens.  
 7. Bina media potens.  
 8. Apotome.  
 9. Mediæ apotome prima.  
 10. Mediæ apotome secunda.  
 11. Minor.  
 12. Cum rationali medium totum faciens.  
 15. Cum mediò medium totum faciens.

1. La médiale.  
 2. La droite de deux noms.  
 3. La première de deux médiales.  
 4. La seconde de deux médiales.  
 5. La majeure.  
 6. La droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.  
 7. La droite qui peut deux surfaces médiales.  
 8. L'apotome.  
 9. Le premier apotome d'une médiale.  
 10. Le second apotome d'une médiale.  
 11. La mineure.  
 12. La droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.  
 13. La droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

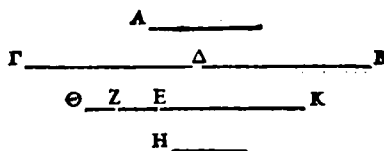
## PROPOSITIO CXIII.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιῶ ἀποτομήν, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομή τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν<sup>1</sup> τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰσὼ ῥητὴ μὲν ἡ  $A$ , ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ<sup>2</sup> ἡ  $BΓ$ , ἥς μίξον ὄνομα ἔστω ἡ  $ΓΔ$ , καὶ τῇ ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν  $BΓ$ ,  $EΖ$ . λέγω ὅτι ἡ  $EΖ$  ἀποτομή ἐστίν, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς  $ΓΔ$ ,  $ΔΒ$ , καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ  $EΖ$  τὴν αὐτὴν ἔξει<sup>3</sup> τάξιν τῇ  $BΓ$ .

Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eadem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

Sit rationalis quidem  $A$ , ex binis nominibus verò  $BΓ$ , cujus majus nomen sit  $ΓΔ$ , et quadrato ex  $A$  æquale sit rectangulum sub  $BΓ$ ,  $EΖ$ ; dico  $EΖ$  apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis  $ΓΔ$ ,  $ΔΒ$ , et in eadem ratione, et adhuc  $EΖ$  eundem habituram ordinem quem  $BΓ$ .



Εἰσὼ γὰρ πάλιν τῇ ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν  $ΒΔ$ ,  $H$ . Επεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν  $BΓ$ ,  $EΖ$  ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν  $ΒΔ$ ,  $H$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ  $ΓΒ$

Sit enim rursus quadrato ex  $A$  æquale rectangulum sub  $ΒΔ$ ,  $H$ . Quoniam igitur rectangulum sub  $BΓ$ ,  $EΖ$  æquale est rectangulo sub  $ΒΔ$ ,  $H$ ;

## PROPOSITION CXIII.

Le carré d'une rationnelle étant appliqué à une droite de deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

Soit  $A$  une rationnelle, et  $BΓ$  une droite de deux noms, dont le plus grand nom soit  $ΓΔ$ ; que le rectangle sous  $BΓ$ ,  $EΖ$  soit égal au carré de  $A$ ; je dis que  $EΖ$  est un apotome dont les noms sont commensurables avec les droites  $ΓΔ$ ,  $ΔΒ$ , et en même raison que ces droites, et que  $EΖ$  sera du même ordre que  $BΓ$ .

Que le rectangle sous  $ΒΔ$ ,  $H$  soit encore égal au carré de  $A$ . Puisque le rectangle sous  $BΓ$ ,  $EΖ$  est égal au rectangle sous  $ΒΔ$ ,  $H$ , la droite  $ΓΒ$  sera à  $ΒΔ$  comme  $H$

πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἢ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἢ Η τῆς ΕΖ. Ἐστω τῇ Η ἴση ἢ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἔστιν<sup>5</sup> ὡς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γεγονέτω ὡς ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἢ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἔστιν ὡς ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγούμενων<sup>6</sup> πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. Ὡς δὲ ἢ ΖΚ πρὸς τὴν<sup>7</sup> ΚΕ οὕτως ἔστιν ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΘΚ πρὸς τὴν<sup>8</sup> ΚΖ οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἔστι<sup>9</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ οὕτως ἢ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἢ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἢ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρος ἔστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἔστι<sup>10</sup> τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἔστι<sup>11</sup> καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ

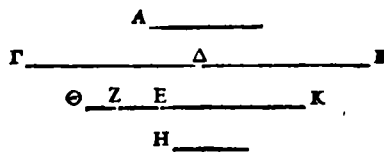
est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita Η ad ΕΖ. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et Η quam ΕΖ. Sit ipsi Η æqualis ΕΘ; est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΕ ad ΕΖ; dividendo igitur est ut ΓΔ ad ΒΔ ita ΘΖ ad ΖΕ. Fiat ut ΘΖ ad ΖΕ ita ΖΚ ad ΚΕ; et tota igitur ΘΚ ad totam ΚΖ est ut ΖΚ ad ΚΕ, ut enim unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut autem ΖΚ ad ΚΕ ita est ΓΔ ad ΔΒ; et ut igitur ΘΚ ad ΚΖ ita ΓΔ ad ΔΒ. Commensurable autem ex ΓΔ quadratum quadrato ex ΔΒ; commensurable igitur est et ex ΘΚ quadratum quadrato ex ΚΖ. Atque est ut ex ΘΚ quadratum ad ipsum ex ΚΖ ita ΘΚ ad ΚΕ, quoniam tres rectæ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ proportionales sunt; commensurabilis igitur ΘΚ ipsi ΚΕ longitudine; quare et ΘΕ ipsi ΕΚ commensurabilis est longitudine. Et quoniam quadratum ex Α æquale est rectangulo sub ΘΕ, ΒΔ, rationale autem est quadratum ex Α; rationale igitur est et rectangulum sub ΘΚ, ΒΔ. Et

est à ΕΖ (16. 6). Mais ΓΒ est plus grand que ΒΔ; la droite Η est donc plus grande que ΕΖ. Que ΕΘ soit égal à Η, la droite ΓΒ sera à ΒΔ comme ΘΕ est à ΕΖ; donc, par soustraction, ΓΔ est à ΒΔ comme ΘΖ est à ΖΕ (17. 5). Faisons en sorte que ΘΖ soit à ΖΕ comme ΖΚ est à ΚΕ; la droite entière ΘΚ sera à la droite entière ΚΖ comme ΖΚ est à ΚΕ; car un antécédent est à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5). Mais ΖΚ est à ΚΕ comme ΓΔ est à ΔΒ; la droite ΘΚ est donc à ΚΖ comme ΓΔ est à ΔΒ; mais le quarré de ΓΔ est commensurable avec le quarré de ΔΒ (37. 10); le quarré de ΘΚ est donc commensurable avec le quarré de ΚΖ (10. 10). Mais le quarré de ΘΚ est au quarré de ΚΖ comme ΘΚ est à ΚΕ, parce que les trois droites ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ sont proportionnelles (20. cor. 2. 6); la droite ΘΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΕ; la droite ΘΕ est donc aussi commensurable en longueur avec ΕΚ (16. 10). Et puisque le quarré de Α est égal au rectangle sous ΘΕ, ΒΔ, et que le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΘΚ, ΒΔ sera rationel. Mais ce rectangle est appliqué à la rationelle ΒΔ; la droite

## 406 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν<sup>12</sup> ΔΒ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν<sup>13</sup> ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμεις μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμεις μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει<sup>14</sup>· ῥητὴ

ad rationalem ΒΔ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine; quare et ipsi commensurabilis ΕΚ rationalis est et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ, ipsæ autem ΓΔ, ΔΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Rationalis autem est ΚΕ, et commensurabilis ipsi ΒΔ lon-



ἄρα ἐστὶ<sup>15</sup> καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει<sup>16</sup>. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμεις μόνον εἰσὶ<sup>17</sup> σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἦτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ<sup>18</sup>, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

gitudine; rationalis igitur est et ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine; ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur rationales potentiâ solùm sunt commensurabiles; apotome igitur est ΕΖ. Vel autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex

ΘΕ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ (21. 10); la droite ΕΚ, qui est commensurable avec ΘΕ, est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ. Et puisque ΓΔ est à ΔΒ comme ΖΚ est à ΚΕ, et que les droites ΓΔ, ΔΒ sont commensurables en puissance seulement, les droites ΖΚ, ΚΕ seront commensurables en puissance seulement. Mais ΚΕ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΒΔ; la droite ΖΚ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ; les droites ΖΚ, ΚΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΖ est donc un apotome (74. 10). Mais la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΓΔ. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite commensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du carré d'une droite commensurable avec ΖΚ, et

Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα<sup>19</sup> τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα<sup>20</sup> τῶν ΖΚ, ΚΕ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ<sup>21</sup>. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα<sup>22</sup> τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΖΕ, ἥς τὰ ὀνόματα τὰ<sup>23</sup> ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει<sup>24</sup> τῇ ΒΓ. Οὔτε ἴδιαι δεῖξαι.

rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΓΔ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si autem neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ. Si autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si verò neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ; quare apotome est ΖΕ, cujus nomina ΖΚ, ΚΕ commensurabilia sunt nominibus ΓΔ, ΔΒ rectæ ex binis nominibus, et in eâdem ratione, et eundem habebit ordinem quem ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi ; si ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, ΚΕ lui sera aussi commensurable ; et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du carré d'une droite incommensurable avec ΖΚ. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi ; si la droite ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΕ lui sera aussi commensurable. Et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable ; la droite ΖΕ est donc un apotome, dont les noms ΖΚ, ΚΕ sont commensurables avec les noms ΓΔ, ΔΒ d'une droite de deux noms, et en même raison qu'eux ; et la droite ΖΕ sera du même ordre que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.



## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

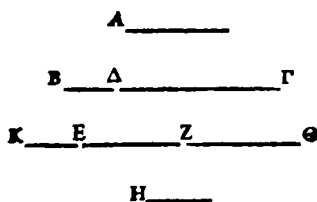
Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς<sup>1</sup> τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ<sup>2</sup> ἔτι δὲ ἡ γινόμενη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ  $A$ , ἀποτομή δὲ ἡ  $ΒΔ$ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς  $A$  ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν  $ΒΔ$ ,  $ΚΘ$ , ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  ρητῆς παρὰ τὴν  $ΒΔ$  ἀπο-

## PROPOSITIO CXIV.

Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

Sit rationalis quidem  $A$ , apotome verò  $ΒΔ$ ; et quadrato ex  $A$  æquale sit rectangulum sub  $ΒΔ$ ,  $ΚΘ$ , ita ut quadratum ex rationali  $A$  ad



τομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν  $ΚΘ$ . λέγω ὅτι καὶ<sup>2</sup> ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ  $ΚΘ$ , ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς  $ΒΔ$  ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι<sup>3</sup>  $ΚΘ$  τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ  $ΒΔ$ .

apotomen  $ΒΔ$  applicatum latitudinem faciat  $ΚΘ$ ; dico et ex binis nominibus esse  $ΚΘ$ ; cujus nomina commensurabilia sunt ipsius  $ΒΔ$  nominibus, et in eadem ratione, et adhuc  $ΚΘ$  eundem habere ordinem quem  $ΒΔ$ .

## PROPOSITION CXIV.

Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

Soit la rationnelle  $A$ , et l'apotome  $ΒΔ$ ; que le rectangle sous  $ΒΔ$ ,  $ΚΘ$  soit égal au carré de  $A$ , de manière que le carré de la rationnelle  $A$  étant appliqué à l'apotome  $ΒΔ$  ait  $ΚΘ$  pour largeur; je dis que  $ΚΘ$  est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de  $ΒΔ$ , et en même raison qu'eux, et que  $ΚΘ$  est du même ordre que  $ΒΔ$ .

Εστω γάρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω<sup>4</sup> τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΒΓ παραβέβηται<sup>5</sup> ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ<sup>6</sup> τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΗΓ. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γιγνέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτίστιν ὡς<sup>8</sup> ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ<sup>9</sup> σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως<sup>10</sup> ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως<sup>11</sup> ἡ ΘΖ πρὸς τὴν

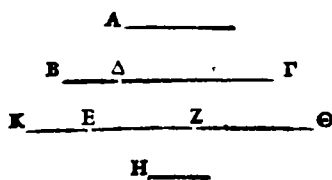
Sit enim ipsi ΒΔ congruens ΔΓ; ipsæ ΒΓ, ΓΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, Η. Rationale autem quadratum ex Α; rationale igitur et rectangulum sub ΒΓ, Η. Et ad rationalem ΒΓ applicatur; rationalis igitur est Η, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, Η æquale est rectangulo sub ΒΔ, ΚΘ, proportionaliter igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et ΚΘ quam Η. Ponatur ipsi Η æqualis ΚΕ; commensurabilis igitur est ΚΕ ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΚ ad ΚΕ; convertendo igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΕ. Fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; et reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ est ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc est ut ΒΓ ad ΓΔ. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΚΖ, ΖΘ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et quoniam est ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΚΖ ad ΖΘ, sed ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; et ut igitur ΚΖ ad ΖΘ

Car que ΔΓ conviène avec ΒΔ, les droites ΒΓ, ΓΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Que le rectangle sous ΒΓ, Η soit égal au quarré de Α. Puisque le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΒΓ, Η sera aussi rationel. Mais il est appliqué à la rationelle ΒΓ; la droite Η est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ (21. 10). Et puisque le rectangle sous ΒΓ, Η est égal au rectangle sous ΒΔ, ΚΘ, la droite ΓΒ sera à la droite ΒΔ comme ΚΘ est à Η (16. 6). Mais la droite ΓΒ est plus grande que ΒΔ; la droite ΚΘ est donc plus grande que la droite Η. Faisons ΚΕ égale à Η; la droite ΚΕ sera commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΓΒ est à ΒΔ comme ΘΚ est à ΚΕ, par conversion ΒΓ sera à ΓΔ comme ΚΘ est à ΘΕ. Faisons en sorte que ΚΘ soit à ΘΕ comme ΘΖ est à ΖΕ, la droite restante ΚΖ sera à ΖΘ comme ΚΘ est à ΘΕ, c'est-à-dire comme ΒΓ est à ΓΔ (19. 5). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont commensurables en puissance seulement; les droites ΚΖ, ΖΘ sont donc commensurables en puissance seulement. Et puisque ΚΘ est à ΘΕ comme ΚΖ est à ΖΘ, et que ΚΘ est à ΘΕ comme ΘΖ est à ΖΕ; la droite

# 410 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ZE· καὶ ὥς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ οὕτως<sup>12</sup> ἡ ΘZ πρὸς τὴν ZE· ὥστε καὶ ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης<sup>13</sup> πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διυτέρας· καὶ ὥς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς KZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΘ. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς KZ τῇ ἀπὸ τῆς ZΘ, αἱ γὰρ KZ, ZΘ δυνάμει εἰσι σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ<sup>14</sup> καὶ ἡ KZ τῇ

ita ΘZ ad ZE; quare et ut prima ad tertiam ita ex prima quadratum ad ipsum ex secunda; et ut igitur KZ ad ZE ita ex KZ quadratum ad ipsum ex ZΘ. Commensurable autem est ex KZ quadratum quadrato ex ZΘ, ipsæ enim KZ, ZΘ potentiâ sunt commensurabiles; commensurabilis igitur est et KZ ipsi ZE longitudine; quare ZK



ZE μήκει· ὥστε ἡ ZK καὶ τῇ KE σύμμετρος ἐστὶ<sup>15</sup> μήκει. Ρητὴ δὲ ἐστὶν ἡ KE, καὶ σύμμετρος τῇ BΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ KZ, καὶ σύμμετρος τῇ BΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ· ἐναλλάξ ἄρα<sup>16</sup> ὥς ἡ BΓ πρὸς τὴν KZ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ZΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ BΓ τῇ KZ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ZΘ<sup>17</sup> μήκει. Αἱ δὲ BΓ, ΓΔ<sup>18</sup> ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ KZ, ZΘ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-

et ipsi KE commensurabilis est longitudine. Rationalis autem est KE, et commensurabilis ipsi BΓ longitudine; rationalis igitur et KZ, et commensurabilis ipsi BΓ longitudine. Et quoniam est ut BΓ ad ΓΔ ita KZ ad ZΘ; permutando igitur ut BΓ ad KZ ita ΔΓ ad ZΘ. Commensurabilis autem BΓ ipsi KZ; commensurabilis igitur et ΓΔ ipsi ZΘ longitudine. Ipsæ autem BΓ, ΓΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ipsæ KZ, ZΘ igitur rationales sunt potentiâ

KZ sera à ZΘ comme ΘZ est à ZE; la première droite est donc à la troisième comme le quarré de la première est au quarré de la seconde (20. cor. 2. 6); la droite KZ est donc à ZE comme le quarré de KZ est au quarré de ZΘ; mais le quarré de KZ est commensurable avec le quarré de ZΘ, parce que les droites KZ, ZΘ sont commensurables en puissance; la droite KZ est donc commensurable en longueur avec ZE; la droite ZK est donc commensurable en longueur avec KE (16. 10). Mais KE est rationelle, et commensurable en longueur avec BΓ; la droite KZ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec BΓ. Et puisque BΓ est à ΓΔ comme KZ est à ZΘ, par permutation BΓ sera à KZ comme ΔΓ est à ZΘ. Mais BΓ est commensurable avec KZ; la droite ΓΔ est donc commensurable en longueur avec ZΘ (10. 10). Mais les droites BΓ, ΓΔ sont des rationelles commensurables en puissance seulement; les droites KZ, ZΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement;

τροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν<sup>19</sup> ἡ ΚΘ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μίζον δυνήσεται<sup>20</sup> τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ<sup>21</sup> οὐδέτερά τῶν ΚΖ, ΖΘ. Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μίζον δυνήσεται<sup>22</sup> τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ<sup>23</sup> οὐδέτερά τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι<sup>24</sup> τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν. Ὅπρι ἰδοι δειξαι.

solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΚΘ. Si quidem igitur ΒΓ quam ΓΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ. Si autem ΒΓ quam ΓΔ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ; ex binis igitur nominibus est ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commensurabilia sunt apotomæ nominibus ΒΓ, ΓΔ, et in eâdem ratione; et adhuc ΚΘ eundem quem ΒΓ habet ordinem. Quod oportebat ostendere.

la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Si donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable avec la rationelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle. Si la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle; la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms, dont les noms ΚΖ, ΖΘ sont commensurables avec les noms ΒΓ, ΓΔ de cet apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, ΚΘ sera du même ordre que ΒΓ (déf. sec. et tr. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριέ.

## PROPOSITIO CXV.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ' ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἢ τὸ χωρίον δυναμείη ῥητὴ ἐστι.

Περιέσθω γάρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς AB, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἥς μείζον ὀνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τι τοῖς<sup>2</sup> τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς AZ, ZB, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω  $\Theta^3$  ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ δυναμείη ἢ Η· λίγω ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἢ Η.

Εκκείσθω γάρ ῥητὴ ἢ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω πλάτος ποιεῖν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΚΛ, ἥς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ' εἰσι ταῖς AZ, ZB, καὶ ἐν τῷ

Si spatium contineatur sub apotome et recta ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; recta spatium potens rationalis est.

Contineatur enim spatium sub AB, ΓΔ, sub apotome AB, et recta ΓΔ ex binis nominibus, cujus majus nomen est ΓΕ; et sint nomina ΓΕ, ΕΔ rectæ ex binis nominibus commensurabilia et apotomæ nominibus AZ, ZB, et in eadem ratione; et sit recta Η spatium sub AB, ΓΔ potens; dico rationalem esse ipsam Η.

Exponatur enim rationalis Θ, et quadrato ex Θ æquale ad ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΚΛ; apotome igitur est ΚΛ, cujus nomina sint ΚΜ, ΜΛ, commensurabilia nominibus ΓΕ, ΕΔ rectæ ex binis nominibus, et in eadem ratione. Sed et ipsæ ΓΕ, ΕΔ commensurabiles sunt ipsis AZ, ZB, et in eadem ratione; est igitur

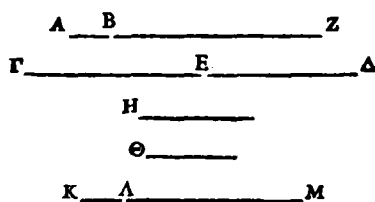
## PROPOSITION CXV.

Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationelle.

Qu'une surface soit comprise sous AB, ΓΔ, c'est-à-dire sous un apotome AB, et sous une droite de deux noms ΓΔ, dont ΓΕ est le plus grand nom; que les noms ΓΕ, ΕΔ de la droite de deux noms soient commensurables avec les noms AZ, ZB de l'apotome AB, et en même raison qu'eux; et que Η soit la droite qui peut la surface comprise sous AB, ΓΔ; je dis que la droite Η est rationelle.

Car soit exposée la rationelle Θ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme, qui étant égal au carré de Θ, ait ΚΛ pour largeur (45. 1); la droite ΚΛ sera un apotome, dont les noms ΚΜ, ΜΛ seront commensurables avec les noms ΓΕ, ΕΔ de la droite de deux noms, et en même raison qu'eux (113. 10). Mais les droites ΓΕ, ΕΔ sont commensurables avec les droites AZ, ZB, et en même raison qu'elles; la droite AZ est

αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB οὕτως ἡ KM πρὸς τὴν ΜΛ<sup>5</sup>. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM<sup>6</sup>. Σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ<sup>7</sup> καὶ ἡ AB τῇ ΚΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν<sup>8</sup> ΚΛ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ.



σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ὑπὸ τῶν<sup>9</sup> ΓΔ, ΚΛ. Ἰσὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἐστὶ τῷ<sup>10</sup> ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ<sup>11</sup> τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ<sup>12</sup> καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB.

Εὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς.

ut AZ ad ZB ita KM ad ΜΛ; permutando igitur est ut AZ ad KM ita ZB ad ΛΜ; et reliqua igitur AB ad reliquam ΚΛ est ut AZ ad KM. Commensurabilis autem AZ ipsi KM; commensurabilis igitur est et AB ipsi ΚΛ. Atque est ut AB ad ΚΛ ita sub ΓΔ, AB rectangulum ad ipsum sub ΓΔ, ΚΛ; commensu-

rabile igitur est et sub ΓΔ, AB rectangulum rectangulo sub ΓΔ, ΚΛ. Æquale autem sub ΓΔ, ΚΛ rectangulum quadrato ex Θ; commensurabile igitur est sub ΓΔ, AB rectangulum quadrato ex Θ. Rectangulum autem sub ΓΔ, AB æquale est quadrato ex Η; commensurabile igitur et ex Η quadratum. quadrato ex Θ. Rationale autem quadratum ex Θ; rationale igitur est et quadratum ex Η; rationalis igitur est Η, et potest spatium sub ΓΔ, AB.

Si igitur spatium, etc.

donc à ZB comme KM est à ΜΛ (11. 5); donc, par permutation, la droite AZ sera à KM comme ZB est à ΛΜ; la droite restante AB est donc à la droite restante ΚΛ comme AZ est à KM (19. 5). Mais AZ est commensurable avec KM; la droite AB est donc commensurable avec ΚΛ (10. 10). Mais AB est à ΚΛ comme le rectangle sous ΓΔ, AB est au rectangle sous ΓΔ, ΚΛ (1. 6); le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΔ, ΚΛ. Mais le rectangle sous ΓΔ, ΚΛ est égal au quarré de Θ; le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le quarré de Θ. Mais le rectangle sous ΓΔ, AB est égal au quarré de Η; le quarré de Η est donc commensurable avec le quarré de Θ. Mais le quarré de Θ est rationel; le quarré de Η est donc rationel; la droite Η est donc rationelle, et cette droite peut la surface comprise sous ΓΔ, AB. Si donc, etc.

## ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ γίγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ρητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχισθαι<sup>1</sup>.

## ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρις'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία<sup>1</sup> οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἐστω μέση ἡ Α' λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς Α' ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία<sup>2</sup> οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἐστίν<sup>3</sup> ἢ αὐτή.

Ἐκκείσθω ρητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ρητῆς ἄλογόν ἐστι. Καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἐστίν<sup>4</sup> ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσσην. Πάλιν δὲ, τῷ

## COROLLARIUM.

Et ex iis manifestum nobis est fieri posse, ut rationale spatium sub irrationalibus rectis contineatur.

## PROPOSITIO CXVI.

A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

Sit media Α; dico ex ipsâ Α infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eandem.

Exponatur rationalis Β, et rectangulo sub Α, Β æquale sit quadratum ex Γ; irrationalis igitur est Γ; rectangulum enim sub irrationali et rationali irrationale est. Et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus utique, rectangulo sub

## COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident pour nous qu'il est possible qu'une surface rationnelle soit comprise sous deux droites irrationnelles.

## PROPOSITION CXVI.

Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

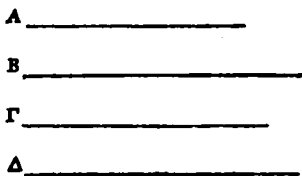
Soit la médiale Α; je dis qu'il résulte de Α une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles n'est commensurable avec aucune de celles qui la précèdent.

Soit exposée la rationnelle Β, et que le carré de Γ soit égal au rectangle sous Α, Β, la droite Γ sera irrationnelle (déf. 11. 10); car le rectangle compris sous une irrationnelle et une rationnelle est irrationnel (39. sch. 10), et la droite Γ ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une surface rationnelle ne fait une largeur médiale (61, 62, 63, 64, 65, 66, 98, 99, 100, 101, 102, 113. 10). De plus, que le carré de Δ soit égal

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 415

ὕπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον  
ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ,  
καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν<sup>5</sup> ἡ αὐτή· τὸ  
γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν

B, Γ æquale sit quadratum ex Δ; irrationale  
igitur quadratum ex Δ; irrationalis igitur est Δ,  
et nulli præcedentium est eadem; quadratum  
enim ex nullâ præcedentium ad rationalem ap-



παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν Γ. Ομοίως  
δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαί-  
νουσιν, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι  
ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμίᾳ<sup>6</sup> οὐδεμιᾷ τῶν  
πρότερον ἡ αὐτή. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

plicatum latitudinem facit ipsam Γ. Similiter  
utique eodem ordine infinitè protracto, evidens  
est a mediâ infinitas irrationales gigni, et nul-  
lam nulli præcedentium eandem. Quod oport-  
tebat ostendere.

### ΑΛΛΩΣ'.

Ἐστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ  
ἄπειροι ἄλογοι γίνονται<sup>2</sup>, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ  
πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή<sup>3</sup>.

Ἡχθῶ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἴστω  
ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον

### ALITER.

Sit media ΑΓ; dico ex ipsâ ΑΓ infinitas irra-  
tionales gigni, et nullam nulli præcedentium esse  
eamdem.

Ducatur ipsi ΑΓ ad rectos angulos ipsa ΑΒ,  
et sit rationalis ΑΒ, et compleatur ΒΓ, irra-

au rectangle sous B, Γ; le carré de Δ sera irrationel (39. sch. 10); la droite Δ est donc irrationnelle, et elle n'est aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fait la largeur Γ. En procédant à l'infini de la même manière, il est évident qu'il résultera d'une médiale une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles ne sera la même qu'aucune de celles qui la précèdent. Ce qu'il fallait démontrer.

### AUTREMENT.

Soit la médiale ΑΓ; je dis qu'il résulte de ΑΓ une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

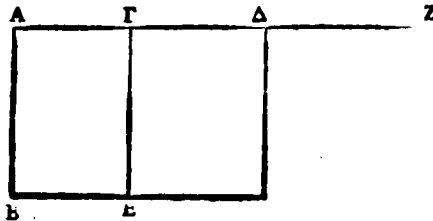
Menons la droite ΑΒ perpendiculaire à ΑΓ; que la droite ΑΒ soit rationnelle, et achevons le parallélogramme ΒΓ; le parallélogramme ΒΓ sera irrationel, ainsi que



## 416 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἰστί τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν, συμ-

tionale igitur est ΒΓ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΓΔ; irrationalis igitur ΓΔ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus,



πεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἰστί τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἰστί<sup>5</sup> ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς<sup>6</sup> μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς.

compleatur ΕΔ; irrationale igitur est ΕΔ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΔΖ; irrationalis igitur est ΔΖ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit ipsam ΓΔ.

A mediâ igitur, etc.

### ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριβ'.

Προκείσθω ἡμῖν διῆξαι, ὅτε ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλειυρᾷ μήκει.

### PROPOSITIO CXVII.

Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

la droite qui pourra ce parallélogramme. Que la droite ΓΔ puisse ce parallélogramme; la droite ΓΔ sera irrationnelle, et ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera une largeur médiale. De plus, achevons le parallélogramme ΕΔ, le parallélogramme ΕΔ sera irrationnel, ainsi que la droite qui peut ce parallélogramme. Que la droite ΔΖ puisse ce parallélogramme; la droite ΔΖ sera irrationnelle, et cette droite ne sera aucune des droites qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera la largeur ΓΔ. Il résulte donc, etc.

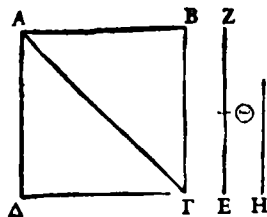
### PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 417

Εἰς τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λίγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΒ μήκει.

Sit quadratum ΑΒΓΔ, ipsius autem diameter ΑΓ; dico ΑΓ incommensurabilem esse ipsi ΑΒ longitudine.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω σύμμετρος· λίγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερόν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι<sup>2</sup> τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εἰκότως ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν<sup>3</sup> Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἴσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ<sup>4</sup> λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς<sup>5</sup> τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν<sup>6</sup> ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Si enim possibile, sit commensurabilis; dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse et impar-rem; evidens est quidem quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. Et quoniam commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ, ipsa ΑΓ igitur ad ΑΒ rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat rationem quam ΕΖ ad Η, et sint ΕΖ, Η minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur unitas est ΕΖ. Si enim ΕΖ esset unitas, et habet rationem ad Η quam habet ΑΓ ad ΑΒ, et major ΑΓ quam ΑΒ; major igitur et ΕΖ unitas quam Η numerus, quod absurdum; non igitur unitas est ΕΖ; numerus igitur. Et quoniam est ut

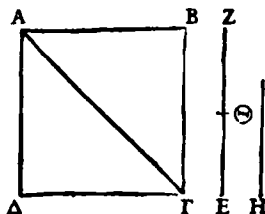
Soit le carré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le carré de ΑΓ est double du carré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le carré de ΓΑ

## 418 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. Διπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ<sup>7</sup> τοῦ ἀπὸ τῆς AB· διπλασίον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν<sup>8</sup> ὁ ἀπὸ τοῦ EZ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσὸς, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἀνθ' ἧν, ἐπειδήπερ ἰὰν

GA ad AB ita EZ ad H, et ut igitur ex GA quadratum ad ipsum ex AB ita ex EZ quadratum ad ipsum ex H. Duplum autem ex GA quadratum quadrati ex AB; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H; par igitur est quadratus ex EZ; quare et ipse EZ par est. Si enim esset impar, et ex ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quocunque com-



περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιὺν συντιθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἦ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ EZ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἀριθμοὶ<sup>10</sup> ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων αὐτοῖς<sup>11</sup>, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐστὶν<sup>12</sup> ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυάς ἀν<sup>13</sup> ἰμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἡμισυ, πρῶτους ὄντας

ponantur, multitudo autem ipsorum impar sit, totus impar est; ipse EZ igitur par est. Secetur bifariam in Θ. Et quoniam numeri EZ, H minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Atque est EZ par; impar igitur est H. Si enim esset par, ipsos EZ, H binarius metiretur, omnis enim par habet partem dimidiam, primos existentes

sera au quarré de AB comme le quarré de EZ est au quarré de H. Mais le quarré de ΓΑ est double du quarré de AB; le quarré de EZ est donc double du quarré de H; le quarré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair; car s'il était impair, son quarré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible.

## LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 419

πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ  $H$ · περισσὸς ὅρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιον ἐστὶν<sup>14</sup> ὁ  $EZ$  τοῦ  $EΘ$ , τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ  $EZ$  τοῦ ἀπὸ τοῦ  $EΘ$  διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ  $EZ$  τοῦ ἀπὸ τοῦ  $H$ · διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ  $H$  τοῦ ἀπὸ τοῦ  $EΘ$ <sup>15</sup>. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ  $H$ · ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ  $H$ . Ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ  $ΑΓ$  τῇ  $ΑΒ$  μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα<sup>16</sup>. Ὅπερ ἴδει διέξαι.

Α Λ Α Ω Σ'.

Εστω<sup>2</sup> ἀντὶ μὲν τοῦ διαμέτρου ἡ  $A$ , ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ  $B$ · λέγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ  $A$  τῇ  $B$  μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω σύμμετρος· καὶ γιγνέτω<sup>3</sup> πάλιν ὡς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως ὁ  $EZ$  ἀριθμὸς πρὸς τὸν  $H$ , καὶ ἴστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὴν λόγον ἰχόντων αὐτοῖς οἱ  $EZ$ ,  $H^4$ · οἱ  $EZ$ ,  $H$  ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Λέγω πρῶτον ὅτι  $H$  οὐκ ἴσθι μονάς. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω

inter se, quod est impossibile; non igitur par est  $H$ ; impar igitur. Et quoniam duplus est  $EZ$  ipsius  $EΘ$ , quadruplus igitur ex  $EZ$  quadratus quadrati ex  $EΘ$ ; duplus autem ex  $EZ$  quadratus quadrati ex  $H$ ; duplus igitur ex  $H$  quadratus quadrati ex  $EΘ$ ; par igitur est quadratus ex  $H$ ; par igitur ex dictis ipse  $H$ . Sed et impar, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est  $ΑΓ$  ipsi  $ΑΒ$  longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit pro diametro quidem  $A$ , pro latere verò  $B$ ; dico incommensurabilem esse  $A$  ipsi  $B$  longitudine. Si enim possibile, sit commensurabilis; et fiat rursus ut  $A$  ad  $B$  ita  $EZ$  numerus ad  $H$ , et sint minimi  $EZ$ ,  $H$  eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi  $EZ$ ,  $H$  igitur primi inter se sunt. Dico primum  $H$  non esse unitatem. Si enim

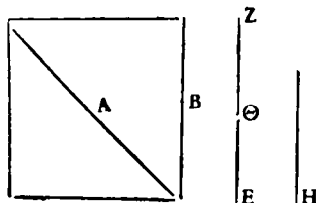
Le nombre  $H$  n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais  $EZ$  est double de  $EΘ$ ; le carré de  $EZ$  est donc quadruple du carré de  $EΘ$  (11. 8). Mais le carré de  $EZ$  est double du carré de  $H$ ; le carré de  $H$  est donc double du carré de  $EΘ$ ; le carré de  $H$  est donc pair; le nombre  $H$  est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite  $ΑΓ$  n'est donc pas commensurable en longueur avec  $ΑΒ$ ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

Soit  $A$  la diagonale, et  $B$  le côté; je dis que  $A$  est incommensurable en longueur avec  $B$ . Que  $A$ , s'il est possible, soit commensurable avec  $B$ ; faisons en sorte que  $A$  soit encore à  $B$  comme le nombre  $EZ$  est au nombre  $H$ , et que les nombres  $EZ$ ,  $H$  soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (24. 7); les nombres  $EZ$ ,  $H$  seront premiers entr'eux. Je dis d'abord que  $H$  n'est pas l'unité; que  $H$  soit l'unité,

μονάς. Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B* οὕτως ὁ *EZ* πρὸς τὸν *H*· καὶ ὡς ἄρα τὸ<sup>5</sup> ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ<sup>6</sup> ἀπὸ τῆς *B* οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ<sup>7</sup> *EZ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τοῦ ἀπὸ τῆς *B*· διπλάσιον<sup>8</sup> ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *EZ* τοῦ ἀπὸ τοῦ *H*. Καὶ ἔστι μονάς ὁ *H*. Δυάς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ<sup>9</sup> *EZ* τετράγωνος, ὅπερ

possible, sit unitas. Et quoniam est ut *A* ad *B* ita *EZ* ad *H*; et ut igitur ex *A* quadratum ad ipsum ex *B* ita ex *EZ* quadratus ad ipsum ex *H*. Duplum autem ex *A* quadratum quadrati ex *B*; duplus igitur et ex *EZ* quadratus quadrati ex *H*. Atque est unitas ipse *H*; binarius igitur ex *EZ* quadratus, quod est impossibile;



ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστὶν ὁ *H*· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ<sup>10</sup> *EZ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *B* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *A* οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *H* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *EZ*. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *B* τὸ ἀπὸ τῆς *A*· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *H* τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ *EZ*· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ *H* τὸν *EZ* μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ *H*· ὁ *H* ἄρα τοὺς *EZ*, *H* μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ *A* τῇ *B* μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

non igitur unitas est ipse *H*; numerus igitur. Et quoniam est ut ex *A* quadratum ad ipsum ex *B* ita ex *EZ* quadratus ad ipsum ex *H*, et invertendo ut ex *B* quadratum ad ipsum ex *A* ita ex *H* quadratus ad ipsum ex *EZ*. Metitur autem quadratum ex *B* quadratum ex *A*; metitur igitur et quadratus ex *H* quadratum ex *EZ*; quare et *H* latus ipsius ipsum *EZ* metitur. Metitur autem et *H* se ipsum; ipse *H* igitur ipsos *EZ*, *H* metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est *A* ipsi *B* longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

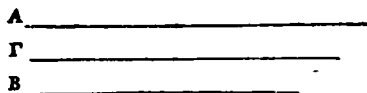
si cela est possible. Puisque *A* est à *B* comme *EZ* est à *H*, le carré de *A* sera au carré de *B* comme le carré de *EZ* est au carré de *H*. Mais le carré de *A* est double du carré de *B*; le carré de *EZ* est donc double du carré de *H*; mais *H* est l'unité; le carré de *EZ* est donc le nombre deux, ce qui est impossible, *H* n'est donc pas l'unité; *H* est donc un nombre. Et puisque le carré de *A* est au carré de *B* comme le carré de *EZ* est au carré de *H*, par inversion, le carré de *B* sera au carré de *A* comme le carré de *H* est au carré de *EZ*. Mais le carré de *B* mesure le carré de *A*; le carré de *H* mesure donc le carré de *EZ*, le nombre *H* mesure donc le nombre *EZ* (14. 8). Mais *H* se mesure lui-même; le nombre *H* mesure donc les nombres *EZ*, *H* qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; la droite *A* n'est donc pas commensurable en longueur avec la droite *B*; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

ΣΧΟΛΙΟΝ¹.

SCHOLIUM.

Εὐρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν A, B, εὐρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λίγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Εὰν γὰρ τῶν A, B εὐθειῶν² μέσον ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἴσται ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A εἶδος³ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὁμοιον καὶ ὁμοίως ἀνα-

Inventis utique longitudine incommensurabilibus rectis, ut A, B, invenientur et aliae plurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus, dico et superficies incommensurabiles inter se. Si enim rectarum A, B mediam proportionalem Γ sumamus, erit ut A ad B ita figura ex A ad figuram ex Γ, similem et si-



γραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὁμοια, εἴτε καὶ κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς⁴ A, Γ, ἐπίπεροι οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὐρηνται ἄρα καὶ⁵ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Οἷον ἴδει δειξάι.

militer descriptam, sive quadrata sint descripta, sive alia rectilinea similia, sive circuli circa diametros A, Γ, quoniam circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata; inventa igitur erunt et plana spatia incommensurabilia inter se. Quod oportebat ostendere.

Δειγνύμενων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφύρων ἀσυμμέτρων χωρίων⁷, δείξομεν τοῖς⁸ ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίᾳ, ὡς ἴσται καὶ στερεὰ σύμμετρα τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.

Ostensis utique et duarum dimensionum diversis incommensurabilibus spatiis, demonstrabimus ex solidorum theoriâ, esse etiam solida et commensurabilia et incommensura-

SCHOLIE.

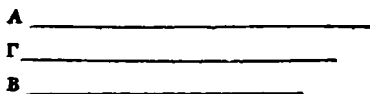
Des droites incommensurables en longueur étant trouvées, comme les droites A, B, on trouvera plusieurs autres grandeurs de deux dimensions, c'est-à-dire des surfaces incommensurables entr'elles. Car si l'on prend une moyenne proportionnelle Γ entre les droites A, B (13. 6); la droite A sera à B comme la figure construite sur la droite A est à la figure construite sur la droite Γ, les figures A, Γ étant semblables et semblablement décrites (20. 6), soit que les figures décrites soient des quarrés ou des figures rectilignes semblables; ou bien des cercles décrits autour des diamètres A, Γ, parce que les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres (2. 12). On aura donc trouvé des surfaces planes incommensurables entr'elles. Ce qu'il fallait démontrer.

Ayant donc démontré que diverses figures de deux dimensions sont incommensurables entr'elles, nous démontrerons qu'il y a des solides commensurables et incommensurables entr'eux, d'après la théorie des solides. Car si sur les quarrés

## 422 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στεριὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στεριὰ· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ πάλιν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, εἰ ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἴσοιται πρὸς ἀλλήλους ὡς<sup>10</sup> αἱ βάσεις, τουτίστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ



μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους<sup>11</sup> καὶ οἱ κυλίνδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κυλίνδροι. Καὶ φανερόν ἡμῖν γέγωνεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἴστί σύμμετρία καὶ ἀσύμμετρία<sup>12</sup>, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερειῶν σχημάτων.

bilia inter se. Si enim super quadrata ex Α, Β, vel æqualia ipsis rectilinea, constituamus æque alta solida, parallelepipeda, vel pyramides, vel prismata, solida constructa erunt inter se ut bases. Et si quidem commensurabiles sint bases, commensurabilia erunt et solida; si verò incommensurabiles, incommensurabilia. Quod oportebat ostendere.

Sed quidem et duobus circulis existentibus Α, Β, si super ipsos conos æque altos, vel cylindros constituamus, erunt hi inter se ut bases, hoc est ut circuli Α, Β. Et si quidem com-

mensurabiles sint circuli, commensurabiles erunt et cono inter se et cylindri; si verò incommensurabiles sint circuli, incommensurabiles erunt et cono et cylindri. Et manifestum est nobis fieri non solum et in lineis et superficiebus commensurabilitatem et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris.

des droites Α, Β ou sur des figures rectilignes qui leur soient égales, nous construisons des solides de même hauteur, des parallélépipèdes, des pyramides, des prismes; les solides qu'on aura construits seront entr'eux comme leurs bases (32. 11, et 6. 5. 12). Si les bases sont commensurables, les solides seront commensurables; et si les bases sont incommensurables, les solides le seront aussi (10. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on a deux cercles Α, Β, et si sur ces cercles on construit des cônes ou des cylindres de même hauteur, ces solides seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire comme les cercles Α, Β (11. 12). Si les cercles sont commensurables, les cônes et les cylindres seront commensurables entr'eux (10. 10); et si les cercles sont incommensurables, les cônes et les cylindres seront incommensurables. Il est donc évident pour nous que la commensurabilité ou l'incommensurabilité se rencontre non seulement dans les lignes et dans les surfaces, mais encore dans les solides.

# COLLATIO

## CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

### REGIÆ,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI  
SUNT MOMENTI.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

### PROPOSITIO I.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει<br>τῶν Ε, Ζ, Η, Θ' . . . . .           | τῷ πλήθει' . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. οὕτως . . . . .                                                 | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. οἱ δὲ ἐλάχιστοι . . . . .                                       | Id. . . . .          | deest.                     |
| 4. ὁ, τι μείζων τὸν μείζονα, καὶ<br>ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστι | Id. . . . .          | deest.                     |

### PROPOSITIO II.

|                                                                                       |                |                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἂν τις ἐπιτάξῃ, . . . .                                                            | Id. . . . .    | ἐπιτάξῃ τις,                                                                          |
| 2. ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β<br>πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πο-<br>ποίησιν' . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                            |
| 3. οὕτως . . . . .                                                                    | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.<br>in hac demonstratione quater deest adhuc hoc vocabulum. |
| 4. τῶν . . . . .                                                                      | τὸν . . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                            |
| 5. Ὡς δὲ . . . . .                                                                    | Id. . . . .    | ἀλλ' ὥς                                                                               |



# 424 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                  |                      |                            |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 6. οὕτως . . . . .                                                               | οὕτως καὶ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ΑΛΛ'. . . . .                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | ἐδείχθη δὴ καὶ             |
| 8. τε . . . . .                                                                  | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 9. αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν<br>τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐ-<br>τοῖς, . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## COROLLARIUM.

|                   |              |                            |
|-------------------|--------------|----------------------------|
| 10. ἰὰν . . . . . | ἀν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|-------------------|--------------|----------------------------|

## PROPOSITIO III.

|                                                                                                                                                               |                      |                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. μὲν ἀριθμοὶ . . . . .                                                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοὶ μὲν                                                                                                       |
| 2. αἰὶ . . . . .                                                                                                                                              | αἰ . . . . .         | concordat cum edit. Paris.                                                                                        |
| 3. οὐ . . . . .                                                                                                                                               | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                        |
| 4. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί<br>εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόν-<br>των αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλ-<br>λήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος<br>τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν . . . | <i>Id.</i> . . . . . | Οἱ ἄρα αὐτῶν οἱ Α, Ξ πρῶτοι<br>πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ἐπεὶ γὰρ<br>οἱ Ε, Ζ πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος<br>δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν |
| 5. ἑκάτερον τῶν . . . . .                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τὸν ἕτερον τῶν                                                                                                    |
| 6. καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Α, Ξ<br>πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. .                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | οἱ Η, Κ ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ Α, Ξ.                                                                                   |
| 7. Καὶ εἴσιν οἱ Α, Ξ πρῶτοι πρὸς<br>ἀλλήλους. . . . .                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλ-<br>λήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ<br>τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ.                           |

## PROPOSITIO IV.

|                                                                                                |                                                                        |                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἀνάλογον . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 2. ἀνάλογον . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 3. καὶ . . . . .                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 4. ἀνάλογον . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 5. ἀνάλογον . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                   | deest.                     |
| 6. τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ<br>Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἴσονται<br>τινες τῶν Θ, Η, Κ, Α ἐλάσ- | ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ,<br>καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς<br>τὸν Ζ λόγοις. . . . | concordat cum edit. Paris. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                   |                         |                                |
|-----------------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| συνεῖς ἀριθμοὶ ἐν τε τοῖς τοῦ Α   | a. . . . .              | b, d, e, f, g, h, k, l, n.     |
| πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς        |                         |                                |
| τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν     |                         |                                |
| Ζ λόγους. . . . .                 |                         |                                |
| 7. οἱ δὲ ἐλάχιστοι . . . . .      | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.     |
| 8. ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ . . . . .       | Id. . . . .             | τῶν ὑπὸ Β, Γ                   |
| 9. μιτρούμενός ἐστιν, . . . .     | μιτρεῖται, . . . . .    | concordat cum edit. Paris.     |
| 10. ἐν . . . . .                  | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.     |
| 11. ἐν . . . . .                  | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.     |
| 12. ὁ . . . . .                   | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.     |
| 13. Καὶ . . . . .                 | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.     |
| 14. ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε | Id. . . . .             | εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ              |
| 15. ἔτι . . . . .                 | Id. . . . .             | deest.                         |
| 16. ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ      | Id. . . . .             | Εἰ γὰρ μὲν εἰσιν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο |
| λόγους. Εἰ γὰρ μὲν, . . . .       |                         | ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β,   |
|                                   |                         | Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις.             |
| 17. ἀνάλογον . . . . .            | Id. . . . .             | deest.                         |
| 18. τε . . . . .                  | Id. . . . .             | deest.                         |
| 19. ἀνάλογον . . . . .            | Id. . . . .             | deest.                         |
| 20. ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν   | ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσι | ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς        |
| τοῖς . . . . .                    | τοῖς                    |                                |

PROPOSITIO V.

|                      |                       |                                 |
|----------------------|-----------------------|---------------------------------|
| 1. μὲν . . . . .     | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris.      |
| 2. τὸν . . . . .     | ὁ . . . . .           | concordat cum edit. Paris.      |
| 3. τὲν . . . . .     | ὁ . . . . .           | concordat cum edit. Paris.      |
| 4. Καὶ ὁ Δ . . . . . | Id. a, d, e, f, g, n. | Οἱ ἄρα Η, Θ, Κ πρὸς ἀλλήλους    |
|                      |                       | ἔχουσιν τοὺς τῶν πλευρῶν λό-    |
|                      |                       | γους. Αλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ   |
|                      |                       | λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η    |
|                      |                       | πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς   |
|                      |                       | τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λό-   |
|                      |                       | γον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν |
|                      |                       | πλευρῶν· λέγω οὖν ὅτι ἐστὶν ὡς  |
|                      |                       | ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς   |
|                      |                       | τὸν Κ. Ο Δ γὰρ h, k, l.         |

II.

# 426 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. οὕτως . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO VI.

1. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖται ὁ Α *Id.* . . . . . Λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ.  
τὸν Γ. Καὶ ὅσοι . . . . . Ὅσοι γὰρ  
2. ἀριθμὸν μετρεῖ, . . . . . *Id.* . . . . . μετρεῖ ἀριθμὸν.  
3. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO VII.

1. οὐ . . . . . *Id.* . . . . . μὴ  
2. μετρήσι . . . . . *Id.* . . . . . μετρήσι, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται  
γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖν·

## PROPOSITIO VIII.

1. αὐτοῖς . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. οἱ . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
3. τουτίστιν ὁ ἡγούμενος τὸν *Id.* . . . . . ἰσάκεις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ  
ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν  
ἐπόμενον. Ἰσάκεις ἄρα ὁ Η τὸν  
Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Α τὸν Ζ· ὁσάκεις  
δὲ . . . . .  
4. εἰσὶν . . . . . καὶ εἰσιν . . . . . concordat cum edit. Paris.  
5. ἕξῃς ἀνάλογόν εἰσιν· . . . . . *Id.* . . . . . ἀνάλογόν εἰσιν ἕξῃς

## PROPOSITIO IX.

1. μονάδος . . . . . μονάδος ἕξῃς . . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. μεταξὺ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
3. τῆς . . . . . τῆς Ε . . . . . concordat cum edit. Paris.  
4. ε Ζ . . . . . *Id.* . . . . . ὁ Ζ πρὸς  
5. τῷ Ζ . . . . . *Id.* . . . . . αὐτῷ  
6. ε Θ . . . . . ὁ Ε . . . . . concordat cum edit. Paris.  
7. ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α· . . . . . *Id.* . . . . . Ο δὲ Μ τῷ Α ἴσος ἐστίν·

PROPOSITIO X.

| EDITIO PARISIENSIS.                                       | CODEx 190.             | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. ἀριθμῶν . . . . .                                      | ἀριθμῶν ἑκατέρου . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. μονάδος . . . . .                                      | Id. . . . .            | μονάδος ἰξῆς               |
| 3. τε . . . . .                                           | Id. . . . .            | deest.                     |
| 4. ἄρα . . . . .                                          | ἄρα ἀριθμὸς . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 5. μονὰς . . . . .                                        | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 6. πεποιήκειν . . . . .                                   | Id. . . . .            | deest.                     |
| 7. καὶ ὥς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ<br>οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, . . | Id. . . . .            | deest.                     |

PROPOSITIO XI.

|                                                                 |                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἴστιν . . . . .                                              | Id. . . . .    | ἴστιν ἀριθμὸς                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 2. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὥς Γ πρὸς<br>τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β . | Id. a. . . . . | Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλα-<br>πλασιάσας τὸν Ε πεποιήκειν, ὁ<br>δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας<br>τὸν Β πεποιήκει, δύο δὲ ἀριθ-<br>μοὶ οἱ Γ, Δ ἓνα ἀριθμὸν καὶ τὸν<br>αὐτὸν τὸν Δ πολλαπλασιάσαν-<br>τες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἴστιν<br>ἄρα ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ<br>Ε πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὥς ὁ Γ πρὸς<br>τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε·<br>b, d, e, f, g, h, k, l, n. |
| 3. ὁ Ε . . . . .                                                | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 4. πλευράν. . . . .                                             | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

PROPOSITIO XII.

|                                                                                     |                                                                    |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. καὶ ὁ Γ . . . . .                                                                | Id. . . . .                                                        | ὁ Γ ἄρα                    |
| 2. ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλα-<br>σιάσας τὸν Ε πεποιήκει, . .                      | Id. . . . .                                                        | deest.                     |
| 3. ἐπεὶ . . . . .                                                                   | deest. . . . .                                                     | concordat cum edit. Paris. |
| 4. Εδείχθη δὲ καὶ ὥς ὁ Γ πρὸς<br>τὸν Δ οὕτως ἔ, τε Α πρὸς τὸν Θ,<br>τὸν Θ . . . . . | καὶ ὥς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν<br>Δ οὕτως ὁ, τε Α πρὸς<br>τὸν Θ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἄρα . . . . .                                                                    | deest. . . . .                                                     | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XIII.

| EDITIO PARISIENSIS.         | COD. IXO.            | EDITIO OXONIÆ.             |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἰξῆς . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. εἰσιν ἀνάλογον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀνάλογόν εἰσιν             |
| 3. ἀνάλογον . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. τῶν . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. καὶ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## PROPOSITIO XIV.

|                                                               |                                 |                            |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| 1. ἴστωσαν . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . .            | deest.                     |
| 2. μετρίῃ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. . . . .                          | deest. . . . .                  | concordat cum edit. Paris. |
| 3. Ἀλλὰ δὴ μετρίτω ὁ Γ τὸν Δ . . . . .                        | πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ με-<br>τρίτω | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἰξῆς . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . .            | deest.                     |
| 5. μετρίῃ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρίῃ<br>ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε . . . . . | deest. . . . .                  | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XV.

|                                                                                                                                                                 |                      |                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ριθμὸν . . . . .                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                            |
| 2. μετρίῃ . . . . .                                                                                                                                             | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσει.                                                                                         |
| 3. ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιά-<br>σας τὸν Η ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ<br>Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ,<br>τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν<br>πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας<br>τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν<br>πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, |
| 4. δὴ . . . . .                                                                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | δὲ                                                                                                |
| 5. Καὶ ἐπὶ . . . . .                                                                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ γὰρ                                                                                           |

## PROPOSITIO XVI.

|                                    |                      |                            |
|------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. οὐδ' . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | οὐδὲ ὅδε                   |
| 2. ἀριθμοὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἴστωσαν . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. λίγω . . . . .                  | λίγω δὲ . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 5. μετρίῃ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | μετρήσει.                  |
| 6. μετρίτω . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | μετρίτω δὴ                 |
| 7. μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. . . . . | καὶ ὁ τὸν Δ. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                           | CODEX 190.              | EDITIO OXONIE.                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπιδου . .                                                                                | ὅμοιοι ἐπίπιδου ἀριθμοὶ | concordat cum edit. Paris.                                                     |
| 2. ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς<br>τὸν Ζ· τουτέστιν ἥπερ ἡ ὁμό-<br>λογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμό-<br>λογον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .    | ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν<br>ὁμόλογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ<br>πρὸς τὸν Ζ. |
| 3. οὕτως . . . . .                                                                                            | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                     |
| 4. μὲν . . . . .                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                                                                         |
| 5. οὕτως . . . . .                                                                                            | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                     |
| 6. μὲν . . . . .                                                                                              | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                     |
| 7. ὁ, τε . . . . .                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .    | ὁ                                                                              |

PROPOSITIO XIX.

|                                                                                                                                   |                                                                       |                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1. μὲν ὁ . . . . .                                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | ὁ μὲν                                                           |
| 2. μὲν . . . . .                                                                                                                  | deest. . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                      |
| 3. ἄρα . . . . .                                                                                                                  | deest. . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                      |
| 4. ἐδείχθη. . . . .                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | ἐδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν<br>Μ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ.   |
| 5. οὕτως . . . . .                                                                                                                | deest. . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                      |
| 6. εἰσιν . . . . .                                                                                                                | deest. . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                      |
| 7. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς<br>τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ·<br>ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς<br>τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· . | Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ<br>Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ<br>πρὸς τὸν Θ· α. . . | concordat cum edit. Paris.<br><i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i> |
| 8. εἰσιν ἀνάλογον . . . . .                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | ἀνάλογόν εἰσιν                                                  |
| 9. λόγῳ. . . . .                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | deest.                                                          |
| 10. Θ . . . . .                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | Θ λόγῳ                                                          |
| 11. πολλαπλασιάσας . . . . .                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῆς Ζ, Η                                  |
| 12. καὶ . . . . .                                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                                                  | deest.                                                          |
| 13. ἔστιν ἄρα ὡς . . . . .                                                                                                        | καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς<br>ἄρα . . . . .                           | concordat cum edit. Paris.                                      |
| 14. ὁ, τε . . . . .                                                                                                               | deest. . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                      |

## PROPOSITIO XX.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | CODEX 190.                    | EDITIO OXONIÆ.                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. οἱ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                                                                                                                   |
| 2. γὰρ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | deest. . . . .                | concordat cum edit. Paris.                                                                                               |
| 2. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε<br>οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δὲ ὁ<br>Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς<br>τὸν Β . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | deest. . . . .                | concordat cum edit. Paris.                                                                                               |
| 4. τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν<br>Γ πεποίηκεν . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                           | deest. . . . .                | concordat cum edit. Paris.                                                                                               |
| 5. δὲ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .          | δὴ                                                                                                                       |
| 6. καὶ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                                                                                                                   |
| 7. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολ-<br>λαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν<br>τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν<br>Γ πεποίηκεν· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν<br>Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα<br>ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς<br>τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β.<br>Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν<br>Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ,<br>Β πεποίηκεν . . . . . | <i>Id. a, h, l.</i> . . . . . | Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Ζ, Η τὸν<br>Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον<br>τῶν Γ, Β πεποίηκεν· <i>b, d, e,</i><br><i>f, g, k, n.</i> |
| 8. Καὶ ἡ ἀλλὰ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν<br>Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                 | <i>Id.</i> . . . . .          | deest.                                                                                                                   |
| 9. πλευραὶ αὐτῶν . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .          | αὐτῶν πλευραὶ                                                                                                            |

## PROPOSITIO XXI.

|                                                                            |                      |                            |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. οἱ . . . . .                                                            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. γὰρ . . . . .                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | γὰρ τρεῖς                  |
| 3. τρεῖς . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. ἀριθμοί . . . . .                                                       | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τοῦ πρὸ . . . . .                                                       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. εἰσιν ἀνάλογον . . . . .                                                | <i>Id.</i> . . . . . | ἀνάλογόν εἰσιν             |
| 7. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν<br>Ε, Ζ, Η τῶ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS. . 431

| EDITIO PARISIENSIS.       | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                                    |
|---------------------------|----------------------|---------------------------------------------------|
| 8. δὴ ὁ Ε τὸν Γ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ ὁ Η τὸν Β                                      |
| 9. Καὶ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                            |
| 10. πιποῖηκε . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | πιποῖηκε τὸν δὲ πολλαπλασιάσας<br>τὸν Γ πιποῖηκεν |
| 11. αὐτοῦ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτῶν                                             |
| 12. δὴ . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                        |
| 13. οὕτως . . . . .       | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                        |

## PROPOSITIO XXIV.

|                    |                |                            |
|--------------------|----------------|----------------------------|
| 1. οὕτως . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|--------------------|----------------|----------------------------|

## PROPOSITIO XXV.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. λίγων . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | λίγων δὲ                   |
| 2. ἀριθμοὶ, . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXVII.

|                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ἀριθμοὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|----------------------|----------------------|--------|

---



## LIBER NONUS.

## PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                |                      |                     |
|--------------------------------|----------------------|---------------------|
| 1. ἐπίπεδοι . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.              |
| 2. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν . . | <i>Id.</i> . . . . . | Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν |
| 3. ἀριθμῶν μεταξὺ . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | μεταξὺ ἀριθμῶν      |

## PROPOSITIO II.

- |                                                                                               |                      |                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἀριθμοί. . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                   |
| 2. Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β,<br>καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας<br>τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω . | <i>Id.</i> . . . . . | Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλα-<br>πλασιάσαντες ἀλλήλους τετρά-<br>γωνον τὸν Γ ποιείτωσαν |
| 3. οὕτως . . . . .                                                                            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                               |
| 4. ἀριθμός. . . . .                                                                           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                               |
| 5. ἄρα Α, Β . . . . .                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | Α, Β ἄρα                                                                                 |

## PROPOSITIO III.

- |                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. οὕτως . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. οὕτως . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. οὕτως . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. οὕτως . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἀριθμοὶ ἑμπεπτώκασιν . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἑμπεπτώκασιν ἀριθμοί       |
| 6. ἑμπεσοῦνται . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἑμπεπτώκασιν               |
| 7. διῦτιρος . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | τίταρτος                   |

## PROPOSITIO IV.

- |                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. γὰρ Α . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | Α γὰρ  |
| 2. οἱ Α, Β . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |

## PROPOSITIO V.

- |                      |                      |        |
|----------------------|----------------------|--------|
| 1. ἀριθμός . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
|----------------------|----------------------|--------|

2. οὕτως . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
3. τῶν . . . . . Id. . . . . τὸν

PROPOSITIO VI.

1. ἑαυτὸν . . . . . Id. . . . . ἑαυτὸν μὲν  
2. ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ Id. . . . . τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ  
τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ  
δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς  
ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς  
ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α  
πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β  
πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίη-  
κεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ  
τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ  
δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς  
ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς  
ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β  
πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς  
πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν  
Β· καὶ ὡς ἄρα . . . . .

*Nota.* Tredecim priores  
propositiones desunt in co-  
dice 2344.

3. οὕτως . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
4. οἱ . . . . . Id. . . . . deest.  
5. Β, Γ . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
6. οὕτως . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ Id. . . . . deest.  
κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας·  
2. πεποίηκεν· . . . . Id. . . . . πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε  
πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίη-  
κεν·

PROPOSITIO VIII.

1. ἴσται . . . . . Id. . . . . ἴστιν  
2. πάντες, . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

| EDITIO PARISIENSIS.           | COD. 190.            | EDITIO OXONIE.             |
|-------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 3. πάντες, . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. πάντες. . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. πάντες. . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ἅπαντες.                   |
| 6. ἀριθμὸν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. πάντες . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. μὲν . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἴστί· . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. πάντες κύβοι εἰσὶ . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἅπαντες κύβοι τέ εἰσι      |

## PROPOSITIO IX.

|                                |                                             |                            |
|--------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἀριθμοὶ ἰζῆς . . . . .      | ἰζῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθ-<br>μοὶ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ὁσοιδηποτοῦν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .                        | ὁποσοιούν                  |
| 3. ἄρα . . . . .               | deest. . . . .                              | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἄρα . . . . .               | τε . . . . .                                | concordat cum edit. Paris. |
| 5. δὲ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .                        | δὲ                         |
| 6. καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .                        | deest.                     |
| 7. λίγω . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .                        | λίγω δὲ                    |
| 8. καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἴστί. . . | deest. . . . .                              | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO X.

|                                |                      |                                    |
|--------------------------------|----------------------|------------------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                             |
| 2. ὁσοιδηποτοῦν . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                             |
| 3. χωρὶς . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | πλὴν                               |
| 4. καὶ τῶν ἵνα διαλειπόντων. . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.         |
| 5. οὕτως . . . . .             | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.         |
| 6. ὑπόκειται· . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπόκειται·                         |
| 7. τετράγωνός ἐστι, . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                             |
| 8. δὲ . . . . .                | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.         |
| 9. οὕτως . . . . .             | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.         |
| 10. κύβον· . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | κύβον· οἱ B, Γ ἄρα ὅμοιοι στίρτοι. |
| 11. οὕτως . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.         |
| 12. καὶ . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.         |

## PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                              |                      |                             |
|------------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐλάττωσιν ὁ Β τὸν Ε μείζονα |
| 2. αὐτῷ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ Δ                        |
| 3. τῷ Δ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτῷ                        |
| 4. Οἷον ἴδι διῆξαι. . . . .  | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.  |

ΠΟΡΙΣΜΑ.

|                |                                                                                                                                                                             |                                                                                                                            |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| deest. . . . . | Καὶ φανερόν ὅτι ἂν ἔχει<br>τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ<br>μοιᾶδος τὴν αὐτὴν ἔχει,<br>καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ<br>τοῦ μετρούμενου κατὰ<br>τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ.<br>Οἷον ἴδι διῆξαι. | deest in codicibus <i>b, c, d, e, g, h, k, l, m, n</i> ; hoc<br>corollarium inter lineas<br>codicis <i>f</i> est exaratum. |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## PROPOSITIO XII.

|                                                               |                                               |                                                                      |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 1. ἕξῃς . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . .                          | deest.                                                               |
| 2. μετρήται, . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . .                          | μετρεῖται,                                                           |
| 5. ὁποσοιδηποτοῦν . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                          | ὅσοιδηποτοῦν                                                         |
| 4. ἕξῃς . . . . .                                             | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 5. καὶ . . . . .                                              | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 6. μετρεῖται ὁ Β τὸν Α. . . .                                 | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 7. ἀριθμὸν . . . . .                                          | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 8. οὕτως . . . . .                                            | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 9. οὕτως . . . . .                                            | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 10. ἴστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος                              | ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος ἴστι                   | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 11. οὕτως . . . . .                                           | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 12. ὁ τε . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . .                          | ὁ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάτ-<br>των τὸν ἐλάττωνα, τουτέστιν ὁ |
| 13. καὶ ὁ Ε τὸν Α. . . . .                                    | ὁ Ε τὸν Α, ὡς ἡγούμενος<br>ἡγούμενον. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 14. πρώτου . . . . .                                          | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 15. οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς<br>ἀριθμοῦ μετροῦνται. . . . | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 16. καὶ . . . . .                                             | deest. . . . .                                | concordat cum edit. Paris.                                           |

## PROPOSITIO XIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                            | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------|
| 1. ἄλλου . . . . .                                                                                                             | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                 |
| 2. ἀπὸ μονάδος ὁποσίου ἄριθμοι<br>ἕξῃς . . . . .                                                                               | deest. . . . .       | ὁποσίου ἄριθμοι ἀπὸ μονάδος                |
| 3. πᾶς . . . . .                                                                                                               | <i>Id.</i> . . . . . | ἅπας                                       |
| 4. ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς<br>ἀριθμοῦ μετρεῖται. . . . .                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                     |
| 5. πρώτου μετρηθῆσεται, . . .                                                                                                  | <i>Id.</i> . . . . . | μετρηθῆσεται πρώτου,                       |
| 6. τὸν Δ μετρεῖ . . . . .                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | μετρεῖ τὸν Δ,                              |
| 7. ὁ Ζ οὐκ ἔστι . . . . .                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | οὐκ ἔστιν ὁ Ζ                              |
| 8. ἔστι πρῶτος, . . . . .                                                                                                      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                 |
| 9. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ<br>πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖ-<br>ται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς<br>ἀριθμοῦ μετρεῖται. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ<br>μετρεῖται. |
| 10. οὕτως . . . . .                                                                                                            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                 |
| 11. ὑπὸ τῶν . . . . .                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . . | ἐκ τῶν                                     |
| 12. οὕτως . . . . .                                                                                                            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                 |
| 13. ὑφ' . . . . .                                                                                                              | ὑπὸ . . . . .        | concordat cum edit. Paris.                 |

## • PROPOSITIO XIV.

|                         |                      |                            |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. πρώτου . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. τῶν . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἔστιν . . . . .      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. μετρούμενος· . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | μετρούμενον·               |

## PROPOSITIO XV.

|                          |                      |        |
|--------------------------|----------------------|--------|
| 1. τῶν Α, Β, Γ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. δι' . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | δι'    |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIENSIS.

3. πρὸς τὸν EZ πρῶτοί εἰσιν. . . *Id.* . . . . . πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν EZ.  
 4. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾖσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν. ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Ὡστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν.  
 6. ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι.  
 7. τῶν . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 8. τῶν . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.
- ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί.
- καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν. ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. *b, d, e, f, g, h, k, m.*
- concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. οὕτως . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 2. ἀριθμοὶ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 3. ἔχοντας . . . . . *Id.* . . . . . ἔχοντας αὐτοῖς  
 4. ἀτοπον . . . . . *Id.* . . . . . ἀτοπὸν ἐστίν.  
 5. ἴσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β . . . *Id.* . . . . . ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐστίν

## PROPOSITIO XVII.

| EDITIO PARISIENSIS.  | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. οὕτως . . . . .   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἀριθμοὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἔχοντας . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἔχοντας αὐτοῖς             |
| 4. οὕτως . . . . .   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. οὕτως . . . . .   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ὁ Α καὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ὁ Α                    |

## PROPOSITIO XVIII.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. Καὶ εἰ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | Εἰ μὲν οὖν                 |
| 2. οὕτως . . . . .    | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἀνάλογον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

## PROPOSITIO XIX.

|                   |                      |    |
|-------------------|----------------------|----|
| 1. πότε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . |    |
| 2. πότε . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰ |

Tertium *alinea* sic se habet in codicibus *a*, *b*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Ἡ οὐκ εἰσὶν ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὐ τε ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, οὐ τε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ καὶ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Tertium *alinea* sic se habet in editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Οἱ δὲ Α, Β, Γ ἥτοι ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἰσιν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ οὐτε ἀνάλογον ἐξῆς, οὐτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Post quantum *alineā* hæc leguntur in codicibus *a, d, g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Μὴ ἴστωσαν δὲ οἱ *A, B, Γ* ἐξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρῶτων πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

Εἰδ' οὐκ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἶσιν, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. Εἰ γὰρ μὴ, προσυρήσθω, καὶ ἴστω ὁ *Δ*· ὡς οὖν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως ὁ

*A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ—— Ε———*

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσυρήσθω ὁ *Δ*, ὥστε εἶναι ὡς τὸν *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως τὸν *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, καὶ γερονέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *E* πρὸς τὸν *E*· διίσου ἄρα ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Οἱ δὲ *A, Γ* πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἰπόμενος τὸν ἰπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὡς ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς *A, B, Γ* δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

*Γ* πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*· ἐξ ἴσου γοῦν ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Ἀλλὰ μὴν οἱ *A, Γ* πρῶτοί εἰσι, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἰπόμενος τὸν ἰπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ *A* ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ πρῶτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς *A, B, Γ* ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν ἀδύνατον.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἴστωσαν οἱ *A, B, Γ* ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ *A, Γ* μὴ ἴστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν·

Πάλιν οἱ *A, B, Γ* ἀνάλογον ἐξῆς ἴστωσαν μὲν οἱ δὲ *A, Γ* ἄκροι οὐ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν δυνατόν ἐστιν·

| EDITIO PARISIENSIS.        | COD. 190.                | EDITIO OXONIE.             |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 3. ὁ δὲ <i>A</i> . . . . . | ὁ <i>A</i> ἄρα . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. μὲν . . . . .           | μὴν . . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 5. οὕτως . . . . .         | deest. . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τοῖς . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .     | τῶν                        |
| 7. ἀνάλογον . . . . .      | ἀνάλογον εἴς . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |



440 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

Post ultimum *alineā* editionis Parisiensis hæc leguntur in codicibus *a*, *d*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Ἀλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἰζῆς ἔτῳσαν ἀνάλογον, μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω.

Ἀλλὰ μὲν οὐτ' ἀνάλογον ἰζῆς οἱ Α, Β, Γ οὔτε πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἔτῳσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, ὁμοίως

Α, 3. Β, 4. Γ, 9. Ε, 12. Δ, 36.  
Α, 4. Β, 5. Γ, 14. Ε---- Δ, 70.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσερεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον. Ὅπερ ἴδει διίξαι.

δείξομεν ἂν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὔρεῖν δυνατόν ἐστιν· ἂν δὲ μὴ μετρεῖ, ὅτι ἀδύνατον. Ὅπερ ἴδει διίξαι.

*Nota.* Subsequentia adsunt in codice 190 inter et vocabulum ἀλλήλους et vocabulum λίγω secundi *alineā* paginæ 439; quæ quidem Euclidis esse non possunt.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

deest. . . . .

\* Λίγω ὅτι καὶ οὕτως δύν-  
ατον. Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν  
ὑπὸ Β, Γ μετρεῖ, προ-  
σέσεται ἡ διίξις ὁμοίως  
τοῖς ἰζῆς. Εἰ δὲ οὐ με-  
τρεῖ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ,  
ἀδύνατον αὐτοῖς τέ-  
ταρτον ἀνάλογον προσ-  
ερεῖν. Οἶον ἔστω ὁ μὲν Α  
τριῶν τινῶν, ὁ δὲ Β, ἑξ-  
ὁ δὲ Γ, ἑπτά· καὶ δηλο-  
γοτὶ δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ Α  
εἴη πέντε, οὐκ ἔστι ду-  
νατὸν καὶ ἀπλῶς· ὅτε  
μὲν ὁ Β πολλαπλασίεις  
ἐστι τοῦ Α, δυνατόν  
ἐστι τέταρτον ἀνάλογον  
εὔρεῖν. Εἰ δὲ μὴ, ἀδύ-  
νατον.

deest.

## PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                              |                      |                                         |
|------------------------------|----------------------|-----------------------------------------|
| 1. καὶ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                  |
| 1. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω. . . | <i>Id.</i> . . . . . | Εἰ γὰρ ὁ Η ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ εἰσὶν αὐτὸς, |
| 2. ἄρα . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris.              |
| 3. Ο αὐτὸς δὲ καὶ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ                                     |

## PROPOSITIO XXII.

- |                   |                |                            |
|-------------------|----------------|----------------------------|
| 1. ἄρα . . . . .  | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἔστι . . . . . | ἔστω . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXIII.

- |                                   |                      |                              |
|-----------------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1. ὅποσοι οὖν περισσοὶ ἀριθμοὶ, . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοὶ περισσοὶ ὅποσοι οὖν, |
|-----------------------------------|----------------------|------------------------------|

## PROPOSITIO XXIV.

- |                                 |                        |                            |
|---------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. ὁ . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .   | καὶ ὁ                      |
| 2. ἀφηρήσθαι ἄρτιος, . . . .    | <i>Id.</i> . . . . .   | ἄρτιος ἀφηρήσθαι           |
| 3. ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ ἄρτιος | ἄρτιός ἐστιν ὁ ΑΓ. . . | concordat cum edit. Paris. |
| ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ. . . . .         |                        |                            |

## PROPOSITIO XXV.

- |                    |                      |         |
|--------------------|----------------------|---------|
| 1. ο . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ὁ   |
| 2. ὅτι ὁ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὅτι καὶ |

## PROPOSITIO XXVI.

- |                |                      |       |
|----------------|----------------------|-------|
| 1. ὁ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ὁ |
|----------------|----------------------|-------|

## PROPOSITIO XXVII.

- |                            |                      |                            |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. περισσοῦ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | περισσοῦ ἀριθμοῦ           |
| 2. γὰρ . . . . .           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ. | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ὅποσοι οὖν . . . . . ὅποσοι . . . . . concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO XXIX.

1. ἴστιν . . . . . *Id.* . . . . . Ο δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἐστιν.

## PROPOSITIO XXX.

1. ὁ ἄρα B . . . . . ὁ B ἄρα . . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. ἴστιν . . . . . *Id.* . . . . . deest.

## PROPOSITIO XXXI.

1. διπλασίονα . . . . . *Id.* . . . . . διπλάσιον  
2. διπλασίον . . . . . *Id.* . . . . . διπλάσιος  
3. ὁ A . . . . . *Id.* . . . . . ὁ A καὶ  
4. ὁ Δ . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

## PROPOSITIO XXXII.

1. δυάδος . . . . . *Id.* . . . . . διάδος  
2. δυάδος . . . . . *Id.* . . . . . διάδος  
3. Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν B, Ὅτι μὲν ἕκαστος ἀρτιός concordat cum edit. Paris.  
Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι, φα- ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ  
νερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος . . . διάδος  
4. Λίγω . . . . . *Id.* . . . . . Λίγω δὲ  
5. ἡ E. . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
6. ὅτι . . . . . deest. . . . . ὅτι καὶ

## PROPOSITIO XXXIII.

1. ἀρτιος, . . . . . *Id.* . . . . . ἀρτιος, ὁ ἡμῖς αὐτοῦ ἀρτιός  
ἐστι, καὶ

## PROPOSITIO XXXIV.

| EDITIO PARISIENSIS.        | CODEX 190.     | EDITIO OXONIE.                                                                      |
|----------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἄρτιος . . . . .        | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                          |
| 2. διάδος . . . . .        | Id. . . . .    | διάδος                                                                              |
| 3. διάδος . . . . .        | Id. . . . .    | διάδος                                                                              |
| 4. περισσός ἐστιν. . . . . | Id. . . . .    | ἐστὶ περισσός.                                                                      |
| 5. τέμνωμι . . . . .       | Id. . . . .    | τ'μωμι                                                                              |
| 6. ποιῶμι . . . . .        | Id. . . . .    | ποιῶμι,                                                                             |
| 7. ἀριθμὸν . . . . .       | Id. . . . .    | deest.                                                                              |
| 8. διάδα, . . . . .        | Id. . . . .    | τινα περισσὸν ὃ μετρήσει τὸν Α<br>κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, καταντή-<br>σομιν εἰς διάδα, |
| 9. διάδος . . . . .        | Id. . . . .    | διάδος                                                                              |
| 10. ὁ Α . . . . .          | Id. . . . .    | ὁ Α καὶ                                                                             |

## PROPOSITIO XXXV.

|                      |             |         |
|----------------------|-------------|---------|
| 1. ἴσοι . . . . .    | Id. . . . . | ἴσος    |
| 2. πάντα . . . . .   | Id. . . . . | ἅπαντας |
| 3. ὁποιοῦν . . . . . | Id. . . . . | ὁποιοῦν |
| 4. ἐστὶ . . . . .    | Id. . . . . | deest.  |
| 5. τοὺς . . . . .    | Id. . . . . | τὸν     |

## PROPOSITIO XXXVI.

|                      |                                                                                                                                                                                                                                                         |         |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1. ὁποιοῦν . . . . . | Id. . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | ὁποιοῦν |
| 2. deest. . . . .    | Περὶ τὸν ἔχεται. λέγω ὅτι<br>ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ-<br>τιος καὶ ἀρτιάκις πε-<br>ρισσός. Ὅτι μὲν οὖν ὁ<br>Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ-<br>τιος, φανερόν· τὸν γὰρ<br>ἡμισυν οὐκ ἔχει περισ-<br>σόν· λέγω δὲ ὅτι καὶ<br>ἀρτιάκις περισσός ἐσ-<br>τιν. Εἰ γὰρ τὸν Α | deest.  |

τέμνωμεν δίχα, καὶ τὸν  
 ἡμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ  
 τοῦτο αἰ ποιοῦμεν,  
 καταντήσωμεν εἰς τινα  
 ἀριθμὸν περισσόν, ὃς  
 μετρήσει τὸν Α κατὰ  
 ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ  
 οὐ, καταντήσωμεν εἰς  
 τινα ἀριθμὸν περισσόν,  
 ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ  
 ἄρτιον ἀριθμόν· κατα-  
 ντήσωμεν εἰς δυάδα, καὶ  
 ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυά-  
 δος διπλασιαζομένων,  
 ὅπερ οὐκ ὑπόκειται·  
 ὥσπερ ὁ Α ἀρτιάκις πε-  
 ρισσός ἐστιν. Εδείχθη  
 δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος·  
 ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός  
 ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισ-  
 σός. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

|                                                       |                      |                            |
|-------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 3. καὶ . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. οὕτως . . . . .                                    | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α<br>πρῶτός ἐστιν . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. οὐδὲ . . . . .                                     | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἀριθμὸν . . . . .                                  | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστιν . . . . .                                    | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 9. αὐτοῖς . . . . .                                   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 10. οὕτως . . . . .                                   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 11. οὕτως . . . . .                                   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

# LIBER DECIMUS.

## DEFINITIONES.

| EDITIO PARISIENSIS.                                             | COD. 190.                                             | EDITIO OXONIÆ.                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μό-<br>νον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει . . . | <i>Id. a.</i> . . . . .                               | σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ<br>μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ<br>δυνάμει μόνον. <i>b, d, e, f,</i><br><i>g, h, k, l, m, n.</i> |
| 4. τετράγωνα . . . . .                                          | <i>Id. a, b, d, e, f, g,</i><br><i>h, k, l, m, n.</i> | τετράγωνες                                                                                                                       |
| 5. ἴσα . . . . .                                                | <i>Id. a, b, d, e, f, g,</i><br><i>h, k, l, m, n.</i> | ἴσαι                                                                                                                             |

## PROPOSITIO I.

|                                                                 |                      |                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. γίνονται· ληφθήσεται τι μέ-<br>γεθος, ὃ ἴσται ἔλασσον τοῦ .  | <i>Id.</i> . . . . . | ἂν γίνονται· ληφθήσεται τι μέγε-<br>θος, ὃ ἴσται ἔλασσον                                                         |
| 2. καὶ τοῦτο αἰὶ γίνονται, ληφ-<br>θήσεται τι μέγεθος ὃ ἴσται . | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μιᾶ-<br>ζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰὶ<br>γίνονται, ληφθήσεται τι μέγε-<br>θος ὃ ἴσται |
| 3. Τὸ Γ γὰρ . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | Τὸ γὰρ Γ                                                                                                         |
| 4. AB . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . . | AB μεγέθους                                                                                                      |
| 5. ἡμίσιος . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | ἡμίσιος                                                                                                          |
| 6. ἢ τὸ ἥμισυ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ ἡμίσιος                                                                                                      |
| 7. ἢ τὸ ἥμισυ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ ἡμίσιος                                                                                                      |
| 8. ἡμίση . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | ἡμίση                                                                                                            |

ΑΛΛΩΣ\*.

ALITER.

Ἐκτίσθω δύο μεγέθη ἀνισα τὰ AB, Γ, ἔστω Exponantur duæ magnitudines inæquales AB,  
δὲ τὸ Γ ἔλασσον', καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, Γ, sit autem Γ minor, et quoniam minor est

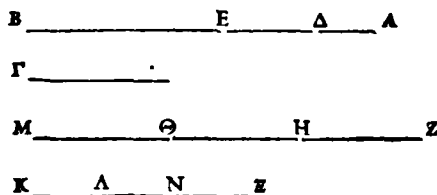
## AUTREMENT.

Soient exposées deux grandeurs inégales AB, Γ; que Γ soit la plus petite.

\* Hoc ἄλλως in margine codicis a est exaratum; deest autem in codicibus d, g, et in omnibus aliis est in textu.

446 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὶ τοῦ  $AB$  μείζονος μείζον. Γεγονέντω ὡς τὸ  $ZM$ , καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῇ  $\Gamma$ , καὶ ἔστω<sup>2</sup> τὰ  $M\Theta$ ,  $\Theta H$ ,  $HZ$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $AB$  ἀφηρέσθω μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ  $BE$ , καὶ ἀπὸ τοῦ  $AE$  μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ  $EA$ . Καὶ τοῦτο αἰὶ γιγνέσθω<sup>3</sup> ἕως αἰ ἐν τῇ  $AB$  διαιρέσεις ἴσαι γίνωνται ταῖς ἐν τῇ  $ZM$  διαιρέσει. Γεγονέντωσαν ὡς αἱ  $EE$ ,  $EA$ ,  $\Delta A$ , καὶ τῇ  $\Delta A$  ἕκαστον τῶν  $KA$ ,  $AN$ ,  $NZ$  ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω<sup>4</sup> ἕως ἀν<sup>5</sup> αἱ διαιρέσεις τοῦ  $KZ$  ἴσαι γίνωνται ταῖς τοῦ  $ZM$ .



Καὶ ἐπεὶ τὸ  $BE$  μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἴσται τοῦ  $AB$ , τὸ  $BE$  μείζον ἴσται τοῦ  $EA$ . πολλῶν ἄρα μείζον ἴσται τοῦ  $\Delta A$ . Ἀλλὰ τὸ  $\Delta A$  ἴσον ἴσται τῇ  $\Xi N$ <sup>6</sup>. τὸ  $BE$  ἄρα μείζον ἴσται τοῦ  $NZ$ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ  $EA$  μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἴσται τοῦ  $EA$ , μείζον ἴσται τοῦ  $\Delta A$ . Ἀλλὰ τὸ  $\Delta A$  ἴσται ἴσον τῇ

Et quoniam  $BE$  major quam dimidium est ipsius  $AB$ , ipsa  $BE$  major est quam  $EA$ ; multo igitur major est quam  $\Delta A$ . Sed  $\Delta A$  æqualis est ipsi  $\Xi N$ ; ergo  $BE$  major est quam  $NZ$ . Rursus, quoniam  $EA$  major quam dimidium est  $EA$ , major est quam  $\Delta A$ . Sed  $\Delta A$  est æqualis ipsi  $NA$ ; ergo

Puisque la grandeur  $\Gamma$  est la plus petite, cette grandeur étant multipliée deviendra enfin plus grande que  $AB$ . Qu'elle devienne  $ZM$ . Partageons  $ZM$  en parties égales chacune à  $\Gamma$ ; que ces parties soient  $M\Theta$ ,  $\Theta H$ ,  $HZ$ ; retranchons de  $AB$  une partie  $BE$  plus grande que sa moitié, de  $AE$  une partie  $EA$  plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de  $AB$  soit égal au nombre des divisions de  $ZM$ . Que les divisions de  $AB$  soient  $BE$ ,  $EA$ ,  $\Delta A$ ; que chacune des droites de  $KA$ ,  $AN$ ,  $NZ$  soit égale à  $\Delta A$ , et que le nombre des divisions de  $KZ$  soit égal au nombre des divisions de  $ZM$ .

Puisque  $BE$  est plus grand que la moitié de  $AB$ , la droite  $BE$  sera plus grande que  $\Delta A$ , et à plus forte raison que  $\Delta A$ . Mais  $\Delta A$  est égal à  $\Xi N$ ; la droite  $BE$  est donc plus grande que  $NZ$ . De plus, puisque la droite  $EA$  est plus grande que la moitié de  $EA$ , cette droite sera plus grande que  $\Delta A$ . Mais

ΝΑ<sup>7</sup>. τὸ ΕΔ ἄρα μείζον ἔστι τοῦ ΝΑ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μείζον ἔστι τοῦ ΕΛ. Ἰσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ<sup>8</sup>. ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μείζον ἔστιν ὅλου τοῦ ΕΚ. Αλλὰ τοῦ ΒΑ μείζον ἔστι τὸ ΜΖ. πολλῶν ἄρα τὸ ΜΖ μείζον ἔστι τοῦ ΕΚ. Καὶ ἵπαι τὰ ΕΝ, ΝΑ, ΑΚ ἴσα ἀλλήλοις ἔστιν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλῆθει τῶν ἐν τῷ ΕΚ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΜ. Μείζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΕΚ. μείζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΑΚ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ. τὸ Γ ἄρα μείζον ἔστι τοῦ ΑΔ. Οπερ ἴδει διῆξαι.

ΕΔ major est quam ΝΑ; tota igitur ΒΔ major est quam ΕΛ. Æquale autem ΔΑ ipsi ΑΚ; tota igitur ΒΑ major est quam tota ΕΚ. Sed quam ΒΑ major est ΜΖ; multo igitur ΜΖ major est quam ΕΚ. Et quoniam ΕΝ, ΝΑ, ΑΚ æquales inter se sunt, sunt autem et ipsæ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ æquales inter se, atque est æqualis multitudo ipsarum in ΜΖ multitudini ipsarum in ΕΚ; est igitur ut ΚΛ ad ΖΗ ita ΕΚ ad ΖΜ. Major autem ΖΜ quam ΕΚ; major igitur et ΖΗ quam ΑΚ. Atque est quidem ΖΗ æqualis ipsi Γ; ipsa autem ΚΛ ipsi ΑΔ; ergo Γ major est quam ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

ΑΔ est égal à ΝΑ; la droite ΕΔ est donc plus grande que ΝΑ; la droite entière ΒΔ est donc plus grande que ΕΛ. Mais ΔΑ est égal à ΑΚ; la droite entière ΒΑ est donc plus grande que la droite entière ΕΚ. Mais ΜΖ est plus grand que ΒΑ; la droite ΜΖ est donc à plus forte raison plus grande que ΕΚ. Et puisque les droites ΕΝ, ΝΑ, ΑΚ sont égales entr'elles, que les droites ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties de ΜΖ est égal au nombre des parties de ΕΚ, la droite ΚΛ sera à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΜ (12. 5). Mais ΖΜ est plus grand que ΕΚ; la droite ΖΗ est donc plus grande que ΑΚ (14. 5). Mais ΖΗ est égal à Γ, et ΚΛ égal à ΑΔ; la droite Γ est donc plus grande que ΑΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                |                   |                                 |
|--------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| 1. ἴστω δὲ τὸ Γ ἴλασσον, . . . | deest. . . . .    | concordat cum edit. Paris.      |
| 2. τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἴστω . . . | Id. . . . .       | τὰ ἴσα τῷ Γ                     |
| 3. γινίσθω . . . . .           | γίνισθω . . . . . | concordat cum edit. Paris.      |
| 4. γινίσθω . . . . .           | γινίσθω . . . . . | concordat cum edit. Paris.      |
| 5. ἂν . . . . .                | deest. . . . .    | concordat cum edit. Paris.      |
| 6. τὸ ΔΑ ἴσον ἔστι τῷ ΕΝ. . .  | Id. . . . .       | τῷ ΔΑ ἴσον ἔστι τὸ ΕΝ.          |
| 7. τὸ ΑΔ ἔστιν ἴσον τῷ ΝΑ. . . | Id. . . . .       | τῷ ΔΑ ἴσον ἔστι τὸ ΝΑ.          |
| 8. Ἰσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ . . .   | Id. . . . .       | Αλλὰ καὶ τῷ ΔΑ ἴσον ἔστι τὸ ΑΚ. |

PROPOSITIO II.

1. ὄντων . . . . . Id. . . . . ἐκκειμένων



|                    |                      |          |
|--------------------|----------------------|----------|
| 2. καὶ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ὅτος |
| 3. τὸ . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ        |
| 4. ἰστὶν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.   |

## PROPOSITIO III.

|                                                                    |                                                                |                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1. μεγέθη σύμμετρα . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                                           | σύμμετρα μεγέθη                                                            |
| 2. μέγεθος ἥτοι . . . . .                                          | μέγεθος . . . . .                                              | ἥτοι                                                                       |
| 3. οὖν . . . . .                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                           | οὖν τὸ AB τὸ ΓΔ                                                            |
| 4. τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἰστὶ,<br>καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον. | <i>Id.</i> . . . . .                                           | κοινὸν μέτρον ἰστὶ τῶν AB, ΓΔ.<br>Καὶ φανερόν ὅτι μέτρον ἰστὶ<br>μέγιστον. |
| 5. καὶ ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ<br>ἐλάσσονος . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .                                           | ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάτ-<br>τονος αἰ                                  |
| 6. ΕΔ . . . . .                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                           | ΓΔ                                                                         |
| 7. ΑΖ δὲ . . . . .                                                 | <i>Id.</i> . . . . .                                           | δὲ ΑΖ                                                                      |
| 8. τὸ ΑΖ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μετρεῖ                                      | Hæc phrasis contrac-<br>ta margini exarata<br>est manu alienâ. | concordat cum edit. Paris.                                                 |
| 9. Εστω . . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                           | μετρεῖται, καὶ                                                             |
| 10. καὶ . . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                           | deest.                                                                     |
| 11. λοιπὸν . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                           | λοιπὸν ἄρα                                                                 |
| 12. AB, ΓΔ . . . . .                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                           | AB, ΓΔ μεγέθη                                                              |

## PROPOSITIO IV.

|                                                                   |                                                                           |                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. δύο . . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                                      | deest.                                                                                       |
| 2. οὐ . . . . .                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                                      | οὐ μετρεῖ                                                                                    |
| 3. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A, B, τὸ Δ<br>ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ . . . . . | Hæc phrasis exarata<br>est litteris mino-<br>ribus in infimâ pa-<br>ginâ. | concordat cum edit. Paris.                                                                   |
| 4. τὸ Δ ἄρα . . . . .                                             | τὸ δὲ ΑΔ . . . . .                                                        | concordat cum edit. Paris.                                                                   |
| 5. A, B οὐ μετρεῖ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                                                      | A, B, Γ οὐ μετρήσι. Εἰ γὰρ δυ-<br>νατὸν, μετρεῖται τὰ A, B, Γ<br>μῖζον τοῦ Δ μεγέθους, τὸ E. |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                                                    |                                          |                            |                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                    | <i>a, e.</i>                             |                            | Καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ,<br>καὶ τὰ Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ<br>τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον<br>μετρήσει τὸ Δ, τὸ μείζον τὸ<br>ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον. <i>d, f,</i><br><i>g, h, l, m, n.</i> |
| 6. οὖν                                                                             | <i>Id.</i>                               | deest.                     |                                                                                                                                                                                                |
| 7. μετρήσει                                                                        | <i>Id.</i>                               | μετρεῖ                     |                                                                                                                                                                                                |
| 8. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ                                                      | <i>Id.</i>                               | deest.                     |                                                                                                                                                                                                |
| 9. ἰστί μέτρον.                                                                    | <i>Id.</i>                               | μέτρον ἰστί.               |                                                                                                                                                                                                |
| 10. ἄρα                                                                            | <i>Id.</i>                               | deest.                     |                                                                                                                                                                                                |
| 11. Α, Β                                                                           | <i>Id.</i>                               | Α, Β ἄρα                   |                                                                                                                                                                                                |
| 12. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοι-<br>νὸν μέτρον ἰστί τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα<br>τὸ Ε μετρεῖ, | ἰστί δὲ τὸ Ε, τὸ Ζ ἄρα τὸ<br>Ε μετρήσει, | concordat cum edit. Paris. |                                                                                                                                                                                                |
| 13. μεγέθη                                                                         | deest.                                   | concordat cum edit Paris.  |                                                                                                                                                                                                |
| 14. ἴαν                                                                            | ἴαν                                      | concordat cum edit. Paris. |                                                                                                                                                                                                |
| 15. συμμέτρων δοθέντων,                                                            | <i>Id.</i>                               | δοθέντων συμμέτρων,        |                                                                                                                                                                                                |

# COROLLARIUM.

|                      |                                 |                            |  |
|----------------------|---------------------------------|----------------------------|--|
| 16. μέτρον μετρήσει. | <i>Id.</i>                      | μετρήσει μέτρον.           |  |
| 17. προχωρήσει.      | προχωρήσει. Ὅπερ ἴδι<br>διῆξαι. | concordat cum edit. Paris. |  |

# PROPOSITIO V.

|            |            |                            |  |
|------------|------------|----------------------------|--|
| 1. ἀριθμὸν | <i>Id.</i> | deest.                     |  |
| 2. οὕτως   | deest.     | concordat cum edit. Paris. |  |

# PROPOSITIO VI.

|                        |            |                            |  |
|------------------------|------------|----------------------------|--|
| 1. ἴσται               | <i>Id.</i> | ἴσται                      |  |
| 2. τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα | <i>Id.</i> | πρὸς ἄλληλα τὰ Α, Β        |  |
| 3. τὸ αὐτὸ             | <i>Id.</i> | ταῦτὸ                      |  |
| 4. τὸ                  | ὁ          | concordat cum edit. Paris. |  |

# 450 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

linea 1. μετρεῖ δὲ ἡ μὲν τὸν Δ  
ἀριθμὸν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ  
τὸ Α. . . . .

Legere est in infimā  
paginā edit. Oxon-  
niæ: *illa in uncis  
inclusa desideran-  
tur in utroque  
codd. mss.*

concordat cum edit. Paris.

Illa non desiderantur  
in codicibus *a, d,  
e, f, g, h, l, m, n.*

5. τὸ Γ . . . . .  
6. ἀριθμὸν . . . . .  
7. τῷ Ζ . . . . .  
8. τὸν Ε. . . . .  
9. ἴστί . . . . .  
10. τὸ Α . . . . .  
11. μετρεῖ . . . . .

ὁ Γ . . . . .  
*Id.* . . . . .  
*Id.* . . . . .  
*Id.* . . . . .  
*Id.* . . . . .  
deest. . . . .  
deest. . . . .

concordat cum edit. Paris.  
deest.  
τῷ Ζ μεγέθη  
τὸν Ε ἀριθμὸν.  
deest.  
concordat cum edit. Paris.  
μὲν

## A L I T E R\*.

1. οὕτως . . . . .  
2. τὸ . . . . .  
3. οὕτως . . . . .  
4. οὕτως . . . . .  
5. τὸ . . . . .  
6. καὶ . . . . .  
7. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἵπαι  
8. ὅπρι ἴδι διζῆαι. . . . .

deest. . . . .  
τὸν . . . . .  
deest. . . . .  
deest. . . . .  
*Id.* . . . . .  
*Id.* . . . . .  
deest. . . . .  
*Id.* . . . . .

concordat cum edit. Paris.  
concordat cum edit. Paris.  
concordat cum edit. Paris.  
concordat cum edit. Paris.  
τὸν  
deest.  
concordat cum edit. Paris.  
deest.

## C O R O L L A R I U M\*\*.

1. ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν  
οὕτως ἢ εὐθεία . . . . .  
2. εὐθείας. . . . .

*Id.* . . . . .  
τὸν Ε ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν  
οὕτως τὴν εὐθείαν  
εὐθείας. ὅπρι ἴδι διζῆαι.

concordat cum edit. Paris.

\* Deest in codd. *d, e*; reperitur autem in codd. *f, g, h, l, m, n*; atque est exaratum in summā  
paginā codicis *a*.

\*\* Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

PROPOSITIO VIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                           | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἴστι . . . . .                                                                             | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσται                                                                          |
| 2. Εἰ γὰρ ἴσται σύμμετρον τὸ Α<br>πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθ-<br>μὸς πρὸς ἀριθμὸν. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἴστι τὸ Α τῷ Β,<br>λόγον ἔχει ὃν περ ἀριθμὸς πρὸς<br>ἀριθμὸν. |

PROPOSITIO IX.

|                                                         |                      |                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ὃν . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | ἐν περ                                                                                            |
| 2. ὃν . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | ὄν περ                                                                                            |
| 3. γὰρ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                            |
| 4. ὃν . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | ἐν περ                                                                                            |
| 5. πρὸς τὸν Δ, . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν,                                                                       |
| 6. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ<br>ἀριθμὸν                                                        |
| 7. ἀριθμὸν . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                            |
| 8. καὶ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                            |
| 9. τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ<br>Δ τετράγωνον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς<br>τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετρά-<br>γωνον ἀριθμὸν. Ὅπερ ἴδι διῆξαι |
| 10. τετράγωνον . . . . .                                | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                        |
| 11. τετράγωνον . . . . .                                | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                        |
| 12. τῆς Β . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς Β τετράγωνον                                                                                  |
| 13. τοῦ Δ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Δ τετράγωνον                                                                                  |
| 14. τῆς Β . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς Β τετράγωνον                                                                                  |
| 15. ἴστι . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                            |
| 16. τοῦ Γ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Γ ἀριθμοῦ                                                                                     |
| 17. τετραγώνου . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | τετραγώνου ἀριθμοῦ                                                                                |
| 18. τοῦ Δ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Δ ἀριθμοῦ                                                                                     |
| 19. τετράγωνον . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | τετράγωνον ἀριθμὸν                                                                                |
| 20. τοῦ Γ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τοῦ Γ ἀριθμοῦ                                                                                     |
| 21. λόγου . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | ἀριθμοῦ λόγον                                                                                     |
| 22. ὁ Γ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . . | ὁ Γ ἀριθμὸς                                                                                       |
| 23. τὸν Δ . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | τὸν Δ ἀριθμὸν                                                                                     |

452 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.      | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|
| 24. μήκει. . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | μήκει. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.   |
| 25. δὴ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ                         |
| 26. τῆς Β . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τῆς Β τετράγωνον           |
| 27. τετράγωνον . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 28. μήκει. . . . .       | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 29. τετράγωνον . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 30. δὴ . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ                         |
| 31. τετράγωνον . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 32. ἴσται . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστι                       |
| 33. μήκει, . . . . .     | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

A L I T E R.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ variæ partes hujus ἄλλως insertæ sunt in varias partes propositionis 9; in codicibus autem *a* et *d* hoc ἄλλως exaratum est in margine; in codicibus vero *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n* sic ordo se habet: 1° prop. 9 corollarium; 2° lemma prop. 10; 3° ἄλλως prop. 9; 4° prop. 11; 5° prop. 10.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                    | CODEX 190.                                                                                                                                                                                                                  | EDITIO OXONIÆ.             |
|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. μήκει, . . . . .                                                    | deest. . . . .                                                                                                                                                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ὁ δὲ Γ τὸν Δ . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                        | τὸν δὲ Δ                   |
| 3. οὕτως . . . . .                                                     | deest. . . . .                                                                                                                                                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ὁ δὲ Δ τὸν Γ . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                        | τὸν δὲ Γ                   |
| linea 13 ἀριθμόν. . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                        | ἀριθμόν. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι. |
| 5. μήκει. . . . .                                                      | deest. . . . .                                                                                                                                                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἴστι . . . . .                                                      | ἴστι . . . . .                                                                                                                                                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 7. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς<br>τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς<br>τὸν Η, | Legere est in infima<br>pagina editionis<br>Oxoniciæ : desiderantur<br>in codd.<br>mss.<br>Illa non desiderantur<br>in codicibus <i>a</i> , <i>e</i> ,<br><i>f</i> , <i>g</i> , <i>h</i> , <i>l</i> , <i>m</i> , <i>n</i> . | concordat cum edit. Paris. |

|                                                                       |                                                                                        |                            |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| linea 12 ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, etc. usque ad vocabulum ὅπερ. . . . . | Legere quoque est in infimâ paginâ: <i>illa uncis inclusa non agnoscunt codd. mss.</i> | concordat cum edit. Paris. |
|                                                                       | Illa agnoscunt codices <i>a, e, f, g, h, l, m, n.</i>                                  |                            |
| 8. οὕτως . . . . .                                                    | deest. . . . .                                                                         | concordat cum edit. Paris. |
| 9. οὕτως . . . . .                                                    | deest. . . . .                                                                         | concordat cum edit. Paris. |
| 10. τὸν Ζ. Ὅπερ ἴδιαι διίξαι.                                         | τὸν Ζ. . . . .                                                                         | concordat cum edit. Paris. |

C O R O L L A R I U M\*.

|                                                                                                                 |                                          |                                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. φανερόν . . . . .                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                     | φανερόν ἴστω                                                                                                               |
| 2. ἴσται . . . . .                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                     | deest.                                                                                                                     |
| 3. σύμμετροι . . . . .                                                                                          | deest. . . . .                           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 4. καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει. . . . . | deest. <i>a, d, e, f, g, h, l, m, n.</i> | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 5. γὰρ . . . . .                                                                                                | deest. . . . .                           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 6. εἰσὶ . . . . .                                                                                               | deest. . . . .                           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 7. οὖν . . . . .                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                     | deest.                                                                                                                     |
| 8. ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἴσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .                     | ἑτέρος τις ἀριθμὸς πρὸς ἑτερόν τινα ἀριθμὸν, σύμμετρά ἴσται τὰ τετράγωνα, τουτίστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει, |
| 9. τὰ μὲν μήκει σύμμετρα . . . . .                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                     | αἱ μὲν μήκει σύμμετροι                                                                                                     |
| 10. τὰ . . . . .                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                     | αἱ                                                                                                                         |
| 11. καὶ . . . . .                                                                                               | deest. . . . .                           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 12. δυνάμει. . . . .                                                                                            | deest. . . . .                           | δυνάμει ἀσύμμετροι.                                                                                                        |
| 13. Ἐπεὶ δὲ γὰρ . . . . .                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .                     | Ἐπειδὴ περ                                                                                                                 |
| 14. ἀριθμὸς . . . . .                                                                                           | τετράγωνος ἀριθμὸς . . . . .             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |

\* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

# 454 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                             |                         |                            |
|-----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 15. ἀριθμὸν, . . . . .      | τετράγωνον ἀριθμὸν, . . | concordat cum edit. Paris. |
| 16. τῷ . . . . .            | Id. . . . .             | deest.                     |
| 17. μήκει δύνανται, . . . . | Id. . . . .             | καὶ δύνανται μήκει,        |
| 18. μήκει . . . . .         | Id. . . . .             | εἰσιν                      |

## PROPOSITIO X.

|                     |                               |                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. ἴσται . . . . .  | Id. . . . .                   | ἴστιν.                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 3. ἴσται. . . . .   | Id. . . . .                   | ἴστιν.                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 4. ἀριθμόν· . . . . | Id. <i>a, d, e, h, l.</i> . . | ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, καὶ ἴσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· <i>f, g, m, n.</i> |

## PROPOSITIO XI.

|                                                                                                                                             |                            |                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                                                                                                            | τοῦ . . . . .              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                      |
| 2. τῆς . . . . .                                                                                                                            | τοῦ . . . . .              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3. τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεϋρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὲ ἡ Ε. . . . . | Id. <i>a, e, h, l.</i> . . | τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἴφαμιν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷον τῇ Α, δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτίστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγου γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ. <i>d, f, g, m, n.</i> |

## PROPOSITIO XII.

|                      |                  |                            |
|----------------------|------------------|----------------------------|
| 1. Β τῷ Γ, . . . . . | Γ τῷ Β . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ . . . . .      | ὁ . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XIII.

Hæc propositio, quæ prorsus eadem est quæ subsequens, exarata est vocabulis contractis, et alienâ manu in summâ paginâ codicis *a*, in margine vero cod. *d*, et in textu codd. *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XIV.

| EDITIO PARISIENSIS.          | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἄλλω . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ἰτέρῳ                      |
| lin. 9 paginæ 147 τὸ Β τῷ Γ, | τὸ Γ τῷ Β . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἴστι . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

LEMMA.

|                               |                      |                  |
|-------------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ὀρθή ἴστιν . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν ὀρθή       |
| 2. τῆς . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ               |
| 3. εὐθείαι δοθεῖσαι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δοθεῖσαι εὐθείαι |
| 4. Κεῖσθωσαν . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | Εκκεῖσθωσαν      |

PROPOSITIO XV.

|                    |                      |                            |
|--------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἑαυτῇ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἑαυτῇ μήκει                |
| 2. ἑαυτῇ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἑαυτῇ μήκει.               |
| 3. ἑαυτῇ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἑαυτῇ μήκει                |
| 4. ἑαυτῇ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἑαυτῇ μήκει.               |
| 5. δὴ . . . . .    | τῆς . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τῇ . . . . .    | τῆς . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 7. καὶ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 8. ἴστι . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 9. ἴστιν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 10. ἴστι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO XVI.

|                            |                      |                  |
|----------------------------|----------------------|------------------|
| 1. ἴστι σύμμετρον. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | σύμμετρόν ἴστιν, |
| 2. ΑΓ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ τὸ ΑΓ        |



# 456 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. ΑΓ ἐν τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴστω σύμ- AB, ΒΓ ἴστω σύμμετρον concordat cum edit. Paris.  
μετρον, ἴστω δὲ τῷ ΑΒ· . . τῷ ΑΒ·

## PROPOSITIO XVII.

1. Συγκείσθω . . . . . *Id.* . . . . . Συγκείσθωσαν  
2. ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, με- ἀσύμμετρον τὸ ΓΑ, ΑΓ με- concordat cum edit. Paris.  
τρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Με- τρήσει τι μέγεθος. Με-  
τρίτω, καὶ ἴστω, εἰ δυνατόν, τρίτω, εἰ δυνατόν, καὶ  
τὸ Δ. . . . . ἴστω τὸ Δ. . . . .  
3. ἴσθιν ἀδύνατον· . . . . *Id.* . . . . ἀδύνατόν ἐστιν·  
4. ἴστω, καὶ . . . . . ἴστω δὲ . . . . . concordat cum edit. Paris.  
5. ἴσται . . . . . *Id.* . . . . . ἴστι  
6. ὑπέκνιτο . . . . . *Id.* . . . . . ὑπέκνιτο  
7. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ deest. *a, d, e, f, g.* concordat cum edit. Paris.  
ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ  
ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἴσται. .

## LEMMA\*.

1. παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, . *Id.* . . . . . τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον,  
2. ΑΓ, ΓΔ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν *Id.* . . . . . ΑΓ, ΓΒ.  
ΑΓ, ΓΒ. . . . .

## PROPOSITIO XVIII.

1. παραλληλόγραμμον . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
2. μήκει· . . . . *Id.* . . . . . μήκη·  
3. μήκει. . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
4. δύνηται . . . . . *Id.* . . . . . δυνήσεται  
5. μήκει, . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
6. τετάρτῳ . . . . . *Id.* . . . . . τετάρτῳ μέρει  
7. παραλληλόγραμμον . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
8. μήκει. . . . . *Id.* . . . . . μήκη.  
9. παραλληλόγραμμον . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

\* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                                                                           |                 |                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10. μήκει. . . . .                                                                                        | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                                             |
| 11. τῇ . . . . .                                                                                          | Id. . . . .     | τῷ                                                                                                     |
| 12. τῶν . . . . .                                                                                         | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                                             |
| 13. τετραπλασίου τοῦ . . . .                                                                              | Id. . . . .     | τετράκις                                                                                               |
| 14. τετραπλασίῳ τοῦ . . . .                                                                               | Id. . . . .     | τετράκις                                                                                               |
| 15. τετραπλασίῳ τοῦ . . . .                                                                               | Id. . . . .     | τετράκις                                                                                               |
| 16. ἡ ΖΔ . . . . .                                                                                        | Id. . . . .     | ΖΔ                                                                                                     |
| 17. τετραπλασίῳ τοῦ . . . .                                                                               | Id. . . . .     | τετράκις                                                                                               |
| 18. σύμμετρος ἔστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει· . . . .                                                             | Id. . . . .     | ταῖς ΒΖ, ΓΔ ἔστι σύμμετρος μήκει·                                                                      |
| 19. μήκει. . . . .                                                                                        | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                                             |
| 20. μήκει, . . . . .                                                                                      | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                                             |
| 21. μείζον τῆς Α . . . . .                                                                                | deest. . . . .  | τῆς Α μείζον                                                                                           |
| 22. ἑαυτῇ· . . . .                                                                                        | ἑαυτῆς. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                             |
| linea 2 paginæ 159 σύμμετρος ἔστι τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρος ἔστι μήκει· καὶ διελόντι . . . . . | Id. . . . .     | τῇ ΔΓ σύμμετρος ἔστι μήκει, ἴση γάρ ἔστι ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρος ἔστι μήκει τῇ ΔΓ· δηλονότι |

PROPOSITIO XIX.

|                                 |                  |                            |
|---------------------------------|------------------|----------------------------|
| 1. μήκει· . . . .               | deest. . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 2. δύνηται . . . . .            | Id. . . . .      | δυνήσεται                  |
| 3. μήκει. . . . .               | deest. . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 4. πρότερον, . . . . .          | Id. . . . .      | προτέρω                    |
| 5. ὅτι καὶ . . . . .            | Id. . . . .      | οὖν ὅτι                    |
| 6. μήκει, . . . . .             | Id. . . . .      | deest.                     |
| linea 13 paginæ 160 ἄρα . . . . | Id. . . . .      | deest.                     |
| linea 2 paginæ 161 ἑαυτῇ. . . . | ἑαυτῆς. . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἑαυτῇ· . . . .               | ἑαυτῆς . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἡ . . . . .                  | Id. . . . .      | καὶ ἡ                      |

SCHOLIUM I\*.

|                   |             |         |
|-------------------|-------------|---------|
| 1. Ἐπεὶ . . . . . | Id. . . . . | Ἐπεὶ δὲ |
|-------------------|-------------|---------|

\* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

2. εἰςὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμεις αἱ δὲ δυνάμεις σύμμετροι concordat cum edit. Paris.  
 3. δὴ δύναται μήκει . . . . . Id. . . . . δηλαδὴ δύναται καὶ μήκει  
 4. ἐπὶ αἱ . . . . . Id. . . . . αἱ γὰρ  
 5. αὐτῇ . . . . . Id. . . . . deest.

## ΣΧΟΛΙΟΝ β'\*

## SCHOLIUM II.

Ρητὰς γὰρ καλεῖται τὰς τῇ ἐκκειμένη ρητῇ ἥτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰςὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ρηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὃ ρηταὶ, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ρηταὶ μήκει σύμμετροι, ἐπακουομένου καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰςὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οἱ δὲ αἱ ρηταὶ σύμμετροί εἰσιν,

Rationales enim vocat eas expositæ rationali vel longitudine et potentiâ commensurabiles, vel potentiâ solùm. Sunt autem et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt expositæ rationali, potentiâ vero solùm commensurabiles, et ob id rursus dicuntur rationales et commensurabiles inter se quatenus rationales, sed commensurabiles inter se, vel longitudine scilicet et potentiâ vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentiâ; si vero potentiâ solùm inter se sunt commensurabiles, dicuntur et ipsæ sic rationales potentiâ solùm commensurabiles. Quod et rationales commensurabiles sint, ex his manifestum est; quoniam

## SCHOLIE II.

Car il appelle rationnelles celles qui sont commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement avec la rationnelle exposée. Il est d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec la rationnelle exposée, lui sont commensurables en puissance seulement; et à cause de cela elles sont encore dites rationnelles et commensurables entr'elles en tant que rationnelles; mais commensurables entr'elles en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, elles sont dites rationnelles commensurables en longueur, afin que l'on entende qu'elles le sont aussi en puissance; mais si elles sont commensurables entr'elles en puissance seulement, elles sont dites rationnelles commensurables en puissance seulement. Or, il est évident que les rationnelles sont com-

\* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

ἐντεῦθεν δ᾽ ἄλλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταὶ εἰσιν αἱ τῇ ἐκ-  
κειμένη ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῇ αὐτῇ σύμ-  
μετρα καὶ ἀλλήλοις ἴστί σύμμετρα· αἱ ἄρα  
ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν<sup>3</sup>.

enim rationales sunt quæ expositæ rationali  
commensurabiles, quæ vero eidem commensu-  
rabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ  
igitur rationales commensurabiles sunt.

mesurables; car puisque les rationnelles sont commensurables avec la rationnelle  
exposée, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur  
sont commensurables entr'elles (12. 10), il s'ensuit que les rationnelles sont  
commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                        |                      |                             |
|------------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. ῥητὰς γὰρ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ῥητὰς                       |
| 2. οὕτως . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                      |
| 3. εἰσιν. . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσιν. Ὅπερ ἴδει δι᾽ ἧς αἱ. |

PROPOSITIO XX.

|                                   |                      |                            |
|-----------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. εἰρημίνων . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | προειρημίνων               |
| 2. σύμμετρος δὲ ἴστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .                  | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἴστί . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO XXI.

|                           |                      |           |
|---------------------------|----------------------|-----------|
| 1. προειρημίνων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰρημίνων |
| 2. ἄρα . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ἴστί  |

LEMMA\*.

|                                 |                                 |                            |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| 1. ἴσται . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .            | ἴσται                      |
| 2. ἴστιν . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .            | deest.                     |
| 3. ἴστιν ἡ Α. . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .            | ἡ Α ἴστιν.                 |
| 4. Ὅπερ ἴδει δι᾽ ἧς αἱ. . . . . | hæc phrasis contrac-<br>ta est. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XXII.

|                   |                      |      |
|-------------------|----------------------|------|
| 1. ἴσται· . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστω |
|-------------------|----------------------|------|

\* Non deest in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

|                  |                                                                                                                                      |                                                                                                                                                               |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. μέση. . . . . | μέση, διὰ τὸ τὴν ἴσον ἀνα-<br>γράφουσαν τετράγωνον<br>τῷ ΑΓ χωρίῳ ἢ καλεῖ<br>μίσην, μίσην ἀνάλογον<br>εἶναι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>a, d.</i> | μέση, διὰ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετρά-<br>γωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῷ<br>ΑΒ, ΒΓ, καὶ μίσην ἀνάλογον<br>αὐτὴν γίνισθαι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>e,</i><br><i>f, g, h, l, m, n.</i> |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Subsequens scholium nihil aliud est quam propositio 22 aliter demonstrata.

## ΣΧΟΛΙΟΝ\*.

## SCHOLIUM.

Μίσση ἐστὶν ἄλογος ἢ δυναμένη χωρίον περι-  
χόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Media est irrationalis quæ potest spatium con-  
tinentum sub rationalibus potentiâ solùm com-  
mensurabilibus.

Υπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων  
εὐθεϊῶν τῶν Α, Β, περιχέσθω χωρίον. Δεικτέον  
ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm com-  
mensurabilibus rectis Α, Β contineatur spatium.  
Ostendendum est irrationale esse hujusmodi  
spatium.

Α \_\_\_\_\_  
Γ \_\_\_\_\_  
Β \_\_\_\_\_

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἢ Γ·  
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ·  
ὥστε ἢ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἐστὶν ἄρα

Sumatur enim ipsarum Α, Β media propor-  
tionalis Γ; rectangulum igitur sub Α, Β æquale  
est quadrato ex Γ; quare Γ potest rectangulum

## S C H O L I E.

La médiale qui peut une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement, est irrationnelle.

Qu'une surface soit comprise sous les droites rationnelles Α, Β commensurables en puissance seulement; il faut démontrer qu'une telle surface est irrationnelle.

Car prenons une droite γ moyenne proportionnelle entre Α et Β; le rectangle sous Α, Β sera égal au quarré de γ (17. 6); la droite γ peut donc le rectangle

\* Deest in codd. *a, c, d, e, f, g, h, l, m, n*; reperitur vero in cod. *g*.

ὥς ἡ  $A$  πρὸς τὴν  $B$  οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$ , ὥς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δίδικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ  $\text{ιβ'}$  τοῦ  $\text{ε'}$  Στοιχείου. Ἀσύμμετρος δὲ ἡ  $A$  τῇ  $B$  μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$  τῷ ἀπὸ τῆς  $\Gamma$ . Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς  $A$ · ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν  $A, B$ · ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ  $\Gamma$ . Μέση δὲ ἐκλήθη, ἵτι ἄλογος οὔσα μέσον δύο ρητῶν τῶν  $A, B$  ἀνάλογόν ἐστιν.

sub  $A, B$ ; est igitur ut  $A$  ad  $B$  ita ex  $A$  quadratum ad ipsum ex  $\Gamma$ , ut enim prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ, hoc enim demonstratum est in corollario propositionis 28 sexti Elementorum. Incommensurabilis autem  $A$  ipsi  $B$  longitudine; incommensurable igitur et ex  $A$  quadratum quadrato ex  $\Gamma$ . Rationale autem quadratum ex  $A$ ; irrationalis igitur rectangulum sub  $A, B$ ; irrationalis igitur est  $\Gamma$ . Media autem vocatur, quod irrationalis existens media duarum rationalium  $A, B$  proportionalis est.

sous  $A, B$ ; la droite  $A$  est donc à  $B$  comme le quarré de  $A$  est au quarré de  $\Gamma$ ; car la première est à la troisième comme le quarré de la première est au quarré de la seconde, ainsi que cela est démontré dans le corollaire 28 du sixième livre des Éléments. Mais  $A$  est incommensurable en longueur avec  $B$ ; le quarré de  $A$  est donc incommensurable avec le quarré de  $\Gamma$  (10. 10). Mais le quarré de  $A$  est rationel; le rectangle compris sous  $A, B$  est donc irrationel; la droite  $\Gamma$  est donc irrationelle; et on l'appèle médiale, parce qu'étant irrationelle, elle est moyenne proportionnelle entre les deux rationnelles  $A, B$ .

LEMMA\*.

| EDITIO PARISIENSIS.          | CODEX 190.  | EDITIO OXONIE. |
|------------------------------|-------------|----------------|
| 1. ἴστιν . . . . .           | Id. . . . . | ἴσται          |
| 2. Οπερ ἴδει δεῖξαι. . . . . | Id. . . . . | deest.         |

PROPOSITIO XXIII.

|                             |                |                            |
|-----------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. παραβαλλόμενον . . . . . | Id. . . . .    | παριβαλλόμενον             |
| 2. ὀρθογώνιον . . . . .     | Id. . . . .    | deest.                     |
| 3. ἐστὶ . . . . .           | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστι . . . . .           | Id. . . . .    | deest.                     |
| 5. ἐστι . . . . .           | Id. . . . .    | ἴσται                      |
| 6. περιεχομένον . . . . .   | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

\* Non deest in codd.  $a, d, e, f, g, h, l, m, n$ .

## PROPOSITIO XXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἴστί . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 2. Ἡ δὲ τὸ . . . . . Id. . . . . τὸ δὲ  
 3. δυναμένη μίση ἴστί· . . . Id. . . . . εὐθεῖον περιεχόμενον ἑρθογώνιον ἄ-  
 λογόν ἴστί, καὶ ἡ δυναμένη  
 αὐτὸ ἄλογός ἴστί, καλεῖται δὲ  
 ἡ δυναμένη μίση·

## COROLLARIUM\*.

1. καὶ . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.  
 2. σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει. Id. . . . . μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι.

Subsequentia, quæ desunt in codd. *c, m, n*, reperiuntur in codd. *a, d, f, g, l*.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μίση, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μίσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μίση καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὼ μίσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μίσαι μήκει σύμμετροι, ἐπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅτι δὲ

Sunt autem rursus et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt mediæ, potentiâ vero solum commensurabiles, et dicuntur rursus mediæ, quoniam commensurabiles sunt potentiâ mediæ et commensurabiles inter se, nam mediæ aliæ commensurabiles inter se vel longitudine scilicet et potentiâ, vel potentiâ solum. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ mediæ longitudine commensurabiles, consequenter etiam et potentiâ. Si autem potentiâ solum sunt commensurabiles, dicuntur et sic mediæ potentiâ solum com-

Il est encore d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec une médiale, ne sont commensurables avec elle qu'en puissance; on les appelle encore médiales, parce qu'elles sont commensurables en puissance avec une médiale et commensurables entr'elles; car les autres médiales sont commensurables entr'elles, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, on les appelle médiales commensurables en longueur, et par conséquent en puissance; et si elles ne sont commensurables qu'en puissance, on les appelle médiales commensurables en puissance seulement. On

\* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

αἱ μῖσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως<sup>2</sup> δικτίον. Ἐπεὶ αἱ μῖσαι μίση τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μῖσαι σύμμετροί εἰσιν.

mensurabiles. Quod vero mediæ commensurabiles sint, sic ostendendum est. Quoniam mediæ mediæ cuidam commensurabiles sunt, et quæ eidem commensurabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ igitur mediæ commensurabiles sunt.

démontre ainsi que ces médiales sont commensurables. Puisque ces médiales sont commensurables avec une médiale, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles, les médiales sont commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                    |                      |        |
|--------------------|----------------------|--------|
| 1. μῖσαι . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest. |
| 2. οὕτως . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | οὕτω   |

PROPOSITIO XXV.

- |                                                  |                      |          |
|--------------------------------------------------|----------------------|----------|
| 1. κατὰ τινὰ τῶν εἰρημίνων τρώ-<br>πων . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.   |
| 2. ἐστὶ . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶ καὶ |

PROPOSITIO XXVI.

- |                                 |                      |                                          |
|---------------------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 1. εὐθειῶν . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                   |
| 2. περιεχέσθαι ὀρθογώνιον . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὀρθογώνιον περιεχέσθαι                   |
| 3. ἡ μῖσον ἐστίν. . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἡ μῖσον.                           |
| 4. ἄρα . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ἐστὶ                                 |
| 5. Καὶ ἐπεὶ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐπεὶ οὖν                                 |
| 6. Καὶ ἐστὶν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐστὶν ἄρα καὶ                            |
| 7. σύμμετρός ἐστι . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΘΝ, τευ-<br>τίστι |
| 8. ΘΜ . . . . .                 | <i>Id.</i> . . . . . | ΘΜ ἄρα                                   |
| 9. ἡ μῖσον ἐστίν. . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἡ μῖσον                            |



## PROPOSITIO XXVII.

| EDITIO PARISIENSIS.       | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|---------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἴσιν ἴσον . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσον ἴστί.                 |
| 2. παράκειται . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | παράκεινται                |
| 4. ἴστί . . . . .         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| linea 21 paginæ 179 Μίσον | <i>Id.</i> . . . . . | Οὐκ ἄρα μίσον μίσου,       |
| ἄρα μίσου, . . . . .      |                      |                            |

## PROPOSITIO XVIII.

|                                 |                      |                                                    |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------|
| 1. οὕτως . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                         |
| 2. δὴ . . . . .                 | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                         |
| 3. οὕτως . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                         |
| 4. οὕτως . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                         |
| 5. ἴστί . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                             |
| 6. σύμμετροι. Ὅπερ ἴδει διῆξαι. | <i>Id.</i> . . . . . | σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσai.<br>Ὅπερ ἴδει διῆξαι. |

## PROPOSITION XXIX.

|                                                          |                                                   |                            |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τρεῖς. . . . .                                        | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 2. οὕτως . . . . .                                       | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 3. οὕτως . . . . .                                       | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 4. αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνά-<br>μι μόνον εἰσί. . . . . | καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμι<br>εἰσὶ σύμμετροι. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. οὕτως . . . . .                                       | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 6. οὕτως . . . . .                                       | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 7. οὕτως . . . . .                                       | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 8. οὕτως . . . . .                                       | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 9. μίσον περιέχουσai. Ὅπερ ἴδει<br>ποιῆσαι. . . . .      | καὶ τὰ ἐξῆς. . . . .                              | concordat cum edit. Paris. |

## LEMMA I\*.

|                 |                      |     |
|-----------------|----------------------|-----|
| 1. δὲ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ  |
| 2. ἐκ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐπὶ |

\* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

- |                            |                |                            |
|----------------------------|----------------|----------------------------|
| 3. τοῦ . . . . .           | τῆς . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 4. Ὅτι ἐὰν διίξαι. . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

COROLLARIUM\*.

- |                           |                               |                            |
|---------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| 1. τὸν . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .          | τὴν                        |
| 2. ὧσιν ἐπίπεδοι. . . . . | <i>Id.</i> . . . . .          | ἐπίπεδοι ὧσιν.             |
| 3. ὁ . . . . .            | deest. . . . .                | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τετράγωνος. . . . .    | τετράγωνος. Ὁ ἄρα ὁ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

LEMMA II\*\*.

- |                                                                                |                                                                            |                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. κατὰ τὸ Δ . . . . .                                                         | τῷ Δ . . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 2. ὁ . . . . .                                                                 | deest. . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 3. τοῦ . . . . .                                                               | τῆς . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 4. τοῦ . . . . .                                                               | τῆς . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 5. Αφηρήσθω . . . . .                                                          | Αφηρήσθω ὁμοίως . . . . .                                                  | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 6. AB, BG τετράγωνος . . . . .                                                 | AB, BG . . . . .                                                           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 7. τοῦ . . . . .                                                               | τῆς . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 8. τοῦ . . . . .                                                               | τῆς . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 9. τοῦ . . . . .                                                               | τῆς . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 10. ἴστί . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                       | ἴσται                                                                                                                             |
| 11. τοῦ . . . . .                                                              | τῆς . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |
| 12. τοῦ ἀπὸ τοῦ BE, . . . . .                                                  | <i>Id.</i> . . . . .                                                       | deest.                                                                                                                            |
| 13. μονάς. . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                       | μονάς, μήτε ὁ ἐκ τῶν AB, BG<br>μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν<br>ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ἢ τῷ ἀπὸ<br>τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ<br>τοῦ ΓΕ. |
| 14. τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλάσιον ὁ HA. . . . . | τῆς ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς BE, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλάσιος ὁ HA. . . . . | τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἴστω διπλάσιον ὁ HA τῆς ΔΕ μονάδος.                                                                |
| 15. ὁ δὲ AH τοῦ ΔΕ ἴστί διπλάσιον . . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                                       | ὡν ὁ AH ἴστί διπλάσιον τοῦ ΔΕ.                                                                                                    |
| 16. τοῦ . . . . .                                                              | deest. . . . .                                                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                        |

\* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

\*\* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

# 466 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                             | CODEX 190.                                                                    | EDITIO OXONIE.                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 17. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 18. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 19. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 20. ἐκ τῶν . . . . .                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                          | ὑπὸ τῶν                                                                                                  |
| 21. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 22. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 23. ὁ AB ἴσος τῷ HB, . . .                                                                      | ἡ AB ἴση τῇ HB, . . .                                                         | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 24. τοῦ . . . . .                                                                               | τῆς . . . . .                                                                 | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 25. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 26. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 27. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 28. διπλασίων . . . . .                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                                          | διπλάσιος κείσθω                                                                                         |
| 29. καὶ . . . . .                                                                               | <i>Id.</i> . . . . .                                                          | deest.                                                                                                   |
| 30. διπλασίων . . . . .                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                                                          | διπλάσιος                                                                                                |
| 31. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 32. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 33. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 34. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 35. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ<br>μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἵσται τῷ<br>ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ, | <i>Id.</i> . . . . .                                                          | συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν<br>ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ<br>τῷ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ<br>ἀπὸ τοῦ ΓΖ, |
| 36. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 37. τῷ . . . . .                                                                                | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 38. αὐτῷ . . . . .                                                                              | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 39. τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ                                                                  | τῆς ΒΕ . . . . .                                                              | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 40. τοῦ . . . . .                                                                               | deest. . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris.                                                                               |
| 41. τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι,<br>ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, .                                  | τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς<br>ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσ-<br>θωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, | concordat cum edit. Paris.                                                                               |

## PROPOSITIO XXX.

|                          |                      |                            |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τὸν . . . . .         | τὴν . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τετράγωνον, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                         |                  |                            |
|-------------------------|------------------|----------------------------|
| 3. ὅν . . . . .         | deest. . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἔστιν . . . . .      | deest. . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| linea 12 μήκει. . . . . | deest. . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 6. μίζον . . . . .      | μίζονα . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ποιῆσαι. . . . .     | Id. . . . .      | δείξαι.                    |

PROPOSITIO XXXI.

|                      |                |                            |
|----------------------|----------------|----------------------------|
| 1. ἀριθμοὶ . . . . . | Id. . . . .    | deest.                     |
| 2. ὡς . . . . .      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῷ . . . . .      | τῇ . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis i lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ\*.

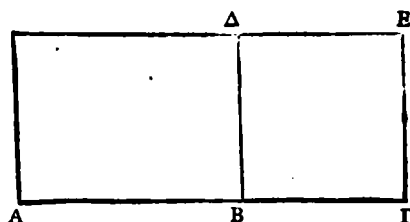
LEMMA.

Εὰν ᾗσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἴσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐπὶ τῶν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BG ἐν λόγῳ τινί· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως

Si sint duæ rectæ in ratione aliquâ, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub duabus rectis ad quadratum ex minori.

Sint igitur duæ rectæ AB, BG in ratione aliquâ; dico esse ut AB ad BG ita sub AB, BG



τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BG. Ανα-  
γεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BG τετράγωνον τὸ

rectangulum ad quadratum ex BG. Describatur  
enim ex BG quadratum BΔΕΓ, et compleatur

L E M M E.

Si l'on a deux droites dans une raison quelconque, l'une d'elles sera à l'autre comme le rectangle sous ces deux droites est au carré de la plus petite.

Soient les deux droites AB, BG dans une raison quelconque; je dis que AB est à BG comme le rectangle sous AB, BG est au carré de BG. Car décrivons sur BG

\* Deest in codd. a, d, e, h, l, m, n; reperitur autem in cod. f.

# 468 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΒΔΕΓ, καὶ συμπληρώσω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. Φανερὸν δὲ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Οπὲρ ἴδει διῆξαι.

ΑΔ parallelogrammum. Manifestum est igitur esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ parallelogrammum ad ΒΕ parallelogrammum. Atque est ΑΔ quidem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΒΕ quadratum ex ΒΓ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

le carré ΒΔΕΓ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Il est évident que ΑΒ est à ΒΓ comme le parallélogramme ΑΔ est au parallélogramme ΒΕ (1. 6). Mais le rectangle ΑΔ est compris sous ΑΒ, ΒΓ; car ΒΓ égale ΒΔ, et le parallélogramme ΒΕ est le carré de ΒΓ; donc ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au carré de ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

## PROPOSITIO XXXII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                            | CODEX 190.              | EDITIO OXONIE.                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .                                                                                               | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                                            |
| 2. τὸ . . . . .                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .    | τῷ                                                                                                    |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                                                                                                |
| 4. οὕτως . γ . . . . .                                                                                         | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                                            |
| 5. συμμετρου . . . . .                                                                                         | ἀσυμμέτρου . . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                                            |
| 6. δύναται . . . . .                                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .    | δυνήσεται                                                                                             |
| 7. συμμετρου . . . . .                                                                                         | ἀσυμμέτρου . . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                                                            |
| 8. συμμετρου ἑαυτῇ . . . .                                                                                     | ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. . . . | συμμέτρου ἑαυτῇ                                                                                       |
| 9. Οπὲρ ἴδει ποιῆσαι. . . .                                                                                    | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                                            |
| 10. Ομοίως δὲ δειχθήσονται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μείζον δύνῃται ἢ Α τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, e. | <i>Id. a.</i> . . . . . | Ομοίως δὲ δειχθήσονται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α μείζον δυνήται τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, f. |

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ\*.

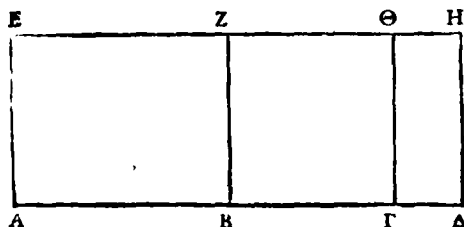
LEMMA.

Εάν ὡςι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἴσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ AB, BG, ΓΔ· λέγω ὅτι ἴσται ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ.

Si sint tres rectæ in ratione aliquâ, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum sub primâ et mediâ ad ipsum sub mediâ et minimâ.

Sint tres rectæ AB, BG, ΓΔ in ratione aliquâ; dico esse ut AB ad ΓΔ ita sub AB, BG rectangulum ad ipsum sub BG, ΓΔ.



Ἡχθω γάρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ κείσθω τῇ BG ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ E σημείου τῇ AD εὐθεῖα παράλληλος ἡχθω ἡ EH, διὰ δὲ τῶν B, Γ, Δ σημείων τῇ AE παράλληλοι ἡχθωσαν αἱ ZB, ΘΓ, ΗΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσται ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ AZ

Ducatur enim a puncto A ipsi AB ad rectos angulos AE, et ponatur ipsi BG æqualis AE, et per punctum E ipsi AD recta parallela ducatur EH, sed per puncta B, Γ, Δ ipsi AE parallelae ducantur ZB, ΘΓ, ΗΔ. Et quoniam est ut AB ad BG ita AZ parallelogrammum ad BΘ pa-

LEMMA.

Si l'on a trois droites dans une raison quelconque, la première sera à la troisième comme le rectangle sous la première et la moyenne est au rectangle sous la moyenne et la plus petite.

Soient les trois droites AB, BG, ΓΔ dans une raison quelconque; je dis que AB est à ΓΔ comme le rectangle sous AB, BG est au rectangle sous BG, ΓΔ.

Car du point A menons la droite AE perpendiculaire à AB; faisons AE égal à BG; par le point E menons la droite EH parallèle à AD, et par les points B, Γ, Δ menons ZB, ΘΓ, ΗΔ parallèles à AE. Puisque AB est à BG comme le parallé-

\*\* Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. c, f, l.

470 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παρλληλό-  
 γραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ  
 ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· δίδου ἄρα ὅς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν  
 ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ  
 ΓΗ παρλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ  
 τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ,  
 τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ  
 τῇ ΓΘ.

Εὰν ἄρα τρεῖς ᾖσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

rallelogrammum, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita ΒΘ  
 ad ΓΗ; ex æquo igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΖ  
 parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΗ.  
 Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ,  
 æqualis enim ΑΕ ipsi ΒΓ, rectangulum vero ΓΗ  
 sub ΒΓ, ΓΔ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΓΘ.

Si igitur tres sint, etc.

gramme ΑΖ est au parallélogramme ΒΘ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme ΒΘ est à ΓΗ  
 (1. 6); par égalité, ΑΒ sera à ΓΔ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélo-  
 gramme ΓΗ. Mais ΑΖ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; car ΑΕ égale ΒΓ, et ΓΗ est le  
 rectangle sous ΒΓ, ΓΔ; car ΒΓ égale ΓΘ. Donc, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                    | CODEX 190. | EDITIO OXONIE.                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ<br>Α, Β, Γ.                                                                              | <i>Id.</i> | αἱ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμ-<br>μετροι,                                                                                   |
| 2. τῆς Δ.                                                                                                              | <i>Id.</i> | τῆς Δ, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β.                                                                                           |
| 3. ἴσον.                                                                                                               | <i>Id.</i> | ἴσον ἴστί                                                                                                                  |
| 4. ὧς δὲ.                                                                                                              | <i>Id.</i> | ἀλλ' ὡς                                                                                                                    |
| 5. μόνον.                                                                                                              | deest.     | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 6. οὕτως.                                                                                                              | deest.     | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 7. τὸ.                                                                                                                 | τῷ         | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 8. τῷ.                                                                                                                 | <i>Id.</i> | τὸ                                                                                                                         |
| 9. τὸ.                                                                                                                 | τῷ         | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 10. αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνά-<br>μει μόνον σύμμετροι.                                                               | <i>Id.</i> | deest.                                                                                                                     |
| 11. τὴν μείζονα.                                                                                                       | <i>Id.</i> | deest.                                                                                                                     |
| 12. Ὅπερ ἔδει ποιῆται.                                                                                                 | deest.     | concordat cum edit. Paris.                                                                                                 |
| 13. Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται<br>καὶ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου, ὅταν<br>ἡ Α τῆς Γ μείζον δύνῃται τῷ<br>ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. | <i>Id.</i> | Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ<br>τὸ ἀπὸ ἀσύμμετρου, ὅταν ἡ<br>Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μείζον δύνῃται<br>τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. |

ΛΗΜΜΑ\*.

LEMMA.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                 |                          |                            |
|---------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. ὑπὸ ΒΑΓ ῥωνίαν, καὶ ἥχθω .   | ὑπὸ Α ῥωνίαν, καὶ ἥχθω   | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ ἴτι τὸ . . . . .         | Id. . . . .              | τὸ δὲ                      |
| 3. ἴσον ἰστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· | ἴσον ἰστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ· | ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·    |
| 4. τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἰστὶ . . .   | ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἰστὶ . . .   | τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον            |
| 5. Καὶ ὅτι . . . . .            | Η καὶ ὅτι . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τῶν . . . . .                | deest. . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 7. Οὔτε ἴδι διῆξαι . . . . .    | deest. . . . .           | concordat cum edit. Paris. |

ΛΗΜΜΑ β\*\*.

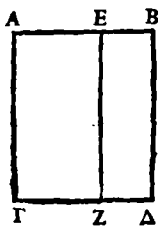
LEMMA II.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἴσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λήγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Si recta linea secetur in partes inæquales, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub totâ et majori ad rectangulum sub totâ et minori.

Recta enim aliqua AB secetur in partes inæquales ad E; dico ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὑποτίρα τῶν

Describatur enim ex AB quadratum ΑΓΔΒ, et per punctum E alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΒ

LEMMA III.

Si une ligne droite est partagée en deux parties inégales, une partie sera à une partie comme le rectangle compris sous la droite entière et la plus grande partie est au rectangle compris sous la droite entière et sous la plus petite.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties inégales en E; je dis que AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE.

Car décrivons avec AB le carré ΑΓΔΒ, et par le point E menons la droite EZ

\* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

\*\* Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. f, g, l.



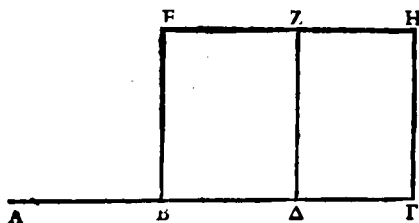
472 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἢ χθω ἢ ΕΖ. Φανερόν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμα πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ γ'\*

Εάν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἀνίσωκ, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισίας τῆς ἐλαχίστης.

Εστώσαν δύο εὐθεῖαι ἀνίσωι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ᾧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τιτμήσθω ἡ ΒΓ δίχα



κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιον ἔστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.

parallela ducatur EZ. Evidens est igitur ut AE ad EB ita AZ parallelogrammum ad parallelogrammum ZB. Atque est quidem AZ rectangulum sub BA, AE, æqualis enim AG ipsi AB, rectangulum vero ZB sub AB, BE, æqualis enim AB ipsi AB; ut igitur AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE. Quod oportebat ostendere.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, secetur autem minima ipsarum in partes æquales; rectangulum sub duabus rectis duplum erit rectanguli sub majori et dimidiâ minimæ.

Sint duæ rectæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major sit ΑΒ, et secetur ΒΓ bifariam in Δ;

dico rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ duplum esse rectanguli sub ΑΒ, ΒΔ.

parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΒ. Il est évident que AE sera à EB comme le parallélogramme AZ est au parallélogramme ZB (1.6). Mais AZ est le rectangle sous BA, AE; car ΑΓ égale ΑΒ, et ΖΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΕ, car ΔΒ est égal à ΑΒ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΕ. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMMA III.

Si deux droites sont inégales, et si la plus petite est coupée en deux parties égales, le rectangle compris sous ces deux droites sera double du rectangle compris sous la plus grande et la moitié de la plus petite.

Soient les deux droites inégales ΑΒ, ΒΓ; que ΑΒ soit la plus grande; coupons ΒΓ en deux parties égales au point Δ; je dis que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΒΔ.

\* Decet in codd. a, d, e, f, h, l, m, n; reperitur autem in codd. g, l.

Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. Καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίον· διπλασίον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. Οπερ εἶδει δέξαι.

Ducatur enim a puncto B ipsi BG ad rectos angulos ipsa BE, et ponatur ipsi BA æqualis BE, et describatur figura. Quoniam igitur est ut AB ad AG ita BZ ad AH, componendo igitur ut BF ad AG ita BH ad AH. Atque est BF ipsius AG dupla; duplum igitur est et BH ipsius AH. Atque est quidem BH rectangulum sub AB, BG, æqualis enim AB ipsi BE, rectangulum vero AH est ipsum sub AB, BD, æqualis enim quidem ipsi BD ipsa AG, ipsi vero AB ipsa AZ. Quod oportebat ostendere.

Lemma subsequens in codice 190 locum tenet lemmatis secundi edit. Oxoniæ.

Λ Η Μ Μ Α.

L E M M A.

Εάν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἴσαι ὡς ἡ μία πρὸς τὴν ἑτέραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφίτερας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ τῆς ἑτέρας.

Si sint duæ rectæ, erit ut una ad alteram ita rectangulum sub utrâque et unâ ipsarum ad rectangulum sub utrâque et alterâ.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Sint duæ rectæ AB, BG; dico esse ut AB ad BG ita sub AG, AB rectangulum ad ipsum sub AG, GB.

Du point B menons BE à angles droits à BG; faisons BE égal à BA, et décrivons la figure. Puisque AB est à AG comme BZ est à AH (1. 6); par addition, BF sera à AG comme BH est à AH. Mais BF est double de AG; donc BH est double de AH. Mais BH est le rectangle sous AB, BG, car la droite AB est égale à BE; et AH est le rectangle sous AB, BD, car AG est égal à BD, et AZ à AB. Ce qu'il fallait démontrer.

L E M M E.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le rectangle compris sous leur somme et sous l'une de ces droites est au rectangle compris sous la somme de ces droites et sous l'autre droite.

Soient les deux droites AB, BG; je dis que AB est à BG comme le rectangle compris sous AG, AB est au rectangle compris sous AG, GB.

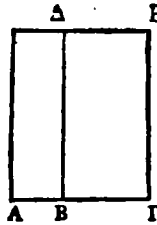
474 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ῥηθὰς ἴση τῇ ΑΓ ἡ ΒΔ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ

Ducatur enim a puncto B ad rectos angulos æqualis ipsi ΑΓ ipsa ΒΔ, et compleatur ΑΕ parallelogrammum.

Quoniam enim est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΓ; atque est quidem rectangulum ΑΔ ipsum sub ΒΔ,



ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΒ, τοῦτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ, ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΒ, τοῦτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Οπερ ἴδιαι διῴξαι.

ΑΒ, hoc est rectangulum sub ΓΑ, ΑΒ, æqualis enim supponitur ΒΔ ipsi ΓΑ; est autem rectangulum ΑΓ ipsum sub ΒΔ, ΓΒ, hoc est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΓΑ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

Car du point B menons à angles droits la droite ΒΔ égale à ΑΓ, et achevons le parallélogramme ΑΕ.

Car puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΔΓ (1. 6), que ΑΔ est le rectangle sous ΒΔ, ΑΒ, c'est-à-dire sous ΓΑ, ΑΒ, car ΒΔ est supposé égal à ΓΑ, et que ΔΓ est le rectangle sous ΒΔ, ΓΒ, c'est-à-dire sous ΑΓ, ΓΒ; la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΓΑ, ΑΒ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODĒX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                              |                |                            |
|------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. τῆς . . . . .             | Id. . . . .    | τῇ                         |
| 2. ἀπὸ . . . . .             | Id. . . . .    | ἀπὸ ἐλάσσονος              |
| 3. ἐπὶ . . . . .             | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῶν . . . . .             | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. σύμμετρόν ἐστι τῇ . . . . | Id. . . . .    | διπλάσιόν ἐστι τοῦ         |

PROPOSITIO XXXV.

| EDITIO PARISIENSIS.                                      | CODEX 190.                                      | EDITIO OKONIE.                                      |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. τοῦ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . .                            | τῆς                                                 |
| 2. τῆς ΔΒ. . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                            | τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμεις<br>εἰσὶν ἀσύμμετροι. |
| 3. διπλῇ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .                            | διπλασίῳ                                            |
| 4. ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. . . . .                               | <i>Id.</i> . . . . .                            | ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμ-<br>μετρον.            |
| 5. τῶν ΑΒ, ΒΓ· . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                            | τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκειται γὰρ<br>οὕτως·                 |
| 6. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον<br>τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· . . . | τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ<br>ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· | concordat cum edit. Paris.                          |
| 7. μὲν . . . . .                                         | deest. . . . .                                  | concordat cum edit. Paris.                          |

PROPOSITIO XXXVI.

|                                                 |                      |                                      |
|-------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . . | τῇ                                   |
| 2. τοῖς ἐπάνω ὁμοίως . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . . | ὁμοίως τοῖς ἐπάνω                    |
| 3. ἴστιν . . . . .                              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.           |
| 4. τῶν ἀπὸ . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                               |
| 5. ἴσον ἴστι . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν ἴσον                           |
| 6. ἴστιν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· . . . .                    | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ ΔΖ τῇ ΒΕ·                          |
| 7. μείσον ἄρα . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . . | μείσον, μείσον                       |
| 8. ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ<br>τῶν ΑΔ, ΔΒ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τῶν<br>ΑΔ, ΔΒ. |
| 9. αἱ ΑΔ, ΔΒ . . . . .                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                               |
| 10. τιτραγώνων . . . . .                        | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.           |

PROPOSITIO XXXVII.

|                                                                                                                                 |                      |                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 1. καλεῖσθαι . . . . .                                                                                                          | καλεῖται             | concordat cum edit. Paris.                                           |
| 2. ὅλη . . . . .                                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                               |
| 3. αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι<br>δυνάμεις μόνον σύμμετροι· ἀσύμ-<br>μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν<br>ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς<br>ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν<br>ἐστι, |

# 476 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. ἴστί . . . . . *Id.* . . . . . deest. *d, f, l.*  
 5. ὀνομάτων. . . . . ὀνομάτων. Εκάλεισι δὲ  
 αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομά-  
 των, διὰ τὸ ἐκ δύο  
 ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισ-  
 θαι, κύριον ὄνομα κα-  
 λῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ  
 ῥητόν. Οπερ ἴδει διῆξαι.  
*a, e, g, h, m, n.*

## PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἄρα . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 2. καὶ συνθίντι . . . . . *Id.* . . . . . συνθίντι ἄρα  
 3. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, *Id.* . . . . . ὑπόκεινται δὲ ῥητὸν περιέχουσai  
 ὑπόκεινται γὰρ αἱ AB, BΓ ῥη-  
 τὸν περιέχουσai. . . . .  
 4. πρώτη. . . . . πρώτη. Εκάλεισι δὲ αὐτὴν concordat cum edit. Paris.  
 ἐκ δύο μίσων πρώτων, *d, f, l.*  
 διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν  
 καὶ προτιρεῖν τὸ ῥητόν.  
 Οπερ ἴδει διῆξαι. *a,*  
*e, g, h, m, n.*

## PROPOSITIO XXXIX.

1. γάρ . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 2. τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ παρὰ *Id.* . . . . . παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ  
 τὴν ΔΕ . . . . .  
 3. ἴστί . . . . . *Id.* . . . . . deest.  
 4. παράκεινται . . . . . *Id.* . . . . . παράκεινται  
 5. ἐπεὶ οὖν . . . . . *Id.* . . . . . καὶ ἐπεὶ  
 6. τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ . . . . . *Id.* . . . . . τῷ ἀπὸ τῆς AB τὸ  
 7. ἀσύμμετρος ἴστί μήκει. Εδείχ- ἴστὶν ἀσύμμετρος μήκει concordat cum edit. Paris.  
 θησαν δὲ ῥηταί. . . . .  
 8. χωρίον· καὶ . . . . . deest. . . . . χωρίον· ὅστι καὶ  
 9. αὐτὸ . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 40 adest in *b* subsequens scholium, quod Euclidis esse minime potest.

ΣΧΟΛΙΟΝ\*.

SCHOLIUM.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ μίσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, διευτερεύειν δὲ τὸ μίσον τοῦ ῥητοῦ. Οτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἀλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γὰρ ἐστὶ ῥητὸν καὶ παραβέβηται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἀλογος, ὅπερ ἀτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἀλογόν ἐστιν<sup>3</sup>.

Vocavit autem illam ex binis mediis secundam, quoniam medium et non rationale continetur sub ipsis, posterius est vero medium rationali. Quod autem sub rationali et irrationali continetur irrationale esse, manifestum est. Si enim sit rationale et applicetur ad rationalem, esset et alterum ipsius latus rationale. Sed et irrationale, quod absurdum; spatium igitur sub rationali et irrationali irrationale est.

SCHOLIE.

Il l'appelle seconde de deux médiales, parce que la surface comprise sous AB, BG est médiale et non rationelle, car la surface médiale est après la rationelle. Et il est évident que la surface comprise sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle; car si elle était rationelle, et qu'elle fût appliquée à une droite rationelle, l'autre côté serait rationel. Mais il est irrationel, ce qui est absurde; donc une surface sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                   |                           |                            |
|-------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. τὸ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . .      | τὸ τὸ                      |
| 2. ἐστὶ . . . . . | ἔσται . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστίν. . . . . | ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι. | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XL.

|                    |                      |                                                        |
|--------------------|----------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. ἄρα . . . . .   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                             |
| 2. AB, BG. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | AB, BG. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG. |

\* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

Post propositionem 40 adest in *b* scholium subsequens, quod quidem Euclidis non est.

## ΣΧΟΛΙΟΝ\*.

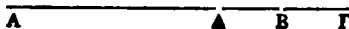
## SCHOLIUM.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* μίσου<sup>1</sup>, καὶ διὸν εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκείότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεισθαι. Ὅτι δὲ καὶ<sup>2</sup> μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* τοῦ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*, οὕτως δεικνύον.

Φανερόν μιν οὖν ὅτι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ *AB*, *BF*. Εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα αὖ ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

Vocavit autem ipsam majorem, quia quadrata ex *AB*, *BF* rationalia majora sunt rectangulo medio bis sub *AB*, *BF*, et oportet ex rationalium proprietate nomen imponere. At vero majora esse quadrata ex *AB*, *BF* rectangulo bis sub *AB*, *BF*, sic demonstrābimus.

Evidens est quidem inæquales esse *AB*, *BF*. Si enim sint æquales, æqualia erunt et quadrata



*AB*, *BF* τῷ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*, καὶ ἦν αὖ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* ῥητὸν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἀνισοὶ ἄρα εἰσιν αἱ *AB*, *BF*. Ὑποκείσθω μείζων ἢ *AB*, καὶ κείσθω τῇ *BF* ἴση ἢ *BD*. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *AB*, *BD* ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BD* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς<sup>3</sup> *AD*. Ἰση δὲ ἡ *ΔB* τῇ *BF*. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *AB*, *BF*

ex *AB*, *BF* rectangulo bis sub *AB*, *BF*, et erit rectangulum sub *AB*, *BF* rationale, quod non supponitur; inæquales igitur sunt *AB*, *BF*. Supponatur major *AB*, et ponatur ipsi *BF* æqualis *BD*; quadrata igitur ex *AB*, *BD* æqualia sunt et rectangulo bis sub *AB*, *BD* et quadrato ex *AD*. Æqualis autem *ΔB* ipsi *BF*; qua-

## S C H O L I E.

Il l'appelle majeure, parce que la somme des quarrés des rationnelles *AB*, *BF* est plus grande que le rectangle médial qui est le double rectangle sous *AB*, *BF*, et qu'il fallait choisir un nom d'après la propriété des rationnelles. Nous démontrons ainsi que la somme des quarrés de *AB* et de *BF* est plus grande que le double rectangle sous *AB*, *BF*.

Car il est évident que les droites *AB*, *BF* sont inégales. Car si elles étaient égales, la somme des quarrés de *AB* et de *BF* serait égale au double rectangle sous *AB*, *BF*, et le rectangle sous *AB*, *BF* serait rationel, ce qui n'est point supposé; donc les droites *AB*, *BF* sont inégales. Supposons que *AB* est la plus grande, et faisons *BD* égal à *BF*; la somme des quarrés de *AB* et de *BD* sera égale au double rectangle sous *AB*, *BD*, et au quarré de *AD* (7.2). Mais *ΔB* est égal à *BF*; donc

\* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

ἴσα ἴστί τῶν τε δῖς ὑπὸ τῶν AB, BΓ καὶ τῶν  
ἀπὸ τῆς AΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ μείζονα  
ἴστί τοῦ δῖς ὑπὸ τῶν AB, BΓ τῶν ἀπὸ τῆς AΔ.  
Οπιρ ἴδι διῆξαι.

drata igitur ex AB, BΓ æqualia sunt et rectangulo  
bis sub AB, BΓ et quadrato ex AΔ; quare qua-  
drata ex AB, BΓ majora sunt quam rectan-  
gulum bis sub AB, BΓ quadrato ex AΔ. Quod  
oportebat ostendere.

la somme des quarrés de AB et de BΓ est égale au double rectangle sous AB, BΓ  
et au quarré de AΔ, donc la somme des quarrés de AB et de BΓ surpasse le  
double rectangle sous AB, BΓ du quarré de AΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                    |                 |                            |
|--------------------|-----------------|----------------------------|
| 1. μέσον . . . . . | μίσων . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .   | Id. . . . .     | deest.                     |
| 3. τῆς . . . . .   | Id. . . . .     | deest.                     |
| 4. ἴστι . . . . .  | εἶναι . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τῆς . . . . .   | deest. . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XLI.

|                       |                    |                            |
|-----------------------|--------------------|----------------------------|
| 1. καλίσθω . . . . .  | καλιῖται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. συνθίντι . . . . . | deest. . . . .     | concordat cum edit. Paris. |

Post propositionem 41 adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Eu-  
clidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ\*.

SCHOLIUM.

Ρητὴν δὲ καὶ μέσον δυναμίνην αὐτὴν ἐκά-  
λει<sup>1</sup>, διὰ τὸ θυνάσθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ρητὸν,  
τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ρητοῦ πρὸς παρξίν,  
πρῶτον τὸ ρητὸν<sup>3</sup> ἐκάλεισεν<sup>4</sup>.

Rationale autem et medium potentem ipsam  
vocavit, quia potest bina spatia, unum quidem  
rationale, alterum vero medium; et quoniam  
ipsius rationalis prius mentionem fecit, primum  
rationale vocavit.

SCHOLIE.

Il l'appèle celle dont la puissance est rationnelle et médiale, parce que sa  
puissance renferme deux surfaces, l'une rationnelle, et l'autre médiale; et à cause  
que la surface rationnelle est avant la rationnelle, il parle d'abord de la rationnelle.

\* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.



# 480 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.         | CODEX 190.                | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. αὐτὴν ἐκάλισι, . . . . . | καλεῖται αὐτὴ . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ ῥητὸν . . . . .       | deest. . . . .            | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐκάλισιν. . . . .        | ἐκάλισιν. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι. | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XLII.

|                                |                     |                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. τετραγώνων . . . . .        | τετραγώνῳ . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                          |
| 2. τὰ προκείμενα . . . . .     | Id. . . . .         | τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν AB, BG<br>μίσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG<br>μίσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ<br>συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν<br>AB, BG τετραγώνων. |
| 3. ἴστιν . . . . .             | Id. . . . .         | deest.                                                                                                                                              |
| 4. ἀσύμμετρά ἴστι τὰ . . . . . | Id. . . . .         | ἀσύμμετρόν ἴστι τὸ                                                                                                                                  |
| 5. ἄρα . . . . .               | Id. . . . .         | deest.                                                                                                                                              |

Post propositionem 42 adsunt in *b* duo scholia subsequencia, quæ quidem Euclidis non unt.

### ΣΧΟΛΙΟΝ α\*.

. Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ  
δυνάσθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό, τε συ-  
κείμενον<sup>1</sup> ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG, καὶ τὸ<sup>2</sup> δις  
ὑπὸ τῶν AB, BG<sup>3</sup>.

### SCHOLIUM I.

Vocat autem ipsam bina media potentem,  
quia potest bina media spatia, et compositum ex  
ipsarum AB, BG quadratis, et rectangulum bis  
sub AB, BG.

### SCHOLIE I.

Il l'appèle celle dont la puissance est une double médiale, parce que sa  
puissance égale deux surfaces médiales; savoir, la somme des quarrés de AB  
et de BG, et le double rectangle sous AB, BG.

| EDITIO PARISIENSIS.             | CODEX 190.                  | EDITIO OXONIE.             |
|---------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1. τό, τε συγκείμενον . . . . . | τά, τε συγκείμενα . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὸ . . . . .                 | τοῦ . . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 3. AB, BG. . . . .              | AB, BG. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι.     | concordat cum edit. Paris. |

\* Deest in cod. *d*; reperitur autem in codd. *a, e, f, g, h, m, n.*

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.

SCHOLIUM II.

ΟΤΙ ΔΕ ΑΙ ΕΙΡΗΜΕΝΑΙ ἄλγοι μοναχῶς δια-  
ροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἡς ὧν σύγκεινται, ποιου-  
σῶν τὰ προκείμενα εἶδη, δείξομεν ἤδη, προεκ-  
θίμενοι λεμμάτιον τοιοῦτον.

At vero dictas irracionales uno tantum modo  
dividi in rectas ex quibus componuntur, et quæ  
faciunt propositas species, mox ostendemus,  
si prius exposuerimus quoddam lemma hujus-  
modi.

SCHOLIE II.

Après avoir exposé le lemme suivant, nous démontrerons que les irratio-  
nelles dont nous avons parlé ne peuvent se diviser que d'une seule manière dans  
les droites qui les composent, et qui constituent les espèces proposées.

LEMMA\*\*.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                   | CODEx 190.     | EDITIO OXONIÆ.                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1. ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, καὶ ὑπο-<br>κείσθω . . . . .                                     | deest. . . . . | ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ                                                    |
| 2. καὶ . . . . .                                                                      | Id. . . . .    | deest.                                                                            |
| 3. ἴσθιν . . . . .                                                                    | Id. . . . .    | deest.                                                                            |
| 4. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ<br>μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον<br>τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ* . . . . . | Id. . . . .    | ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ<br>μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἴσθι<br>τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ* |
| 5. ΑΔ, ΔΒ. Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.                                                         | Id. . . . .    | ΑΔ, ΔΒ, εἴπερ συναμφοτέρα ἴσα<br>ἴσθι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.                              |

PROPOSITIO XLIII.

|                                             |                         |                            |
|---------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. ΑΓ . . . . .                             | Id. . . . .             | ΑΒ                         |
| 2. τμήμα κατὰ τὸ Γ . . . . .                | Id. . . . .             | τῇ κατὰ τὸ Δ               |
| 3. τῆς διχοτομίας . . . . .                 | τοῦ διχοτόμου . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῶν . . . . .                            | Id. . . . .             | τοῦ                        |
| 5. ὄντα, ὅπερ ἄτερον μίσην<br>γάρ . . . . . | Id. . . . .             | ὄντα μίσην δὲ              |

\* Reperitur in codd. a, e, f, g, h, l, m, n; deest autem in cod. d.

\*\* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

## PROPOSITIO XLIV.

| EDITIO PARISIENSIS.    | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. διαιρεῖται. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. |
| 2. Ἐστω . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐστω δὲ                    |

## PROPOSITIO XLV.

|                                |                         |                            |
|--------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. διαιρεῖται. . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .    | διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. |
| 2. τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ   | τῆς διχοτομίας, ὅτι . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 4. ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ     | <i>Id.</i> . . . . .    | ΑΓ, ΓΒ μίξονα τῶν ἀπὸ τῶν  |
| τῶν ΑΓ, ΓΒ, . . . . .          |                         | ΑΔ, ΔΒ,                    |
| 5. Καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 6. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 7. ἴστί . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 8. καὶ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 9. ἴστί . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 10. ἄρα . . . . .              | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 11. ἐπειδήπερ . . . . .        | ὅτι . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XLVI.

|                                                         |                      |                                          |
|---------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------|
| 1. διαιρεῖται. . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . . | διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.               |
| 2. καὶ . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                   |
| 5. τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερ-<br>ἔχει ῥητῶ, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ῥητῶ ὑπερέχει τοῦ δις ὑπὸ τῶν<br>ΑΓ, ΓΒ, |
| linea 9 μόνον διαιρεῖται. . .                           | deest. . . . .       | ἄρα διαιρεῖται μόνον.                    |

## PROPOSITIO XLVII.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. διαιρεῖται. . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. |
| 2. τὸ δὲ δις . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ δ'                      |
| 3. τὸ δὲ δις . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ δ'                      |
| linea 12 τὰ . . . . .       | τὸ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ὑπερέχει ῥητῶ, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ῥητῶ ὑπερέχουσι,           |

PROPOSITIO XLVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

COD. 190.

EDITIO OXONIE.

- |                              |                      |                            |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. διαιρεῖται . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. |
| 2. δύο μίσα δυναμένη . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῶν . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

DEFINITIONES SECUNDÆ.

- |                        |                     |                            |
|------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. ἐλάσσονος . . . . . | vocabulum ἐλάσσονος | concordat cum edit. Paris. |
|                        | contractum est, et  |                            |
|                        | inter lineas manu   |                            |
|                        | recenti exaratum.   |                            |

Has post definitiones adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ\*.

SCHOLIUM.

Ἐξ οὖν οὐτῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμετρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

Sex igitur rectis existentibus ita sumptis, facit primas ordine tres, in quibus major quam minor plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili; secundas autem ordine reliquas tres, in quibus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili, propterea quod prius est commensurabile incommensurabili; et adhuc primam quidem, in qua majus nomen

SCHOLIE.

Six droites étant prises ainsi, il (Euclide) fait une classe de trois droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande; il fait ensuite une classe de trois autres droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande, parce que le commensurable est avant l'incommensurable. La première classe est celle dont le plus grand nom est commensurable avec la rationnelle exposée; la seconde

\* Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, m, n*; deest autem in cod. *l*.

# 484 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ρητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ  
 πάλιν προτερεῖν τὸ μείζον τοῦ ἑλάττοτος τῷ  
 ἐμπεριέχειν τὸ ἔλαττον· τρίτην δὲ, ἐφ' ᾧ μὴ  
 δεύτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἔστι τῇ ἐκκει-  
 μένῃ ρητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τριῶν ὁμοίως,  
 τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξιως  
 τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην,  
 καὶ τὴν τρίτην ἑκτην.

commensurable est expositæ rationali; secun-  
 dam vero, in quâ minus, propterea quod  
 rursus majus antecedit minus, cùm contingat  
 minus; tertiam autem, in quâ neutrum nomi-  
 num est commensurable expositæ rationali; et  
 deinceps in tribus similiter, primam dictæ se-  
 cundi ordinis quartam appellans, et secundam  
 quintam, et tertiam sextam.

classe, est celle dont le plus petit nom est commensurable avec la rationnelle ex-  
 posée, parce que le plus grand précède le plus petit, puisque le plus grand  
 contient le plus petit; la troisième classe enfin, est celle où aucun des noms  
 n'est commensurable avec la rationnelle exposée. Il fait de la même manière  
 une classe des trois autres droites, appelant la première la quatrième de la  
 seconde classe, la seconde la cinquième, et la troisième la sixième.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                             |                          |                            |
|-----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. δύναται . . . . .        | deest. . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἔστι σύμμετρον . . . . . | σύμμετρόν ἐστι . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XLIX.

- |                  |             |        |
|------------------|-------------|--------|
| 1. μὲν . . . . . | Id. . . . . | deest. |
| 2. καὶ . . . . . | Id. . . . . | deest. |

## PROPOSITIO L.

- |                                                  |                                                 |                            |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἄρα . . . . .                                 | deest. . . . .                                  | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἄρα καὶ . . . . .                             | ἄρα τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ<br>σύμμετρόν ἐστι . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 3. σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ<br>ρητῇ . . . . . | τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ σύμ-<br>μετρόν ἐστι . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LI.

- |                                 |             |                    |
|---------------------------------|-------------|--------------------|
| linea 11 τετράγωνος ἀριθμός .   | Id. . . . . | ἀριθμός τετράγωνος |
| 2. Καὶ ἐστι ρητὴ ἡ Ε' . . . . . | Id. . . . . | Ρητὴ δὲ ἡ Ε'       |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς *Id.* . . . . . ἀσύμμετρος ἄρα  
τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν  
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-  
τράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος  
ἄρα ἴστιν . . . . .
4. ἴστιν . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.
5. ἴστιν . . . . . *Id.* . . . . . deest.

PROPOSITIO LII.

1. τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μῦτι *Id.* . . . . . ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν  
μὴν πρὸς τὸν ΑΓ . . . . .
2. καὶ . . . . . *Id.* . . . . . deest.
3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ *Id.* . . . . . deest.  
ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τε-  
τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-  
γωνον ἀριθμόν· . . . . .
4. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς . . . . . τὸ ἀπὸ . . . . . concordat cum edit. Paris.
5. τετράγωνος ἀριθμὸς . . . . . *Id.* . . . . . ἀριθμὸς τετράγωνος
6. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς *Id.* . . . . . deest.  
τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν  
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-  
τράγωνον ἀριθμόν· . . . . .
7. ἴστιν . . . . . *Id.* . . . . . deest.

PROPOSITIO LIII.

1. ῥητὴ τις εὐθεῖα . . . . . *Id.* . . . . . τις εὐθεῖα ῥητὴ
2. μήκει . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ ἄρα ἴστί καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ Ο δὲ . . . . . concordat cum edit. Paris.  
ἐπὶ ὃ . . . . .
4. ἄρα . . . . . *Id.* . . . . . deest.
5. ἄρα . . . . . deest. . . . . concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα . . . . . vocabulum ἄρα, diffi- concordat cum edit. Paris.  
cile lectu, inter li-  
neas manu recenti  
exaratum est.
7. τῇ . . . . . *Id.* . . . . . τῇ

## PROPOSITIO LIV.

| EDITIO PARISIENSIS.                                        | CODEX 190.            | EDITIO ὈΧΟΝΙΑ.                            |
|------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|
| 1. μήτε . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . .  | μήτε                                      |
| 2. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ<br>τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. . . . | <i>Id.</i> . . . . .  | σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ<br>δυνάμει. |
| 3. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ῥη-<br>τὸν ἄρα καὶ . . . . .     | ῥητὸν ἄρα καὶ . . . . | concordat cum edit. Paris.                |
| 4. ἄρα . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                                    |
| linea 9 ΗΘ . . . . .                                       | <i>Id.</i> . . . . .  | κΘ                                        |
| 5. τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς . . .                                | ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΗΘ . . .   | concordat cum edit. Paris.                |
| 6. τῆς . . . . .                                           | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris.                |
| 7. τῆς . . . . .                                           | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris.                |
| 8. αὐτῶν . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . .  | τῶν ΖΗ, ΗΘ                                |

## L E M M A\*.

|                                                |                                                                         |                            |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τῇ ΒΗ* . . . . .                            | <i>Id.</i> . . . . .                                                    | τῇ ΒΗ μήκει*               |
| 2. ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση* . . .                     | ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν ἴση* ἢ δὲ<br>ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ<br>ἐστὶν ἴση* . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἐστὶ . . . . .                              | deest. . . . .                                                          | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ* . .                  | ἑκατέρᾳ* . . . . .                                                      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὴν ΚΔ οὕτως ἢ ΚΓ πρὸς<br>τὴν ΓΗ* . . . . . | ΚΔ οὕτως ἢ ΕΓ πρὸς ΓΕ* .                                                | concordat cum edit. Paris. |
| linea 16 τὴν . . . . .                         | deest. . . . .                                                          | concordat cum edit. Paris. |
| linea 17 τὴν . . . . .                         | deest. . . . .                                                          | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τὴν . . . . .                               | deest. . . . .                                                          | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LV.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ΑΒΓΔ . . . . .           | ΑΓ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὶν ἐκ δύο ὀνομάτων      |
| 3. δὴ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | δὴ                         |
| 4. τοῦ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | τῶν                        |
| 5. τοῦ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | τῶν                        |

\* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

| EDITIO PARISIENSIS.                                   | CODEX 190.                                  | EDITIO OXONIÆ.                                                                                 |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6. σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. . .                        | σύμμετρον αὐτὴν διαιρεῖ.                    | σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ.                                                                        |
| 7. τῶν . . . . .                                      | deest. . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                                                                     |
| 8. ἀπὸ . . . . .                                      | <i>Id.</i> . . . . .                        | διὰ                                                                                            |
| 9. τὴν . . . . .                                      | deest. . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                                                                     |
| 10. τὴν . . . . .                                     | deest. . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                                                                     |
| 11. τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ οὕτως<br>τὸ ΕΛ πρὸς τὴν ΚΗ . . . | τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ τὸ ΕΛ<br>πρὸς ΚΗ . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                     |
| 12. τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ,                        | <i>Id.</i> . . . . .                        | τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ,                                                                     |
| 13. ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ·                         | <i>Id.</i> . . . . .                        | ΜΡ τῷ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ<br>ΟΞ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΛ τῷ<br>ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ,<br>ΟΞ· |
| 14. μήκει· . . . .                                    | deest. . . . .                              | concordat cum edit. Paris.                                                                     |
| 15. ἐστίν . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .                        | deest.                                                                                         |
| 16. τῇ ΕΖ· . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .                        | τῇ ΕΖ μήκει·                                                                                   |
| 17. ἐστίν. . . . .                                    | <i>Id.</i> . . . . .                        | deest.                                                                                         |
| 18. οὕτως ἢ ΟΝ πρὸς ΝΡ· . .                           | ἢ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· . .                       | concordat cum edit. Paris.                                                                     |

PROPOSITIO LVI.

|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὸ . . . . .                                                                                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                                                           | τὸ μὲν                     |
| 2. σύμμετρον . . . . .                                                                                                                                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                           | σύμμετρος                  |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                                                                                                                                                                   | deest. . . . .                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῶν . . . . .                                                                                                                                                                                                    | <i>Id.</i> . . . . .                                                                           | τῷ                         |
| 5. γὰρ . . . . .                                                                                                                                                                                                    | deest. . . . .                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπὶ . . .                                                                                                                                                                                          | ΑΒ. Καὶ . . . . .                                                                              | concordat cum edit. Paris. |
| 7. Καὶ ἐστὶ ρητὴ ἢ ΑΕ· ρητὴ ἄρα<br>καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ<br>ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἢ ΑΕ τῇ<br>ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἢ ΑΕ ἑκα-<br>τέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ<br>ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ<br>μήκει· αἱ ΒΑ, . . . . . | ΑΛΛ' ἢ ΑΕ σύμμετρος τῇ<br>ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ,<br>ΗΕ ἄρα σύμμετροί εἰσι<br>τῇ ΑΒ· αἱ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστίν . . . . .                                                                                                                                                                                                  | deest. . . . .                                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τῷ . . . . .                                                                                                                                                                                                     | τῇ . . . . .                                                                                   | concordat cum edit. Paris. |



# 488 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.                                    | COD. 190.      | EDITIO OXONIE.             |
|--------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 10. ὥστε δυνάμεις εἰςὶ σύμμετροι<br>αἱ MN, NE. . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 11. EZ σύμμετρος. . . . .                              | Id. . . . .    | EZ.                        |
| 12. ἴστι . . . . .                                     | Id. . . . .    | deest.                     |
| 13. καὶ . . . . .                                      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 14. ἄρα MΞ . . . . .                                   | Id. . . . .    | MΞ ἄρα                     |

## PROPOSITIO LVII.

|                                                                                             |                     |                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-----------------------------------------|
| 1. μῆζον ἴστω . . . . .                                                                     | τὸ μῆζον ἴστι . . . | concordat cum edit. Paris.              |
| 2. ἴστι . . . . .                                                                           | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.              |
| 3. καὶ αἱ MN, NE μίσαι εἰςὶ<br>δυνάμεις μόνον σύμμετροι ὥστε<br>ἡ MΞ ἐκ δύο μίσων ἴστί. . . | Id. . . . .         | καὶ ὅτι αἱ MN, NE ἐκ δύο μίσων<br>εἰσί. |
| 4. ἀσύμμετρος . . . . .                                                                     | Id. . . . .         | ἀσύμμετρον                              |
| 5. ἴστι . . . . .                                                                           | Id. . . . .         | deest.                                  |
| 6. ἴστι . . . . .                                                                           | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.              |

## PROPOSITIO LVIII.

|                                                |                |                                    |
|------------------------------------------------|----------------|------------------------------------|
| 1. ἴστιν . . . . .                             | Id. . . . .    | deest.                             |
| 2. δὴ . . . . .                                | Id. . . . .    | δὲ                                 |
| 3. Ἐπεὶ . . . . .                              | Id. . . . .    | Ἐπεὶ γὰρ                           |
| 4. δυνάμεις . . . . .                          | Id. . . . .    | deest.                             |
| 5. ἴστι . . . . .                              | Id. . . . .    | deest.                             |
| 6. ἴστιν . . . . .                             | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.         |
| 7. τῇ . . . . .                                | τῆς . . . . .  | concordat cum edit. Paris.         |
| 8. συγχείμενον . . . . .                       | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.         |
| 9. καὶ εἴσιν ἀσύμμετροι αἱ MN,<br>NE . . . . . | Id. . . . .    | καὶ ἴστιν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ<br>NE |

## PROPOSITIO LIX.

|                  |               |                            |
|------------------|---------------|----------------------------|
| 1. ἄρα . . . . . | Id. . . . .   | deest.                     |
| 2. τῆς . . . . . | τῶν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.     | EDITIO OXONIÆ.             |
|-------------------------|----------------|----------------------------|
| 3. καὶ ἴστιν . . . . .  | καὶ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 4. μήκει, . . . . .     | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἄρα . . . . .        | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. Καὶ ῥητὴ . . . . .   | Id. . . . .    | ῥητὴ δὲ                    |
| 7. τῶν MN, ΝΞ . . . . . | MNΞ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LX.

|                                                             |                |                            |
|-------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .                                            | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἡ . . . . .                                              | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἀπὸ τῶν . . . . .                                        | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. ἄρα . . . . .                                            | Id. . . . .    | deest.                     |
| 5. καὶ . . . . .                                            | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἴστιν . . . . .                                          | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. Καὶ ἴσται μίσον ἑκάτερον αὐ-<br>τῶν, καὶ αἱ MN, ΝΞ . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

LEMMA\*.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τῆς . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῆς . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τῆς . . . . .            | Id. . . . .          | τῶν                        |
| 4. ἴσται τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ . . | ἴσται τοῦ ἀπὸ ΑΔ . . | τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ             |
| 5. τῶν . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXI.

|                           |                |                                                            |
|---------------------------|----------------|------------------------------------------------------------|
| 1. ἑκατέρω τῶν ΜΛ, ΗΞ . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 2. ἴσται . . . . .        | Id. . . . .    | ἴσται                                                      |
| 3. ΑΓ, ΓΒ. . . . .        | Id. . . . .    | ΑΓ, ΓΒ. ῥητὸν ἄρα ἴσται τὸ συγ-<br>κείμενον ἐκ τῶν ΑΓ, ΓΒ. |
| 4. ἡ ΜΗ ἴσται, . . . . .  | Id. . . . .    | ἴσται ἡ ΜΗ,                                                |
| 5. γὰρ . . . . .          | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 6. οὕτως . . . . .        | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 7. μήκει. . . . .         | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                 |
| 8. μέρει . . . . .        | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                 |

\* Reperitur in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

|                                                                          |                |                            |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 9. μήκει . . . . .                                                       | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων<br>δύναται τῷ ἀπὸ σύμμετρου<br>ἑαυτῇ. . . . . | Id. . . . .    | deest.                     |

## PROPOSITIO LXII.

|                                                           |                                                     |                                         |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. τὰς μίσας . . . . .                                    | deest. . . . .                                      | τὰ μίσα                                 |
| 2. παρὰ τὴν ΔΕ παραβέβλησθαι<br>τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τὸ . . | Id. . . . .                                         | παρὰ τὴν ΔΕ τῷ<br>ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον       |
| 3. τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν<br>ΔΕ παραβέβληται . . . .   | ἴστί τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥη-<br>τὴν ΔΕ παραβέβληται . . | τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παρά-<br>κειται . |
| 4. ἴστί . . . . .                                         | Id. . . . .                                         | deest.                                  |
| 5. ἴστί . . . . .                                         | Id. . . . .                                         | deest.                                  |

## PROPOSITIO LXIII.

|                           |                |                            |
|---------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .          | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἴστί διυτίρα . . . . . | Id. . . . .    | διυτίρα ἴστί               |
| 3. τὴν ΔΕ ῥητὴν . . . . . | Id. . . . .    | ῥητὴν τὴν ΔΕ .             |
| 4. καὶ . . . . .          | Id. . . . .    | deest.                     |
| 5. καὶ . . . . .          | Id. . . . .    | deest.                     |
| 6. δὴ . . . . .           | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. πρότερος . . . . .     | Id. . . . .    | πρότερον                   |
| 8. ἴστί . . . . .         | Id. . . . .    | deest.                     |

## PROPOSITIO LXIV.

|                                |                     |                             |
|--------------------------------|---------------------|-----------------------------|
| linea 7 τις ἴστω . . . . .     | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 2. γὰρ . . . . .               | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| linea 2 καὶ . . . . .          | ἴστί . . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 3. ἴστί . . . . .              | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 4. τὴν ΜΛ παράκειται . . .     | ἴστί τὴν ΜΛ . . . . | concordat cum edit. Paris.  |
| 5. ἄρα . . . . .               | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 6. δὴ . . . . .                | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris.  |
| 7. διίξομεν τοῖς πρότερον, . . | Id. . . . .         | τοῖς πρότερον ἐπιλογισμέθα, |
| 8. ἴστί . . . . .              | Id. . . . .         | deest.                      |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS. 491

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                            |                |                                  |
|--------------------------------------------|----------------|----------------------------------|
| 9. ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ. . . . . | Id. . . . .    | καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐστιν. |
| 10. παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ             | Id. . . . .    | παραβληθῇ παρὰ τὴν μείζονα       |
| 11. μήκει . . . . .                        | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.       |

## PROPOSITIO LXV.

- |                          |                |                            |
|--------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. γὰρ . . . . .         | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶν . . . . .       | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. μήκει . . . . .       | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῇ ΚΜ μήκει . . . . . | Id. . . . .    | μήκει τῇ ΚΜ.               |
| 5. ῥηταὶ . . . . .       | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXVI.

- |                                                               |                |                                                 |
|---------------------------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------|
| 1. ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων<br>συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν . . . | Id. . . . .    | συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τε-<br>τραγώνων τῷ |
| 2. ἐστὶ . . . . .                                             | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.                      |
| 3. δὴ πάλιν . . . . .                                         | Id. . . . .    | γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου                       |

## PROPOSITIO LXVII.

- |                                                                                               |                                                                    |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν<br>ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ<br>πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς | ΓΖ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ· ἐναλ-<br>λάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ<br>ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τὴν ΖΔ . . . . .                                                                           | ΓΖ πρὸς ΖΔ . . . .                                                 |                            |
| 3. ἦτοι . . . . .                                                                             | deest. . . . .                                                     | concordat cum edit. Paris. |
| 4. δύναται . . . . .                                                                          | Id. . . . .                                                        | δυνήσεται                  |
| 5. ἴσται . . . . .                                                                            | Id. . . . .                                                        | ἴστί.                      |
| 6. ἴσται . . . . .                                                                            | Id. . . . .                                                        | ἴστιν                      |
| 7. δύναται . . . . .                                                                          | Id. . . . .                                                        | δυνήσεται                  |
| 8. ἴστι . . . . .                                                                             | Id. . . . .                                                        | ἴσται                      |

## PROPOSITIO LXVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                                                                                            | CODEX 190.                                                                                                         | EDITIO OXONIÆ.                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1. καὶ αὐτὴ . . . . .                                                                                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                               | deest.                                                      |
| 2. διηρησθῶ . . . . .                                                                                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                               | διηρημένη                                                   |
| 3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν<br>ΓΖ . . . . .                                                                                                                                                  | ΓΔ ἢ ΑΕ πρὸς ΓΖ . . .                                                                                              | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 4. τὴν ΓΔ. . . . .                                                                                                                                                                             | ΓΔ . . . . .                                                                                                       | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 5. ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρα<br>τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσαι δὲ αἱ ΑΕ,<br>ΕΒ . . . . .                                                                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                               | ἢ μὴν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ<br>ΖΔ. Καὶ εἴσι μίσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ· |
| 6. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν<br>ΖΔ, . . . . .                                                                                                                                                 | ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ, . .                                                                                               | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 7. σύμμετροί εἰσι· . . . .                                                                                                                                                                     | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                               | εἰσὶ σύμμετροι·                                             |
| 8. ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί<br>εἰσιν. . . . .                                                                                                                                               | δυνάμει μόνον σύμμετροί<br>εἰσιν. . . . .                                                                          | ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι.                           |
| 9. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν<br>ΖΔ· . . . . .                                                                                                                                                 | ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ· . .                                                                                               | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 10. ἄρα . . . . .                                                                                                                                                                              | deest. . . . .                                                                                                     | concordat cum edit. Paris.                                  |
| 11. καὶ διὰ τοῦτο ἴστιν ἐκ δύο<br>μίσων πρώτη. Εἴτε μίσον τὸ ὑπὸ<br>τῶν ΑΕ, ΕΒ, μίσον καὶ τὸ ὑπὸ<br>τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἴστιν ἑκατέρα<br>δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἢ ΓΔ<br>τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή. . . | εἴτε μίσον, μίσον καὶ ἴσ-<br>τιν ἑκατέρα δευτέρα·<br>καὶ διὰ τοῦτο ἴσται ἢ<br>ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ<br>αὐτή. . . . . | concordat cum edit. Paris.                                  |

## PROPOSITIO LXIX.

|                                                             |                        |                            |
|-------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . .                                            | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 2. Γεγονέτω γάρ . . . . .                                   | <i>Id.</i> . . . . .   | Καὶ γεγονέτω               |
| 3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν<br>ΓΖ καὶ ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· . | ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ· | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τὴν ΖΔ, . . . . .                                        | ΖΔ . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὴν ΕΒ . . . . .                                         | ΕΒ . . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τὴν . . . . .                                            | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἴστιν . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . .   | deest.                     |

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 8. τὴν ΔΖ . . . . .         | ΔΖ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἀσύμμετροί εἰσι, . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶν ἀσύμμετροι,          |
| 10. ἄμα . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO LXX.

|                              |                      |                            |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. καὶ αὐτὴ . . . . .        | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν . . | ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 3. μὲν . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

PROPOSITIO LXXI.

|                         |                      |                            |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. δὴ . . . . .         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τετραγώνων . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸ δὲ . . . . .      | ὥστε καὶ τὸ . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἢ ἄρα ΓΔ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἢ ΓΔ ἄρα                   |

PROPOSITIO LXXII.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τουτέστι τὴν ΘΗ, . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. τῷ ΕΗ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΕΗ.                     |
| 3. ῥητὴν . . . . .          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἢ ΕΘ ἄρα ῥητὴ ἐστὶ . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΘ        |
| 5. ἐστὶ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. τῷ ΘΙ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ ΘΙ.                     |
| 7. τουτέστι τὴν ΘΗ, . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἐστὶν ἢ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὼ                       |
| 9. ἐστὶν ἢ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὼ                       |
| 10. ἐστὶν ἢ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὼ                       |
| 11. περιέχεται . . . . .    | περιέχεται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 12. χωρίον . . . . .        | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 13. ἐστὶν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | ἐστὼ                       |

PROPOSITIO LXXIII.

|                |                |                            |
|----------------|----------------|----------------------------|
| 1. ἢ . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἢ . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

|                                                                                                                                                           |                       |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 3. Εστω . . . . .                                                                                                                                         | Εστω εἰ τύχοι . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἡ . . . . .                                                                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 5. καὶ . . . . .                                                                                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 6. ἡ . . . . .                                                                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| linea 17 Ομοίως δὲ δειξομεν ὅτι,<br>καὶ ἑλάττω ἢ τὸ AB τοῦ ΓΔ,<br>ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ<br>δύο μέσων δευτέρα ἴστί, δύο<br>ἢ μίσα δυναμένη . . . . | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |

Subsequens corollarium in textu adesse deberet.

## ΠΟΡΙΣΜΑ\*.

## COROLLARIUM.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλ-  
γοι οὔτε τῇ μίσει οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί·  
τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μίσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλό-  
μενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ  
παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ  
δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον  
πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.  
Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ  
ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο  
ὀνομάτων δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο  
μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον

Quæ ex binis nominibus et irrationales quæ  
post ipsam neque mediæ neque inter se sunt  
eædem; quadratum enim ex mediâ ad rationa-  
lem applicatum latitudinem facit rationalem et  
longitudine incommensurabilem ipsi ad quam  
applicatur. Quadratum autem rectæ ex binis  
nominibus ad rationalem applicatum latitudi-  
nem facit ex binis nominibus primam. Qua-  
dratum autem primæ ex binis mediis ad ra-  
tionalem applicatum, latitudinem facit ex bi-  
nis nominibus secundam. Quadratum autem  
secundæ ex binis mediis ad rationalem appli-

## C O R O L L A I R E.

La droite de deux noms et les irrationnelles qui la suivent ne sont les mêmes ni avec la médiale, ni entr'elles; en effet, le carré d'une médiale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (23. 10). Le carré d'une droite de deux noms étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une première de deux noms (61. 10). Le carré d'une première de deux médiales étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une seconde de deux noms (63. 10). Le carré d'une seconde de deux médiales étant appliqué à une rationnelle fait une largeur

\* Reperitur in codicibus *a, d, e, f, h, l, m, n.*

πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μίσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Τὰ δὲ εἰρημμένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητὴ ἴστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἀλογοὶ διαφέρουσιν ἀλλήλων.

catum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quadratum autem ex majori ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum autem ex rectâ rationale et medium potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam. Quadratum autem ex rectâ bina media potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Ipsæ vero dictæ latitudines differunt et à primâ et inter se, à primâ quidem quod rationalis sit, inter se vero quod ordine non sint eadem, quare et ipsæ irrationales differunt inter se.

qui est une troisième de deux noms (63. 10). Le carré d'une majeure étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une quatrième de deux noms (64. 10). Le carré d'une droite, qui peut une surface rationelle et une surface médiale, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une cinquième de deux noms (65. 10). Le carré d'une droite, qui peut deux surfaces médiales, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une sixième de deux noms (66. 10). Or les largeurs dont nous venons de parler sont différentes de la première et différentes entr'elles; elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle; et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre; ces irrationelles sont donc différentes entr'elles.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                    |                      |             |
|--------------------|----------------------|-------------|
| 1. Τὰ δὲ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | Ἐπεὶ οὖν τὰ |
| 2. ὥστε . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | διπλὸν ὥς   |



## ΣΧΟΛΙΟΝ\*.

## SCHOLIUM.

Ἐπτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρημίνων ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐτῶν ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἐν μόνον σημεῖον διαιροῦνται ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὑρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἑκτης, ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπιδείκνυ τῶν ἀλόγων, πῇ διαφέρουσι προσχωρήμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἐξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἑκτὴν ἐξέθετο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. Ἐν δὲ τῇ ἑκτῇ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδῆς αὐταῖς εἰσὶ. Πάλιν, ἐν τῇ ἐβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Septem sunt senarii usque ad ea de quibus hactenus dictum est; quorum primus quidem ostendit generationem ipsarum; secundus vero divisionem, propterea quod ad unum duntaxat punctum dividuntur; tertius autem ex binis nominibus inventionem primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, sextæ, post quam quartus senarius ostendit differentiam irrationalium, quomodo illæ differant; usus enim eis quæ ex binis nominibus ostendit differentiam sex irrationalium. Quintum et sextum exposuit, ostendens in quinto quidem applicationes quadratorum ex irrationalibus, quales irrationales faciant latitudines applicatorum spatiorum. In sexto autem, quomodo commensurabiles irrationalibus ejusdem speciei sint. Rursus, in septimo evidenter differentiam ipsarum nobis ostendit.

## SCHOLIE.

Il y a sept sixains dans ce qui a été dit jusqu'à présent. Le premier fait voir l'origine des irrationnelles (37, 38, 39, 40, 41, 42); le second leur division, parce qu'elles ne peuvent être divisées qu'en un seul point (43, 44, 45, 46, 47, 48); le troisième enseigne à trouver les droites de deux noms: la première de deux noms (49), la seconde (50), la troisième (51), la quatrième (52), la cinquième (53), et enfin la sixième (54); le quatrième sixain démontre la différence des irrationnelles, c'est-à-dire ce en quoi elles diffèrent; car faisant usage des droites de deux noms, il (Euclide) fait voir la différence des six irrationnelles (55, 56, 57, 58, 59, 60); il expose le cinquième et le sixième sixain; dans le cinquième, il démontre les applications des carrés des irrationnelles, c'est-à-dire qu'il démontre quelles sont les irrationnelles que produisent les largeurs des surfaces appliquées (61, 62, 63, 64, 65, 66); dans le sixième, il fait voir comment les droites commensurables avec les irrationnelles sont de la même espèce qu'elles (67, 68, 69, 70, 71); et enfin dans le septième, il nous démontre clairement leur différence (72, 73).

\* Deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

Αναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἷα σδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδὴς ἐστὶν ὧν ἐστὶ μέση ἀνάλογον. Καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστὶ. Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι AB, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερόν ὅτι ἡ AG τῆς GB ἐστὶ μείζων. Αφηρήσθω ἀπὸ

Apparet autem et in his irrationalibus arithmetica proportio; et media sumpta proportionalis portionum cujusque irrationalis secundum arithmeticae proportionem, et ipsa ejusdem speciei est cum eis quarum est media proportionalis. Et primum arithmetica medietas in his est. Ponatur enim ex binis nominibus si contigerit AB, et dividatur in nomina ad Γ; evidens est AG quam GB esse majorem. Auferatur ex AG

A ——— Δ E Γ ——— B

Z ——— H

τῆς AG τῇ GB ἴση ἢ AD, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε· φανερόν ὅτι ἡ AE τῇ EB ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ΖΗ· φανερόν δὲ ὅτι ὅς διαφέρει ἡ AG τῆς ΖΗ τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ EB τῆς ΓΒ, ἡ μὲν γὰρ AG τῆς ΖΗ τῇ ΕΓ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΓΒ, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ AB, τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστὶν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ομοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

ipsi GB æqualis AD, et bifariam secetur ΓΔ in E; evidens est AE ipsi EB esse æqualem. Ponatur alterutri ipsarum æqualis ZH; manifestum est igitur quo differt AG ab ipsâ ZH hoc differre et EB ab ipsâ GB, etenim differt AG ab ipsâ ZH ipsâ ΕΓ, eâdem vero magnitudine et ipsa ZH differt ab ipsâ ΓΒ, quod est arithmetice proportionis. Perspicuum est autem ZH commensurabilem esse ipsi AB, dimidiæ enim ipsius est æqualis; quare ipsa ex binis nominibus est. Similiter demonstrabitur et in aliis.

Il y a évidemment dans les irrationnelles une proportion arithmétique; et la moyenne proportionnelle prise arithmétiquement entre les parties d'une irrationnelle quelconque est de la même espèce que les droites entre lesquelles elle est moyenne proportionnelle. Il y a d'abord une médiété arithmétique entre les parties d'une irrationnelle. Car, que AB soit une droite quelconque de deux noms, et que cette droite soit divisée en ses noms au point Γ; il est évident que AG est plus grand que GB. Retranchons de AG une droite AD égale à GB, et partageons ΓΔ en deux parties égales en E; il est évident que la droite AE sera égale à la droite EB. Que ZH soit égal à chacune de ces droites; il est évident que la différence de AG à ZH sera la même que la différence de EB à GB; car la différence de AG à ZH est ΕΓ, ainsi que la différence de ZH à ΓΒ, ce qui appartient à la proportion arithmétique. Mais il est évident que la droite ZH est commensurable avec AB, car elle en est la moitié; la droite ZH est donc une droite de deux noms (67. 10). Nous démontrerons la même chose pour les autres irrationnelles.

## PROPOSITIO LXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

- |                                                                                             |                                                                                                   |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμ-<br>μετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν<br>AB, BG . . . . .             | καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν<br>AB, BG ἴσα ἐστὶ τῷ δις<br>ὑπὸ τῶν AB, BG μετὰ<br>τοῦ ἀπὸ ΓΑ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG<br>ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG<br>μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG. . . | deest. . . . .                                                                                    | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXV.

- |                       |                    |                            |
|-----------------------|--------------------|----------------------------|
| 1. καλείσθω . . . . . | καλεῖται . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἐστὶ . . . . .     | Id. . . . .        | deest.                     |
| 3. τῷ . . . . .       | deest. . . . .     | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἐστὶν . . . . .    | Id. . . . .        | deest.                     |
| 5. δι . . . . .       | δι . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXVI.

- |                                                                                 |                         |                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1. περιέχῃ . . . . .                                                            | περιέχουσα . . . . .    | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 2. τῆς . . . . .                                                                | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 3. ἐστὶ . . . . .                                                               | καὶ σύμμετρά ἐστι . . . | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 4. καὶ . . . . .                                                                | Id. . . . .             | deest.                                                         |
| 5. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις<br>ὑπὸ τῶν AB, BG τοῖς ἀπὸ τῶν<br>AB, BG. . . . . | Id. . . . .             | ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν<br>AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG. |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                                               | Id. . . . .             | deest.                                                         |
| 7. μήκει . . . . .                                                              | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 8. ὀρθογώνιον . . . . .                                                         | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                     |
| 10. μίσης . . . . .                                                             | Id. . . . .             | μίση                                                           |

PROPOSITIO LXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

- |                                                                                                                          |                                                                                      |                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν<br>συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν<br>AB, BG ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δῖς<br>ὑπὸ τῶν AB, BG ἅμα μέσον. | τὰ προκείμενα· . . .                                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καλείσθω δὲ . . . . .                                                                                                 | ἡ καλουμένη . . . . .                                                                | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν<br>AB, BG τῶ ἀπὸ τῆς AG. . .                                                                | λοιπῇ τῇ ἀπὸ τῆς AG<br>ἀσύμμετρά ἐστι τὰ<br>ἀπὸ τῶν AB, BG τῇ<br>ἀπὸ τῆς AG. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG<br>ἄλογος ἄρα ἡ AG, . . . . .                                                                | ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς<br>AG, . . . . .                                              | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXXVIII.

- |                                                                                                                    |                        |                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ<br>τῶν AB, BG τετραγώνων μέσον,<br>τὸ δὲ δῖς ὑπὸ τῶν AB, BG ῥη-<br>τόν· . . . . . | τὰ προκείμενα· . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ἡτοῦ μέ-<br>σον τὸ ὅλον ποιούσα. . . . .                                                     | ἡ προειρημένη. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. AB, BG . . . . .                                                                                                | Id. . . . .            | AB, BG τετραγώνων          |
| 4. καὶ . . . . .                                                                                                   | deest. . . . .         | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXXIX.

- |                           |                  |                                                                                                                                                                      |
|---------------------------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. τὸ μὲν . . . . .       | τό, τε . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                           |
| 2. τὸ δὲ . . . . .        | τό, τε . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                           |
| 3. τὰ προκείμενα· . . . . | Id. . . . .      | τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ<br>τῶν AB, BG τετραγώνων μέσον,<br>τὸ δὲ δῖς ὑπὸ τῶν AB, BG μέ-<br>σον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG<br>ἀσύμμετρα τῇ δῖς ὑπὸ τῶν<br>AB, BG |

# 500 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.          | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 4. ἡ καλουμένη . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | καλείσθω δὲ                |
| 5. ῥητὴν . . . . .           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἴστί . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἴστί . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τῷ ΔΘ. . . . .            | τῷ ΔΘ. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἴστί . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί καὶ                   |
| 11. τὴν ΔΖ· . . . .          | ΔΖ· . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 12. ὀρθογώνιον . . . . .     | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXX.

|                      |                      |                            |
|----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. μόνον . . . . .   | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. καὶ . . . . .     | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. Τὰ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ                         |
| 5. ἀμφοτέρω· . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἑκατέρα.                   |

## PROPOSITIO LXXXI.

|                         |                      |            |
|-------------------------|----------------------|------------|
| 1. μία μόνον . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | μόνον μία  |
| 2. ΑΓ, ΓΒ ἄρα . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ΑΓ, ΓΒ |
| 3. αὐτῷ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | αὐτῷ πάλιν |

## PROPOSITIO LXXXII.

|                             |                      |                            |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. μίση . . . . .           | μίσης . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. οὔσα . . . . .           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. μίση . . . . .           | μίσης . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. καὶ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. μὲν . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. σύμμετροί εἰσιν, . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | εἰσὶ σύμμετροι,            |
| 7. ἴστί . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ                        |
| 8. ἴστί . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστί καὶ                   |

PROPOSITIO LXXXIII.

| EDITIO PARISIENSIS.        | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.                                                                     |
|----------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. καὶ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |
| 2. τὰ προειρημένα. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετρα-<br>γωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ<br>τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον. |
| 3. τετραγώνων . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |
| 4. ἴστιν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |
| 5. ἴστιν . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |

PROPOSITIO LXXXIV.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                            |                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ* . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζεται<br>ἡ ΒΓ* . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                      |
| 2. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ<br>τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον,<br>τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ<br>ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ<br>προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.<br>Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζεται ἡ<br>ΒΔ* καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι<br>δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦ-<br>σαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν<br>ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων<br>μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ,<br>ΔΒ ῥητόν. . . . . | τὰ προκείμενα. . . . .                     | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                      |
| 3. τοῖς . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . .                       | τῶν                                                                                                                                                             |
| 3. ἴστιν . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .                       | deest.                                                                                                                                                          |
| 4. τὰ προειρημένα· μία ἄρα μό-<br>νον προσαρμόσει. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <i>Id.</i> . . . . .                       | τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐ-<br>τῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ<br>δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα<br>μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιού-<br>σῃ μία μόνον προσαρμόσει. |

PROPOSITIO LXXXV.

|                    |                |                            |
|--------------------|----------------|----------------------------|
| 1. μόνον . . . . . | μόνη . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|--------------------|----------------|----------------------------|

# 502 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                              |                                            |                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. τὰ προειρημένα . . . . .                  | <i>Id.</i> . . . . .                       | τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ |
| 3. εὐθεῖα . . . . .                          | deest. . . . .                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 4. ποιοῦσα τὰ προειρημένα. . .               | <i>Id.</i> . . . . .                       | δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.                                                                                   |
| 5. τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα . . . . . | τό, τι ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων . . . . . | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 6. ἀσύμμετρα . . . . .                       | ἀσύμμετρον . . . . .                       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 7. ἀφηρήσθω . . . . .                        | παρὰ τὴν ΕΖ παραβέβλησθω . . . . .         | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 8. μὲν . . . . .                             | deest. . . . .                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 9. ἔστιν ἴσον τῇ . . . . .                   | <i>Id.</i> . . . . .                       | ἴσον τὸ                                                                                                                                                   |
| 10. ἄρα . . . . .                            | deest. . . . .                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 11. σύμμετρος . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .                       | ἀσύμμετρος                                                                                                                                                |
| 12. τετράγωνα . . . . .                      | τετράγωνον . . . . .                       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                                |
| 13. καὶ ἔτι . . . . .                        | <i>Id.</i> . . . . .                       | ἔτι τι                                                                                                                                                    |

## DEFINITIONES TERTIÆ.

|                     |                |                            |
|---------------------|----------------|----------------------------|
| 1. ῥ . . . . .      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. μήκει, . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXXVI.

|                            |                      |                            |
|----------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἡ ΖΔ . . . . .          | ὁ ΔΖ . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ΗΓ τετράγωνον . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ΗΓ                         |
| 3. ΗΓ . . . . .            | <i>Id.</i> . . . . . | ΘΓ                         |
| 4. τῇ Α μήκει . . . . .    | μήκει τῇ Α . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ποιῆσαι . . . . .       | εὐρεῖν . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO LXXXVII.

|                  |                      |                            |
|------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. καὶ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|------------------|----------------------|----------------------------|

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                                                        |                                                  |                            |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------|
| 2. ΗΒ° . . . . .                                       | ΗΒ τετράγωνον° . . . . .                         | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ΓΗ τετράγωνον . . . . .                             | Id. . . . .                                      | ΓΗ                         |
| 4. ἴστι . . . . .                                      | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 5. ἀπὸ . . . . .                                       | Id. . . . .                                      | deest.                     |
| 6. ἄρα . . . . .                                       | deest. . . . .                                   | concordat cum edit. Paris. |
| 7. συμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ<br>τῇ Α μήκει . . . . . | τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμ-<br>μετρος τῇ Α° . . . . . | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO LXXXVIII.

|                                                  |                                                                                                                                                             |                                                     |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετρά-<br>γωνον° . . . . . | τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ<br>τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴστιν<br>ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ<br>οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α<br>τετράγωνον πρὸς τὸ<br>ἀπὸ τῆς ΖΗ τετρά-<br>γωνον° . . . . . | concordat cum edit. Paris.                          |
| 2. τετραγώνον° . . . . .                         | Id. . . . .                                                                                                                                                 | deest.                                              |
| 3. τετράγωνον° . . . . .                         | Id. . . . .                                                                                                                                                 | deest.                                              |
| 4. τετράγωνον . . . . .                          | Id. . . . .                                                                                                                                                 | deest.                                              |
| 5. τετράγωνον . . . . .                          | Id. . . . .                                                                                                                                                 | deest.                                              |
| 6. οὐδ° . . . . .                                | Id. . . . .                                                                                                                                                 | οὐκ                                                 |
| 7. τὸν . . . . .                                 | deest. . . . .                                                                                                                                              | concordat cum edit. Paris.                          |
| 8. τῇ Α μήκει. . . . .                           | Id. . . . .                                                                                                                                                 | μήκει τῇ Α.                                         |
| 9. τετράγωνον . . . . .                          | Id. . . . .                                                                                                                                                 | deest.                                              |
| 10. ἀπὸ . . . . .                                | Id. . . . .                                                                                                                                                 | ἀπὸ τῆς Κ° ἢ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ<br>μείζον δύναται τῷ ἀπὸ |

PROPOSITIO LXXXIX.

|                                     |                     |                            |
|-------------------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. . . . . | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἴστι . . . . .                   | Id. . . . .         | deest.                     |
| 3. καὶ . . . . .                    | Id. . . . .         | deest.                     |
| 4. τὸν . . . . .                    | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. μήκει. Καὶ ἴστιν ἡ . . . . .     | καὶ ἴστιν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἄρα ΒΓ . . . . .                 | Id. . . . .         | ΒΓ ἄρα                     |
| 7. ΒΓ . . . . .                     | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |



## PROPOSITIO XC.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                     | CODEx 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. μήκει . . . . .                                                                      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. ἴσθιν . . . . .                                                                      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸν . . . . .                                                                        | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. σύμμετρον ἄρα ἴσθι τὸ ἀπὸ<br>τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ΡΗ-<br>τὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| linea 4 ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ<br>τῆς ΗΒ ῥητὴ . . . . .                                   | ῥητὸν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. οὐδ' ἄρα . . . . .                                                                   | οὐδὲ . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. μείζον . . . . .                                                                     | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XCI.

|                                                                                                                   |                      |              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|
| 1. ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ<br>λόγον μὴ ἔχεται ὃν τετράγωνος<br>ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-<br>μὸν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.       |
| 3. οὐδιτέρα ἄρα . . . . .                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ οὐδιτέρα |

## SCHOLIUM.

|                              |                      |                            |
|------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἡ . . . . .               | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. πρώτη ἴσθιν ἡ ΑΒ. . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσθιν ἡ ΑΓ πρώτη.          |

## PROPOSITIO XCII.

|                                                              |                      |                            |
|--------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. πρώτης . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. παραλληλόγραμμον . . . . .                                | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. διελιῖ . . . . .                                          | διαιρεῖ . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 4. περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ<br>ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, . . . | <i>Id.</i> . . . . . | τῷ ὑπὸ τῆς ΕΗ,             |
| 5. τὴν . . . . .                                             | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἴσθι . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. μὲν . . . . .                                             | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS. 505

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|
| 8. ἴσιν ἴσον, . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴσιν ἴσιν,                 |
| 9. λοιπὸν . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ λοιπὸν                 |
| 10. καὶ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 11. ἑκατέρων . . . . .  | ἑκατέρας. . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 12. καὶ . . . . .       | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO XCIII.

|                                                                                                                            |                             |                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. ὅλη ἡ ΑΗ . . . . .                                                                                                      | <i>Id.</i> . . . . .        | ΑΗ ὅλη                         |
| 2. μήκει . . . . .                                                                                                         | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 3. διειλεῖν . . . . .                                                                                                      | διαιρεῖν. . . . .           | concordat cum edit. Paris.     |
| 4. τῷ . . . . .                                                                                                            | <i>Id.</i> . . . . .        | τὸ                             |
| 5. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων<br>τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ<br>ΕΘ, ΖΙ, ΑΚ. Καὶ ἐπὶ σύμμε-<br>τρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 6. ῥητὴ ἄρα ἴσιν καὶ ἑκάτερα<br>τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος<br>τῇ ΑΓ μήκει . . . . .                                         | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 7. τὴν ὑπὸ ΑΟΜ . . . . .                                                                                                   | τῷ ἀπὸ τῶν ΑΟΜ . . . . .    | concordat cum edit. Paris.     |
| 8. καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, . . . . .                                                                                        | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 9. ἄρα . . . . .                                                                                                           | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 10. Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον<br>σύμμετροι. Ἐπὶ γὰρ . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .        | δυνάμει σύμμετροι. Καὶ ἐπὶ γὰρ |
| 11. ἴσιν . . . . .                                                                                                         | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 12. ἴσιν . . . . .                                                                                                         | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 13. τουτίστι τῷ . . . . .                                                                                                  | τὸ δὲ ΤΣ ἴσιν τῷ . . . . .  | concordat cum edit. Paris.     |
| 14. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ . . . . .                                                                                            | τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα . . . . . | concordat cum edit. Paris.     |
| 15. τὸ . . . . .                                                                                                           | τὸ ἀπὸ τῆς . . . . .        | concordat cum edit. Paris.     |
| 16. δὴ . . . . .                                                                                                           | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 17. μίσης . . . . .                                                                                                        | μίση . . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 18. τῷ ΜΝ, τουτίστι . . . . .                                                                                              | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 19. ἴσιν . . . . .                                                                                                         | deest. . . . .              | concordat cum edit. Paris.     |
| 20. ὡς δὲ . . . . .                                                                                                        | <i>Id.</i> . . . . .        | καὶ ὡς ἄρα                     |

## PROPOSITIO XCIV.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                     | CODEX 190.            | EDITIO OXONIÆ.             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 1. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH<br>ῥητὴ ἴστί καὶ ἀσύμμετρος τῇ<br>ΑΓ μήκει· καὶ . . . . . | ὥστε καὶ αἱ AZ, ZH· . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. μήκει· . . . .                                                                       | Id. . . . .           | deest.                     |
| 3. ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ ΑΙ<br>τῷ ΕΚ. . . . .                                          | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἴστί . . . . .                                                                       | Id. . . . .           | deest.                     |
| 5. τὸ ΖΚ· . . . .                                                                       | ΖΚ· . . . .           | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἴστί . . . . .                                                                       | Id. . . . .           | deest.                     |
| 7. τῷ ΖΚ, . . . . .                                                                     | Id. . . . .           | τῷ τῷ ΖΚ,                  |
| 8. τῶν ΑΟ, ΟΝ· . . . .                                                                  | Id. . . . .           | τῆς ΑΟ, ΟΝ·                |
| 9. ὥστε . . . . .                                                                       | Id. . . . .           | ὥστε καὶ                   |
| 10. χωρίον· . . . .                                                                     | Id. . . . .           | deest.                     |

## PROPOSITIO XCV.

|                                                               |                                                   |                            |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τῆς . . . . .                                              | Id. . . . .                                       | deest.                     |
| 2. δύναται . . . . .                                          | δυναμῖν . . . . .                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 3. μήκει ἢ AZ τῇ ΖΗ· . . . .                                  | Id. . . . .                                       | ἢ AZ τῇ ΖΗ μήκει.          |
| 4. τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν<br>ὅν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ· . . | περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν<br>ἀπὸ τῶν ΑΟΜ, τὴν ΝΞ· | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ἴστί . . . . .                                             | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 6. τὴν . . . . .                                              | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἴστί . . . . .                                             | Id. . . . .                                       | deest.                     |
| 8. τῷ . . . . .                                               | Id. . . . .                                       | τὸ                         |
| 9. τὸ . . . . .                                               | Id. . . . .                                       | τῷ                         |
| 10. δὴ . . . . .                                              | deest. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 11. τετραγώνω· . . . .                                        | Id. . . . .                                       | deest.                     |

## PROPOSITIO XCVI.

|                                                                              |                |                            |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. Καὶ ἡχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ,<br>Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ,<br>ΖΙ, ΗΚ. . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                        |                                            |                            |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------|
| 2. περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ· | τὸν ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ· | concordat cum edit. Paris. |
| 3. χωρίον. . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                       | deest.                     |
| 4. καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι. . . . .   | καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι. . . . .               | concordat cum edit. Paris. |
| 5. λοιπὴ . . . . .                                     | ἡ λοιπὴ . . . . .                          | concordat cum edit. Paris. |
| 6. μίσον . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . .                       | deest.                     |
| 7. ἄρα χωρίον . . . . .                                | <i>Id.</i> . . . . .                       | χωρίον                     |

PROPOSITIO XCVII.

|                                                                                          |                         |                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. τῶν ΑΗ, ΗΔ . . . . .                                                                  | αὐτῶν . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 2. παραβληθῇ . . . . .                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .    | παραβάλλωμεν               |
| 3. τὸ Ε, . . . . .                                                                       | <i>Id.</i> . . . . .    | τὸ Ε σημείον,              |
| 4. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέτρον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. . . . . | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 5. ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν τὸ ΝΞ·                                                                | γωνίαν τὸ ΝΞ· . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἡ . . . . .                                                                           | <i>Id.</i> . . . . .    | ὁ                          |
| 7. ἡ . . . . .                                                                           | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ἄρα . . . . .                                                                         | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ΑΒ . . . . .                                                                          | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO XCVIII.

|                                                           |                      |                                                         |
|-----------------------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------------|
| 1. τῶν . . . . .                                          | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                              |
| 2. ἐστὶ . . . . .                                         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                              |
| 3. ἐστὶν . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 4. τὸ . . . . .                                           | τὰ . . . . .         | concordat cum edit. Paris.                              |
| 5. μίσον, . . . . .                                       | μίσα . . . . .       | concordat cum edit. Paris.                              |
| 6. ἐστὶ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 7. δὴ . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 8. ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ·     | <i>Id.</i> . . . . . | ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· |
| 9. ἐστὶν . . . . .                                        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                  |
| 10. ὥς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΝΜ· | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                              |

# 508 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                    |                |                            |
|--------------------|----------------|----------------------------|
| 11. ἴστί . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 12. τὸ . . . . .   | Id. . . . .    | τῷ                         |

## PROPOSITIO XCIX.

|                                                                                                                         |                     |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----------------------------|
| 1. μέσοις οὖσι . . . . .                                                                                                | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἄρα . . . . .                                                                                                        | Id. . . . .         | ἄρα καὶ                    |
| 3. ἴστί . . . . .                                                                                                       | Id. . . . .         | deest.                     |
| 4. ἴστί . . . . .                                                                                                       | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 5. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ . . .                                                                                            | τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB τὸ | concordat cum edit. Paris. |
| 6. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ<br>ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB,<br>σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ<br>ΚΛ, τουτέστιν ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ . | deest. . . . .      | concordat cum edit. Paris. |
| 7. καὶ τῷ . . . . .                                                                                                     | Id. . . . .         | τῷ δὲ                      |
| 8. τὸ . . . . .                                                                                                         | τῷ . . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 9. μήκει . . . . .                                                                                                      | Id. . . . .         | deest.                     |

## PROPOSITIO C.

|                                                                               |                |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| 1. σύμμετρόν ἐστι . . . . .                                                   | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ<br>τῶν AH, HB τῷ δις ὑπὸ τῶν<br>AH, HB . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. καὶ . . . . .                                                              | Id. . . . .    | deest.                     |
| 4. ὥς . . . . .                                                               | Id. . . . .    | καὶ ὥς                     |
| 5. σύμμετρος ἐστι μήκει . . .                                                 | Id. . . . .    | μήκει σύμμετρος ἐστι       |

## PROPOSITIO CI.

|                        |                |                              |
|------------------------|----------------|------------------------------|
| 1. ῥητὴν . . . . .     | Id. . . . .    | deest.                       |
| 2. ἴσον . . . . .      | Id. . . . .    | ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβελήσθω |
| 3. καὶ . . . . .       | Id. . . . .    | deest.                       |
| 4. τῶν . . . . .       | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 5. ἴστί . . . . .      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 6. ἴστί . . . . .      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris.   |
| 7. ἴστί ἢ ΓΜ . . . . . | Id. . . . .    | ἢ ΓΜ                         |

- |                      |                      |         |
|----------------------|----------------------|---------|
| 8. τὸ ΝΑ . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ ΝΑ    |
| 9. ἄρα ἀπὸ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἄρα ὑπὸ |

PROPOSITIO CII.

- |                            |                         |                            |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. διὰ . . . . .           | <i>Id.</i> . . . . .    | ἀπὸ                        |
| 2. ἔστιν . . . . .         | <i>deest.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἰστὶν . . . . .         | <i>deest.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἰστὶ . . . . .          | <i>deest.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 5. αὐτὴν διαιρεῖ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .    | διαιρεῖ αὐτήν.             |

PROPOSITIO CIII.

- |                                                             |                           |                                                   |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. ὅτι . . . . .                                            | <i>Id.</i> . . . . .      | ὅσοι                                              |
| 2. ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν                              | καὶ ἀσύμμετρον τὸ ἀπὸ τῶν | concordat cum edit. Paris.                        |
| 3. ἰστὶ . . . . .                                           | <i>deest.</i> . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                        |
| 4. ἰστὶ . . . . .                                           | <i>deest.</i> . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                        |
| 5. ἀπὸ τῶν . . . . .                                        | <i>deest.</i> . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                        |
| 6. ἰστὶ . . . . .                                           | <i>deest.</i> . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                        |
| 7. τὸ . . . . .                                             | <i>deest.</i> . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                        |
| 8. τὸ . . . . .                                             | τὸ ἀπὸ τῆς . . . . .      | concordat cum edit. Paris.                        |
| 9. ἰστὶ . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . .      | <i>deest.</i>                                     |
| 10. ἰστὶν . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . .      | <i>deest.</i>                                     |
| 11. ἀπὸ τῶν . . . . .                                       | <i>deest.</i> . . . . .   | concordat cum edit. Paris.                        |
| 12. ἰστὶ . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . .      | <i>deest.</i>                                     |
| 13. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ<br>ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ | <i>Id.</i> . . . . .      | καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μίσον ἀνά-<br>λογόν ἔστι τὸ ΝΑ |

PROPOSITIO CIV.

- |                                                                                              |                         |                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. μήκει σύμμετρος ἴστω . . .                                                                | <i>Id.</i> . . . . .    | σύμμετρος ἴστω μήκει       |
| 2. ἰστὶ . . . . .                                                                            | <i>deest.</i> . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ΑΕ μὲν . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .    | μὲν ΑΕ                     |
| 4. Καὶ αἱ . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .    | αἱ δὲ                      |
| 5. ἀποτομὴ ἄρα ἔστιν ἡ ΓΔ. Λέ-<br>γω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ<br>τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ . . . . . | Ἐπεὶ οὖν . . . . .      | concordat cum edit. Paris. |

# 510 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 6. ἴσθιν . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 7. δι . . . . .       | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 8. οὐδετέρα . . . . . | οὐθέρα . . . . .     | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO CV.

|                                                             |                      |                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE τῇ ΓΖ, ἡ δὲ BE τῇ ΔΖ . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                              |
| 2. καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μίται εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι . . | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                              |
| 3. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ .  | <i>Id.</i> . . . . . | Δεικνέον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ                                                                                                 |
| 4. τὴν ΖΔ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. |
| 5. ΓΖ, ΖΔ . . . . .                                         | <i>Id.</i> . . . . . | ΓΖ, ΖΔ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.                                              |
| 6. ἴσθι . . . . .                                           | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                                                                                              |
| 7. ἴσται . . . . .                                          | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστι                                                                                                                                                |
| 8. ἴσθι . . . . .                                           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                          |
| 9. ἴσθι . . . . .                                           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                                                                                          |

## PROPOSITIO CVI.

|                              |                         |                            |
|------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. γάρ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 2. τῷ προτέρῳ . . . . .      | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴσθιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν . . . | ἴσθιν ὡς τὰ ἀπὸ τῆς . . | ὡς τὸ ἀπὸ τῶν              |
| 4. ΖΔ . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .    | ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.           |
| 5. τῶν . . . . .             | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ΓΖ, ΖΔ . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .    | ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.       |
| 7. τετραγώνῳ, . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . .    | deest.                     |
| 8. ἴσθι . . . . .            | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |

## A L I T E R\*.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                            | CODEX 190.                                                 | EDITIO OXONIE.             |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 2. ἴστω . . . . .                                                              | deest. . . . .                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 3. Εκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ, . .                                                 | Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, . .                                      | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τετάρτη . . . . .                                                           | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest.                     |
| 5. τῷ . . . . .                                                                | τὸ . . . . .                                               | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἴστί . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest..                    |
| 7. ἴστί . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest.                     |
| 8. ἴστί . . . . .                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest.                     |
| 9. ἴστιν . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest.                     |
| 10. ἴστιν . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest.                     |
| 11. ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρ-<br>της . . . . .                                 | ῥητῆς τῆς ZE καὶ ἀπο-<br>τομῆς τετάρτης τῆς<br>ZE. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 12. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται<br>ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τε-<br>τάρτης . . . . . | <i>Id.</i> . . . . .                                       | deest.                     |
| 13. ἄρα . . . . .                                                              | deest. . . . .                                             | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO CVII.

|                       |                      |                            |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. καὶ αὐτὴ . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. καὶ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. αἱ . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | ἡ                          |
| 4. ἴστί τὸ . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | τὸ μὲν                     |

## A L I T E R\*\*.

|                   |                  |                            |
|-------------------|------------------|----------------------------|
| 2. Εστω . . . . . | Εστω ἡ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ῥητὴ . . . . . | ῥητὸν . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἄρα . . . . .  | ἄρα ἡ . . . . .  | concordat cum edit. Paris. |

\* Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post propositionem 116, et in capite habet ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἴστί; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 106.

\*\* Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post ἄλλως præcedens, et habet in capite ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσα σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἴστί; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 107.



## PROPOSITIO CVIII.

| EDITIO PARISIENSIS.     | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.             |
|-------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. ἔστω . . . . .       | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. καὶ . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. τι . . . . .         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τετραγώνων . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO CIX.

|                                                               |                      |                            |
|---------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. χωρίον . . . . .                                           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. μὲν . . . . .                                              | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 3. ἄρα μὲν . . . . .                                          | μὲν ἄρα . . . . .    | ἄρα ἔστιν                  |
| 4. ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέ-<br>τρου. . . . .                   | ἢ οὐ. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 5. περιέχομενον . . . . .                                     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 6. ἄρα . . . . .                                              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτίεστι τὸ<br>ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἔστιν. . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITION CX.

|                               |                         |                            |
|-------------------------------|-------------------------|----------------------------|
| 1. αὐτῇ . . . . .             | ταύτῃ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |
| 2. ἄρα ἐστὶ δευτέρα . . . . . | δευτέρα ἔστιν . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. πρώτη ἔστιν. . . . .       | <i>Id.</i> . . . . .    | ἐστὶ πρώτη.                |
| 4. τῆς ΖΚ μείζον . . . . .    | <i>Id.</i> . . . . .    | μείζον τῆς ΖΚ              |
| 5. ἑαυτῇ, . . . . .           | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἄρα . . . . .              | deest. . . . .          | concordat cum edit. Paris. |

## PROPOSITIO CXI.

|                                |                                                                                                                                                     |                            |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. τοῦ . . . . .               | <i>Id.</i> . . . . .                                                                                                                                | deest.                     |
| 2. ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, . . . . . | τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκο-<br>λούθως ῥητὴ ἑκατέρω<br>τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμ-<br>μετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ<br>ἐπὶ ἀσύμμετρόν ἐστιν<br>ὑπόκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, | concordat cum edit. Paris. |

# EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS. 513

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

|                                                     |                                                                                                  |                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. ἴστί . . . . .                                   | deest. . . . .                                                                                   | concordat cum edit. Paris.                                                                                                |
| 4. Εἰ μὲν δὴ . . . . .                              | Id. . . . .                                                                                      | προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. Ἦτοι δὲ<br>ἡ ΘΖ τῆς ΖΗ μίζον δύναται<br>τῷ ἀπὸ συμμεύρου ἑαυτῇ, ἢ<br>τῷ ἀπὸ ἀσυμμεύρου. Εἰ μὲν οὖν |
| 5. τῇ ΖΗ μήκει. . . . .                             | Id. . . . .                                                                                      | μήκει τῇ ΖΗ.                                                                                                              |
| 6. ἴστί ἄρα τρίτη . . . . .                         | τρίτη ἴστί . . . . .                                                                             | concordat cum edit. Paris.                                                                                                |
| 7. μίσης ἀποτομή ἴστί δευτέρα.                      | μίσης ἀποτομή δευτέρα<br>ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτίσσι<br>τὸ ΕΓ δυναμένη μίσης<br>ἀποτομή ἴστί δευτέρα. | ἀποτομή μίσης δευτέρα.                                                                                                    |
| 8. μήκει, καὶ οὐδέτερα . . .                        | καὶ οὐδέτερα . . . . .                                                                           | concordat cum edit. Paris.                                                                                                |
| 9. ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἴστί ἄρα<br>ἑκτη ἡ ΚΘ. . . . . | ἡ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἑκτη<br>ἴστί ἡ ΚΘ. . . . .                                                   | ἑκκεμμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀπο-<br>τομή ἴστί ἄρα ἑκτη ἡ ΚΘ.                                                              |
| 10. ἡ . . . . .                                     | deest. . . . .                                                                                   | concordat cum edit. Paris.                                                                                                |
| 11. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, . . . . .                          | Id. . . . .                                                                                      | ὥστε ἡ τὸ ΛΘ,                                                                                                             |

## PROPOSITIO CXII.

|                                                                                                                                                   |                |                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------|
| linea 16 τῆς . . . . .                                                                                                                            | Id. . . . .    | τῇ                         |
| 2. μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ . .                                                                                                                   | Id. . . . .    | τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν,        |
| 3. πρώτη ἴστί . . . . .                                                                                                                           | Id. . . . .    | ἴστί πρώτη                 |
| 4. μήκει· καὶ . . . . .                                                                                                                           | καὶ . . . . .  | μήκει·                     |
| 5. τῇ . . . . .                                                                                                                                   | ἡ . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 6. ἡ . . . . .                                                                                                                                    | τῇ . . . . .   | concordat cum edit. Paris. |
| 7. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἴστί ἡ<br>ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἴστί ἡ<br>ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἴστί καὶ ἡ ΖΗ.<br>Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἴστί ἡ ΔΖ<br>τῇ ΖΗ μήκει, . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 8. μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί . .                                                                                                                      | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 9. εἴσι . . . . .                                                                                                                                 | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 10. ἴστί . . . . .                                                                                                                                | Id. . . . .    | deest.                     |

## COROLLARIUM\*.

|                     |             |       |
|---------------------|-------------|-------|
| 1. τοῦ τε . . . . . | Id. . . . . | τό τε |
|---------------------|-------------|-------|

\* Hoc corollarium in omnibus adest codicibus.  
II.

# 514 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS. | CODEX 190.           | EDITIO OXONIE.             |
|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 2. ἐπὶ τῇ . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἔτι                        |
| 3. αἱ μὲν . . . . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῇ . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. μετὰ . . . . .   | κατὰ . . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. Μίσης . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | Μίσση                      |
| 7. Μίσης . . . . .  | <i>Id.</i> . . . . . | Μίσση                      |

## PROPOSITIO CXIII.

|                                                                               |                       |                            |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| 1. ἔξει τάξιν . . . . .                                                       | <i>Id.</i> . . . . .  | ἔχει                       |
| 2. ὀνομάτων δὲ . . . . .                                                      | <i>Id.</i> . . . . .  | δὲ ὀνομάτων                |
| 3. ἔξει . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .  | ἔχει                       |
| 4. τῇ Η ἴση . . . . .                                                         | <i>Id.</i> . . . . .  | ἴση τῇ Η                   |
| 5. ἴσθιν . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 6. τὴν KE, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγου-<br>μένων . . . . .                             | KE ἐν ἡγούμενον . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 7. τὴν . . . . .                                                              | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 8. τὴν . . . . .                                                              | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 9. ἴσθι . . . . .                                                             | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 10. ἴσθι . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 11. ἴσθι . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 12. τὴν . . . . .                                                             | deest. . . . .        | concordat 'cum edit Paris. |
| 13. τὴν . . . . .                                                             | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 14. καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει·                                                | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 15. ἴσθι . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 16. καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει·                                                | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 17. εἰσὶ . . . . .                                                            | <i>Id.</i> . . . . .  | deest.                     |
| 18. ἑαυτῇ, . . . . .                                                          | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 19. οὐδέτερα . . . . .                                                        | οὐδέτερα . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 20. οὐδέτερα . . . . .                                                        | οὐδέτερα . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 21. καὶ ἡ ΖΚ τῆς KE μᾶλλον δυ-<br>ῖσθιται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου<br>ἑαυτῇ. . . . . | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 22. οὐδέτερα . . . . .                                                        | οὐδέτερα . . . . .    | concordat cum edit. Paris. |
| 23. τὰ . . . . .                                                              | deest. . . . .        | concordat cum edit. Paris. |
| 24. τάξιν ἔχει . . . . .                                                      | <i>Id.</i> . . . . .  | ἔχει τάξιν                 |

PROPOSITIO CXIV.

| EDITIO PARISIENSIS.             | COD. 190.                                                      | EDITIO OXONIE.             |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 1. ἴστί τοῖς . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .                                           | deest.                     |
| 2. καὶ . . . . .                | <i>Id.</i> . . . . .                                           | deest.                     |
| 3. ἐστὶ ἡ . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . .                                           | ὅτι ἡ                      |
| 4. ἴστω . . . . .               | ἴστω καὶ . . . . .                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 5. παρατίθεται . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . .                                           | παράκειται                 |
| 6. ἴσον ἴστί . . . . .          | <i>Id.</i> . . . . .                                           | ἴσιν ἴσον                  |
| 7. τὴν Η. . . . .               | in reliqua demonstra-<br>tione vocabulum<br>τὴν deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 8. ὡς . . . . .                 | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 9. εἰς . . . . .                | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 10. οὕτως . . . . .             | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 11. οὕτως . . . . .             | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 12. οὕτως . . . . .             | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 13. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης     | τὸ ἀπὸ τῆς α . . . . .                                         | concordat cum edit. Paris. |
| 14. ἴστί . . . . .              | <i>Id.</i> . . . . .                                           | deest.                     |
| 15. ἴστί . . . . .              | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 16. ἄρα . . . . .               | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 17. ΓΔ τῇ ΖΘ . . . . .          | ΘΖ τῇ ΓΔ . . . . .                                             | concordat cum edit. Paris. |
| 18. διὰ ΒΓ, ΓΔ . . . . .        | ΒΓ, ΓΔ διὰ . . . . .                                           | concordat cum edit. Paris. |
| 19. ἄρα ὀνομάτων ἴσιν . . . . . | ὀνομάτων ἴσιν ἄρα . . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 20. δυνήσεται . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .                                           | δύναται                    |
| 21. καὶ . . . . .               | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 22. δυνήσεται . . . . .         | <i>Id.</i> . . . . .                                           | δύναται                    |
| 23. καὶ . . . . .               | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 24. ἴστί . . . . .              | deest. . . . .                                                 | concordat cum edit. Paris. |

PROPOSITIO CXV.

|                     |                      |                            |
|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. τί . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 2. τοῖς . . . . .   | <i>Id.</i> . . . . . | τοῖς ἀπὸ                   |
| 3. ἡ . . . . .      | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 4. τί . . . . .     | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                     |
| 5. τὴν ΜΛ . . . . . | ΜΛ . . . . .         | concordat cum edit. Paris. |

## 516 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

| EDITIO PARISIENSIS.                                | CODEX 190.                                     | EDITIO OXONIÆ.             |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------|
| 6. τὴν KM. . . . .                                 | KM. . . . .                                    | concordat cum edit. Paris. |
| 7. ἴστί . . . . .                                  | <i>Id.</i> . . . . .                           | deest.                     |
| 8. τὴν . . . . .                                   | deest. . . . .                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 9. τῶν . . . . .                                   | deest. . . . .                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 10. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον<br>ἴστί τῶ . . . . . | τῶ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB<br>ἴσον ἴστί τὸ . . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 11. καὶ . . . . .                                  | deest. . . . .                                 | concordat cum edit. Paris. |
| 12. ἴστί . . . . .                                 | <i>Id.</i> . . . . .                           | deest.                     |

### COROLLARIUM.

|                         |                                          |                            |
|-------------------------|------------------------------------------|----------------------------|
| 1. περιέχισθαι. . . . . | περιέχισθαι. Οπὲρ ἴδι<br>διίξαι. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
|-------------------------|------------------------------------------|----------------------------|

### PROPOSITIO CXVI.

|                                 |                      |                            |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. οὐδεμία . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 2. οὐδεμία . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 3. ἴστιν . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 4. τῶν πρότερόν ἴστιν . . . . . | <i>Id.</i> . . . . . | πρότερόν ἴστιν             |
| 5. ἴστιν . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |
| 6. οὐδεμία . . . . .            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris. |

### ALITER\*.

|                                           |                              |                            |
|-------------------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 2. γίνονται, . . . . .                    | γίνονται, . . . . .          | concordat cum edit. Paris. |
| 3. οὐδεμίᾳ πρότερόν ἴστιν ἢ αὐτή. . . . . | τῶν πρότερον ἢ αὐτή. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 4. ἴστί . . . . .                         | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                     |
| 5. ἴστιν : . . . . .                      | <i>Id.</i> . . . . .         | deest.                     |
| 6. Ἀπὸ τῆς . . . . .                      | Ἀπὸ . . . . .                | concordat cum edit. Paris. |

### PROPOSITIO CXVII\*\*.

|                   |                |                            |
|-------------------|----------------|----------------------------|
| 2. ἴστι . . . . . | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |
| 3. τὸν . . . . .  | deest. . . . . | concordat cum edit. Paris. |

\* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

\*\* In codicibus hæc propositio numero non signatur.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                                                        | CODEX 190.           | EDITIO OXONIÆ.                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 4. ἔχει δὲ . . . . .                                                                                                       | <i>Id.</i> . . . . . | καὶ ἔχει                                                                           |
| 5. μονὰς . . . . .                                                                                                         | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 6. ἴστιν . . . . .                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |
| 7. τῆς ΓΑ . . . . .                                                                                                        | τοῦ ΑΓ . . . . .     | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 8. ἴστιν . . . . .                                                                                                         | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |
| 9. αἱ . . . . .                                                                                                            | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 10. ἀριθμοὶ . . . . .                                                                                                      | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 11. αὐτοῖς . . . . .                                                                                                       | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 12. ἴστιν . . . . .                                                                                                        | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 13. αὐ . . . . .                                                                                                           | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 14. διπλάσιον ἴστί . . . . .                                                                                               | διπλάσιος . . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 15. ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ·<br>διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ<br>ἀπὸ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ<br>τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· . . . | <i>Id.</i> . . . . . | ἴστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς<br>ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ<br>Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· |
| 16. ἀσύμμετρος ἄρα. , . . .                                                                                                | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |

ALITER\*.

|                               |                      |                                                                                    |
|-------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. deest. . . . .             | deest. . . . .       | Δεικτέον δὲ καὶ ἰτέρως, ὅτι ἀσύμμετρος ἴστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ. |
| 2. Εστω . . . . .             | <i>Id.</i> . . . . . | Εστω γάρ                                                                           |
| 3. σύμμετρος· καὶ γιγνέτω . . | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 4. οἱ ΕΖ, Η· . . . . .        | <i>Id.</i> . . . . . | deest.                                                                             |
| 5. τὸ . . . . .               | ὁ . . . . .          | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 6. τὸ . . . . .               | τὸν . . . . .        | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 7. τοῦ . . . . .              | τῆς . . . . .        | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 8. διπλάσιος . . . . .        | διπλάσιον . . . . .  | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 9. τοῦ . . . . .              | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 10. τοῦ . . . . .             | deest. . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |
| 11. αὐτοῦ . . . . .           | αὐτῇ . . . . .       | concordat cum edit. Paris.                                                         |

\* Hoc aliter in omnibus adest codicibus.

# 518 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

## SCHOLIUM\*.

| EDITIO PARISIENSIS.                                                                           | CODEX 190.                                                                                      | EDITIO OXONIE.                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 2. εὐθείων . . . . .                                                                          | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | deest.                                                                  |
| 3. εἶδος . . . . .                                                                            | ἐπίπιδον . . . . .                                                                              | concordat cum edit. Paris.                                              |
| 4. καὶ . . . . .                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | deest.                                                                  |
| 5. τὰς . . . . .                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | τοὺς                                                                    |
| 6. καὶ . . . . .                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | deest.                                                                  |
| 7. ἀσυμμέτρων χωρίων, . . .                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | χωρίων ἀσυμμέτρων,                                                      |
| 8. τοῖς . . . . .                                                                             | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | deest.                                                                  |
| 9. καὶ . . . . .                                                                              | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | deest.                                                                  |
| 10. ὥς . . . . .                                                                              | deest. . . . .                                                                                  | concordat cum edit. Paris.                                              |
| 11. πρὸς ἀλλήλους . . . . .                                                                   | <i>Id.</i> . . . . .                                                                            | ἀλλήλοις                                                                |
| 12. γίγονεν ἵτι οὐ μόνον ἐπὶ τε<br>γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἵστι<br>συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, . | γίγονε διὸ οὐ μόνον ἐπὶ<br>τε γραμμῶν καὶ ἐπιφα-<br>νειῶν ἵστι συμμετρία<br>καὶ ἀσυμμετρία, . . | γίγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν<br>ἵστι συμμετρία καὶ ἀσυμμε-<br>τρία, |

\* Hoc scholium, quod in omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex sequen-  
tibus pendet.

FINIS TOMI SECUNDI.

# ERRATA.

| Pagina | linea     |                                | Pagina | linea  |                                 |
|--------|-----------|--------------------------------|--------|--------|---------------------------------|
| xxxiv, | 5,        | ea et, <i>lege</i> ea et fere. | 365*,  | 4,     | incommensurable, <i>le-</i>     |
| xxliv, | alineæ 3, | inaliquot exemplaribus         |        |        | <i>ge</i> commensurable.        |
|        |           | pro B, <i>lege</i> A.          | 365*,  | 10, b. | rationelle et incom-            |
| 164*,  | 5, b.     | encore, <i>lege</i> déjà.      |        |        | mensurable, <i>lege</i> ra-     |
| 166*,  | 4, b.     | irrationel, <i>lege</i> ra-    |        |        | tionelle et commen-             |
|        |           | tionel.                        |        |        | surable.                        |
| 171,   |           | littera r deest in figurâ.     | 366*,  | 6,     | la droite, <i>lege</i> le pa-   |
| 254*,  | 3, b.     | la droite AE, <i>lege</i> la   |        |        | rallélogramme.                  |
|        |           | puissance de AE.               | 367*,  | 2,     | incommensurable, <i>le-</i>     |
| 264*,  |           | littera B deest in figurâ.     |        |        | <i>ge</i> commensurable.        |
| 277*,  | 7, b.     | la somme, <i>lege</i> la som-  | 374*,  | 4,     | la droite, <i>lege</i> le pa-   |
|        |           | me des.                        |        |        | rallélogramme.                  |
| 279,   |           | in figurâ littera B ponat-     | 394*,  | 4,     | ZH, <i>lege</i> ZK; et eadem    |
|        |           | tur in loco litteræ E,         |        |        | correctio in linguâ             |
|        |           | et vice versâ.                 |        |        | græcâ et in linguâ              |
| 283*,  | 3,        | AB, <i>lege</i> AB.            |        |        | latinâ.                         |
| 308*,  | 6,        | surface médiale, <i>lege</i>   | 394*,  | 8,     | incommensurable, <i>le-</i>     |
|        |           | surface rationelle.            |        |        | <i>ge</i> commensurable.        |
| 316*,  | 5,        | commensurable, <i>lege</i>     | 394*,  | 10,    | ἀσυνμίτρου, <i>lege</i> συμμί-  |
|        |           | incommensurable.               |        |        | τρου.                           |
| 329*   |           | in secundâ lineâ figuræ        | 394*,  | 11,    | incommensurabili, <i>le-</i>    |
|        |           | littera B ponatur in           |        |        | <i>ge</i> commensurabili.       |
|        |           | loco litteræ E.                | 396*,  | 2,     | 21, 10, <i>lege</i> 32, 10.     |
| 251,   | 5,        | 18. 10, <i>lege</i> 19. 10.    | 396,   | 3,     | 23, 10, <i>lege</i> 21, 10.     |
| 352,   | 3,        | AOM, <i>lege</i> AOM.          | 405*,  | 1, b.  | ΘΚ, <i>lege</i> ΘΕ, et eadem    |
| 358*,  | 1,        | quarré de AH, <i>lisez</i>     |        |        | correctio in linguâ             |
|        |           | quarré de EH.                  |        |        | græcâ et linguâ latinâ.         |
| 362*,  | 2, b.     | ἀπὸ, <i>lege</i> ὑπὸ.          | 405,   | 1, b.  | ΘΚ, ΒΔ, <i>lege</i> ΘΕ, ΒΔ.     |
| 362*,  | 3,        | quadrato autem ex,             | 446*,  | 3, b.  | plus grande que ΔΑ,             |
|        |           | <i>lege</i> rectangulo au-     |        |        | <i>lege</i> plus grande que     |
|        |           | tem sub.                       |        |        | ΕΑ.                             |
| 362*,  | 2,        | quarré de, <i>lege</i> rectan- | 446*,  | 1, b.  | ΔΑ, <i>lege</i> ΔΑ.             |
|        |           | gle sous.                      | 479*,  | 1, b.  | avant la rationelle, <i>le-</i> |
| 365*,  | 5,        | ἀσύνμιτρος, <i>lege</i> σύμμι- |        |        | <i>ge</i> avant la médiale.     |
|        |           | τρος.                          |        |        |                                 |
| 365*,  | 6,        | incommensurabilis, <i>le-</i>  |        |        |                                 |
|        |           | <i>ge</i> commensurabilis.     |        |        |                                 |