

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES ŒUVRES D'EUCLIDE.

Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris , aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR , rue de Provence , n° 25 ;
TREUTTEL et WURTZ , libraires à Paris , rue de Lille , n° 17 ;
FIRMIN DIDOT , rue Jacob , n° 24 ;
Madame veuve COURCIER , quai des Augustins , n° 57.

LES OEUVRES D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS, .

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

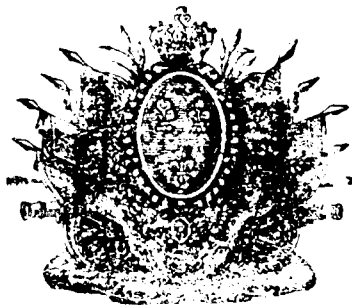
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME SECOND.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1816.

BIBLIOTHECA PALAT.
VINDOBONENSIS.

— P R É F A C E..

PRÆFATIO.

Hoc volumen, quo liber octavus, nonus et decimus continetur, jampridem editum fuisset, nisi plura impedimenta, quæ sane non prævideram, moram aliquam attulissent opusque intermisissent. Tertium et ultimum volumen prelo subicitur, et sub ortum proximæ æstatis prodibit in lucem.

Malignus quidam rumor percrebuerat me jam non habere in manibus vaticanæ bibliothecæ codicem 190, ac proinde ab incæpto destitisse. Quo rumore nihil absurdius; rogante enim et impetrante regni interioris administro, codex ille fidei meæ creditus est, ac penes me erit, donec opus meum in lucem sit editum.

Interim, omiſſâ aliquandiu Euclidis mei curâ, ultimam Apollonio meo manum admovi, quod quidem opus absolutum ac sub judice est, nempe Scientiarum Academiâ. Typis mandabitur græcis, latinis et gallicis: accedent variæ lectiones regiæ bibliothecæ codicum, necnon et Oxoniæ editionis, quæ, fatente ipso editore, confecta est juxta duos græcos codices, scatentes vitiiis, ac prorsus iisdem, utpote ex uno et eodem codice exaratos.

Hæc editio complectetur Conicorum Apollonii septem libros qui supersunt, Pappi lemmata, Eutocii commentarios, et Sereni duos libros de cylindro et cono.

Archimedis operibus necnon Eutocii commentariis edendis græce, latine et gallice operam impendo. Quando nitidissima Oxoniæ editio prelo fuit subjecta, jam obierat Torelli, vir magnæ doctrinæ, antequam ultimam manum Archimedi suo admovisset, et ob id maculis scatet. Quod si

P R É F A C E.

Ce volume, qui renferme le huitième, le neuvième et le dixième livre, aurait paru depuis long-temps, si plusieurs obstacles qu'il ne m'était pas donné de prévoir, n'eussent retardé et suspendu plusieurs fois l'impression de mon ouvrage. Le troisième et dernier volume est sous presse, et paraîtra au commencement de l'été prochain.

On avait répandu le bruit que n'ayant plus entre mes mains le manuscrit 190 de la bibliothèque du Vatican, j'avais abandonné mon entreprise : ce bruit était sans fondement, ce manuscrit n'est jamais sorti de mes mains ; à la sollicitation du Ministre de l'intérieur, ce volume sera laissé à ma disposition jusqu'à la publication entière de mon ouvrage.

Les interruptions de l'impression de mon Euclide m'ont laissé le temps nécessaire pour mettre la dernière main à mon Apollonius. Mon travail est terminé, et soumis à l'examen de l'Académie des Sciences. Les œuvres d'Apollonius seront imprimées en grec, en latin et en français, avec les variantes des manuscrits grecs de la bibliothèque du Roi et de l'édition d'Oxford, laquelle, de l'aveu même de l'éditeur, ne fut faite que d'après deux manuscrits grecs qui avaient les mêmes défauts, parce qu'ils étaient tous les deux la copie d'un seul et même manuscrit.

Cette édition renfermera les sept livres des Coniques qui nous restent d'Apollonius, les lemmes de Pappus, les commentaires d'Eutocius, et les deux livres du cylindre et du cône de Sérénus.

Je prépare une édition grecque, latine et française des œuvres d'Archimède et des commentaires d'Eutocius. Lorsque la belle édition d'Oxford fut imprimée, le savant Torelli était mort avant d'avoir mis la dernière main à son Archimède, et c'est à cause de cela que cette édition fourmille de

hæc editio Torelli vivente facta fuisset, non equidem hoc ultimum opus aggressus fuisset. Si forte accidit ut mors immatura me quoque prius arripiat, quam Archimedis opera penitus absolverim, tum opus imperfectum ante novissimam diem exuri jubebo, ne quis, me mortuo, illud prelo subjicere velit.

Liber decimus Euclidis Elementorum vix quibusdam geometris nostratibus notus est: quin et bene multi illum habent supervacaneum et intellectu perdifficilem.

Utrumque citra manifestam rerum fidem. Hic liber continet et plures propositiones geometris perutiles, et nonnullas illis semper admirandas.

Fateor equidem studentis animum, primo intuitu posse deterrerî et avocari, conspectis septemdecim et centum propositionibus hoc in libro contentis; sed unaquæque, velut è fonte communi, derivatur è quibusdam definitionibus ac præcipuis, iisque paucissimis, propositionibus, quarum ope reliqua facillime demonstrantur. Ad hoc hujus libri partes ita inter se dispositæ sunt, ut earum non seriem et juncturam modo, sed concentum et harmoniam oculus, primo conjectu, percipiat. Illic vere notandus est mirabilis ille ordo quem in omnibus suis operibus Euclides constituit.

Hæ vero libri decimi sunt definitiones et propositiones. Hæc tabula synoptica mihi aptissima visa est ad illius comprehensionem acquirendam.

D E F I N I T I O N E S.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eâdem mensurâ mesurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatîo mesurantur.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

fautes. Si cette édition eût été faite de son vivant, je ne me serais certainement pas chargé de ce dernier travail. Il est très-possible qu'une mort prématurée vienne aussi me surprendre avant que j'aye mis la dernière main aux œuvres d'Archimède. Mais si cela arrive, j'ordonnerai, avant mon dernier jour, de livrer aux flammes un travail imparfait, qu'on serait peut-être tenté de publier après ma mort.

Le dixième livre des Éléments d'Euclide est aujourd'hui très-peu connu des géomètres français : ils regardent généralement ce livre comme superflu, et comme étant très-difficile à entendre.

Ces deux reproches me paraissent mal fondés. Ce livre renferme un grand nombre de propositions utiles aux géomètres, et une foule d'autres qui sont dignes de toute leur admiration.

Les cent dix-sept propositions que contient ce dixième livre seraient peut-être capables de décourager, au premier abord, celui qui veut l'étudier ; mais tout dépend dans ce livre de quelques définitions, et d'un très-petit nombre de propositions fondamentales, à l'aide desquelles tout le reste se démontre avec la plus grande facilité. Ajoutons à cela que les parties en sont tellement disposées, que l'œil en saisit l'ensemble sans le moindre effort. C'est là surtout qu'Euclide se fait remarquer par l'ordre admirable qu'il a su établir dans tous ses ouvrages.

Voici les définitions et les propositions du dixième livre. Ce tableau synoptique me paraît très-propre à en faciliter l'étude.

D É F I N I T I O N S.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs carrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocetur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

PROP. I. Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

PROP. II. Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. III. Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

PROP. IV. Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

PROP. V. Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

PROP. VI. Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

PROP. VII. Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

5. Ces choses étant supposées, on démontre qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le carré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les carrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des carrés, lorsque ces surfaces sont des carrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des carrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des carrés.

PROP. I. Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

PROP. II. Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. III. Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. IV. Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. V. Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VI. Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

PROP. VII. Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VIII. Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. IX. A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

PROP. X. Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.

PROP. XI. Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

PROP. XII. Eidem magnitudini commensurabiles et inter se sunt commensurabiles.

PROP. XIII. Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. XIV. Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

PROP. XV. Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

PROP. XVI. Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et

PROP. VIII. Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incômmensurables.

PROP. IX. Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

PROP. X. Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

PROP. XI. Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

PROP. XII. Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles.

PROP. XIII. Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

PROP. XIV. Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

PROP. XV. Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième; et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

PROP. XVI. Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme

tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

PROP. XVII. Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

PROP. XVIII. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XIX. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XX. Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

sera commensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est commensurable avec une d'elles , les grandeurs proposées seront commensurables.

PROP. XVII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables , leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles , les grandeurs proposées seront incommensurables.

PROP. XVIII. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite , et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur , la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande , et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite , ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

• PROP. XIX. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite , et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur , la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée , et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite , ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

PROP. XX. Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur , suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé , est rationel.

PROP. XXI. Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXII. Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

PROP. XXIII. Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXIV. Recta mediæ commensurabilis media est.

PROP. XXV. Sub mediis longitudine commensurabilibus secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

PROP. XXVI. Sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum, vel rationale vel medium est.

PROP. XXVII. Medium non medium superat rationali.

PROP. XXVIII. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

PROP. XXIX. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

PROP. XXX. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXXI. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

PROP. XXXII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXI. Si une surface rationnelle est appliquée à une droite rationnelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

PROP. XXII. Le rectangle compris sous des droites rationnelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appèlera médiale.

PROP. XXIII. Le quarré d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

PROP. XXIV. Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

PROP. XXV. Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

PROP. XXVI. Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationnel ou médial.

PROP. XXVII. Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

PROP. XXVIII. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationnelle.

PROP. XXIX. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale.

PROP. XXX. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXI. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

PROP. XXXII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationnel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXIII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

PROP. XXXIV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

PROP. XXXV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.

PROP. XXXVI. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

PROP. XXXVII. Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

PROP. XL. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium; tota recta irrationalis est, vocetur autem major.

PROP. XLI. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est, vocetur autem rationale et medium potens.

PROP. XLII. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum

PROP. XXXIII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

PROP. XXXIV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

PROP. XXXV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationnel.

PROP. XXXVI. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites.

PROP. XXXVII. Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

PROP. XXXVIII. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

PROP. XXXIX. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

PROP. XL. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

PROP. XLI. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationnel, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut être rationnelle et une médiale.

PROP. XLII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces

sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

PROP. XLIII. Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

PROP. XLIV. Ex binis mediis prima ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLV. Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVI. Major ad idem solùm punctum dividitur.

PROP. XLVII. Recta rationale et medium potens ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVIII. Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quam minus plus possit quadrato ex recta sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si vero neutrum, sexta.

droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationnelle et sera appelée celle qui peut deux médiales.

PROP. XLIII. La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

PROP. XLIV. La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLV. La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVI. La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVII. La droite qui peut une rationnelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVIII. La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROP. XLIX. Invenire ex binis nominibus primam.

PROP. L. Invenire ex binis nominibus secundam.

PROP. LI. Invenire ex binis nominibus tertiam.

PROP. LII. Invenire ex binis nominibus quartam.

PROP. LIII. Invenire ex binis nominibus quintam.

PROP. LIV. Invenire ex binis nominibus sextam.

PROP. LV. Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

PROP. LVI. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

PROP. LVII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

PROP. LVIII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

PROP. LIX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

PROP. LX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

PROP. LXI. Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

PROP. LXII. Quadratum primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

PROP. LXIII. Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

PROP. LXIV. Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

PROP. XLIX. Trouver la première de deux noms.

PROP. L. Trouver la seconde de deux noms.

PROP. LI. Trouver la troisième de deux noms.

PROP. LII. Trouver la quatrième de deux noms.

PROP. LIII. Trouver la cinquième de deux noms.

PROP. LIV. Trouver la sixième de deux noms.

PROP. LV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

PROP. LVI. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

PROP. LVII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

PROP. LVIII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure.

PROP. LIX. Si une surface est comprise sous une irrationnelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LX. Si une surface est comprise sous une rationnelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXI. Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

PROP. LXII. Le carré de la première de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la seconde de deux noms.

PROP. LXIII. Le carré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

PROP. LXIV. Le carré d'une majeure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

PROP. LXV. Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

PROP. LXVI. Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

PROP. LXVII. Recta ei quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.

PROP. LXVIII. Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

PROP. LXIX. Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

PROP. LXX. Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

PROP. LXXI. Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

PROP. LXXII. Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

PROP. LXXIII. Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

PROP. LXXIV. Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

PROP. LXXV. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

PROP. LXXVI. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commen-

PROP. LXV. Le carré d'une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

PROP. LXVI. Le carré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

PROP. LXVII. La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXVIII. La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXIX. Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

PROP. LXX. Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXI. Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

PROP. LXXII. Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationnelles ; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXIII. Deux surfaces médiales incommensurables entr'elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXXIV. Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière ; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

PROP. LXXV. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le premier apotome de la médiale.

PROP. LXXVI. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensu-

surabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

PROP. LXXVII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum vero sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

PROP. LXXVIII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

PROP. LXXIX. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

PROP. LXXX. Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

PROP. LXXXI. Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

PROP. LXXXII. Mediæ apotomæ secundæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

PROP. LXXXIII. Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex

nable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le second apotome de la médiale.

PROP. LXXVII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

PROP. LXXVIII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationnel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. LXXIX. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. LXXX. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

PROP. LXXXI. Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

PROP. LXXXII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

PROP. LXXXIII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de

ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero bis sub ipsis medium.

PROP. LXXXIV. Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit rectâ potentiâ incommensurabilis existens toti; et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale.

PROP. LXXXV. Ei quæ cum medio medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

ces droites rationnelle , et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXIV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationnel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appellera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appellera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera quatrième apotome.

5. Si vero sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

PROP. LXXXVI. Invenire primam apotomen.

PROP. LXXXVII. Invenire secundam apotomen.

PROP. LXXXVIII. Invenire tertiam apotomen.

PROP. LXXXIX. Invenire quartam apotomen.

PROP. XC. Invenire quintam apotomen.

PROP. XCI. Invenire sextam apotomen.

PROP. XCII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

PROP. XCIII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

PROP. XCIV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

PROP. XCV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

PROP. XCVI. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

PROP. XCVII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

PROP. XCVIII. Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

PROP. XCIX. Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

PROP. C. Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera sixième apotome.

PROP. LXXXVI. Trouver un premier apotome.

PROP. LXXXVII. Trouver un second apotome.

PROP. LXXXVIII. Trouver un troisième apotome.

PROP. LXXXIX. Trouver un quatrième apotome.

PROP. XC. Trouver un cinquième apotome.

PROP. XCI. Trouver un sixième apotome.

PROP. XCII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

PROP. XCIII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

PROP. XCIV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

PROP. XCV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

PROP. XCVI. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. XCVII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. XCVIII. Le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome.

PROP. XCIX. Le carré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second apotome.

PROP. C. Le carré d'un second apotome médial appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

PROP. CI. Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

PROP. CII. Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

PROP. CIII. Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

PROP. CIV. Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est atque ordine eadem.

PROP. CV. Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

PROP. CVI. Recta minori commensurabilis minor est.

PROP. CVII. Recta ei quæ cum rationali medium totum facit oommensurabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

PROP. CVIII. Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

PROP. CIX. Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

PROP. CX. Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

PROP. CXI. Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum faciens.

PROP. CXII. Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

PROP. CXIII. Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus.

PROP. CI. Le quarré d'une mineure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

PROP. CII. Le quarré d'une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

PROP. CIII. Le quarré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

PROP. CIV. Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

PROP. CV. Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

PROP. CVI. Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

PROP. CVII. La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationelle un tout médial.

PROP. CVIII. Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CIX. Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

PROP. CX. Une surface rationelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationnelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

PROP. CXI. Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CXII. Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

PROP. CXIII. Le quarré d'une rationelle étant appliqué à une droite de

applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

PROP. CXIV. Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

PROP. CXV. Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; recta spatium potens rationalis est.

PROP. CXVI. A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

PROP. CXVII. Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

Hæ sunt definitiones et propositiones libri decimi, quæ omnes propositiones perspicue, simpliciterque demonstrantur.

Hoc volumen permultas lectiones varias continet. Ingens multitudo rerum supervacanearum in textum libri decimi introductæ fuerant; quæ omnes e textu ejectæ sunt.

Aliter demonstrata, corollaria, lemmata et scholia quibus librum decimum expurgavi reperiuntur cum versionibus latinis et gallicis in lectionibus variantibus.

Quæ e textu libri decimi ejecta sunt, illa Euclidi abjudicanda semper fuerunt visa; et quæ ejeci, ea et ex omnibus optimis codicibus fuerunt ejecta. Si quando erravi, hoc erit parvi momenti; adde quod quæ ejecta sunt e textu in lectionibus variantibus reperiuntur. Cæterum mihi erat norma semper fere certa discernendi quæ sunt Euclidis ex illis quæ ab Euclide sunt aliena.

deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

PROP. CXIV. Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

PROP. CXV. Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationnelle.

PROP. CXVI. Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

PROP. CXVII. Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Telles sont les définitions et les propositions du dixième livre : toutes ces propositions sont démontrées d'une manière claire et simple.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes. Une foule de superfluités avaient été introduites dans le texte du dixième livre; je les en ai fait disparaître.

Les *autrement*, les corollaires, les lemmes et les scholies dont j'ai purgé le dixième livre se trouvent dans les variantes avec leur traduction latine et française.

Ce que j'ai supprimé dans le dixième livre a toujours été regardé comme indigne d'Euclide; ajoutez à cela que les suppressions que j'ai faites sont autorisées presque toutes par les meilleurs manuscrits. Si j'ai erré en quelque chose, le mal n'est pas grand; puisque ce que l'on ne trouve pas dans le texte, on le trouve dans les variantes. Au reste, j'avais une règle presque toujours infallible de discerner ce qui appartient à Euclide de ce qui lui est étranger.

Antiqui geometræ, Euclides scilicet, Archimedes et Apollonius, solebant ad propositum directe tendere, nunquam de viâ declinantes demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam ipsis erant necessaria. Quæ cum ita sint, fere impossibile est illum in errorem labi qui argumentum callide animo complectitur. Accedit illud quod in omnibus ejectis nec Euclidis concinitatem agnoscere est, nec verba ipsi familiaria.

Inter ejecta ex decimo libro invenire est aliter demonstrata quæ nullius sunt momenti. Vide *aliter* propositionis 1, et scholium propositionis 22, quod merum est *aliter*.

Invenire est demonstrationes quæ in libris præcedentibus reperiuntur. Vide lemmata propositionum 31, 32, 33.

Invenire quoque est plura futilia et scioli alicujus glossemata. Vide corollarium propositionis 24, scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum.

In pluribus ejectis Euclides loquens introducit, *καλῶ, ἐκάλει*; *vocat*, *vocavit*, etc. Vide scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum, etc.

Hæc et plura alia e textu decimi libri sunt ejecta. In textu plura retinui quæ ex ipso fortasse ejicere potuissem; tale est scholium propositionis 19, et *aliter* propositionum 19, 106, 107, 116, et corollarium propositionis 112, necnon *aliter* propositionis 117, cujus haud dubie demonstratio est una ex elegantissimis totius geometriæ,

Retinui quoque in textu plura alia quæ ex illo ejicere fortasse debuissim, et quæ ex illo ejicerem, si quando alteram Euclidis editionem producerem; tale est lemma propositionis 9, talia sunt etiam lemmata propositionum 14, 17, 33, quæ in libris præcedentibus sunt demonstrata, necnon lemma propositionis 20, et corollarium propositionis 24, quæ nihil sunt nisi inutilia glossemata.

E textu ejicere debuissim propositionem 13, quæ eadem est ac propositio 14, et quæ sine dubio Euclidis non est. Retinui tamen, ut propositiones

Les anciens géomètres, je veux dire Euclide, Archimède et Apollonius, avaient pour usage de marcher constamment vers leur but sans s'écarter jamais de leur chemin, pour s'occuper de ce qui ne leur était pas nécessaire pour aller en avant. Cela étant ainsi, il n'est guère possible, pour une personne qui entend bien la matière, de tomber dans l'erreur. Ajoutez à cela que dans toutes les suppressions que j'ai faites, on ne reconnaît ni la manière, ni même les expressions accoutumées d'Euclide.

Parmi les suppressions que j'ai faites au dixième livre, on trouve des *Autrement* qui ne sont d'aucun prix. Voyez l'*Autrement* de la proposition 1, et la Scholie de la proposition 22, qui n'est qu'un pur *Autrement*.

On y rencontre des démonstrations qui se trouvent dans les livres précédents. Voyez les lemmes des propositions 31, 32, 33.

Ici ce sont des futilités, ce sont des gloses de quelque demi-savant en géométrie. Voyez le corollaire de la proposition 24, les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes.

Dans une grande partie des suppressions que j'ai faites, on fait parler Euclide *καλῶ, ἐκάλισσι*; *il appelle, il appela*. Voyez les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes, etc.

Telles sont les suppressions importantes que j'ai cru devoir faire au dixième livre; j'ai conservé dans le texte des choses que j'aurais pu supprimer; telle est la scholie de la proposition 19, les *aliter* des propositions 19, 106, 107 et 116; le corollaire de la proposition 112, ainsi que l'*autrement* de la proposition 117, dont la démonstration est certainement une des plus belles de toute la géométrie.

J'en ai conservé d'autres que j'aurais peut-être dû supprimer, et que je supprimerais certainement dans une nouvelle édition, si jamais elle avait lieu. Tel est le lemme de la proposition 9; tels sont aussi les lemmes des propositions 14, 17, 33, qui sont démontrés dans les livres précédents; ainsi que le lemme de la proposition 20, et le corollaire de la proposition 24, qui ne sont que des gloses inutiles.

J'aurais dû supprimer la proposition 13, qui est la même que la proposition 14, et qui n'est certainement pas d'Euclide. Si je ne l'ai

meæ editionis signarentur iisdem numeris quibus propositiones editionis Oxoniæ.

Retinui etiam scholium quod ultimam propositionem subsequitur, quamvis illud supponat plures propositiones quæ in libris tantum subsequentibus demonstrantur. Hoc scholium retinui, quia illud ostendit quomodo, rectis incommensurabilibus inventis, magnitudines duarum et trium dimensionum inveniri possint inter se incommensurabiles.

Corollarium propositionis 73, quod in lectionibus variis adest, in textu adesse deberet.

Nihil amplius dicam de lectionibus variis libri decimi; nunc de propositione 19 libri noni sum locuturus.

Dixi in notâ quæ reperitur in imâ paginâ hujus propositionis Hervagium volentem emendare duos codices græcos quibus usus fuit in Euclide edendo, pro propositione 19 substituisse græcam versionem versionis latinæ Zamberti, quæ concordat cum codicibus 190, 2466, 2342. Vide lectiones varias. Mea editio plane concordat cum omnibus aliis codicibus. Editio Oxoniæ consentanea est cum editione Basilicæ. In imâ paginâ editionis Oxoniæ legere est textum hujus propositionis esse corruptissimum. Textus est corruptus in solis codicibus de quibus mentionem feci; in omnibus vero aliis est maxime purus.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ, et in codicibus 190, 2466, 2362, hoc agitur ut ostendatur esse impossibile invenire quartum numerum integrum Δ tribus numeris integris A, B, r proportionalem, quando numeri A, B, r non sunt deinceps proportionales, et quando numeri A, r inter se sunt primi.

Hæc est ratiocinatio :

Hoc sit possibile, et ut A ad B ita sit r ad Δ ; fiat ut B ad r ita sit Δ ad E . Vide secundum *alinea* paginæ 439, et notam propositionis 19.

Atqui evidenter fieri potest ut E qui numerus integer esse debet vel sit vel non sit integer numerus; hæc ratiocinatio igitur est falsa. Et valde miror quod falsitatem hujus ratiocinationis non animadverterit Commandinus, qui erat unus ex primis ætatis suæ geometris.

pas fait, c'était afin que les propositions de mon édition eussent les mêmes numéros que celle d'Oxford.

J'ai conservé aussi la scholie de la fin du dixième livre, quoiqu'elle suppose plusieurs propositions qui ne sont démontrées que dans les livres suivants. J'ai conservé cette scholie, parce qu'elle fait voir comment des droites incommensurables étant trouvées, on peut trouver des grandeurs de deux et de trois dimensions incommensurables entr'elles.

C'est par erreur que le corollaire de la proposition 73 se trouve parmi les variantes, et non dans le texte.

Je ne parlerai pas davantage des variantes du dixième livre. Il ne me reste plus qu'à parler de la proposition 19 du neuvième livre.

J'ai dit dans la note qui est au bas de cette proposition, qu'Hervage, voulant rectifier les deux manuscrits grecs dont il se servit dans son édition d'Euclide, avait mis à la place de la proposition 19 la version grecque de la version latine de Zamberti, qui est entièrement conforme aux trois manuscrits 190, 2466, 2342. Voyez les variantes. Mon édition est entièrement conforme à tous les autres manuscrits. Celle d'Oxford est calquée sur celle de Basle. On lit, au bas de la page, dans l'édition d'Oxford, que cette proposition est tout-à-fait corrompue. Le texte n'est corrompu que dans les trois manuscrits dont je viens de parler; dans tous les autres, il est dans toute sa pureté.

Dans les éditions de Basle et d'Oxford, et dans les trois manuscrits 190, 2466, 2342, il s'agit de démontrer qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre entier Δ proportionnel aux trois nombres entiers A, B, r , lorsque les nombres A, B, r ne sont pas successivement proportionnels, et que les nombres A, r sont premiers entr'eux.

Voici comment on raisonne :

Que cela soit possible, et que A soit à B comme r est à Δ ; faisons en sorte que B soit à r comme Δ est à E . Voyez le second alinéa de la page 439, et la note de la proposition 19.

Or, il est évident que E , qui doit être un nombre entier, peut ou être ou n'être pas un nombre entier. Ce raisonnement est donc faux. Je suis très-surpris que Commandin, qui était un des premiers géomètres de son temps, n'ait pas aperçu la fausseté de ce raisonnement.

Hæc ratiocinatio non solum falsa est, sed etiam et enuntiatio propositionis demonstrandæ; possibile enim est invenire quantum numerum integrum proportionalem numeris 4, 8, 9, qui quidem non sunt deinceps proportionales, et quorum extremi 4 et 9 primi inter se sunt.

Quod attinet ad partem typographicam summâ diligentia usus sum ut textus hujus voluminis quam maxime emendatus esset. D. Jannet necnon D. Patris, mei operis editor, qui mea specimina accuratissime legerunt, non tenui mihi fuerunt auxilio.

Nota. Propositio 7 libri primi detruncata erat in omnibus græcis codicibus. Vide præfationem primi voluminis, pag. 19. Hanc propositionem integram reperi in versione latinâ quam ex arabicâ linguâ fecit Campanus, et quæ edita fuit Venetiis anno 1482. Hæc propositio ex toto Euclidis dignissima mihi videtur. En hîc illa est cum meâ versione græcâ gallicâque : Campani versionem in paucissimis immutavi.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'. ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εὰν ἀπὸ δύο σημείων τῶν ὑψων εὐθείας πειράτων δύο εὐθεῖαι κατὰ τι σημεῖον συμπίπτουσαι διάχθωσιν, ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη οὐ διαχθήσονται δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ ἄλλον σημεῖον συμπίπτουσαι· ὥστε ἴσας εἶναι ταῖς τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσας.

Εστω εὐθεῖα ἡ AB, καὶ ἀπὸ τῶν A, B πειράτων διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΓ κατὰ τι σημεῖον τὸ Γ συμπίπτουσαι· λέγω δὴ ὅτι ἀπὸ πειράτων τῆς AB, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, οὐ διαχθήσονται ἄλλαι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι κατὰ

Si ex duobus punctis rectæ extremitatibus duæ rectæ in unum punctum concurrentes ducantur, ex iisdem punctis et in iisdem partibus non ducentur duæ aliæ rectæ in aliud punctum concurrentes, ita ut æquales sint rectis easdem extremitates habentibus.

Sit recta AB, et ex A, B extremitatibus ducantur duæ rectæ ΑΓ, ΒΓ in punctum Γ concurrentes; dico ex extremitatibus rectæ AB, et in iisdem partibus, non ducendas fore duas alias rectas in aliud punctum concurrentes, ita ut

LIVRE I. PROPOSITION VII.

Si des extrémités d'une droite on mène deux droites qui se rencontrent en un point, il est impossible de mener des mêmes points, et du même côté, deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de manière que les droites qui ont les mêmes extrémités soient égales entr'elles.

Soit la droite AB; des extrémités A, B de cette droite menons deux droites ΑΓ, ΒΓ qui se rencontrent en un point Γ; je dis qu'on ne peut pas du même côté mener des extrémités de AB deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de

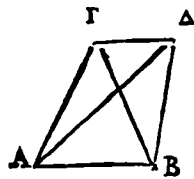
Non seulement ce raisonnement est faux, mais encore l'énoncé de la proposition à démontrer. Car il est très-possible de trouver un quatrième nombre entier proportionnel aux nombres 4, 8, 9, qui ne sont pas successivement proportionnels, et dont les extrêmes 4 et 9 sont premiers entr'eux.

Quant à la partie typographique de ce volume, j'ai fait tous mes efforts pour donner au texte toute la pureté possible. J'ai été puissamment secondé par M. Jannet et M. Patris, éditeur de mon ouvrage, qui ont eu la complaisance de lire les épreuves avec le plus grand soin.

Nota. La proposition VII du premier livre était tronquée dans tous les manuscrits grecs. Voyez la Préface du premier volume, pag. 19. J'ai trouvé cette proposition toute entière dans la version latine faite d'après l'arabe par Campan, et publiée à Venise en 1482. Elle me paraît en tout digne d'Euclide. La voici avec ma version grecque et latine. Je n'ai fait que quelques légers changements à la version de Campan.

ἄλλον σημείον, ὥστε εὐθείαν μὲν ἀπὸ σημείου τοῦ Α ἡχθεῖσαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΓ, ἡχθεῖσαν δὲ ἀπὸ σημείου τοῦ Β ἴσην τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ σημείον τὸ Δ συμπίπτουσαι, καὶ ἴστω εὐθεῖα μὲν ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, εὐθεῖα δὲ ΒΔ ἴση τῇ ΒΓ.



Ἦτοι σημείον τὸ Δ εἰντὸς πεισθῆται τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἢ ἐκτός· μὴ γάρ τῃς μίαν τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ

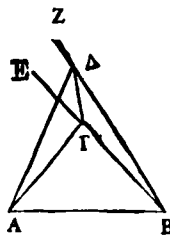
manière que la droite menée du point A soit égale à AG, et que la droite menée du point B soit égale à BG.

Car si cela est possible, menons du même côté deux autres droites qui se rencontrent en un point Δ, de manière que AD soit égal à AG, et BD égal à BG.

Ou le point Δ tombera en dedans du triangle ABG, ou en dehors; car il ne tombera

recta quidem ex puncto A ducta æqualis sit ipsi ΑΓ, ducta vero ex puncto B æqualis ipsi ΒΓ.

Si enim possibile, ducantur in eisdem partibus duæ aliæ rectæ in punctum Δ concurrentes; et sit recta quidem ΑΔ æqualis ipsi ΑΓ, recta vero ΒΔ æqualis ipsi ΒΓ.



Vel punctum Δ intra triangulum ΑΒΓ cadet vel extra; non enim in unum latus ΑΓ, ΒΓ

πιστῆται· εἰ γὰρ πιστῆται, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ μείζον ἴσται, ὅπερ ἄτοπον.

Πιπτῆτω πρότερον ἑκτός. Ἦτοι μία τῶν ΑΔ, ΒΔ μίαν τῶν ΑΓ, ΒΓ τομῆ, ἢ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τομῆ.

Τομνέτω δὲ ἡ ΑΔ τὴν ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΑΔ, ΑΓ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, ἴση ἴστί καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΒΔ, ΒΓ τοῦ ΒΓΔ τριγώνου, ἴση ἴστί καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἀλλὰ δὴ μείζων ἴστί γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μείζων ἴστί τῆς ὑπὸ ΑΓΔ· ὥστε τὸ μέρος τοῦ ὅλου μείζον ἴσται, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὲ δευχθήσεται, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΑΔ τέμνει.

Ἀλλὰ δὴ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τομνέτω καὶ τὸ Δ σημεῖον ἑκτός πιπτῆτω τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ, καὶ προσεξεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΒΓ, ΒΔ εὐθείαι αἱ ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ἴση ἴστί καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ

cadet; si enim caderet, pars toto major esset, quod absurdum.

Cadat primum extra. Vel una ex ΑΔ, ΒΔ rectis unam ex ΑΓ, ΒΓ rectis secabit, vel neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secabit.

Secet igitur ΑΔ ipsam ΒΓ, et jungatur ΓΔ. Quoniam igitur æqualia sunt duo latera ΑΔ, ΑΓ trianguli ΑΓΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ. Rursus, quoniam æqualia sunt duo latera ΒΔ, ΒΓ trianguli ΒΓΔ, æqualis est et angulus ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Sed et major est angulus ΒΔΓ angulo ΑΔΓ; angulus igitur ΒΓΔ major est angulo ΑΓΔ; quare pars quam totum major est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si ipsa ΒΓ ipsam ΑΔ secet.

Sed et neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secet, et punctum Δ cadat extra triangulum ΑΒΓ, et jungatur ΔΓ, et producantur in directum ipsarum ΒΓ, ΒΔ rectæ ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam igitur æquales sunt rectæ ΑΓ, ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ. Rursus,

pas sur un des côtés ΑΓ, ΒΓ de ce triangle, parce que, si cela était, la partie serait plus grande que le tout; ce qui est absurde.

Que le point Δ tombe premièrement en dehors; ou l'une des droites ΑΔ, ΒΔ coupera l'une des droites ΑΓ, ΒΓ, ou aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupera aucune des droites ΑΓ, ΒΓ.

Que la droite ΑΔ coupe la droite ΒΓ; joignons ΓΔ. Puisque les deux côtés ΑΔ, ΑΓ du triangle ΑΓΔ sont égaux, l'angle ΑΓΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ (5. 1). De plus, puisque les deux côtés ΒΔ, ΒΓ du triangle ΒΓΔ sont égaux, l'angle ΒΓΔ sera égal à l'angle ΒΔΓ (5. 1). Mais l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΑΔΓ; l'angle ΒΓΔ est donc plus grand que l'angle ΑΓΔ; la partie est donc plus grande que le tout, ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si la droite ΒΓ coupait la droite ΑΔ.

Mais qu'aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupe aucune des droites ΑΓ, ΒΓ, et que le point Δ tombe hors du triangle ΑΒΓ; joignons ΔΓ, et menons les droites ΓΕ, ΔΖ dans les directions des droites ΒΓ, ΒΔ.

Puisque les droites ΑΓ, ΑΔ sont égales, l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1).

ἴσαι εἰσὶν αἱ $ΒΓ$, $ΒΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$ τῇ ὑπὸ $ΕΓΔ$. Ἀλλὰ δὴ ἰλάσσων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΕΓΔ$ τῇς ὑπὸ $ΑΓΔ$ · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$ ἰλάσσων ἐστὶ τῇς ὑπὸ $ΑΔΓ$ · ὥστε καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους ἰλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὲ διχθήσεται, καὶ τὸ $Δ$ σημεῖον ἐντὸς πίπτει τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου. Εὰν ἀπὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

quoniam æquales sunt rectæ $ΒΓ$, $ΒΔ$, æqualis est et angulus $ΓΔΖ$ angulo $ΕΓΔ$. Sed et minor est angulus $ΕΓΔ$ quam angulus $ΑΓΔ$; angulus igitur $ΓΔΖ$ minor est angulo $ΑΔΓ$; quare et totum quam pars minus est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si punctum $Δ$ cadat intra triangulum $ΑΒΓ$. Si ex duobus, etc.

De plus, puisque les droites $ΒΓ$, $ΒΔ$ sont égales, l'angle $ΓΔΖ$ sera égal à l'angle $ΕΓΔ$ (5. 1). Mais l'angle $ΕΓΔ$ est plus petit que l'angle $ΑΓΔ$; l'angle $ΓΔΖ$ est donc plus petit que l'angle $ΑΔΓ$; le tout est donc plus petit que la partie; ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si le point $Δ$ tombait en dedans du triangle $ΑΒΓ$. Donc, etc.

M. Sédillot, membre adjoint du bureau des longitudes, et professeur à la Bibliothèque du Roi, a eu la complaisance de traduire littéralement pour moi cette proposition importante d'Euclide d'après la version arabe de Nassir-Eddin Thoussy, imprimée à Rome en 1594. La version latine de Campan est tout-à-fait conforme à la manière d'Euclide; il n'en est pas de même de la version de Nassir-Eddin Thoussy, quoiqu'elle soit la même pour le fond; il est donc présumable que la version arabe dont s'est servi Campan n'est pas la même que la version arabe imprimée à Rome. Voici la version de M. Sédillot, pour qui la langue arabe est aussi familière que les sciences mathématiques.

Soient menées des deux extrémités d'une ligne droite donnée, deux droites qui se rencontrent en un point quelconque, situé d'un côté déterminé de la ligne donnée, on ne pourra, des deux mêmes points et du même côté de la ligne, mener deux autres droites respectivement égales aux deux premières, chacune à sa corrélatrice, et se rencontrant en un autre point que les deux premières.

Des deux points A et B de la droite $ΑΒ$, je mène les deux droites $ΑΓ$, $ΒΓ$ qui se rencontrent au point $Γ$. Des deux mêmes points et du même côté $Γ$, je mène les deux autres droites $ΑΔ$, $ΒΔ$; $ΑΔ$ étant la corrélatrice de $ΑΓ$, et $ΒΔ$ celle de $ΒΓ$; et je dis que les deux lignes $ΑΔ$ et $ΒΔ$ ne peuvent se rencontrer en un autre point que le point $Γ$.

Supposons qu'elles puissent se rencontrer au point $Δ$; je joins $Δ$ et $Γ$ par la droite $ΔΓ$; les deux

côtés $\Delta\Gamma$, $\Delta\Delta$ sont égaux ; l'angle $\Delta\Gamma\Delta$ plus grand que $\Delta\Gamma\mathcal{B}$ est égal à l'angle $\Gamma\Delta\Delta$ par la cinquième proposition ; ainsi $\Gamma\Delta\Delta$ est plus grand que $\Delta\Gamma\mathcal{B}$.

De même, les deux côtés $\mathcal{B}\Gamma$, $\mathcal{B}\Delta$ sont égaux ; l'angle $\Delta\Gamma\mathcal{B}$ plus petit que $\Gamma\Delta\Delta$ est égal à l'angle $\Gamma\Delta\mathcal{B}$ par la cinquième proposition ; l'angle $\Gamma\Delta\mathcal{B}$ serait donc plus petit que $\Gamma\Delta\Delta$, et celui-ci plus grand que celui-là ; ce qui est absurde. Ainsi la chose proposée est vraie ; ce que nous voulions démontrer.

A l'égard de cette proposition, on peut varier la construction. Ainsi lorsque le point Δ tombe au-dehors du triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma$, l'un des deux côtés $\Delta\mathcal{A}$ ou $\Delta\mathcal{B}$ peut être ou n'être pas coupé par l'un des deux autres côtés $\Gamma\mathcal{A}$ ou $\Gamma\mathcal{B}$; ou bien le point Δ peut tomber dans le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma$, ou enfin sur l'un des deux côtés $\Gamma\mathcal{A}$ ou $\Gamma\mathcal{B}$.

Nous venons de démontrer l'impossibilité du cas indiqué dans la figure première. Prolongeons dans la seconde les deux lignes $\Delta\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\Gamma$, selon leur direction respective dans la région du point Δ , vers les points $\mathcal{E}$, $\mathcal{Z}^*$; puis joignons par une droite les deux points Γ et Δ .

Comme dans la figure 2, les angles $\mathcal{B}\Gamma\Delta$ et $\mathcal{B}\Delta\Gamma$ sont égaux par la cinquième proposition, les angles $\mathcal{E}\Gamma\Delta$ et $\mathcal{Z}\Delta\Gamma$ sont aussi égaux par la même proposition ; l'angle $\mathcal{E}\Gamma\Delta$ égal à $\mathcal{Z}\Delta\Gamma$, qui est plus grand que $\mathcal{B}\Delta\Gamma$ égal à $\mathcal{B}\Gamma\Delta$, serait plus grand que $\mathcal{B}\Gamma\Delta$, et celui-ci plus petit que celui-là, ce qui est absurde.

On montrerait de même l'absurdité pour le cas où le point Δ tomberait dans le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma^{**}$.

Quant au cas^{***} où le point Δ tombe sur la ligne $\mathcal{B}\Gamma$, prolongée ou non, il faudrait que de deux lignes égales l'une fût plus grande ou plus petite que l'autre, ce qui est également absurde.

* Après les points $\mathcal{E}$, $\mathcal{Z}$, la version arabe ajoute : *et vers les points $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$ dans la figure 3.*

** Au lieu de où le point Δ tomberait dans le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma$, la version arabe dit simplement : *indiqué dans la figure 3.*

*** Au lieu de au cas, la version arabe dit à la figure 4.

J'ai fait ces légers changements pour ne pas multiplier les figures sans nécessité.

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R O C T A V U S.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Εὰν ᾧσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Εστωσαν. ὅποιοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ , οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ A, B, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ , extremi autem eorum A, Δ primi inter se sint; dico ipsos A, B, Γ, Δ minimos esse ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis.

LE HUITIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient A, B, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que leurs extrêmes A, Δ soient premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

2 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ μὴ, ἴστανσαν ἐλάττωσις τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῇ πλῆθει τῶν Ε, Ζ,

Si enim non, sint minores ipsis Α, Β, Γ, Δ ipsi Ε, Ζ, Η, Θ in eadem ratione existentes cum ipsis. Et quoniam ipsi Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis Ε, Ζ, Η, Θ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipso-

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε	Ζ	Η	Θ

Η, Θ¹. Διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως² ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι³ ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστι⁴ ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάττωσις ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἰχόντων αὐτοῖς. Ὅπερ εἶδει δειξάμεναι.

rum Ε, Ζ, Η, Θ; ex æquo igitur est ut Α ad Δ ita Ε ad Θ. Ipsi autem Α, Δ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri æqualiter metiuntur ipsos eamdem rationem habentes, major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Ε, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsi Ε, Ζ, Η, Θ minores existentes ipsis Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis; ipsi Α, Β, Γ, Δ igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Car si cela n'est point, que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, soient en même raison que ceux-ci. Puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont en même raison que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Ε, Ζ, Η, Θ, par égalité Α est à Δ comme Ε est à Θ (14. 7). Mais les nombres Α, Δ sont premiers entre eux, et les nombres premiers sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, ne sont pas en même raison que ceux-ci; donc les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

* Αριθμούς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ¹, ἐν τῇ δοθέντι λόγῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· διὸ δὴ ἀριθμούς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτιτάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιεῖτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιεῖτω.

Α, 2. Β, 3.

Γ, 4. Δ, 6.

Ζ, 8. Η, 12.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν²· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως³ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ

PROPOSITIO II.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quocunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ratio ipsius Α ad Β; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos, quocunque quis imperaverit, in ipsius Α ad Β ratione.

Imperentur quidem quatuor; et Α se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ faciat, et adhuc Β se ipsum multiplicans ipsum Ε faciat, et adhuc ipse Α ipsos Γ, Δ, Ε multiplicans ipsos Ζ, Η, Θ faciat, ipse vero Β ipsum Ε multiplicans ipsum Κ faciat.

Ε, 9.

Θ, 18. Κ, 27.

Et quoniam ipse Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Γ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ fecit, numerus igitur Α duos ipsos Α, Β multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam ipse Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β se ipsum

PROPOSITION II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans une raison donnée.

Que la raison donnée, dans les plus petits nombres, soit celle de Α à Β; il faut trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β.

Qu'on en demande quatre. Que Α se multipliant lui-même fasse Γ, que Α multipliant Β fasse Δ, que Β se multipliant lui-même fasse Ε, que Α multipliant encore Γ, Δ, Ε fasse Ζ, Η, Θ, et que Β multipliant Ε fasse Κ.

Puisque Α se multipliant lui-même a fait Γ, et que Α multipliant Β a fait Δ, le nombre Α multipliant les deux nombres Α, Β a fait Γ, Δ; donc Α est à Β comme Γ est à Δ (17. 7). De plus, puisque Α multipliant Β a fait Δ, et que Β se multipliant

4 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποιήκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὴν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ, Ε πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ

Α, 2.	Β, 3.	
Γ, 4.	Δ, 6.	Ε, 9.
Ζ, 8.	Η, 12.	Θ, 18. Κ, 27.

οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Λέγω δὲ ὅτι

multiplicans ipsum B fecit; uterque igitur ipsum A, B ipsum B multiplicans utrumque ipsum Δ, E fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad E. Sed ut A ad B ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Δ ad E. Et quoniam ipse A ipsos Γ, Δ multiplicans ipsos Z, H fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Z ad H. Ut autem Γ ad Δ ita A ad B; et

ut igitur A ad B ita Z ad H. Rursus, quoniam ipse A ipsos Δ, E multiplicans ipsos H, Θ fecit; est igitur ut Δ ad E ita H ad Θ. Ut autem Δ ad E ita A ad B; et ut A igitur ad B ita H ad Θ. Et quoniam ipsi A, B, ipsum E multiplicantes ipsos Θ, K fecerunt; est igitur ut A ad B ita Θ ad K. Sed ut A ad B ita et Z ad H et H ad Θ; et ut igitur Z ad H ita et H ad Θ et Θ ad K; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, K proportionales sunt, in ipsius A ad B ratione. Dico etiam et minimi. Quoniam enim

lui-même a fait E, les nombres A, B multipliant B ont fait Δ, E; donc A est à B comme Δ est à E (18. 7). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Δ est à E. Et puisque A multipliant Γ, Δ a fait Z, H, le nombre Γ est à Δ comme Z est à H. Mais Γ est à Δ comme A est à B; donc A est à B comme Z est à H. De plus, puisque A multipliant Δ, E a fait H, Θ, le nombre Δ est à E comme H est à Θ. Mais Δ est à E comme A est à B; donc A est à B comme H est à Θ. Et puisque A, B multipliant E ont fait Θ, K, le nombre A est à B comme Θ est à K. Mais A est à B comme Z est à H, et comme H est à Θ; donc Z est à H comme H est à Θ, et comme Θ est à K; donc Γ, Δ, E et Z, H, Θ, K sont proportionnels, dans la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits. Car puisque A, B sont les plus petits

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 5

καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν A, B αὐτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, E πιτοίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, E πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Z, K πιτοίηκεν· οἱ Γ, B ἄρα καὶ οἱ Z, K πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ᾧσιν ἵποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B . Ὅπρι ἰδεῖ δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἂν¹⁰ τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ᾧσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγυτοι εἰσιν· ἂν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, et que les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux sont premiers entr'eux (23. 7), les nombres A, B sont premiers entr'eux. Mais les nombres A, B , se multipliant eux-mêmes, ont fait Γ, E , et les nombres A, B multipliant Γ, E ont fait Z, K ; donc les nombres Γ, E et Z, K sont premiers entr'eux (29. 7). Mais si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (1. 8); donc les nombres Γ, Δ, E et les nombres Z, H, Θ, K sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B . Ce qu'il fallait démontrer.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont des quarrés; que si l'on a quatre nombres, les extrêmes sont des cubes.

A, B minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi autem minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis primi inter se sunt; ipsi A, B igitur primi inter se sunt. Et uterque quidem ipsorum A, B se ipsum multiplicans utrumque ipsorum Γ, E fecit; utrumque vero ipsorum Γ, E multiplicans, utrumque ipsorum Z, K fecit; ipsi Γ, E igitur et Z, K primi inter se sunt. Si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, K minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B . Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex hoc igitur evidens est, si tres numeri deinceps proportionales minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, extremos eorum quadratos esse; si autem quatuor, cubos.

6 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εὰν ᾧσιν ὁποσοιῶν ἀριθμοὶ ἰξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰσὼσαν ὁποσοιῶν ἀριθμοὶ ἰξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῇ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; extremi eorum primi inter se sunt.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis, ipsi Α, Β, Γ, Δ; dico extremos eorum Α, Δ primos inter se esse.

Sumantur enim duo quidem numeri minimi in ipsorum Α, Β, Γ, Δ ratione, ipsi Ε, Ζ,

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε, 2.	Ζ, 3.		
Η, 4.	Θ, 6.	Κ, 9.	
Λ, 8.	Μ, 12.	Ν, 18.	Ξ, 27.

οἱ Η, Θ, Κ, καὶ αἰεὶ ἰξῆς ἐνὶ πλείους, ὥς οὗ³ τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γίνηται τῇ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἴστωσαν οἱ Α, Μ, Ν, Ξ.

tres autem Η, Θ, Κ, et semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis facta fuerit multitudini ipsorum Α, Β, Γ, Δ. Sumantur, et sint Α, Μ, Ν, Ξ.

PROPOSITION III.

Si tant de nombres successivement proportionnels que l'on voudra, sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont premiers entr'eux.

Que tant de nombres Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels qu'on voudra, soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que leurs extrêmes Α, Δ sont premiers entr'eux.

Car prenons les deux plus petits nombres qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ (2, 8); que ces nombres soient Ε, Ζ; prenons-en trois, et qu'ils soient Η, Θ, Κ, et ainsi de suite, toujours un de plus jusqu'à ce qu'on en ait pris une quantité égale à celle des nombres Α, Β, Γ, Δ. Qu'ils soient pris, et qu'ils soient Α, Μ, Ν, Ξ.

Καὶ ἐπεὶ οἱ E, Z ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν E, Z ἑαυτὸν μὲν ἡ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν H, K ποιεῖν, ἑκάτερον δὲ τῶν H, K πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν⁵ Λ, Ξ ποιεῖν· καὶ οἱ H, K ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ⁶. Καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, M, N, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B, Γ, Δ , καὶ ἴσιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A, B, Γ, Δ τῇ πλῆθει τῶν Λ, M, N, Ξ · ἕκαστος ἄρα τῶν A, B, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, M, N, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν A τῷ Λ , ὁ δὲ Δ τῷ Ξ . Καὶ εἴσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους⁷· καὶ οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ὅπερ ἰδεῖ διῆξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Λόγων δοθέντων ὅποσωνοῦν ἐν ἐλάχιστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον¹ ἐλάχιστους ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις.

Puisque les nombres E, Z sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ils sont premiers entr'eux (24. 7). Et puisque les nombres E, Z se multipliant eux-mêmes ont fait H, K , et que ces mêmes nombres multipliant H, K ont fait Λ, Ξ , les nombres H, K , et les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux (29. 7). Et puisque les nombres A, B, Γ, Δ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, que les nombres Λ, M, N, Ξ sont les plus petits qui ont la même raison que A, B, Γ, Δ , et que la quantité des nombres A, B, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Λ, M, N, Ξ ; chacun des nombres A, B, Γ, Δ est égal à chacun des nombres Λ, M, N, Ξ ; donc A est égal à Λ , et Δ à Ξ . Mais les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux; donc les nombres A, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION IV.

Tant de raisons qu'on voudra étant données, dans leurs plus petits nombres, trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons données.

Et quoniam E, Z minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Et quoniam uterque ipsorum E, Z se ipsum quidem multiplicans utrumque ipsorum H, K fecit, utrumque vero ipsorum H, K multiplicans utrumque ipsorum Λ, Ξ fecit; et ipsi H, K igitur et ipsi Λ, Ξ primi inter se sunt. Et quoniam A, B, Γ, Δ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, sunt autem et Λ, M, N, Ξ minimi in eadem ratione existentes cum ipsis A, B, Γ, Δ , et est æqualis multitudo ipsorum A, B, Γ, Δ multitudini ipsorum Λ, M, N, Ξ ; unusquisque igitur ipsorum A, B, Γ, Δ unicuique ipsorum Λ, M, N, Ξ æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem A ipsi Λ , ipse vero Δ ipsi Ξ . Et sunt Λ, Ξ primi inter se; et A, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps proportionales minimos in datis rationibus.

8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ, τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὲ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον² ἐλαχίστους, ἐν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sint datæ rationes in minimis numeris, et ratio ipsius Α ad Β et ea ipsius Γ ad Δ, et adhuc ea ipsius Ε ad Ζ; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos et in ipsius Α ad Β ratione, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

Α, 2.	Β, 5.	Γ, 3.	Δ, 4.	Ε, 5.	Ζ, 6.
Θ, 6.	Η, 15.	Κ, 20.	Λ, 24.		
Ν	Ξ	Μ	Ο		

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ³ ὁ Α τὸν Θ μετρεῖται, ὅσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρεῖται· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον. Καὶ ὅσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρεῖται. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον⁴ εἰσὶν ἐν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sumatur enim ab ipsis Β, Γ minimus mensuratus numerus, ipse Η. Et quoties quidem Β ipsum Η metitur toties et Α ipsum Θ metiatur, quoties vero Γ ipsum Η metitur, toties et Δ ipsum Κ metiatur; ipse autem Ε ipsum Κ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties Ε ipsum Κ metitur toties et Ζ ipsum Λ metiatur. Et quoniam æqualiter Α ipsum Θ metitur et Β ipsum Η; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, et adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ; ipsi Θ, Η, Κ, Λ igitur deinceps proportionales sunt in ratione et ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ. Dico etiam

Soient données dans leurs plus petits nombres la raison de Α à Β, celle de Γ à Δ, et celle de Ε à Ζ; il faut trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et enfin dans celle de Ε à Ζ.

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par Β et Γ (36. 7); que ce soit Η. Que Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, et que Δ mesure Κ autant de fois que Γ mesure Η; ou Ε mesurera Κ ou il ne le mesurera pas. Premièrement que Ε mesure Κ; et que Ζ mesure Λ autant de fois que Ε mesure Κ. Puisque Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, Α est à Β comme Θ est à Η (13. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme Η est à Κ, et Ε est à Ζ comme Κ est à Λ; les nombres Θ, Η, Κ, Λ sont donc successivement dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et encore dans celle de Γ à Ζ; et je dis aussi qu'ils sont les plus

πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἐξῆς ἀνάλογον⁵ ἐλάχιστοι, ἂν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις⁶. Εἰσὼσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι⁷ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μίζων τὸν μίζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ⁸ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ μετρούμενός ἐστιν⁹, ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μίζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς, ἂν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν¹⁰ τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν¹¹ τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

et minimos. Si enim non sunt ipsi Θ, Η, Κ, Δ minimi deinceps proportionales, et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ, erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Δ minores numeri in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ. Sint ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο. Et quoniam est ut Α ad Β ita Ν ad Ζ, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Β igitur ipsum Ξ metitur. Propter eadem utique Γ ipsum Ξ metitur; ipsi Β, Γ igitur ipsum Ξ metiuntur, et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ξ metietur. Minimus autem ab ipsis Α, Γ mensuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ξ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Δ minores numeri deinceps, et in ratione ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

petits. Car si Θ, Η, Κ, Λ ne sont pas les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ, il y aura certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Λ dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Que ce soient Ν, Ξ, Μ, Ο. Puisque Α est à Β comme Ν est à Ξ, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ξ. Par la même raison Γ mesure Ξ; donc Β et Γ mesurent Ξ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesure Ξ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ξ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Λ, successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et enfin de Ε à Ζ.

10 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μὴ μετρίτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ εἰλήφθω ὁ¹²
 ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς,
 ὁ Μ. Καὶ ὅσκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαυ-
 τάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν,
 Ξ μετρίτω, ὅσκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαυ-
 τάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρίτω. Καὶ¹³ ἐπεὶ ἰσάκις
 ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ
 Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ὡς δὲ ὁ
 Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα
 ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς

Non metiatur autem E ipsum K. Et sumatur
 ab ipsis E, K minimus mensuratus numerus,
 ipse M. Et quoties quidem K ipsum M metitur,
 toties et uterque ipsorum Θ, Η utrumque ipso-
 rum Ν, Ξ metiatur; quoties vero E ipsum Μ
 metitur, toties et Ζ ipsum Ο metiatur. Et
 quoniam æqualiter Θ ipsum Ν metitur ac Η
 ipsum Ξ; est igitur ut Θ ad Η ita Ν ad Ξ. Ut
 autem Θ ad Η ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β
 ita Ν ad Ξ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ

Α, 4.	Β, 5.	Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 4.	Ζ, 3.
Θ, 8.	Η, 10.	Κ, 15.			
Ν, 32.	Ξ, 40.	Μ, 60.	Ο, 45.		
Π	Ρ	Σ	Τ		

τὸν Μ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ
 καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ
 οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς
 ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε¹⁴ Α πρὸς τὸν Β,
 καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι¹⁵ τοῦ Ε πρὸς τὸν
 Ζ λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α,
 Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μὴ¹⁶, ἔσονται τινες
 τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάττωτες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-
 λογον¹⁷ ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις.

ita Ξ ad Μ. Rursus, quoniam æqualiter Ε ipsum
 Μ metitur ac Ζ ipsum Ο; est igitur ut Ε ad Ζ ita
 Μ ad Ο; ipsi Ν, Ξ, Μ, Θ igitur deinceps pro-
 portionales sunt in rationibus et ipsius Α ad
 Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ.
 Dico etiam et minimos in ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε,
 Ζ rationibus. Si enim non, erunt aliqui ipsis
 Ν, Μ, Ξ, Ο minores numeri deinceps pro-
 portionales in rationibus Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.

Mais que E ne mesure pas K. Soit pris le plus petit nombre mesuré par E, K (36. 7), et que ce soit M. Que les nombres Θ, Η mesurent autant de fois Ν, Ξ que K mesure Μ, et que Ζ mesure Ο autant de fois que E mesure Μ. Puisque Θ mesure Ν autant de fois que Η mesure Ξ, Θ est à Η comme Ν est à Ξ (13. 7.) Mais Θ est à Η comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Ν est à Ξ. Par la même raison Γ est à Δ comme Ξ est à Μ. De plus, puisque E mesure Μ autant de fois que Ζ mesure Ο, Ε est à Ζ comme Μ est à Ο; donc les nombres Ν, Ξ, Μ, Ο sont successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Car si cela n'est point, il y aura des nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο qui seront successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Que ces nombres soient

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 11

Εστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ τε¹⁸ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Τ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός, ἐστὶν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἐστὶν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττωνα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον¹⁹ ἐν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ἐτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς²⁰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Ὅπρι ἴδεις δεῖξαι.

Sint H, P, Σ, Τ. Et quoniam est ut Π ad P ita A ad B, ipsi autem A, B minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse igitur B ipsum P metitur. Propter eadem utique et Γ ipsum P metitur. Ipsi B, Γ igitur ipsum Γ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis B, Γ mensuratus ipsum P metietur. Minimus autem ab ipsis B, Γ mensuratus, est ipse H; ipse H igitur ipsum P metitur. Et est ut H ad P ita K ad Σ; et K igitur ipsum Σ metitur. Metitur autem et E ipsum Σ; ipsi E, K igitur ipsum Σ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis E, K mensuratus ipsum Σ metietur. Minimus autem ab ipsis E, K mensuratus, est ipse M; ipse M igitur ipsum Σ metitur, major minorem, quod est impossibile. Non igitur erunt aliqui ipsis N, Ξ, Μ, Ο minores numeri deinceps proportionales et in rationibus ipsius A ad B, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius E ad Z; ipsi N, Ξ, Μ, Ο igitur deinceps proportionales minimi sunt in rationibus A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ. Quod oportebat ostendere.

Π, Ρ, Σ, Τ. Puisque Π est à Ρ comme Α est Β, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ρ. Par la même raison Γ mesurera Ρ; donc Β, Γ mesurent Ρ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesurera Ρ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ρ. Mais Η est à Ρ comme Κ est à Σ (13. 7); donc Κ mesure Σ (déf. 20. 7); mais Ε mesure Σ; donc Ε, Κ mesurent Σ; donc le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ mesurera Σ. Mais le plus petit nombre mesuré par Ε, Κ est Μ; donc Μ mesure Σ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc il n'y aura pas certains nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ; donc Ν, Ξ, Μ, Ο sont les plus petits nombres qui soient successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

PROPOSITIO V.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστώσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστώσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, Ε, Δ, Ζ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὥς τε εἶναι ὥς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὥς δὲ τὸν Δ πρὸς

Plani numeri inter se rationem habent compositam ex lateribus.

Sint plani numeri Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ; dico Α ad Β rationem habere compositam ex lateribus.

Rationibus enim datis, et ipsâ quam habet Γ ad Ε, et Δ ad Ζ, sumantur numeri deinceps minimi in rationibus Γ, Ε, Δ, Ζ, ipsi Η, Θ, Κ, ita ut sit ut quidem Γ ad Ε ita Η ad Θ,

Α, 6.

Β, 20.

Α, 12.

Γ, 2.

Δ, 3.

Ε, 4.

Ζ, 5.

Η, 3.

Θ, 6.

Κ, 10.

τὸν Ζ οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. Καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Α.

ut vero Δ ad Ζ ita Θ ad Κ. Et ipse Δ ipsum Ε multiplicans ipsum Α faciat. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit; est igitur ut Γ ad Ε ita Α ad Α. Ut autem Γ ad Ε ita Η ad Θ;

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les nombres plans Α, Β; que Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β; je dis que Α a avec Β une raison composée des côtés.

La raison de Γ à Ε, et celle de Δ à Ζ étant données, soient pris les nombres Η, Θ, Κ qui soient successivement les plus petits dans les raisons de Γ, Ε, Δ, Ζ (4. 8), de manière que Γ soit à Ε comme Η est à Θ, et que Δ soit à Ζ comme Θ est à Κ. Que Δ multipliant Ε fasse Α. Puisque Δ multipliant Γ fait Α, et que Δ multipliant Ε fait Α, Γ est à Ε comme Α est à Α (17. 7). Mais

Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν, ἵπεί ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· διόσου ἄρα ἴστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εὰν ᾖσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδὲς οὐδένα μετρήσει.

Ἐστῶσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρεῖται· λίγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδὲς οὐδένα μετρήσει.

et ut igitur H ad Θ ita A ad Λ. Rursus, quoniam E ipsum Δ multiplicans ipsum A fecit, sed autem et ipsum Z multiplicans ipsum B fecit; est igitur ut Δ ad Z ita A ad B. Sed ut Δ ad Z ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita A ad B. Ostensum est autem ut H ad Θ ita A ad Λ; ex æquo igitur est ut H ad Κ ita A ad B. Ipse autem H ad Κ rationem habet compositam ex lateribus; et A igitur ad B rationem habet compositam ex lateribus. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, ipse autem Α ipsum Β non metiatur; dico neque alium aliquem ullum mensurum esse.

Γ est à Ε comme Η et à Θ; donc Η est à Θ comme Α est à Λ. De plus, puisque Ε multipliant Δ fait Λ, et que Ε multipliant Ζ fait Β, Δ est à Ζ comme Α est à Β. Mais Δ est à Ζ comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Α est à Β. Mais on a démontré que Η est à Θ comme Α est à Λ; donc, par égalité, Η est à Κ comme Α est à Β (14. 7); mais Η a avec Κ une raison composée des côtés; donc Α a avec Β une raison composée des côtés. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier ne mesure pas le second, aucun autre n'en mesure un autre.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α ne mesure pas Β; je dis qu'aucun autre n'en mesurera un autre.

14 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οτι μὲν οὖν οἱ A, B, Γ, Δ, E ἐξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν. Οὐδὲ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖτω ὁ A τὸν Γ . Καὶ ἴσοι εἰσιν οἱ A, B, Γ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ , οἱ Z, H, Θ . Καὶ ἐπεὶ οἱ Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς A, B, Γ , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ

Et quidem ipsos A, B, Γ, Δ, E deinceps non se se metiri evidens est. Non enim A ipsum B metitur. Dico etiam neque alium aliquem ullum mensurum esse. Si enim possibile, metiatur A ipsum Γ . Et quot sunt A, B, Γ tot sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ , ipsi Z, H, Θ . Et quoniam Z, H, Θ in eadem ratione sunt cum

$A, 16.$	$B, 24.$	$\Gamma, 36.$	$\Delta, 54.$	$E, 81.$
$Z, 4.$	$H, 6.$	$\Theta, 9.$		

πλήθος τῶν A, B, Γ τῷ πλήθει τῶν Z, H, Θ · διότου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Z τὸν H · οὐκ ἄρα μονάς ἐστὶν ὁ Z , ἡ γὰρ μονάς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ¹, καὶ εἰσιν οἱ Z, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ³. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Z πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ · οὐδὲ ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsis A, B, Γ , et est æqualis multitudo ipsorum A, B, Γ multitudini ipsorum Z, H, Θ ; ex æquo igitur est ut A ad Γ ita Z ad Θ . Et quoniam est ut A ad B ita Z ad H , non metitur autem A ipsum B ; non metitur igitur et Z ipsum H ; non igitur unitas est Z , unitas enim omnem numerum metitur, et sunt Z, Θ primi inter se; neque Z igitur ipsum Θ metitur. Et est ut Z ad Θ ita A ad Γ ; neque A igitur ipsum Γ metitur. Similiter utique ostendemus neque alium aliquem ullum metiri. Quod oportebat ostendere.

Il est certainement évident que les nombres A, B, Γ, Δ, E ne se mesurent point successivement les uns les autres, puisque A ne mesure pas B . Je dis de plus qu'aucun autre n'en mesure un autre; car que A mesure Γ , si cela est possible. Autant qu'il y a de nombres A, B, Γ , autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B, Γ (35. 7), et que ces nombres soient Z, H, Θ . Puisque les nombres Z, H, Θ sont dans la même raison que A, B, Γ , et que la quantité des nombres A, B, Γ est la même que la quantité des nombres Z, H, Θ , par égalité A est à Γ comme Z est à Θ (14. 7). Et puisque A est à B comme Z est à H , et que A ne mesure pas B , Z ne mesure pas H (20. déf. 7); donc Z n'est pas l'unité, parce que l'unité mesure tous les nombres (déf. 1. 7); donc Z, Θ sont premiers entr'eux; donc Z ne mesure pas Θ (déf. 12. 7.). Mais Z est à Θ comme A est à Γ ; donc A ne mesure pas Γ . Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'en mesure un autre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Εὰν ὅσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἑσχατον μετρεῖ καὶ τὸν διῶ-
τιρον μετρήσει.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ
Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρεῖτω· λέγω ὅτι
καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος
οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει². Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ·
μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς
ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς
μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν
ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον
ἔχοντας αὐτοῖς¹ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνά-
λογον ἐμπίσσωνται.

PROPOSITION VII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si
le premier mesure le dernier, il mesurera le second.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on
voudra, et que Α mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Car si Α ne mesure pas Β, aucun autre n'en mesurera un autre (6. 8); mais
Α mesure Δ; donc Α mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si entre deux nombres tombent des nombres successivement proportionnels, il
tombera autant de nombres moyens proportionnels entre deux autres nombres qui
ont la même raison que les premiers, qu'il en tombe entre les deux premiers.

PROPOSITIO VII.

Si sint quotcunque numeri deinceps propor-
tionales, primus autem extremum metiatur,
et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportio-
nales Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α ipsum Δ me-
tiatur; dico et Α ipsum Β metiri.

Si enim non metitur Α ipsum Β, neque alius
aliquis ullum metietur. Metitur autem Α ipsum
Δ; metitur igitur et Α ipsum Β. Quod oport-
tebat ostendere.

PROPOSITIO VIII.

Si duos inter numeros in continuum pro-
portionales cadant numeri, quot inter eos in
continuum proportionales cadunt numeri, toti-
dem et inter illos eandem rationem habentes
in continuum proportionales cadent.

16 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτειν ἄριθμοι, οἱ Γ, Δ , καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἄριθμοι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς E, Z μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίσονται.

Duos enim inter numeros A, B in continuum proportionales cadant numeri Γ, Δ , et fiat ut A ad B ita E ad Z ; dico quot inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter E, Z in continuum proportionales casuros esse numeros.

$A, 2.$	$\Gamma, 4.$	$\Delta, 8.$	$B, 16.$
$H, 1.$	$\Theta, 2.$	$K, 4.$	$\Lambda, 8.$
$E, 3.$	$M, 6.$	$N, 12.$	$Z, 24.$

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ A, Γ, Δ, B , τοσοῦτοι εἰλήφθασαν οἱ ἐλάχιστοι ἄριθμοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, Γ, Δ, B , οἱ H, Θ, K, Λ . οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ H, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἵπαι οἱ A, Γ, Δ, B τοῖς H, Θ, K, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A, Γ, B, Δ τῷ πλῆθει τῶν H, Θ, K, Λ . διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Λ . Ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . Οἱ δὲ H, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ

Quot enim sunt in multitudine ipsi A, Γ, Δ, B totidem sumantur minimi numeri eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, Γ, Δ, B , ipsi H, Θ, K, Λ ; ergo extremi eorum H, Λ primi inter se sunt. Et quoniam A, Γ, Δ, B cum ipsis H, Θ, K, Λ in eadem ratione sunt, atque est æqualis multitudo ipsorum A, Γ, B, Δ multitudini ipsorum H, Θ, K, Λ ; ex æquo igitur est ut A ad B ita H ad Λ . Ut autem A ad B ita E ad Z ; et ut igitur H ad Λ ita E ad Z . Ipsi autem H, Λ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri metiuntur æqua-

Qu'entre les deux nombres A, B tombent les nombres moyens proportionnels Γ, Δ , et soit fait en sorte que A soit à B comme E est à Z ; je dis qu'il tombera entre E, Z autant de nombres moyens proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers A, B .

Autant qu'il y a de nombres A, Γ, Δ, B , autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, Γ, Δ, B (35. 7); et que ces nombres soient H, Θ, K, Λ ; leurs extrêmes H, Λ seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque les nombres A, Γ, Δ, B sont en même raison que H, Θ, K, Λ , et que la quantité des nombres A, Γ, B, Δ est égale à la quantité des nombres H, Θ, K, Λ , par égalité A sera à B comme H est à Λ (14. 7). Mais A est à B comme E est à Z ; donc H est à Λ comme E est à Z . Mais les nombres H, Λ sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus

ἰσάκιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἰλάσσων τὸν ἰλάσσονα· τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. ἰσάκεις ἄρα ὁ H τὸν E μετρεῖ, καὶ ὁ A τὸν Z . ὁσάκεις δὲ³ ὁ H τὸν E μετρεῖ τσαυτάκεις καὶ ἰσάκιστος τῶν Θ , K ἰσάκιστος τῶν M , N μετρεῖται· οἱ H , Θ , K , A ἄρα τοὺς E , M , N , Z ἰσάκεις μετροῦσιν· οἱ H , Θ , K , A ἄρα τοῖς E , M , N , Z ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Ἀλλὰ οἱ H , Θ , K , A τοῖς A , Γ , Δ , B ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν⁴. οἱ A , Γ , Δ , B ἄρα τοῖς E , M , N , Z ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ A , Γ , Δ , B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ οἱ E , M , N , Z ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν⁵. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς A , B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἱμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς E , Z μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἱμπεπτῶνται ἀριθμοί. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

liter ipsos eamdem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Æqualiter igitur H ipsum E metitur ac A ipsum Z . Quoties autem H ipsum E metitur, toties et uterque ipsorum Θ , K utrumque ipsorum M , N metiatur; ipsi H , Θ , K , A igitur ipsos E , M , N , Z æqualiter metiuntur; ergo H , Θ , K , A cum ipsis E , M , N , Z in eadem ratione sunt. Sed H , Θ , K , A cum ipsis A , Γ , Δ , B in eadem ratione sunt; ipsi A , Γ , Δ , B igitur cum ipsis E , M , N , Z in eadem ratione sunt. Ipsi autem A , Γ , Δ , B deinceps proportionales sunt; et E , M , N , Z igitur deinceps proportionales sunt; quot igitur inter A , B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter et ipsos E , Z in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit; c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc H mesure E autant de fois que A mesure Z . Que les nombres Θ , K mesurent les nombres M , N autant de fois que H mesure E ; les nombres H , Θ , K , A mesureront également E , M , N , Z ; donc les nombres H , Θ , K , A sont en même raison que E , M , N , Z (déf. 20. 7). Mais les nombres H , Θ , K , A sont en même raison que les nombres A , Γ , Δ , B ; donc les nombres A , Γ , Δ , B sont en même raison que E , M , N , Z . Mais les nombres A , Γ , Δ , B sont successivement proportionnels; donc les nombres E , M , N , Z sont successivement proportionnels; donc il tombe entre E , Z autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A , B . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος¹ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

Εστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ² κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ

Α, 8.	Γ, 12.	Δ, 18.	Β, 27.
	Ε, 1.		
	Ζ, 2.	Η, 5.	
	Θ, 4.	Κ, 6.	Α, 9.
Μ, 8.	Ν, 12.	Ξ, 18.	Ο, 27.

ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτάσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς³ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

Si duo numeri primi inter se sunt, et inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter utrumque ipsorum, et unitatem deinceps in continuum proportionales cadent.

Sint duo numeri primi inter se Α, Β, et inter ipsos in continuum proportionales cadant Γ, Δ,

et exponatur Ε unitas; dico quot inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque Α, Β et unitatem in continuum proportionales cadere.

PROPOSITION IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et s'il tombe entr'eux des nombres successivement proportionnels, il tombera entre chacun de ces nombres et l'unité autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers nombres.

Soient deux nombres Α, Β premiers entr'eux, et qu'entre ces deux nombres il tombe les deux nombres successivement proportionnels Γ, Δ; et soit Ε l'unité; je dis qu'entre chacun des nombres Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre Α, Β et l'unité.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους ὡς ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, εἰλήφθωσαν, καὶ ἴστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο· φανερόν δὲ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποιήκει, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ Α πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ, Β· ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἑκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει· ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ

Sumantur enim duo quidem numeri minimi Ζ, Η in ipsorum Α, Γ, Δ, Β ratione existentes, tres vero Θ, Κ, Λ, et semper deinceps uno plures quoad æqualis fiat multitudo eorum multitudini ipsorum Α, Γ, Δ, Β; sumantur, et sint Μ, Ν, Ξ, Ο; evidens est utique Ζ quidem se ipsum multiplicantem ipsum Θ fecisse, multiplicantem vero Θ fecisse Μ, et Η se ipsum quidem multiplicantem fecisse Α, multiplicantem vero Α fecisse Ο. Et quoniam Μ, Ν, Ξ, Ο minimi sunt eandem rationem habentium cum ipsis Ζ, Η, sunt autem et Α, Γ, Δ, Β minimi eandem rationem habentium cum ipsis Ζ, Η, et est æqualis multitudo ipsorum Μ, Ν, Ξ, Ο multitudini ipsorum Α, Γ, Δ, Β; unusquisque igitur ipsorum Μ, Ν, Ξ, Ο unicuique ipsorum Α, Γ, Δ, Β æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem Μ ipsi Α, ipse vero Ο ipsi Β. Et quoniam Ζ se ipsum multiplicans ipsum Θ fecit, ergo Ζ ipsum Θ metitur per unitates quæ in Ζ. Metitur autem et Ε unitas ipsum Ζ per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur Ε unitas ipsum Ζ numerum metitur ac Ζ ipsum Θ; est igitur ut Ε

Soient pris les deux plus petits nombres Ζ, Η dans la raison des nombres Α, Γ, Δ, Β (2. 8); ensuite trois Θ, Κ, Λ, et toujours successivement un de plus jusqu'à ce que leur quantité soit égale à celle des nombres Α, Γ, Δ, Β; que ces nombres soient pris, et qu'ils soient Μ, Ν, Ξ, Ο; il est évident que Ζ se multipliant lui-même a fait Θ, que Ζ multipliant Θ a fait Μ, que Η se multipliant lui-même a fait Α, et que Η multipliant Α a fait Ο (2. 8). Puisque les nombres Μ, Ν, Ξ, Ο sont les plus petits de ceux qui ont la même raison que Ζ, Η, que les nombres Α, Γ, Δ, Β sont aussi les plus petits de ceux qui ont la même raison que Ζ, Η, et que la quantité des nombres Μ, Ν, Ξ, Ο est égale à celle des nombres Α, Γ, Δ, Β, chacun des nombres Μ, Ν, Ξ, Ο est égal à chacun des nombres Α, Γ, Δ, Β; donc Μ est égal à Α et Ο à Β. Et puisque Ζ se multipliant lui-même a fait Θ, Ζ mesure Θ par les unités qui sont en Ζ. Mais l'unité Ε mesure Ζ par les unités qui sont en Ζ; donc l'unité Ε mesure Ζ autant de fois que Ζ mesure Θ; donc l'unité Ε est au nombre Ζ comme Ζ est à Θ (déf. 20. 7). De plus, puisque Ζ multi-

20 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'ÉUCLIDE.

ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ζ⁴
τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποιήκεν· ὁ Θ
ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Ζ⁵ μο-
νάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν
κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε
μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ⁶ τὸν Μ.
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν
οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε
μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ·
καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως

unitas ad Z numerum ita Z ad Θ . Rursus, quoniam Z ipsum Θ multiplicans ipsum M fecit; ergo Θ ipsum M metitur per unitates quæ in Z . Metitur autem et E unitas ipsum Z numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur E unitas ipsum Z numerum metitur ac Θ ipsum M ; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Θ ad M . Ostensum est autem et ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ ; et ut igitur E unitas

A, 8. Г, 12. Δ, 18. В, 27.
 Е, 1.
 Z, 2. H, 3.
 Θ, 4. К, 6. Λ, 9.
M, 8. N, 12. Z, 18. O, 27.

ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Ἰσὸς δὲ ὁ Μ τῷ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμὸν οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἑμπεπτῶκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἑμπεπτῶκασιν ἀριθμοὶ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad M . *Æqualis*
autem M ipsi A ; est igitur ut E unitas ad Z
numerum ita Z ad Θ et Θ ad A . Propter
eamdem utique et ut E unitas ad H numerum
ita H ad Λ et Λ ad B ; quot igitur inter A , B
in continuum proportionales cadunt numeri,
totidem et inter utrumque ipsorum A , B et
unitatem E in continuum proportionales cadent
numeri. Quod oportebat ostendere.

pliant Θ a fait M , le nombre Θ mesure M par les unités qui sont en Z . Mais l'unité E mesure le nombre Z par les unités qui sont en lui; donc l'unité E mesure Z autant de fois que Θ mesure M ; donc l'unité E est au nombre Z comme Θ est à M . Mais on a démontré que l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ , et comme Θ est à M . Mais M égale A ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ , et comme Θ est à A . Par la même raison l'unité E est au nombre H comme H est à Λ , et comme Λ est à B ; il tombe donc entre chacun des nombres A , B , et l'unité E , autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A , B . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Εὰν δύο ἀριθμῶν¹ καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος² μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίσσωται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσαν ἀριθμοί οἱ τε³ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίσσωται.

Si inter duos numeros et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter utrumque ipsorum et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter ipsos in continuum proportionales cadent.

Duos enim inter numeros Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadant numeri et Δ, Ε et Ζ, Η; dico quot inter utrumque ipsorum Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Α, Β numeros in continuum proportionales cadere.

Α, 8.	Κ, 12.	Α, 18.	Β, 27.
Ε, 4.	Θ, 6.	Η, 9.	
Δ, 2.	Ζ, 3.		
Γ, 1.			

Ο Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Α ποιεῖτω.

Ipse Δ enim ipsum Ζ multiplicans ipsum Θ faciat, uterque autem ipsorum Δ, Ζ ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum Κ, Α faciat.

PROPOSITION X.

Si entre deux nombres et l'unité il tombe des nombres successivement proportionnels, il tombe entre les deux premiers nombres autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des premiers et l'unité.

Qu'entre les nombres Α, Β, et l'unité Γ, il tombe les nombres successivement proportionnels Δ, Ε et Ζ, Η; je dis qu'entre Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des nombres Α, Β et l'unité Γ.

Car que Δ multipliant Ζ fasse Θ, et que chacun des nombres Δ, Ζ multipliant Θ fasse Κ, Α.

22 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς⁵ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ

Et quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita Δ ad Ε, æqualiter igitur Γ unitas ipsum Δ numerum metitur ac Γ ipsum Ε. Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ; et Δ igitur ipsum Ε metitur per unitates quæ in Δ; ergo Δ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit. Rursus, quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita Ε ad Α; æqualiter igitur Γ

Α, 8. Κ, 12. Λ, 18. Β, 27.
 Ε, 4. Θ, 6. Η, 9.
 Δ, 2. Ζ, 3.
 Γ, 1.

καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποιήκει, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκειν⁶· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ

unitas ipsum Δ numerum metitur ac Ε ipsum Α. Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ; et Ε igitur ipsum Α metitur per unitates quæ in Δ; ergo Δ ipsum Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Ζ quidem se ipsum multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit, et quoniam Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum autem Ζ multiplicans ipsum Θ fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Ε ad Θ. Propter eadem et ut Δ ad Ζ ita Θ ad Η. Et ut igitur Ε ad Θ ita Θ ad Η.

Puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme Δ est à Ε, l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que Δ mesure Ε. Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ; donc Δ mesure Ε par les unités qui sont en Δ; donc Δ se multipliant lui-même fait Ε. De plus, puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme Ε est à Α, l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que Ε mesure Α. Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ; donc Ε mesure Α par les unités qui sont en Δ; donc Δ multipliant Ε fait Α. Par la même raison Ζ se multipliant lui-même fait Η, et Ζ multipliant Η fait Β. Mais Δ se multipliant lui-même fait Ε, et Δ multipliant Ζ fait Θ; donc Δ est à Ζ comme Ε est à Θ (17. 7). Par la même raison Δ est à Ζ comme Θ est à Η; donc Ε est à Θ comme Θ est à Η.

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἰκά-
τερον τῶν E , Θ πολλαπλασιάσας ἰκάτερον τῶν
 A , K πεποίηκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ
οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K . Ἀλλ' ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ
οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν
 Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K . Πάλιν, ἐπεὶ ἰκάτερος
τῶν Δ , Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἰκάτερον τῶν
 K , Λ πεποίηκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z
οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ . Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z
οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K · καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν
 K οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ . Ἐτι ἐπεὶ ὁ Z ἰκάτερον
τῶν H , Θ πολλαπλασιάσας ἰκάτερον τῶν Λ , B
πεποίηκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν H οὕτως
ὁ Λ πρὸς τὸν B . Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν H οὕτως ὁ
 Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως
ὁ Λ πρὸς τὸν B . Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K , καὶ ὁ K πρὸς τὸν
 Λ , καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν K οὕτως ὁ K πρὸς
τὸν Λ , καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν B · οἱ A , K , Λ , B ἄρα
κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα
ἰκατέρου τῶν A , B καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ
κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἰμπίπτουσιν ἀριθμοὶ,
τισοῦτοι καὶ εἰς τοὺς A , B μεταξὺ κατὰ τὸ
συνεχὲς ἀνάλογον ἰμπίπτουσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum E , Θ
multiplicans utrumque ipsorum A , K fecit; est
igitur ut E ad Θ ita A ad K . Sed ut E ad Θ
ita Δ ad Z ; et ut igitur Δ ad Z ita A ad K .
Rursus, quoniam uterque ipsorum Δ , Z ipsum
 Θ multiplicans utrumque ipsorum K , Λ fecit;
est igitur ut Δ ad Z ita K ad Λ . Sed ut Δ
ad Z ita A ad K ; et ut igitur A ad K ita K ad Λ .
Præterea, quoniam Z utrumque ipsorum H , Θ mul-
tiplicans utrumque ipsorum Λ , B fecit; est igitur
ut Θ ad H ita Λ ad B . Ut autem Θ ad H ita Δ
ad Z ; et ut igitur Δ ad Z ita Λ ad B . Ostensum
est autem et ut Δ ad Z ita A ad K , et K ad Λ ;
et ut igitur A ad K ita K ad Λ , et Λ ad B ;
ipsi A , K , Λ , B igitur in continuum deinceps
sunt proportionales; quot igitur inter utrumque
ipsorum A , B et Γ unitatem in continuum pro-
portionales cadunt numeri, totidem et inter
 A , B in continuum proportionales cadent. Quod
oportebat ostendere.

De plus, puisque le nombre Δ multipliant les nombres E , Θ fait les nombres
 A , K , le nombre E est à Θ comme A est à K (17. 7). Mais E est à Θ comme Δ est à Z ;
donc Δ est à Z comme A est à K . De plus, puisque les nombres Δ , Z multipliant
 Θ font les nombres K , Λ , le nombre Δ est à Z comme K est à Λ (18. 7). Mais Δ
est à Z comme A est à K ; donc A est à K comme K est à Λ . De plus, puisque le
nombre Z multipliant les nombres H , Θ fait les nombres Λ , B , le nombre Θ est à
 H comme Λ est à B . Mais Θ est à H comme Δ est à Z ; donc Δ est à Z comme Λ est
à B . Mais il a été démontré que Δ est à Z comme A est à K , comme K est à Λ ;
donc A est à K comme K est à Λ , et comme Λ est à B ; donc les nombres A , K , Λ , B
sont successivement proportionnels; donc entre A , B il tombe autant de nombres
successivement proportionnels qu'il en tombe entre les nombres A , B et l'unité Γ .
Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ.

PROPOSITIO XI.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A , B , καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ . λέγω ὅτι τῶν A , B εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum duplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint quadrati numeri A , B , et ipsius quidem A latus sit Γ , ipsius vero B ipse Δ ; dico ipsorum A , B unum medium proportionalem esse numerum, et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ .

$$\begin{array}{ccc} A, 4. & E, 6. & B, 9. \\ \Gamma, 2. & & \Delta, 3. \end{array}$$

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ A , πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ , ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκει· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἰκάτερον τῶν Γ , Δ πολλαπλασιάσας ἰκάτερον τῶν A , E πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς

Γ enim Δ multiplicans ipsum E faciat. Et quoniam quadratus est A , latus autem ipsius est Γ ; ergo Γ se ipsum multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum multiplicans ipsum B fecit; quoniam igitur Γ utrumque ipsorum Γ , Δ multiplicans utrumque ipsorum A , E fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita A ad E . Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita E ad

PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrés, il y a un nombre moyen proportionnel, et le quarré est au quarré en raison double de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres quarrés A , B ; que le côté de A soit Γ , et que le côté de B soit Δ ; je dis qu'il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B , et que A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Δ .

Car que Γ multipliant Δ fasse E . Puisque A est un nombre quarré, et que son côté est Γ , le nombre Γ se multipliant lui-même fait A (déf. 18. 7). Par la même raison le nombre Δ se multipliant lui-même fait B ; donc puisque Γ multipliant l'un et l'autre nombre Γ , Δ fait l'un et l'autre nombre A , E , le nombre Γ est à Δ comme A est à E (17. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme E

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 25

τὸν Β³· καὶ ὅς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Τῶν Α, Β ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ Ε³.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Ε, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πλεονεκτικὰ πρὸς τὸν Δ πλεονεκτικῶς. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Α, 8.	Θ, 12.	Κ, 18.	Β, 27.
Ε, 4.	Ζ, 6.	Η, 9.	
	Γ, 2.	Δ, 3.	

Ἐστώσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι

Β; et ut igitur Α ad Ε ita Ε ad Β. Ipsorum Α, Β igitur unus medius proportionalis est numerus Ε.

Dico etiam et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim tres numeri proportionales sunt Α, Ε, Β; ergo Α ad Β duplam rationem habet ejus quam Α ad Ε. Ut autem Α ad Ε ita Γ ad Δ; ergo Α ad Β duplam rationem habet ejus quam Γ latus ad Δ latus. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XII.

Duorum cuborum duo medii proportionales sunt numeri, et cubus ad cubum triplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint cubi numeri Α, Β, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius vero Β ipse Δ; dico ip-

est à Β; donc Α est à Ε comme Ε est à Β; donc le nombre Ε est moyen proportionnel entre Α, Β.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison double de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les trois nombres Α, Ε, Β sont proportionnels, le nombre Α a avec Β une raison double de celle que Α a avec Ε. Mais Α est à Ε comme Γ est à Δ; donc Α a avec Β une raison double de celle que le côté Γ a avec le côté Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels, et le cube a avec le cube une raison triple de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres cubes Α, Β, et que Γ soit le côté de Α, et Δ le côté de Β; je

26 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιεῖτω.

sorum Α, Β duos medios proportionales esse numeros, et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ.

Ipse enim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, uterque vero ipsorum Γ, Δ. ipsum Ζ multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ faciat.

Α, 8. Θ, 12. Κ, 18. Β, 27.
Ε, 4. Ζ, 6. Η, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· καὶ ὁ Γ¹ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκε², τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πιποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πιποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πι-

Et quoniam cubus est Α, latus autem ipsius ipse Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit; ergo Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum Ε, Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Ζ ad Η. Rursus, quoniam Γ utrumque ipsorum Ε, Ζ multiplicans utrumque ipsorum Α, Θ fecit; est igitur ut Ε

dis qu'il y a deux nombres moyens proportionnels entre Α, Β, et que Α a avec Β une raison triple de celle que le côté Γ a avec le côté Δ.

Car que le côté Γ se multipliant lui-même fasse Ε, que Γ multipliant Δ fasse Ζ, que Δ se multipliant lui-même fasse Η, et que les nombres Γ, Δ multipliant Ζ fassent les nombres Θ, Κ.

Puisque Α est un cube, que son côté est Γ, et que Γ se multipliant lui-même a fait Ε, le nombre Γ se multipliant lui-même fera Ε, et Γ multipliant Ε fera Α (déf. 19. 7). Par la même raison, Δ se multipliant lui-même fait Η, et Δ multipliant Η fait Β. Et puisque Γ multipliant les nombres Γ, Δ a fait les nombres Ε, Ζ, le nombre Γ est à Δ comme Δ est à Ζ (17. 7). Par la même raison, Γ est à Δ comme Ζ est à Η. De plus, puisque Γ multipliant les nombres Ε, Ζ fait les

ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἔπει³ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἔπει⁴ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ⁴ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα⁵ πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad Z ita A ad Θ. Ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita A ad Θ. Rursus, quoniam uterque ipsorum Γ, Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum Ζ, Η multiplicans utrumque ipsorum Κ, Β fecit; est igitur ut Ζ ad Η ita Κ ad Β. Ut autem Ζ ad Η ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Κ ad Β. Ostensum autem est et ut Γ ad Δ ita et Α ad Θ, et Θ ad Κ, et Κ ad Β; ipsorum Α, Β igitur duo medii proportionales sunt numeri Θ, Κ.

Dico etiam et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim quatuor numeri Α, Θ, Κ, Β proportionales sunt; ergo Α ad Β triplam rationem habet ejus quam Α ad Θ. Ut autem Α ad Θ ita Γ ad Δ; et Α igitur ad Β triplam rationem habet ejus quam Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

nombres Α, Θ, le nombre Ε est à Ζ comme Α est à Θ. Mais Ε est à Ζ comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Α est à Θ. De plus, puisque les nombres Γ, Δ multipliant Ζ ont fait les nombres Θ, Κ; le nombre Γ est à Δ comme Θ est à Κ (18. 7). De plus, puisque Δ multipliant les nombres Ζ, Η fait les nombres Κ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Κ est à Β. Mais Ζ est à Η comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Κ est à Β. Mais il a été démontré que Γ est à Δ comme Α est à Θ, comme Θ est à Κ, et comme Κ est à Β; donc entre Α, Β il y a deux nombres moyens proportionnels Θ, Κ.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les quatre nombres Α, Θ, Κ, Β sont proportionnels, Α aura avec Β une raison triple de celle que Α a avec Θ. Mais Α est à Θ comme Γ est à Δ; donc Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν ὅσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐάν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινόμενους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Εστωσαν ὅποιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτούς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἱ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et se ipsum multiplicans unusquisque faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt; et si ipsi a principio, factos multiplicantes faciant aliquos, et ipsi proportionales erunt, et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ, et ipsi Α, Β, Γ se ipsos quidem multiplicantes ipsos Δ, Ε, Ζ faciant, ipsos vero Δ, Ε, Ζ multiplicantes ipsos Η, Θ, Κ faciant; dico et ipsos Δ, Ε, Ζ et ipsos Η, Θ, Κ deinceps proportionales esse.

		Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.		
	Δ, 4.	Α, 8.	Ε, 16.	Ζ, 32.	Ζ, 64.	
Η, 8.	Μ, 16.	Ν, 32.	Θ, 64.	Ο, 128.	Π, 256.	Κ, 512.

Ο μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Α πολλαπλα-

Etenim Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Α faciat; uterque vero ipsorum Α, Β

PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si chacun de ces nombres se multipliant lui-même fait certains nombres, les nombres produits seront proportionnels; et si les premiers nombres multipliant les nombres produits font certains nombres, ceux-ci seront encore proportionnels, et cela arrivera toujours aux derniers produits.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres proportionnels qu'on voudra, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; que les nombres Α, Β, Γ se multipliant eux-mêmes fassent Δ, Ε, Ζ, et que ces mêmes nombres multipliant Δ, Ε, Ζ fassent Η, Θ, Κ; je dis que les nombres Δ, Ε, Ζ, ainsi que Η, Θ, Κ, sont successivement proportionnels.

Car que Α multipliant Β fasse Α; que les nombres Α, Β multipliant Α fassent

σιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιεῖτω. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιεῖτω.

Ομοίως δὲ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Α, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον² ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον³ ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Α, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν⁴ Δ, Α, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλῆθει. Τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ· καὶ⁵ διῆσου ἄρα ἔστιν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

ipsum Α multiplicans utrumque ipsorum Μ, Ν faciat. Et rursus Β quidem ipsum Γ multiplicans ipsum Ξ faciat, uterque vero ipsorum Β, Γ ipsum Ξ multiplicans utrumque ipsorum Ο, Π faciat.

Congruenter utique præcedentibus ostendemus ipsos Δ, Α, Ε et ipsos Η, Μ, Ν, Θ deinceps esse proportionales in ratione ipsius Α ad Β, et adhuc ipsos Ε, Ξ, Ζ et ipsos Θ, Ο, Π, Κ deinceps esse proportionales in ratione ipsius Β ad Γ. Atque est ut Α ad Β ita Β ad Γ; et Δ, Α, Ε igitur in eadem ratione sunt in quâ Ε, Ξ, Ζ et adhuc ipsi Η, Μ, Ν, Θ in quâ ipsi Θ, Ο, Π, Κ. Et est æqualis quidem ipsorum Δ, Α, Ε multitudo ipsorum Ε, Ξ, Ζ multitudini. Ipsorum vero Η, Μ, Ν, Θ multitudo ipsorum Θ, Ο, Π, Κ multitudini; et ex æquo igitur est ut quidem Δ ad Ε ita Ε ad Ζ, ut vero Η ad Θ ita Θ ad Κ. Quod oportebat ostendere.

Μ, Ν; et de plus, que Β multipliant Γ fasse Ξ, et que les nombres Β, Γ multipliant Ξ fassent Ο, Π.

Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que les nombres Δ, Α, Ε et Η, Μ, Ν, Θ sont successivement proportionnels dans la raison de Α à Β, que les nombres Ε, Ξ, Ζ et Θ, Ο, Π, Κ sont aussi successivement proportionnels dans la raison de Β à Γ. Mais Α est à Β comme Β est à Γ; donc les nombres Δ, Α, Ε sont en même raison que les nombres Ε, Ξ, Ζ, et les nombres Η, Μ, Ν, Θ en même raison que les nombres Θ, Ο, Π, Κ. Mais la quantité des nombres Δ, Α, Ε est égale à la quantité des nombres Ε, Ξ, Ζ; et la quantité des nombres Η, Μ, Ν, Θ est égale à la quantité des nombres Θ, Ο, Π, Κ; donc par égalité Δ est à Ε comme Ε est à Ζ, et Η est à Θ comme Θ est à Κ (14. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

30 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσῃ.

Εστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἑστώσαν· οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Si quadratus quadratum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem eorum sint ipsi Γ, Δ, ipse vero Α ipsum Β metiatur; dico et Γ ipsum Δ metiri.

Α, 4. Ε, 8. Β, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

Ο Γ γάρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἵπαι οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ².

Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ³. λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δειξόμεν ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς⁴ ἀνάλογόν εἰσιν

Ipse Γ enim ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat; ipsi Α, Ε, Β igitur deinceps proportionales sunt in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Α, Ε, Β deinceps proportionales sunt, et metitur Α ipsum Β; metitur igitur et Α ipsum Ε. Atque est ut Α ad Ε ita Γ ad Δ; ergo metitur et Γ ipsum Δ.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ; dico et Α ipsum Β metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus Α, Ε, Β deinceps proportionales esse in

PROPOSITION XIV.

Si un nombre carré mesure un nombre carré, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le carré mesurera le carré.

Soient les nombres carrés Α, Β; que Γ, Δ soient leurs côtés; que Α mesure Β; je dis que Γ mesure Δ.

Car que Γ multipliant Δ fasse Ε, les nombres Α, Ε, Β seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ; et puisque Α, Ε, Β sont successivement proportionnels, et que Α mesure Β, Α mesurera Ε (7. 8). Mais Α est à Ε comme Γ est à Δ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε⁵. Καὶ εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἕξῃς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Εὰν ἄρα τιτράγωνος, καὶ τὰ ἕξῃς.

ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Α ad Ε, metitur autem Γ ipsum Δ; ergo metitur Α ipsum Ε. Et sunt Α, Ε, Β deinceps proportionales; ergo metitur et Α ipsum Β. Si igitur quadratus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ εἰάν ἢ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσῃ.

Κύβος γάρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἴστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ².

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, et cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum Β metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius vero Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ metiri.

Α, 8.	Θ, 16.	Κ, 32.	Β, 64.
Ε, 4.	Ζ, 8.	Η, 16.	
	Γ, 2.	Δ, 4.	

Ο Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας

Etenim Γ se ipsum multiplicans ipsum Β faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, et adhuc Γ ipsum Δ multiplicans

Α, Ε, Β sont successivement proportionnels dans la raison de γ à Δ. Et puisque Γ est à Δ comme Α est à Ε, et que Γ mesure Δ, Α mesurera Ε. Mais Α, Ε, Β sont successivement proportionnels; donc Α mesure Β; donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le cube mesurera le cube.

Car que le nombre cube Α mesure le nombre cube Β; que γ soit le côté de Α et Δ le côté de Β; je dis que γ mesure Δ.

Que γ se multipliant lui-même fasse Ε; que Δ se multipliant lui-même fasse Η;

32 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸν Z^3 , ἑκάτερος δὲ τῶν Γ , Δ τὸν Z πολλαπλασιάζας ἑκάτερον τῶν Θ , $\Kappa$ ποιεῖτω. Φανερόν δὲ ὅτι οἱ E , Z , H καὶ οἱ A , Θ , $\Kappa$, B ἰζῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ· καὶ ἵπαι οἱ A , Θ , $\Kappa$, B ἰζῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B · μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ . Καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ · μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ .

ipsum Z , uterque vero ipsorum Γ , Δ ipsum Z multiplicans utrumque ipsorum Θ , $\Kappa$ faciat. Evidens utique est ipsos E , Z , H et A , Θ , $\Kappa$, B deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ ratione; et quoniam A , Θ , $\Kappa$, B deinceps proportionales sunt, et metitur A ipsum B ; ergo metitur et ipsum Θ . Atque est ut A ad Θ ita Γ ad Δ ; metitur igitur et Γ ipsum Δ .

A , 8.	Θ , 16.	$\Kappa$, 32.	B , 64.
E , 4.	Z , 8.	H , 16.	
Γ , 2.	Δ , 4.		

Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ · λίγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὲ δειξομεν ὅτι οἱ A , Θ , $\Kappa$, B ἰζῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἵπαι⁵ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ · καὶ ὁ A ἄρα τὸν Θ μετρεῖ ὡς τε καὶ τὸν B μετρεῖ ὁ A . Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ ; dico et A ipsum B mensurum esse.

Isidem enim constructis, similiter utique ostendemus A , Θ , $\Kappa$, B deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Γ ipsum Δ metitur, estque ut Γ ad Δ ita A ad Θ ; et A igitur ipsum Θ metitur; quare et ipsum B metitur ipse A . Quod oportebat ostendere.

que Γ multipliant Δ fasse Z , et que les nombres Γ , Δ multipliant Z fassent Θ , $\Kappa$. Il est évident que les nombres E ; Z , H et A , Θ , $\Kappa$, B seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ ; et puisque A , Θ , $\Kappa$, B sont successivement proportionnels, et que A mesure B , A mesurera Θ (7. 8). Mais A est à Θ comme Γ est à Δ ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ , je dis que A mesurera B .

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que les nombres A , Θ , $\Kappa$, B sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ . Et puisque Γ mesure Δ , et que Γ est à Δ comme A est à Θ , A mesurera Θ ; donc A mesure B . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

PROPOSITIO XVI.

Εὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσῃ.

Εστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ² οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἑστώσαν³ οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρίτω ὁ Α τὸν Β· λέγεται ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρί⁵.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem ipsorum sint Γ, Δ, et non metiatur Α ipsum Β; dico neque Γ ipsum Δ metiri.

Α, 9.	Β, 16.
Γ, 3.	Δ, 4.

Εἰ γὰρ μετρίῃ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσῃ καὶ ὁ Α τὸν Β. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσῃ.

Μὴ μετρίτω⁶ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγεται ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσῃ.

Εἰ γὰρ μετρίῃ ὁ Α τὸν Β, μετρήσῃ καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσῃ. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, metietur et Α ipsum Β. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metietur.

Non metiatur rursus Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim metitur Α ipsum Β, metietur et Γ ipsum Δ. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si un nombre quarré ne mesure pas un nombre quarré, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le quarré ne mesurera pas le quarré.

Soient les nombres quarrés Α, Β, que Γ, Δ en soient les côtés, et que Α ne mesure pas Β; je dis que Γ ne mesure pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, Α mesurera Β (14. 8). Mais Α ne mesure pas Β; donc Γ ne mesurera pas Δ.

De plus, que Γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, Γ mesurera Δ (14. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

PROPOSITIO XVII.

Εάν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρίτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἴστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Α, 8.

Γ, 2.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β non metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius verò Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ non mensurum esse.

Β, 27.

Δ, 3.

Εἰ γὰρ μετρίῃ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρίῃ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρίτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρίῃ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, et Α ipsum Β metietur. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metitur.

Sed et non metiatur Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim Α ipsum Β metiatur, et Γ ipsum Δ metietur. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVII.

Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le cube ne mesurera pas le cube.

Que le nombre cube Α ne mesure pas le nombre cube Β, et que γ soit le côté de Α, et Δ le côté de Β; je dis que γ ne mesurera pas Δ.

Car si γ mesure Δ, Α mesurera Β (15. 8.) Mais Α ne mesure pas Β; donc γ ne mesure pas Δ.

Mais que γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, γ mesurera Δ (15. 8.). Mais γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

PROPOSITIO XVIII.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστίν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι· οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω οὖν ὅτι τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστίν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τοῦτέστιν ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον².

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus; et planus ad planum duplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Sint duo numeri similes plani Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ. Et quoniam similes plani sunt qui proportionalia habent latera, est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Dico igitur ipsorum Α, Β unum medium proportionalem esse numerum, et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam Γ ad Ε, vel Δ ad Ζ, hoc est ejus quam latus homologum ad homologum.

Α, 6. Η, 12. Β, 24.
Γ, 2. Δ, 3. Ε, 4. Ζ, 6.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως³ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἐπί-

Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ. Et quo-

PROPOSITION XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un nombre moyen proportionnel, et le nombre plan a avec le nombre plan une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient les deux nombres plans semblables Α, Β, que les nombres γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β. Puisque les nombres plans semblables ont leurs côtés proportionnels, γ est à Δ comme Ε est Ζ (déf. 21. 7); et je dis qu'entre Α, Β il y a un nombre moyen proportionnel, et que Α a avec Β une raison double de celle que γ a avec Ε, ou de celle que Δ a avec Ζ, c'est-à-dire de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Puisque γ est à Δ comme Ε est à Ζ, par permutation γ est à Ε comme Δ est

36 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πιδός ἐστιν ὁ A , πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ , Δ .
 ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πιποίηκε.
 Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ E τὸν Z πολλαπλασιάσας
 τὸν B πιποίηκεν. Ὁ Δ δὲ τὸν E πολλαπλασιάσας
 τὸν H ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλα-
 πλασιάσας τὸν A πιποίηκε, τὸν δὲ E πολλα-
 πλασιάσας τὸν H πιποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ
 πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H . Ἀλλ' ὡς ὁ
 Γ πρὸς τὸν E οὕτως⁵ ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς
 ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H .
 Πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν μὲν⁶ Δ πολλαπλασιάσας
 τὸν H πιποίηκε, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν
 B πιποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως
 ὁ H πρὸς τὸν B . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H · καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς
 τὸν H οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B · οἱ A , H , B ἄρα ἐξῆς
 ἀνάλογόν εἰσι· τῶν A , B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν
 ἐστιν ἀριθμός.

niam planus est A , latera autem ipsius ipsi
 Γ , Δ ; ergo Δ ipsum Γ multiplicans ipsum A
 fecit. Propter eadem utique et E ipsum Z multi-
 plicans ipsum B fecit. Ipse Δ utique ipsum E
 multiplicans ipsum H faciat. Et quoniam Δ ipsum
 Γ quidem multiplicans ipsum A fecit, ipsum
 vero E multiplicans ipsum H fecit; est igitur
 ut Γ ad E ita A ad H . Sed ut Γ ad E ita Δ
 ad Z ; et ut igitur Δ ad Z ita A ad H . Rursus,
 quoniam E ipsum quidem Δ multiplicans ipsum
 H fecit; ipsum vero Z multiplicans ipsum B fecit;
 est igitur ut Δ ad Z ita H ad B . Ostensum
 est autem et ut Δ ad Z ita A ad H ; et ut
 igitur A ad H ita H ad B ; ergo A , H , B
 deinceps proportionales sunt; ipsorum A , B
 igitur unus medius proportionalis est numerus.

A , 6. H , 12. B , 24.
 Γ , 2. Δ , 3. E , 4. Z , 6.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα
 λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν
 ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν
 E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z . Ἐπεὶ γὰρ οἱ A , H , B ἐξῆς

Dico etiam et A ad B duplam rationem ha-
 bere ejus quam homologum latus ad homologum
 latus, hoc est quam Γ ad E vel Δ ad Z . Quo-
 niam enim A , H , B deinceps proportionales

à Z (13. 7). Et puisque A est un nombre plan, et que Γ , Δ en sont les côtés, Δ
 multipliant Γ fera A . Par la même raison E multipliant Z fera B . Que Δ multipliant
 E fasse H . Puisque Δ multipliant Γ fait A , et que Δ multipliant E fait H , Γ est à
 E comme A est à H (17. 7). Mais Γ est à E comme Δ est à Z ; donc Δ est à Z comme A
 est à H . De plus, puisque E multipliant Δ fait H , et que E multipliant Z fait B , Δ est
 à Z comme H est à B . Mais on a démontré que Δ est à Z comme A est à H ; donc A
 est à H comme H est à B ; donc A , H , B sont successivement proportionnels; donc
 il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B .

Je dis que A a avec B une raison double de celle qu'un côté homologue a avec
 un côté homologue, c'est-à-dire de celle que Γ a avec E ou de celle que Δ a avec Z .
 Car puisque les nombres A , H , B sont successivement proportionnels, A a avec B

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 37

ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

sunt, A ad B duplam rationem habet ejus quam ad H. Atque est ut A ad H ita et Γ ad E et Δ ad Z; et A igitur ad B duplam rationem habet ejus quam et Γ ad E vel Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

PROPOSITIO XIX.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μίσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὁμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt numeri; et solidus ad similem solidum triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

A, 30.	N, 60.	Z, 120.	B, 240.		
	K, 6.	M, 12.	Λ, 24.		
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.	Η, 6.	Θ, 10.

Ἐστῶσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς

Sint duo similes solidi A, B, et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, Ε, ipsius vero B ipsi Ζ, Η, Θ. Et quoniam similes solidi sunt qui proportionalia habent latera; est igitur ut Γ quidem ad

une raison double de celle que A a avec H. Mais A est à H comme Γ est à E, et comme Δ est à Z; donc A a avec B une raison double de celle que Γ a avec E, ou de celle que Δ a avec Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Entre deux nombres solides semblables il y a deux nombres moyens proportionnels; et un nombre solide a avec un nombre solide semblable une raison triplée de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient A, B deux nombres solides semblables; que Γ, Δ, Ε soient les côtés de A, et Ζ, Η, Θ les côtés de B. Puisque les nombres solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés homologues proportionnels (déf. 21. 7), Γ est à Δ comme Ζ à Η,

38 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς
δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Λέγω
ὅτι τῶν Α, Β δύο μίσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν
ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον
ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η.
καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Δ ita Z ad H, ut vero Δ ad E ita H ad Θ. Dico
inter ipsos Α, Β duos medios proportionales
cadere numeros, et Α ad Β triplam rationem
habere ejus quam Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc
Ε ad Θ.

Α, 30.	Ν, 60.	Ζ, 120.	Β, 240.
	Κ, 6.	Μ, 12.	Λ, 24.
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.
		Η, 6.	Θ, 10.

Ο Γ γὰρ τὸν μὲν³ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ
ποιεῖται, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν
Λ ποιεῖται. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ
αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ
Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ· οἱ Κ, Λ ἄρα³ ὅμοιοι
ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Κ, Λ ἄρα εἷς μίσος
ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. Εστω ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα
ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεω-
ρήματι ἐδείχθη⁴. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλα-
πλασιάσας τὸν Κ πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλα-
πλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ
πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. Αλλ' ὡς ὁ Κ
πρὸς τὸν Μ οὕτως⁵ ὁ Μ πρὸς τὸν Λ· οἱ Κ, Μ, Λ
ἄρα ἐξῆς εἰσὶν⁶ ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ

Etenim Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Κ fa-
ciat, ipse vero Ζ ipsum Η multiplicans ipsum
Λ faciat. Et quoniam Γ, Δ cum ipsis Ζ, Η in
eādē ratione sunt, et ex quidem ipsis Γ, Δ est
Κ, ex ipsis vero Ζ, Η ipse Λ; ergo Κ, Λ similes
plani sunt numeri; ipsorum Κ, Λ igitur unus
medius proportionalis est numerus. Sit Μ; ergo
Μ est ex ipsis Δ, Ζ ut in præcedenti theoremate
ostensum est. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ
multiplicans ipsum Κ fecit, ipsum vero Ζ mul-
tiplicans ipsum Μ fecit; est igitur ut Γ ad Ζ
ita Κ ad Μ. Sed ut Κ ad Μ ita Μ ad Λ;
ipsi Κ, Μ, Λ igitur deinceps sunt proportionales
in ipsius Γ ad Ζ ratione. Et quoniam est ut Γ

et Δ est à Ε comme Η est à Θ; je dis qu'entre les nombres Α, Β il y a deux
moyens proportionnels, et que Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec
Ζ, de celle que Δ a avec Η, et de celle que Ε a avec Θ.

Car que Γ multipliant Δ fasse Κ, et que Ζ multipliant Η fasse Λ. Puisque Γ, Δ
sont en même raison que Ζ, Η; que Κ est le produit de Γ par Δ, et Λ le produit de
Ζ par Η, les nombres Κ, Λ sont des nombres plans semblables; il y a donc
entre Κ et Λ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Qu'il soit Μ; le nombre
Μ sera le produit de Δ par Ζ, ainsi qu'on l'a démontré dans le théorème
précédent. Puisque Δ multipliant Γ fait Κ, et que Δ multipliant Ζ fait Μ, le
nombre Γ est à Ζ comme Κ est à Μ (17. 7). Mais Κ est à Μ comme Μ est à Λ;
les nombres Κ, Μ, Λ sont donc successivement proportionnels dans la raison de

λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἐναλλάξ ἄρα ἴσθιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλάξ ἄρα ἴσθιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ⁷. οἱ Κ, Μ, Α ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον⁸ ἐν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ⁹ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ¹⁰. Ἐκάτερος δὲ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιίτω. Καὶ ἐπεὶ στειρός ἴσθιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσθιν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Θ τὸν Α πολλαπλασιάσας¹¹ τὸν Β πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ¹² ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν,

ad Δ ita Z ad H; alterne igitur est ut Γ ad Z ita Δ ad H. Rursus, quoniam est ut Δ ad Ε ita Η ad Θ; alterne igitur est ut Δ ad Η ita Ε ad Θ; ipsi Κ, Μ, Α igitur deinceps sunt proportionales et in ipsius Γ ad Z ratione et in ipsius Δ ad Η et adhuc in ipsius Ε ad Θ. Uterque autem ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrumque ipsorum Ν, Ξ faciat. Et quoniam solidus est Α, latera autem ipsius sunt Γ, Δ, Ε; ergo Ε ipsum ex Γ, Δ multiplicans ipsum Α fecit; ipse autem ex Γ, Δ est Κ; ergo Ε ipsam Κ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Θ ipsum Α multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Β ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit; sed quidem et ipsum Μ multiplicans ipsum Ν fecit; est igitur ut Κ ad Μ ita Α ad Ν. Ut autem Κ ad Μ ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ; et ut igitur Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita Α ad Ν. Rursus, quoniam uterque ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrum-

Γ à Ζ. Et puisque Γ est à Δ comme Ζ est à Η, par permutation Γ est à Ζ comme Δ est à Η (13. 7). De plus, puisque Δ est à Ε comme Η est à Θ, par permutation Δ est à Η comme Ε est à Θ (13. 7); les nombres Κ, Μ, Α sont donc successivement proportionnels dans la raison de Γ à Ζ, de Δ à Η, et de Ε à Θ. Que les nombres Ε, Θ multipliant Μ fassent Ν, Ξ. Puisque Α est un nombre solide, et que ses côtés sont Γ, Δ, Ε, le nombre Ε multipliant le produit de Γ par Δ fera Α; mais le produit de Γ par Δ est Κ; donc Ε multipliant Κ fait Α. Par la même raison, Θ multipliant Α fait Β. Et puisque Ε multipliant Κ fait Α, et que Ε multipliant Μ fait Ν, Κ est à Μ comme Α est à Ν (17. 7). Mais Κ est à Μ comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Γ est à Ζ, et Δ à Η, et Ε à Θ, comme Α est à Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Θ multipliant Μ font Ν, Ξ, le nombre Ε est

40 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ξ πεποιῖνκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Αλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς¹³ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε¹⁴ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποιῖνκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιῖνκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. Αλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

que ipsorum N , Z fecit; est igitur ut E ad Θ ita N ad Z . Sed ut E ad Θ ita et Γ ad Z et Δ ad H ; est igitur ut Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita et A ad N et N ad Z . Rursus, quoniam Θ ipsum M multiplicans ipsum Z fecit, sed etiam et ipsum A multiplicans ipsum B fecit; est igitur ut M ad A ita Z ad B . Sed ut M ad A ita et Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ; et igitur ut Γ ad Z et Δ ad H et E ad Θ ita non solum Z ad B sed et A ad N et N ad Z ; ipsi A , N , Z , B igitur deinceps sunt proportionales in dictis laterum rationibus.

A, 30. N, 60. Z, 120. B, 240.
 K, 6. M, 12. A, 24.
 Г, 2. А, 3. В, 5. Z, 4. H, 6. Е, 10.

Λέγω ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἢ περ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς

Dico et $\mathbf{A}$ ad $\mathbf{B}$ triplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam habet Γ numerus ad $\mathbf{Z}'$, vel Δ ad $\mathbf{H}$ et adhuc $\mathbf{E}$ ad Θ . Quoniam enim quatuor numeri deinceps proportionales sunt $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$,

à Θ comme N est à Ξ . Mais E est à Θ comme Γ est à Z , et comme Δ est à H ; donc Γ est à Z , Δ à H , et E à Θ , comme A est à N , et comme N est à Ξ . De plus, puisque Θ multipliant M fait Ξ , et que Θ multipliant Λ fait B , M est à Λ comme Ξ est à B . Mais M est à Λ comme Γ est à Z , comme Δ est à H , et comme E est à Θ ; donc Γ est à Z , Δ à H , et E à Θ , non seulement comme Ξ est à B , mais encore comme A est à N , et comme N est à Ξ ; les nombres A, N, Ξ, B sont donc successivement proportionnels dans lesdites raisons des côtés.

Je dis aussi que A a avec B une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre r a avec z , ou de celle que Δ a avec H , et encore de celle que E a avec Θ . Car puisque

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 41

ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A, N, E, B . ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ A πρὸς τὸν N . ΑΛΛ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν N οὕτως εἰδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Z καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ . καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτίστιν ἥπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Z καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

B ; ergo A ad B triplam rationem habet ejus quam A ad N . Sed ut A ad N ita ostensum est et Γ ad Z et Δ ad H et adhuc E ad Θ ; et A igitur ad B triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ numerus ad Z et Δ ad H et adhuc E ad Θ . Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τῷ ἀριθμῷ ὁ Γ . λέγω ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

PROPOSITIO XX.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt numeri.

Inter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat numerus Γ ; dico ipsos A, B similes planos esse numeros.

$A, 8.$	$\Gamma, 12.$	$B, 18.$
$\Delta, 2.$	$E, 3.$	$Z, 4. \quad H, 6.$

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἡλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, Γ , οἱ Δ, E ἔστιν

Sumantur enim Δ, E minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, Γ ;

les quatre nombres A, N, E, B sont successivement proportionnels, le nombre A a avec B une raison triple de celle que A a avec N . Mais on a démontré que A est à N comme Γ est à Z , comme Δ est à H , et comme E est à Θ ; donc A a avec B une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Z , de celle que Δ a avec H , et de celle que E a avec Θ . Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres il tombe un nombre moyen proportionnel, ces nombres seront des plans semblables.

Car qu'entre les deux nombres A, B il tombe un moyen proportionnel Γ ; je dis que les nombres A, B sont des plans semblables.

Car prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

42 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ .
 Ὡς δὴ ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν B^3 .
 ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν Γ .
 Οσαῖς δὴ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες
 ἴστωσαν ἐν τῷ Z . ὁ Z ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας
 τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν
 Γ πεποίηκεν⁴. ὥς τε ὁ A ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ
 δὲ αὐτοῦ οἱ Δ , Z . Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ , E ἑλά-
 χιστοὶ εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς
 Γ , B . ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν B .
 Οσαῖς δὲ⁵ ὁ E τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες
 ἴστωσαν ἐν τῷ H . καὶ⁶ ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ

est igitur Δ ad E ita A ad Γ . Ut autem A ad Γ
 ita Γ ad B ; æqualiter igitur Δ ipsum A metitur
 ac E ipsum Γ . Quoties autem Δ ipsum A metitur,
 tot unitates sint in Z ; ergo Z ipsum Δ multi-
 plicans ipsum A fecit, ipsum autem E multipli-
 cans ipsum Γ fecit; quare A planus est, latera
 vero ipsius Δ , Z . Rursus, quoniam Δ , E mi-
 nimi sunt ipsorum eandem rationem habentium
 cum ipsis Γ , B ; æqualiter igitur Δ ipsum Γ
 metitur ac E ipsum B . Quoties autem E ipsum
 B metitur, tot unitates sint in H ; ergo E ipsum

A , 8.	Γ , 12.	B , 18.
Δ , 2.	E , 3.	Z , 4. H , 6.

κατὰ τὰς ἐν τῷ H μονάδας· ὁ H ἄρα τὸν E
 πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ὁ B ἄρα
 ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ E , H .
 οἱ A , B ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. Λέγω δὲ ὅτι
 καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Z τὸν μὲν Δ πολλαπλα-
 σιάσας τὸν A πεποίηκε· τὸν δὲ E πολλαπλα-
 σιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν A
 μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν Γ . ἴστω ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ , τουτίστιν ὁ Γ πρὸς

B metitur per unitates quæ in H ; ergo H ipsum
 E multiplicans ipsum B fecit; ergo B planus est,
 latera vero ipsius sunt ipsi E , H ; ergo A , B plani
 sunt numeri. Dico etiam et similes. Quoniam
 enim Z ipsum quidem Δ multiplicans ipsum A
 fecit, ipsum vero E multiplicans ipsum Γ fecit;
 æqualiter igitur Δ ipsum A metitur ac E ipsum
 Γ ; est igitur ut Δ ad E ita A ad Γ , hoc est

A , Γ (35. 7), et qu'ils soient Δ , E . Le nombre Δ sera à E comme A est à Γ . Mais
 A est à Γ comme Γ est à B ; donc Δ mesure A autant de fois que E mesure Γ . Qu'il
 y ait autant d'unités dans Z que Δ mesure de fois A . Le nombre Z multipliant Δ
 fera A , et Z multipliant E fera Γ ; donc A est un nombre plan, dont les côtés
 sont Δ , Z . De plus, puisque les nombres Δ , E sont les plus petits de ceux qui ont
 la même raison avec Γ , B , le nombre Δ mesurera Γ autant de fois que E mesure B .
 Qu'il y ait autant d'unités dans H que E mesure de fois B ; le nombre E mesurera B
 par les unités qui sont dans H , et le nombre H multipliant E fera B ; donc B est
 un nombre plan, dont les côtés sont E , H ; donc A , B sont des nombres plans.
 Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car, puisque Z multipliant Δ fait A , et
 que Z multipliant E fait Γ , Δ mesure A autant de fois que E mesure Γ ; donc Δ est à
 E comme A est à Γ , c'est-à-dire comme Γ est à B . De plus, puisque E multipliant

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 43

τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Εἰκάτερον τῶν Ζ, Η
πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν· ἔστιν
ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β.
Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε·
καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν
Η. Καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε
πρὸς τὸν Η⁸. οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθ-
μοὶ εἰσιν, αἱ γὰρ πλῆυραὶ αὐτῶν⁹ ἀνάλογόν
εἰσιν. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπ-
τωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον
ἐμπίπτειν ἄριθμοι, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β
ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν.

Α, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	Β, 648.
Ε, 1.	Ζ, 3.	Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Λ, 3. Μ, 3. Ξ, 72.

Εἰλήφθωσαν γάρ² ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν
αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, τρεῖς³ οἱ

Γ ad Β. Rursus, quoniam Ε utrumque ipsorum
Ζ, Η multiplicans ipsos Γ, Β fecit, est igitur ut
Ζ ad Η ita Γ ad Β. Ut autem Γ ad Β ita Δ ad Ε;
et igitur ut Δ ad Ε ita Ζ ad Η. Et alterne ut Δ
ad Ζ ita Ε ad Η; ergo Α, Β similes plani nu-
meri sunt, etenim ipsorum latera sunt propor-
tionalia. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medii proportio-
nales cadant numeri, similes solidi sunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β duo medii
proportionales cadant numeri Γ, Δ; dico ipsos
Α, Β similes solidos esse.

Sumantur enim tres minimi numeri ipsorum
camdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ,

Ζ, Η fait Γ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Γ est à Β (18. 7). Mais Γ est à Β comme
Δ est à Ε; donc Δ est à Ε comme Ζ est à Η. Et par permutation Δ est à Ζ comme
Ε est à Η (13. 7.) Donc Α, Β sont des nombres plans semblables (déf. 21. 7),
puisque leurs côtés sont proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Si entre deux nombres il tombe deux nombres moyens proportionnels, ces
nombres seront des solides semblables.

Qu'entre les nombres Α, Β il tombe deux nombres moyens proportionnels
Γ, Δ; je dis que les nombres Α, Β sont des solides semblables.

Prenons les trois plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

44 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπιδόι εἰσιν ἀριθμοί. Ἐστῶσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ προ⁵ τούτου ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον⁶ ἐν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ· καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ⁷· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς

Δ, scilicet ipsi Ε, Ζ, Η; ergo extremi eorum Ε, Η primi inter se sunt. Et quoniam inter Ε, Η unus medius proportionalis cecidit numerus Ζ; ergo Ε, Η numeri similes plani sunt numeri. Sint igitur ipsius quidem Ε latera ipsi Θ, Κ, ipsius vero Η ipsi Λ, Μ; evidens igitur est ex antecedente Ε, Ζ, Η deinceps esse proportionales in ipsius Θ ad Λ ratione et in ipsius Κ ad Μ. Et quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ; et est æqualis multitudo ipsorum Ε, Ζ, Η multitudini ipsorum Α, Γ, Δ; ex æquo igitur est

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Α, 24.} & & \text{Γ, 72.} & & \text{Δ, 216.} & & \text{Β, 648.} \\ & \text{Ε, 1.} & & \text{Ζ, 3.} & & \text{Η, 9.} & \\ \text{Θ, 1.} & \text{Κ, 1.} & \text{Ν, 24.} & & \text{Α, 3.} & \text{Μ, 3.} & \text{Ξ, 72.} \end{array}$$

τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. Οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. Ὅσάκεις δὴ

ut Ε ad Η ita Α ad Δ. Ipsi autem Ε, Η primi, primi vero et minimi, minimi autem metiuntur ipsos æqualiter eandem rationem habentes cum ipsis, major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Ε ipsum Α metitur ac Η ipsum Δ. Quoties

Α, Γ, Δ (35. 7); qu'ils soient Ε, Ζ, Η; leurs extrêmes Ε, Η seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque entre Ε, Η il tombe un moyen proportionnel Ζ, les nombres Ε, Η seront des nombres plans semblables (20. 8). Que Θ, Κ soient les côtés de Ε, et Λ, Μ les côtés de Η; il est évident, d'après ce qui précède, que les nombres Ε, Ζ, Η sont successivement proportionnels dans la raison de Θ à Λ et de Κ à Μ. Et puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Ε, Ζ, Η est égale à la quantité des nombres Α, Γ, Δ, par égalité Ε est à Η comme Α est à Δ (14. 7). Mais les nombres Ε, Η sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); le nombre Ε mesure donc le nombre Α autant de fois que Η mesure Δ.

ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκειν. Ο δὲ Ε ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Γ, Δ, Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. Οσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Γ⁸ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ξ. Καὶ⁹ ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν. Ο δὲ Η ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Α, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει¹⁰· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ¹¹ εἰσιν οἱ Α, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοὶ εἰσι. Λέγω δὴ¹² ὅτι καὶ ὅμοιοι. Επεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτίστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως¹³ ὁ Θ πρὸς τὸν Α καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ,

autem Ε ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ν; ergo Ν ipsum Ε multiplicans ipsum Α fecit. Est autem Ε ex ipsis Θ, Κ; ergo Ν ipsum ex Θ, Κ multiplicans ipsum Α fecit; solidus igitur est Α, latera autem ipsius sunt Θ, Κ, Ν. Rursus, quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Γ, Δ, Β; æqualiter igitur Ε ipsum Γ metitur ac Η ipsum Β. Quoties autem Ε ipsum Γ metitur, tot unitates sint in Ξ; ergo Η ipsum Β metitur per unitates quæ in Ξ; ergo Ξ ipsum Η multiplicans ipsum Β fecit. Est autem Η ex Α, Μ; ergo Ξ ipsum ex Α, Μ multiplicans ipsum Β fecit; solidus igitur est Β; latera autem ipsius sunt Α, Μ, Ξ; ergo Α, Β solidi sunt. Dico etiam et similes. Quoniam enim Ν, Ξ ipsum Ε multiplicantes ipsos Α, Γ fecerunt; est igitur ut Ν ad Ξ ita Α ad Γ, hoc est Ε ad Ζ. Sed ut Ε ad Ζ ita Θ ad Α et Κ ad Μ; et ut igitur Θ ad Α ita Κ ad Μ et Ν ad Ξ. Et sunt quidem Θ, Κ, Ν la-

Qu'il y ait autant d'unités dans Ν que Ε mesure de fois Α; le nombre Ν multipliant Ε fera Α. Mais Ε est le produit de Θ par Κ; donc le nombre Ν multipliant le produit de Θ par Κ fait Α; donc Α est un nombre solide, dont les côtés sont Θ, Κ, Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Δ, Β, le nombre Ε mesure Γ autant de fois que Η mesure Β. Qu'il y ait autant d'unités dans Ξ que Ε mesure de fois Γ; le nombre Η mesurera Β par les unités qui sont dans Ξ; donc Ξ multipliant Η fera Β. Mais Η est le produit de Α par Μ; donc Ξ multipliant le produit de Α par Μ fera Β; donc Β est un nombre solide, dont les côtés sont Α, Μ, Ξ; donc Α, Β sont des nombres solides. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car puisque les nombres Ν, Ξ multipliant Ε font Α, Γ, le nombre Ν sera à Ξ comme Α est à Γ, c'est-à-dire comme Ε est à Ζ (17. 7). Mais Ε est à Ζ comme Θ est à Α, et comme Κ est à Μ; donc Θ est à Α comme Κ est à Μ, et comme Ν est à Ξ. Mais Θ, Κ, Ν

46 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tera ipsius Α, ipsi vero Ξ, Λ, Μ latera ipsius Β; ergo Α, Β similes solidi sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾖσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἴσται.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, primus autem quadratus sit, et tertius quadratus erit.

Εστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἴστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Sint tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, primus autem Α quadratus sit; dico et tertium Γ quadratum esse.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

Επεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. Τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Γ unus medius proportionalis est numerus Β; ergo Α, Γ similes solidi sunt. Quadratus autem Α; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

sont les côtés de Α, et Ξ, Λ, Μ les côtés de Β; donc les nombres Α, Β sont des solides semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si trois nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un carré, le troisième sera un carré.

Soient Α, Β, Γ trois nombres successivement proportionnels, et que le premier Α soit un carré; je dis que le troisième Γ est un carré.

Puisque entre les nombres Α, Γ il y a un moyen proportionnel Β, les nombres Α, Γ sont des plans semblables (20. 8). Mais Α est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ᾦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Si quatuor numeri deinceps proportionales sint, primus autem cubus sit, et quartus cubus erit.

Ἐστώσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἔστιν.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α cubus sit; dico et Δ cubum esse.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. Κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ. Ὅπρι ἴδει διῆξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Δ duo medii proportionales sunt numeri Β, Γ; ergo Α, Δ similes sunt solidi numeri. Cubus autem Α; cubus igitur et Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un cube, le quatrième sera un cube.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres successivement proportionnels, et que Α soit un cube; je dis que Δ est un cube.

Car puisque entre Α, Δ il y a deux nombres moyens proportionnels Β, Γ, les nombres Α, Δ sont des solides semblables (21. 8). Mais Α est un nombre cube; donc Δ est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ , ὁ δὲ A τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ B τετράγωνός ἐστιν.

A , 4.
 Γ , 16.

Si duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus sit, et secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A, B inter se rationem habeant quam quadratus numerus Γ ad quadratum numerum Δ , ipse autem A quadratus sit; dico et B quadratum esse.

B , 9.
 Δ , 36.

Επεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί ἐσιν· οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπιδόι ἐσιν· τῶν Γ, Δ ἄρα εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ τῶν A, B ἄρα εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὁ A τετράγωνος· καὶ ὁ B ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati sunt; ergo Γ, Δ similes plani sunt; inter Γ, Δ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Γ ad Δ ita A ad B ; et inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est A quadratus; et B igitur quadratus est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et si le premier est un quarré, le second sera un quarré.

Car que les deux nombres A, B ayent entr'eux la même raison que le nombre quarré Γ a avec le nombre quarré Δ , et que A soit un quarré; je dis que B est un quarré.

Car puisque Γ, Δ sont des quarrés, les nombres Γ, Δ sont des plans semblables; il tombe donc entre Γ, Δ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Mais Γ est à Δ comme A est à B ; il tombe donc aussi un nombre moyen proportionnel entre A et B (8. 8). Mais A est un quarré; donc B est un quarré (22. 8.) Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ , κύβος δὲ ἴσται ὁ A . λέγω¹ ὅτι καὶ ὁ B κύβος ἴσται.

Si duo numeri inter se rationem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit.

Duo enim numeri A, B inter se rationem habeant quam cubus numerus Γ ad cubum numerum Δ , cubus autem sit A ; dico et B cubum esse.

$A, 8. \quad E, 12. \quad Z, 18. \quad B, 27.$
 $\Gamma, 64. \quad \Delta, 216.$

Επεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσιν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί², τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ὥς τε καὶ τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Εμπίπτέτωσαν οἱ

Quoniam enim Γ, Δ cubi sunt, ipsi Γ, Δ similes solidi sunt; inter Γ, Δ igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Quot autem inter Γ, Δ in continuum proportionales cadunt numeri, tot et inter eos eandem rationem habentes cum ipsis; quare et inter A, B duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant E, Z . Quo-

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube, et si le premier est un cube, le second sera aussi un cube.

Car que les nombres A, B aient entr'eux la même raison que le nombre cube Γ a avec le nombre cube Δ , et que A soit un cube; je dis que B est aussi un cube.

Car puisque Γ, Δ sont des cubes, les nombres Γ, Δ sont des solides semblables; il tombe donc entre Γ et Δ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais autant il tombe entre Γ et Δ de nombres successivement proportionnels, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison avec eux (8. 8); il tombera donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels. Que ces nombres soient E, Z .

50 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

E, Z. Επειὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A, E, Z, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ A· κύβος ἄρα καὶ ὁ B. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

niam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales sunt, atque est cubus A; cubus igitur et B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐστώσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A, B; dico A ad B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

A, 6.	Γ, 12.	B, 24.
Δ, 1.	E, 2.	Z, 4.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐμπίπτειτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, Γ, B, οἱ Δ, E, Z· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Z τετράγωνοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Quoniam enim A, B plani sunt; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Cadat, et sit Γ, et sumantur minimi numeri Δ, E, Z ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, Γ, B; extremi igitur eorum Δ, Z quadrati sunt. Et quoniam est ut Δ ad Z ita A ad B,

Puisque les quatre nombres A, E, Z, B sont successivement proportionnels, et que A est un cube, le nombre B sera aussi un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Les nombres qui sont des plans semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

Soient A, B des nombres plans semblables; je dis que A a avec B la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

Car puisque les nombres A, B sont des plans, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Qu'il en tombe un, et qu'il soit Γ. Prenons les plus petits nombres qui ont la même raison avec A, Γ, B (35. 7), et qu'ils soient Δ, E, Z; leurs extrêmes Δ, Z seront des carrés (cor. 2. 8). Et puisque Δ est à Z

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 51

Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καὶ εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

et sunt Δ, Ζ quadrati; ergo Α ad Β rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

Ἐπὶ τωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri Α, Β; dico Α ad Β rationem habere quam cubus numerus ad cubum numerum.

Α, 16.	Γ, 24.	Δ, 36.	Β, 54.
Ε, 8.	Ζ, 12.	Η, 18.	Θ, 27.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπίπτουσιν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰληφθῶσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε,

Quoniam enim Α, Β similes solidi sunt; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant Γ, Δ, et sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, æquales ipsis multitudine, Ε, Ζ,

comme Α est à Β, et que Δ, Ζ sont des quarrés, le nombre Α aura avec le nombre Β la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Les nombres solides semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Soient Α, Β des nombres solides semblables; je dis que Α a avec Β la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Car puisque les nombres Α, Β sont des solides semblables, il tombe deux moyens proportionnels entre Α, Β (19. 8). Qu'ils soient Γ, Δ. Prenons en même quantité les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (2. 8); qu'ils soient Ε, Ζ, Η, Θ; leurs extrêmes Ε, Θ seront des cubes

52 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Z, H, Θ οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ E, Θ κύβοι εἰσὶ. H, Θ ; ergo extremi eorum E, Θ cubi sunt.
 Καὶ ἴστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . Atque est ut E ad Θ ita A ad B ;
 B · καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν κύβος rationem habet quam cubus numerus ad cubum
 ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν. Οπερ ἔδει δεῖξαι. numerum. Quod oportebat ostendere.

(cor. 2. 8). Mais E est à Θ comme A est à B ; donc A a avec B la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU HUITIÈME LIVRE.

EUCCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER NONUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζαντες ἀλλήλους ποιῶσι τινα, ὁ γινόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἐστώσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Α, 6. Β, 54.
Δ, 36. Γ, 324.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν

PROPOSITIO I.

Si duo similes plani numeri se se multiplicantes faciunt aliquem, factus quadratus erit. ~

Sint duo similes plani numeri Α, Β, et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ quadratum esse.

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Quoniam igitur

LE NEUVIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Si deux nombres plans semblables se multipliant l'un l'autre produisent un nombre, le produit sera un carré.

Soient Α, Β deux nombres plans semblables, et que Α multipliant Β fasse Γ; je dis que Γ est un carré.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un carré.

54 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ Α ἑαυτὸν μὲν² πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιήκειν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Εἰ δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ³

A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam A, B similes plani sunt numeri; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Si autem inter duos numeros in continuum pro-

A, 6. B, 54.
Δ, 36. Γ, 524.

κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἷς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἷς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὡς τε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

portionales cadunt numeri, quot inter ipsos cadunt totidem et inter eos eandem rationem habentes; quare et inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est quadratus Δ; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

PROPOSITIO II.

Εἰ δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί¹.

Si duo numeri se se multiplicantes faciunt quadratum, similes plani sunt numeri.

Puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres A, B sont des plans semblables, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si entre deux nombres il tombe des nombres successivement proportionnels, autant il en tombe entre ces deux nombres, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison (8. 8); il tombe donc entre Δ et Γ un nombre moyen proportionnel. Mais Δ est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un carré, ces nombres seront des plans semblables.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 55

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B , καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιῇτω· λέγω ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

Sint duo numeri A, B , et A ipsum B multiplicans quadratum ipsum Γ faciat; dico A, B similes planos esse numeros.

$A, 3. \quad B, 12.$
 $\Delta, 9. \quad \Gamma, 36.$

Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιῇτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως³ ὁ Δ πρὸς τὸν Γ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ · οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν· τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Εἰ δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί· οἱ ἄρα A, B ὅμοιοι εἰσιν ἐπίπεδοι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipse enim A se se multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit; ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ . Et quoniam Δ quadratus est, sed et Γ ; ergo Δ, Γ similes plani sunt; inter Δ, Γ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Δ ad Γ ita A ad B ; et inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadit, similes plani sunt numeri; ergo A, B similes sunt plani. Quod oportebat ostendere.

Soient les deux nombres A, B , et que A multipliant B fasse le carré Γ ; je dis que les nombres A, B sont des plans semblables.

Car que A se multipliant lui-même fasse Δ ; le nombre Δ sera un carré. Et puisque A se multipliant lui-même fait Δ , et que A multipliant B fait Γ , le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque Δ est un carré ainsi que Γ , les nombres Δ, Γ sont des plans semblables; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre Δ et Γ (8. 8). Mais Δ est à Γ comme A est à B ; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si un nombre moyen proportionnel tombe entre deux nombres, ces nombres sont des plans semblables (20. 8); donc les nombres A, B sont plans et semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εάν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans ipsum B faciat; dico B cubum esse.

Α, 8.

Δ, 4.

Γ, 2.

Β, 64.

1.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω· φανερόν δὲ ἐστίν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως· ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·

Sumatur enim ipsius A latus Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; manifestum igitur est Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Α facere. Et quoniam Γ se ipsum multiplicantem ipsum Δ fecit; ergo Γ ipsum Δ metitur per unitates quæ in ipso. Sed etiam et unitas ipsum Γ metitur per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit; ergo Δ ipsum Α metitur per unitates quæ in Γ. Metitur autem et unitas ipsum Γ per unitates quæ in ipso; est

PROPOSITION III.

Si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A se multipliant lui-même fasse B; je dis que B est un cube.

Car prenons le côté r de A, et que r se multipliant lui-même fasse Δ; il est évident que r multipliant Δ fera A (déf. 19. 7). Et puisque r se multipliant lui-même a fait Δ, le nombre r mesurera Δ par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure r par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à r comme r est à Δ (déf. 20. 7). De plus, puisque r multipliant Δ a fait A, le nombre Δ mesure A par les unités qui sont en r. Mais l'unité mesure r par les unités qui sont

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως² ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Αλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως³ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδας καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μίσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἔμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως⁴ ὁ Α πρὸς τὸν Β. Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μίσοι ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἔμπεπτώκασιν⁵. καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μίσοι ἀνάλογον ἔμπεσθῶνται⁶ ἀριθμοί. Εἰ δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μίσοι ἀνάλογον ἔμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ἦ, καὶ ὁ δεύτερος⁷ κύβος ἔσται. Καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. Οὕτως ἴδιαι δεῖξαι.

igitur ut unitas ad Γ ita Δ ad Α. Sed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ; et ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ, et Δ ad Α; ergo inter unitatem et numerum Α duo medii proportionales in continuum cadunt numeri Γ, Δ. Rursus, quoniam Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo Α ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum Α per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Α ita Α ad Β. Sed inter unitatem et Α duo medii proportionales numeri cadunt; et inter Α, Β igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Si autem inter duos numeros duo medii proportionales cadunt, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit. Atque est Α cubus; et Β igitur cubus est. Quod oportebat ostendere.

en lui; l'unité est donc à γ comme Δ est à Α. Mais l'unité est à γ comme γ est à Δ; donc l'unité est à γ comme γ est à Δ, et comme Δ est à Α; il tombe donc entre l'unité et le nombre Α deux nombres moyens γ, Δ successivement proportionnels. De plus, puisque Α se multipliant lui-même fait Β, le nombre Α mesure Β par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Α par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Α comme Α est à Β (déf. 20. 7). Mais entre l'unité et le nombre Α il tombe deux nombres moyens proportionnels; il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais si entre deux nombres il tombe deux moyens proportionnels, et si le premier est un cube, le second sera un cube (23. 8). Mais Α est un cube; donc Β est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

58 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εάν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἔστιν.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ cubum esse.

Α, 8. Β, 27.

Δ, 64. Γ, 216.

Ο γὰρ Α¹ ἑαυτὸν πολλαπλασιάζας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἔστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάζας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ Α, Β². τῶν Α, Β ἄρα δύο μέτοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥς τε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσούνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ipsc enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ cubus est. Et quoniam Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Et quoniam Α, Β cubi sunt, similes solidi sunt Α, Β; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri; quare et inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Δ; cubus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION IV.

Si un nombre cube multipliant un nombre cube fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube Α multipliant le nombre cube Β fasse Γ; je dis que Γ est un cube.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ, le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque Α se multipliant lui-même a fait Δ, et que Α multipliant Β fait Γ, le nombre Α est à Β comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres Α, Β sont des cubes, les nombres Α, Β sont des solides semblables. Il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (19. 8); il tombera donc aussi entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Δ est un cube; donc Γ est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO V.

Εάν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἴσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς¹ ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἴστί.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum facit, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim numerus Α numerum aliquem ipsum Β multiplicans cubum ipsum Γ faciat; dico Β cubum esse.

Α, 8.

Β, 27.

Δ, 64.

Γ, 216.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἴστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· ἴστί. ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως² ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ εἰ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶ τῶν³ Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἴστί. ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἴστί κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἴστί καὶ ὁ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; cubus igitur est Δ. Et quoniam Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Et quoniam Δ, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est ut Δ ad Γ ita Α ad Β; et inter Α, Β igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Α; cubus igitur est et Β. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION V.

Si un nombre cube multipliant un nombre fait un cube, le nombre multiplié sera un cube.

Car que le nombre cube Α multipliant un nombre Β fasse le cube γ; je dis que Β est un cube.

Que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque Α se multipliant lui-même fait Δ, et que Α multipliant Β fait γ, le nombre Α est à Β comme Δ est à γ (17. 7). Et puisque Δ et γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il tombe donc entre Δ et γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais Δ est à γ comme Α est à Β; il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Α est un cube; donc Β est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

60 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εάν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἴσται.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιεῖται· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

Α, 8. Β, 64.

Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖται. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἵπαι ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἵπαι ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς

PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum ipsum B faciat; dico et A cubum esse.

Γ, 512.

Ipsa enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat. Quoniam igitur A se ipsum quidem multiplicans ipsum B fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ cubus est. Et quoniam A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; ergo A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita A ad B. Et quoniam A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo B ipsum Γ metitur per unitates quæ in A. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita B ad Γ. Sed ut unitas ad A

PROPOSITION VI.

Si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre sera un cube.

Que le nombre A se multipliant lui-même fasse le cube B; je dis que A est un cube.

Car que A multipliant B fasse Γ. Puisque A se multipliant lui-même fait B, et que A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque A se multipliant lui-même fait B, le nombre A mesure B par les unités qui sont en lui; mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme A est à B (déf. 20. 7). Et puisque A multipliant B fait Γ, le nombre B mesure Γ par les unités qui sont en A. Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme B est à Γ. Mais l'unité est à A comme

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 61

τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα² ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως³ ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ⁴ Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ἴμοιοι στεριοί εἰσι· τῶν Β, Γ⁵ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁶ ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἔστι καὶ ὁ Α. Οπερ ἴδιαι δεῖξαι.

ita A ad B; et ut igitur A ad B ita B ad Γ. Et quoniam B, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter B, Γ duo medii proportionales sunt numeri. Atque est ut B ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales sunt numeri. Atque est cubus B; cubus igitur est et A. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Εὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεὸς ἔστιν.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans facit aliquem, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ solidum esse.

Α, 6. Β, 7. Γ, 42.
Δ, 3. Ε, 2.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. Μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ. Καὶ

Quoniam enim A compositus est, a numero aliquo mensurabitur. Mensuretur ab ipso Δ. Et

A est à B; donc A est à B comme B est à Γ. Et puisque B et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il y a donc entre B et Γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais B est à Γ comme A à B; il y a donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais B est un cube; donc A est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VII.

Si un nombre composé multipliant un nombre en fait un autre, le produit sera un solide.

Car que le nombre composé A multipliant le nombre B fasse Γ; je dis que Γ est un solide.

Car puisque A est un nombre composé, il sera mesuré par quelque nombre

62 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅσακις Δ τὸν A μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴσ-
τωσαν ἐν τῷ E . Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν A μετρεῖ κατὰ
τὰς ἐν τῷ E μονάδας¹. ὁ E ἄρα τὸν Δ πολλα-
πλασιάσας τὸν A πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ A τὸν

quoties Δ ipsum A metitur tot unitates sint in E .
Quoniam igitur Δ ipsum A metitur per unitates
quæ in E ; ergo E ipsum Δ multiplicans ipsum
 A fecit. Et quoniam A ipsum B multiplicans

A , 6. B , 7. Γ , 42.
 Δ , 3. E , 2.

B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ A
ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ , E . ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ , E τὸν B
πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν². ὁ Γ ἄρα
στιριός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ , E , B .
Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Γ fecit, est autem A ex ipsis Δ , E ; ergo ipse
ex Δ , E ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo
 Γ solidus est, latera autem ipsius sunt Δ , E , B .
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

PROPOSITIO VIII.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-
λογον ᾤσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τε-
τράγωνος ἔσται¹ καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες παντὶς²,
ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες
πάντες³, ὁ δὲ ἑβδομος κύβος ἅμα καὶ τετρά-
γωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες⁴.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps
proportionales sunt, tertius quidem ab unitate
quadratus erit, et unum intermittentes omnes;
sed quartus cubus, et duos intermittentes om-
nes; septimus vero cubus simul et quadratus,
et quinque intermittentes omnes.

(déf. 13. 7). Qu'il soit mesuré par Δ ; et qu'il y ait en E autant d'unités que Δ
mesure de fois A . Puisque Δ mesure A par les unités qui sont en E , le nombre E
multipliant Δ fera A . Et puisque A multipliant B fait Γ , et que A est le produit
de Δ par E , le produit de Δ par E multipliant B fait Γ (16. 7); le nombre Γ est
donc un nombre solide (déf. 17. 7), dont les côtés sont Δ , E , B . Ce qu'il fallait
démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement
proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un carré, et tous ceux
qui en laissent un; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux;
le septième un cube et un carré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 63

Εστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ πέμπτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἑξῆς ὁ Δ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες⁵.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ; dico quidem tertium ab unitate, ipsum Β, quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum vero Γ cubum, et duos intermittentes omnes; septimum autem Ζ cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

Επεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν⁶ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὲ δειξομιν ὅτι καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες πάντες⁷ τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὁ πέμπτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ, καὶ

Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Α ad Β; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur et Α ipsum Β. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in ipso; atque Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in Α; ergo Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; quadratus igitur est Β. Et quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, sed Β quadratus est; et Δ igitur quadratus est. Propter eadem utique et Ζ quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et unum omnes intermittentes quadratos esse. Dico etiam et quartum ab unitate, ipsum Γ, cubum esse, et duos intermit-

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels; je dis que le troisième nombre Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un; que le quatrième Γ est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux; que le septième Ζ est un cube et un carré tout à la fois, ainsi que tous ceux qui en laissent cinq.

Car puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, l'unité mesure Α autant de fois que Α mesure Β (déf. 20. 7). Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en Α; le nombre Α se multipliant lui-même fera donc le nombre Β; le nombre Β est donc un carré. Et puisque Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ sera aussi un carré (22. 8). Par la même raison Ζ est un carré. Nous démontrerons de la même manière que tous ceux qui en laissent un sont des carrés. Je dis aussi que le quatrième, Γ, à partir de l'unité, est un cube, et

64 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὥς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν. Ἐπεὶ

tentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Β ad Γ; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Γ. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in Α; et Β igitur ipsum Γ metitur per unitates quæ in Α; ergo Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit. Quoniam igitur Α se ipsum

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν⁸ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· κύβος ἄρα ἔστιν ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἔστι⁹· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἔστιν. Εδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἑξέδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τί ἐστι καὶ τετράγωνος. Ομοίως δὲ δείξομεν ἔτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσὶ¹⁰ καὶ τετράγωνοι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

quidem multiplicans ipsum Β fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; cubus igitur est Γ. Et quoniam Γ, Δ, Ε, Ζ deinceps proportionales sunt, sed Γ cubus est; et Ζ igitur cubus est. Ostensum est autem et quadratum; ergo septimus ab unitate ipse Ζ et cubus est et quadratus. Similiter etiam demonstrabimus et quinque intermittentes omnes cubos esse et quadratos. Quod oportebat ostendere.

tous ceux qui en laissent deux. Car puisque l'unité est à Α comme Β est à Γ, l'unité mesure Α autant de fois que Β mesure Γ. Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en Α; donc Β mesure Γ par les unités qui sont en Α; donc Α multipliant Β fera Γ. Et puisque Α se multipliant lui-même fait Β, et que Α multipliant Β fait Γ, Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque Γ, Δ, Ε, Ζ sont successivement proportionnels, et que Γ est un cube, Ζ est aussi un cube (23. 8). Mais on a démontré qu'il est un carré; donc le septième Ζ, à partir de l'unité, est un cube et un carré tout à la fois. Nous démontrerons semblablement que tous ceux qui en laissent cinq sont des cubes et des carrés tout à la fois. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι ἄριθμοι ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾧ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾧ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὅσοιδηποτοῦν ἄριθμοι, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256. Ε, 1024. Ζ, 4096.

Οτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνος ἔστι, καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες πάντες, δίδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογον εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα³ τετράγωνος ἔστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογον εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα⁴ τετράγωνος ἔστιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem quadratus est; et reliqui omnes quadrati erunt. Et si ipse post unitatem cubus est; et reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate deinceps proportionales quocunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ipse autem Α post unitatem sit quadratus; dico et reliquos omnes quadratos fore.

Tertium quidem ab unitate Β quadratum esse, et unum intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes quadratos esse. Quoniam enim Α, Β, Γ deinceps proportionales sunt, et est Α quadratus; et Γ igitur quadratus est. Rursus, quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est Β quadratus; et ipse Δ igitur quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et reliquos omnes quadratos esse.

PROPOSITION IX.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un carré, tous les autres seront des carrés; si celui qui est après l'unité est un cube, tous les autres seront des cubes.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité soit un carré; je dis que tous les autres seront des carrés.

On a déjà démontré que le troisième Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont des carrés. Car puisque Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et que Α est un carré, Γ est un carré (22. 8). De plus, puisque les nombres Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ est aussi un carré. Nous démontrerons semblablement que tous les autres sont des carrés.

66 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλὰ δὴ⁵ ἴστω ὁ A κύβος· λέγω ὅτι καὶ⁶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Οτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δεικνύται· λέγω⁷ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν B . Ἡ δὲ μονὰς τὸν A μετρεῖ

Sed et sit A cubus; dico et reliquos omnes cubos esse.

Quantum quidem ab unitate ipsum Γ cubum esse, et duos intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B ; æqualiter igitur unitas ipsum A metitur ac A ipsum B . Sed unitas ipsum A metitur per uni-

1. A , 8. B , 64. Γ , 512. Δ , 4096. E , 32768. Z , 262144.

κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ὁ A ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκει, καὶ ἴστω ὁ A κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστί⁸. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A , B , Γ , Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἴστω ὁ A κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E κύβος ἐστί, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

tates quæ in ipso; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso; ergo A se ipsum multiplicans ipsum B fecit, atque est A cubus. Si autem cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus est; et B igitur cubus est. Et quoniam quatuor numeri A , B , Γ , Δ deinceps proportionales sunt, et est A cubus; et Δ igitur cubus est. Propter eadem utique et E cubus est, et similiter reliqui omnes cubi sunt. Quod oportebat ostendere.

Mais que A soit un cube; je dis que tous les autres sont des cubes.

On a déjà démontré que le quatrième, à partir de l'unité, est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont aussi des cubes. Car puisque l'unité est à A comme A est à B , l'unité mesure A autant de fois que A mesure B (déf. 21. 7). Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en lui; donc A se multipliant lui-même fait B ; mais A est un cube; et si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit est un cube (3. 9); donc B est un cube. Et puisque les quatre nombres A , B , Γ , Δ sont successivement proportionnels, et que A est un cube, Δ est un cube (23. 8). Par la même raison E est aussi un cube, ainsi que tous les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ἢ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ ἰὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ἢ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Εστωσαν γάρ' ἀπὸ μονάδος ἐξ ἧς ἀνάλογον ὅσοιδηποτοῦν² ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς³ τοῦ τρίτου τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὡς τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

Si ab unitate quocunque numeri proportionales sunt, ipse autem post unitatem non est quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Et si ipse post unitatem cubus non est, neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint enim ab unitate deinceps proportionales quocunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, sed post unitatem ipse Α non sit quadratus; dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Si enim possibile, sit Γ quadratus. Est autem et Β quadratus; ergo Β, Γ inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum

PROPOSITION X.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité n'est point un carré, aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent un. Et si celui qui est après l'unité n'est pas un cube, aucun autre ne sera un cube, excepté le quatrième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent deux.

Car soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité ne soit pas un carré, savoir Α; je dis qu'aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Car si cela est possible, que Γ soit un carré. Mais Β est aussi un carré (8. 9); donc Β et Γ ont entr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre

68 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁵ ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὡς τε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἔστι καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειτο⁶. οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι⁷, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. Λέγω δὴ⁸ ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τέταρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

numerus. Et est ut B ad Γ ita A ad B; ergo A, B inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare A, B similes plani sunt. Et est quadratus B; quadratus igitur est et A, quod non supponebatur; non igitur Γ quadratus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Sed et non sit A cubus. Dico etiam neque alium ullum cubum fore, præter quartum ab unitate et duos intermittentes.

1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16. E, 32. Z, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁹ ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον¹⁰. Καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεί ἔστιν ὡς ἡ μονὰς

Si enim possibile, sit Δ cubus. Est autem et Γ cubus, quartus enim est ab unitate, et est ut Γ ad Δ ita Β ad Γ; et Β igitur ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum. Et est Γ cubus; et Β igitur cubus est. Et quoniam

quarré; et B est à Γ comme A est à B; donc A, B ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc A, B sont des plans semblables (déf. 22. 7). Mais B est un quarré; donc A est un quarré, ce qui n'est point supposé; donc Γ n'est point un quarré. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un quarré, si ce n'est le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Mais que A ne soit pas un cube; je dis qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux.

Car si cela est possible, que Δ soit un cube. Mais Γ est un cube; car c'est le quatrième nombre, à partir de l'unité (8. 9), et Γ est à Δ comme B est à Γ; donc B a avec Γ la même raison qu'un cube a avec un cube. Mais Γ est un cube; donc B est un cube. Et puisque l'unité est à A comme A est à B, et que l'unité mesure

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 69

πρὸς τὸν Α οὕτως¹¹ ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·¹² ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποιήκεν. Εἰ δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων¹³. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Εἰ ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος¹ ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν Γ, Δ.

est ut unitas ad Α ita Α ad Β, sed unitas ipsum Α metitur per unitates quæ in ipso; et Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso; ergo Α se ipsum multiplicans cubum Β fecit. Si autem numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit; cubus igitur et Α, quod non supponitur; non igitur Δ cubus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate Α quotcunque numeri deinceps proportionales Β, Γ, Δ, Ε; dico eorum Β, Γ, Δ, Ε minimum Β ipsum Ε metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en lui (déf. 21. 7); donc Α se multipliant lui-même fera le cube Β. Mais si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre est un cube (6. 9); Α est donc un cube, ce qui n'est point supposé; donc Δ n'est pas un cube. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'un de ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité Α, tant de nombres qu'on voudra Β, Γ, Δ, Ε successivement proportionnels; je dis que Β, le plus petit des nombres Β, Γ, Δ, Ε, mesure Ε par un des nombres Γ, Δ.

70 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γάρ ἐστιν ὡς ἡ *A* μονὰς πρὸς τὸν *B* οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*· ἰσάκεις ἄρα ἡ *A* μονὰς τὸν *B* ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ *Δ* τὸν *Ε*· ἑναλλάξ ἄρα ἰσάκεις ἡ *A* μονὰς τὸν *Δ* μετρεῖ καὶ ὁ *B* τὸν *Ε*. Ἡ δὲ *A* μονὰς τὸν *Δ* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ³ μονάδας·

Quoniam enim est ut *A* unitas ad *B* ita *Δ* ad *E*; æqualiter igitur *A* unitas ipsum *B* numerum metitur ac *Δ* ipsum *E*; alterne igitur æqualiter *A* unitas ipsum *Δ* metitur ac *B* ipsum *E*. Sed *A* unitas ipsum *Δ* metitur per uni-

A, 1. *B*, 3. *Γ*, 9. *Δ*, 27. *Ε*, 81.

καὶ ὁ *B* ἄρα τὸν *E* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ *Δ*³ μονάδας· ὡς τε ὁ ἱλάσσων ὁ *B* τὸν μίζονα τὸν *E* μετρεῖ κατὰ τινὰ ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Ὅπερ ἔδει διῆξαι⁴.

tates quæ in ipso; et *B* igitur ipsum *E* metitur per unitates quæ in *Δ*; quare minor *B* majorem ipsum *E* metitur per aliquem numerum eorum qui sunt in proportionalibus numeris. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποσοις αὐτῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς¹ ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ ἰσχυατος πρῶτων ἀριθμῶν μετρήται², ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσοις αὐτῶν³ ἀριθμοὶ ἐξῆς⁴ ἀνάλογον, οἱ *A*, *B*, *Γ*, *Δ*· λέγω ὅτι ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ *Δ* πρῶτων ἀριθμῶν μετρήται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ *A* μετρηθήσεται.

PROPOSITIO XII.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt; a quibuscunque ultimus primorum numerorum mensuratur, ab ipsis et proximus unitati mensurabitur.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales *A*, *B*, *Γ*, *Δ*; dico a quibuscunque ipse *Δ* primis numeris mensuretur, ab ipsis et *A* mensuratum iri.

Car puisque l'unité *A* est à *B* comme *Δ* est à *E*, l'unité *A* mesure *B* autant de fois que *Δ* mesure *E* (déf. 20. 7); donc par permutation l'unité *A* mesure *Δ* autant de fois que *B* mesure *E* (15. 7.) Mais l'unité *A* mesure *Δ* par les unités qui sont en lui; donc *B* mesure *E* par les unités qui sont en *Δ*; le plus petit *B* mesure donc *E*, qui est le plus grand, par un des nombres qui sont dans les nombres proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, tous les nombres premiers qui mesurent le dernier mesurent aussi celui qui est le plus près de l'unité.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra *A*, *B*, *Γ*, *Δ* successivement proportionnels; je dis que tous les nombres premiers qui mesurent *Δ* mesureront aussi *A*.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 71

Μετρίσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ⁵ τὸν Α μετρίῃ. Μὴ γὰρ μετρίτω ὁ Ε τὸν Α⁶. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν⁷ ἐν μὴ μετρίῃ πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἔπει⁸ ὁ Ε τὸν Δ μετρίῃ, μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Πάλιν, ἔπει⁹ ὁ Α

Mensuretur enim Δ ab aliquo primo numero Ε; dico Ε et ipsum Α· metiri. Non enim metiatur Ε ipsum Α. Atque est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Α primi inter se sunt. Et quoniam Ε ipsum Δ· metitur, metiatur eum per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Rursus, quoniam Α ipsum

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256.
Ε, 2. Θ, 8. Η, 32. Ζ, 128.

τὸν Δ μετρίῃ κατὰ τὰς ἐν τῇ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως⁸ ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἰπόμενος τὸν ἰπόμενον· μετρίῃ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. Μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

Δ metitur per unitates quæ in Γ; ergo Α ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; est igitur ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α, Ε primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Ε ipsum Γ. Metiatur eum per Η; ergo Ε ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit. Sed et ex antecedente et Α ipsum Β· multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α,

Que Δ soit mesuré par un nombre premier Ε; je dis que Α est aussi mesuré par Ε. Que Α ne soit pas mesuré par Ε. Puisque Ε est un nombre premier, et que tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); les nombres Ε, Α sont premiers entr'eux. Et puisque Ε mesure Δ, qu'il le mesure par Ζ; le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. De plus, puisque Α mesure Δ par les unités qui sont en Γ (11. 9), le nombre Α multipliant Γ fera Δ. Mais Ε multipliant Ζ fait Δ; donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Ε mesure Γ. Qu'il le mesure par Η; le nombre Ε multipliant Η fera Γ. Mais par ce qui précède Α multipliant Β fait Γ; donc le produit

72 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

A, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως⁹ ὁ Η πρὸς τὸν Β. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν·

B æqualis est ipsi ex E, H; est igitur ut A ad E ita H ad B. Sed et A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur E ipsum B. Metiatur ipsum per Θ; ergo E ipsum Θ multiplicans ipsum B fecit. Sed et A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; est igitur ipse ex Θ, E æqualis ipsi

1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256.
E, 2. Θ, 8. H, 32. Z, 128.

ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος¹⁰ τῷ ἀπὸ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως¹¹ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε¹² ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Ε τὸν Α¹³. Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ πρώτου¹⁴ ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται· οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται¹⁵.

ab A; est igitur ut E ad A ita A ad Θ. Sed A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ergo metitur et E ipsum A. Sed et non metitur, quod impossibile; non igitur A, E primi inter se sunt; ergo compositi. Sed compositi a primo numero aliquo mensurantur; ergo A, E a primo aliquo numero mensurantur. Et quoniam E primus

de A par B égale le produit de E par H; donc A est à E comme H est à B. Mais les nombres A, E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure B. Qu'il le mesure par Θ; le nombre E multipliant Θ fera B. Mais A se multipliant lui-même fait B; donc le produit de Θ par E égale le carré de A; donc E est à A comme A est à Θ. Mais A et E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure A. Mais il ne le mesure pas, ce qui est impossible; donc les nombres A, E ne sont pas premiers entr'eux; donc ils sont composés. Mais les nombres composés sont mesurés par quelque nombre premier (déf. 15. 7); donc les nombres A, E sont mesurés par quelque nombre premier.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 73

Καὶ ἔπει ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὡς τε καὶ¹⁶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὧν ἂν ὁ Δ πρῶτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. Οἱ περ ἴδιαι δείξαι.

supponitur, primus autem ab alio numero non mensuratur nisi a se ipso; ergo Ε ipsos Α, Ε metitur; quare et Ε ipsum Α metitur. Metitur autem et ipsum Δ; ergo Ε ipsos Α, Δ metitur. Similiter utique demonstrabimus a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab iisdem et ipsum Α mensuratum iri. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

PROPOSITIO XIII.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾗ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου¹ μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς² ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem primus est, maximus a nullo alio mensurabitur, nisi ab eis qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse Α autem post unitatem primus sit; dico maximum eorum ipsum Δ a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis Α, Β, Γ.

Et puisque Ε est supposé être un nombre premier, et qu'un nombre premier n'est mesuré par aucun autre nombre que par lui-même (déf. 12. 7), le nombre Ε mesurera les nombres Α, Ε; donc Ε mesure Α. Mais il mesure Δ; donc Ε mesure les nombres Α, Δ. Nous démontrerons semblablement que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi le nombre Α. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un nombre premier, aucun autre nombre ne mesurera le plus grand, excepté ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels, et que le nombre Α, qui est après l'unité, soit un nombre premier; je dis que le plus grand Δ ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par les nombres Α, Β, Γ.

74 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρίσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστω ὁ αὐτός· φανερόν δὲ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. Εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτος ἔστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον οἷα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ἔπειρ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτος ἔστι· σύνθετος ἄρα· πᾶς³ δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὲς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὲς ἀριθμοῦ μετρεῖται⁴. Λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται⁵, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ·

Si enim possibile, mensureturab ipso Ε, et ipse Ε cum nullo ipsorum Α, Β, Γ sit idem; evidens est autem Ε primum non esse. Si enim Ε primus est, et metitur ipsum Δ, et ipsum Α metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur Ε primus est; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo Ε a primo aliquo numero mensuratur. Dico etiam ipsum a nullo alio numero mensuratum iri, nisi ab ipso Α. Si enim ab alio mensu-

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε----	Θ----	Η----	Ζ-----

καί ποτε ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ἔπειρ ἔστιν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. Λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Ζ ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἴς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε.

ratur ipse Ε, sed Ε ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum Α metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo Α ipsum Ε metitur. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur, metiatur ipsum per Ζ. Dico Ζ cum nullo ipsorum Α, Β, Γ esse eundem. Si enim Ζ cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem, et metitur ipsum Δ per Ε; et unus igitur ipsorum Α, Β, Γ ipsum Δ metitur

Car si cela est possible, que Ε mesure Δ, et que Ε ne soit aucun des nombres Α, Β, Γ; il est évident que Ε n'est pas un nombre premier. Car si Ε est un nombre premier, et s'il mesure Δ, il mesurera Α, qui est un nombre premier, Ε n'étant pas le même que Α (12. 9), ce qui est impossible; donc Ε n'est pas un nombre premier; il est donc composé. Mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier (33. 7); donc Ε est mesuré par quelque nombre premier. Je dis qu'aucun autre nombre premier ne le mesurera, si ce n'est Α. Car si Ε, qui mesure Δ, est mesuré par un autre nombre, cet autre nombre mesurera Δ; il mesurera donc Α, qui est un nombre premier, cet autre n'étant pas le même que Α (12. 9); ce qui est impossible. Donc Α mesure Ε. Et puisque Ε mesure Δ, qu'il le mesure par Ζ; je dis que Ζ n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Car si Ζ est le même qu'un des nombres Α, Β, Γ, et s'il mesure Δ par Ε, un des nombres Α, Β, Γ

Αλλὰ εἰς τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τινα τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ Ζ οὐκ ἐστὶ πρῶτος. Εἰ γὰρ πρῶτος⁸, καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα· ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται⁹. Λέγω δὲ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Α μετρεῖ· κἀκείνος ἄρα τὸν Α μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίη-

per E. Sed unus ipsorum Α, Β, Γ ipsum Δ metitur per aliquem ipsorum Α, Β, Γ; et E igitur cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem, quod non supponitur; non igitur Ζ cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Similiter utique ostendemus ipsum Ζ mensuratum iri ab ipso Α, ostendentes rursus Ζ non esse primum. Si enim primus, et metitur ipsum Δ, et ipsum Α metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur primus est Ζ; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo Ζ a primo aliquo numero mensuratur. Dico et ipsum ab alio primo numero non mensuratum iri, nisi ab ipso Α. Si enim alius aliquis primus ipsum Ζ metitur, sed Ζ ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum Α metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo Α ipsum Ζ metitur. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed quidem et Α ipsum Γ multiplicans ipsum

mesurera Δ par E. Mais un des nombres Α, Β, Γ mesure Δ par quelqu'un des nombres Α, Β, Γ (11. 9); donc Ε sera le même que quelqu'un des nombres Α, Β, Γ, ce qui n'est point supposé; donc Ζ n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Nous démontrerons semblablement que Ζ est mesuré par Α, en faisant voir encore que Ζ n'est pas un nombre premier. Car s'il l'est, et s'il mesure Δ, il mesurera Α, qui est un nombre premier, Ζ n'étant pas le même que Α (12. 9); ce qui est impossible; Ζ n'est donc pas un nombre premier; il est donc composé; mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier; donc Ζ est mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Je dis qu'il ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par Α. Car si Ζ, qui mesure Δ, est mesuré par tout autre nombre premier, cet autre nombre mesurera Δ, et par conséquent Α, qui est un nombre premier, Ζ n'étant pas le même que Α (12. 9); ce qui est impossible; donc Α mesure Ζ. Et puisque Ε mesure Δ par Ζ, le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. Mais Α multipliant Γ fait Δ;

76 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κιν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Ο δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Η. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν.

Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; proportionaliter igitur est ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α ipsum Ε metitur; et Ζ igitur ipsum Γ metitur. Metiatur ipsum per Η. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Η cum nullo ipsorum Α, Β esse eundem, et ipsum mensuratum iri ab ipso Α. Et quoniam Ζ ipsum Γ metitur per Η; ergo Ζ ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit.

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε-----	Θ-----	Η-----	Ζ-----

Αλλά μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ οὕτως¹⁰ ὁ Η πρὸς τὸν Β. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν. Αλλά μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν¹¹ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως¹² ὁ Α πρὸς τὸν Η.

Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α, Β æqualis est ipsi ex Ζ, Η; proportionaliter igitur ut Α ad Ζ ita Η ad Β. Metitur autem Α ipsum Ζ; metitur igitur et Η ipsum Β. Metiatur eum per Θ. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Θ cum ipso Α non esse eundem. Et quoniam Η ipsum Β metitur per Θ; ergo Η ipsum Θ multiplicans ipsum Β fecit. Sed et Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo ipse ex Θ, Η æqualis est ipsi ex Α quadrato; est igitur ut Θ ad Α ita Α

donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais Α mesure Ε; donc Ζ mesure Γ (déf. 21. 7); qu'il le mesure par Η. Nous démontrerons semblablement que Η n'est aucun des nombres Α, Β, et que Α mesure Η. Et puisque Ζ mesure Γ par Η, le nombre Ζ multipliant Η fera Γ. Mais Α multipliant Β fait Γ; donc le produit de Α par Β égale le produit de Ζ par Η; donc Α est à Ζ comme Η est à Β. Mais Α mesure Ζ; donc Η mesure Β. Qu'il le mesure par Θ. Nous démontrerons semblablement que Θ n'est pas le même que Α. Et puisque Η mesure Β par Θ, le nombre Η multipliant Θ fait Β. Mais Α se multipliant lui-même fait Β; donc le produit de Θ par Η égale le carré de Α; donc Θ est à Α comme Α est à Η (20. 7). Mais Α mesure Η;

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 77

Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α
πρῶτον ὄντα, μὴ ἂν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ
ἄτερον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου
ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάριξ τῶν Α, Β, Γ.
Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Εὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτων ἀριθμῶν
μετρηῖται ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ
μετρηθήσεται, πάριξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ελάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρῶτων
ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α
ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθή-
σεται, πάριξ τῶν Β, Γ, Δ.

Α, 30.
Β, 2. Γ, 3. Δ, 5.
Ε----- Ζ-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ
Ε, καὶ ὁ Ε μηδινὶ τῶν Β, Γ, Δ ἴστω ὁ αὐτός.

ad H. Metitur autem A ipsum H; metitur igitur
et Θ ipsum A primum existentem, non existens
cum ipso idem, quod absurdum; non igitur
maximus Δ ab alio numero mensurabitur,
nisi ab ipsis Α, Β, Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XIV.

Si minimus numerus a primis numeris mensu-
ratur; a nullo alio primo numero mensurabitur,
nisi ab ipsis a principio metientibus.

Minimus enim numerus Α a primis numeris
Β, Γ, Δ mensuretur; dico ipsum Α a nullo alio
primo numero mensuratum iri, nisi ab ipsis Β,
Γ, Δ.

Si enim possibile, mensuretur a primo Ε, et Ε
cum nullo ipsorum Β, Γ, Δ sit idem. Et quoniam

donc Θ mesure Α, qui est un nombre premier, Θ n'étant pas le même que
Α, ce qui est absurde; donc le plus grand nombre Δ n'est mesuré par aucun
autre nombre, si ce n'est par Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIV.

Si le plus petit nombre est mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré
par aucun autre nombre premier, si ce n'est par ceux qui le mesuraient d'abord.

Car soit Α le plus petit nombre mesuré par les nombres premiers Β, Γ, Δ; je
dis que Α ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par Β, Γ, Δ.

Car si cela est possible, qu'il soit mesuré par le nombre premier Ε, et que Ε ne soit

78 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῶν² πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἔξ αὐτῶν μετρεῖ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἓνα τῶν ἔξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ

Ε ipsum Α metitur, metiatur eum per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Α fecit. Et mensuratur Α a primis numeris Β, Γ, Δ. Si autem duo numeri sese multiplicantes faciunt aliquem, factum vero ex ipsis metitur aliquis primus numerus, et unum eorum a principio metietur; ergo Β, Γ, Δ unum ipsorum Ε, Ζ

Α, 30.
Β, 2. Γ, 3. Δ, 5.
Ε----- Ζ-----

ἄρα ἓνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν³ ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος⁴. οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, παρὲξ τῶν Β, Γ, Δ. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

metiantur. Ipsum quidem Ε non metientur, ipse Ε enim primus est, et cum nullo ipsorum Β, Γ, Δ idem; ipsum Ζ igitur metientur minorem existentem ipso Α, quod est impossibile, ipse enim Α ponitur minimus ab ipsis Β, Γ, Δ mensuratus; non igitur ipsum Α metietur primus numerus, præter ipsos Β, Γ, Δ. Quod oportebat ostendere.

aucun des nombres Β, Γ, Δ. Puisque Ε mesure Α, qu'il le mesure par Ζ; le nombre Ε multipliant Ζ fera Α. Mais Α est mesuré par les nombres premiers Β, Γ, Δ, et lorsque deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et qu'un nombre premier mesure le produit, ce nombre mesurera un des nombres qu'on avait d'abord supposés (32. 7); les nombres Β, Γ, Δ mesurent donc un des nombres Ε, Ζ. Mais ils ne mesureront pas Ε, car Ε est un nombre premier, et il n'est aucun des nombres Β, Γ, Δ; ils mesurent donc Ζ, qui est plus petit que Α; ce qui est impossible, car Α est supposé le plus petit nombre mesuré par Β, Γ, Δ; donc aucun nombre premier, si ce n'est Β, Γ, Δ, ne mesurera Α. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

PROPOSITIO XV.

Εάν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντιθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Εστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ· δύο ὁποιοῦν συντιθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Γ, Α πρὸς τὸν Β.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; duo quicunque compositi ad reliquum primi sunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales, Α, Β, Γ, minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; dico ipsorum Α, Β, Γ duos quoscunque compositos ad reliquum primos esse, ipsos quidem Α, Β ad Γ, ipsos autem Β, Γ ad Α, et adhuc ipsos Γ, Α ad Β.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.
Δ. . . Ε. . . Ζ.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. Φανερόν δ' ἂν ὅτι ὁ μὲν ΔΕ αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει. Καὶ ἵπτι οἱ

Sumantur enim duo ΔΕ, ΕΖ minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ. Evidens est et quidem ΔΕ se ipsum multiplicantem ipsum Α facere; ipsum vero ΕΖ multiplicantem ipsum Β facere, et adhuc ΕΖ se ipsum multiplicantem ipsum Γ facere. Et

PROPOSITION XV.

Si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux, la somme de deux quelconques de ces nombres sera un nombre premier avec le nombre restant.

Que les trois nombres Α, Β, Γ successivement proportionnels soient les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que la somme de deux des trois nombres Α, Β, Γ est un nombre premier avec le nombre restant, savoir la somme de Α et de Β avec Γ, la somme de Β et de Γ avec Α, et la somme de Γ et de Α avec Β.

Car prenons les deux plus petits nombres ΔΕ, ΕΖ qui ont la même raison avec Α, Β, Γ. Il est évident que ΔΕ se multipliant lui-même fera Α, que ΔΕ multipliant ΕΖ fera Β, et que ΕΖ se multipliant lui-même fera Γ (2. 8). Et puisque

80 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΕ, ΕΖ ἡλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσι, καὶ συναμφοτέρως πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί

quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi sunt, primi inter se sunt. Si autem duo numeri primi inter se sunt, et uterque ad utrumque primus est; et ΔΖ igitur ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed quidem et ΔΕ ad ΕΖ primus est; ergo ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi sunt. Si autem duo numeri ad

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.

Δ. . . Ε. . . Ζ.

εἰσιν³. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾧσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥς τε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ὡς τε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος³ πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν⁴. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἐστὶν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ

aliquem numerum primi sunt, et ex ipsis factus ad reliquum primus est; quare ipse ex ΖΔ, ΔΖ ad ΕΖ primus est. Quare et ipse ex ΖΔ, ΔΕ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Si enim duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus est. Sed ipse ex ΖΔ, ΔΕ est ipse ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ; ipse igitur ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Et ipse quidem ex ΔΕ est Α, ipse vero ex ΔΕ, ΕΖ est Β, ipse autem ex ΕΖ est Γ; ergo Α, Β compositi ad ipsum Γ primi sunt. Similiter utique demonstrabimus et

les nombres ΔΕ, ΕΖ sont les plus petits, ces nombres sont premiers entr'eux (24. 7). Mais si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux (30. 7); donc ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ. Mais ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc ΔΖ et ΔΕ sont premiers avec ΕΖ. Mais si deux nombres sont premiers avec un autre, le produit de ces deux nombres est premier avec cet autre (26. 7); donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec le carré de ΕΖ. Car si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre (27. 7). Mais le produit de ΖΔ par ΔΕ égale le carré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (3. 2); donc le carré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ est un nombre premier avec le carré de ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme de Α et de Β est un nombre premier avec Γ. Nous démontrerons de la même manière que la somme des

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 81

οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥς τε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσιν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἁπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsos Β, Γ ad Α primos esse. Dico et ipsos Α, Γ ad Β primos esse. Quoniam enim ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est; quare et ipse ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed ipsi ex ΔΖ æquales sunt ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ; et ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso semel ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt; et. rursus dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Atque est quidem ipse ex ΔΕ ipse Α, ipse autem ex ΔΕ, ΕΖ ipse Β, ipse vero ex ΕΖ ipse Γ; ergo Α, Γ compositi ad ipsum Β primi sunt. Quod oportebat ostendere.

nombres Β, Γ est un nombre premier avec Α. Je dis aussi que la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Car puisque ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ (30. 7), le carré de ΔΖ sera un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (26 et 27. 7). Mais la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est égale au carré de ΔΖ (4. 2); donc la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec une fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Ce qu'il fallait démontrer.

82 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἕστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς ἄλλον τινά.

PROPOSITIO XVI.

Si duo numeri primi inter se sunt, non erit ut primus ad secundum ita secundus ad alium aliquem.

Duo enim numeri A, B primi inter se sint; dico non esse ut A ad B ita B ad alium aliquem.

$A, 5.$ $B, 8.$ $\Gamma-----$

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ . Οἱ δὲ A, B πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ² μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας³ ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν B , ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ A ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον⁴. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim possibile, sit ut A ad B ita B ad Γ . Sed A, B primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eadem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur A ipsum B , ut antecedens antecedentem. Metitur autem et se ipsum; ergo A ipsos A, B metitur, primos existentes inter se, quod absurdum; non igitur erit ut A ad B ita B ad Γ . Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le second est à un autre nombre.

Que les deux nombres A, B soient premiers entr'eux; je dis que A n'est point à B comme B est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que A soit à B comme B est à Γ . Mais A et B sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7); et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc A mesure B , comme un antécédent mesure un antécédent. Mais A se mesure lui-même; donc A mesure A et B , qui sont premiers entr'eux; ce qui est absurde; donc A ne sera pas à B comme B est à Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

PROPOSITIO XVII.

Εάν ὧσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὧσιν οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἴσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἐστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sunt; non erit ut primus ad secundum ita ultimus ad alium aliquem.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; extremi autem eorum ipsi Α, Δ primi inter se sint; dico non esse ut Α ad Β ita Δ ad alium aliquem.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27. Ε-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ² μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας³ ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον μετρεῖ

Si enim possibile, sit ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Sed Α, Δ primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur

PROPOSITION XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le dernier est à un autre nombre.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, et que leurs extrêmes Α, Δ soient premiers entr'eux; je dis que Α n'est pas à Β comme Δ est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que Α soit à Β comme Δ est à Ε; par permutation Α sera à Δ comme Β est à Ε (13. 7). Mais les nombres Α, Δ sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Β.

84 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β
οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ με-
τρεῖ, ὡς τε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν
ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ
δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Ἀλλ' ὁ

A ipsum B. Atque est ut A ad B ita B ad Γ;
et B igitur ipsum Γ metitur, quare et A ipsum
Γ metitur. Et quoniam est ut B ad Γ ita Γ
ad Δ, metitur autem B ipsum Γ; metitur igitur
et Γ ipsum Δ. Sed A ipsum Γ metitur; quare

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E-----

Α τὸν Γ μετρεῖ· ὡς τε ὁ Α καὶ τὸν Δ μετρεῖ.
Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ με-
τρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν
Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

A et ipsum Δ metitur. Metitur autem et se
ipsum; ergo A ipsos A, Δ metitur, primos
existentes inter se, quod est impossibile; non
igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium aliquem.
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΨ.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυ-
νατὸν ἐστὶν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστώσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· καὶ
δύο ἴσται ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν ἐστὶν αὐ-
τοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROPOSITIO XVIII.

Duobus numeris datis considerare, an possi-
bile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Sint dati duo numeri A, B; et oportebit con-
siderare, an possibile sit ipsis tertium propor-
tionalem invenire.

Mais A est à B comme B est à Γ; donc B mesure Γ; donc A mesure aussi Γ. Mais
B est à Γ comme Γ est à Δ; donc le nombre B mesure Γ, et Γ mesure Δ. Mais A
mesure Γ; donc A mesure Δ. Mais il se mesure lui-même; donc A mesure les
nombres A, Δ, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc A n'est
pas à B comme Δ est à un autre nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Deux nombres étant donnés, chercher s'il est possible de leur trouver un
troisième nombre proportionnel.

Soient donnés les deux nombres A, B; il faut chercher s'il est possible de
leur trouver un troisième nombre proportionnel.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 85

Οἱ δὲ A, B ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέ-
δικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνά-
λογον προσευρεῖν.

Itaque A, B vel primi inter se sunt, vel non. Et si primi inter se sunt, demonstratum est impossibile esse ipsis tertium proportionalem invenire.

$A, 4.$ $B, 7.$

Ἀλλὰ δὲ μὴ ἴστωσαν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. Ὁ A δὲ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον κατὰ τὸν Δ · ὁ A ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν.

Sed et non sint A, B primi inter se, et B se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat. Ipse A igitur ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum per Δ ; ergo A ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et B se ip-

$A, 4.$ $B, 6.$ $\Delta, 9.$ $\Gamma, 36.$

Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ B · ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως· ὁ B πρὸς τὸν Δ · τοῖς A, B ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον³ προσεύρεται, ὁ Δ .

sum multiplicans ipsum Γ fecit; ipse igitur ex A, B æqualis est ipsi ex B ; est igitur ut A ad B ita B ad Δ ; ergo ipsis A, B tertius numerus proportionalis Δ inventus est.

Ἀλλὰ δὲ μὴ μετρεῖτω ὁ A τὸν Γ · λέγω ὅτι τοῖς A, B ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσε-
ρεῖν ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ ·

Sed et non metiatur A ipsum Γ ; dico ipsis A, B impossibile esse tertium proportionalem invenire numerum. Si enim possibile,

Les nombres A, B sont premiers entr'eux, ou ils ne le sont pas. S'ils sont premiers entr'eux, il est démontré qu'il n'est pas possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel (16. 9).

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux, et que B se multipliant lui-même fasse Γ . Le nombre A mesurera Γ ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure par Δ ; le nombre A multipliant Δ fera Γ . Mais B se multipliant lui-même fait Γ ; donc le produit de A par Δ est égal au carré de B ; donc A est à B comme B est à Δ (20. 7). On a donc trouvé un troisième nombre Δ proportionnel aux nombres A, B .

Mais que A ne mesure pas Γ ; je dis qu'il est impossible de trouver un troisième nombre proportionnel aux nombres A, B . Car si cela est possible, que Δ soit le

86 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥς τε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ

inveniatur ipse Δ; ipse igitur ex Α, Δ æqualis est ipsi ex Β, ipse autem ex Β est ipse Γ; ipse igitur ex Α, Δ æqualis est ipsi Γ; quare Α ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Α

Α, 6. Β, 4. Δ----- Γ, 16.

τὸν Δ. Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσερεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρή. Ὅπερ ἴδι διέξαι.

ipsum Γ metitur per Δ. At vero supponitur et non metiri, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis Α, Β tertium proportionalem invenire numerum, quando Α ipsum Γ non metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

PROPOSITIO XIX.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε¹ δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσερεῖν.

Tribus numeris datis considerare, quando possibile sit ipsis quantum proportionalem invenire.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε² δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσερεῖν.

Sint dati tres numeri Α, Β, Γ, et oporteat considerare, quando possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

nombre trouvé; le produit de Α par Δ sera égal au carré de Β (20.7); mais le carré de Β est Γ; donc le produit de Α par Δ est égal à Γ; donc Α multipliant Δ fait Γ; donc Α mesure Γ par Δ. Mais on a supposé qu'il ne le mesure pas, ce qui est absurde; il est donc impossible de trouver un nombre troisième proportionnel aux nombres Α, Β, lorsque Α ne mesure pas Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Trois nombres étant donnés, chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Soient donnés les trois nombres Α, Β, Γ; il faut chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 87

Οἱ δὲ A, B, Γ ἢτοι ἱξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν· ἢ οὐ*.

Ipsi vero A, B, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi inter se sunt; vel non.

$A, 4. \quad B, 6. \quad \Gamma, 9.$

Εἰ μὲν οὖν οἱ A, B, Γ ἱξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Γ πρῶτοι πρὸς

Si quidem igitur A, B, Γ deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi

Ou les nombres A, B, Γ sont successivement proportionnels, et leurs extrêmes A, Γ sont premiers entr'eux; ou bien cela n'est point.

Si les nombres A, B, Γ sont successivement proportionnels, et si leurs ex-

* In margine editionis Basilicæ hoc legere est: *Quia Zambertus græcum sine dubio exemplar secutus, exactâ divisione membrorum hic utitur, singula membra demonstrationibus exequitur, voluimus eam lectionem inserere; est enim pernecessaria, licet neutrum nostrorum exemplarium tale quidquam haberet.*

Editio Parisiensis concordat cum omnibus codicibus bibliothecæ regię, codicibus 190, 2466, 2542 exceptis, qui concordant cum codice græco quem Zambertus secutus est: versio autem latīna Zamberti hæc est:

Jam ipsi A, B, Γ , aut continue sunt proportionales, et eorum extremi A, Γ sunt primi ad invicem; aut non sunt continue proportionales, et eorum extremi primi sunt ad invicem; aut continue sunt proportionales, et eorum extremi non sunt ad invicem primi; vel neque sunt continue proportionales, neque eorum extremi primi sunt ad invicem.

Non sint jam ipsi A, B, Γ continue proportionales, extremis rursus primis existentibus ad invicem; dico quod et sic quantum proportionalem invenire est impossibile.

Si enim possibile, inveniatur Δ , ut sit sicut A ad B sic Γ ad Δ , fiatque sicut B ad Γ sic Δ ad E . Et quoniam est sicut quidem A ad B sic Γ ad Δ , sicut autem B ad Γ sic Δ ad E ; ex æquali igitur (per 14 septimi) est sicut A ad Γ sic Γ ad E . At A, Γ primi sunt, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur eandem rationem habentes, antecedens antecedentem, et sequens sequentem (per 21 septimi); metitur igitur A ipsum Γ , antecedens antecedentem; metitur autem et se ipsum; igitur A ipsos A, Γ metitur primos ad invicem existentes, quod est impossibile; ipsis igitur A, B, Γ quantum proportionalem invenire est impossibile.

II.

II*

88 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀλλήλους εἰσὶ, δίδικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν inter se sunt, demonstratum est impossibile

A, 4. B, 6. Γ, 9.

αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθ- ipsis quartum proportionalem invenire nu-
μόν. merum.

Εἰ δὲ οὐ, ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Si autem non, ipse B ipsum Γ multiplicans
Δ ποιείτω· ὁ δὲ Ἀ³ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ ipsum Δ faciat; ipse igitur A ipsum Δ vel

A, 8. B, 12. Γ, 18. E, 27. Δ, 216.

μετρεῖ. Μετρεῖτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν Ε· metitur, vel non metitur. Metiatur eum pri-
ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πι- mum per E; ergo A ipsum E multiplicans

trèmes A, Γ sont premiers entr'eux, on a démontré qu'il est impossible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel (17.9).

Si cela n'est point, que B multipliant Γ fasse Δ; le nombre A mesurera le nombre Δ, ou ne le mesurera pas. Qu'il le mesure d'abord par E; le nombre A

Sed jam rursus sint ipsi A, B, Γ continue proportionales; at A, Γ non sint primi ad invicem; dico quod eis quartum proportionalem invenire est possibile.

Sed jam ipsi A, B, Γ neque continue sint proportionales, neque eorum extremi ad invicem sint primi, et B ipsum Γ multiplicans ipsum efficiat Δ. Similiter ostendetur quod si quidem A ipsum Δ metitur, possibile est eis proportionalem invenire; si autem non metitur, est impossibile. Quod ostendere oportebat.

Divisio editionis Pariensis brevior est, nec tamen minus exacta; etenim quod A, B, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi inter se sunt, vel non; evidens est igitur hanc divisionem comprehendere quatuor casus editionum Basilicæ et Oxoniæ.

Hervagius Euclidis suos codices græcos corrigere voluit, et eos inepte corruptit; perspicuum est enim secundum *alinea* esse meram principii petitionem. Vide præfatium et lectiones variantes.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 89

ποίηκεν. Ἀλλὰ μὲν⁴ καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιά-
σας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ
τῷ ἐκ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α
πρὸς τὸν Β οὕτως⁵ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς⁶ Α,
Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον⁷ προσύρηται ὁ Ε.

ipsum Δ fecit. At vero et Β ipsum Γ mul-
tiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Ε
æqualis est ipsi ex Β, Γ; proportionaliter
igitur est ut Α ad Β ita Γ ad Ε; ergo ipsis
Α, Β, Γ quartus proportionalis Ε inventus
est.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρίτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ἔτι
ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνά-
λογον προσυρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δύνατον,

At vero non metiatur Α ipsum Δ; dico
impossibile esse ipsis Α, Β, Γ quantum pro-
portionalem invenire numerum. Si enim pos-

Α, 20. Β, 30. Γ, 45. Ε----- Δ, 1350.

προσειρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος
ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Β, Γ
ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος
ἐστὶ τῷ Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας
τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ
τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. Ἀλλὰ καὶ
οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα δύνατόν

sibile, inveniatur Ε; ipse igitur ex Α, Ε
æqualis est ipsi ex Β, Γ. Sed ipse ex Β, Γ
est ipse Δ; et ipse ex Α, Ε igitur æqualis est
ipsi Δ; ergo Α ipsum Ε multiplicans ipsum
Δ fecit; ergo Α ipsum Δ metitur per Ε;
quare metitur Α ipsum Δ. Sed et non metitur,
quod absurdum; non igitur possibile est ipsis

multipliant Ε fera Δ. Mais Β multipliant Γ fait Δ; donc le produit de Α par Ε est égal au produit de Β par Γ; donc Α est à Β comme Γ est à Ε (19. 7); on a donc trouvé un quatrième nombre proportionnel Ε aux nombres Α, Β, Γ.

Mais que Α ne mesure pas Δ; je dis qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ. Car si cela est possible, soit trouvé Ε; le produit de Α par Ε sera égal au produit de Β par Γ (19. 7). Mais le produit de Β par Γ est Δ; le produit de Α par Ε est donc égal à Δ; donc Α multipliant Ε fera Δ; donc Α mesure Δ par Ε; donc Α mesure Δ. Mais il ne le mesure

90 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσ-
εμεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρή.

A, B, Γ quantum proportionalem invenire nu-
merum, quando A ipsum Δ non metitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ
προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Primi numeri plures sunt omni propositā
multitudine primorum numerorum.

Ἐστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ
Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ
πρῶτοι ἀριθμοί.

Sint propositi primi numeri Α, Β, Γ; dico
quam ipsi Α, Β, Γ plures esse primos nu-
meros.

A, 2.	B, 3.	Γ, 5.
E	30.	Δ Z

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος
μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προσκείσθω τῷ
ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ· ὁ δὲ ΕΖ ἥτοι πρῶτός ἐστιν,

Sumatur enim ipse ab ipsis Α, Β, Γ minimus
mensuratus, et sit ΔΕ, et apponatur ipsi ΔΕ uni-
tas ΔΖ; ipse igitur ΕΖ vel primus est, vel non.

pas, ce qui est absurde; il n'est donc pas possible de trouver un quatrième
nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ, lorsque Α ne mesure pas Δ.

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité pro-
posée de nombres premiers.

Soient Α, Β, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis
que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres
Α, Β, Γ.

Soit pris le plus petit nombre mesuré par les nombres Α, Β, Γ (38. 7), et
que ce nombre soit ΔΕ; ajoutons à ΔΕ l'unité ΔΖ; le nombre ΕΖ sera un nombre

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 91

§ οὐ. Ἐστω πρότερον πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, ΕΖ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἴστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρῶτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρεῖσθαι ὑπὸ πρῶτου τοῦ Η· λέγω ὅτι ὁ Η οὐδὲν τῶν Α, Β, Γ ἴσθιν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω¹. Οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν ΔΕ μετροῦσι· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ

Sit primum primus; inventi igitur sunt primi numeri Α, Β, Γ, ΕΖ plures quam ipsi Α, Β, Γ.

At vero non sit ΕΖ primus; a primo igitur aliquo numero mensuratur. Mensuretur a primo Η; dicō Η cum nullo ipsorum Α, Β, Γ esse eundem. Si enim possibile, sit. Sed Α, Β, Γ ipsum ΔΕ metiuntur; et Η igitur ipsum ΔΕ

$$\begin{array}{rcccl} \text{Α, 3.} & & \text{Β, 5.} & & \text{Γ, 7.} \\ \text{Β} & & 105. & & \text{Δ Ζ} \\ \hline & & \text{Η, 53.} & & \end{array}$$

μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν ἄρα² τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Η ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἴσθιν ὁ αὐτός. Ο αὐτὸς δὲ καὶ³ ὑπόκειται πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ, οἱ Α, Β, Γ, Η. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι.

metietur. Metitur autem et ipsum ΕΖ; et reliquam igitur ipsam ΔΖ unitatem metietur ipse Η numerus existens, quod absurdum; non igitur Η cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Sed ipse et supponitur primus; inventi igitur sunt primi numeri plures Α, Β, Γ, Η propositā multitudine ipsorum Α, Β, Γ. Quod oportebat ostendere.

premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers Α, Β, Γ, ΕΖ qui sont en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ.

Mais que ΕΖ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier Η; je dis que Η n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres Α, Β, Γ mesurent ΔΕ, le nombre Η mesurera ΔΕ. Mais Η mesure ΕΖ; donc Η, qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔΖ, ce qui est absurde; donc Η n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers Α, Β, Γ, Η, que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres Α, Β, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

PROPOSITIO XXI.

Εὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντιθῶσιν, ὁ ὅλος ἀρτίος ἐστίν.

Συγκείμεθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὁλος ὁ ΑΕ ἄρτίος ἐστίν.

Si pares numeri quotcunque componuntur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Α . . . Β Γ . Δ Ε

Ἐπὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἡμισυ. Ἀρτίος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. Ὅπρι ἴδου δείξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ par est, habet partem dimidiam; quare et totus ΑΕ habet partem dimidiam. Par autem numerus est qui bifariam dividitur; par igitur est ΑΕ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντιθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἀρτίον ᾗ, ὁλος ἀρτίος ἐσται.

Si impares numeri quotcunque componuntur, multitudo autem ipsorum par est, totus par erit.

PROPOSITION XXI.

Si l'on ajoute tant de nombres pairs que l'on voudra, leur somme sera un nombre pair.

Ajoutons tant de nombres pairs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ qu'on voudra; je dis que leur somme ΑΕ est un nombre pair.

Puisque chacun des nombres ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ est un nombre pair, chacun de ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6. 7); donc leur somme ΑΕ peut être partagée en deux parties égales. Mais un nombre pair est celui qui peut être partagé en deux parties égales; le nombre ΑΕ est donc un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est paire, leur somme sera paire.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 93

Συγκείμεθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅσοιδη-
ποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ·
λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Componantur enim impares numeri quot-
cunque pares multitudine ipsi AB, BG, ΓΔ,
ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Α . . . Β Γ Δ Ε

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BG, ΓΔ, ΔΕ
περιττός ἐστιν, ἀφαιρέσεως μονάδας ἀφ' ἑκάσ-
του, ἕκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται·
ἄσπερ καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται.
Ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ
ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB,
BG, ΓΔ, ΔΕ impar est, detractâ unitate ab uno-
quoque, unusquisque igitur reliquorum par erit;
quare et compositus ex ipsis par erit. Est autem
et multitudo unitatum par; et totus igitur ΑΕ
par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν συντιθῶσι, τὸ
δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ· καὶ ὅλος περισσὸς
ᾖται.

Si impares numeri quotcunque componuntur,
multitudo autem ipsorum impar est; et totus im-
par erit.

Συγκείμεθωσαν γὰρ ὅποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθ-
μοί, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ AB, BG,
ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

Componantur enim quotcunque impares nu-
meri, quorum multitudo impar sit, ipsi AB, BG,
ΓΔ; dico et totum ΑΔ imparem esse.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, BG, ΓΔ, ΔΕ que l'on voudra, leur
quantité étant paire; je dis que leur somme ΑΕ est paire.

Car puisque chacun des nombres AB, BG, ΓΔ, ΔΕ est impair, si l'on retranche
une unité de chacun d'eux, chacun des nombres restants sera pair; leur somme
sera donc un nombre pair (21. 9). Mais la quantité des unités est paire; donc la
somme ΑΕ est paire. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est
impaire, leur somme sera impaire.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, BG, ΓΔ que l'on voudra, leur quantité
étant impaire; je dis que leur somme sera impaire.

94 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος· *Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ; reliquus igitur ΓΕ par est. Est autem et ΓΑ par; et totus*

A. B. Γ. E. Δ

καὶ ὁλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἴσθιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. Οὕτω ἔδει διῆξαι. *igitur ΑΕ par est. Atque est unitas ΔΕ; impar igitur est ΑΔ. Quod oportebat ostendere.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Εὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρῇθ', ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἴσθαι.

Si a pari numero par aufertur, reliquus par erit.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἀφηρήσθω ἄρτιος² ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

A pari enim ipso ΑΒ auferatur par ΒΓ; dico reliquum ΓΑ parem esse.

A. Γ. . . . B

Επεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ³. Οὕτω ἔδει διῆξαι.

Quoniam enim ΑΒ par est, habet partem dimidiam. Propter eadem utique et ΒΓ habet partem dimidiam; quare et reliquus ΓΑ habet partem dimidiam; par igitur est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

Retranchons de ΓΔ l'unité ΔΕ; le reste ΓΕ sera un nombre pair (déf. 7. 7). Mais ΓΑ est un nombre pair (22. 9); donc la somme ΑΕ est un nombre pair (21. 9). Mais ΔΕ est une unité; donc ΑΔ est un nombre impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre pair, le reste sera pair.

Que du nombre pair ΑΒ soit retranché le nombre pair ΒΓ; je dis que le reste ΓΑ est pair.

Car puisque ΑΒ est un nombre pair, ce nombre a une moitié. Par la même raison, ΒΓ a aussi une moitié; donc le reste ΓΑ a aussi une moitié; donc ΑΓ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Εὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ,
ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ
ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσὸς ἔστιν.

Si a pari numero impar aufertur, reliquus
impar erit.

A pari enim ipso AB impar auferatur BG;
dico reliquum GA imparem esse.

Α Γ. Δ . . . Β

Αφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ
ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ
λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστι μονὰς
ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσὸς ἔστιν. Ὅπερ ἴδω
δείξαι.

Auferatur ab ipso BG unitas GD; ergo AB
par est. Est autem et AB par; et reliquus igitur
AD par est. Atque est unitas GD; ergo GA
impar est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

PROPOSITIO XXVI.

Εὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ,
ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Απὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω
ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Si ab impari numero impar aufertur, re-
liquus par erit.

Ab impari enim ipso AB impar auferatur BG;
dico reliquum GA parem esse.

PROPOSITION XXV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre impair, le reste sera impair.

Que du nombre pair AB soit retranché le nombre impair BG; je dis que le reste GA est impair.

Car que l'unité ΓΔ soit retranchée de BG, le reste ΔΒ sera pair (déf. 7. 7). Mais AB est pair; donc le reste ΑΔ est pair (24. 9). Mais ΓΔ est l'unité; donc ΓΑ est impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre impair, le reste sera pair.

Que de AB impair soit retranché BG impair; je dis que le reste ΓΑ est pair.

96 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ὁ AB περισπός ἐστιν, ἀφαιρήσθω μονάς ἢ ΒΔ· λοιπός ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Διὰ Quoniam enim AB impar est, auferatur unitas ΒΔ; reliquus igitur ΑΔ par est. Per eadem

A . . . Γ . . . Δ . Β

τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ λοιπός ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Οἷερ ἴδει διῖξει. utique et ΓΔ par est; quare et reliquus ΓΑ par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

PROPOSITIO XXVI.

Εὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρήῃ, ὁ λοιπός περισπός ἐσται.

Si ab impari numero par aufertur, reliquus impar erit.

Απὸ γὰρ περισσοῦ¹ τοῦ AB ἄρτιος ἀφαιρήσθω ὁ ΒΓ· λίγω ὅτι ὁ λοιπός ὁ ΓΑ περισπός ἐστιν.

Ab impari enim ipso AB par auferatur ΒΓ; dico reliquum ΓΑ imparem esse.

A . Δ . . . Γ . . . Β

Αφαιρήσθω γὰρ² μονάς ἢ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Εἰστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπός ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. Εἰστι δὲ καὶ μονάς ἢ ΔΑ³· περισπός ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. Οἷερ ἴδει διῖξει.

Auferatur enim unitas ΑΔ; ergo ΔΒ par est. Est autem et ΒΓ par; et reliquus igitur ΓΔ par est. Est autem et unitas ΔΑ; impar igitur est ΓΑ. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est impair, retranchons-en l'unité ΒΔ, le reste ΑΔ sera pair. Par la même raison ΓΔ sera pair; donc le reste ΓΑ sera pair (24. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre pair, le reste sera impair.

Que de AB impair soit retranché ΒΓ pair; je dis que le reste ΓΑ est impair.

Car soit retranchée l'unité ΑΔ; le nombre ΔΒ sera pair. Mais ΒΓ est pair; donc le reste ΓΔ est pair (24. 9). Mais ΔΑ est une unité; donc ΓΑ est impair (déf. 7. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

PROPOSITIO XXVIII.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιά-
σας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος ἄρτιος ἔσται.

Si impar numerus parem multiplicans facit
aliquem, factus par erit.

Περὶ σὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολ-
πλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Γ
ἄρτιός ἐστιν.

Impar enim numerus A parem B multiplicans
ipsum Γ faciat; dico Γ parem esse.

A B
Γ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ
πεποιήκει· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων
τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ὁ Β
ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἁρτίων. Εὰν δὲ
ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποιοῦν¹ συντιθῶσιν, ὁ ἕλος
ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Ὅπρι εἶδει
δείξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum
Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqua-
libus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est B
par; ergo Γ componitur ex paribus. Si autem
pares numeri quocunque componuntur, totus
par est; par igitur est Γ. Quod oportebat os-
tendere.

PROPOSITION XXVIII.

Si un nombre impair multipliant un nombre pair fait un nombre, le produit
sera pair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre pair B fasse r; je dis que r
est pair.

Car puisque A multipliant B a fait r, le nombre r est composé d'autant
de nombres égaux à B qu'il y a d'unités dans A. Mais B est pair; donc r
est composé de nombres pairs. Mais la somme de tant nombres pairs que l'on
voudra est un nombre pair (2. 9); donc r est un nombre pair. Ce qu'il fallait
démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

PROPOSITIO XXIX.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περὶσσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιήτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσὸς ἔστιν.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans facit aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A imparem B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ imparem esse.

A . . . B
Γ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἔστιν. Ὅπερ εἶδει δίδξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqualibus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar; ergo Γ componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; quare Γ impar est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIX.

Si un nombre impair multipliant un nombre impair fait un nombre, le produit sera impair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre impair B fasse r; je dis que r est impair.

Car puisque A multipliant B fait r, le nombre r est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A. Mais les nombres A, B sont impairs; donc r est composé de nombres impairs, dont la quantité est un nombre impair; donc r est un nombre impair (23. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρήῃ,
καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περὶ σὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β με-
τρίτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ με-
τρήσει.

A. B.
Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρίτω αὐτὸν
κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. Εἰ
γὰρ δυνατόν, ἔστω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ
κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας
τὸν Β ποιῶσκει· ὁ ἄρα Β¹ σύγκειται ἐκ περισσῶν
ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα
περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ
ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα
ἐστὶν² ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιαίως, διὰ
δὲ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. Ὅπερ
ἰδεῖν δεῖξαι.

Si impar numerus parem numerum metitur,
et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem B metiatur;
dico et dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A ipsum B metitur, metiatur
ipsum per Γ; dico Γ non esse imparē. Si
enim possibile, sit. Et quoniam A ipsum B
metitur per Γ; ergo A ipsum Γ multiplicans
ipsum B fecit; ergo B componitur ex imparibus
numeris, quorum multitudo impar est; ergo B
impar est; quod absurdum, supponitur enim
par; non igitur Γ impar est; impar igitur est Γ;
quare A ipsum B metitur pariter, ob id utique et
dimidium ejus metietur. Quod oportebat os-
tendere.

PROPOSITION XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera sa moitié.

Que le nombre impair A mesure le nombre pair B; je dis qu'il mesurera sa moitié.

Car puisque A mesure B, qu'il le mesure par Γ; je dis que Γ n'est pas un nombre impair. Qu'il le soit, si cela est possible. Puisque A mesure B par Γ, le nombre A multipliant Γ fera B; donc B est composé de nombres impairs dont la quantité est un nombre impair; donc B est impair; ce qui est absurde, puisqu'il est supposé pair; donc Γ n'est pas impair; donc Γ est pair; donc A mesure B par un nombre pair; il mesurera sa donc moitié. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΑ΄.

PROPOSITIO XXXI.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶ-
τος ᾗ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα¹ αὐτοῦ πρῶτος
ῖσται.

Si impar numerus ad aliquem numerum pri-
mus est, et ad duplum ipsius primus erit.

Περὶσσοὺς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρὸς τινὰ ἀριθμὸν
τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίον² ἔστω
ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α³ πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.

Impar enim numerus Α ad aliquem numerum
Β primus sit, ipsius autem Β duplus sit Γ; dico
Α ad Γ primum esse.

Α Β
Γ
Δ ----

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις
αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ
ἔστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. Καὶ
ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὦν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν
ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἡμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει
ὁ Δ⁴. Τοῦ δὲ Γ ἡμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β
μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β
μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος
οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους
εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim non sunt Α, Γ primi, metietur ali-
quis eos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et est
Α impar; impar igitur et Δ. Et quoniam Δ
impar existens ipsum Γ metitur, atque est Γ
par; et dimidium igitur ipsius Γ metietur ipse Δ.
Ipsius autem Γ dimidium est ipse Β; ergo Δ ipsum
Β metitur. Metitur autem et ipsum Α; ergo Δ
ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se,
quod est impossibile; non igitur Α ad Γ primus
non est; ergo Α, Γ primi inter se sunt. Quod
oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXI.

Si un nombre impair est premier avec un nombre, il sera premier avec son double.

Que le nombre impair Α soit premier avec un nombre Β, et que Γ soit double de Β; je dis que Α est premier avec Γ.

Car si les nombres Α, Γ ne sont pas premiers, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Mais Α est impair; donc Δ est impair. Et puisque Δ, qui est impair, mesure Γ, et que Γ est pair, le nombre Δ mesurera la moitié de Γ (30. 9). Mais Β est la moitié de Γ; donc Δ mesure Β. Mais il mesure Α; donc Δ mesure les nombres Α, Β, qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; donc Α ne peut point ne pas être premier avec Γ; donc les nombres Α, Γ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϞ.

PROPOSITIO XXXII.

Τῶν ἀπὸ δυάδος¹ διπλασιοζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυάδος² τῆς Α διδιπλασιάσθωσαν ἰσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτίοι εἰσι μόνον.

Ε, 1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ, φανερὸν· ἀπὸ γὰρ δυάδος³ ἐστὶ διπλασιασθείς. Λέγω⁴ ὅτι καὶ μόνον. Εκκείσθω γὰρ μονάς ἡ Ε⁵. Επεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ. Καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἀρτίος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι⁶ ἑκάτερος τῶν Α, Β, Γ ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

A binario duplatorum numerorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotcunque numeri B, Γ, Δ; dico B, Γ, Δ pariter pares esse tantum.

At vero unumquemque ipsorum B, Γ, Δ pariter parem esse, manifestum est; a binario enim est duplatus. Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, et post unitatem ipse A primus est, maximus ipsorum A, B, Γ, Δ ipse Δ a nullo alio mensurabitur, nisi ab ipsis A, B, Γ. Atque est unusquisque ipsorum A, B, Γ par; ergo Δ pariter par est tantum. Similiter utique demonstrabimus unumquemque ipsorum A, B, Γ pariter parem esse tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXII.

Chacun des nombres doubles, à partir du binaire, est pairement pair seulement.

Qu'à partir du binaire A, soient tant de nombres doubles qu'on voudra B, Γ, Δ; je dis que les nombres B, Γ, Δ sont pairement pairs seulement.

Il est évident que chacun des nombres B, Γ, Δ est pairement pair (déf. 8. 7); car chacun est double à partir du binaire. Je dis qu'il l'est seulement. Car soit l'unité E. Puisqu'à partir de l'unité, on aura autant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que A est le premier après l'unité, le plus grand des nombres A, B, Γ, Δ, qui est Δ, ne sera mesuré par aucun nombre, si ce n'est par A, B, Γ (13. 9). Mais chacun des nombres A, B, Γ est pair; donc Δ est pairement pair seulement. Nous démontrerons semblablement que chacun des nombres A, B, Γ est pairement pair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

PROPOSITIO XXXIII.

Εὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχη περισσὸν, ἀρτιά-
κῃς περισσὸς ἔστι μόνον.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυν ἔχεται περισσόν·
λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκῃς περισσὸς ἔστι μόνον.

Si numerus dimidium habet imparem, pariter
impar est tantum.

Numerus enim A dimidium habeat imparem ;
dico A pariter imparem esse tantum.

A.

Οτι μὲν οὖν ἀρτιάκῃς περισσὸς ἔστι, φανερόν·
ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν
ἀρτιάκῃς. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται
ὁ Α καὶ ἀρτιάκῃς ἄρτιος¹, μετρηθήσεται ὑπ'
ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς
αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ, πε-
ρισσὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπον· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκῃς
περισσὸς ἔστι μόνον. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

At vero pariter imparem esse, manifestum
est; dimidium enim ipsius impar existens meti-
tur ipsum pariter. Dico utique et tantum. Si enim
esset A et pariter par, mensuraretur a pari per
parem numerum; quare et dimidium ipsius
mensurabitur a pari numero, impar existens,
quod est absurdum; ergo A pariter impar est
tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impaire, ce nombre est pairement impair seu-
lement.

Que la moitié du nombre A soit impaire; je dis que A est pairement impair
seulement.

Il est évident qu'il est pairement impair (déf. 9. 7); car sa moitié, qui est im-
paire, le mesure par un nombre pair. Je dis qu'il l'est seulement. Car si A était
aussi pairement pair, un nombre pair le mesurerait par un nombre pair (déf. 8. 7);
donc sa moitié qui est impaire, serait mesurée par un nombre pair; ce qui est
absurde; donc A est pairement impair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

PROPOSITIO XXXIV.

Εὰν ἄρτιος¹ ἀριθμὸς μῆτε τῶν ἀπὸ δυάδος² διπλασιαζομένων ἢ, μῆτε τὸν ἥμισυν ἔχη περισσόν· ἀρτιάκιςτε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μῆτε τῶν ἀπὸ δυάδος³ διπλασιαζομένων ἔστω, μῆτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκιςτε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Α.

Οτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν⁴. Εὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν⁵ δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦμεν⁶, καταστήσομεν εἰς τινα ἀριθμόν⁷ περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ οὐ, καταστήσομεν εἰς δυάδα⁸, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος⁹ διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ Α¹⁰ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν. Εδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκιςτε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. Ὅπερ ἔδει δεῖξει.

Si par numerus neque est a binario unus ex duplatis, neque dimidium habet imparem; et pariter par est, et pariter impar.

Numerus enim Α neque sit a binario unus ex duplatis, neque dimidium habeat imparem; dico Α pariter esse parem, et pariter imparem.

At vero pariter Α esse parem, manifestum est; dimidium enim non habet imparem. Dico utique et pariter imparem esse. Si enim ipsum Α secamus bifariam, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper facimus, incidemus in aliquem numerum imparem, qui metietur ipsum Α per parem numerum. Si enim non, incidemus in binarium, et erit Α a binario unus ex duplatis, quod non supponitur; quare Α pariter impar est. Ostensum est autem et pariter parem; ergo Α et pariter par est, et pariter impar. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIV.

Si un nombre, à partir du binaire, n'est pas un de ceux qui sont doubles, et si sa moitié n'est point impaire, il est parement pair et parement impair.

Que le nombre Α, à partir du binaire, ne soit pas un de ceux qui sont doubles, et que sa moitié ne soit point impaire; je dis que Α est parement pair et parement impair.

Or, il est évident que Α est parement pair (déf. 8. 7), puisque sa moitié n'est pas impaire. Je dis de plus que Α est parement impair; car si nous partageons Α en deux parties égales, et sa moitié en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, nous arriverons à quelque nombre impair qui mesurera Α par un nombre pair. Car si cela n'est point, nous arriverons au nombre binaire, et Α sera, à partir du binaire, un des nombres qui sont doubles, ce qui n'est pas supposé; donc Α est parement impair. Mais on a démontré qu'il est parement pair; donc Α est parement pair et parement impair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΙ΄.

Εάν ὧσιν ὁσοῖδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἰζῆς ἀνάλογον, ἀφαιριθῶσι δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἰσχατοῦ ἴσοι τῷ πρώτῳ ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρώτον, οὕτως ἡ τοῦ ἰσχατοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.

Εστωσαν ὁποσοῖδηποτοῦν³ ἀριθμοὶ ἰζῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ὑπὸ ἑλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφαιρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Α.
Β. . . . Η. Γ
Δ.
Ε. Α. Κ. Θ. Ζ

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἔστιν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος ἐστί· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἔστιν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α,

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, auferuntur autem et a secundo et ab ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, incipientes a minimo Α, et auferatur a ΒΓ et ab ΕΖ ipsi Α æqualis, uterque ipsorum ΗΓ, ΖΘ; dico esse ut ΒΗ ad Α ita ΕΘ ad Α, ΒΓ, Δ.

Ponatur enim ipsi quidem ΒΓ æqualis ΖΚ, ipsi autem Δ æqualis ΖΛ. Et quoniam ΖΚ ipsi ΒΓ æqualis est, quorum ΖΘ ipsi ΗΓ æqualis est; reliquus igitur ΘΚ reliquo ΗΒ est æqualis. Et quoniam est ut ΕΖ ad Δ ita Δ ad ΒΓ et ΒΓ

PROPOSITION XXXV.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ successivement proportionnels, à commencer du plus petit Α, et retranchons de ΒΓ et de ΕΖ les nombres ΗΓ, ΖΘ égaux chacun à Α; je dis que ΒΗ est à Α comme ΕΘ est à la somme des nombres Α, ΒΓ, Δ.

Faisons ΖΚ égal à ΒΓ, et ΖΛ égal à Δ. Puisque ΖΚ est égal à ΒΓ, et que ΖΘ est égal à ΗΓ, le reste ΘΚ est égal au reste ΗΒ. Et puisque ΕΖ est à Δ comme Δ est à ΒΓ

ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ $ΖΑ$, ὁ δὲ $ΒΓ$ τῷ $ΖΚ$, ὁ δὲ $Α$ τῷ $ΖΘ$ · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΕΖ$ πρὸς τὸν $ΑΖ$ οὕτως ὁ $ΑΖ$ πρὸς τὸν $ΖΚ$, καὶ ὁ $ΚΖ$ πρὸς τὸν $ΖΘ$ · διελόντι, ὡς ὁ $ΕΑ$ πρὸς τὸν $ΑΖ$ οὕτως ὁ $ΑΚ$ πρὸς τὸν $ΖΚ$, καὶ ὁ $ΚΘ$ πρὸς τὸν $ΖΘ$ · ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἰπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἰπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΚΘ$ πρὸς τὸν $ΖΘ$ οὕτως οἱ $ΕΑ$, $ΑΚ$, $ΚΘ$ πρὸς τοὺς $ΑΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$. Ἰσος δὲ ὁ μὲν $ΚΘ$ τῷ $ΒΗ$, ὁ δὲ $ΖΘ$ τῷ $Α$, οἱ δὲ $ΑΖ$, $ΚΖ$, $ΖΘ$ τοῖς Δ , $ΒΓ$, $Α$ · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΒΗ$ πρὸς τὸν $Α$ οὕτως ὁ $ΕΘ$ πρὸς τοὺς Δ , $ΒΓ$, $Α$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἰσχύτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad A , æqualis autem Δ ipsi $ΖΑ$, ipse et $ΒΓ$ ipsi $ΖΚ$, ipse et A ipsi $ΖΘ$; est igitur ut $ΕΖ$ ad $ΑΖ$ ita $ΑΖ$ ad $ΖΚ$, et $ΚΖ$ ad $ΖΘ$; dividendo, ut $ΕΑ$ ad $ΑΖ$ ita $ΑΚ$ ad $ΖΚ$, et $ΚΘ$ ad $ΖΘ$; est igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut $ΚΘ$ ad $ΖΘ$ ita $ΕΑ$, $ΑΚ$, $ΚΘ$ ad $ΑΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$. Æqualis autem $ΚΘ$ ipsi quidem $ΒΗ$, ipse vero $ΖΘ$ ipsi A , et $ΑΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$ ipsis Δ , $ΒΓ$, A ; est igitur ut $ΒΗ$ ad A ita $ΕΘ$ ad Δ , $ΒΓ$, A ; est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes. Quod oportebat ostendere.

et comme $ΒΓ$ est à A ; que Δ est égal à $ΖΑ$; que $ΒΓ$ est égal à $ΖΚ$, et A égal à $ΖΘ$, le nombre $ΕΖ$ est à $ΖΑ$ comme $ΑΖ$ est à $ΖΚ$, et comme $ΚΖ$ est à $ΖΘ$; donc par soustraction, $ΕΑ$ est à $ΑΖ$ comme $ΑΚ$ est à $ΖΚ$, et comme $ΚΘ$ est à $ΖΘ$; donc un des antécédents est à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12.7); donc $ΚΘ$ est à $ΖΘ$ comme la somme des nombres $ΕΑ$, $ΑΚ$, $ΚΘ$ est à la somme des nombres $ΑΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$. Mais $ΚΘ$ est égal à $ΒΗ$, $ΖΘ$ à A , et la somme des nombres $ΖΑ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$ à la somme des nombres Δ , $ΒΓ$, A ; donc $ΒΗ$ est à A comme $ΕΘ$ est à la somme des nombres Δ , $ΒΓ$, A ; donc l'excès du second est au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

PROPOSITIO XXXVI.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκ-
τιθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ
σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γίνηται, καὶ ὁ σύμπαρ
ἐπὶ τὴν ἰσχυάτον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινὰ
ὁ γινόμενος τέλειος ἔσται.

Απὸ γὰρ μονάδος ἐκκείμεθωσαν ὅσοιδηποτοῦν
ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ
σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γίνηται, οἱ A, B, Γ, Δ ,
καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ E , καὶ ὁ E τὸν
 Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ
 ZH τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γὰρ εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ τῷ πλήθει το-
σοῦτοι ἀπὸ τοῦ E εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι
ἀναλογίᾳ, οἱ $E, \Theta K, \Lambda, M$ · δίσκου ἄρα ἐστὶν
ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν M · ὁ
ἄρα ἐκ τῶν E, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν A, M . Καὶ
ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν E, Δ ὁ ZH · καὶ ὁ ἐκ τῶν A, M

Si ab unitate quocunque numeri deinceps
exponentur in duplâ analogiâ, quoad totus
compositus primus fiat, et totus in ultimum
multiplicatus faciat aliquem; factus perfec-
tus erit.

Ab unitate enim exponentur quocunque nu-
meri A, B, Γ, Δ in duplâ analogiâ, quoad totus
compositus primus fiat, et toti æqualis sit ipse
 E , et E ipsum Δ multiplicans ipsum ZH faciat;
dico ZH perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, Γ, Δ multitudine tot
ab ipso E sumantur ipsi $E, \Theta K, \Lambda, M$ in du-
plâ analogiâ; ex æquo igitur est ut A ad Δ
ita E ad M ; ipse igitur ex E, Δ æqualis est ipsi
ex A, M . Et est ipse ex E, Δ ipse ZH ; et

PROPOSITION XXXVI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra A, B, Γ, Δ suc-
cessivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme de-
viègne un nombre premier; que E soit égal à leur somme, et que E multipliant
 Δ fasse ZH ; je dis que ZH est un nombre parfait.

Car, à partir de E , prenons une quantité de nombres, en raison double, qui
soit égale à celle des nombres A, B, Γ, Δ ; que ces nombres soient $E, \Theta K, \Lambda, M$;
par égalité, A sera à Δ comme E est à M (14. 7); donc le produit de E par Δ sera
égal au produit de A par M (19. 7). Mais le produit de E par Δ est ZH ; donc le

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 107

ἄρα ἴσιν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλα-
 σιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ με-
 τρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Καὶ ἴστι δυνάς
 ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἴστιν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἰσὶ δὲ
 καὶ οἱ Μ, Α, ΘΚ, Ε ἱζῆς διπλάσιοι ἀλλήλων·
 οἱ Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ ἄρα ἱζῆς ἀνάλογόν εἰσιν

ipse ex Α, Μ igitur est ΖΗ; ergo Α ipsum Μ
 multiplicans ipsum ΖΗ fecit; ergo Μ ipsum
 ΖΗ metitur per unitates quæ in Α. Atque est
 binarius Α; duplus igitur est ΖΗ ipsius Μ. Sunt
 autem et Μ, Α, ΘΚ, Ε deinceps dupli inter se;
 ergo Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ deinceps proportionales

1.	Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.	Δ, 16.
		62		
	Ε, 31.	Θ	Ν	Κ
		31	31	
	Ζ	Ζ	496	Η
	31		465	
	Π-----		Ο-----	

ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Αφηρέσθω δὲ ἀπὸ
 τοῦ διυτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἰσχατοῦ τοῦ ΖΗ
 τῶ πρώτῃ τῷ Ε ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ·
 ἴστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ διυτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ
 πρὸς τὸν πρώτον οὕτως ἡ τοῦ ἰσχατοῦ ὑπεροχὴ
 πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτῷ πάντας· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ
 ΝΚ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Α,
 ΘΚ, Ε. Καὶ ἴστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ
 ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Α, ΘΚ, Ε. Εστί δὲ καὶ

sunt in duplâ analogiâ. Auferatur igitur a se-
 cundo ΘΚ et ab ultimo ΖΗ ipsi primo Ε
 æqualis, uterque ipsorum ΘΝ, ΖΞ; est igitur ut
 secundi numeri excessus ad primum ita ex-
 cessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes;
 est igitur ut ΝΚ ad Ε ita ΞΗ ad Μ, Α, ΘΚ, Ε.
 Et est ΝΚ æqualis ipsi Ε; et ΞΗ igitur æqualis
 est ipsis Μ, Α, ΘΚ, Ε. Est autem et ΞΖ ipsi

produit de Α par Μ est aussi ΖΗ; donc Α multipliant Μ fait ΖΗ; donc Μ mesure ΖΗ
 par les unités qui sont en Α. Mais Α est le nombre binaire; donc ΖΗ est double
 de Μ; mais les nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε sont successivement doubles les uns des autres;
 donc Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ sont successivement proportionnels en raison double. Retran-
 chons du second ΘΚ et du dernier ΖΗ, les nombres ΘΝ, ΖΞ égaux chacun
 au premier Ε; l'excès du second nombre sera au premier comme l'excès du
 dernier est à la somme des nombres qui sont avant lui (35. 9); donc ΝΚ est à Ε
 comme ΞΗ est à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΝΚ est égal à Ε; donc
 ΞΗ est égal à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΞΖ est égal à Ε, et Ε

108 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ΞZ τῷ E ἴσος, ὁ δὲ E τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ZH ἴσος ἐστὶ τοῖς $\tau\epsilon\ \epsilon, \Theta K, \Lambda, M$ καὶ τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω ὅτι ὁ καὶ $^3 ZH$ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρεῖτω τις τὸν ZH ὁ O , καὶ ὁ O μηδενὶ τῶν $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ ἴστω ὁ αὐτός. Καὶ

E æqualis, sed E ipsis A, B, Γ, Δ et unitati; totus igitur ZH æqualis est et ipsis $E, \Theta K, \Lambda, M$ et ipsis A, B, Γ, Δ et unitati, et mensuratur ab ipsis. Dico et ZH a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ et ab unitate. Si enim possibile, metiatur aliquis O ipsum ZH , et ipse O cum nullo ipsorum $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ sit idem. Et quoties O ipsum

1.	A, 2.		B, 4.		Γ, 8.		Δ, 16.
			64				
	E, 31.	Θ	N	K		Λ, 124.	M, 248.
		31	31				
	Z	E	496				H
		31		465			
	Π-----			O-----			

ἰσάκεις ὁ O τὸν ZH μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Π · ὁ Π ἄρα τὸν O πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ . Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ , ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A πρῶτός ἐστιν· ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ με-

ZH metitur tot unitates sint in Π ; ergo Π ipsum O multiplicans ipsum ZH fecit. At vero quidem E ipsum Δ multiplicans ipsum ZH fecit; est igitur ut E ad Π ita O ad Δ . Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A, B, Γ, Δ , sed post unitatem ipse A primus est; ergo Δ a nullo alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis

égal à la somme des nombres A, B, Γ, Δ augmentée de l'unité; donc ZH tout entier égale la somme des nombres $E, \Theta K, \Lambda, M$ augmentée de la somme des nombres A, B, Γ, Δ et de l'unité, et ZH est mesuré par tous ces nombres (11. 9). Je dis que ZH n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par les nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ et par l'unité. Car si cela est possible, que quelque nombre O mesure ZH , et que O ne soit aucun des nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$. Qu'il y ait dans Π autant d'unités que O mesure de fois ZH ; le nombre Π multipliant O fera ZH . Mais E multipliant Δ fait ZH ; donc E est à Π comme O est à Δ (19. 7). Et puisque, à partir de l'unité, les nombres A, B, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que le premier nombre après l'unité est A , le nombre Δ n'est mesuré par aucun

τριηθίσται, πάρειξ τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδὲν τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσῃ ὁ Ο τὸν Δ. Αλλ' ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ οὕτως⁶ ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν⁷ ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν⁸· οἱ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς⁹ ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ο δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρειξ τῶν Α, Β, Γ· ὁ Π ἄρα ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Εστω τῷ Β ὁ αὐτός. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Β, Γ, Δ τῷ πλείνι τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε, οἱ Ε, ΘΚ, Λ. Καί εἰσιν οἱ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δίστου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως¹⁰ ὁ Ε πρὸς τὸν Λ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Ε. Αλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Λ· ἔστιν ἄρα

Α, Β, Γ; et supponitur Ο cum nullo ipsorum Α, Β, Γ idem; non igitur metietur Ο ipsum Δ. Sed ut Ο ad Δ ita Ε ad Π; neque Ε igitur ipsum Π metitur. Et est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Π primi inter se sunt. Sed primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; et est ut Ε ad Π ita Ο ad Δ; æqualiter igitur Ε ipsum Ο metitur atque Π ipsum Δ. Sed Δ a nullo alio mensuratur, nisi ab ipsis Α, Β, Γ; ergo Π cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Sit cum ipso Β idem. Et quot sunt Β, Γ, Δ multitudine tot sumantur Ε, ΘΚ, Λ ab ipso Ε. Et sunt Ε, ΘΚ, Λ cum ipsis Β, Γ, Δ in eadem ratione; ex æquo igitur est ut Β ad Δ ita Ε ad Λ; ipse igitur ex Β, Λ æqualis est ipsi ex Δ, Ε. Sed ipse ex Δ, Ε æqualis est ipsi ex Π, Ο; et ipse ex Π, Ο igitur æqualis est ipsi ex Β, Λ; est igitur ut Π ad Β ita Δ ad Ο.

autre nombre que par Α, Β, Γ (13. 9); mais on a supposé que Ο n'est aucun des nombres Α, Β, Γ; donc Ο ne mesure pas Δ. Mais Ο est à Δ comme Ε est à Π; donc Ε ne mesure pas Π (déf. 21. 7). Mais Ε est un nombre premier, et tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); donc les nombres Ε, Π sont premiers entre eux. Mais les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), et Ε est à Π comme Ο est à Δ; donc Ε mesure Ο autant de fois que Π mesure Δ. Mais Δ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par Α, Β, Γ; donc Π est un des nombres Α, Β, Γ. Qu'il soit Β. A partir de Ε, prenons les nombres Ε, ΘΚ, Λ égaux en quantité aux nombres Β, Γ, Δ. Mais les nombres Ε, ΘΚ, Λ sont en même raison que les nombres Β, Γ, Δ; donc, par égalité, Β est à Δ comme Ε est à Λ; donc le produit de Β par Λ est égal au produit de Δ par Ε (19. 7). Mais le produit de Δ par Ε est égal au produit de Π par Ο; donc le produit de Π par Ο est égal au produit

110 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ὁ Π πρὸς τὸν B οὕτως¹¹ ὁ Λ πρὸς τὸν O . Καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ B ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ O ἔστιν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ O ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ZH μετρεῖ τις ἀριθμός, πάρειξ τῶν $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ εἰδείχθη ὁ ZH τοῖς $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$, καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεισιν ἴσος ὢν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ZH . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et est Π cum ipso B idem; et Λ igitur cum ipso O est idem, quod impossibile, etenim O supponitur cum nullo ipsorum expositorum idem; non igitur ipsum ZH metitur aliquis numerus, præter ipsos $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ et unitatem. Et ostensus est ZH ipsis $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$, et unitati æqualis; perfectus autem numerus est suis ipsius partibus æqualis existens; perfectus igitur est ZH . Quod oportebat ostendere.

de B par Λ ; donc Π est à B comme Λ est à O (19. 7). Mais Π est le même que B ; donc Λ est le même que O , ce qui est impossible; car on a supposé que O n'était aucun des nombres A, B, Γ ; donc aucun nombre ne mesure ZH , si ce ne sont les nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ et l'unité. Mais on a démontré que ZH égale la somme des nombres $A, B, \Gamma, \Delta, E, \Theta K, \Lambda, M$ augmentée de l'unité, et un nombre parfait est celui qui est égal à ses parties (déf. 23. 7); donc ZH est un nombre parfait. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU NEUVIÈME LIVRE.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρήται.

DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eâdem mensurâ mensurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mensurantur.

LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.

δ'. Ασύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γινέσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δέικνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει¹· καλεῖσθω οὖν ἡ μὲν προτεθείσα εὐθεῖα, ῥητή.

ς'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴ τε μήκει καὶ δυνάμει, εἴ τε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλεῖσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα³, ἄλογα καλεῖσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμειναι αὐτὰ, ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνά⁴ εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἑτέρα τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα⁵ αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocentur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le quarré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α΄.

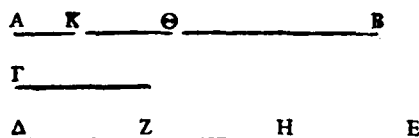
PROPOSITIO I.

Δύο μεγεθῶν ἀνίστων ἐκκειμένων, ἰὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίγνεται· λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἴσται ἥλασσον τοῦ ἑκκειμένου ἥλασσονος μεγέθους.

Εστω δύο μεγέθη ἀνίστα τὰ AB, Γ, ὧν μείζον τὸ AB· λέγω ὅτι ἰὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος ὃ ἴσται ἥλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB; dico si ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relictum iri quamdam magnitudinem quæ erit minor magnitudine Γ.



Τὸ Γ γὰρ³ πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὶ τοῦ AB⁴ μείζον. Πιπολλαπλασιάσθω, καὶ ἴστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλασίον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ

Etenim Γ multiplicata erit aliquando ipsâ AB minor. Multiplicetur, et sit ΔΕ ipsius quidem Γ multiplex, ipsâ autem AB major, et dividatur ΔΕ in partes ipsi Γ æquales ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, et auferatur ab AB quidem ipsa ΒΘ major quam

PROPOSITION I.

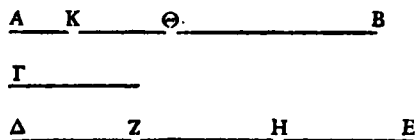
Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.

Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔΕ soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔΕ en parties ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie ΒΘ

114 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο αἰὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεων· ἴστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὔσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.



Καὶ ἐπεὶ μείζον ἴστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῆ-
ρται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἕλασσαν τοῦ ἡμίσεως⁵
τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ⁶ τὸ
ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μείζον
ἴστι. Καὶ ἐπεὶ μείζον ἴστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ
ἀφῆρται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ
μείζον ἢ τὸ ἥμισυ⁷ τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ
λοιποῦ τοῦ ΑΚ μείζον ἴστιν. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ
Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μείζον ἴστιν. Ἐλασσαν
ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ
ΑΒ μέγεθος τὸ ΑΚ μέγεθος ἕλασσαν ὃν τοῦ ἐκ-
κειμένου ἕλασσονος μεγέθους τοῦ Γ. Ὅπερ εἶδει
δείξαι.

dimidium ΒΘ, ab ΑΘ autem ipsa ΘΚ major quam
dimidium, et hoc semper fiat quoad divisiones
ipsius ΑΒ multitudine æquales fiant ipsius ΔΕ
divisionibus; sint igitur divisiones ΑΚ, ΚΘ,
ΘΒ multitudine æquales ipsis ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Et quoniam major est ΔΕ quam ΑΒ, et ablata
est ab ΔΕ quidem ipsa ΕΗ minor quam dimi-
dium, ab ΑΒ autem ipsa ΒΗ major quam di-
midium; reliquum igitur ΗΔ reliquo ΘΑ majus
est. Et quoniam major est ΗΔ quam ΘΑ, et
ablatum est ab ipsâ quidem ΗΔ dimidium ΗΖ,
ab ΘΑ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium;
reliquum igitur ΔΖ reliquo ΑΚ majus est. Æqua-
lis autem ΔΖ ipsi Γ; et Γ igitur quam ΑΚ major
est. Minor igitur ΑΚ quam Γ; relicta est igitur
ex magnitudine ΑΒ magnitudo ΑΚ minor exis-
tens expositâ minore magnitudine Γ. Quod oport-
tebat ostendere.

plus grande que sa moitié, de ΑΘ une partie ΘΚ plus grande que sa moitié, et
faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de ΑΒ
soit égal au nombre des divisions de ΔΕ; que le nombre des divisions ΑΚ, ΚΘ,
ΘΒ soit donc égal au nombre des divisions ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Puisque ΔΕ est plus grand que ΑΒ, et qu'on a retranché de ΔΕ une partie
ΕΗ plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de ΑΒ une partie ΒΘ plus grande
que sa moitié, le reste ΗΔ est plus grand que le reste ΘΑ. Et puisque ΗΔ est
plus grand que ΘΑ, qu'on a retranché de ΗΔ sa moitié ΗΖ, et que de ΘΑ
on a retranché ΘΚ plus grand que sa moitié, le reste ΔΖ sera plus grand que
le reste ΑΚ. Mais ΔΖ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que ΑΚ; donc ΑΚ
est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur ΑΒ une grandeur ΑΚ plus
petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il
fallait démontrer.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 115

Ομοίως δὲ διχθίσινται, καὶ ἡμίση⁸ ἢ τὰ ἀφαιρούμενα⁹.

Similiter autem demonstrabitur, et si dimidia essent ablata.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

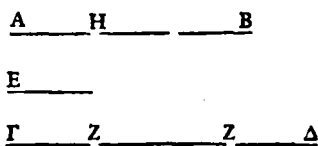
PROPOSITIO II.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρήῃ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἴσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων¹ ἀνίσων τῶν AB, ΓΔ, καὶ² ἐλάσσονος τοῦ AB, ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖται τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἴσται τὰ AB, ΓΔ μεγέθη.

Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

Duabus enim magnitudinibus existentibus inæqualibus AB, ΓΔ, et minore AB, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metiatur præcedentem; dico incommensurabiles esse AB, ΓΔ magnitudines.



Εἰ γὰρ ἴσται σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται εἰ δυνατόν, καὶ ἴστω τὸ³ Ε· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω

Si enim sunt commensurabiles, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, si possibile, et sit E; et AB quidem ipsam ΔΖ metiens relinquat

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

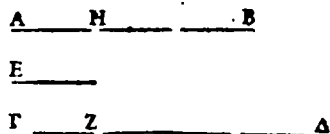
Soient les deux grandeurs inégales AB, ΓΔ; que AB soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; je dis que les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables.

Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit E; que AB mesurant ΔΖ

116 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ κατα-
μετροῦν λιπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ
τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λιφθῇ τι μέγιστος,
ὃ ἐστὶν ἔλασσον τοῦ Ε. Γεγονέντω, καὶ λελείφθω
τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ
μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ καὶ τὸ Ε ἄρα

se ipsâ minorem ΓΖ; sed ΓΖ ipsam ΒΗ metiens
relinquat se ipsâ minorem ΑΗ, et hoc semper
fiat, quoad relinquatur aliqua magnitudo, quæ
sit minor quam Ε. Fiat, et relinquatur ΑΗ minor
quam Ε. Quoniam igitur Ε ipsam ΑΒ metitur, sed
ΑΒ ipsam ΔΖ metitur; et Ε igitur ipsam ΔΖ



τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ
λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ
μετρεῖ καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ
καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει,
τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ἔπὶ ἐστὶν ἄδύνατον.
Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μέγιστοι μετρήσει τι μέγιστος·
ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μέγιστοι.

metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam
igitur ΓΖ metietur. Sed ΓΖ ipsam ΒΗ metitur;
et Ε igitur ipsam ΒΗ metitur. Metitur autem et
totam ΑΒ; et reliquam igitur ΑΗ metietur,
major minorem, quod est impossibile. Non
igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ metietur aliqua
magnitudo; incommensurabiles igitur sunt mag-
nitudines ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duabus magnitudinibus, etc.

laisse ΓΖ plus petit que lui; que ΓΖ mesurant ΒΗ laisse ΑΗ plus petit que lui; que
l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui
soit plus petite que Ε. Que cela soit fait, et qu'il reste ΑΗ plus petit que Ε
(1. 10). Puisque Ε mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΔΖ, Ε mesurera ΔΖ. Mais Ε
mesure ΓΔ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΓΖ. Mais ΓΖ mesure ΒΗ; donc
Ε mesure ΒΗ. Mais Ε mesure ΑΒ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΑΗ, le plus
grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les
grandeurs ΑΒ, ΓΔ; donc les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Δύο μεγέθων συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἐστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα¹ τὰ AB, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ AB· δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.



Τὸ AB γὰρ μέγεθος ἥτοι² μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὐ. Εἰ μὲν οὖν³ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ αὐτό· τὸ AB ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον⁴· μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖται δὴ τὸ AB τὸ ΓΔ· καὶ ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος⁵ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπούμενον μετρήσει ποτὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ,

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB; oportet igitur ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

Etenim AB magnitudo vel metitur ΓΔ vel non. Si quidem metitur, metitur autem et se ipsam; ergo AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est, et manifestum est etiam maximam; major enim magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Non metiatur autem AB ipsam ΓΔ; et deducta semper minore de majore, reliqua metietur aliquando præcedentem, propterea

PROPOSITION III.

Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (2. 10), parce que les

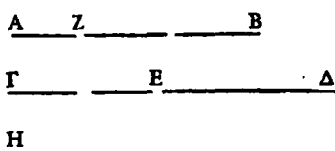
118 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΕΔ⁶ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ ΑΖ δὲ⁷ τὸ ΓΕ μετρεῖται.

Επεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ

quod non sint incommensurabiles AB, ΓΔ; et AB quidem ipsam ΕΔ metiens relinquat se ipsā minorem ΕΓ, sed ΕΓ ipsam ΖΒ metiens relinquat se ipsā minorem ΑΖ, et ΑΖ ipsam ΓΕ metiatur.

Quoniam igitur ΑΖ ipsam ΓΕ metitur, sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et se ipsam; et totam igitur ΑΒ metietur ipsa ΑΖ. Sed ΑΒ ipsam ΔΕ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΔΕ metietur. Metitur autem et ipsam ΓΕ; et totam igitur ΓΔ me-



AB, ΓΔ μετρεῖ⁸. τὸ ΑΖ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ AB, ΓΔ. Εστω⁹ τὸ Η. Επεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ¹⁰ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν¹¹ τὸ

titur; ergo ΑΖ ipsas AB, ΓΔ metitur; ergo ΑΖ ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non, erit aliqua magnitudo major ipsā ΑΖ, quæ metietur ipsas AB, ΓΔ. Sit Η. Quoniam igitur Η ipsam ΑΒ metitur, sed ΑΒ ipsam ΕΔ metitur; et Η igitur ipsam ΕΔ metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam igitur ΓΕ metietur Η. Sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et Η igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et totam ΑΒ; et reliquam

grandeurs AB, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que AB mesurant ΕΔ laisse ΕΓ plus petit que lui; que ΕΓ mesurant ΖΒ laisse ΑΖ plus petit que lui, et enfin que ΑΖ mesure ΓΕ.

Puisque ΑΖ mesure ΓΕ, et que ΓΕ mesure ΖΒ, ΑΖ mesurera ΖΒ. Mais ΑΖ se mesure lui-même; donc ΑΖ mesurera ΑΒ tout entier. Mais ΑΒ mesure ΔΕ; donc ΑΖ mesurera ΔΕ. Mais il mesure ΓΕ; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc ΑΖ mesure les grandeurs AB, ΓΔ; donc ΑΖ est une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que ΑΖ qui mesurera ΑΒ et ΓΔ. Qu'elle soit Η. Puisque Η mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΕΔ, Η mesurera ΕΔ. Mais Η mesure ΓΔ tout entier; donc Η mesurera le reste ΓΕ. Mais ΓΕ mesure ΖΒ; donc Η mesurera ΖΒ. Mais il mesure ΑΒ tout entier; il mesurera donc le reste ΑΖ, le plus grand le

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 119

AZ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μείζον τι μέγεθος τοῦ AZ τὰ AB, ΓΔ¹² μετρήσει· τὸ AZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν AB, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται τὸ AZ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

igitur AZ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur major aliqua magnitudo ipsā AZ ipsas AB, ΓΔ metietur; ergo AZ ipsarum AB, ΓΔ maxima communis mensura est.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB, ΓΔ, maxima communis mensura inventa est AZ. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que AZ ne mesurera pas AB et ΓΔ; donc AZ est la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure AZ des deux grandeurs commensurables données AB, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROPOSITION IV.

Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

120 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ
Α, Β, Γ· διτὶ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν
μέτρον εὐρεῖν.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles
Α, Β, Γ; oportet igitur ipsarum Α, Β, Γ maximam
communem mensuram invenire.

Α _____
Β _____
Γ _____
Δ _____
Ε _____

Εἰλήφθω γὰρ δύοι τῶν Α, Β τὸ μέγιστον
κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ
ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ². Μετρίτω πρότερον. Ἐπεὶ
οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β·
τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ³. τὸ Δ ἄρα τῶν
Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερόν ὅτι
καὶ μέγιστον, μᾶλλον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ
Α, Β οὐ μετρεῖ⁵.

Μὴ μετρίτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον
ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-
μετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέ-
γεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε
καὶ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ με-
τρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον
μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ

Sumatur enim duarum Α, Β maxima com-
munis mensura, et sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel
metitur vel non. Metiatur primum. Quoniam
igitur Δ ipsam Γ metitur, metitur autem et ipsas
Α, Β; ergo Δ ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Δ
ipsarum Α, Β, Γ communis mensura est. Mani-
festum est etiam et maximam, major enim mag-
nitudine Δ ipsas Α, Β non metitur.

Sed non metiatur Δ ipsam Γ. Dico primum
commensurabiles esse Γ, Δ. Quoniam enim
commensurabiles sunt Α, Β, Γ, metietur aliqua
eas magnitudo, quæ scilicet et ipsas Α, Β me-
tiatur; quare et ipsarum Α, Β maximam com-
munem mensuram Δ metietur. Metitur autem
et Γ; quare dicta magnitudo metietur ipsas Γ, Δ;

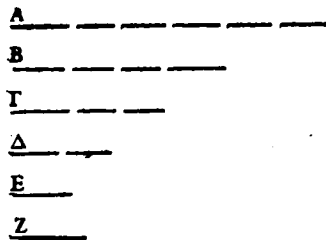
Soient Α, Β, Γ les trois grandeurs commensurables données; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ.

Prenons la plus grande commune mesure de Α et de Β (3. 10), et qu'elle soit Δ; Δ mesure Γ ou ne le mesure pas. Qu'il le mesure d'abord. Puisque Δ mesure Γ, et qu'il mesure aussi Α et Β, Δ mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Δ est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Et il est évident qu'il en est la plus grande, car une grandeur plus grande que Δ ne mesure pas Α et Β.

Mais que Δ ne mesure pas Γ; je dis d'abord que les grandeurs Γ, Δ sont commensurables. Car puisque les grandeurs Α, Β, Γ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera; mais cette même grandeur mesurera Α et Β; elle mesurera donc leur plus grande commune mesure Δ. Mais cette même grandeur mesure Γ; donc elle mesure Γ et Δ; donc Γ et Δ sont commensurables

τὰ Γ, Δ. Εἰλήφθω οὖν⁶ αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει⁷. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ⁸. τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν ἐστὶ μέτρον⁹. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε

commensurabiles igitur sunt Γ, Δ. Sumatur itaque ipsarum maxima communis mensura, et sit Ε. Quoniam igitur Ε ipsam Δ metitur, sed Δ ipsas Α, Β metitur; et Ε igitur ipsas Α, Β metitur. Metitur autem et Γ. Ergo Ε ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ communis est mensura. Dico et maximam. Si enim possibile, sit



μειζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρεῖται τὰ Α, Β, Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα¹⁰ μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β¹¹ μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ¹², τὸ μειζον τὸ ἑλάσσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

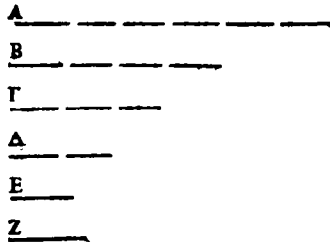
aliqua ipsa Ε major magnitudo Ζ, et metiatur ipsas Α, Β, Γ. Et quoniam Ζ ipsas Α, Β, Γ metitur, et ipsas Α, Β igitur metietur; et ipsarum Α, Β maximam communem mensuram metietur. Sed ipsarum Α, Β maxima communis mensura est Δ; ergo Ζ ipsam Δ metitur. Metitur autem et ipsam Γ; ergo Ζ ipsas Γ, Δ metitur; et igitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram metietur Ζ. Sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ergo Ζ ipsam Ε metitur, major minorem, quod est

(déf. 1. 10). Prenons donc leur plus grande commune mesure (3. 10), et qu'elle soit Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure Α et Β, Ε mesurera Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Je dis aussi qu'elle en est la plus grande. Car que ce soit Ζ plus grand que Ε, si cela est possible, et que Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ. Puisque Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ, il mesurera Α et Β; il mesurera donc la plus grande commune mesure de Α et Β (cor. 3. 10). Mais la plus grande commune mesure de Α et de Β est Δ; donc Ζ mesure Δ; mais il mesure Γ; donc Ζ mesure Γ et Δ; donc Ζ mesurera la plus grande commune mesure de Γ et de Δ. Mais la plus grande commune mesure de Γ et de Δ est Ε; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc une

122 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα μεῖζον τι τοῦ Ε μεγίθους μέγιστος τὰ Α, Β, Γ μεγίθων¹³ μετρεῖ τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέ-

impossibile; non igitur major aliqua ipsâ Ε magnitudine magnitudo ipsas Α, Β, Γ magnitudines



γιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἰὰν¹⁴ μὴ μετρή τὸ Δ τὸ Γ· ἰὰν δὲ μετρή, αὐτὸ τὸ Δ.

metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ maxima communis mensura est, si non metitur Δ ipsam Γ; si autem metitur, ipsa Δ.

Τριῶν ἄρα μεγιθῶν συμμέτρων δοθέντων¹⁵, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima communis mensura inventa est. Quod oportebat facere.

ΗΘΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἰὰν μέγιστος τρία μεγίθη μετρή, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσῃ¹⁶.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλείονων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον λαμβάνεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσῃ¹⁷.

Similiter autem et in pluribus maxima communis mensura inveniatur, et corollarium procedet.

grandeur plus grande que la grandeur Ε ne mesurera pas les grandeurs Α, Β, Γ; donc Ε sera la plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ, si Δ ne mesure pas Γ; et s'il le mesure, ce sera Δ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure de trois grandeurs commensurables données. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si une grandeur mesure trois grandeurs, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure.

On trouvera semblablement la plus grande commune mesure d'un plus grand nombre de grandeurs, et le même corollaire s'en suivra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

PROPOSITIO V.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Sint commensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem habere, quam numerus ad numerum.

Ἐπὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἴστω τὸ Γ. Καὶ ὅσκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Δ, ὅσκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ε.

Quoniam enim commensurabiles sunt Α, Β, metietur aliqua ipsas magnitudo. Metiatur, et sit Γ. Et quoties Γ ipsam Α metitur tot unitates sint in Δ, quoties autem Γ ipsam Β metitur tot unitates sint in Ε.

Α _____
Γ _____
Β _____

Δ
Ι .
Ε . . .

Ἐπὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὅσκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν

Quoniam igitur Γ ipsam Α metitur per unitates quæ in Δ, metitur autem et unitas ipsum Δ per unitates quæ sunt in ipso; æqualiter igitur

PROPOSITION V.

Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs commensurables Α, Β; je dis que Α a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

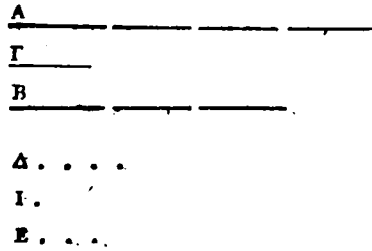
Car puisque les grandeurs Α, Β sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Δ que γ mesure de fois Α; qu'il y ait aussi autant d'unités dans Ε que γ mesure de fois Β.

Puisque γ mesure Α par les unités qui sont en Δ, et que l'unité mesure Δ par les unités qui sont en lui, l'unité mesure le nombre Δ autant de fois que la

124 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας.

unitas ipsum Δ metitur numerum atque Γ magnitudo ipsam Α; est igitur ut Γ ad Α ita unitas ad Δ; convertendo igitur, ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem. Rursus, quoniam Γ ipsam Β metitur per unitates quæ in Ε, metitur autem et unitas ipsum Ε per unitates quæ in ipso; æqualiter



ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διότου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

igitur unitas ipsum Ε metitur atque Γ ipsam Β; est igitur ut Γ ad Β ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Δ numerus ad Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Commensurabiles igitur magnitudines Α, Β inter se rationem habent quam Δ numerus ad numerum Ε. Quod oportebat ostendere.

grandeur Γ mesure Α; donc Γ est à Α comme l'unité est à Δ; donc, par conversion, Α est à Γ comme Δ est à l'unité. De plus, puisque Γ mesure Β par les unités qui sont en Ε, et que l'unité mesure Ε par les unités qui sont en lui, l'unité mesure Ε autant de fois que Γ mesure Β; donc Γ est à Β comme l'unité est à Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc, par égalité, Α est à Β comme le nombre Δ est à Ε.

Donc les grandeurs commensurables Α, Β ont entr'elles la raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

PROPOSITIO VI.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἴσται τὰ μεγέθη.

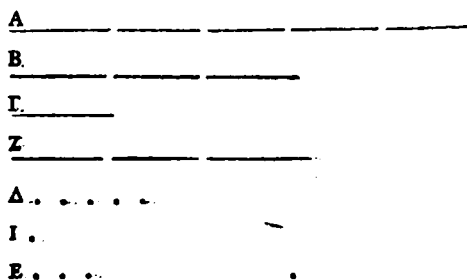
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα² λόγον ἔχεται ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐν αὐτῶν ἴσον ἴστω τὸ Γ· ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκρίσθω τὸ Ζ.

Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Δ ad numerum Ε; dico commensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Quot enim sunt in Δ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Γ; quot autem sunt in Ε unitates, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi Γ componatur Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά ὡσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ τὸ αὐτὸ³ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α

Quoniam igitur quot sunt in Δ unitates, tot sunt et in Α magnitudines æquales ipsi Γ; quæ pars igitur est unitas ipsius Δ, eadem pars est et Γ ipsius Α; est igitur ut Γ ad Α ita

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β aient entr'elles la même raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε; je dis que les grandeurs Α, Β sont commensurables.

Car que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Δ; que Γ soit égal à une de ces parties; et que Ζ soit composé d'autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε.

Puisqu'il y a dans Α autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Δ, Γ sera la même partie de Α que l'unité l'est de Δ; donc Γ est à Α comme

126 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς τὸ Γ⁵ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν⁶· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε⁸. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ

unitas ad Δ. Metitur autem unitas ipsum Δ numerum; metitur igitur et Γ ipsam Α. Et quoniam est ut Γ ad Α ita unitas ad Δ numerum; convertendo igitur ut Α ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. Rursus, quoniam quot sunt in Ε unitates, tot sunt et in Ζ partes æquales ipsi Γ; est igitur ut Γ ad Ζ ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo

A _____
 B _____
 Γ _____
 Ζ _____
 Δ
 Ι .
 Ε

οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διίσου ἄρα ἴστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Αλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ἴστί⁹ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α¹⁰ πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἴστί τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Αλλὰ μετρεῖ¹¹ καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ Α τῷ Β.

igitur est ut Α ad Ζ ita Δ ad Ε. Sed ut Δ ad Ε ita est Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita et Α ad Ζ; ergo Α ad utramque ipsarum Β, Ζ eandem habet rationem; æqualis igitur est Β ipsi Ζ. Metitur autem Γ ipsam Ζ; metitur igitur et Β. Sed metitur et Α; ergo Γ ipsas Α, Β metitur; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

l'unité est à Δ. Mais l'unité mesure le nombre Δ; donc Γ mesure Α. Et puisque Γ est à Α comme l'unité est au nombre Δ, par conversion Α est à Γ comme le nombre Δ est à l'unité. De plus, puisqu'il y a en Ζ autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε, Γ sera à Ζ comme l'unité est au nombre Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc par égalité Α est à Ζ comme Δ est à Ε. Mais Δ est à Ε comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Α est à Ζ; donc Α a la même raison avec Β et avec Ζ; donc Β égale Ζ (9. 5). Mais Γ mesure Ζ; donc il mesure Β. Mais Γ mesure Α; donc Γ mesure Α et Β; donc Α est commensurable avec Β (déf. 1. 10). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

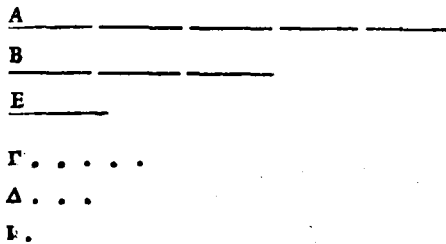
Δύο γάρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχεται ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Οσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐν αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως· τὸ Ε πρὸς τὸ Α. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς

ALITER.

Doæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ; dico commensurabiles esse magnitudines.

Quot enim sunt in Γ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Ε; est igitur ut unitas ad Γ numerum ita Ε ad Α. Est autem et ut Γ ad Δ ita Α ad Β; ex æquo.



τῶν Δ οὕτως³ τὸ Α πρὸς τὸ Β· δίσσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως⁴ τὸ Ε πρὸς τὸ⁵ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ⁶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπει⁷ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἰκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι⁸.

igitur est ut unitas ad Δ ita Ε ad Β. Metitur autem et unitas ipsum Δ; metitur igitur et Ε ipsam Β. Metitur autem et Ε ipsam Α, quoniam et unitas ipsum Γ; ergo Ε utramque ipsarum Α, Β metitur; ergo Α, Β commensurabiles sunt, et est ipsarum communis mensura Ε. Quod oportebat ostendere.

AUTREMENT.

Que les deux grandeurs Α et Β aient entr'elles la même raison que le nombre Γ avec le nombre Δ; je dis que ces grandeurs sont commensurables.

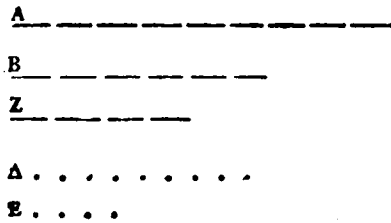
Que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Γ, et que Ε soit égal à une de ces parties; l'unité sera au nombre Γ comme Ε est à Α. Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; donc, par égalité, l'unité est à Δ comme Ε est à Β. Mais l'unité mesure Δ; donc Ε mesure Β. Mais Ε mesure Α, puisque l'unité mesure Γ; donc Ε mesure Α et Β; donc Α et Β sont commensurables, et Ε est leur commune mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

COROLLARIUM.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰάν ᾖσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεία ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως ἡ εὐθεῖα¹ πρὸς εὐθεῖαν. Εἰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἴσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo numeri ut Δ, Ε, et recta ut Α, possibile esse fieri ut Δ numerus ad Ε numerum ita rectam ad rectam. Si autem et ipsarum Α, Ζ media proportionalis sumatur ut Β, erit ut Α ad Ζ ita



ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἴσται ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας².

quadratum ex Α ad ipsum ex Β, hoc est ut prima ad tertiam ita figura ex primâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam. Sed ut Α ad Ζ ita est Δ numerus ad Ε numerum; factum est igitur et ut Δ numerus ad Ε numerum ita figura ex rectâ Α ad ipsam ex rectâ Β.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si l'on a deux nombres comme Δ et Ε, et une droite comme Α, il sera possible de faire en sorte que le nombre Δ soit au nombre Ε comme la droite Α est à une autre droite. Mais si l'on prend une moyenne proportionnelle comme Β entre Α et Ζ (cor. 20. 6), Α sera à Ζ comme le carré de Α est au carré de Β; c'est-à-dire que la première sera à la troisième, comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et semblablement décrite sur la troisième (cor. 20. 6). Mais Α est à Ζ comme le nombre Δ est au nombre Ε; on a donc fait de telle manière que le nombre Δ est au nombre Ε comme la figure décrite sur la droite Α est à la figure décrite sur la droite Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

Ἐστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem non habere quam numerus ad numerum.

A
B

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si enim habet Α ad Β rationem quam numerus ad numerum, commensurabilis erit Α ipsi Β. Non est autem; non igitur Α ad Β rationem habet quam numerus ad numerum.

Incommensurabiles igitur, etc.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs incommensurables Α, Β; je dis que Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car si Α avait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre, Α serait commensurable avec Β (6. 10). Mais il ne l'est pas; donc Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Εάν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἀσύμμετρα ἴσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντες ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum; dico incommensurabiles esse Α, Β magnitudines.

A _____
B _____

Εἰ γὰρ ἴσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν². Οὐκ ἔχει δὲ ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Εάν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Si enim fuerit commensurabilis Α ipsi Β, rationem habebit quam numerus ad numerum. Non habet autem; incommensurabiles igitur sunt Α, Β magnitudines.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β n'ayent pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre; je dis que les grandeurs Α, Β sont incommensurables.

Car si elles étaient commensurables, Α aurait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais il ne l'a pas; donc les grandeurs Α, Β sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

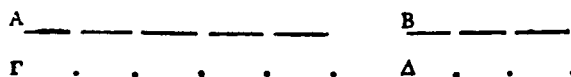
PROPOSITIO IX.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει σύμμετρος· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσύμμετρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν¹ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὃν² τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμέτρος.

Ἐπὶ τῶν γὰρ³ αἱ A , B μήκει σύμμετροι·

A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Sint enim A , B longitudine commensurabiles;



ὡς ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἐπὶ τῆς B τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν⁴ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

dico ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

PROPOSITION IX.

Les carrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; les carrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les carrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; les carrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Car que les droites A , B soient commensurables en longueur; je dis que le carré de A a avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει· ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμῶν. Ἐχέτω ὃν ἰ Γ πρὸς τὸν Δ . Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ⁵, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς A πρὸς τὴν B λόγου διπλασίον ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετραγώνου· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ ⁶ λόγου διπλασίον ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνου, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μίσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετραγώνος πρὸς τὸν τετραγώνον ἀριθμὸν⁷ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἐστὶν ἄρα καὶ⁸ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετραγώνου οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνου⁹.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετραγώνου¹⁰ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνου¹¹. λέγω ὅτι σύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine; ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat eam quam Γ ad Δ . Quoniam igitur est ut A ad B ita Γ ad Δ , sed ipsius quidem ex A ad B rationis duplicata est ratio quadrati ex A ad quadratum ex B ; similes enim figuræ in duplicatâ ratione sunt homologorum laterum; ipsius autem Γ ad Δ rationis duplicata est ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ , duorum enim quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum numerum duplicatam rationem habet ejus quam latus ad latus; est igitur et ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ .

At vero sit ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ ; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Quoniam enim est ut ex A

Car puisque A est commensurable en longueur avec B , A aura avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Qu'il ait celle que Γ a avec Δ . Puisque A est à B comme Γ est à Δ ; que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A avec B , car les figures semblables sont en raison double de leurs côtés homologues (20. 6; que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double de celle de Γ à Δ , car il y a un moyen proportionnel entre deux nombres quarrés (11. 8); et que le quarré d'un nombre a avec le quarré d'un nombre une raison double de celle d'un côté à un côté, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ .

Mais que le quarré de A soit au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ ; je dis que A est commensurable en longueur avec B . Car puisque

γωνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B¹² οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ¹³. ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B¹⁴ λόγος διπλασίων ἐστὶ¹⁵ τοῦ

quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratus ad ipsum ex Δ; sed quidem ex Α quadrati ad ipsum ex B ratio duplicata est ipsius ex



τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ¹⁶ τετραγώνου¹⁷ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ¹⁸ τετράγωνον¹⁹ λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ²⁰ πρὸς τὸν Δ λόγου²¹. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ²² πρὸς τὸν Δ²³. ἡ Α ὅρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει²⁴.

Ἀλλὰ δὴ²⁵ ἀσύμμετρος ἴστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B²⁶ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον²⁷ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἴσται ἡ Α τῇ Β μήκει²⁸. Οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α

A ad B rationis, quadrati autem ex Γ ad quadratum ex Δ ratio duplicata est ipsius Γ ad ipsum Δ rationis; est igitur et ut A ad B ita Γ ad Δ; ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad numerum Δ; commensurabilis igitur est A ipsi B longitudine.

At vero incommensurabilis sit A ipsi B longitudine; dico ex A quadratum ad ipsum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim habet ex A quadratum ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. Non est autem; non

le carré de A est au carré de B comme le carré de Γ est au carré de Δ, que la raison du carré de A au carré de B est double de la raison de A à B (20. 6), et que la raison du carré de Γ au carré de Δ est double aussi de la raison de Γ à Δ (11. 8), A sera à B comme Γ est à Δ; donc A a avec B la raison que le nombre Γ a avec le nombre Δ; donc A est commensurable en longueur avec B (6. 10).

Mais que A soit incommensurable en longueur avec B; je dis que le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Car si le carré de A avait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, A serait commensurable en longueur avec B. Mais

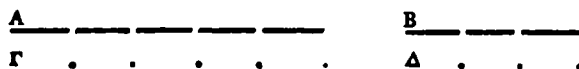
134 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον²⁹ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ³⁰ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον³¹ λόγον μὴ ἔχεται ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

igitur ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus denique ex A quadratum ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; dico



λέγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ ἔσται³² σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει³³, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει, καὶ τὰ ἐξῆς.

incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim fuerit commensurabilis A ipsi B longitudine, habebit ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Non habet autem; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine.

Ergo a rectis longitudine, etc.

cela n'est point; donc le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

De plus, que le carré de A au carré de B n'ait pas la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Car si A était commensurable en longueur avec B, le carré de A aurait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Mais il ne l'a pas; donc A n'est pas commensurable en longueur avec B; donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐπὶ γὰρ σύμμετρος ἴστιν ὁ Α τῇ Β μήκει, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὴν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ² πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω. Ἐπὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὴν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ

A _____

Г. . . .

E.

• • • • •

• • • • •

• • • • •

• • • • •

πολλαπλασιάζοντας τὸν Ζ πεποίηκεν ἵστιν ἄρα ὡς
 ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τούτεστιν ὡς ἡ Α πρὸς
 τὴν Β οὕτως³ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ΑΛΛ' ὡς ἡ Α πρὸς
 τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
 Α, Β· ἵστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ
 ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν,
 ἵπτι ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάζοντας τὸν Η πε-
 ποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ⁴ πολλαπλασιάζοντας τὸν Ζ

ALITER.

Quoniam enim commensurabilis est Δ ipsi B longitudine, rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Γ ad Δ , et Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E faciat, ipse autem Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat, et Δ se ipsum multiplicans ipsum H faciat. Quoniam itaque Γ se ipsum quidem multiplicans

B _____

Δ. . .

Н. . .

• • •

• • •

ipsum E fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ , hoc est ut A ad B ita E ad Z . Sed ut A ad B ita ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z . Rursus, quoniam Δ se ipsum multiplicans ipsum H fecit, ipse vero Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad

AUTREMENT.

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, il a avec lui la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Que ce soit celle que r a avec Δ; que r se multipliant lui-même fasse E, que r multipliant Δ fasse Z, et que Δ se multipliant lui-même fasse H. Puisque r se multipliant lui-même fait E, et que r multipliant Δ fait Z, r est à Δ, c'est-à-dire A est à B comme E est à Z (17. 7). Mais A est à B comme le carré de A est au rectangle sous A, B (1. 6); donc le carré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z. De plus, puisque Δ se multipliant lui-même a fait H, et que Δ multipliant r a fait Z, r est à Δ,

136 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, του-
τίστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν
Η. Αλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ
τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς
τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ
πρὸς τὸν Η. Αλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ
ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· διόσου
ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως
ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Ἐστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η
τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἔστιν, ὁ δὲ
Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
τετράγωνον ἀριθμόν.

Δ, hoc est ut A ad B, ita Z ad H. Sed ut
A ad B ita sub A, B rectangulum ad qua-
dratum ex B; est igitur ut sub A, B rectangulum
ad quadratum ex B ita Z ad H. Sed ut ex A
quadratum ad rectangulum sub A, B, ita erat
E ad Z; ex æquo igitur ut ex A quadratum ad
ipsum ex B ita erat E ad H. Est autem uterque ipso-
rum E, H quadratus, ipse quidem enim E ex Γ est,
ipse vero H ex Δ; ergo ex A quadratum ad
ipsum ex B rationem habet quam quadratus nu-
ad quadratum numerum.

A _____					B _____				
Γ.	.	.	.	.		Δ.	.	.	.
Ε.	.	.	.	.	Ζ.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Αλλὰ δὲ ἔχεται τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς
τετράγωνον ἀριθμόν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμε-
τρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει⁵. Ἐστω γὰρ τοῦ
μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ

At vero habeat ex A quadratum ad ipsum
ex B rationem quam quadratus numerus E ad
quadratum numerum H; dico commensura-
bilem esse A ipsi B longitudine. Sit enim ipsius
quidem E latus ipse Γ, ipsius autem H ipse Δ,

c'est-à-dire A est à B comme Z est à H (17. 7). Mais A est à B comme le rec-
tangle sous A, B est au quarré de B (1. 6); donc le rectangle sous A, B est au
quarré de B comme Z est à H. Mais le quarré de A est au rectangle sous A, B
comme E est à Z; donc par égalité le quarré de A est au quarré de B comme E
est à H. Mais les nombres E, H sont des quarrés, car E est le quarré de Γ, et
H le quarré de Δ; donc le quarré de A a avec le quarré de B la raison qu'un
nombre quarré a avec un nombre quarré.

Mais que le quarré de A ait avec le quarré de B la raison que le nombre
quarré E a avec le nombre quarré H; je dis que A est commensurable en lon-
gueur avec B. Car que Γ soit le côté de E, et Δ le côté de H, et que Γ multi-

τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖται· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μείζον ἀνάλογόν ἐστι⁶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η⁷, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτίστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁸ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁹ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ¹⁰. Ὅπρι ἴδιαι διῆξαι.

et Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat; ergo E, Z, H deinceps sunt proportionales in ratione ipsius Γ ad Δ . Et quoniam ipsorum ex A, B medium proportionale est rectangulum sub A, B , ipsorum autem E, H ipse Z ; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z . Ut autem sub A, B rectangulum ad quadratum ex B ita Z ad H , sed ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita A ad B ; ergo A, B commensurabiles sunt, rationem enim habent quam numerus E ad numerum Z , hoc est quam Γ ad Δ ; ut enim Γ ad Δ ita E ad Z ; etenim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E fecit, ipsum autem Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita E ad Z . Quod oportebat ostendere.

pliant Δ fasse Z , les nombres E, Z, H seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ (17. 7). Et puisque le rectangle sous A, B est moyen proportionnel entre les quarrés de A et de B (1. 6), et que Z l'est entre E et H (11. 8), le quarré de A sera au rectangle sous A, B comme E est à Z . Mais le rectangle sous A, B est au quarré de B comme Z est à H , et le quarré de A est au rectangle sous A, B comme A est à B ; donc A et B sont commensurables, car ils ont la raison qu'a le nombre E avec le nombre Z , c'est-à-dire la raison que Γ a avec Δ ; car Γ est à Δ comme E est à Z , puisque Γ se multipliant lui-même fait E , et que Γ multipliant Δ a fait Z ; donc Γ est à Δ comme E est à Z (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν¹ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἴσται² ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι³ οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει⁴.

Εἴπερ γὰρ⁵ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ δὲ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπὶ οὖν⁷ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει εἰδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὅντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα

COROLLARIUM.

Et manifestum ex demonstratis erit, rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ, rectas autem potentiâ commensurabiles non semper et longitudine, et rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ incommensurabiles, rectas autem potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

Quoniam enim ex commensurabilibus longitudine rectis quadrata rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, magnitudines autem rationem habentes quam numerus ad numerum commensurabiles sunt; quare longitudine commensurabiles rectæ non solum sunt longitudine commensurabiles, sed et iam potentiâ.

Rursus, quoniam igitur quæcumque quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, longitudine ostensa sunt commensurabilia, et potentiâ latera existentia commensurabilia, cum ipsorum qua-

C O R O L L A I R E.

D'après ce qui a été démontré, il est évident que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance; que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur; que celles qui sont incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, et que celles qui sont incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

Car puisque les quarrés des droites commensurables en longueur ont la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que les grandeurs qui ont la raison qu'un nombre a avec un nombre sont commensurables, les droites commensurables en longueur sont commensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance.

De plus, puisqu'on a démontré que les quarrés qui sont entr'eux comme un nombre quarré est à un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur, et que des droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés

λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ' ἀπλῶς ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει⁸, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα⁹ πάντως καὶ δυνάμει, τὰ¹⁰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Λίγω δὴ ὅτι καὶ¹¹ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει¹². Ἐπεὶ δὴ γὰρ¹³ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς¹⁴ πρὸς ἀριθμὸν¹⁵, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει εἶσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ τῇ¹⁶ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύνανται¹⁷ εἶσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει

drata rationem habeant quam numerus ad numerum; quæcumque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam numerus ad numerum, commensurabilia quidem erunt eadem quadrata potentiâ, non autem et longitudine; quare quadrata quidem longitudine commensurabilia omnino et potentiâ, quadrata autem potentiâ non semper et longitudine, nisi et rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico etiam rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ. Quoniam igitur rectæ potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere quam numerus ad numerum, et idcirco potentiâ sunt commensurabiles, longitudine vero incommensurabiles; quare rectæ longitudine incommensurabiles non omnino et potentiâ, sed longitudine incommensurabiles existentes possunt potentiâ esse et commensurabiles et incommensurabiles.

Rectæ autem potentiâ incommensurabiles,

ont la raison qu'un nombre a avec un nombre, les quarrés qui n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et qui n'ont simplement que la raison qu'un nombre a avec un nombre, ont leurs côtés commensurables en puissance, mais non en longueur; donc les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, et les droites commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur, à moins que leurs puissances n'ayent entre elles la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Je dis aussi que les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance; car elles peuvent n'avoir pas la raison qu'un nombre a avec un nombre, et elles sont à cause de cela commensurables en puissance et incommensurables en longueur; donc les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, mais les droites incommensurables en longueur peuvent être commensurables et incommensurables en puissance.

Mais les droites incommensurables en puissance sont toujours incommensu-

140 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει¹⁸ σύμμετροι, ἴσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει¹⁹.

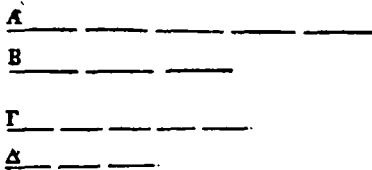
omnino et longitudine incommensurabiles; si enim commensurabiles, erunt et potentiâ commensurabiles. Supponuntur autem et incommensurabiles, quod est absurdum; rectæ igitur potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾦ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ διυτέρῳ σύμμετρον ᾦ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἴσται· καὶ τὸ πρῶτον τῷ διυτέρῳ ἀσύμμετρον ᾦ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἴσται.

PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.



Ἐστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὥς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἴσται· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἴσται².

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa Α autem ipsi Β commensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ commensurabilem fore.

rables en longueur; car si elles étaient commensurables en longueur, elles seraient commensurables en puissance. Mais on les suppose incommensurables, ce qui est absurde; donc les droites incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

PROPOSITION X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; et que Α soit commensurable avec Β; je dis que Γ sera commensurable avec Δ.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται³. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ἂν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἐάν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B, ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

At vero A ipsi B incommensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ incommensurabilem fore. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B; ergo A ad B rationem non habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; neque Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; incommensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

Si igitur quatuor, etc.

ΛΗΜΜΑ.

LEMMA.

Δίδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

Ostensum est in arithmeticiis similes planos numeros inter se rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et si

Car puisque A est commensurable avec B, A a avec B la même raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est commensurable avec Δ (6. 10.)

Mais que A soit incommensurable avec B; je dis que Γ sera incommensurable avec Δ. Car puisque A est incommensurable avec B, A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (7. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ n'a pas avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est incommensurable avec Δ; donc, etc.

LEMME.

On a démontré dans les livres d'arithmétique (26. 8) que les nombres plans semblables ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

μόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοι εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτίστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἴσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes esse planos. Et manifestum est ex his, non similes planos numeros, hoc est non proportionalia habentes latera, inter se rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim haberent, similes plani essent, quod non supponitur; ergo non similes plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ.

Τῇ προτεθείᾳ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Εστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὲ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

PROPOSITIO XI.

Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

Sit proposita recta Α; oportet igitur ipsi Α invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine solum, alteram autem et potentiâ.

et que si deux nombres ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ces nombres sont des plans semblables. De là il est évident que des nombres plans non semblables, c'est-à-dire des nombres plans qui n'ont pas leurs côtés proportionnels, n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car s'ils l'avaient, ils seraient des plans semblables, ce qui n'est pas supposé; donc des plans non semblables n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

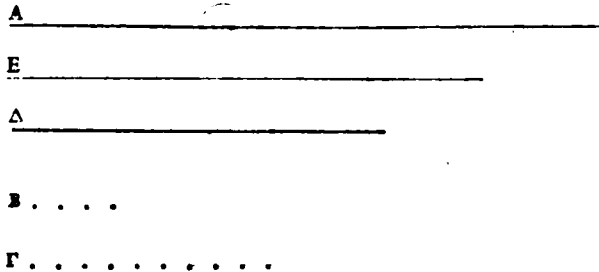
PROPOSITION XI.

Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

Soit Α la droite proposée; il faut trouver deux droites incommensurables avec Α, l'une en longueur seulement, et l'autre en longueur et en puissance.

Εκκείσθωσαν γάρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τουτίστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γιγνέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον ὡς ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

Exponentur enim duo numeri Β, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est non similes plani, et fiat ut Β ad Γ ita ex Α quadratum ad quadratum ex Δ, hoc enim tradidimus; commensurabile igitur ex Α quadratum ipsi ex Δ. Et quoniam Β ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non igitur ex Α quadratum ad ipsum ex Δ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommen-



ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. Εἰλήθω τῶν Α, Δ μίση ἀνάλογον ἡ Ε· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ

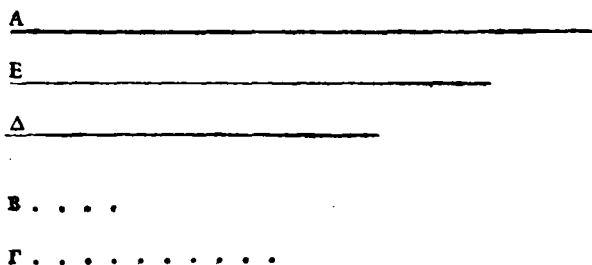
surabilis igitur est Α ipsi Δ longitudine. Sumatur ipsarum Α, Δ media proportionalis Ε; est igitur ut Α ad Δ ita ex Α quadratum ad ipsum ex Ε. Incommensurabilis autem est Α ipsi Δ longitudine; incommensurabile igitur est

Car soient deux nombres Β, Γ qui n'ayent pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, c'est-à-dire qui soient deux plans non semblables; et faisons en sorte que Β soit à Γ comme le quarré de Α est au quarré de Δ, ce que nous avons déjà enseigné (cor. 6. 10); le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de Δ. Et puisque Β n'a pas avec Γ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de Α n'aura pas avec le quarré de Δ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc Α est incommensurable en longueur avec Δ (9. 10). Preuons une moyenne proportionnelle Ε entre Α et Δ, Α sera à Δ comme le quarré de Α est au quarré de Ε (cor. 2. 6). Mais Α est incommensurable en longueur avec Δ; donc le quarré de Α est incommensurable avec le quarré

144 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετρά-
γωνῳ ἀσύμμετρος ἄρα ἴστίη ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

et ex A quadratum ipsi ex E quadrato; incom-
mensurabilis igitur est A ipsi E potentiâ; ergo



τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσιύρηται
δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν
μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε³.
Οπιρ εἶδει δείξαι.

propositæ rectæ A inventæ sunt duæ rectæ
incommensurabiles ipsæ Δ, Ε; longitudine
quidem tantum ipsa Δ, potentiâ autem et longi-
tudine scilicet ipsa Ε. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

PROPOSITIO XII.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις
ἴστί σύμμετρα.

Εκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστι σύμμι-
τρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἴστί σύμμετρον.

Επεὶ γὰρ σύμμετρόν ἴστί τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α
ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς

Eidem magnitudini commensurabiles et
inter se sunt commensurabiles.

Utraque enim ipsarum Α, Β ipsi Γ sit commen-
surabilis; dico et Α ipsi Β esse commensurabilem.

Quoniam enim commensurabilis est Α ipsi Γ,
ergo Α ad Γ rationem habet quam numerus ad

de Ε (10. 10); donc Α est incommensurable en puissance avec Ε. On a donc
trouvé pour la droite proposée Α deux droites incommensurables Δ, Ε, savoir
la droite Δ en longueur seulement, et la droite Ε en puissance et en longueur.
Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont com-
mensurables entr'elles.

Que chacune des grandeurs Α, Β soit commensurable avec Γ; je dis que Α est
commensurable avec Β.

Car puisque Α est commensurable avec Γ, Α a avec Γ la raison qu'un nombre

ἀριθμόν. Εχέτω ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ὅτι σύμμετρον ἔστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εχέτω ἐν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦτε ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰληφθῶσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

A	Δ	Z . .	Θ
Γ	Ε	Η	Κ . .
B			Λ

Επεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ διόλου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει

numerus. Habeat quam Δ ad Ε. Rursus, quoniam commensurabilis est Β ipsi Γ, ergo Γ ad Β rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Ζ ad Η. Et rationibus datis quibuscumque, et ipsā quam habet Δ ad Ε et Ζ ad Η, sumantur numeri Θ, Κ, Λ deinceps in datis rationibus, et sit ut quidem Δ ad Ε ita Θ ad Κ, ut autem Ζ ad Η ita Κ ad Λ.

Quoniam igitur est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, sed ut Δ ad Ε ita Θ ad Κ; est igitur et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam est ut Γ ad Β ita Ζ ad Η, sed ut Ζ ad Η ita Κ ad Λ; et ut igitur Γ ad Β ita Κ ad Λ. Est autem et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Θ ad Λ; ergo Α ad Β rationem habet

a avec un nombre (5. 10.); qu'il ait celle que Δ a avec Ε. De plus, puisque Β est commensurable avec Γ, Γ a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre. Qu'il ait celle que Ζ a avec Η. La raison que Δ a avec Ε, et celle que Ζ a avec Η étant données, prenons les nombres Θ, Κ, Λ successivement proportionnels dans les raisons données, de manière que Δ soit à Ε comme Θ est à Κ, et que Ζ soit à Η comme Κ est à Λ.

Puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que Δ est à Ε comme Θ est à Κ, Α sera à Β comme Θ est à Κ. De plus, puisque Γ est à Β comme Ζ est à Η, et que Ζ est à Η comme Κ est à Λ, Γ est à Β comme Κ est à Λ. Mais Α est à Γ comme Θ est à Κ; donc, par égalité, Α est à Β comme Θ est à Λ (23. 5); donc Α a avec Β la raison que le

146 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Α· σύμμετρον
ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἰζῆς.

quam numerus Θ ad numerum Α; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

Ergo eidem, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

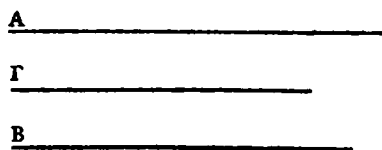
Εάν ᾗ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾗ
τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα
ἔσται τὰ μεγέθη.

Εστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ,
καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β
τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β
ἀσύμμετρον ἐστίν.

PROPOSITIO XIII.

Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

Sint enim duæ magnitudines Α, Β, alia autem Γ, et quidem Α ipsi Γ commensurabilis sit, sed Β ipsi Γ incommensurabilis; dico et Α ipsi Β incommensurabilem esse.



Εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἐστὶ δὲ
καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρον
ἐστίν. Ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Si enim est commensurabilis Α ipsi Β, est autem et Γ ipsi Α; et Γ igitur ipsi Β commensurabilis est. Quod non supponitur.

nombre Θ a avec le nombre Α; donc Α est commensurable avec Β (6. 10).
Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs Α, Β, et une autre grandeur Γ; que Α soit commensurable avec Γ, et que Β soit incommensurable avec Γ; je dis que Α est incommensurable avec Β.

Car si Α était commensurable avec Β, à cause que Γ est commensurable avec Α, Γ serait commensurable avec Β (12. 10). Ce qui n'est pas supposé.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εὰν ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὲ ἀσύμμετρον ᾗ· καὶ τὸ λοιπὸν τῇ αὐτῇ ἀσύμμετρον ἴσται.

Ἐστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλω τινὲ τῇ Γ ἀσύμμετρον ἴστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῇ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commensurabiles Α, Β; altera autem ipsarum Α alii alicui Γ incommensurabilis sit; dico et reliquam Β ipsi Γ incommensurabilem esse.

A
Γ
B

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῇ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῇ Β σύμμετρόν ἐστι²· καὶ τὸ Α ἄρα τῇ Γ σύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῇ Γ ἀσύμμετρον ἄρα.

Εὰν ἄρα ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἱζήσ.

Si enim est commensurabilis Β ipsi Γ, sed et Α ipsi Β commensurabilis est; et Α igitur ipsi Γ commensurabilis est. Sed et incommensurabilis, quod impossibile; non igitur commensurabilis est Β ipsi Γ; incommensurabilis igitur.

Si igitur sunt duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

Soient les deux grandeurs commensurables Α, Β, et que l'une d'elles soit incommensurable avec Γ; je dis que la grandeur restante Β sera aussi incommensurable avec Γ.

Car si Β était commensurable avec Γ, à cause que Α est commensurable avec Β, Α serait commensurable avec Γ (12. 10). Mais Α est incommensurable avec Γ, ce qui est impossible; donc Β n'est pas commensurable avec Γ; donc il lui est incommensurable. Donc, etc.

ΛΗΜΜΑ.

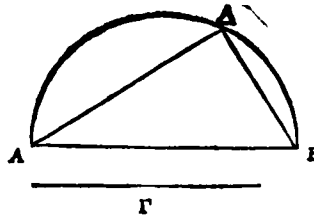
LEMMA.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὐρεῖν τίνι μίζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἐστωσαν αἱ δοθεισῆς δύο ἀνισοὶ εὐθεῖαι, αἱ AB, Γ , ὧν μίζων ἴστω ἡ AB . δεῖ δὴ εὐρεῖν τίνι μίζον δύναται ἡ AB τῆς Γ .

Duabus datis rectis inæqualibus, invenire id quo plus potest major quam minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ AB, Γ , quarum major sit AB ; oportet igitur invenire id quo plus potest AB quam Γ .



Γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον, τὸ $A\Delta B$, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ $A\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB . Φανερόν δὴ ὅτι ὀρθή ἐστίν ἡ ὑπὸ $A\Delta B$ γωνία, καὶ ὅτι ἡ AB τῆς $A\Delta$, τουτίστι τῆς Γ , μίζον δύναται τῇ ΔB .

Ομοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη αὐτὰς εὐρίσκεται οὕτως.

Describatur super rectam AB semicirculus $A\Delta B$, et in eo aptetur ipsi Γ æqualis $A\Delta$, et jungatur ΔB . Evidens igitur rectum esse $A\Delta B$ angulum, et AB quam $A\Delta$, hoc est quam Γ , plus posse quadrato ex ΔB .

Similiter autem et datis rectis, quæ potest ipsas invenietur hoc modo.

L E M M E.

Deux droites inégales étant données, trouver ce dont le puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données; que AB soit la plus grande; il faut trouver ce dont la puissance de AB surpasse la puissance de Γ .

Décrivons sur AB le demi-cercle $A\Delta B$, adaptons dans ce demi-cercle une droite $A\Delta$ égale à Γ (1. 4), et joignons ΔB . Il est évident que l'angle $A\Delta B$ est droit (31. 3), et que la puissance de AB surpasse la puissance de $A\Delta$, c'est-à-dire de Γ , du quarré de ΔB (47. 1).

On trouvera de la même manière la droite dont la puissance égale la somme des puissances de deux droites données.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 149

Εστώσαν αἱ δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι³ αἱ $ΑΔ, ΔΒ$ · καὶ δεῖν ἴστω εὐρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτάς. Κεῖσθωσαν⁴ γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ $ΑΔΒ$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $ΑΒ$ · φανερόν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς $ΑΔ, ΔΒ$ δυναμένη ἐστὶν ἡ $ΑΒ$.

Sint duæ rectæ datæ $ΑΔ, ΔΒ$; et oporteat invenire rectam quæ possit ipsas. Ponantur enim, ut rectum angulum $ΑΔΒ$ contineant, et jungatur $ΑΒ$; perspicuum est rursus, ipsas $ΑΔ, ΔΒ$ rectam posse $ΑΒ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΙ.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μῖζον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ¹· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ². Καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μῖζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ³· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ⁴.

Εστώσαν δὴ⁵ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ $Α, Β, Γ, Δ$, ὥς ἡ $Α$ πρὸς τὴν $Β$ οὕτως ἡ $Γ$ πρὸς τὴν $Δ$, καὶ ἡ $Α$ μὲν τῆς $Β$ μῖζον δυνάσθω τῷ

PROPOSITIO XV.

Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda, quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

Sint igitur quatuor rectæ proportionales $Α, Β, Γ, Δ$, ut $Α$ ad $Β$ ita $Γ$ ad $Δ$, et $Α$ quidem quam $Β$ plus possit quadrato ex $Ε$, sed $Γ$ quam $Δ$ plus

Soient $ΑΔ$ et $ΔΒ$ les deux droites données, il faut trouver la droite dont la puissance égale la somme des puissances de ces deux droites; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle droit $ΑΔΒ$, et joignons $ΑΒ$; il est évident encore que la puissance de $ΑΒ$ égale la somme des puissances des droites $ΑΔ, ΔΒ$ (47. 1).

PROPOSITION XV.

Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

Soient les quatre droites proportionnelles $Α, Β, Γ, Δ$, de manière que $Α$ soit à $Β$ comme $Γ$ est à $Δ$; que la puissance de $Α$ surpasse la puissance de $Β$ du

150 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς E, ἢ δὲ Γ τῆς Δ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Z· λέγω ὅτι εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ⁶ E, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z.

possit quadrato ex Z; dico et si commensurabilis sit A ipsi E, commensurabilem esse et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis sit A ipsi E incommensurabilem esse et Γ ipsi Z.

A _____
B _____
E _____

Γ _____
Δ _____
Z _____

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἐστὶν ἄρα καὶ⁷ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν A, B, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ⁸ τὰ ἀπὸ τῶν Z, Δ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν E, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῶν Z, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἡ E πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Z πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν⁹ ὡς ἡ B πρὸς τὴν E οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Z. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διίστου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν E οὕτως ἡ Γ πρὸς

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; est igitur et ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratum ad ipsum ex Δ. Sed ipsi quidem quadrato ex A æqualia sunt ex E, B quadrata, sed ex Γ quadrato æqualia sunt ex Z, Δ quadrata; sunt igitur ut ex E, B quadrata ad ipsum ex B ita ex Z, Δ quadrata ad ipsum ex Δ; dividendo igitur est ut ex E quadratum ad ipsum ex B ita ex Z quadratum ad ipsum ex Δ; est igitur et ut E ad B ita Z ad Δ; convertendo igitur est ut B ad E ita Δ ad Z. Est autem et ut A ad B ita Γ ad Δ; ex æquo igitur est ut A ad E ita Γ ad Z; et si igitur

quarré de la droite E, et que la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré de la droite Z; je dis que si A est commensurable avec E, Γ le sera avec Z; et que si A est incommensurable avec E, Γ le sera aussi avec Z.

Car puisque A est à B comme Γ est à Δ, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ (cor. 1. 22. 6). Mais la somme des quarrés de E et de B est égale au quarré de A, et la somme des quarrés de Z et de Δ est égale au quarré de Γ; donc la somme des quarrés de E et de B est au quarré de B comme la somme des quarrés de Z et de Δ est au quarré de Δ; donc, par soustraction, le quarré de E est au quarré de B comme le quarré de Z est au quarré de Δ (17. 5); donc E est à B comme Z est à Δ (22. 6); donc, par conversion, B est à E comme Δ est à Z (4. 5). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc, par égalité, A est à E comme Γ est à Z (22. 5); donc si A est commensurable avec

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 151

τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν¹⁰ ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

commensurabilis est A ipsi E, commensurabilis est et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis est A ipsi E, incommensurabilis est et Γ ipsi Z.

Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

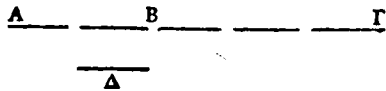
Εὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντιθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ σύμμετρον¹.

PROPOSITIO XVI.

Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componentur enim duæ magnitudines commensurabiles AB, BG; dico et totam AG utrique ipsarum AB, BG esse commensurabilem.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ

Quoniam enim commensurabiles sunt AB, BG, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas AB, BG metitur, et totam AG metietur. Metitur autem et AB, BG,

E, la droite Γ le sera avec Z; et si A est incommensurable avec E, la droite Γ le sera avec Z (10. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme sera commensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est commensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront commensurables.

Ajoutons les deux grandeurs commensurables AB, BG; je dis que la grandeur entière AG est commensurable avec chacune des grandeurs AB, BG.

Car, puisque les grandeurs AB, BG sont commensurables, quelque grandeur les mesurera (déf. 1. 10). Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure AB et BG, il mesurera leur somme AG. Mais il mesure AB et BG,

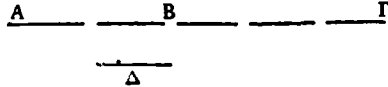
152 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB, BG. τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG, AG² μετρεῖ·
σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AG ἑκατέρῳ τῶν AB, BG.

Αλλὰ δὴ τὸ AG ἐνὶ τῶν AB, BG ἔστω σύμ-
μετρον, ἔστω δὴ τῷ AB³. λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ
AB, BG σύμμετρά ἐστιν.

ergo Δ ipsas AB, BG, AG metitur; commen-
surabilis igitur est AG utrique ipsarum AB, BG.

At vērò AG uni ipsarum AB, BG sit com-
mensurabilis, sit igitur ipsi AB; dico et AB,
BG commensurabiles esse.



Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ AG, AB, με-
τρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖτω, καὶ ἔστω
τὸ Δ. Επεὶ οὖν τὸ Δ τὰ GA, AB μετρεῖ, καὶ
λοιπὸν ἄρα τὸ BG μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ
AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG μετρήσει· σύμμετρά
ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BG.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam enim commensurabiles sunt AG,
AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur,
et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas GA, AB me-
tietur, et reliquam igitur BG metietur. Me-
tietur autem et AB; ergo Δ ipsas AB, BG me-
tietur; commensurabiles igitur sunt AB, BG.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντιθῇ, καὶ τὸ
ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. Καὶ τὸ
ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς
μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles
componuntur, et tota utrique ipsarum incom-
mensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incom-
mensurabilis est, et quæ a principio magnitudines
incommensurabiles erunt.

donc Δ mesure les grandeurs AB, BG, AG; donc AG est commensurable avec
AB et BG.

Mais que AG soit commensurable avec une des grandeurs AB, BG; qu'il le soit
avec AB; je dis que les grandeurs AB, BG sont commensurables.

Car puisque les grandeurs AG, AB sont commensurables, quelque grandeur les me-
surera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure
GA et AB, il mesurera le reste BG. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et BG;
donc les grandeurs AB, BG sont commensurables. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

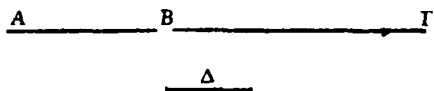
Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommen-
surable avec chacune d'elles; et si leur somme est incommensurable avec une
d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

Συγκείσθω¹ γάρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ AB, BG· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ AG ἑκατέρῳ τῶν AB, BG ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖτω, καὶ ἴστω, εἰ δυνατόν, τὸ Δ². Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BG μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BG· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον³. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, AB μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, AB. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ AG, GB ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ AG ἄρα ἑκατέρῳ τῶν AB, BG ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles AB, BG; dico et totam AG utrique ipsarum AB, BG incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles ΓΑ, AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit, si possibile, ipsa Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, AB metitur, et reliquam igitur BG metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas AB, BG metitur; commensurabiles igitur sunt AB, BG. Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas ΓΑ, AB metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt ΓΑ, AB. Similiter utique demonstrabimus et AG, GB incommensurabiles esse; ergo AG utrique ipsarum AB, BG incommensurabilis est.



Ἀλλὰ δὴ τὸ AG ἐνὶ τῶν AB, BG ἀσύμμετρον ἴστω, καὶ⁴ πρῶτον τῷ AB· λέγω ὅτι καὶ τὰ AB, BG ἀσύμμετρά ἐστιν. Εἰ γὰρ ἴσται⁵ σύμ-

At vero AG uni ipsarum AB, BG incommensurabilis sit, et primum ipsi AB; dico et AB, BG incommensurabiles esse. Si enim essent

Soient ajoutées les deux grandeurs incommensurables AB, BG; je dis que leur somme AG est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, BG.

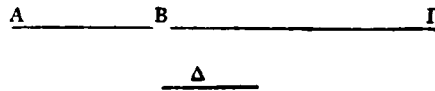
Car si les grandeurs ΓΑ, AB ne sont pas incommensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ, si cela est possible. Puisque Δ mesure ΓΑ et AB, il mesurera le reste BG. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et BG; donc AB et BG sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas ΓΑ et AB; donc ΓΑ et AB sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que AG et GB sont incommensurables; donc AG est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, BG.

Mais que AG soit incommensurable avec une des grandeurs AB, BG, et qu'il le soit d'abord avec AB; je dis que AB et BG sont incommensurables. Car s'ils étaient

154 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται, καὶ ἴστω τὸ Δ. Ἐπὶ οὖν τὸ Δ τὰ AB, BΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ AΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἴσθι τὰ ΓΑ, AB. Ὑπὲρκεῖτο δὲ

commensurables, metiretur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas AB, BΓ metitur, et totam igitur AΓ metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas ΓΑ, AB metitur; commensurabiles igitur sunt ΓΑ, AB.



καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ AB, BΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἴσθι τὰ AB, BΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ AΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ AB, BΓ ἀσύμμετρα ἴσθαι.

Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile: non igitur ipsas AB, BΓ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt AB, BΓ. Similiter utique demonstrabimus si AΓ ipsi ΓΒ incommensurabilis sit, etiam AB, BΓ incommensurabiles fore.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

Λ Η Μ Μ Α.

L E M M A.

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἴσθι τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γινομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Si ad aliquam rectam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; applicatum æquale est rectangulo sub factis ex applicatione partibus rectæ.

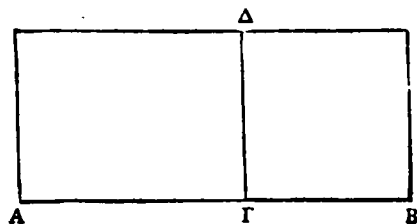
commensurables, quelque grandeur les mesurerait. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure AB et BΓ, il mesurera leur somme AΓ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure ΓΑ et AB; donc ΓΑ et AB sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas AB et BΓ; donc AB et BΓ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que si AΓ est incommensurable avec ΓΒ, les grandeurs AB, BΓ seront aussi incommensurables. Donc, etc.

L E M M E.

Si à une droite quelconque on applique un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, le parallélogramme appliqué est égal au rectangle compris sous les parties de la droite faites par l'application.

Παρά γάρ τινα εὐθεΐαν τὴν AB παραβελήσθω παραλληλόγραμμον τὸ AD , ἡλλεύπον εἶδει τετραγώνῳ τῷ $ΔB$. λέγω ὅτι ἴσον ἴστί τὸ AD τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur parallelogrammum AD , deficiens figurâ quadratâ $ΔB$; dico æquale esse parallelogrammum AD rectangulo sub $ΑΓ$, $ΓB$.



Καὶ ἴστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετραγώνον ἴστί τὸ $ΔB$, ἴση ἴστί τῃ $ΔΓ$ τῇ $ΓB$, καὶ ἴστί τὸ AD τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ ².

Εὰν ἄρα παρὰ τινα εὐθεΐαν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Atque est hoc evidens; quoniam enim quadratum est $ΔB$, æqualis est $ΔΓ$ ipsi $ΓB$, atque est rectangulum AD sub $ΑΓ$, $ΓΔ$, hoc est sub $ΑΓ$, $ΓB$.

Si igitur ad aliquam rectam, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ.

PROPOSITIO XVIII.

Εὰν ὦσι δύο εὐθεΐαι ἀνισοί, τῇ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον¹ παρὰ τὴν μείζονα παραβελθῇ ἡλλεύπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει²· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνησεται

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus

Appliquons à une droite quelconque AB un parallélogramme AD qui soit défailant d'une figure quarrée $ΔB$; je dis que le parallélogramme AD est égal au rectangle compris sous $ΑΓ$, $ΓB$.

Cela est évident; car puisque $ΔB$ est un quarré, $ΔΓ$ est égal à $ΓB$, et AD est égal au rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΔ$, c'est-à-dire sous $ΑΓ$, $ΓB$. Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui

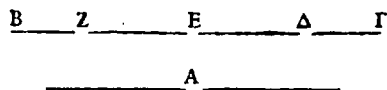
156 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ μήκει³. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάττωτος μείζον δύνηται⁴ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει⁵, τῷ δὲ τετάρτῳ⁶ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττωτος ἴσον παραλληλόγραμμον⁷ παρὰ τὴν μείζονα παραβλήθῃ ἑλλειπόν εἶδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει⁸.

Ἐστώσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A , $B\Gamma$, ὧν μείζων ἡ $B\Gamma$, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττωτος τῆς A , τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς A , ἴσον παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραλληλόγραμμοι⁹ παραβελήσθω ἑλλειπόν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ $B\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$ μήκει· λέγω ὅτι ἡ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει¹⁰.

poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

Sint duæ rectæ inæquales A , $B\Gamma$, quarum major $B\Gamma$, quartæ autem parti ex minori A quadrati, hoc est quadrato ex dimidiâ A , æquale ad $B\Gamma$ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit sub $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, commensurabilis autem sit $B\Delta$ ipsi $\Delta\Gamma$ longitudine; dico $B\Gamma$ quam A plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.



Τετμήσθω γὰρ ἡ $B\Gamma$ δίχῃ κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ¹¹ ΔE ἴση ἡ EZ . λοιπὴ ἄρα ἡ $\Delta\Gamma$ ἴση ἐστὶ τῇ BZ . Καὶ ἐπεὶ εὐθεία ἡ $B\Gamma$ τέτμηται εἰς

Secetur enim $B\Gamma$ bifariam in puncto E , et ponatur ipsi ΔE æqualis EZ ; reliqua igitur $\Delta\Gamma$ æqualis est ipsi BZ . Et quoniam recta $B\Gamma$ secatur

sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure carrée, et qui soit égal à la quatrième partie du carré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

Soient les deux droites inégales A , $B\Gamma$; que $B\Gamma$ soit la plus grande; appliquons à $B\Gamma$ un parallélogramme qui soit défailant d'un carré, et qui soit égal à la quatrième partie du carré de la plus petite A , c'est-à-dire au carré de la moitié de A ; que ce parallélogramme soit celui qui est sous $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, et que $B\Delta$ soit commensurable en longueur avec $\Delta\Gamma$; je dis que la puissance de $B\Gamma$ surpassera la puissance de A du carré d'une droite commensurable en longueur avec $B\Gamma$.

Partageons $B\Gamma$ en deux parties égales au point E , et faisons EZ égal à ΔE ; le reste $\Delta\Gamma$ sera égal à BZ . Et puisque la droite $B\Gamma$ est coupée en deux parties

μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν¹² ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ¹³ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ¹⁴ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ¹⁵ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίῳ γάρ ἐστι ἡ ΖΔ¹⁶ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ¹⁷ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίῳ γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῇ ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός

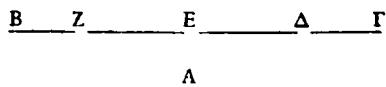
in partes quidem æquales ad Ε, in partes autem inæquales ad Δ; ergo sub ΒΔ, ΔΓ contentum rectangulum cum quadrato ex ΕΔ æquale est quadrato ex ΕΓ, et quadrupla; ergo quater sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum cum quadruplo ex ΔΕ æquale est quater quadrato ex ΕΓ. Sed quidem quadruplo ipsius sub ΒΔ, ΔΓ æquale est ex Α quadratum, quadruplo autem ipsius ex ΔΕ æquale est ex ΔΖ quadratum, dupla enim est ΖΔ ipsius ΔΕ; et quadruplo quadrati ex ΕΓ æquale est ex ΒΓ quadratum, dupla enim est rursus ΒΓ ipsius ΕΓ; ergo ex Α, ΔΖ quadrata æqualia sunt ex ΒΓ quadrato; quare ex ΒΓ quadratum quam quadratum ex Α majus est quadrato ex ΔΖ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et commensurabilem esse ΒΓ ipsi ΖΔ. Quoniam enim commensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, commensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΓΔ longitudine. Sed ΓΔ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ; et ΒΓ igitur commensurabilis est

égales en Ε, et en deux parties inégales en Δ, le rectangle compris sous ΒΔ, ΔΓ avec le carré de ΕΔ sera égal au carré de ΕΓ (5. 2). Mais les quadruples sont égaux aux quadruples; donc quatre fois le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ avec le quadruple carré de ΔΕ est égal au quadruple carré de ΕΓ. Mais le carré de Α est quadruple du rectangle sous ΒΔ, ΔΓ, et le carré de ΔΖ est égal au quadruple carré de ΔΕ, car ΖΔ est double de ΔΕ; et de plus, le carré de ΒΓ est égal au quadruple du carré de ΕΓ; car ΒΓ est double de ΕΓ; donc la somme des carrés des droites Α, ΔΖ est égale au carré de ΒΓ; donc le carré de ΒΓ surpasse le carré de Α du carré de ΔΖ; donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du carré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est commensurable avec ΖΔ. Car puisque ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (16. 10). Mais ΓΔ est commensurable en longueur avec la somme de ΓΔ et de ΒΖ; car ΓΔ égale ΒΖ (6. 10); donc ΒΓ est commen-

158 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι ταῖς BZ, ΓΔ μήκει¹⁸. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ZΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ BΓ μήκει· ἡ BΓ ἄρα τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει¹⁹.

Αλλὰ δὴ ἡ BΓ τῆς A μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει²⁰, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν BΓ παραβλήσθω, ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ BΔ τῇ ΔΓ μήκει.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ BΓ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ZΔ. Δύναται δὲ ἡ BΓ μείζον τῆς A²¹ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ²². σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ BΓ τῇ ZΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ BZ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ BΓ μήκει. Αλλὰ συναμφοτέρος ἡ BZ, ΔΓ σύμ-

ipsis BZ, ΓΔ longitudine; quare et reliquæ ZΔ commensurabilis est BΓ longitudine; ergo BΓ quam A plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

At vero BΓ quam A plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti quadrati ex A æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub BΔ, ΔΓ. Ostendendum est commensurabilem esse BΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BΓ quam A plus posse quadrato ex ZΔ. Sed plus potest BΓ quam A quadrato ex rectâ sibi commensurabili; commensurabilis igitur est BΓ ipsi ZΔ longitudine; quare et reliquæ utrique BZ, ΔΓ commensurabilis est BΓ longitudine. Sed utraque BZ, ΔΓ commen-

surable en longueur avec la somme de BZ et de ΓΔ; donc BΓ est commensurable en longueur avec le reste ZΔ (16. 10); donc la puissance de BΓ surpasse la puissance de A du quarré d'une droite commensurable en longueur avec BΓ.

Mais que la puissance de BΓ surpasse la puissance de A du quarré d'une droite qui soit commensurable en longueur avec BΓ, et appliquons à BΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de A; que ce parallélogramme soit celui qui est sous BΔ, ΔΓ. Il faut démontrer que BΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de BΓ surpasse la puissance de A du quarré de ZΔ. Mais la puissance de BΓ surpasse la puissance de A du quarré d'une droite qui est commensurable avec BΓ; donc BΓ est commensurable en longueur avec ZΔ; donc BΓ est commensurable en longueur avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de BZ et de ΔΓ (16. 10). Mais la somme des droites BZ et ΔΓ est commensurable avec ΔΓ;

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 159

μετρός ἔστι τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἔστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἔστί σύμμετρος μήκει.

Εὰν ἄρα ὡς δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

surabilis est ipsi ΔΓ; quare et ΒΓ ipsi ΓΔ commensurabilis est longitudine; et dividendo igitur ΒΔ ipsi ΔΓ est commensurabilis longitudine.

Si igitur duæ rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ · ιθ'.

Εὰν ὡς δύο εὐθεῖαι ἀνίστοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει¹· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον· δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνῃται² τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει³.

PROPOSITIO XIX.

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sib incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

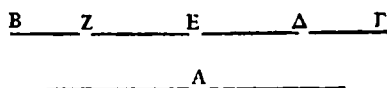
donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (12. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ (16. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

Εστωσαν δύο εὐθείαι ἀνισοί αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῇ δὲ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβελήσθω ἐλλείπον εἶδι τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ.

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum, incommensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον¹, ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῇ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικνίον ὅτι καὶ² ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει³, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α

Iisdem enim constructis quæ suprâ, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et incommensurabilem esse ΒΓ ipsi ΔΖ longitudine. Quoniam enim incommensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, incommensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine. Sed ΔΓ commensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; et ΒΓ igitur incommensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; quare et reliquæ ΖΔ incommensurabilis est ΒΓ longitudine, et ΒΓ quam Α

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit incommensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Ayant fait la même construction qu'auparavant, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΖ. Car puisque ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Mais ΔΓ est commensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (14. 10); donc ΒΓ est incommensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec le reste ΖΔ (17. 10); mais

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἢ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνασθῶ δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβιβάσθω ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δι-
ξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ΑΛΛ' ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ⁸. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπὴ συναμφοτέρῃ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. Αλλὰ συναμφοτέρος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἢ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Εὰν ἄρα ὥστε δύο ὑποεῖαι ἀνισοί, καὶ τὰ ἐξῆς¹⁰.

plus potest quadrato ex ΖΔ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

At plus possit rursus ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit quod sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est incommensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; incommensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ incommensurabilis est ΒΓ. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine; ergo ΒΓ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine; quare et dividendo ΒΔ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine.

Si igitur sunt duæ rectæ inæquales, etc.

la puissance de BR surpasse la puissance de A du quarré de ΖΔ; donc la puissance de BR surpassera la puissance de A du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Mais que la puissance de BR surpasse la puissance de A du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; appliquons à BR un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; et que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ; il faut démontrer que ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de BR surpasse la puissance de A du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de A du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est incommensurable avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (17. 10). Mais la somme de ΒΖ et de ΔΓ est commensurable avec ΔΓ (6. 10); donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (14. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Donc, etc.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ δίδικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἴσι σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει² οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει³ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερόν ὅτι ἰὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ⁴ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὔσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ⁵ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος⁶.

SCHOLIUM.

Quoniam demonstratum est rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ esse commensurabiles, rectas autem potentiâ non semper et longitudine, at vero posse longitudine commensurabiles esse et incommensurabiles; evidens est si expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit longitudine, vocari rationalem et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam rectæ longitudine commensurabiles omnino et potentiâ. Si autem expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit potentiâ, si quidem et longitudine, dicitur et sic rationalis et commensurabilis ipsi longitudine et potentiâ. Si autem expositæ rursus rationali commensurabilis aliqua existens potentiâ, longitudine ipsi fuerit incommensurabilis, dicitur et sic rationalis potentiâ solum commensurabilis.

S C H O L I E.

Puisqu'on a démontré que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur, quoiqu'elles puissent être commensurables et incommensurables en longueur (cor. 9. 10), il est évident que si une droite est commensurable en longueur avec la rationelle proposée, elle est appelée rationelle, et elle est commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance avec la rationelle proposée, puisque les grandeurs commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable non seulement en puissance, mais encore en longueur, avec la rationelle proposée, elle est dite rationelle et commensurable en longueur et en puissance avec la rationelle proposée. Et si enfin une droite commensurable en puissance avec la rationelle proposée lui est incommensurable en longueur, elle est dite rationelle commensurable en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

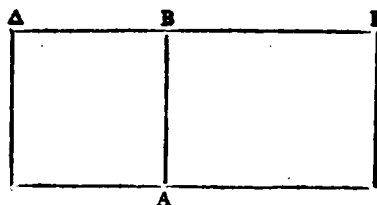
PROPOSITIO XX.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μῆκει συμμέτρων κατὰ τινα τῶν εἰρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιέχεται τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ rectangulum continetur ΑΓ; dico rationale esse ΑΓ.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἵπαι συμμέτρος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μῆκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μῆκει. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ³ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ. ῥητόν δὲ τὸ ΑΔ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Et quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem est ΑΒ ipsi ΒΔ; commensurabilis igitur est ΒΔ ipsi ΒΓ longitudine. Atque est ut ΒΔ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΑΓ; commensurabilis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ, commensurable igitur est et ΑΔ ipsi ΑΓ. Rationale autem ΑΔ; rationale igitur est et ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Ergo sub rationalibus, etc.

PROPOSITION XX.

Le rectangle compris sous des droites rationnelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites rationnelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en longueur; je dis que ΑΓ est rationel.

Car décrivons sur ΑΒ le quarré ΑΔ; le quarré ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Puisque ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ égale ΒΔ, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΒΓ. Mais ΒΔ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΑΓ (1. 6), et ΒΔ est commensurable avec ΒΓ; donc ΑΔ est commensurable avec ΑΓ (10. 10). Mais ΑΔ est rationel; donc ΑΓ est aussi rationel (déf. 9 et pr. 12. 10). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κá.

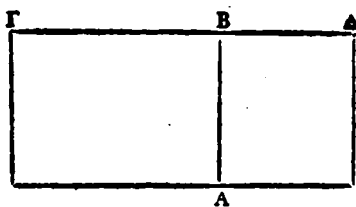
Εὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιῇ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μέκει.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατὰ τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβλήσθω, πλάτος ποιούῃ ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μέκει.

PROPOSITIO XXI.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

Rationale enim ΑΓ ad rationalem ΑΒ secundum aliquem rursus prædictorum modorum applicetur, latitudinem faciens ΒΓ; dico rationalem esse ΒΓ, et commensurabilem ipsi ΑΒ longitudine.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἔστί τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἔστί τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα ἔστί καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Rationale autem et ΑΓ; commensurable igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Atque est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ; commensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ. Æqualis autem ΔΒ

PROPOSITION XXI.

Si une surface rationelle est appliquée à une droite rationelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

Que la surface rationelle ΑΓ soit appliquée, suivant quelqu'un des modes dont nous avons encore parlé, à la rationelle ΑΒ, faisant la largeur ΒΓ; je dis que ΒΓ est rationel et commensurable en longueur avec ΑΒ.

Car décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ; ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Mais ΑΓ est rationel; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (déf. 9 et pr. 12. 10). Mais ΔΑ est à ΑΓ comme ΔΒ est à ΒΓ (1. 6); donc ΔΒ est commensurable avec ΒΓ (10. 10). Mais

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 165

Ἰση δὲ ἡ ΔB τῇ BA · σύμμετρος ἄρα² καὶ ἡ AB τῇ AG . Ρητὴ δὲ ἐστὶν ἡ AB · ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $BΓ$, καὶ σύμμετρος τῇ AB μήκει.

Ἐὰν ἄρα ρητὸν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi BA ; commensurabilis igitur et AB ipsi AG . Rationalis autem est AB ; rationalis igitur est et $BΓ$, et commensurabilis ipsi AB longitudine.

Si igitur rationale, etc.

A H M M A.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνασθῶ γὰρ ἡ A ἄλογον χωρίον, τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνον ἴσον ἔστω ἄλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἡ A ἄλογός ἐστιν.

LEMMA.

Recta quæ potest irrationale spatium, irrationalis est.

Possit enim recta A irrationale spatium, hoc est ex A quadratum æquale sit irrationali spatio; dico A irrationalem esse.

A

Εἰ γὰρ ἔσται ρητὴ ἡ A , ρητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνον, οὕτως γὰρ ἐστὶν² ἐν τοῖς ὅροις. Οὐκ ἐστὶ δὲ ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ A^3 . Ὅπρι εἰδει διῆξαι⁴.

Si enim esset rationalis A , rationale esset ex ipsâ quadratum, sic enim est in definitionibus. Non est autem; irrationalis igitur est A . Quod oportebat ostendere.

AB est égal à BA ; donc AB est commensurable avec AG . Mais AB est rationel; donc $BΓ$ est aussi rationel, et commensurable en longueur avec AB (déf. 6 et pr. 12. 10). Donc, etc.

L E M M E.

La droite dont la puissance est une surface irrationnelle, est irrationnelle.

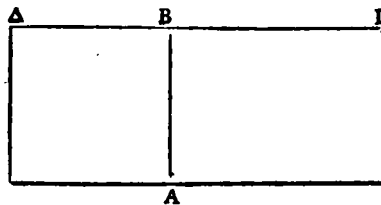
Que la puissance de A soit une surface irrationnelle, c'est-à-dire que le carré de A soit égal à une surface irrationnelle; je dis que A est irrationnel.

Car si A était rationel, le carré de A serait rationel, ainsi que cela est dit dans les définitions (déf. 8 et cor. 9. 10). Mais il ne l'est pas; donc A est irrationnel. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογος ἔσται· καλεῖσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ ὀρθογώνιον περιέχισθω τὸ $ΑΓ$. Λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ $ΑΓ$, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι· καλεῖσθω δὲ μέση.



Αναγινράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔ$. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $ΒΔ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔB$ τῇ $BΓ$ μήκει. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως

Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm commensurabilibus rectis AB , $BΓ$ quadratum continetur $ΑΓ$; dico irrationale esse $ΑΓ$, et rectam quæ potest ipsum irrationalem esse; ea autem vocetur media.

Describatur enim ex AB quadratum $ΑΔ$; rationale igitur est $ΑΔ$. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, potentiâ enim solùm ex supponuntur commensurabiles, æqualis autem AB ipsi $ΒΔ$; incommensurabilis igitur est et $ΔB$ ipsi $BΓ$ longitudine. Atque est ut $ΒΔ$ ad

PROPOSITION XXII.

Le rectangle compris sous des droites rationelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appellera médiale.

Que le rectangle $ΑΓ$ soit compris sous les droites rationelles AB , $BΓ$ commensurables en puissance seulement; je dis que le rectangle $ΑΓ$ est irrationnel, et que la droite dont la puissance est égale à ce rectangle est irrationnelle; que cette droite soit appelée médiale.

Car décrivons sur AB le carré $ΑΔ$; $ΑΔ$ sera irrationnel. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$; car on a supposé que ces deux droites étaient commensurables en puissance seulement, et que de plus AB est égal à $ΒΔ$, $ΔB$ sera incommensurable en longueur avec $BΓ$. Mais $ΒΔ$ est à $BΓ$ comme $ΑΔ$ est à $ΑΓ$

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 167

τὸ $\Delta\Delta$ πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Delta$ τῇ $\Lambda\Gamma$. Πητὸν δὲ τὸ $\Delta\Lambda$ ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Lambda\Gamma$ ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ $\Lambda\Gamma$, τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῇ τετραγώνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση². Οἷον ἴδει δείξαι³.

$\Delta\Gamma$ ita $\Delta\Delta$ ad $\Lambda\Gamma$; incommensurable igitur est $\Delta\Delta$ ipsi $\Lambda\Gamma$. Rationale autem $\Delta\Delta$; irrationalis igitur est $\Lambda\Gamma$; quare et recta quæ potest ipsum $\Lambda\Gamma$, hoc est recta quæ potest æquale ipsi quadratum, irrationalis est. Ea autem vocetur media. Quod oportebat ostendere.

Λ Η Μ Μ Α.

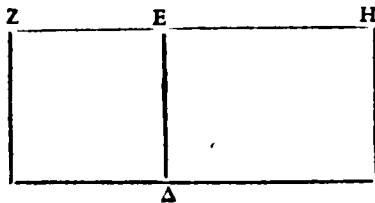
Ἐὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι, ἴστιν¹ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ZE , EH λέγω ὅτι ἴστιν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH .

LEMMA.

Si sint duæ rectæ, est ut prima ad secundam ita quadratum ex primâ ad rectangulum sub duabus rectis.

Sint duæ rectæ ZE , EH ; dico esse ut ZE ad EH ita ex ZE quadratum ad rectangulum sub ZE , EH .



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ZE τετραγώνον τὸ ΔZ , καὶ συμπληρώσθω τὸ $H\Delta$. Ἐπεὶ οὖν ἴστιν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ $Z\Delta$ πρὸς τὸ ΔH ; καὶ ἴσται τὸ μὲν $Z\Delta$ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τὸ δὲ ΔH

Describatur enim ex ZE quadratum ΔZ , et compleatur $H\Delta$. Quoniam igitur est ut ZE ad EH ita $Z\Delta$ ad ΔH , atque est quidem $Z\Delta$ quadratum ex ZE , ΔH vero rectangulum sub

(1. 6); donc $\Delta\Delta$ est incommensurable avec $\Lambda\Gamma$ (10. 10); mais $\Delta\Delta$ est rationel; donc $\Lambda\Gamma$ est irrationnel (déf. 10 et pr. 13. 10); donc la droite dont la puissance égale $\Lambda\Gamma$, c'est-à-dire la droite dont la puissance est un carré égal à $\Lambda\Gamma$ est irrationnelle (déf. 11. 10). Cette droite sera appelée médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMMA.

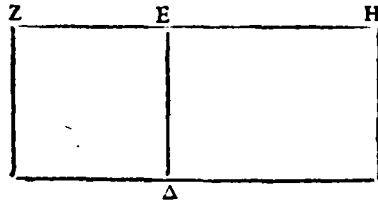
Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le carré de la première est au rectangle compris sous ces deux droites.

Soient les deux droites ZE , EH ; je dis que ZE est à EH comme le carré de ZE est au rectangle compris sous ZE , EH .

Décrivons sur ZE le carré ΔZ , et achevons $H\Delta$. Puisque ZE est à EH comme $Z\Delta$ est à ΔH (1. 6); que $Z\Delta$ est le carré de ZE , et que ΔH est le rectangle sous ΔE

168 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, hoc est sub ZE, EH; est igitur ZE, EH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ut ZE ad EH ita ex ZE quadratum ad rectan-



τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, ΕΗ. Ομοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν HE, EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EZ, τουτίστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ. Οπιρ ἴδιαι δεῖξαι².

gulum sub ZE, EH. Similiter autem et ut sub HE, EZ rectangulum ad quadratum ex EZ, hoc est ut HA ad ZA ita HE ad EZ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Τὸ ἀπὸ μίσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον¹ πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ἐστω μῆσις μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσος παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χώριον ὀρθογώνιον² τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λίγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

Sit media quidem Α, rationalis autem ΓΒ; et quadrato ex Α æquale ad ΒΓ applicetur spatium rectangulum ΒΔ latitudinem faciens ΓΔ; dico rationalem esse ΓΔ, et incommensurabilem ipsi ΓΒ longitudine.

EH, c'est-à-dire sous ZE, EH, la droite ZE est à EH comme le carré de ZE est au rectangle sous ZE, EH. Semblablement le rectangle sous HE, EZ est au carré de EZ, c'est-à-dire HA est à ZA comme HE est à EZ. Ce qu'il fallait démontrer.

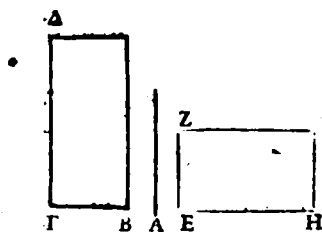
PROPOSITION XXIII.

Le carré d'une médiale appliqué à une rationelle fait une longueur rationelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

Soit la médiale Α, et la rationelle ΓΒ; appliquons à ΒΓ un rectangle ΒΔ, qui soit égal au carré de Α, et qui fasse la largeur ΓΔ; je dis que la droite ΓΔ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΒ.

Επὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ρητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν. Δυνάσθω τὸ ΗΖ. Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΒ τῷ ΗΖ. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόμενα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς

Quoniam enim media est Α, potest spatium contentum sub rationalibus potentia solum commensurabilibus. Possit ΗΖ. Potest autem et ΔΒ; æquale igitur est ΔΒ ipsi ΗΖ. Est autem illi et æquiangulum, æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos; proportionaliter igitur est ut ΒΓ ad ΕΗ ita ΕΖ ad ΓΔ; est igitur et ut ex ΒΓ quadratum



τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ρητὴ γάρ ἐστιν ἑκάτερα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ρητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ρητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰς σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ

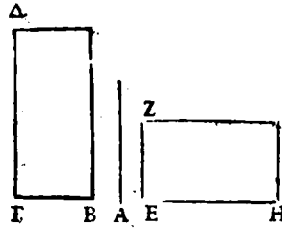
ad ipsum ex ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΓΔ. Commensurable autem est ex ΓΒ quadratum quadrato ex ΕΗ, rationalis enim est utraque ipsarum; commensurable igitur est et ex ΕΖ quadratum quadrato ex ΓΔ. Rationale autem est quadratum ex ΕΖ; rationale igitur est et quadratum ex ΓΔ; rationalis igitur est ΓΔ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΖ ipsi ΕΗ longitudine, potentia enim solum sunt commensurabiles, ut autem ΕΖ ad ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum

Car, puisque la droite Α est médiale, sa puissance égale une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement (22. 10). Que sa puissance soit égale à ΗΖ; mais sa puissance égale aussi ΔΒ; donc ΔΒ égale ΗΖ. Mais ΔΒ est équiangulaire avec ΗΖ; et dans les parallélogrammes équiangulaires et égaux, les côtés qui comprennent des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ΒΓ est à ΕΗ comme ΕΖ est à ΓΔ; donc le carré de ΒΓ est au carré de ΕΗ comme le carré de ΕΖ est au carré de ΓΔ (22. 6). Mais le carré de ΓΒ est commensurable avec le carré de ΕΗ; car chacune de ces droites est rationnelle (22. 10); donc le carré de ΕΖ est aussi commensurable avec le carré de ΓΔ (10. 10). Mais le carré de ΕΖ est rationnel; donc le carré de ΓΔ est rationnel aussi; donc ΓΔ est rationnel. Et puisque la droite ΕΖ est incommensurable en longueur avec ΕΗ; car celle-ci ne lui est commensurable qu'en puissance, et que

170 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, EH· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ³ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῇ ὑπὸ τῶν ZE, EH. Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς EZ σύμμετρον ἐστὶ⁴ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῇ δὲ ὑπὸ τῶν ZE, EH σύμμετρον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσα γάρ

ad rectangulum sub ZE, EH; incommensurable igitur est ex EZ quadratum rectangulo sub ZE, EH. Sed quadrato quidem ex EZ commensurable est quadratum ex ΓΔ, rationales enim sunt potentiâ, rectangulo autem sub ZE, EH commensurable est rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ;



ἐστὶ⁵ τῇ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιεχομένῳ⁶. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. Ὅπρι εἶδει διττῶς.

æqualia enim sunt quadrato ex A; incommensurable igitur est et ex ΓΔ quadratum rectangulo sub ΔΓ, ΓΒ contento. Ut autem ex ΓΔ quadratum ad rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ ita est ΔΓ ad ΓΒ; incommensurabilis igitur est ΔΓ ipsi ΓΒ longitudine; rationalis igitur est ΓΔ et incommensurabilis ipsi ΓΒ longitudine. Quod oportebat ostendere.

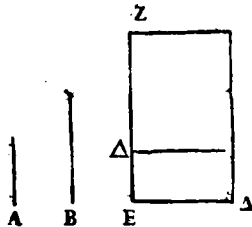
EZ est à EH comme le quarré de EZ est au rectangle sous ZE, EH (lem. 22. 10), le quarré de EZ est incommensurable avec le rectangle sous ZE, EH (10. 10). Mais le quarré de ΓΔ est commensurable avec le quarré de EZ, car ces droites sont rationelles en puissance, et le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ZE, EH, car ils sont égaux chacun au quarré de A; donc le quarré de ΓΔ est incommensurable avec le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ (13. 10). Mais le quarré de ΓΔ est au rectangle sous ΔΓ, ΓΒ comme ΔΓ est à ΓΒ (lem. 22); donc ΔΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ; donc ΓΔ est rationel et incommensurable en longueur avec ΓΒ (déf. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

Ἐστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβελήσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν



τὴν ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῇ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμ-

Recta mediæ commensurabilis media est.

Sit media Α, et ipsi Α commensurabilis sit Β; dico et Β mediam esse.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex Α æquale ad ΓΔ applicetur spatium rectangulum ΓΕ latitudinem faciens ΕΔ; rationalis igitur est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quadrato autem ex Β æquale ad ΔΓ applicetur spatium rectangulum ΓΖ lati-

tudinem faciens ΖΔ. Quoniam igitur commensurabilis est Α ipsi Β, commensurable est et ex Α quadratum quadrato ex Β. Sed quadrato quidem ex Α æquale est ΕΓ, quadrato autem

PROPOSITION XXIV.

Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

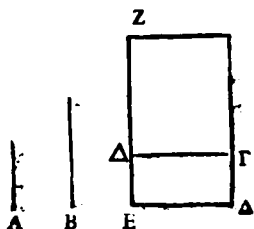
Soit la médiale Α, et que Β soit commensurable avec Α; je dis que la droite Β est médiale.

Car soit la rationnelle ΓΔ, et soit appliqué à ΓΔ un rectangle ΓΕ qui, faisant la largeur ΕΔ, soit égal au carré de Α; la droite ΕΔ sera rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Soit aussi appliqué à ΔΓ un rectangle ΓΖ qui, faisant la largeur ΖΔ, soit égal au carré de Β. Puisque Α est commensurable avec Β, le carré de Α sera commensurable avec le carré de Β (cor. 9. 10). Mais ΕΓ est égal au carré de Α, et ΓΖ est égal au carré de Β;

172 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μικρον ἄρα ἰστί τὸ ΕΓ τῇ ΓΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἰστί ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. Ρητὴ δὲ ἰστί ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἰστί καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει

ex B æquale ΓΖ; commensurable igitur est ΕΓ ipsi ΓΖ. Atque est ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΕΔ ad ΔΖ; commensurabilis igitur est ΕΔ ipsi ΔΖ longitudine. Rationalis autem est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; rationalis igitur est et ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; ergo ΓΔ, ΔΖ rationales sunt, potentiâ



μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυνάμει μέση ἰστί³. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυνάμει μέση ἰστί, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἰστί ἡ Β.

solùm commensurabiles. Recta autem quæ potest rectangulum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus media est; recta igitur quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ media est, et potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ ipsa B; media igitur est B.

donc ΕΓ est commensurable avec ΓΖ. Mais ΕΓ est à ΓΖ comme ΕΔ est à ΔΖ (1. 6); donc ΕΔ est commensurable en longueur avec ΔΖ (10. 10). Mais la droite ΕΔ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (23. 10); donc la droite ΔΖ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (13. 10); donc les droites ΓΔ, ΔΖ sont rationnelles et commensurables en puissance seulement. Mais la droite dont la puissance égale un rectangle sous des rationelles commensurables en puissance seulement, est une médiale (22. 10); donc la droite, dont la puissance égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ, est une médiale; mais la puissance de B égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ; donc la droite B est une médiale.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι τὰ τῇ μίση χωρίῳ σύμμετρον μίσον ἐστί. Δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθιῖαι αἱ εἰς δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἰστέρα μίση ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ μίση ἐστί. Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ρητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μίσων ἑξακολουθεῖ τὰν τῇ μίση μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μίσην, καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδὴ περ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Εὰν δὲ τῇ μίση σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, ἢ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μίσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει². Εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι³.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurabile medium esse. Possunt enim ipsa rectæ quæ sunt potentiâ commensurabiles, quarum altera media; quare et reliqua media est. Congruenter autem ipsis in rationalibus dictis, et in mediis quoque colligetur, rectam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam universè rectæ longitudine commensurabiles semper et potentiâ. Si autem mediæ commensurabilis aliqua recta fuerit potentiâ, siquidem et longitudine, dicuntur et sic mediæ et commensurabiles longitudine et potentiâ. Si autem potentiâ solum, dicuntur mediæ potentiâ solum commensurabiles.

COROLLAIRE.

De là il est évident qu'une surface commensurable avec une surface médiale est médiale. Car les droites dont les puissances sont égales à ces surfaces sont commensurables en puissance, et l'une de ces droites est médiale; donc la droite restante est médiale. Mais d'après ce qui a été dit dans les rationnelles, on peut conclure dans les médiales qu'une droite commensurable à une médiale est une médiale, cette droite lui étant commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance; car généralement les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable en puissance avec une médiale, et si elle l'est aussi en longueur, les médiales sont dites commensurables en longueur et en puissance. Mais si elles ne sont commensurables qu'en puissance, elles sont dites médiales commensurables en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

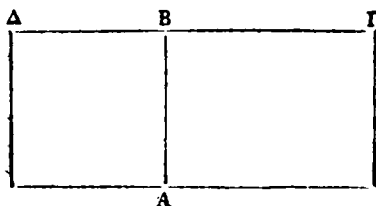
PROPOSITIO XXV.

Τὸ ὑπὸ μέσων μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν κατὰ τινὰ τῶν εἰρημάτων τρόπων περιχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν.

Υπὸ γὰρ μέσων μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Sub mediis longitudine commensurabilibus secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ; dico ΑΓ medium esse.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἵπαι σύμμετρος ἐστὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μῆκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μῆκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρον ἐστὶ. Μέσον δὲ τὸ ΔΑ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; medium igitur est ΑΔ. Et quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem ΑΒ ipsi ΒΔ; commensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ longitudine; quare et ΔΑ ipsi ΑΓ commensurabile est. Medium autem ΔΑ; medium igitur et ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXV.

Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites médiales ΑΒ, ΒΓ commensurables en longueur; je dis que ΑΓ est médial.

Décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ, ΑΔ sera médial (cor. 24. 10). Et puisque ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ est égal à ΒΔ, la droite ΔΒ est commensurable en longueur avec ΒΓ; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ. Mais ΔΑ est médial (cor. 24. 10); donc ΑΓ est aussi médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

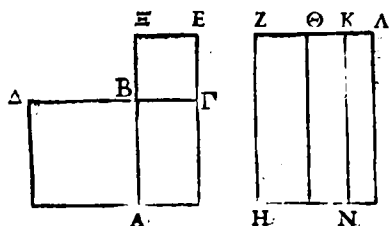
PROPOSITIO XXVI.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐ-
θειῶν περιχόμενον ὀρθογώνιον, ἥτοι ῥητὸν ἢ
μέσον ἐστίν.

Sub mediis potentiâ solùm commensurabi-
libus rectis contentum rectangulum, vel ratio-
nale vel medium est.

Υπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων
εὐθειῶν τῶν AB , BF περιχέσθω ὀρθογώνιον² τὸ
 AG . λέγω ὅτι τὸ AG ἥτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν³.

Sub mediis enim potentiâ solùm commensura-
bilibus rectis AB , BF contineatur rectangulum
 AG ; dico AG vel rationale vel medium esse.



Αναγινράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB , BF τετράγωνα
τὰ AD , BE . μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν
 AD , BE . Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ ZH , καὶ τῇ μὲν
 AD ἴσον παρὰ τὴν ZH παρατεθείσθω ὀρθογώνιον
παρὰλληλόγραμμον τὸ HO πλάτος ποιοῦν τὴν
 ZO , τῇ δὲ AG ἴσον παρὰ τὴν OM παρατε-
θείσθω ὀρθογώνιον παρὰλληλόγραμμον τὸ MK

Describantur enim ex AB , BF quadrata AD ,
 BE ; medium igitur est utrumque ipsorum AD ,
 BE . Et exponatur rationalis ZH , et ipsi quidem
 AD æquale ad ZH applicetur rectangulum pa-
rallelogrammum HO latitudinem faciens ZO ,
ipsi autem AG æquale ad OM applicetur rectan-
gulum parallelogrammum MK latitudinem fa-

PROPOSITION XXVI.

Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationel ou médial.

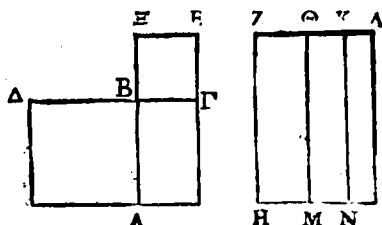
Que le rectangle AG soit compris sous les droites médiales AB , BF , commensurables en puissance seulement; je dis que AG est ou rationel ou médial.

Car décrivons sur les droites AB , BF les quarrés AD , BE ; chacun des quarrés AD , BE sera médial. Soit la rationelle ZH ; appliquons à ZH le parallélogramme rectangle HO , qui ayant ZO pour largeur, soit égal à AD ; appliquons aussi à OM le parallélogramme rectangle MK , qui ayant OK pour largeur, soit égal à

176 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἴτι τῇ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παρατελέσθω τὸ ΝΑ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῇ

ciens ΘΚ, et adhuc ipsi ΒΕ æquale similiter ad ΚΝ applicetur ΝΑ latitudinem faciens ΚΛ; in rectâ igitur sunt ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΔ, ΒΕ, atque est æquale quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum



ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῇ ΝΑ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παρά- κειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερα τῶν ΖΘ, ΚΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ⁵ σύμμετρον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῇ ΒΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῇ ΝΑ. Καὶ ἴστιν⁶ ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἢ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμε- τρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΖΘ, τῇ ΚΛ μήκει· αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΒΓ· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς

autem ΒΕ ipsi ΝΑ; medium igitur et utrumque ipsorum ΗΘ, ΝΑ, et ad rationalem ΖΗ appli- catur; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΖΘ, ΚΛ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longi- tudine. Et quoniam commensurabile est ΑΔ ipsi ΒΕ; commensurabile igitur est et ΗΘ ipsi ΝΑ. Atque est ut ΗΘ ad ΝΑ ita ΖΘ ad ΚΛ; com- mensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΚΛ longitudine; ergo ΖΘ, ΚΛ rationales sunt longitudine com- mensurabiles; rationale igitur est rectangulum sub ΖΘ, ΚΛ. Et quoniam æqualis est quidem ΒΔ ipsi ΒΑ, ipsa autem ΕΒ ipsi ΒΓ; est igitur ut ΔΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΕ. Sed ut ΔΒ ad ΒΓ

ΑΓ, et enfin appliquons semblablement à ΚΝ le parallélogramme rectangle ΝΑ, qui ayant ΚΑ pour largeur, soit égal à ΒΕ (45. 1); les droites ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ seront en ligne droite (14. 1). Puisque chacun des quarrés ΑΔ, ΒΕ est médial; que ΑΔ est égal à ΗΘ, et ΒΕ égal à ΝΑ, chacun des rectangles ΗΘ, ΝΑ sera médial; mais ils sont appliqués sur la rationelle ΖΗ; donc chacune des droites ΖΘ, ΚΛ est rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10). Mais ΑΔ est commensurable avec ΒΕ; donc ΗΘ est commensurable avec ΝΑ. Mais ΗΘ est à ΝΑ comme ΖΘ est à ΚΛ (1. 6); donc ΖΘ est commensurable en longueur avec ΚΛ (10. 10); donc les droites ΖΘ, ΚΛ sont des rationelles commensurables en longueur; le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est donc rationel. Et puisque ΒΔ est égal à ΒΑ, et ΕΒ égal à ΒΓ, ΔΒ sera à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΕ; mais ΔΒ est à ΒΓ

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 177

τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἰσὸν δὲ ἴσθι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΑ· ἴσθιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΑ· ἴσθιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΑ ἴσον ἴσθι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΑ· ρητὸν ἄρα ἴσθι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ρητὴ ἄρα ἴσθιν ἡ ΘΚ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἴσθι τῇ ΖΗ μήκει, ρητὸν ἴσθι τὸ ΘΝ. Εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἴσθι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ ρηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἴσθι τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα ἥτοι ρητὸν ἢ μέσον ἴσθιν. Ἰσὸν δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἥτοι ρητὸν ἢ μέσον ἴσθι.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

ita ΔΑ ad ΑΓ; ut autem ΑΒ ad ΒΞ ita ΑΓ ad ΓΞ; est igitur ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΞ. Æquale autem est quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum vero ΑΓ ipsi ΜΚ, ipsum et ΓΞ ipsi ΝΑ; est igitur ut ΗΘ ad ΜΚ ita ΜΚ ad ΝΑ; est igitur et ut ΖΘ ad ΘΚ ita ΘΚ ad ΚΑ; rectangulum igitur sub ΖΘ, ΚΑ æquale est quadrato ex ΘΚ. Rationale autem rectangulum sub ΖΘ, ΚΑ; rationale igitur est et quadratum ex ΘΚ; rationalis igitur est ΘΚ. Et si quidem commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine, rationale est ΘΝ. Si autem incommensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine, ipsæ ΚΘ, ΘΜ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΘΝ; ergo ΘΝ vel rationale vel medium est. Æquale autem ΘΝ ipsi ΑΓ; ergo ΑΓ vel rationale vel medium est.

Ergo sub mediis, etc.

comme ΔΑ est à ΑΓ, et ΑΒ est à ΒΞ comme ΑΓ est à ΓΞ (1. 6); donc ΔΑ est à ΑΓ comme ΑΓ est à ΓΞ. Mais ΑΔ est égal à ΗΘ, ΑΓ égal à ΜΚ, et ΓΞ égal à ΝΑ; donc ΗΘ est à ΜΚ comme ΜΚ est à ΝΑ; donc ΖΘ est à ΘΚ comme ΘΚ est à ΚΑ; le rectangle compris sous ΖΘ, ΚΑ est donc égal au quarré de ΘΚ (17. 6). Mais le rectangle sous ΖΘ, ΚΑ est rationel (20. 10); donc le quarré de ΘΚ est rationnel; donc la droite ΘΚ est rationelle. Et si ΘΚ est commensurable en longueur avec ΖΗ, la surface ΘΝ sera rationelle. Mais si ΘΚ est incommensurable en longueur avec ΖΗ, les droites ΚΘ, ΘΜ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, et la surface ΘΝ sera médiale (22. 10); donc ΘΝ est rationel ou médial. Mais ΘΝ est égal à ΑΓ; donc ΑΓ est ou rationel ou médial. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

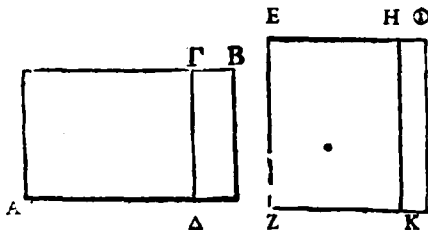
PROPOSITIO XXVII.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπέρχει ρητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ AB μέσου τοῦ AG ὑπερέχτω ρητῷ τῷ ΔB , καὶ ἐκκείσθω ρητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ $Z\Theta$ πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$, τῷ δὲ AG ἴσον ἀφαιρήσθω τὸ ZH . λοιπὸν ἄρα τὸ BA λοιπῷ τῷ $K\Theta$ ἴστί. Ρητὸν δὲ ἴστί τὸ ΔB ρυτὸν

Medium non medium superat rationali.

Si enim possibile, medium AB medium AG superet rationali ΔB , et exponatur rationalis EZ , et ipsi AB æquale ad EZ applicetur parallelogrammum rectangulum $Z\Theta$ latitudinem faciens $E\Theta$, ipsi autem AG æquale auferatur ZH ; reliquum igitur BA reliquo $K\Theta$ est æquale. Rationale autem est ΔB ; rationale igitur est et



ἄρα ἴστί καὶ τὸ $K\Theta$. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἴστί· κάτιρον τῶν AB , AG , καὶ ἴστί τὸ μὲν AB τῷ $Z\Theta$ ἴσον, τὸ δὲ AG τῷ ZH · μέσον ἄρα καὶ· κάτιρον τῶν $Z\Theta$, ZH . Καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται²· ρητὴ ἄρα ἴστί· ἑκατέρα τῶν $E\Theta$, EH , καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἵπσι

$K\Theta$. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AB , AG , atque est quidem AB ipsi $Z\Theta$ æquale, ipsum autem AG ipsi ZH ; medium igitur et utrumque ipsorum $Z\Theta$, ZH . Et ad rationalem EZ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum $E\Theta$, EH , et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam rationale est

PROPOSITION XXVII.

Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

Car, que la surface médiale AB , s'il est possible, surpasse la surface médiale AG d'une surface rationnelle ΔB ; soit la rationnelle EZ ; appliquons à EZ le parallélogramme rectangle $Z\Theta$, qui, étant égal à AB , ait $E\Theta$ pour largeur (45. 1); et de $Z\Theta$ retranchons ZH égal à AG ; le reste BA sera égal au reste $K\Theta$. Mais ΔB est rationel donc $K\Theta$ est rationel. Et puisque chacune des surfaces AB , AG est médiale, que AB est égal à $Z\Theta$, et que AG est égal à ZH , chacune des surfaces $Z\Theta$, ZH sera médiale. Mais ces surfaces sont appliquées à EZ ; donc chacune des droites $E\Theta$, EH est rationnelle et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). Et puisque ΔB est

ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καὶ ἴσιν τῷ ΚΘ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΞ ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἴσιν ὥς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ³. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφοτέρω ἄρα τάτε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλλον ἄρα ἐστὶ⁴ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. Ἀλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μίσου, καὶ τὰ ἱζῆς.

ΔΒ, atque est æquale ipsi ΚΘ; rationale igitur est et ΚΘ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΗΘ, et commensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Sed et ΕΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine; incommensurabilis igitur est ΕΗ ipsi ΗΘ longitudine. Atque est ut ΕΗ ad ΗΘ ita ex ΕΗ quadratum ad rectangulum sub ΕΗ, ΗΘ; incommensurable igitur est ex ΕΗ quadratum rectangulo sub ΕΗ, ΗΘ. Sed quadrato quidem ex ΕΗ commensurabilia sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, rationalia enim utraque, rectangulo autem sub ΕΗ, ΗΘ commensurable est rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, duplum enim est ipsius; incommensurabilia igitur sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata rectangulo bis sub ΕΗ, ΗΘ; et utraque igitur ex ΕΗ, ΗΘ quadrata et rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, quod est quadratum ex ΕΘ, incommensurabilia sunt quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. Rationalia autem quadrata ex ΕΗ, ΗΘ; irrationalis igitur est quadratum ex ΕΘ; irrationalis igitur est ΕΘ. Sed et rationalis, quod est impossibile.

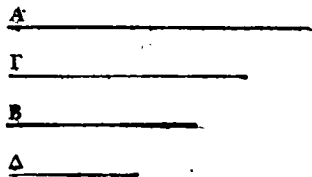
Medium igitur medium, etc.

rationel, et qu'il est égal à ΚΘ, ΚΘ sera rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΗΘ est rationel et commensurable en longueur avec ΕΖ (21. 10). Mais ΕΗ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ; donc ΕΗ est incommensurable en longueur avec ΗΘ (13. 10). Mais ΕΗ est à ΗΘ comme le carré de ΕΗ est au rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (1. 6); donc le carré de ΕΗ est incommensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le carré de ΕΗ, car ces carrés sont rationels et le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, car il en est le double; donc la somme des carrés de ΕΗ et de ΗΘ est incommensurable avec le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (14. 10); donc la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ, du double du rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, qui est le carré de ΕΘ (4. 2), est incommensurable avec la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ (17. 10). Mais les carrés de ΕΗ et de ΗΘ sont rationels; donc le carré de ΕΘ est irrational (déf. 10. 10); donc ΕΘ est irrational. Mais il est rationel, ce qui est impossible. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους,
ῥητὸν περιχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B , καὶ εἰλήφθω τῶν A, B μίση ἀνάλογον ἡ Γ , καὶ γιγόνετω ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ .



Καὶ ἐπεὶ αἱ A, B ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B , τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ , μίσην ἐστὶ μίση ἄρα ἡ Γ . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , αἱ δὲ A, B δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσι σύμμετροι. Καὶ ἐστὶ μίση ἡ Γ μίση ἄρα καὶ ἡ Δ · αἱ Γ, Δ ἄρα μίσαι εἰσι δυνάμει μόνον

PROPOSITIO XXVIII.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

Exponentur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B , et sumatur ipsarum A, B media proportionalis Γ , et fiat ut A ad B ita Γ ad Δ .

Et quoniam A, B rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub A, B , hoc est quadratum ex Γ , medium est; media igitur Γ . Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ , ipsæ autem A, B potentiâ solùm commensurabiles; et Γ, Δ igitur potentiâ solùm commensurabiles. Atque est media Γ ; media igitur et Δ ; ergo Γ, Δ mediæ sunt potentiâ

PROPOSITION XXVIII.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationelle.

Soient A, B deux rationelles commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Γ entre A et B (13. 6), et faisons en sorte que A soit à B comme Γ est à Δ (12. 6).

Puisque les rationelles A, B sont commensurables en puissance seulement, le rectangle sous A, B (22. 10), c'est-à-dire le carré de Γ , est médial (17. 6); donc Γ est médial. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ , et que les droites A, B ne sont commensurables qu'en puissance; les droites Γ, Δ ne sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10); donc les droites Γ, Δ sont des médiales commensurables en puissance

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 181

σύμμετροι. Λέγω δὴ² ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἴσιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ ἀλλάξ ἄρα ἴσιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως³ ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Ἀλλὰ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως⁴ ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ⁵ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηται ἄρα μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι⁶.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσας εὐρεῖν δυνάμεις μόνον συμμέτρους, μίσην περιχοῦσας.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς¹ ῥηταὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως² ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι

solùm commensurabiles. Dico et ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, permutando igitur est ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Sed ut Α ad Γ ita Γ ad Β; et ut igitur Γ ad Β ita Β ad Δ; rectangulum igitur sub Γ, Δ æquale est quadrato ex Β. Rationale autem quadratum ex Β; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm commensurabiles. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIX.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

Exponantur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles Α, Β, Γ, et sumatur ipsarum Α, Β media proportionalis Δ, et fiat ut Β ad Γ ita Δ ad Ε.

Quoniam Α, Β rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub Α, Β,

seulement (24. 10). Je dis aussi qu'elles comprennent une surface rationelle. Car puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, par permutation Α est à Γ comme Β est à Δ (16. 5). Mais Α est à Γ comme Γ est à Β; donc Γ est à Β comme Β est à Δ; donc le rectangle sous Γ, Δ est égal au carré de Β (17. 6). Mais le carré de Β est rationel; le rectangle sous Γ, Δ est donc aussi rationel.

On a donc trouvé des médiales commensurable en puissance seulement. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXIX.

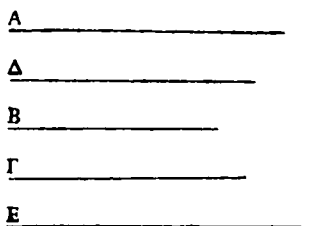
Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface mediale.

Soient les trois rationelles Α, Β, Γ commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Δ entre Α et Β (13. 6), et faisons en sorte que Β soit à Γ comme Δ est à Ε (12. 6).

Puisque les droites Α, Β sont des rationelles commensurables en puissance seulement, le rectangle sous Α, Β (22. 10), c'est-à-dire le carré de Δ (17. 6)

τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστὶ μέση ἄρα ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως³ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσὶ⁴. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὲ ὅτι μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν

hoc est quadratum ex Δ, medium est; media igitur Δ. Et quoniam Β, Γ potentiâ solùm sunt commensurabiles, atque est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε; ergo Δ, Ε commensurabiles potentiâ solùm sunt. Media autem Δ; media igitur et Ε; ergo Δ, Ε mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico etiam ipsas medium con-



ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως⁵ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως⁶ ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. Ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως⁷ ἡ Δ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως⁸ ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι⁹.

tinere. Quoniam enim est ut Β ad Γ ita Δ ad Ε, permutando igitur ut Β ad Δ ita Γ ad Ε. Ut autem Β ad Δ ita Δ ad Α, et ut igitur Δ ad Α ita Γ ad Ε; rectangulum igitur sub Α, Γ æquale est rectangulo sub Δ, Ε. Medium autem rectangulum sub Α, Γ; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes. Quod oportebat facere.

sera médial; donc la droite Δ est médiale. Et puisque les droites Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, et que Β est à Γ comme Δ est à Ε, les droites Δ, Ε ne sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10); donc les droites Δ, Ε sont des médiæ commensurables en puissance seulement. Je dis aussi qu'elles comprennent une surface médiale; car puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, par permutation Β est à Δ comme Γ est à Ε. Mais Β est à Δ comme Δ est à Α; donc Δ est à Α comme Γ est à Ε; donc le rectangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε (16. 6). Mais le rectangle sous Α, Γ est médial (22. 10); donc le rectangle sous Δ, Ε est médial.

On a donc trouvé des médiæ commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale. Ce qu'il fallait faire.

ΛΗΜΜΑ Α.

LEMMA I.

Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκεῖμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AB , $BΓ$, ἑστώσαν δὲ ἢ ἥτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ ἴαντε ἀπὸ ἄρτιου ἄρτιος ἀφαιρῇ, ἴαντε ἀπὸ περιττοῦ περιττός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ $ΑΓ$ ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω ὁ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ Δ . Ἐστώσαν δὲ καὶ οἱ AB , $BΓ$ ἥτοι ἕμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ἕμοιοί

Invenire duos numeros quadratos, ita ut et compositus ex ipsis sit quadratus.

Exponentur duo numeri AB , $BΓ$, sint autem vel pares vel impares. Et quoniam sive à pari par auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est; reliquus igitur $ΑΓ$ par est. Secetur $ΑΓ$ bifariam in Δ . Sint autem et AB , $BΓ$ vel similes plani vel quadrati, qui et ipsi similes

$A \Delta F B$

εἶσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ² τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ³ ἀπὸ τοῦ $ΓΔ$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔB τετραγώνῳ. Καὶ ἐστὶ τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν AB , $BΓ$, ἐπειδὴ περὶ εἰδείχθη ὅτι ἴαν δύο ἕμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὐρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅ, τὲκ τῶν AB , $BΓ$, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $ΓΔ$, οὗ συντεθείη τις ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ ΔB τετράγωνον. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι⁴.

plani sunt; ergo sub AB , $BΓ$ numerus cum quadrato ex $ΓΔ$ æqualis est ex ΔB quadrato. Atque est quadratus ex AB , $BΓ$ numerus, quoniam ostensum est si duo similes plani sese multiplicantes faciant aliquem, factum quadratum esse; inventi sunt igitur duo quadrati numeri, et quadratus ex AB , $BΓ$, et quadratus ex $ΓΔ$, qui compositi faciunt ex ΔB quadratum. Quod oportebat facere.

LEMME I.

Trouver deux nombres quarrés, de manière que leur somme soit un quarré.

Soient les deux nombres AB , $BΓ$; qu'ils soient ou pairs ou impairs. Puisque si d'un nombre pair on ôte un nombre pair, ou si d'un nombre impair on ôte un impair, le reste est pair (24, et 26. 9); le reste $ΑΓ$ est donc pair. Partageons $ΓΑ$ en deux parties égales en Δ . Que les nombres AB , $BΓ$ soient ou des plans semblables ou des quarrés qui sont eux-mêmes des plans semblables; le produit de AB par $BΓ$ avec le quarré de $ΓΔ$ sera égal au quarré de ΔB (6. 2). Mais le produit de AB par $BΓ$ est un quarré; car on a démontré que si deux plans semblables se multipliant eux-mêmes font un nombre, le produit est un quarré (1. 9); on a donc trouvé deux nombres quarrés, savoir le produit de AB par $BΓ$, et le quarré de $ΓΔ$, dont la somme égale le quarré de ΔB . Ce qu'il fallait faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὗρηται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὃ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν¹ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ᾖσιν ἐπίπεδοι². Οταν δὲ μὴ ᾖσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὗρηται δύο τετράγωνοι, ὃ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ³ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος⁴.

ΛΗΜΜΑ Β'.

Εὗρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἕξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Εστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαιμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ¹. φανερὸν δὲ ὅτι ὁ² ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³

COROLLARIUM.

Et manifestum est inventos esse rursus duos quadratos, et quadratum ex ΒΔ et quadratum ex ΓΔ, ita ut excessus ipsorum sub ΑΒ, ΒΓ sit quadratus, quando ΑΒ, ΒΓ similes sunt plani. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et quadratus ex ΒΔ et quadratus ex ΓΔ, quorum excessus sub ΑΒ, ΒΓ non est quadratus.

LEMMA II.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut ex ipsis compositus non sit quadratus.

Sit enim sub ΑΒ, ΒΓ, ut dicebamus, quadratus, et par ipse ΓΑ, et secetur ΓΑ bifariam in Δ; evidens est utique ex ΑΒ, ΒΓ quadratum

COROLLAIRE.

Il est évident de plus qu'on a trouvé deux quarrés, savoir le quarré de ΒΑ et celui de ΓΔ, de manière que leur différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, est un quarré, lorsque les nombres ΑΒ, ΒΓ sont des plans semblables. Mais lorsque ces nombres ne sont pas des plans semblables, on trouve deux quarrés, celui de ΒΔ et celui de ΓΔ, dont la différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, n'est pas un quarré.

LEMME II.

Trouver deux nombres quarrés, dont la somme ne soit pas un quarré.

Que le produit de ΑΒ par ΒΓ soit un quarré, comme nous l'avons dit; que ΓΑ soit un nombre pair; partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Il est évident que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré

ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ⁴ ΒΔ τετραγώνῳ. Αφηρήσθω⁵ μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνος⁶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁷ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁸ ΒΔ τετραγώνου. Λίγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁹ ΓΕ οὐκ ἐστὶ¹⁰ τετραγώνος.

Εἰ γὰρ ἴσται τετραγώνος, ἥτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ¹¹ ΒΕ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ¹², οὐκ ἐτίθεται καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονὰς¹³.

cum quadrato ex ΓΔ æqualem esse quadrato ex ΒΔ. Auferatur unitas ΔΕ; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ minor est quadrato ex ΒΔ. Dico igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratum cum quadrato ex ΓΕ non esse quadratum.

Si enim fuerit quadratus, vel æqualis est quadrato ex ΒΕ vel minor quadrato ex ΒΕ, non autem et major, ut ne secetur unitas. Sit, si pos-

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ Β

Εστω εἰ δυνατόν πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίον ὁ ΗΑ¹⁴. Ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίον, ὁ δὲ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίον¹⁵. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίον· δίχα ἄρα τίτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁶ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ¹⁷ ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ,

sibile, primum ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΒΕ, et sit ipsius ΔΕ unitatis duplus ΗΑ. Quoniam igitur totus ΑΓ totius ΓΔ est duplus, ipse autem ΑΗ ipsius ΔΕ est duplus; et reliquus igitur ΗΓ reliqui ΕΓ est duplus; bifariam igitur secatur ΗΓ in Ε; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Sed et ex ΑΒ, ΒΓ

de ΓΔ est égal au carré de ΒΔ (6. 2). Retranchons l'unité ΔΕ; le carré qui résultera du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ sera plus petit que le carré de ΒΔ. Et je dis que le carré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ n'est pas un carré.

Car si ce nombre est un carré, ou il est égal au carré de ΒΕ, ou il est plus petit que lui; mais il ne peut pas être plus grand; car, si cela était, l'unité serait partagée. Que le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ soit d'abord égal au carré de ΒΕ, si cela est possible, et que ΗΑ soit double de l'unité ΔΕ. Puisque ΑΓ tout entier est double de ΓΔ tout entier, et que ΑΗ est double de ΔΕ, le reste ΗΓ sera double du reste ΕΓ; donc ΗΓ est partagé en deux parties égales en Ε; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est égal au carré de ΒΕ (6. 2).

186. LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁹ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν²⁰ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ²¹ ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιρέθιντος τοῦ ἀπὸ τοῦ²² ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ²³, ἔπιρ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ²⁴ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ²⁵ ΒΕ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἰλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ²⁶ ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἴστω τῷ ἀπὸ τοῦ²⁷ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ

quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis supponitur quadrato ex ΒΕ; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ. Et detractio communi quadrato ex ΓΕ, concludetur ΑΒ æqualis ipsi ΗΒ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Dico etiam neque minorem quadrato ex ΒΕ. Si enim possibile, sit quadrato ex ΒΖ æqualis, et ipsius

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ Β .

διπλασίον²⁸ ὁ ΘΑ. Καὶ²⁹ συναχθῆσεται πάλιν διπλασίον³⁰ ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸν ΓΘ ἄλλα τετμήσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἢ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³¹ ΖΓ ἴσον γενέσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ³² ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³³ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ³⁴ ΖΒ· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ³⁵, ἔπιρ ἄτοπον· οὐκ ἄρα

ΔΖ duplus ΘΑ. Et concludetur rursus duplus ΘΓ ipsius ΓΖ, ita ut et ΓΘ bifariam dividatur in Ζ; et ob id ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΖΓ æqualis fit quadrato ex ΒΖ. Supponitur autem et ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΖΒ; quare et ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΖ æqualis erit quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus

Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est supposé égal au quarré de ΒΕ; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ. Le quarré commun de ΓΕ étant retranché, on conclura que ΑΒ est égal à ΗΒ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas égal au quarré de ΒΕ. Je dis, de plus, qu'il n'est pas plus petit que le quarré de ΒΕ. Car, si cela est possible, qu'il soit égal au quarré de ΒΖ, et que ΘΑ soit double de ΔΖ. On conclura encore que ΘΓ est double de ΓΖ, de manière que ΓΘ sera partagé en deux parties égales en Ζ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le quarré de ΖΓ sera égal au quarré de ΒΖ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est supposé égal au quarré de ΖΒ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΖ sera égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 187

ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³⁶ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ³⁷ ἐλάττωσι τοῦ ἀπὸ BE. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ³⁸ τῷ ἀπὸ τοῦ BE, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· ³⁹οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁴⁰ ΓΕ τετράγωνός ἐστι. Δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύται, ἀρκέσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος⁴¹, ἵνα μὴ μακρότερας οὐσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Εὕρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμεις μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττωτος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκίσθω γάρ τις ῥητὴ ἢ AB, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν¹ ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γράψω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ

cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato minori quam est ipse ex BE. Ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque majori quam est ipse; non igitur ex AB, BG quadratus cum quadrato ex ΓΕ quadratus est. Cum autem possibile sit, et in pluribus modis quod dictum demonstrare, sufficiat nobis expositus, ut ne longam tractationem longius producamus.

PROPOSITIO XXX.

Invenire duas rationales potentias solum commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine.

Exponentur enim aliqua rationalis AB, et duo quadrati numeri ΓΔ, ΔΕ, ita ut excessus ipsorum ΓΕ non sit quadratus, et describatur super rectam AB semicirculus AZB, et fiat

par BG avec le carré de ΓΕ n'est pas égal à un plus petit carré que celui de BE. Mais on a démontré qu'il n'est pas égal au carré de BE, ni à un carré plus grand. Donc le produit de AB par BG avec le carré de ΓΕ n'est pas un carré. Ce lemme peut se démontrer de plusieurs manières; je me contenterai de celle que je viens d'exposer, afin de ne pas être trop long.

PROPOSITION XXX.

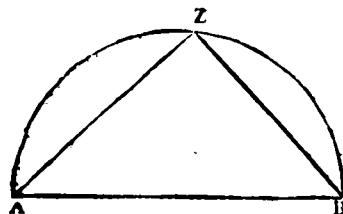
Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient une rationnelle AB, et deux nombres carrés ΓΔ, ΔΕ, de manière que leur excès ΓΕ ne soit pas un carré (cor. 29. 10). Sur AB décrivons le demi-

188 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον², καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ZB.

ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex BA quadratum ad quadratum ex AZ, et jungatur ZB.



Γ Ε Δ

Επεὶ οὖν³ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τῷ ἀπὸ τῆς AZ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ AZ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον αὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῇ AZ μήκει· αἱ BA, AZ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει

Quoniam igitur est ut ex BA quadratum ad ipsum ex AZ ita ΔΓ ad ΓΕ, ex BA igitur quadratum ad ipsum ex AZ rationem habet quam numerus ΔΓ ad numerum ΓΕ; commensurable igitur est ex BA quadratum quadrato ex AZ. Rationale autem quadratum ex AB; rationale igitur et quadratum ex AZ; rationalis igitur et AZ. Et quoniam ΔΓ ad ΓΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex BA igitur quadratum ad ipsum ex AZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est BA ipsi AZ longitudine; ipsæ BA, AZ igitur rationales sunt potentiâ solum

cercle AZB; faisons en sorte que ΔΓ soit à ΓΕ comme le carré de BA est au carré de AZ (6. 10), et joignons ZB.

Car, puisque le carré de BA est au carré de AZ comme ΔΓ est à ΓΕ, le carré de BA aura avec le carré de AZ la raison que le nombre ΔΓ a avec le nombre ΓΕ; le carré de BA sera donc commensurable avec le carré de AZ (6. 10). Mais le carré de AB est rationel (déf. 8. 10); donc le carré de AZ est rationel (déf. 9. 10); donc la droite AZ est rationelle (déf. 6. 10). Et puisque ΔΓ n'a pas avec ΓΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de BA n'aura pas avec le carré de AZ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc BA est incommensurable en longueur avec AZ (9. 10); donc les rationelles BA, AZ ne sont commensurables qu'en puissance (déf. 3. 10). Et

μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστίν⁴ ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέφαντες ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μείζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει 1.

Εὕρηται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μείζον⁶ δύνασθαι τῇ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει. Ὅπερ ἴδει ποιῆται⁷.

commensurabiles. Et quoniam est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ; convertendo igitur ut ΓΔ ad ΔΕ ita ex ΑΒ quadratum ad ipsum ex ΒΖ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ex ΑΒ igitur quadratum ad ipsum ex ΒΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΑΒ ipsi ΒΖ longitudine. Atque est quadratum ex ΑΒ æquale quadratis ex ΑΖ, ΖΒ; ipsa ΑΒ igitur quam ΑΖ plus potest quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine.

Inventæ sunt igitur duæ rationales potentiæ solum commensurabiles ΒΑ, ΑΖ, ita ut major ΑΒ quam minor ΑΖ plus possit quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

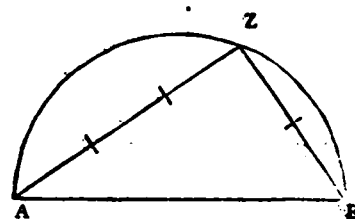
puisque ΔΓ est à ΓΕ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΑΖ; par conversion ΓΔ est à ΔΕ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΒΖ (19. 5 et 47. 1). Mais ΓΔ a avec ΔΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc le carré de ΑΒ a avec le carré de ΒΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΖ (9. 10). Mais le carré de ΑΒ est égal à la somme des carrés de ΑΖ et de ΖΒ (47. 1); donc la puissance de ΑΒ surpasse la puissance de ΑΖ du carré de la droite commensurable en longueur avec ΑΒ.

On a donc trouvé deux rationnelles ΒΑ, ΑΖ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande ΒΑ surpasse la puissance de la plus petite ΑΖ du carré de la droite ΒΖ commensurable en longueur avec ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ.

Εὕρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μείζον δύ-
νασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $ΓΕ$, $ΕΔ$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $ΓΔ$ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γι-
γράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ



Γ Ε Δ

πεποιείσθω ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , καὶ ἐπιζεύχθω ἡ BZ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὡς² ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ BA , AZ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
μετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ . ἀναστρέφαντι ἄρα ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν

Invenire duas rationales potentiâ solùm com-
mensurabiles, ita ut major quam minor plus
possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili
longitudine.

Exponentur rationalis AB , et duo quadrati
numeri $ΓΕ$, $ΕΔ$, ita ut $ΓΔ$ compositus ex ipsis
non sit quadratus, et describatur super rectam AB
semicirculus AZB , et fiat ut $ΓΔ$ ad $ΓΕ$ ita ex

AB quadratum ad ipsum ex AZ , et jungatur
 BZ ; similiter utique demonstrabimus, ut in an-
tecedente, rectas BA , AZ rationales esse po-
tentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam est
ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita ex BA quadratum ad ipsum
ex AZ ; convertendo igitur ut $ΓΔ$ ad $ΔΕ$ ita

PROPOSITION XXXI.

Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière
que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du
quarré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

Soient la rationnelle AB , et les deux nombres quarrés $ΓΕ$, $ΕΔ$, de manière que leur
somme $ΓΔ$ ne soit pas un quarré (lem. 2. 29. 10); sur la droite AB , décrivons le
demi-cercle AZB ; faisons en sorte que $ΓΔ$ soit à $ΓΕ$ comme le quarré de AB est
au quarré de AZ (cor. 6. 10), et joignons BZ . Nous démontrerons semblablement
comme auparavant que les rationnelles BA , AZ ne sont commensurables qu'en puis-
sance. Puisque $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme le quarré de BA est au quarré de AZ , par conversion

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 191

ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αὐδ' ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. Καὶ δύναται ἡ AB τῆς AZ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ AB, BZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῇ³ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ὅπρι εἶδει ποιεῖσαι⁴.

ex AB quadratum ad ipsum ex BZ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est AB ipsi BZ longitudine. Et plus potest AB quam AZ quadrato ex rectā ZB sibi incommensurabili; ipsæ AB, BZ igitur rationales sunt potentiâ solū commensurabiles, et AB quam AZ plus potest quadrato ex rectā ZB sibi incommensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ΄.

Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμεις μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιχοῦσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εκκείσθωσαι γάρ! δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-

PROPOSITIO XXXII.

Invenire duas medias potentiâ solū commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectā sibi commensurabili longitudine.

Exponentur enim duæ rationales potentiâ solū

ΓΔ sera à ΔΕ comme le quarré de AB est au quarré de BZ. Mais ΓΔ n'a pas avec ΔΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc le quarré de AB n'a pas avec le quarré de BZ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc AB est incommensurable en longueur avec BZ (9. 10); donc la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré d'une droite ZB incommensurable avec AB; donc les rationelles AB, BZ ne sont commensurables qu'en puissance; et la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré de la droite ZB incommensurable en longueur avec AB. Ce qu'il fallait faire.

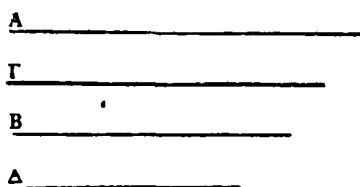
PROPOSITION XXXII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient les deux rationelles A, B commensurables en puissance seulement,

μῆτροι αἱ A, B , ὥστε τὴν A μείζονα οὖσαν
τῆς ἐλάσσονος τῆς B μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ
συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ τῷ ὑπὲρ τῶν A, B
ἴσων ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ . Μείσον δὲ τὸ ὑπὸ
τῶν A, B μείσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ μείον
ἄρα καὶ ἡ Γ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσων ἴστω τὸ ὑπὸ
τῶν Γ, Δ , ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B ῥητὸν ἄρα
ἴστί³ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ . Καὶ ἐπεὶ ἴστιν
ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A, B
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν

commensurabiles A, B , ita ut A major existens
quam minor B plus possit quadrato ex recta
sibi commensurabili longitudine. Et rectangulum
sub A, B æquale sit quadratum ex Γ . Medium
autem rectangulum sub A, B ; medium igitur
et quadratum ex Γ ; media igitur et Γ . Quadrato
autem ex B æquale sit rectangulum sub Γ, Δ ,
rationale autem quadratum ex B ; rationale igitur
est et rectangulum sub Γ, Δ . Et quoniam est ut
 A ad B ita sub A, B rectangulum ad quadratum



A, B ἴσων ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς Γ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B
ἴσων τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B
οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ .
Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ
οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς
τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ . Σύμμετρος δὲ
ἡ A τῇ B δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ

ex B ; sed rectangulo quidem sub A, B æquale
est quadratum ex Γ , quadrato autem ex B æquale
rectangulum sub Γ, Δ ; ut igitur A ad B ita
ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ . Ut
autem ex Γ quadratum ad rectangulum sub
 Γ, Δ ita Γ ad Δ ; et ut igitur A ad B ita Γ ad Δ .
Commensurabilis autem A ipsi B potentiâ solùm;

de manière que la puissance de la plus grande A surpasse la puissance de la plus petite B du carré d'une droite commensurable en longueur avec A (30. 10). Que le carré de Γ soit égal au rectangle sous A, B . Mais le rectangle sous A, B est médial (22. 10); donc le carré de Γ est médial; donc la droite Γ est médiale. Que le rectangle sous Γ, Δ soit égal au carré de B ; puisque le carré de B est rationel, le rectangle sous Γ, Δ sera rationel. Et puisque A est à B comme le rectangle sous A, B est au carré de B (1. 6), que le carré de Γ est égal au rectangle sous A, B , et que le rectangle sous Γ, Δ est égal au carré de B , la droite A sera à la droite B comme le carré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ . Mais le carré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ comme Γ est à Δ ; donc A est à B comme Γ est à Δ . Mais A n'est commensurable avec B qu'en puissance; donc Γ n'est

ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μίση ἡ Γ· μίση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως, ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου⁵ ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μίζον δύναται⁶ τῷ ἀπὸ συμμέτρου⁷ ἑαυτῇ.

Εὕρηται ἄρα δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ, ῥητὸν περιέχουσας, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ⁸ μήκει. Οὔτε ἴδιαι ποιεῖται⁹.

Ομοίως δὲ διχθεύονται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσύμμετρου, ὅταν τῆς Β μίζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ¹⁰.

commensurabilis igitur et Γ ipsi Δ potentiâ solum. Atque est media Γ; media igitur et Δ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa autem Α quam Β plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Γ igitur quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles Γ, Δ, rationale continentes, et Γ quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

Similiter utique ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando quam Β plus potest ipsa Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

commensurable avec Δ qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10). Et puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Β du carré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du carré d'une droite commensurable avec Γ (15. 10).

On a donc trouvé deux médiales Γ, Δ commensurables en puissance seulement, qui comprennent un rectangle rationnel; et la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du carré d'une droite commensurable en longueur avec Γ. Ce qu'il fallait faire.

Si la puissance de Α surpassait la puissance de Β du carré d'une droite incommensurable avec Α, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationnel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

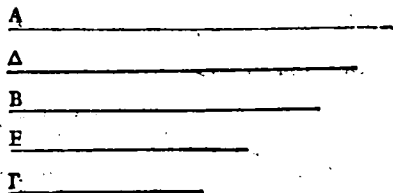
PROPOSITIO XXXIII.

Εὐρίῃν δύο μίσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μίσην περιχεύσας ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονης μίζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἐκκείσθωσαν τριῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, Γ , ὥστε τὴν A τῆς Γ μίζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ^2 · μίσην ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ · καὶ ἡ Δ ἄρα μίση ἑστί. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Exponentur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B, Γ , ita ut A quam Γ plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et rectangulo quidem sub A, B æquale sit quadratum ex Δ ; medium igitur quadratum ex Δ ; et Δ igitur media est. Rectangulo' autem sub B, Γ æquale sit rectangulûm sub Δ, E .



τῶν Δ, E . Καὶ ἐπεὶ ἴσταιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον³ τὸ ὑπὸ

Et quoniam est ut sub A, B rectangulum ad ipsum sub B, Γ ita A ad Γ , sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Δ , rectangulo autem sub B, Γ æquale

PROPOSITION XXXIII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

Soient les trois rationnelles A, B, Γ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de A surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec A (30. 10); que le carré de Δ soit égal au rectangle sous A, B (14. 2); le carré de Δ sera médial (22. 10), et la droite Δ médiale. Que le rectangle sous Δ, E soit égal au rectangle sous B, Γ (45. 1). Puisque le rectangle sous A, B est au rectangle sous B, Γ comme A est à Γ (1. 6), que le carré de Δ est égal au rectangle sous A, B , et que le rectangle sous Δ, E est égal au rectangle

τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον⁵. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. Μίσθ δὲ ἡ Δ· μίσθ ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως⁶ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Λίγω δὲ ὅτι καὶ μίσθον ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ⁸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μίσθον δὲ τὸ⁹ ὑπὸ τῶν Β, Γ· αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι¹⁰. μίσθον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὐρήνται ἄρα δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μίσθον περιέχουσιν· ὥστε τὴν μείζονα¹¹ τῆς ἰλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι¹².

rectangulum sub Δ, Ε; est igitur ut Α ad Γ ita ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε. Ut autem ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε ita Δ ad Ε; et ut igitur Α ad Γ ita Δ ad Ε. Commensurabilis autem Α ipsi Γ potentiā solūm; commensurabilis igitur et Δ ipsi Ε potentiā solūm. Media autem Δ; media igitur et Ε. Et quoniam est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, ipsa autem Α quam Γ plus potest quadrato ex rectā sibi commensurabili; et Δ igitur quam Ε plus poterit quadrato ex rectā sibi commensurabili. Dico etiam et medium esse rectangulum sub Δ, Ε. Quoniam enim æquale est sub Β, Γ rectangulum rectangulo sub Δ, Ε, medium autem rectangulum sub Β, Γ; ipsæ enim Β, Γ rationales sunt potentiā solūm commensurabiles; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiā solūm commensurabiles Δ, Ε, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectā sibi commensurabili. Quod oportebat facere.

sous Β, Γ, la droite Α est à Γ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε. Mais le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε comme Δ est à Ε (32. 10); donc Α est à Γ comme Δ est à Ε. Mais Α n'est commensurable avec Γ qu'en puissance; donc Δ n'est commensurable avec Ε qu'en puissance (10. 10); mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10). Et puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Δ surpassera la puissance de Ε du carré d'une droite commensurable avec Δ (15. 10). Je dis aussi que le rectangle sous Δ, Ε est médial. Car puisque le rectangle sous Β, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε, et que le rectangle sous Β, Γ est médial, parce que les rationnelles Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, le rectangle sous Δ, Ε sera médial.

On a donc trouvé deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande. Ce qu'il fallait faire.

Ομοίως δὲ πάλιν διχθεύσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ¹³.

Similiter utique rursus ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando A quam Γ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

Λ Η Μ Μ Α.

Εστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ, καὶ ἤχθω¹ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ² ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ³. Καὶ πρῶτον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ⁴ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Επεὶ γὰρ ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἤκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως

L E M M A.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens sub ΒΑΓ angulum, et ducatur perpendicularis ΑΔ; dico rectangulum quidem sub ΓΒ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΒΑ, rectangulum autem sub ΒΓ, ΓΔ æquale quadrato ex ΓΑ, et rectangulum sub ΒΔ, ΔΓ æquale quadrato ex ΑΔ, et adhuc rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Et primum rectangulum sub ΓΒ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΒΑ.

Quoniam enim in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducitur ΑΔ, ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur triangula similia sunt et toti triangulo ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΒΔ; rectangulum

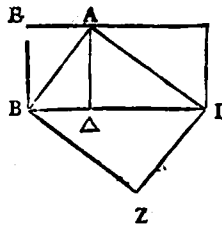
Si la puissance de A surpassait la puissance de Γ du carré d'une droite incommensurable avec A, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

L E M M E.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, dont l'angle droit est ΒΑΓ; menons la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au carré de ΒΑ, que le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au carré de ΓΑ, que le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au carré de ΑΔ, et enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis d'abord que le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au carré de ΒΑ.

Car puisque dans un triangle rectangle on a mené de l'angle droit la droite ΑΔ perpendiculaire à la base, les deux triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΒΔ (déf. 1. 6); donc le

ἢ BA πρὸς τὴν BD · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν GB, BA ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς AB . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $BΓ, ΓΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς $ΑΓ$. Καὶ ἐπεὶ ἴαν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κἀθετοῦς ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστιν· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ BD πρὸς τὴν $ΔΑ$ οὕτως ἡ $ΑΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $BD, ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς $ΔΑ$.



λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $BΓ, ΑΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $BA, ΑΓ$. Ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὁμοίων ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τῷ $ABΔ$, ἴστιν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$ οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $ΑΔ$. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $BΓ, ΑΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $BA, ΑΓ$. Καὶ ὅτι⁵ ἴαν ἀναγράψωμεν τὸ $ΕΓ$ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπλη-

igitur sub GB, BA æquale est quadrato ex AB . Propter eadem utique et rectangulum sub $BΓ, ΓΔ$ æquale est quadrato ex $ΑΓ$. Et quoniam si in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducatur, ducta inter basis segmenta media proportionalis est; est igitur ut BD ad $ΔΑ$ ita $ΑΔ$ ad $ΔΓ$; rectangulum igitur sub $BD, ΔΓ$ æquale est quadrato ex $ΔΑ$. Dico

et rectangulum sub $BΓ, ΑΔ$ æquale esse rectangulo sub $BA, ΑΓ$. Quoniam enim, ut dicebamus, simile est $ABΓ$ ipsi $ABΔ$, est igitur ut $BΓ$ ad $ΓΑ$ ita BA ad $ΑΔ$. Si autem quatuor rectæ proportionales sunt, rectangulum sub extremis æquale est rectangulo sub mediis; rectangulum igitur sub $BΓ, ΑΔ$ æquale est rectangulo sub $BA, ΑΓ$. Dico et si describamus $ΕΓ$ rectangulum parallelogrammum, et com-

rectangle sous GB, BA est égal au carré de AB (17. 6). Par la même raison, le rectangle sous $BΓ, ΓΑ$ est égal au carré de $ΑΓ$. Et puisque si de l'angle droit d'un triangle rectangle on mène une perpendiculaire à la base, la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segments de la base (cor. 8. 6), la droite BA est à $ΔΑ$ comme $ΑΔ$ est à $ΔΓ$ (18. 6); donc le rectangle sous $BD, ΔΓ$ est égal au carré de $ΔΑ$. Je dis enfm que le rectangle sous $BΓ, ΑΔ$ est égal au rectangle sous $BA, ΑΓ$. Car puisque, comme nous l'avons dit, $ABΓ$ est semblable au triangle $ABΔ$, $BΓ$ est à $ΓΑ$ comme BA est à $ΑΔ$. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle sous les extrêmes est égal au rectangle sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous $BΓ, ΑΔ$ sera égal au rectangle sous $BA, ΑΓ$. Je dis encore que, si nous décrivons le parallélogramme rectangle $ΕΓ$, et si nous

198 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ρώσομιν τὸ AZ, ἴσον ἴσται τὸ ΕΓ τῷ AZ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλασίον ἴσται τοῦ ABΓ τριγώνου· καὶ ἴσται τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν^δ ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἴσται τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

pleamus AZ, æquale fore ΕΓ ipsi AZ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ABΓ; atque est rectangulum quidem ΕΓ sub ΒΓ, ΑΔ, rectangulum autem AZ sub ΒΑ, ΑΓ; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28.

Εὐρίην δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μίῳ δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ἰσότητος τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβελήσθω παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ γιγράσθω ἐπὶ

PROPOSITIO XXXIV.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

Exponantur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles AB, ΒΓ, ita ut major AB quam minor ΒΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et secetur ΒΓ bifariam ad Δ, et quadrato ab alterutrâ ipsarum ΒΔ, ΔΓ æquale ad rectam AB applicetur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et describatur super

achevons AZ, le rectangle ΕΓ sera égal au rectangle AZ, car chacun d'eux est double du triangle ABΓ; mais ΕΓ est le rectangle compris sous ΒΓ, ΑΔ, et AZ le rectangle compris sous ΒΑ, ΑΓ; donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

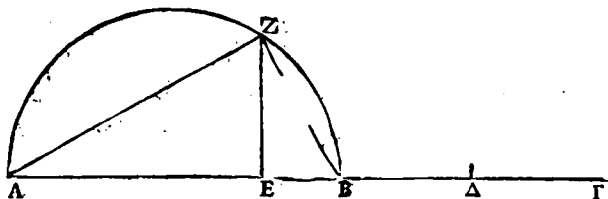
Soient les deux rationnelles AB, ΒΓ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande AB surpasse la puissance de la plus petite ΒΓ du quarré d'une droite incommensurable avec AB (31, 10); coupons ΒΓ en deux parties égales en Δ; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal à l'un ou à l'autre des quarrés des droites ΒΔ, ΔΓ, soit défailant d'une figure quarrée (26. 6), et que ce soit le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ; décrivons

τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ἑρθὰς ἡ EZ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ AZ, ZB.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ AB, BG, καὶ ἡ AB τῆς BG μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς BG, τουτίστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβηται παραλληλόγραμμον ἐλλειπὸν ἰδίῃ τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE, ἴσον δὲ τὸ

rectam AB semicirculus AZB, et ducatur ipsi AB ad rectos angulos ipsa EZ, et jungantur AZ, ZB.

Et quoniam duæ rectæ inæquales sunt AB, BG, et AB quam BG plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; quartæ autem parti quadrati ex BG, hoc est quadrato dimidiæ ipsius, æquale ad AB applicatur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et facit rectangulum sub AE, EB; incommensurabilis igitur est AE ipsi EB. Et quoniam est ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE, sed æquale quidem sub AB, AE rec-



μὲν ὑπὸ τῶν AB, AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· αἱ AZ, ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητὴ ἐστὶ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ

tangulum quadrato ex AZ, ipsum autem sub AB, BE rectangulum quadrato ex BZ; incommensurable igitur est ex AZ quadratum quadrato ex ZB; ergo AZ, ZB potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam AB rationalis est, rationale igitur est et

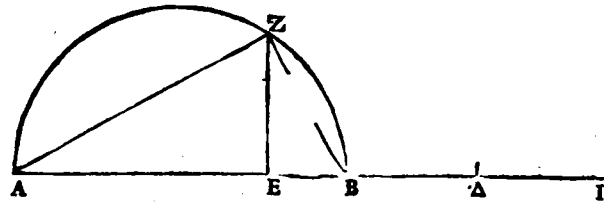
sur la droite AB le demi-cercle AZB; menons la droite EZ perpendiculaire à AB, et joignons AZ, ZB.

Puisque les deux droites AB, BG sont inégales; que la puissance de AB surpasse la puissance de BG du carré d'une droite incommensurable avec AB; qu'on a appliqué à AB un parallélogramme qui, étant égal à la quatrième partie du carré de BG, c'est-à-dire au carré de la moitié de cette droite, est défailant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme est contenu sous AE, EB, la droite AE sera incommensurable avec EB (19. 10). Et puisque AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE (1. 6), que le rectangle sous AB, AE est égal au carré de AZ, que le rectangle sous AB, BE est égal au carré de BZ, le carré de AZ sera incommensurable avec le carré de ZB; donc les droites AZ, ZB sont incommensurables en puissance. Et puisque la droite AB est ratio-

200 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ἀπὸ τῆς AB· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ, ZB ῥητόν ἐστι. Καὶ ἔπει πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BA· διπλὴ ἄρα ἡ BG τῆς EZ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ

quadratum ex AB; quare et compositum ex quadratis ipsarum AZ, ZB rationale est. Et quoniam rursus rectangulum sub AE, EB æquale est quadrato ex EZ, supponitur autem sub AE, EB rectangulum et quadrato ex BA æquale; æqualis igitur est ZE ipsi BA; dupla igitur BG



τῶν AB, BG σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB, EZ. Μείζον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG· μείζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ. Ἰσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ, ZB· μείζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητόν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

ipsius EZ; quare et rectangulum sub AB, BG commensurabile est rectangulo sub AB, EZ. Medium autem rectangulum sub AB, BG; medium igitur et rectangulum sub AB, EZ. Æquale autem sub AB, EZ rectangulum rectangulo sub AZ, ZB; medium igitur et rectangulum sub AZ, ZB. Ostensum est autem et rationale compositum ex ipsarum quadratis.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ, ZB, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μείζον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AZ, ZB, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium. Quod oportebat facere.

nelle, le carré de AB est rationnel; donc la somme des carrés de AZ et de ZB est rationnelle. Et de plus, puisque le rectangle sous AE, EB est égal au carré de EZ, et que le rectangle sous AE, EB est supposé égal au carré de BA, la droite ZE est égale à BA; donc BG est double de EZ; donc le rectangle sous AB, BG est commensurable avec le rectangle sous AB, EZ (1. 6). Mais le rectangle sous AB, BG est médial (22. 10); donc le rectangle sous AB, EZ est médial. Mais le rectangle sous AB, EZ est égal au rectangle sous AZ, ZB (lem. 1. 35); donc le rectangle sous AZ, ZB est médial. Mais on a démontré que la somme des carrés de AZ et de ZB est rationnelle.

On a donc trouvé deux droites AZ, ZB incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés est rationnelle, et que le rectangle sous ces mêmes droites est médial. Ce qu'il fallait faire.

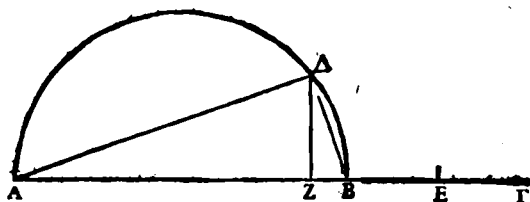
LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.
 Ἡ ἀποστολὴ τῶν ἀποστόλων ἐγένετο ἐν τῇ πόλει τῇ ἑκτῇ.

PROPOSITIO XXXV.

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμίτρους,
ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν
σφισσάγων μίσην, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsâ quadratis medium, rectangulum autem surdum rationale.



Εκκείσθωσαν δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, BG, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν AB τῆς BG μίζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου αὐτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB τὸ AΔB ἡμικύκλιον, καὶ τιτμήσθω ἡ BG δίχα κατὰ τὸ E, καὶ παρατελεσθῶ παρα τὴν AB τῷ ἀπὸ τῆς BE ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλειψπον εἶδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB μήκει. Καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ¹ Z τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZΔ, καὶ ἐπιτελείχθωσαν αἱ AΔ, ΔB.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solum
 mensurabiles AB , BF , rationale continens
 sub ipsis, ita ut AB quam BF plus
 quadrato ex rectâ sibi incommensurabili
 describatur super rectam AB semicirculus
 et secetur BF bifariam in E , et applicetur
 AB quadrato ex BE æquale parallelogrammum
 deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub
 ZB ; incommensurabilis igitur est AZ ipsius
 longitudine. Et ducatur à puncto Z ipsi
 rectos angulos ipsa ZA , et jungantur AD , AE .

PROPOSITION XXXV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationnel.

Soient deux médiales AB , BF commensurables en puissance seulement, comprenant un rectangle rationel, de manière que la puissance de AB passe la puissance de BF du carré d'une droite incommensurable avec BF (32. 10); sur AB décrivons le demi-cercle $A\Delta B$; coupons BF en deux parties égales en E ; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal au quadruple de BE , soit défailant d'une figure carrée (28. 6), et que ce soit le rectangle AZ , ZB ; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZB (19. 10). Du point Z menons $Z\Delta$ perpendiculaire à AB , et joignons $A\Delta$, ΔB .

Επειὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BZ. Ἰσὸν δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA, AZ τῷ ἀπὸ τῆς AD, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BZ τῷ ἀπὸ τῆς DB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AD τῷ ἀπὸ τῆς DB². Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AD, DB. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ³ ἐστὶν ἡ BG τῆς AZ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ZD⁴. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG⁵· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZD. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ZD ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν AD, DB⁶· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AD, DB ρητὸν ἐστίν.

Εὑρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AD, DB, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ρητόν. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam incommensurabilis est AZ ipsi ZB, incommensurabile igitur est et sub BA, AZ rectangulum rectangulo sub AB, BZ. Sed æquale quidem sub BA, AZ rectangulum quadrato ex AD, sed sub AB, BZ rectangulum quadrato ex DB; incommensurabile igitur est et ex AD quadratum quadrato ex DB. Et quoniam medium est quadratum ex AB, medium igitur et compositum ex ipsarum AD, DB quadratis. Et quoniam dupla est BG ipsius AZ, duplum igitur et sub AB, BG rectangulum rectanguli sub AB, ZD. Rationale autem rectangulum sub AB, BG; rationale igitur et rectangulum sub AB, ZD. Rectangulum autem sub AB, ZD æquale rectangulo sub AD, DB; quare et rectangulum sub AD, DB rationale est.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AD, DB, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale. Quod oportebat facere.

Puisque AZ est incommensurable avec ZB, le rectangle sous BA, AZ est incommensurable avec le rectangle sous AB, BZ (1. 6, et 10. 10). Mais le rectangle sous BA, AZ est égal au quarré de AD, et le rectangle sous AB, BZ est égal au quarré de DB (34. lem. 1. 10); le quarré de AD est donc incommensurable avec le quarré de DB. Mais le quarré de AB est médial; donc la somme des quarrés de AD et de DB est médiale. Et puisque BG est double de AZ, le rectangle sous AB, BG est double du rectangle sous AB, ZD (1. 6). Mais le rectangle sous AB, BG est rationel; donc le rectangle sous AB, ZD est rationel. Mais le rectangle sous AB, ZD est égal au rectangle sous AD, DB (34. lem. 3. 10); le rectangle sous AD, DB est donc rationel.

On a donc trouvé deux droites AD, DB incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel, Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

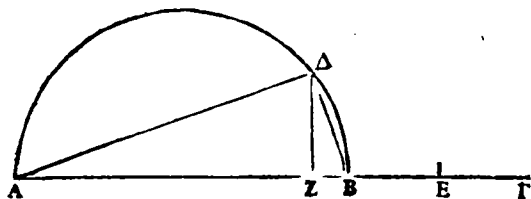
PROPOSITIO XXXVI.

Εὐρίῃν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιοῦσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μίσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$, μίσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μίζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γιγράσθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AΔB$, καὶ τὰ λοιπὰ γιγόνετω τοῖς ἑπ' ἀνω ἰμοίως² εἰρημένους.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles AB , $BΓ$, medium continentes, ita ut AB quam $BΓ$ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam AB semicirculus $AΔB$, et reliqua fiant congruenter iis superiùs dictis.



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν³ ἡ AZ τῇ ZB μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ $AΔ$ τῇ $ΔB$ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ μίσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μίσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ⁴ τῶν $AΔ$, $ΔB$. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB ἴσον

Et quoniam incommensurabilis est AZ ipsi ZB longitudine, incommensurabilis est et $AΔ$ ipsi $ΔB$ potentiâ. Et quoniam medium est quadratum ex AB , medium igitur et compositum ex quadratis ipsarum $AΔ$, $ΔB$. Et quoniam rectangulum sub AZ , ZB æquale est quadrato

PROPOSITION XXXVI.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites.

Soient deux médiales AB , $BΓ$ commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale, de manière que la puissance de AB surpasse la puissance de $BΓ$ du quarré d'une droite incommensurable avec AB (33. 10); et sur AB décrivons le demi-cercle $AΔB$, et faisons le reste comme il a été dit auparavant.

Puisque AZ est incommensurable en longueur avec ZB , la droite $AΔ$ est incommensurable en puissance avec $ΔB$. Et puisque le quarré de AB est médial, la somme des quarrés de $AΔ$ et de $ΔB$ est médiale. Et puisque le rectangle sous AZ , ZB est

ἴστι⁵ τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE, ΔZ, ἴση ἄρα ἴστιν ἡ BE τῇ ΔZ⁶. διπλὴ ἄρα ἡ BΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΖΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΖΔ· καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, μέσον ἄρα⁷ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ BE· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BE ἀσύμμετρον ἐστίν. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE ἴσον ἴστί τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ⁸.

Εὐρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δύναμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων¹⁰ μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ex alterutra ipsarum BE, ΔZ, æqualis igitur est BE ipsi ΔZ; dupla igitur BΓ ipsius ΖΔ; quare et rectangulum sub AB, BΓ duplum est rectanguli sub AB, ΖΔ. Medium autem rectangulum sub AB, BΓ; medium igitur et rectangulum sub AB, ΖΔ; atque est æquale rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ, medium igitur et rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BΓ longitudine, commensurabilis autem ΓΒ ipsi BE; incommensurabilis igitur et AB ipsi BE longitudine; quare et ex AB quadratum rectangulo sub AB, BE incommensurabile est. Sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quadrata ex ΑΔ, ΔΒ, rectangulo autem sub AB, BE æquale est rectangulum sub AB, ΖΔ, hoc est rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ; incommensurabile igitur est compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ. quadratis rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Quod oportebat facere.

égal au carré de l'une ou de l'autre des droites BE, ΔZ, la droite BE est égale à ΔZ; donc BΓ est double de ΖΔ; le rectangle sous AB, BΓ est donc double du rectangle sous AB, ΖΔ. Mais le rectangle sous AB, BΓ est médial; le rectangle sous AB, ΖΔ est donc médial; mais il est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (34. lem. 1. 10.); le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ est donc médial. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec BΓ, et que ΓΒ est commensurable avec BE, la droite AB est incommensurable en longueur avec BE; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BE (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ est égale au carré de AB, et le rectangle sous AB, ΖΔ, c'est-à-dire le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, est égal au rectangle sous AB, BE; la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ.

On a donc trouvé deux droites ΑΔ, ΔΒ incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

Εάν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συν-
τιθῶσιν, ἡ ἅλη ἀλογός ἐστι, καλίσθω' δὲ ἐκ
δύο ὀνομάτων.

Συγκρίσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον
σύμμετροι αἱ AB, BΓ· λέγω ὅτι ὅλη² ἡ AΓ
ἀλογός ἐστιν.



Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BΓ
μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὥς
δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
ὑπὸ τῶν AB, BΓ τῷ ἀπὸ τῆς BΓ. Ἀλλὰ τῷ
μὲν ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις
ὑπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BΓ σύμμετρόν
ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ· αἱ γὰρ AB, BΓ ῥηταὶ
εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα

Si duæ rationales potentiâ solùm commensu-
rabiles componantur, tota irrationalis est, vo-
cetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ
solùm commensurabiles AB, BΓ; dico totam AΓ
irracionalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est AB
ipsi BΓ longitudine, potentiâ enim solùm sunt
commensurabiles, ut autem AB ad BΓ ita sub
AB, BΓ rectangulum ad quadratum ex BΓ; in-
commensurabile igitur est sub AB, BΓ rectan-
gulum quadrato ex BΓ. Sed rectangulo quidem
sub AB, BΓ commensurabile est rectangulum bis
sub AB, BΓ, quadrato autem ex BΓ commensu-
rabilia sunt quadrata ex AB, BΓ; ipsæ enim AB,
BΓ rationales sunt potentiâ solùm commensura-
biles; incommensurabile igitur est bis sub AB.

PROPOSITION XXXVII.

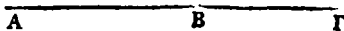
Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur
somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

Ajoutons les deux rationnelles AB, BΓ commensurables en puissance seulement;
je dis que leur somme AΓ est irrationnelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec BΓ, ces deux droites
n'étant commensurables qu'en puissance, et que AB est à BΓ comme le rectangle
sous AB, BΓ est au carré de BΓ (1. 6), le rectangle sous AB, BΓ est incommen-
surable avec le carré de BΓ (10. 10). Mais le double rectangle sous AB, BΓ est
commensurable avec le rectangle sous AB, BΓ (6. 10), et la somme des carrés
de AB et de BΓ est commensurable avec le carré de BΓ (16. 10), car les droites
AB, BΓ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; le double

206 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $BΓ^3$, καὶ συνθίντι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$, τουτέστι τὸ $BΓ$ rectangulum quadratis ex AB , $BΓ$, et componendo, rectangulum bis sub AB , $BΓ$ cum quadratis ex AB , $BΓ$, hoc est quadratum ex AG



ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG ὥστε καὶ ἡ AG ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων⁵.

incommensurable est composito ex ipsarum AB , $BΓ$ quadratis. Rationale autem compositum ex ipsarum AB , $BΓ$ quadratis; irrationale igitur est quadratum ex AG ; quare et AG irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Εὰν δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσai· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$, ῥητὸν περιέχουσai· λέγω ὅτι ὅλη ἡ AG ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄρα¹ ἀσύμ-

PROPOSITIO XXXVIII.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB , $BΓ$, rationale continentes; dico totam AG irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, et quadrata ex AB , $BΓ$ igitur

rectangle sous AB , $BΓ$ est donc incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de $BΓ$; donc, par addition, le double rectangle sous AB , $BΓ$ avec la somme des quarrés de AB et de $BΓ$, c'est-à-dire le quarré de AG (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de $BΓ$ (17. 10). Mais la somme des quarrés de AB , $BΓ$ est rationnelle; le quarré de AG est donc irrationnel (déf. 10. 10); la droite AG est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et sera appelée droite de deux noms.

PROPOSITION XXXVIII.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB , $BΓ$, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle; je dis que leur somme AG est irrationnelle.

Car, puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$, la somme des

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 2

μετρά ἔστι τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ· καὶ συν- incommensurabilia sunt rectangulo bis sub
θείντι² τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ δις BΓ; et componendo, quadrata ex AB, BΓ



ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἔπερ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ, ἀσύμμετρόν ἔστι τῇ ὑπὸ τῶν AB, BΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ὑπόκειται γὰρ αἱ AB, BΓ ρητὸν περιέχουσαι³. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AΓ· ἄλογος ἄρα ἡ AΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη⁴.

rectangulo bis sub AB, BΓ, quod est quadrat ex AΓ, incommensurable est rectangulo AB, BΓ. Rationale autem rectangulum sub BΓ, supponuntur enim ipsæ AB, BΓ ratione continere; irrationalis igitur quadratum ex irrationalis igitur AΓ, vocetur autem ex binis mediis prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ'.

PROPOSITIO XXXIX.

Εὰν δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι συντιθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

Συγκείμεθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ AB, BΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AΓ.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB, BΓ, medium continentes; dico irrationalem esse AΓ.

quarrés de AB et de BΓ est incommensurable avec le double rectangle sous AB, (13. 10); donc, par addition, la somme des quarrés de AB et de BΓ avec le double rectangle sous AB, BΓ, c'est-à-dire le quarré de AΓ (4. 2), est incommensurable avec le rectangle sous AB, BΓ. Mais le rectangle sous AB, BΓ est rationel, car les droites AB, BΓ sont supposées comprendre un rectangle rationel; le quarré de AΓ est donc irrationnel; la droite AΓ sera donc irrationnelle, et sera appelée première de deux médiales.

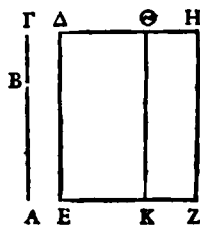
PROPOSITION XXXIX.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB, BΓ, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale; je dis que la droite AΓ est irrationnelle.

Εκκείσθω γάρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβελήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. Καὶ ἵπεί τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβελήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἵπεί μίση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μίση ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Μίσην δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν

Exponatur enim rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΓ æquale ad ΔΕ applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ. Et quoniam quadratum ex ΑΓ æquale est et quadratis ex ΑΒ, ΒΓ et rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, applicetur etiam quadratis ex ΑΒ, ΒΓ ad ΔΕ æquale ΕΘ; reliquum igitur ΖΘ æquale est rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ. Et quoniam media est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ; media igitur sunt et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ. Medium autem supponitur et rectangulum



ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἴστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μίσην ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΖΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ

bis sub ΑΒ, ΒΓ, atque est quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ΕΘ, rectangulo verò bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ΖΘ; medium igitur utrumque ipsorum ΕΘ, ΖΖ, et ad rationalem ΔΕ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΔΘ, ΘΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Quoniam igitur incommensurabilis est

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un parallélogramme ΔΖ, qui étant égal au carré de ΑΓ, ait ΔΗ pour largeur (45. 1). Puisque le carré de ΑΓ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et du double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (4. 2), appliquons à ΔΕ un rectangle ΕΘ égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, le rectangle restant ΖΘ sera égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Mais chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, les carrés de ΑΒ et de ΒΓ sont donc médiaux. Et puisque, par supposition, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, que ΕΘ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΖΘ est égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, chacun des rectangles ΕΘ, ΖΘ est médial, et ils sont appliqués à la rationnelle ΔΕ; chacune des droites ΔΘ, ΘΗ est donc rationnelle (23. 10) et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΒ est incom-

AB τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἴστιν ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρον ἴστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ σύμμετρον ἴστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἴστί τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἴστί τὸ ΘΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρος ἴστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΔΗ ἀλογός ἴστι. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἴστιν· ἀλογον ἄρα ἴστί τὸ ΔΖ χωρίον· καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἀλογός ἴστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἀλογος ἄρα ἴστιν ἡ ΑΓ, καλεῖσθαι δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα¹⁰.

AB ipsi ΒΓ longitudine, atque est ut AB ad ΒΓ ita ex AB quadratum ad rectangulum sub AB, ΒΓ; incommensurable igitur est ex AB quadratum rectangulo sub AB, ΒΓ. Sed quadrato quidem ex AB commensurable est compositum ex quadratis ipsarum AB, ΒΓ, rectangulo autem sub AB, ΒΓ commensurable est rectangulum bis sub AB, ΒΓ; incommensurable igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB, ΒΓ rectangulo bis sub AB, ΒΓ. Sed quadratis quidem ex AB, ΒΓ æquale est ipsum ΕΘ, rectangulo autem bis sub AB, ΒΓ æquale est ipsum ΘΖ; incommensurable igitur est ΕΘ ipsi ΘΖ; quare et ΔΘ ipsi ΘΗ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem rationales; ipsæ ΔΘ, ΘΗ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; quare ΔΗ irrationalis est. Rationalis autem ΔΕ, sed sub irrationali et rationali contentum rectangulum irrationale est; irrationale igitur est ΔΖ spatium; et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΖ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis secunda.

mesurable en longueur avec ΒΓ, et que AB est à ΒΓ comme le carré de AB est au rectangle sous AB, ΒΓ (1. 6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous AB, ΒΓ (10. 10). Mais la somme des carrés de AB et de ΒΓ est commensurable avec le carré de AB, et le double rectangle sous AB, ΒΓ est commensurable avec le rectangle sous AB, ΒΓ; la somme des carrés de AB et de ΒΓ est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, ΒΓ (14. 10). Mais ΕΘ est égal à la somme des carrés de AB et de ΒΓ, et ΘΖ est égal au double rectangle sous AB, ΒΓ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΖ; la droite ΔΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΔ. Mais on a démontré que ces droites sont rationnelles; les droites ΔΘ, ΘΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΔΗ est donc irrationnelle (37. 10). Mais la droite ΔΕ est rationnelle, et un rectangle compris sous une irrationnelle et sous une rationnelle est irrationnel; la surface ΔΖ est donc irrationnelle, et par conséquent la droite qui peut cette surface. Mais la puissance de ΑΓ est égale à ΔΖ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée la seconde de deux médiales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Εάν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
μείσον· ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω
δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι, αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα·
λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG.

A ————— B ————— Γ

Επεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον ἐστὶ,
καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον ἐστί.
Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ῥητόν·
ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG
τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG· ὥστε
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ
τῶν AB, BG, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG, ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
AB, BG· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG·
ὥστε καὶ ἡ AG ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείζων.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes quidem compositum ex
ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem
sub ipsis medium; tota recta irrationalis est,
vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB, BG, facientes proposita;
dico irrationalem esse AG.

Quoniam enim rectangulum sub AB, BG me-
dium est, et rectangulum igitur bis sub AB,
BG medium est. Sed compositum ex quadratis
ipsarum AB, BG rationale; incommensurable
igitur est rectangulum bis sub AB, BG compo-
sito ex quadratis ipsarum AB, BG; quare et
ex AB, BG quadrata cum rectangulo bis sub
AB, BG, quod est quadratum ex AG, incommen-
surabilia sunt composito ex quadratis ipsarum
AB, BG; irrationale igitur est quadratum ex AG;
quare et AG irrationalis est, vocetur autem major.

PROPOSITION XL.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs
quarrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la
droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites
faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Puisque le rectangle sous AB, BG est médial, le double rectangle sous AB, BG
sera médial (24. cor. 10). Mais la somme des quarrés de AB et de BG est rationnelle;
le double rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec la somme des
quarrés de AB et de BG; donc la somme des quarrés de AB et de BG avec le double
rectangle sous AB, BG, c'est-à-dire le quarré de AG (4. 2), est incommensurable
avec la somme des quarrés de AB et de BG (17. 10); le quarré de AG est donc irra-
tionnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle sera appelée majeure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'. α.

Εάν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
ῤητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ
ῤητὸν καὶ μέσον δυναμένην.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα·
λέγω δὲ ἄλογός ἐστιν ἡ AG.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
AB, BG μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG
ῤητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, BG·
ὥστε καὶ συνθίγεται τὸ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρον
ἐστὶ τῶν δις ὑπὸ τῶν AB, BG. ῤητόν δὲ τὸ δις
ὑπὸ τῶν AB, BG· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG·
ἄλογός ἄρα ἡ AG, καλεῖσθαι δὲ ῤητὸν καὶ μέσον
δυναμένην.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes quidem compositum ex
ipsarum quadratis medium, rectangulum autem
sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est,
vocetur autem rationale et medium potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB, BG, facientes proposita;
dico irrationalem esse AG.

Quoniam enim compositum ex quadratis ip-
sarum AB, BG medium est, rectangulum autem
bis sub AB, BG rationale; incommensurabile
igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB,
BG rectangulo bis sub AB, BG; quare et compo-
nendo, quadratum ex AG incommensurabile est
rectangulo bis sub AB, BG. Rationale autem rec-
tangulum bis sub AB, BG; irrationalis igitur
quadratum ex AG; irrationalis igitur AG, vo-
cetur autem rationale et medium potens.

PROPOSITION XLI.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs
quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel, la droite
entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut une rationnelle et une
médiale.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites
faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BG est médiale, et que le
double rectangle sous AB, BG est rationel, la somme des quarrés de AB et de BG
sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG; donc, par addition,
le quarré de AG est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (17. 10).
Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; le quarré de AG est donc irra-
tionnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle est appelée celle qui peut une
rationnelle et une médiale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

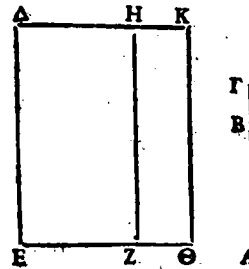
PROPOSITIO XLII.

Εάν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντι-
θῶσι, ποιῶσαι τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μῖσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν
μῖσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ
τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων· ἡ ὅλη εὐθεῖα
ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ δύο μῖσα δυναμίνη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιῶσαι τὰ προκείμενα².
λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes et compositum ex ip-
sarum quadratis medium, et rectangulum sub
ipsis medium, et adhuc incommensurabile com-
posito ex ipsarum quadratis; tota recta irratio-
nalis est, vocetur autem hina media potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles ΑΒ, ΒΓ, facientes proposita;
dico ΑΓ irrationalem esse.



Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβελήσθω παρὰ
τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ
δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ἕλον ἄρα τὸ ΔΘ
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ
μῖσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ,

Exponatur rationalis ΔΕ, et applicetur ad ΔΕ
quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ipsum ΔΖ,
rectangulo autem bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ipsum
ΗΘ; totum igitur ΔΘ æquale est quadrato ex ΑΓ.
Et quoniam medium est compositum ex qua-

PROPOSITION XLII.

Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux droites ΑΒ, ΒΓ incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite ΑΓ est irrationnelle.

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un rectangle ΔΖ égal à la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΗΘ soit égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; le rectangle entier ΔΘ sera égal au quarré de ΑΓ (4. 2). Et puisque la somme des

ΒΓ, καὶ ἴσιν³ ἴσον τῷ ΔΖ· μίσην ἄρα ἴσιν καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἴσιν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΗΚ ῥητὴ ἴσιν καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτίσιν τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἴσιν τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα⁵ ἴσιν τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἴσιν. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἴσιν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῤητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἴσιν τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἴσιν. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἴσιν ἡ ΑΓ, καλεῖσθαι δὲ δύο μίσην δυνάμειν⁶.

dratisipsarum ΑΒ, ΒΓ, atque est æquale ipsi ΔΖ; medium igitur est et ΔΖ; et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Propter eadem utique et ΗΚ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΗΖ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurable igitur est ΔΖ ipsi ΗΘ; quare et ΔΗ ipsi ΗΚ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΔΗ, ΗΚ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; irrationalis igitur est ΔΚ quæ appellatur ex binis nominibus. Rationalis autem ΔΕ; irrationalis igitur est ΔΘ, et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΘ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem bina media potens.

quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΖ, le rectangle ΔΖ est médial, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; donc ΔΗ est rationel (23. 10), et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Par la même raison, la rationelle ΗΚ est incommensurable en longueur avec ΗΖ, c'est-à-dire avec ΔΕ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le rectangle ΔΖ est incommensurable avec ΗΘ; donc ΔΗ est incommensurable avec ΗΚ (1. 6, et 10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΗ, ΗΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; donc ΔΚ est la droite irrationelle appelée de deux noms (37. 10). Mais ΔΕ est rationel; donc ΔΘ est irrationel (39. 10), et par conséquent la droite qui peut ΔΘ. Mais ΑΓ peut ΔΘ; donc ΑΓ est irrationel, et cette droite est appelée celle qui peut deux médiales.

ΛΗΜΜΑ.

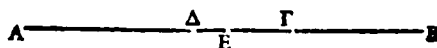
Εκκείσθω εὐθεΐα ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκατέρω τῶν Γ , Δ , καὶ ὑποκείσθω μείζων ἡ $ΑΓ$ τῆς $\DeltaΒ$. λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $\DeltaΒ$.

Τετμήσθω γάρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E . Καὶ ἐπὶ μείζων ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $\DeltaΒ$, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ $\DeltaΓ$. καὶ² λοιπὴ ἄρα ἡ $ΑΔ$ λοιπῆς τῆς $ΓΒ$ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΒ$. ἐλάττων ἄρα

LEMMA.

Exponatur recta AB , et secetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ , Δ , et supponatur major $ΑΓ$ quam $\DeltaΒ$; dico quadrata ex $ΑΓ$, $ΓΒ$ majora esse quadratis ex $ΑΔ$, $\DeltaΒ$.

Secetur enim AB bifariam in E . Et quoniam major est $ΑΓ$ quam $\DeltaΒ$, communis auferatur $\DeltaΓ$; et reliqua igitur $ΑΔ$ quam reliqua $ΓΒ$ major est. Æqualis autem $ΑΕ$ ipsi $ΕΒ$; minor



ἐστὶν³ ἡ $\DeltaΕ$ τῆς $ΕΓ$. τὰ Γ , Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\DeltaΕ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\DeltaΕ$. Ὡν τὸ ἀπὸ τῆς $\DeltaΕ$ ἑλαστόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$. καὶ λοιπὸν ἄρα

igitur est $\DeltaΕ$ quam $ΕΓ$; ergo Γ , Δ puncta non æqualiter distant à bipartitâ sectione. Et quoniam sub $ΑΓ$, $ΓΒ$ rectangulum cum quadrato ex $ΕΓ$ æquale est quadrato ex $ΕΒ$, sed et sub $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ rectangulum cum quadrato ex $\DeltaΕ$ æquale quadrato ex $ΕΒ$; ergo sub $ΑΓ$, $ΓΒ$ rectangulum cum quadrato ex $ΕΓ$ æquale est sub $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ rectangulo cum quadrato ex $\DeltaΕ$. Quorum quadratum ex $\DeltaΕ$ minus est quadrato ex $ΕΓ$; et

LEMME.

Soit la droite AB , que cette droite entière soit coupée en parties inégales aux points Γ , Δ , et supposons $ΑΓ$ plus grand que $\DeltaΒ$; je dis que la somme des quarrés $ΑΓ$ et de $ΓΒ$ est plus grande que la somme des quarrés de $ΑΔ$ et de $\DeltaΒ$.

Coupons AB en deux parties égales en E . Puisque $ΑΓ$ est plus grand que $\DeltaΒ$, retranchons la partie commune $\DeltaΓ$; le reste $ΑΔ$ sera plus grand que le reste $ΓΒ$. Mais $ΑΕ$ est égal à $ΕΒ$; donc $\DeltaΕ$ est plus petit que $ΕΓ$; les points Γ , Δ ne sont donc pas également éloignés du point qui coupe AB en deux parties égales. Et puisque le rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$ avec le quarré de $ΕΓ$ est égal au quarré de $ΕΒ$, et que le rectangle sous $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ avec le quarré de $\DeltaΕ$ est égal au quarré de $ΕΒ$ (5. 2), le rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$ avec le quarré de $ΕΓ$ sera égal au rectangle sous $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ avec le quarré de $\DeltaΕ$. Mais le quarré de $\DeltaΕ$ est plus petit que le quarré de $ΕΓ$; le rec-

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζον ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Οὔτε ἔδει διῆξαι⁵.

reliquum igitur rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; et reliquum igitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ majus est composito ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

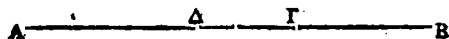
Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημείον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

PROPOSITIO XLIII.

Recta ex binis nominibus ad unum solum punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus recta ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ergo ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solum commensurabiles.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ rationales sint potentiâ solum com-

tingue restant sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme restante des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ est donc plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIII.

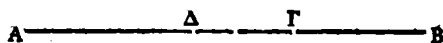
La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

Que la droite ΑΒ de deux noms soit divisée en ses noms au point Γ; les droites rationnelles ΑΓ, ΓΒ ne seront commensurables qu'en puissance; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être coupée en un autre point en deux rationnelles commensurables en puissance seulement.

Car si cela se peut, qu'elle soit coupée au point Δ, de manière que les ra-

συμμέτρους. Φανερόν δὲ ὅτι ἢ $ΑΓ$ τῇ $ΔΒ$ οὐκ ἴσται ἢ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἴσται δὴ καὶ ἢ $ΑΔ$ τῇ $ΓΒ$ ἢ αὐτή· καὶ ἴσται ὡς ἢ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$ οὕτως ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$, καὶ ἴσται ἢ $ΑΒ$ κατὰ τὸ αὐτὸ τμήμα κατὰ τὸ $Γ^2$ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ $Δ$, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἢ $ΑΓ$ τῇ $ΔΒ$ ἴσται ἢ αὐτή· διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὰ $Γ, Δ$ σημεία οὐκ

mensurabiles. Evidens utique est $ΑΓ$ cum ipsâ $ΔΒ$ non esse eandem. Si enim possibile, sit; erit igitur et $ΑΔ$ cum ipsâ $ΓΒ$ eadem; et erit ut $ΑΓ$ ad $ΓΒ$ ita $ΒΔ$ ad $ΔΑ$, et erit $ΑΒ$ in idem segmentum divisa in puncto $Γ$ atque in puncto $Δ$, quod non supponitur; non igitur $ΑΓ$ cum ipsâ $ΔΒ$ est eadem; ob id igitur et $Γ, Δ$ puncta non æqualiter distant



ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας³. ὅ· ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῶν⁴ ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$, διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ διαφέρει ρητῶ, ρητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ,$

à bipartitâ sectione; quo igitur differunt ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata à quadratis ex $ΑΔ, ΔΒ$, hoc differt et rectangulum bis sub $ΑΔ, ΔΒ$ à rectangulo bis sub $ΑΓ, ΓΒ$, propterea quòd et ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata cum rectangulo bis sub $ΑΓ, ΓΒ$ et ex $ΑΔ, ΔΒ$ quadrata cum rectangulo bis sub $ΑΔ, ΔΒ$ æqualia sunt quadrato ex $ΑΒ$. Sed ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata à quadratis ex $ΑΔ, ΔΒ$ differunt rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis igitur sub $ΑΔ, ΔΒ$ à rectangulo

tionelles $ΑΔ, ΔΒ$ ne soient commensurables qu'en puissance. Il est évident que $ΑΓ$ n'est pas égal à $ΔΒ$. Car que cela soit, si c'est possible; la droite $ΑΔ$ sera alors égale à $ΓΒ$, la droite $ΑΓ$ sera à la droite $ΓΒ$ comme $ΒΔ$ est à $ΔΑ$, et la droite $ΑΒ$ sera coupée en segments égaux au point $Δ$ qu'au point $Γ$, ce qui n'est pas supposé; donc $ΑΓ$ n'est pas égale à $ΔΒ$; donc les points $Γ, Δ$ ne sont pas également éloignés du point qui coupe $ΑΒ$ en deux parties égales; donc la différence de la somme des carrés de $ΑΓ$ et de $ΒΓ$, à la somme des carrés de $ΑΔ$ et de $ΔΒ$, est égale à la différence du double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$, au double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$; parce que la somme des carrés de $ΑΓ$ et de $ΓΒ$ avec le double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$, et la somme des carrés de $ΑΔ$ et $ΔΒ$ avec le double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$, sont égales chacune au carré de $ΑΒ$ (4. 2). Mais la différence de la somme des carrés de $ΑΓ$ et de $ΓΒ$, à la somme des carrés de $ΑΔ$ et de $ΔΒ$, est une surface rationnelle; car ces deux sommes sont rationnelles; donc la différence du double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$ au double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$ est une surface

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 217

ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μίσα ὄντα, ἔπερ ἄτοπον· μέσον γάρ⁵ μέσου οὐχ ὑπερίχει ῥητῷ· οὐκ ἄρα ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημείον διαιρεῖται· καθ' ἐν ἄρα μόνον. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

bis sub ΑΓ, ΓΒ differt rationali, media existentia, quod absurdum; medium enim non medium superat rationali; non igitur recta ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

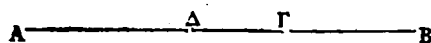
Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἐν μόνον σημείον διαιρεῖται'.

Ἐστω² ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μίσας εἶναι δύναμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται.

PROPOSITIO XLIV.

Ex binis mediis prima ad unum solum punctum dividitur.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediae sint potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μίσας εἶναι δύναμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ mediae sint potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ

rationnelle, ces surfaces étant médiales, ce qui est absurde; car une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une rationnelle (27. 10); une droite de deux noms ne peut donc pas être divisée en plus d'un point; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIV.

La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite ΑΒ, première de deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationnelle; je dis que la droite ΑΒ ne peut être divisée en un autre point.

Car, si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que les médiales ΑΔ, ΔΒ, commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationnelle. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au

218 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· ῥητῷ ἄρα δια-

à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, rationali autem differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, rationalia enim utraque;



φέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

rationali igitur differunt et ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, media existentia, quod absurdum; non igitur ex binis mediis prima ad aliud et aliud punctum dividitur in nomina; ad unum igitur solum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

PROPOSITIO XLV.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ex binis mediis secunda ad unum solum punctum dividitur.

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυτάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιχούσας· φε-

Sit ex binis mediis secunda ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediae sint potentià solum commensurabiles, medium continentes;

double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ à la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ, et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ diffèrent d'une surface rationnelle; car l'une et l'autre de ces grandeurs sont rationnelles; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ diffère donc d'une surface rationnelle de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est absurde (27. 10); donc une première de deux médiales ne peut pas être divisée en ses noms en deux points différents; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLV.

La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que ΑΒ, seconde de deux noms, soit divisée au point Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, qui comprennent une surface mediale, ne soient commensu-

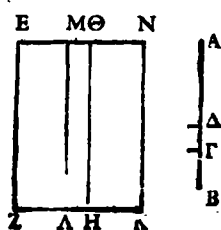
LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

νερὸν δὲ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ² οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ³ κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐλάττωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ⁴, ὥς ἐπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς

evidens est utique punctum Γ non esse in partitā sectione, quoniam non sunt longitudines commensurabiles; dico ΑΒ in alio puncto dividi.

Si enim possibile, dividatur et in Δ, i ΑΓ cum ipsā ΔΒ non sit eadem, sed ΑΓ n ex hypothesi. Evidens est utique quadrata ex ΔΒ minora esse quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, ut s ostendimus, et ΑΔ, ΔΒ medias esse pot



ΑΔ, ΔΒ μίσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μίσην περιεχούσας. Καὶ⁵ ἐκκείσθω ῥητὴ ΕΖ, καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον⁶ παρασκευάσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἄπερ

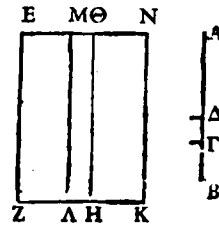
solūm commensurabiles, medium continet. Et exponatur rationalis ΕΖ, et quadrato qu ex ΑΒ æquale ad ΕΖ parallelogrammum rectangulum applicetur ΕΚ, quadratis autem ex ΑΓ æquale auferatur ΕΗ; reliquum igitur æquale est rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. R et quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, quæ minora

rables qu'en puissance. Il est évident que le point Γ n'est pas le milieu de parce que les droites ΑΓ, ΓΒ ne sont pas commensurables en longueur, dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que ne soit pas égal à ΔΒ, et supposons que ΑΓ est plus grand que ΔΒ. Il est évident que la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus petite que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme nous l'avons démontré plus haut (lem. 43. 10), et que les médiales ΑΔ, ΔΒ, qui comprennent une surface mediale, ne sont commensurables qu'en puissance (43. 10). Soit la rationnelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ un rectangle ΕΚ égal au quarré de ΑΒ, et retranchons ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΓΒ; le reste ΕΚ sera égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (4. 2). De plus, retranchons ΕΛ égal à la somme des quarrés de ΑΔ et ΔΒ, qui est plus petite

ἐλάσσονα ἰδέχθην τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθαι τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσαι ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα καὶ⁸ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-

tensa sunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, æquale auferatur ΕΛ; et reliquum igitur ΜΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam media sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; incommensu-



τρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ

rabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, potentiâ enim sunt commensurabiles ΑΓ, ΓΒ; rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis

la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme on l'a démontré; le reste ΜΚ sera égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, le rectangle ΕΗ sera médial; mais ce rectangle est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΕΘ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais les médiales ΑΓ, ΓΒ ne sont commensurables qu'en puissance; donc ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le quarré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (1. 6); le quarré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (10. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le quarré de ΑΓ (16. 10), car les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commen-

τῶν AB , GB · καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῇ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AG , GB ἴσον ἐστὶ τὸ EH , τῇ δὲ δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἴσον ἐστὶ τὸ $ΘΚ$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ EH τῇ $ΘΚ$ · ὥστε καὶ ἡ $EΘ$ τῇ $ΘΝ$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἴσι ρηταί· αἱ $EΘ$, $ΘΝ$ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Εἰάν δὲ δύο ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ἔλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ EN ἄρα¹⁰ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ $Θ$. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ διχθόσονται καὶ αἱ EM , MN · ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἴσται ἡ EN ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη, τό, τε $Θ$ καὶ τὸ M , καὶ οὐκ ἐστὶν ἡ $EΘ$ τῇ MN ἡ αὐτὴ, ἐπειδὴ περ¹¹ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AD , DB . Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AD , DB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ AD , DB · πολλῇ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB , τουτέστι τὸ EH , μείζον ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AD , DB , τουτέστι τοῦ MK ·

sub AG , GB ; et quadrata ex AG , GB igitur incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AG , GB . Sed quadratis quidem ex AG , GB æquale est EH , rectangulo autem bis sub AG , GB æquale est $ΘΚ$; incommensurable igitur est EH ipsi $ΘΚ$; quare et $EΘ$ ipsi $ΘΝ$ incommensurabilis est longitudine; et sunt rationales; ergo $EΘ$, $ΘΝ$ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus; recta EN igitur ex binis nominibus est divisa in $Θ$. Propter eadem utique ostenduntur et EM , MN rationales potentiâ solùm commensurabiles, et erit EN ex binis nominibus ad aliud et aliud divisa, et ad $Θ$ et ad M , et non est $EΘ$ cum ipsâ MN eadem, quoniam quadrata ex AG , GB majora sunt quadratis ex AD , DB . Sed quadrata ex AD , DB majora sunt rectangulo bis sub AD , DB ; multò igitur et quadrata ex AG , GB , hoc est EH , majus est rectangulo bis sub AD , DB , hoc est

surable avec le rectangle sous AG , GB ; la somme des carrés de AG et de GB est donc incommensurable avec le double rectangle sous AG , GB . Mais EH est égal à la somme des carrés de AG et de GB , et $ΘΚ$ est égal au double rectangle sous AG , GB ; donc EH est incommensurable avec $ΘΚ$; donc $EΘ$ est incommensurable en longueur avec $ΘΝ$; mais ces droites sont rationelles; les rationelles $EΘ$, $ΘΝ$ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si l'on ajoute deux rationelles commensurables en puissance seulement, leur somme est irrationnelle, et est appelée droite de deux noms (37. 10); la droite EN de deux noms est donc divisée au point $Θ$. On démontrera semblablement que les rationelles EM , MN sont commensurables en puissance seulement, et que la droite EN de deux noms sera divisée en deux points; savoir, en $Θ$ et en M ; mais $EΘ$ n'est pas égal à MN , puisque la somme des carrés de AG et de GB est plus grande que la somme des carrés de AD et de DB (43. 10). Mais la somme des carrés de AD et de DB est plus grande que le double rectangle sous AD , DB ; la somme des carrés de AG , GB , c'est-à-dire le rectangle EH , est donc plus grande que le double rectangle sous AD , DB ; c'est-à-dire,

222 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτή. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

ipso MK; quare et ΕΘ quàm MN major est; ergo ΕΘ cum ipsà MN non est eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

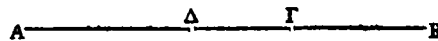
PROPOSITIO XLVI.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μένον σημεῖον διαιρεῖται'.

Major ad idem solùm punctum dividitur.

Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Sit major ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rationale, rectangulum autem sub ΑΓ, ΓΒ medium; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Καὶ

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ rationale, rectangulum autem

que le rectangle MK; donc ΕΘ est plus grand que MN; donc ΕΘ n'est pas égal à MN. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVI.

La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite majeure soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puissance seulement, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant médial; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée au point Δ, si cela est possible, de manière que les droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant médial.

ἐπεὶ ὁ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῃ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ⁵, μίσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον διαιρεῖται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

sub ipsis medium. Et quoniam quo differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadrata ex ΑΔ, ΔΒ superant rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur major ad aliud et aliud punctum dividitur; ad idem solum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

PROPOSITIO XLVII.

Ἡ ῥητὴν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται¹.

Εἴτω ῥητὴν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμεις ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμε-

Recta rationale et medium potens ad unum solum punctum dividitur.

Sit rationale et medium potens ipsa ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex

Puisque la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (4. 2), est égale à la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, et que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ surpasse d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΔ, et de ΔΒ, car ces surfaces sont rationelles, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une majeure ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVII.

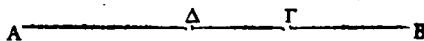
La droite qui peut une rationelle et une mediale ne peut être divisée qu'en un point.

Que la droite ΑΒ, pouvant une rationelle et une mediale, soit divisée au point Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puis-

224 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

νον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δις² ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium; rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δις³ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν ὅτι διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ⁵, μίσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητόν καὶ μέσον δυνάμειν κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημείον διαιρεῖται. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

Si enim possibile, dividatur in puncto Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ medium, rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc differunt et ex ΑΔ, ΔΒ quadrata à quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur rationale et medium potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

sance, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que les droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant rationel. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (4. 2) est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ à la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ, et que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ surpassera d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; mais ces surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une droite pouvant une rationelle et une médiale ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μύ.

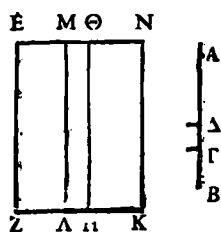
PROPOSITIO XLVIII.

Ἡ δύο μίσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται¹.

Ἐστω δύο μίσα δυναμένη² ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό, τε συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῶν συγκεῖμένων ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν λέγω ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιούσα τὰ προκείμενα.

Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

Sit bina media potens AB divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes et compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, et rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum quadratis composito ex binis rectangulis sub ipsis; dico AB ad aliud punctum non dividi, faciens proposita.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παρατελέσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ,

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut rursus scilicet ΑΓ cum ipsâ ΔΒ non sit eadem, sed major ex hypothesi ΑΓ, et exponatur rationalis ΕΖ, et applicetur ad ΕΖ quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub

PROPOSITION XLVIII.

La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

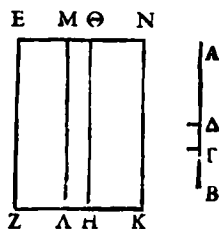
Que la droite AB, qui peut deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puissance, la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale; le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant ausssi médial; la somme de leurs carrés étant incommensurable avec le double rectangle compris sous ces droites; je dis que la droite AB n'est pas divisée en un autre point, en faisant ce qui est proposé.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que ΑΓ ne soit pas égal à ΔΒ, et supposons que ΑΓ soit la plus grande. Soit la rationnelle ΕΖ, et appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des carrés de

226 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὲ παραβελήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα

ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΚ; totum igitur ΕΚ æquale est quadrato ex ΑΒ. Rursus et applicetur ad ΕΖ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ æquale ΕΛ; reliquum igitur rectangulum his sub ΑΔ, ΔΒ reliquo ΜΚ æquale est. Et quoniam medium supponitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ; medium igitur est et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΘΕ, et



ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκεῖμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ἰνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διήρηται,

incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurable est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; et ΕΗ igitur ipsi ΘΚ incommensurable est; quare et ΕΗ ipsi ΘΝ incommensurable est. Et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΕΝ ex binis nominibus est divisa in Θ. Similiter utique ostendemus et

ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme entier ΕΗ sera égal au carré de ΑΒ (4. 2). De plus, appliquons à ΕΖ le parallélogramme ΕΛ égal à la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ; le double rectangle restant sous ΑΔ, ΔΒ sera égal au reste ΜΚ (4. 2). Et puisque on a supposé que la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, ΕΗ sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΘΕ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΝ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance; le droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. Nous démontrerons semblablement qu'elle est divisée au point Μ; mais

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 227

καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἢ αὐτῇ· ἢ ἄρα ἐκ τῶν³ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρεται, ὅπερ ἔστιν ἀτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μίσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἐν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsam in M dividi, et non est ΕΘ cum ipsa MN eadem; recta igitur ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur, quod est absurdum; non igitur bina media potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solum punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μῆζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μῆζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μῆζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθαι ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάττονον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθαι ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

ΕΘ n'est pas égal avec ΜΝ; la droite de deux noms est donc divisée en un point et encore en un autre point, ce qui est absurde (43. 10); une droite qui peut deux médiales n'est donc pas divisée en un point et encore en un autre point; elle n'est donc divisée qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du carré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

228 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γ'. Εάν δὲ μὴδὲτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἢ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὲ ἰὰν τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μείζον δύνῃται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἰὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ἢ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε'. Εάν δὲ τὸ ἐλάττω, πέμπτη.

ς'. Εάν δὲ μὴδὲτερον, ἑκτη.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quàm minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si verò neutrum, sexta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγχεόμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

PROPOSITIO XLIX.

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ipsum quidem ΒΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΓΑ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur quædam rationalis Δ, et ipsi Δ

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du carré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROPOSITION XLIX.

Trouver la première de deux noms.

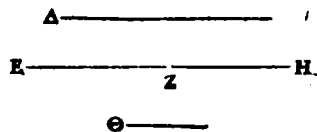
Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que leur somme n'ait pas avec ΓΑ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (30. lem. 1. 10); soit exposée une rationnelle Δ, et que ΕΖ soit commen-

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὰ

commensurabilis sit longitudine ipsa ΕΖ; rationalis igitur est et ΕΖ. Et fiat ut ΒΑ numerus ad ΑΓ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ΕΖ. Ipse autem ΑΒ ad ΑΓ rationem habet numerus ad numerum; et quadratum ΕΖ igitur ad quadratum ex ΖΗ rationem habet quam numerus ad numerum; quare com-

A Γ Β



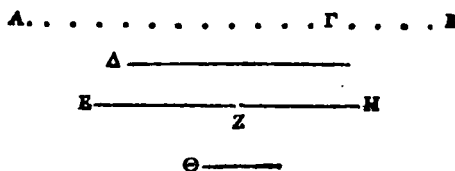
ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

surabile est ex ΕΖ quadratum quadratum ΖΗ. Atque est rationalis ΕΖ; rationalis igitur et ΖΗ. Et quoniam ΒΑ ad ΑΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ΕΖ igitur ad quadratum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum commensurabilis igitur est ΕΖ ipsi ΖΗ longitudine; ergo ΕΖ, ΖΗ rationales sunt potentia commensurabiles; ex binis igitur nominibus ΕΗ. Dico et primam esse.

nable en longueur avec Δ; la droite ΕΖ sera rationelle (déf. 6. 10). Faisons en sorte que le nombre ΒΑ soit à ΑΓ comme le carré de ΕΖ est au carré de ΖΗ (cor. 6. 10). Mais ΑΒ a avec ΑΓ la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de ΒΑ a donc avec le carré de ΖΗ la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de ΕΖ est donc commensurable avec le carré de ΖΗ (6. 10). Mais ΕΖ est rationelle donc ΖΗ est rationelle. Et puisque ΒΑ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre qu'un nombre carré, le carré de ΕΖ n'aura pas avec le carré de ΖΗ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10); les droites ΕΖ, ΖΗ sont donc rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΗ est donc de deux noms (37. 10); et je dis qu'elle est la première de deux noms.

Επει γάρ ἴσθιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μίζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μίζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἴσθιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ

Quoniam enim est ut BA numerus ad ipsum AF ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH , major autem BA quàm AF ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH . Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH , Θ . Et quoniam est ut BA ad AF ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH ; convertendo igitur est ut AB ad BF ita



τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράζωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράζωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράζωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράζωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἰστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μιῶζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἰστὶ πρώτη. Ὅπερ εἶδει δι᾽ ἔξαι.

ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ . Ipse autem AB ad BF rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quam ZH plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH, et commensurabilis EZ ipsi A longitudine; ergo EH ex binis nominibus est prima. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le nombre BA est à AT comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que AT; le carré de EZ sera plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés des droites ZH, θ soit égale au carré de EZ. Puisque BA est à AT comme le carré de EZ est au carré de ZH, par conversion, AB sera à BT comme le carré de EZ est au carré de θ . Mais AB a avec BT la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ a donc avec le carré de θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec θ (9. 10); la puissance de EZ surpasse la puissance de ZH du carré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont rationnelles, et EZ est commensurable en longueur avec Δ ; la droite EH est donc la première de deux noms (déf. secondes. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

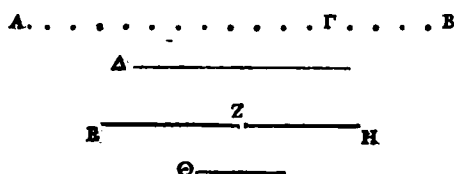
PROPOSITIO L.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΑΓ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ com-



Δ σύμμετρος ἴστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ ΖΗ. Γιγνέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ

mensurabilis sit ΖΗ longitudine; rationalis igitur est ΖΗ. Fiat et ut ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ ita ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex ΖΕ; commensurable igitur est ex ΗΖ quadratum quadratum ex ΖΕ; rationalis igitur est et ΖΕ. Et quoniam ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΗΖ quadratum ad ipsum e-

PROPOSITION L.

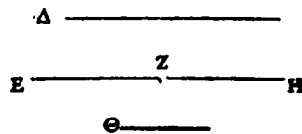
Trouver la seconde de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec Β la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (30 lem. 1. 10), et que Α n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit Δ rationnelle, et que ΖΗ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite ΖΗ sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre ΓΑ soit au nombre ΑΒ comme le carré de ΗΖ est au carré de ΖΕ (6. cor. 10); le carré de ΗΖ sera commensurable avec le carré de ΖΕ (6. 10); la droite ΖΕ est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque le nombre ΓΑ n'a pas avec le nombre ΑΒ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΗΖ n'aura pas non plus avec le carré de ΖΕ la raison

τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα.

ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est HZ ipsi ZE longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ipsa EH. Ostendendum est et secundam esse.

A Γ B



Επεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. Ἐστω τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Αλλ' ὁ AB πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει·

Quoniam enim invertendo est ut AB numerus ad ipsum ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem ΒΑ quam ΑΓ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB ad ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Sed AB ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare

qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite HZ est donc incommensurable en longueur avec ZE (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la seconde de deux noms.

Car puisque, par inversion, le nombre AB est à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que ΒΑ est plus grand que ΑΓ, le carré de EZ est plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés des droites ZH, Θ soit égale au carré de EZ; par conversion, AB sera à ΒΓ comme le carré de EZ est au carré de Θ. Mais AB a avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10);

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥστε ἡ EZ τῇ ZH μιῶν δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ EZ, ZH δυνάμει μείον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἑλάττων ὀνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ³ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δεύτερα. Ὅτι ἐν ἴδει δεῖξαι.

EZ quam ZH plus potest quadrato ex re commensurabili. Et sunt rationales EZ, tentiâ solum commensurabiles, et ZH nomen commensurabile est. expositæ r. Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

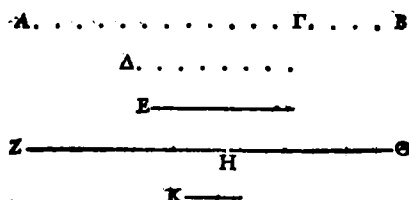
ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ sit ad ΒΓ quidem ratio compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem ratio habeat quam quadratus numerus ad quadratum



γωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἐκκείσθω δὲ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον

numerum, ad ΑΓ autem rationem non quam quadratus numerus ad quadratum numerum; exponatur autem quidam et alius quadratus numerus Δ, et ad utrumque i

(9. 10); la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du carré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite EH est donc une seconde de noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LI.

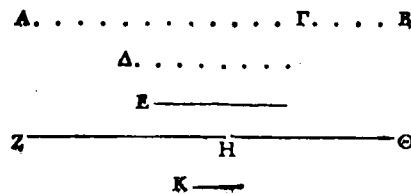
Trouver une troisième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que leur somme ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit un nombre Δ qui ne soit pas un carré, et que ce nombre n'ait pas avec chacun des

234 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μη ἔχῃτω ὁν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γιγνέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε²· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἵπτι ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὁν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον

BA, AG rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur quædam rationalis recta E, et fiat ut Δ ad AB ita ex E quadratum ad ipsum ex ZH; commensurabile igitur est ex E quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis E; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam Δ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex E quadratum ad ipsum ex



ἔχει ὁν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γιγνέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἵπτι ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὁν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi ZH longitudine. Fiat autem rursus ut BA numerus ad ipsum AG ita ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ; commensurabile igitur est quadratum ex ZH ad ipsum ex HΘ. Rationalis autem ZH; rationalis igitur et HΘ. Et quoniam AB ad AG rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex ZH quadratum ad ipsum ex HΘ ratio-

bres BA, AG la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit enfin une droite rationelle E, et faisons en sorte que Δ soit à AB comme le quarré de E est au quarré de ZH; le quarré de E sera commensurable avec le quarré de ZH. Mais la droite E est rationelle; la droite ZH est donc rationelle (6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de E n'a pas non plus avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite E sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à AG comme le quarré de ZH est au quarré de HΘ; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de HΘ. Mais la droite ZH est rationelle; la droite HΘ est donc rationelle. Et puisque AB n'a pas avec AG la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de ZH

τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ἰσόμεάτων ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διῖσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν³ ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐστω, οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν⁴ ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

nem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΘ ex binis nominibus est. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut autem ΑΒ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint igitur quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad

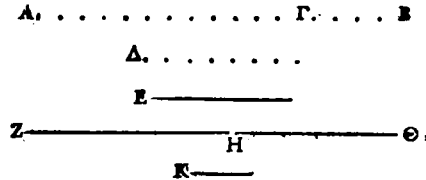
n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une troisième de deux noms.

Car, puisque Δ est à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ, et que ΑΒ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le carré de Ε est au carré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et le carré de Ε n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera plus grand que le carré de ΗΘ. Que la somme des carrés de ΗΘ et de Κ soit égale au carré de ΖΗ; par conversion ΑΒ sera à ΒΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ. Mais ΑΒ a avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

236 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστίν⁵ ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον

quadratum numerum; et quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ZH ipsi Κ longitudine; ergo ZH. quam ΗΘ plus potest quadrato



δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδενίτερά αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt ΖΗ, ΗΘ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est ipsi Ε longitudine; ergo ΖΘ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

PROPOSITIO. LII.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ· ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad ΒΓ rationem non habeat, neque quidem ad ΑΓ, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ

quarré; le quarré de ΖΗ a donc avec le quarré de Κ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΖΗ est donc commensurable en longueur avec Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΖΗ. Mais les droites ΖΗ, ΗΘ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec Ε; la droite ΖΘ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

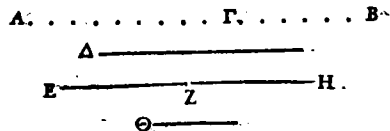
PROPOSITION LII.

Trouver une quatrième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec ΒΓ ni avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationnelle Δ,

τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς³ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη.

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad ipsum AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; commensurabile igitur est ex EZ quadratum quadrato ex ZH; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam BA ad AG rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare EH ex binis nominibus est. Dico et quartam esse.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι· ἄρα ὡς ὁ

Quoniam enim est ut BA ad AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam AG; majus igitur ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur ut

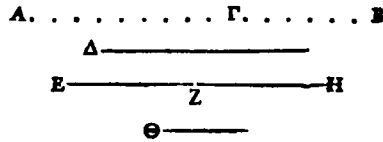
et que la droite EZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre BA soit à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH; le carré de EZ sera commensurable avec le carré de ZH; la droite ZH est donc rationnelle. Et puisque BA n'a pas avec AG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de EZ n'a pas non plus avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec nombre carré, la droite EZ sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une quatrième de deux noms.

Car, puisque BA est à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que AG, le carré de EZ est plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés de ZH et de Θ soit égale au carré de EZ; par con-

238 · LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ AB πρὸς τὸν ΒΓ
λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς⁵ πρὸς τι-

AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex ΕΖ quadratum
ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad ΒΓ rationem
non habet quam quadratus numerus ad quadra-



τράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν⁶. ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστίν· ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ
μειζὼν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ
εἴσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον συμμέτροι,
καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα
ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Οπιρ ἴδει
ποιῆται.

tum numerum; neque igitur ex ΕΖ quadratum ad
ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus
numerus ad quadratum numerum; incommen-
surabilis igitur est ΕΖ ipsi Θ longitudine; ergo
ΕΖ quàm ΖΗ plus potest quadrato ex rectā sibi
incommensurabili. Et sunt ΕΖ, ΖΗ rationales po-
tentiā solū commensurabiles, et ΕΖ ipsi Δ
commensurabilis est longitudine; ergo ΕΗ ex
binis nominibus est quarta. Quod oportebat
facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

PROPOSITIO LIII.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Invenire ex binis nominibus quintam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν
AB πρὸς ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut AB
ad utrumque ipsorum rationem non habeat

version, le nombre AB sera à ΒΓ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de Θ. Mais
AB n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;
le quarré de ΕΖ n'a donc pas avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré
a avec un nombre quarré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur
avec Θ; la puissance de ΕΖ surpasse donc la puissance de ΖΗ du quarré d'une
droite incommensurable avec ΕΖ. Mais les droites ΕΖ, ΖΗ sont des rationelles
commensurables en puissance seulement, et ΕΖ est commensurable en longueur
avec Δ; la droite ΕΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce
qu'il fallait faire.

PROPOSITION LIII.

Trouver une cinquième de deux noms.

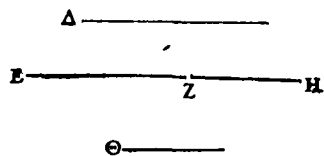
Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que AB n'ait pas avec chacun de ces

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 239

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ HZ². ῥητὴ ἄρα ἡ HZ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE. ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ ZE. Καὶ ἐπεὶ ὁ³ ΓΑ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἄρα⁴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα⁵ ὀνομάτων ἔστιν ἡ EH. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη.

quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta Δ, et ipsi Δ commensurabilis sit longitudine ipsa HZ; rationalis igitur HZ. Et fiat ut ΓΑ ad AB ita ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE; rationalis igitur est et ZE. Et quoniam ΓΑ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est EH. Dico et quintam esse.

A Γ B



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ἀνάπαλιν ἄρα⁶ ὡς ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

Quoniam enim est ut ΓΑ ad AB ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ZE; invertendo igitur ut BA ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; majus igitur ex EZ quadratum quadrato

nombres la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit une droite rationelle Δ, et que HZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite HZ sera rationelle. Faisons en sorte que ΓΑ soit à AB comme le quarré de HZ est au quarré de ZE; la droite ZE sera rationelle. Et puisque ΓΑ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de HZ n'a pas non plus avec le quarré de ZE la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, les droites EZ, ZH seront des rationelles commensurables en puissance seulement (9. 10); EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une cinquième de deux noms.

Car puisque ΓΑ est à AB comme le quarré de ZH est au quarré de ZE, par inversion, BA est à ΑΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH; le quarré de EZ

240 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἴσιν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ

ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB numerus ad ipsum BG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad BG rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex EZ quadratum ad

A Γ B

Δ —————

E ————— Z ————— H

Θ —————

ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἴσιν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare EZ quàm ZH plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili. Et sunt EZ, ZH rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus nomen commensurabile est expositæ rationali Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat facere.

est donc plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés de ZH et de Θ soit égale au carré de EZ; par conversion, le nombre AB sera au nombre BG comme le carré de EZ est au carré de Θ. Mais AB n'a pas avec BG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ n'a donc pas avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du carré d'une droite incommensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Δ; la droite EH est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

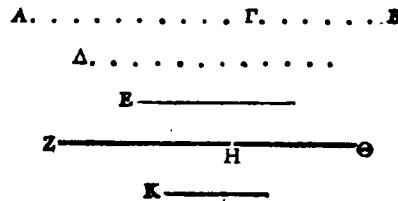
PROPOSITIO LIV.

Εὕρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν, μήτε' πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεία ἡ Ε,

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; sit autem et alius numerus Δ non quadratus existens, et non ad utrumque ipsorum ΒΑ, ΑΓ rationem habens quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur



καὶ γιγνέτω ὥς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ². Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

quædam rationalis recta Ε, et fiat ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurable igitur est ex Ε quadratum quadrato ex ΖΗ. Atque est rationalis Ε; rationalis igitur et ΖΗ. Et quoniam non habet Δ ad ΑΒ rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum,

PROPOSITION LIV.

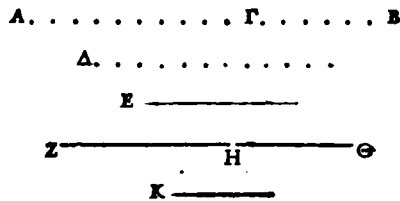
Trouver la sixième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec chacun de ces nombres la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un carré, et qui n'ait pas avec chacun des nombres ΒΑ, ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit aussi la droite rationnelle Ε; et faisons en sorte que Δ soit à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ; le carré de Ε sera commensurable avec le carré de ΖΗ. Mais la droite Ε est rationnelle; la droite ΖΗ est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

242 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν
ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ
ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ

neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex
ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad
quadratum numerum; incommensurabilis igitur
est Ε ipsi ΖΗ longitudine. Fiat igitur rursus
ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum
ex ΗΘ. Commensurabile igitur ex ΖΗ quadratum
quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum



ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὸν ἄρα καὶ³ τὸ ἀπὸ τῆς
ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἵπαι³ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν
ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα⁴
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα
ῤηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα
ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ. Διεκτίον δὴ ὅτι καὶ ἔκτε.

ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ;
rationalis igitur ΗΘ. Et quoniam ΒΑ ad ΑΓ ra-
tionem non habet quam quadratus numerus ad
quadratum numerum, neque quadratum ex ΖΗ
igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet
quam quadratus numerus ad quadratum nume-
rum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ
longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt
potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis
nominibus est ΖΘ. Ostendendum est et sextam
esse.

quarré, le quarré de Ε n'aura pas avec le quarré de ΖΗ la raison qu'un nombre
quarré a avec un nombre quarré; la droite Ε est donc incommensurable en lon-
gueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, faisons en sorte que ΒΑ soit à ΑΓ comme le quarré
de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; le quarré de ΖΗ sera commensurable avec le quarré
de ΗΘ. Mais le quarré de ΖΗ est rationel; le quarré de ΗΘ est donc rationel; la
droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque ΒΑ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre
quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΖΗ n'aura pas non plus avec le
quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite
ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ sont
donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une
droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la sixième de
deux noms.

Επει γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διότου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Εδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ Ε μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐστω οὖν τῇ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, est autem et ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Ostensa est autem et ipsi ΖΗ incommensurabilis; utraque igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ incommensurabilis est ipsi Ε longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΘ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint itaque quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare neque ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum nume-

Car puisque Δ est à ΑΒ comme le quarré de Ε est au quarré de ΖΗ, et que ΒΑ est à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le quarré de Ε est au quarré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de Ε n'a donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais on a démontré qu'elle est incommensurable avec ΖΗ; chacune des droites ΖΗ, ΗΘ est donc incommensurable en longueur avec Ε. Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, le quarré de ΖΘ sera plus grand que le quarré de ΗΘ. Que la somme des quarrés de ΗΘ et de Κ soit égale au quarré de ΖΗ; par conversion, ΑΒ sera à ΒΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΑΒ n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΖΗ n'a donc pas avec le quarré de Κ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

244 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει· ἡ ZH ἄρα τῆς $H\Theta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ZH , $H\Theta$ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν^δ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ E · ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἔκτῃ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐστω δύο τετράγωνα τὰ AB , BF , καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AB τῇ BE · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZB τῇ BH . Καὶ συμπληρώσω τὸ AG παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ AG , καὶ ὅτι τῶν AB , BF μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔH , καὶ ὅτι τῶν AG , FB μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ $\Delta\Gamma$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ BZ , ἡ δὲ BE τῇ BH · ὅλη ἄρα ἡ ΔE ὅλη τῇ ZH ἴσθιν. Ἀλλ' ἡ μὲν ΔE ἑκατέρα τῶν $A\Theta$, $K\Gamma$ ἐστὶν

rum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi K longitudine; ergo ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ZH , $H\Theta$ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est longitudine expositæ rationali E ; ergo $Z\Theta$ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat facere.

LEMMA.

Sint duo quadrata AB , BF , et ponantur ita ut in directum sit AB ipsi BE ; in directum igitur est et ZB ipsi BH . Et compleatur AG parallelogrammum; dico quadratum esse AG , et ipsorum AB , BF medium proportionale esse ΔH , et adhuc ipsorum AG , FB medium proportionale esse $\Delta\Gamma$.

Quoniam enim æqualis est quidem AB ipsi BZ , ipsa verò BE ipsi BH ; tota igitur ΔE toti ZH est æqualis. Sed quidem ΔE utrique

la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec K ; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de $H\Theta$ du carré d'une droite incommensurable avec ZH ; mais les droites ZH , $H\Theta$ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée E ; la droite $Z\Theta$ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait faire.

LEMME.

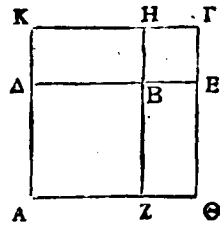
Soient les deux carrés AB , BF ; plaçons-les de manière que la droite AB soit dans la direction de BE ; la droite ZB sera dans la direction de BH . Achéons le parallélogramme AG ; je dis que AG est un carré, que ΔH est moyen proportionnel entre AB et BF , et que $\Delta\Gamma$ est aussi moyen proportionnel entre AG et FB .

Puisque la droite AB est égale à BZ , et que BE est égale à BH , la droite entière ΔE sera égale à la droite entière ZH . Mais la droite ΔE est égale à chacune des

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 245

ἴση· ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΘΓ ἴσιν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΘΓ ἴσιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως

ipsarum ΑΘ, ΚΓ est æqualis; ipsa verò ΖΗ utrique ipsarum ΑΚ, ΘΓ est æqualis; et utraque igitur ipsarum ΑΘ, ΚΓ utrique ipsarum ΑΚ, ΘΓ est æqualis; æquilaterum igitur est ΑΓ parallelogrammum. Est autem et rectangulum; quadratum igitur est ΑΓ. Et quoniam est ut ΖΒ ad ΒΗ ita ΔΒ ad ΒΕ, sed ut quidem ΖΒ ad ΒΗ



τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μίση ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίση ἀνάλογόν ἐστι³ τὸ ΔΓ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρα⁴· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ⁵. Αλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ

ita ΑΒ ad ΔΗ, ut verò ΔΒ ad ΒΕ ita ΔΗ ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΗ ita ΔΗ ad ΒΓ; ipsorum ΑΒ, ΒΓ igitur medium proportionale est ΔΗ. Dico et ipsorum ΑΓ, ΓΒ medium proportionale esse ΔΓ. Quoniam enim est ut ΑΔ ad ΔΚ ita ΚΗ ad ΗΓ, æqualis enim est utraque utrique; et componendo ut ΑΚ ad ΚΔ ita ΚΓ ad ΓΗ. Sed ut quidem ΑΚ ad ΚΔ ita ΑΓ ad ΓΔ, ut verò ΚΓ ad ΓΗ ita ΔΓ ad ΓΒ; et ut

droites ΑΘ, ΚΓ, et la droite ΖΗ est aussi égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; chacune des droites ΑΘ, ΚΓ est donc égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; donc ΑΓ est un parallélogramme équilatéral. Mais il est aussi rectangle; donc ΑΓ est un carré. Et puisque ΖΒ est à ΒΗ comme ΔΒ est à ΒΕ, que ΖΒ est à ΒΗ comme ΑΒ est à ΔΗ (1. 6), et que ΔΒ est à ΒΕ comme ΔΗ est à ΒΓ, le carré ΑΒ est à ΔΗ comme ΔΗ est à ΒΓ; donc ΔΗ est moyen proportionnel entre ΑΒ et ΒΓ. Je dis aussi que ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Car puisque ΑΔ est à ΔΚ comme ΚΗ est à ΗΓ, à cause que chacune des droites ΑΔ, ΔΚ est égale à chacune des droites ΚΗ, ΗΓ, par addition, ΑΚ sera à ΚΔ comme ΚΓ est à ΓΗ. Mais ΑΚ est à ΚΔ comme ΑΓ est à ΓΔ (1. 6), et ΚΓ est à ΓΗ comme ΔΓ est à ΓΒ; donc

246 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΓ πρὸς τὴν^δ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. Ὅπερ προύκειτο δεῖξαι.

igitur $\Delta\Gamma$ ad $\Delta\Gamma$ ita $\Delta\Gamma$ ad $\Gamma\Gamma$; ipsorum $\Delta\Gamma$, $\Gamma\Gamma$ igitur medium proportionale est $\Delta\Gamma$. Quod proponebatur demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νέ.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γάρ τὸ ΑΒΓΔ¹ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ² πρώτη ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἴστω τὸ μῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερόν δὲ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη

PROPOSITIO LV.

Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus primâ ΑΔ; dico rectam quæ potest spatium ΑΓ irrationalem esse, quæ appellatur ex binis nominibus.

Quoniam enim ex binis nominibus est prima ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, et sit majus nomen ΑΕ. Evidens utique est ΑΕ, ΕΔ rationales esse potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΑΕ commensura-

ΑΓ est à ΔΓ comme ΔΓ est à ΒΓ; donc ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Ce qu'on s'était proposé de démontrer.

PROPOSITION LV.

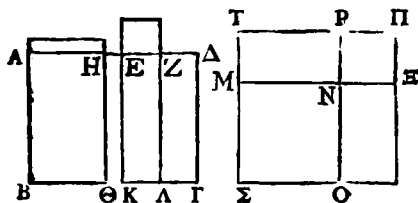
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la droite ΑΔ première de deux noms; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Puisque la droite ΑΔ est première de deux noms; qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et qu'ΑΕ soit son plus grand nom. Il est évident que les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, que la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et que ΑΒ sera commensurable en longueur avec la rationnelle

ρητῇ τῇ AB μήκει. Τετμήσθω δὴ³ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Z σημείον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μίζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἴαν ἄρα τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ⁴ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τοῦτ' ἐστὶ τοῦ⁵ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ⁶. Παραβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῇ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον

bilem esse expositæ rationali AB longitudine. Secetur utique EΔ bifariam in puncto Z. Et quoniam AE quam EΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, si igitur quartæ parti quadrati ex minori, hoc est quadrati ex EZ, æquale ad maiorem AE applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Applicetur igitur ad AE qua-



τὸ ὑπὸ τῶν⁷ ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ⁸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρῃ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῇ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετραγώνον συνιστάτω τὸ ΣΝ, τῇ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΡ τῇ

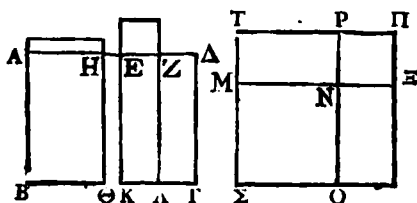
drato ex EZ æquale parallelogrammum sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur est ΑΗ ipsi ΕΗ longitudine. Et ducantur a punctis Η, Ε, Ζ alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallelæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ; et quidem ΑΘ parallelogrammo æquale quadratum constituatur ΣΝ, quadrato autem ΗΚ æquale ipsum ΝΠ, et ponantur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΝΡ ipsi

exposée AB (déf. sec. 1. 10). Coupons EΔ en deux parties égales au point Z. Puisque la puissance de AE surpasse la puissance de EΔ du carré d'une droite commensurable avec AE, si nous appliquons à la plus grande AE un parallélogramme qui soit égal à la quatrième partie du carré de la plus petite, c'est-à-dire du carré de EZ, et défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera cette droite en parties commensurables (18. 10). Que le parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ, égal au carré de EZ, soit appliqué à AE (28. 6); la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec ΕΗ. Des points Η, Ε, Ζ menons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles à l'une ou à l'autre des droites ΑΒ, ΓΔ (14. 2). Faisons le carré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ, le carré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et faisons en sorte que la droite ΜΝ soit dans la direction de ΝΞ; la droite ΝΡ sera dans la direction

248 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΝΟ. Καὶ συμπληρώσω τὸ ΣΠ παραλληλό-
 γραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ
 ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ
 ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ¹⁰· καὶ ὥς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ
 οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὴν ΚΗ¹¹· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα
 μίσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΑ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ¹², τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ

ΝΟ. Et compleatur ΣΠ parallelogrammum; qua-
 dratum igitur est ΣΠ. Et quoniam rectangulum
 sub ΑΗ, ΗΕ æquale est quadrato ex ΕΖ; est
 igitur ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ; et ut igitur
 ΑΘ ad ΕΑ ita ΕΑ ad ΚΗ; ipsorum ΑΘ, ΗΚ
 igitur medium proportionale est ΕΑ. Sed qui-
 dem ΑΘ æquale est ipsi ΣΝ, ipsum verò ΗΚ



ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μίσον ἀνάλογόν ἐστι
 τὸ ΕΑ. Ἐστὶ δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μίσον
 ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΑ
 τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστὶν¹³. Ἐστὶ δὲ
 καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα
 τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτίεστι τῷ
 ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἢ
 ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.
 Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμ-
 μετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἐκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ.

æquale est ipsi ΝΠ; ipsorum ΣΝ, ΝΠ igitur
 medium proportionale est ΕΑ. Est autem eo-
 rumdem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale et
 ΜΡ; æquale igitur est ΕΑ ipsi ΜΡ; quare et
 ipsi ΟΞ æquale est. Sunt autem et ΑΘ, ΗΚ ipsis
 ΣΝ, ΝΠ æqualia; totum igitur ΑΓ æquale est
 toti ΣΠ, hoc est quadrato ex ΜΞ; ipsum ΑΓ
 igitur potest ipsa ΜΞ; dico ΜΞ ex binis nom-
 nibus esse. Quoniam enim commensurabilis est
 ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique

de ΝΟ (14. 1). Achévon le parallélogramme ΣΠ, le parallélogramme ΣΠ sera un
 carré (lem. précéd.). Puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΕ est égal au carré de ΕΖ,
 la droite ΑΗ sera à ΕΖ comme ΕΖ est à ΕΗ (17. 6); donc ΑΘ est à ΕΑ comme ΕΑ est
 à ΚΗ (1. 6); donc ΕΑ est moyen proportionnel entre ΑΘ et ΗΚ. Mais ΑΘ est égal
 à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; donc ΕΑ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ. Mais
 ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ (lem. précéd.); donc ΕΑ est égal
 à ΜΡ, et par conséquent à ΟΞ (4. 3. 1). Mais la somme des rectangles
 ΑΘ, ΗΚ est égale à la somme des carrés ΣΝ, ΝΠ; donc ΑΓ tout entier est
 égal à ΣΠ tout entier, c'est-à-dire au carré de ΜΞ; la droite ΜΞ peut donc le
 parallélogramme ΑΓ; je dis que ΜΞ est une droite de deux noms. Car puisque ΑΗ
 est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des

Υπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει⁴. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ⁵ καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τοῦτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητὰ ἐστὶ καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ⁶. ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν⁷. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ⁸. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἰση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμ-

ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Supponitur autem et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis longitudine; et ΑΗ, ΗΕ igitur ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. Atque est rationalis ΑΒ; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; rationale igitur est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, et est commensurable ΑΘ ipsi ΗΚ. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ æquale est, ipsum verò ΗΚ ipsi ΝΠ; et ΣΝ, ΝΠ igitur, hoc est quadrata ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, sed quidem ΑΕ ipsi ΑΗ est commensurabilis, ipsa verò ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis; incommensurabilis igitur et ΑΗ ipsi ΕΖ; quare et ΑΘ ipsi ΕΛ incommensurable est. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ est æquale, ipsum verò ΕΛ ipsi ΜΡ; et ipsum ΣΝ igitur ipsi ΜΡ incommensurable est. Sed ut ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ; incommensurabilis igitur est ΟΝ ipsi ΝΡ. Æqualis utique quidem ΟΝ ipsi ΝΜ, ipsa verò ΝΡ ipsi ΝΞ; incommensurabilis igitur est ΜΝ ipsi ΝΞ. Atque est quadratum ex ΜΝ commensurable

droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais on a supposé que ΑΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΕ sont donc commensurables avec ΑΒ (12. 10). Mais la droite ΑΒ est rationnelle; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationnelle; chacun des parallélogrammes ΑΘ, ΗΚ est donc rationnel (20. 10); ΑΘ est donc commensurable avec ΗΚ (10. 10). Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; les carrés ΣΝ, ΝΠ, c'est-à-dire les carrés des droites ΜΝ, ΝΞ, sont donc rationnels et commensurables. Et puisque ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ (37. 10), que ΑΕ est commensurable avec ΑΗ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΑΗ sera incommensurable avec ΕΖ; donc ΑΘ est incommensurable avec ΕΛ. Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΕΛ égal à ΜΡ; donc ΣΝ est incommensurable avec ΜΡ. Mais ΣΝ est à ΜΡ comme ΟΝ est à ΝΡ; donc ΟΝ est incommensurable avec ΝΡ (10. 10). Mais la droite ΟΝ est égale à ΝΜ, et ΝΡ est égal à ΝΞ; donc ΜΝ est incommensurable avec ΝΞ. Mais le carré de ΜΝ est commensurable avec le carré de ΝΞ, et ils sont rationnels l'un et l'autre;

250 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μιστρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμὴν ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιέχσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμὴν ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου

quadrato ex ΝΞ, et rationale utrumque; ergo ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΜΞ ex binis nominibus est, et potest ipsum ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LVI.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

Contineatur enim spatium ΑΒΓΔ sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus secundâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ex binis nominibus secunda est ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ

les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΜΞ est donc une droite de deux noms (37. 10), et elle peut le parallélogramme ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LVI.

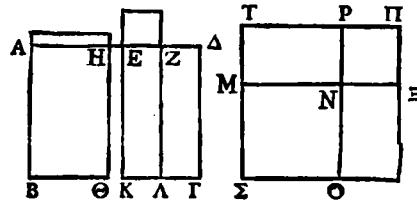
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la seconde de deux noms ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est la première de deux médiales.

Car puisque ΑΔ est la seconde de deux noms, divisons cette droite en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et

ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἑλάττω ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρον² ἴστί τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρά τὴν ΑΕ παραβελήσθω ἑλλειῖπον εἶδει τετράγωνον, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἄχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνιστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ

sibi commensurabili, et minus nomen ΕΔ commensurable est ipsi ΑΒ longitudine. Secetur ipsa ΕΔ bifariam in Ζ, et quadrato ex ΕΖ æquale ad ΑΕ applicetur deficiens figurâ quadratâ, parallelogrammo sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. Et per puncta Η, Ε, Ζ parallelæ ducantur ipsis ΑΒ, ΔΓ ipsæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, et parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum constituatur ΣΝ, ipsi verò ΗΚ æquale



ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἴστί³ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὲ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἴστί τῶν⁴ ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ· δεικνύον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἴστί πρώτη.

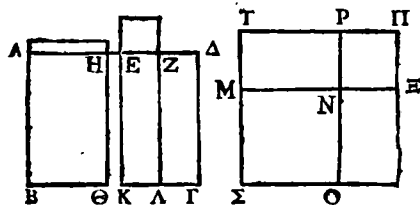
quadratum ΝΠ, et ponatur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΡΝ ipsi ΝΟ. Et compleatur ΣΠ quadratum; evidens utique est ex iis demonstratis, ipsum, ΜΡ medium proportionale esse ipsorum ΣΝ, ΝΠ, et æquale ipsi ΕΛ, et ΑΓ spatium posse ipsam ΜΞ; ostendendum est et ΜΞ ex binis mediis esse

le plus petit nom ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 2. 10). Coupons ΕΔ en deux parties égales en Ζ, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΖ, soit défailant d'une figure quarrée; que ce soit le parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec ΗΕ (18. 10). Par les points Η, Ε, Ζ menons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles aux droites ΑΒ, ΔΓ; faisons le quarré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ; le quarré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et plaçons ΜΝ dans la direction de ΝΞ; la droite ΡΝ sera dans la direction de ΝΟ. Achevons le quarré ΣΠ; il est évident, d'après ce qui a été démontré (57. 10), que le rectangle ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ; que ΜΡ est égal à ΕΛ, et que ΜΞ peut la surface ΑΓ; il faut démontrer que ΜΞ est la première de deux médiales. Car puisque ΑΕ est incommensurable en

252 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ^δ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ^δ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ ΑΕ· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μείζον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μείζον ἐστὶ καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-

primam. Quoniam enim incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, commensurabilis autem ΕΔ ipsi ΑΒ; incommensurabilis igitur ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Atque est rationalis ΑΕ; rationalis igitur et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ, commensurabilis autem ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ; ergo ΑΗ, ΗΕ incommensurabiles sunt ipsi ΑΒ longitudine; ergo ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ rationales sunt potentia solum commensurabiles; quare medium est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ; quare utrumque ipsorum ΣΝ, ΝΠ medium est; et ΜΝ,



μετρός ἐστιν^δ ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτίεστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτίεστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ¹⁰.

ΝΞ igitur mediarum sunt. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine, commensurabile est et ΑΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; quare potentia

longueur avec ΕΔ (37. 10), et que ΕΔ est commensurable avec ΑΒ, la droite ΑΕ sera incommensurable en longueur avec ΑΒ (14. 10). Et puisque ΑΗ est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais ΑΕ est rationel; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationnelle. Et puisque ΑΕ est incommensurable avec ΑΒ, et que ΑΕ est commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ, les droites ΑΗ, ΗΕ seront incommensurables en longueur avec ΑΒ; les droites ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; chacun des rectangles ΑΘ, ΗΚ est donc médial (22. 10); chacun des carrés ΣΝ, ΝΠ est donc médial; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc médiales. Et puisque ΑΗ est commensurable en longueur avec ΗΕ, le rectangle ΑΘ sera commensurable avec le rectangle ΗΚ (1. 6, et 10. 10), c'est-à-dire le carré ΣΝ avec le carré ΝΠ; c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ; les droites ΜΝ,

Καὶ ἔπει ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρος ἔστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος¹¹. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ. ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρον ἔστι, τουτίστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτίστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτίστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρος ἔστι μήκει. Εδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μίσαι εἶσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λίγω δὲ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Επεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἔστι¹² καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν ῥητὸν ἄρα καὶ¹³ τὸ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Εὰν δὲ δύο μίσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἀλογός ἔστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μίσων πρώτη· ἡ ἄρα ΜΞ¹⁴ ἐκ δύο μίσων ἔστι πρώτη. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

sunt commensurabiles MN, NZ. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi EA longitudine, sed quidem AE commensurabilis est ipsi AH, ipsa verò AE ipsi EZ commensurabilis; incommensurabilis igitur AH ipsi EZ; quare et AO ipsi EA incommensurabile est, hoc est SN ipsi MP, hoc est ON ipsi NP, hoc est MN ipsi NZ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem MN, NZ et mediæ existentes et potentiâ commensurabiles; ergo MN, NZ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Dico et eas rationale continere. Quoniam enim ΔE supponitur utrique ipsarum AB, EZ commensurabilis; commensurabilis igitur est et ZE ipsi EK. Et rationalis utraque ipsarum; rationale igitur et EL, hoc est MP, sed MP est rectangulum sub MN, NZ. Si verò duæ mediæ potentiâ commensurabiles componantur rationale continentes, tota irrationalis est, appellatur autem ex binis mediis prima; ergo MΞ ex binis mediis est prima. Quod oportebat ostendere.

NΞ sont donc commensurables en puissance. Et puisque AE est incommensurable en longueur avec EA, que AE est commensurable avec AH, et que ΔE l'est avec EZ, la droite AH sera incommensurable avec EZ; le rectangle AO est donc incommensurable avec le rectangle EL, c'est-à-dire le carré ΣΝ avec ΜΡ, c'est-à-dire la droite ΟΝ avec la droite ΝΡ, c'est-à-dire que la droite ΜΝ est incommensurable en longueur avec ΝΞ (1. 6). Mais on a démontré que les droites ΜΝ, ΝΞ sont et médiales et commensurables en puissance; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis enfin qu'elles comprennent une surface rationnelle. Car puisque ΔE est supposé commensurable avec chacune des droites AB, ΕΖ, la droite ΖΕ sera commensurable avec ΕΚ. Mais chacune d'elles est rationnelle; le rectangle ΕΛ est donc rationnel (20. 10), c'est-à-dire le rectangle ΜΡ qui est compris sous ΜΝ, ΝΞ. Mais si l'on ajoute deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme est irrationnelle, et s'appelle première de deux médiales (38. 10); donc ΜΞ est une première de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μῖζον ἴσται· τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Κατισκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἔπει ἐκ δύο ὀνομάτων ἴσται τρίτη ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Ομοίως δὲ τοῖς πρότερον διειρημένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἴσται

PROPOSITIO LVII.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus tertiâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ ΑΓ spatium potest, irrationalem esse, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis nominibus est tertiâ ΑΔ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΑΕ, ΕΔ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine. Congruenter utique suprâ ostensis ostendemus

PROPOSITION LVII.

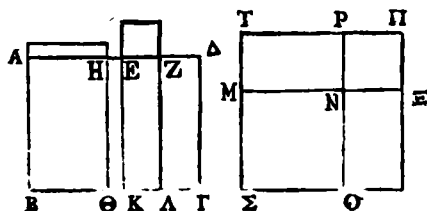
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la troisième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite ΑΔ est la troisième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la droite ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et de plus aucune des droites ΑΕ, ΕΔ ne sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 3. 10). Nous démontrerons de la même

ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ³. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τούτῳ τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ

rectam $MΞ$ esse quæ spatium $ΑΓ$ potest; et $MΝ$, $NΞ$ medias esse potentiâ solùm commensurabiles; quare $MΞ$ ex binis mediis est. Ostendendum est et secundam esse. Et quoniam incommensurabilis est $ΔΕ$ ipsi $ΑΒ$ longitudine, hoc est ipsi $ΕΚ$, commensurabilis autem $ΔΕ$



ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. Καὶ εἴς ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ⁵ τὸ ΕΛ, τούτῳ τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ⁷ δευτέρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

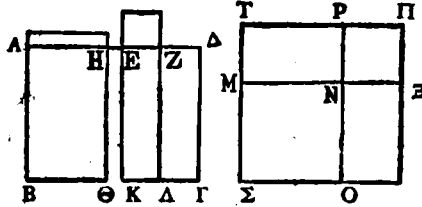
ipsi $EΖ$; incommensurabilis igitur est $EΖ$ ipsi $EΚ$ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ $ΖΕ$, $EΚ$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est $ΕΛ$, hoc est $ΜΡ$, et continetur sub $MΝ$, $NΞ$. Medium igitur est rectangulum sub $MΝ$, $NΞ$; ergo $MΞ$ ex binis mediis est secunda. Quod oportebat ostendere.

manière que nous l'avons déjà fait que la droite $MΞ$ peut la surface $ΑΓ$ (3. 10), et que les droites $MΝ$, $NΞ$ sont des médiales commensurables en puissance seulement; la droite $MΞ$ est donc une droite de deux médiales. Il faut démontrer qu'elle en est la seconde. Puisque $ΔΕ$ est incommensurable en longueur avec $ΑΒ$, c'est-à-dire avec $ΕΚ$, et que $ΔΕ$ est commensurable avec $EΖ$, la droite $EΖ$ sera incommensurable en longueur avec $EΚ$. Mais ces droites sont rationnelles; les droites $ΖΕ$, $EΚ$ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rectangle $ΕΛ$, c'est-à-dire le rectangle $ΜΡ$, est donc médial; mais il est compris sous $MΝ$, $NΞ$; le rectangle compris sous $MΝ$, $NΞ$ est donc médial (39. 10); la droite $MΞ$ est donc une seconde de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τιτάρτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τιτάρτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μείζων ἔστω τὸ ΑΕ· λίγω ἔτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τιτάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζων δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὲ ἡ ΔΕ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus quartâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, irrationalem esse, quæ appellatur major.

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus est quarta, ipsæ ΑΕ, ΕΔ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quam ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis est longitudine. Secetur utique ΔΕ bifariâ

PROPOSITION LVIII.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure.

Que la surface ΑΓ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ, et sous la quatrième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée majeure.

Car, puisque ΑΔ est la quatrième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, et de plus ΑΕ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 4. 10). Coupons ΔΕ en

δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον
παρὰ τὴν AE παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον
τὸ ὑπὸ τῶν AH, HE· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστιν¹
ἡ AH τῇ HE μήκει. Ηχθώσαν παράλληλοι τῇ
AB αἱ HΘ, EK, ZΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ
τοῖς πρὸ τούτου γιγνόμενῳ φανερὸν δὲ ὅτι ἡ τὸ
ΑΓ χωρίον δυνάμειν ἔστιν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὲ²
ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.
Επεὶ³ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ EH μήκει,
ἀσύμμετρον ἔστι καὶ τὸ ΑΘ τῇ HK, τούτῃστι
τὸ ΣΝ τῇ ΝΠ· αἱ MN, ΝΞ ἄρα δυνάμει⁴ εἰσὶν
ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ
AB μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ AK, καὶ ἔστιν ἴσον
τοῖς ἀπὸ τῶν MN, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα ἔστι⁵ καὶ τὸ
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ
ἀσύμμετρός ἐστιν⁶ ἡ ΔΕ τῇ AB μήκει, τούτῃστι
τῇ EK, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ⁷ EZ·
ἀσύμμετρος ἄρα ἡ EZ τῇ EK μήκει· αἱ KE, EZ
ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον
ἄρα τὸ ΔΕ, τούτῃστι τὸ MP, καὶ περιέχεται

in Z, et quadrato ex EZ æquale ad AE appli-
cetur parallelogrammum sub AH, HE; in-
commensurabilis igitur est AH ipsi HE longitu-
dine. Ducantur ipsi AB parallelæ HΘ, EK, ZΛ,
et reliqua eadem quæ suprâ fiant; evidens est
utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est
utique ΜΞ irrationalem esse, quæ vocatur major.
Quoniam incommensurabilis est AH ipsi EH lon-
gitudine, incommensurable est et ΑΘ ipsi HK,
hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ; ipsæ MN, ΝΞ igitur po-
tentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam
commensurabilis est AE ipsi AB longitudine,
rationalis est AK, atque est æquale quadratis ex
MN, ΝΞ; rationalis igitur est et compositum ex
quadratis ipsarum MN, ΝΞ. Et quoniam incom-
mensurabilis est ΔΕ ipsi AB longitudine, hoc
est ipsi EK, sed ΔΕ commensurabilis est ipsi
EZ; incommensurabilis igitur EZ ipsi EK longi-
tudine; ipsæ KE, EZ igitur rationales sunt
potentiâ solum commensurabiles; medium igitur
ΔΕ, hoc est MP, et continetur sub MN, ΝΞ.

deux parties égales en Z, et appliquons à AE un parallélogramme sous AH, HE qui
soit égal au quarré de EZ; la droite AH sera incommensurable en longueur avec
HE (19. 10). Conduisons les droites HΘ, EK, ZΛ parallèles à AB, et faisons le
reste comme auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut
démontrer que ΜΞ est l'irrationnelle appelée majeure. Puisque AH est incom-
mensurable en longueur avec EH, la surface ΑΘ sera incommensurable avec HK,
c'est-à-dire le quarré ΣΝ avec le quarré ΝΠ (1. 6, et 10. 10); les droites MN, ΝΞ
sont donc incommensurables en puissance. Et puisque AE est commensurable en
longueur avec AB, le rectangle AK sera rationel; mais il est égal à la somme des
quarrés des droites MN, ΝΞ; la somme des quarrés de MN et de ΝΞ est donc
rationnelle. Et puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec AB, c'est-à-dire
avec EK; et que ΔΕ est commensurable avec EZ; la droite EZ sera incommensurable
en longueur avec EK; les droites KE, EZ sont donc des rationnelles commensurables
en puissance seulement; le rectangle ΔΕ, c'est-à-dire MP, est donc médial (22. 10);

258 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὕπὸ τῶν MN, NΞ· μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN, NΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον⁸ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ, καὶ εἶσιν ἀσύμμετροι αἱ MN, NΞ⁹ δυνάμει. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσην, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων· ἡ MΞ ἄρα ἀλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Οὔτε ἴδιαι διίξαι.

medium igitur est rectangulum sub MN, NΞ, et rationale compositum ex quadratis ipsarum MN, NΞ, et sunt incommensurabiles MN, NΞ potentiâ. Si verò duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium, tota irrationalis est. Vocatur autem major; ergo MΞ irrationalis est quæ appellatur major, et potest spatium ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

PROPOSITIO LIX.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε,

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus quintâ ΑΔ, divisâ in nomina ad Ε, ita ut majus nomen sit

mais il est contenu sous les droites MN, NΞ; le rectangle sous MN, NΞ est donc médial, la somme des quarrés de MN et de NΞ étant rationelle, et les droites MN, NΞ étant incommensurables en puissance. Mais si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la somme de ces droites sera irrationelle. Mais cette somme est appelée majeure (40. 10); la droite MΞ est donc l'irrationelle appelée majeure, et elle peut la surface ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LIX.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

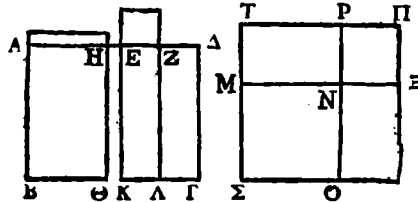
Que la surface ΑΓ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous une cinquième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit le plus

ὅτι τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προειρηγμένοις· φανερόν δὲ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμε-

ΑΕ; dico rectam, quæ potest spatium ΑΓ, irrationalem esse, quæ vocatur rationale et medium potens.

Construantur enim eadem quæ suprâ; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est autem ΜΞ esse quæ rationale et medium potest. Quoniam enim incommen-



τρὸς ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἵπεί ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πῆμπτῃ, καὶ ἐστὶν ἥλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει³. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει⁷, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα⁵ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-

surabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, incommensurabile igitur est et ΑΘ ipsi ΘΕ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam ΑΔ ex binis nominibus est quinta, atque est minor ipsius portio ΕΔ; commensurabilis igitur ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine. Sed ΑΕ ipsi ΕΔ est incommensurabilis longitudine, et ΑΒ igitur ipsi ΑΕ est incommensurabilis longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm com-

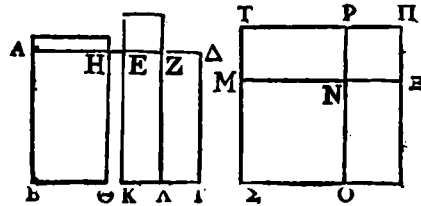
grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Faisons la même construction qu'auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que la droite ΜΞ est celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale. Car puisque ΑΗ est incommensurable avec ΗΕ, ΑΘ sera incommensurable avec ΘΕ, c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ (10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque la droite ΑΔ est la cinquième de deux noms, et que ΕΔ en est le plus petit segment, la droite ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 5. 10). Mais ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ; donc ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΑΕ (13. 10); les droites ΒΑ, ΑΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rec-

260 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτίστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἵπαι σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτίστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος ἐστὶ· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρος ἐστὶ. Καὶ

mensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis est; et ΕΖ igitur ipsi ΕΚ com-



ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμεις ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

mensurabilis est. Et rationalis ΕΚ; rationale igitur et ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; ipsa ΜΞ igitur rationale et medium potest, et potest spatium ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

triangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ, est donc médial (22. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ; que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera commensurable avec ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est rationelle, le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire ΜΡ (20. 10), c'est-à-dire le rectangle sous ΜΝ, ΝΞ, est donc rationel; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle compris sous ces droites étant rationel; donc ΜΞ est la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale (41. 10), et elle peut la surface ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ'.

PROPOSITIO LX.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη δύο μίσα δυναμένη.

Χωρίον γάρ τὸ ΑΒΓΔ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἢ δύο μίσα δυναμένη ἐστί.

Κατεσκευάσθω γάρ· τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Φανερὸν δὲ ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἢ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. Καὶ ἵππει ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτίστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν³ ΜΝ, ΝΞ. Πάλιν, ἵππει ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus sextâ ΑΔ, divisâ in nomina ad Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; dico rectam, quæ potest ipsum ΑΓ, bina media posse.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Evidens est utique ipsum ΑΓ posse ΜΞ, et incommensurabilem esse ΜΝ ipsi ΝΞ potentiâ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΑ ipsi ΑΒ longitudine; ipsæ ΕΑ, ΑΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine, incommensu-

PROPOSITION LX.

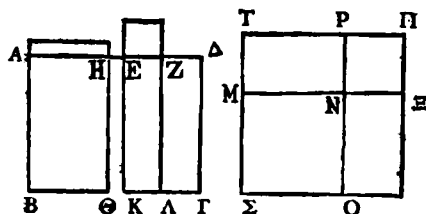
Si une surface est comprise sous une rationnelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous une sixième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit le plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est celle qui peut deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Il est évident que ΜΞ peut la surface ΑΓ, et que ΜΝ est incommensurable en puissance avec ΝΞ. Et puisque ΕΑ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, les droites ΕΑ, ΑΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des quarrés de ΜΝ et de ΝΞ, sera donc médial (22. 10). De plus, puisque ΕΔ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, la droite ΕΖ sera incommensurable

τῇ ΕΚ· καὶ⁵ αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει
μόνον σύμμετροι· μίσην ἄρα ἔστι τὸ ΕΛ, του-
τίστι τὸ ΜΡ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ.

rabilis igitur est et EZ ipsi EK; et ipsæ ZE, EK igitur
rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;
medium igitur est ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἔστιν⁶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ
τὸ ΑΚ τῇ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν
ΑΚ ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ,
ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ·
ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῇ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ
ἔστι μίσην ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ⁷
δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μίση
δυναμὴν ἔστι, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Ὅπως εἶδει
δείξαι.

rectangulum sub MN, NZ. Et quoniam incom-
mensurabilis est AE ipsi EZ, et AK ipsi EA
incommensurabile est. Sed quidem AK est
compositum ex quadratis ipsarum MN, NZ,
ipsum verò EA est rectangulum sub MN, NZ;
incommensurabile igitur est compositum ex
quadratis ipsarum MN, NZ rectangulo sub MN,
NZ. Atque est medium utrumque ipsorum, et
MN, NZ potentiâ sunt incommensurabiles; ergo
MX bina media potest, et potest ipsum AG.
Quod oportebat ostendere.

avec EK, les droites ZE, EK sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; le rectangle EA, c'est-à-dire MP, c'est-à-dire le rectangle sous MN, NΞ, sera donc médial. Et puisque AE est incommensurable avec EZ, le rectangle AK sera incommensurable avec EA. Mais AK est composé de la somme des carrés de MN, NΞ, et EA est le rectangle sous MN, NΞ; la somme des carrés de MN, NΞ est donc incommensurable avec le rectangle sous MN, NΞ. Mais l'une et l'autre de ces grandeurs est médiale; les droites MN, NΞ sont donc incommensurables en puissance; donc MΞ est la droite qui peut deux médiales, et elle peut la surface AG (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

LEMMA.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιχομένου ὀρθογωνίου.

Εστω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζων ἡ AG . λήγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB .

Si recta linea secetur in partes inæquales, ipsarum inæqualium quadrata majora sunt rectangulo bis contento sub ipsis inæqualibus.

Sit recta linea AB , et secetur in partes inæquales ad punctum Γ , et sit major AG ; dico quadrata ex AG , GB majora esse rectangulo bis sub AG , GB .



Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ . Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τίτμνται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AG , GB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Delta$. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB ἑλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Delta$. τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἑλαττόν ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Delta$. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AG , GB μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . Ὅπρι. ἴδει διίξαι.

Secetur enim AB bifariam in Δ . Quoniam igitur recta linea secatur in partes quidem æquales ad Δ , in partes verò inæquales ad Γ ; rectangulum igitur sub AG , GB cum quadrato ex $\Delta\Gamma$ æquale est quadrato ex $\Delta\Delta$; quare rectangulum sub AG , GB minus est quadrato ex $\Delta\Delta$; rectangulum igitur bis sub AG , GB minus est quàm duplum quadrati ex $\Delta\Delta$. Sed quadrata ex AG , GB dupla sunt quadratorum ex $\Delta\Delta$, $\Delta\Gamma$; ergo quadrata ex AG , GB majora sunt rectangulo bis sub AG , GB . Quod oportebat ostendere.

ΛΗΜΜΑ.

Si une ligne droite est coupée en parties inégales, la somme des quarrés de ces parties inégales est plus grande que le double rectangle compris sous ces parties.

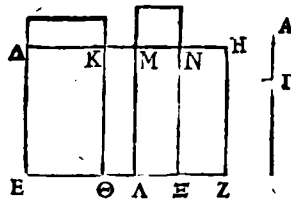
Soit la droite AB ; coupons-la en parties inégales au point Γ , et que AG soit la plus grande; je dis que la somme des quarrés de AG et de GB est plus grande que le double rectangle sous AG , GB .

Que la droite AB soit coupée en deux parties égales en Δ . Puisque la ligne droite AB est coupée en parties égales au point Δ , et en parties inégales au point Γ , le rectangle sous AG , GB avec le quarré de $\Delta\Gamma$ sera égal au quarré de $\Delta\Delta$ (5. 2); le rectangle sous AG , GB est donc plus petit que le quarré de $\Delta\Delta$; le double rectangle sous AG , GB est donc plus petit que le double quarré de $\Delta\Delta$. Mais la somme des quarrés de AG et de GB est double de la somme des quarrés de $\Delta\Delta$ et de $\Delta\Gamma$ (9. 2); la somme des quarrés de AG et de GB est donc plus grande que le double rectangle sous AG , GB . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΑ΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB , διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ AG , καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβιβλήσθω τὸ ΔEZH , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.



Παραβιβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔE τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG ἴσον τὸ $\Delta\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ ἴσον τὸ $ΚΑ$. λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἴσον ἐστὶ τῷ MZ . Τετμήσθω ἡ MH δίχα κατὰ τὸ N , καὶ παράλληλος ἦχθω ἡ $NΞ$ ἑκατέρω τῶν $ΜΑ$, $HΞ$. ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΜΞ$, NZ ἴσον ἐστὶ τῷ

Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus ipsa AB , divisa in nomina ad Γ , ita ut majus nomen sit AG , et exponatur rationalis ΔE , et quadrato ex AB æquale ad ΔE applicetur ipsum ΔEZH , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse primam.

Applicetur enim ad ΔE quadrato quidem ex AG æquale $\Delta\Theta$, ipsi verò ex $B\Gamma$ æquale $ΚΑ$; reliquum igitur rectangulum bis sub AG , GB æquale est ipsi MZ . Secetur MH bifariam in N , et parallela ducatur ipsa $NΞ$ alterutri ipsarum $ΜΑ$, $HΞ$; utrumque igitur ipsorum $ΜΞ$,

PROPOSITION LXI.

Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

Soit la droite AB de deux noms, divisée en ses noms au point Γ , de manière que AG soit son plus grand nom; soit exposée la rationnelle ΔE , et appliquons à la rationnelle ΔE un rectangle ΔEZH égal au carré de AB , et faisant la largeur ΔH ; je dis que la droite ΔH est une première de deux noms.

Appliquons à la rationnelle ΔE un rectangle $\Delta\Theta$ égal au carré de AG (45. 1), et un rectangle $ΚΑ$ égal au carré de $B\Gamma$; le double rectangle restant sous AG , GB sera égal au rectangle MZ (4. 2). Coupons MH en deux parties égales en N , et menons à l'une ou à l'autre des droites $ΜΑ$, $HΞ$ la parallèle $NΞ$; chacun des rectangles

ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητὰ ἐστὶ² καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ³. Καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτίστι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΑ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστὶ⁴, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΑ, τουτίστι τῇ ΔΕ, μήκει. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταὶ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτίον

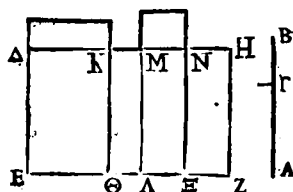
ΘΖ æquale est rectangulo semel sub ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam ex binis nominibus est ΔΒ divisa in nomina ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationalia sunt et commensurabilia inter se; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ commensurabile est quadratis ex ΑΓ, ΓΒ. Atque est æquale ipsi ΔΑ; rationale igitur est ΔΑ, et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ. Et ad rationalem ΜΑ applicatur; rationalis igitur et ΜΗ est, et incommensurabilis ipsi ΜΑ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Est autem et ΜΔ rationalis, et ipsi ΔΕ longitudine commensurabilis; incommensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΔΗ. Ostendendum est

ΜΖ, ΝΖ sera égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Et puisque la droite ΑΒ de deux noms est divisée en ses noms au point Γ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10); les quarrés de ΑΓ et de ΓΒ sont donc rationels, et commensurables entre eux; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc commensurable avec la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ (16. 10). Mais elle est égale au rectangle ΔΑ; le rectangle ΔΑ est donc rationel, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10). De plus, puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΜΖ, sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΜΑ; la droite ΜΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΜΑ, c'est-à-dire avec ΔΕ (23. 10). Mais la droite ΜΔ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ (13. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer

266 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὴ ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ⁵ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΑ ἄρα μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΑ, τουτίστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως⁶ ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἔπειτ' ἐκ μὲτρον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς

et primam esse. Quoniam enim quadratorum ex ΑΓ, ΓΒ. medium proportionale est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ipsorum ΔΘ, ΚΑ igitur medium proportionale est ΜΞ; est igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΑ, hoc est ut ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ; rectangulum igitur sub ΔΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ. Et quoniam commensurable est ex ΑΓ quadratum quadrato



ΓΒ, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΑ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρος ἐστὶ μήκει⁷. Καὶ ἔπειτ' αὖτις ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΑ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτίστιν τῷ τετάρτῳ μέρει⁸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει⁹. Εὰν δὲ ὅσαι δύο εὐθεῖαι ἄριστοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ex ΓΒ, commensurable est et ΔΘ ipsi ΚΑ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est longitudine. Et quoniam majora sunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΑ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsa ΜΗ major est. Atque est æquale rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΗ, et commensurabilis ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine. Si autem sunt duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex mi-

qu'elle est aussi une première de deux noms. Car puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est moyen proportionel entre les quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ (55. lem. 10), le rectangle ΜΞ sera moyen proportionel entre les rectangles ΔΘ, ΚΑ; le rectangle ΔΘ est donc à ΜΞ comme ΜΞ est à ΚΑ, c'est-à-dire ΔΚ est à ΜΝ comme ΜΝ est à ΜΚ; le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΜΝ (17. 6). Et puisque le quarré de ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec le rectangle ΚΑ (14. 10); la droite ΔΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (61. lem. 10), le rectangle ΔΑ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΜΗ, et la droite ΔΚ est commensurable en longueur avec ΚΜ; or, si l'on a deux droites inégales,

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 267

ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παρα-
 βληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμ-
 μετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάττονος
 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ
 ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ¹⁰. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ,
 καὶ ἡ ΔΜ μείζον ἔνομα οὔσα σύμμετρός ἐστι
 τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ
 δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

nori æquale ad majorem applicetur deficiens
 figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles
 ipsam dividat, major quàm minor plus potest
 quadrato ex rectâ sibi commensurabili; ipsa ΔΜ
 igitur quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ
 sibi commensurabili. Et sunt rationales ΔΜ,
 ΜΗ, et ΔΜ majus nomen existens commensu-
 rabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine;
 ergo ΔΗ ex binis nominibus est prima. Quod
 oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΒ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρητὴν
 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνο-
 μάτων δευτέραν.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διηρημένη
 εἰς τὰς μέσας· κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ
 ἐκκείσθω ρητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παρα-

PROPOSITIO LXII.

Quadratum primæ ex binis mediis ad ra-
 tionalem applicatum latitudinem facit ex binis
 nominibus secundam.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ, divisa in
 medias ad Γ, quarum major sit ΑΓ, et expo-
 natur rationalis ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ applicetur

si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du
 quarré de la plus petite, si ce parallélogramme est défailant d'une figure quarrée,
 et s'il partage la plus grande en parties commensurables, la puissance de la plus
 grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensu-
 rable en longueur avec la plus grande (18. 10); la puissance de ΔΜ surpasse
 donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ. Mais les
 droites ΔΜ, ΜΗ sont rationelles, et ΔΜ, qui est le plus grand nom, est com-
 mensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une
 première de deux noms (déf. sec. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXII.

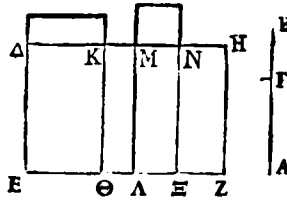
Le quarré de la première de deux médiales appliqué à une rationelle fait une
 largeur qui est la seconde de deux noms.

Soit ΑΒ la première de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ; que la
 droite ΑΓ soit la plus grande; soit exposée la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un

268 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁρίσθω τῇ ἀπὸ τῆς AB ἴσον τὸ² παραλλη-
λόγραμμεν τὸ ΔZ , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH · λέγω
ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔZ ;
latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nomi-
nibus esse secundam.



Κατισκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου.
Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διηρη-
μένη κατὰ τὸ Γ · αἱ AG , GB ἄρα μίσαι ἐστὶ δυ-
νάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB μίσα ἐστὶ· μέσον ἄρα
τὸ $\Delta\Lambda$, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παραβέβληται³.
ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $M\Delta$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE
μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν
 AG , GB , ῥητὸν ἐστὶ⁴ καὶ τὸ MZ , καὶ παρὰ
ῥητὴν τὴν $M\Lambda$ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ⁵ καὶ
ἡ MH , καὶ μήκει σύμμετρος τῇ $M\Lambda$, τουτίστι
τῇ ΔE · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔM τῇ MH .

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quo-
niam AB ex binis mediis est prima, divisa
ad Γ ; ipsæ AG , GB igitur mediæ sunt po-
tentiâ solùm commensurabiles rationale conti-
nentes; quare et quadrata ex AG , GB media
sunt; medium igitur $\Delta\Lambda$, et ad rationalem ΔE
applicatur; rationalis igitur est $M\Delta$, et incom-
mensurabilis ipsi ΔE longitudine. Rursûs, quo-
niam rationale est rectangulum bis sub AG , GB ,
rationale est et MZ , et ad rationalem $M\Lambda$ appli-
catur; rationalis igitur est et MH , et longitu-
dine commensurabilis ipsi $M\Lambda$, hoc est ipsi ΔE ;
incommensurabilis igitur est ΔM ipsi MH longi-

parallélogramme ΔZ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΔH pour
largeur; je dis que ΔH est une seconde de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB , qui est
divisée au point Γ , est la première de deux médiales, les droites AG , GB seront des mé-
diales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface ra-
tionnelle (38. 10); les carrés de AG et de GB sont donc médiaux; le rectangle $\Delta\Lambda$ est
donc médial, et il est appliqué à la rationnelle ΔE ; la droite $M\Delta$ est donc rationnelle,
et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). De plus, puisque le double
rectangle sous AG , GB est rationel, le rectangle MZ sera rationel, et il est ap-
pliqué à la rationnelle $M\Lambda$; la droite MH est donc rationnelle, et commensurable
en longueur avec $M\Lambda$ (21. 10), c'est-à-dire avec ΔE ; la droite ΔM est donc in-
commensurable en longueur avec MH (13. 10). Mais ces droites sont rationnelles;

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 269

μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί
εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνο-
μάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ δευτέρα.
Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ
δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ
ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-
μετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμ-
μετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ
τῇ ΚΜ σύμμετρος ἐστὶ. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν
ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς
ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.
Καὶ ἐστὶν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ
ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ εἶδει
δείξαι.

tudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur
rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;
ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum
est et secundam esse. Quoniam enim quadrata
ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ,
ΓΒ; majus igitur et ΔΛ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ
ipsâ ΜΗ. Et quoniam commensurable est ex
ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ, commensurable
est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ com-
mensurabilis est. Atque est rectangulum sub
ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ
quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi
commensurabili. Atque est ΜΗ commensurabilis
ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus
est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΓ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ
ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
ὀνομάτων τρίτην.

PROPOSITIO LXIII.

Quadratum secundæ ex binis mediis ad ratio-
nalem applicatum latitudinem facit ex binis no-
minibus tertiam.

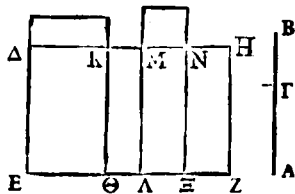
les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seule-
ment; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi
la seconde de deux noms. Car puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus
grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (lem. 61. 10), le rectangle ΔΛ sera plus
grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Et puisque le quarré de
ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commen-
surable avec ΚΛ; la droite ΔΚ est donc commensurable avec ΚΜ. Mais le
rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ surpasse
donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10).
Mais la droite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc
une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIII.

Le quarré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une
largeur qui est la troisième de deux noms.

270 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB , διηρημένη εἰς τὰς μέρη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ μείζον τμήμα εἶναι τὸ AG , ῥητὴ δὲ τις ἔστω ἡ ΔE , καὶ παρὰ τὴν ΔE τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραλληλόγραμμον παραβιβλήσθω τὸ ΔZ , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.



Κατεσκευάσθω γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς προειρη-
μένοις. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα
ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ · αἱ AG , GB ἄρα
μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον πε-
ριέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπὸ τῶν AG , GB μέσον ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ
 ΔA · μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔA · καὶ παράκειται παρὰ
τὴν ῥητὴν ΔE ³. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔM , καὶ
ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
ἡ MH ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ MA ,
τουτίστι τῇ ΔE , μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα

Sit ex binis mediis secunda AB , divisa in
medias ad Γ , ita ut majus segmentum sit
 AG , rationalis autem aliqua sit ΔE , et ad
ipsam ΔE quadrato ex AB æquale parallelo-
grammum applicetur ΔZ , latitudinem faciens
 ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse tertiam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et
quoniam ex binis mediis est secunda AB ,
divisa ad Γ ; ipsæ AG , GB igitur medie
sunt potentiâ solum commensurabiles, medium
continentes; quare et compositum ex quadratis
ipsarum AG , GB medium est. Atque est æquale
ipsi ΔA ; medium igitur et ΔA ; et applicatur
ad rationalem ΔE ; rationalis igitur est et ΔM ,
et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Prop-
ter eadem utique et MH rationalis est, et in-
commensurabilis ipsi MA , hoc est ipsi ΔE ,
longitudine; rationalis igitur est utraque ipsæ

Soit AB la seconde de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ , de manière que AG soit son plus grand segment; soit aussi la rationnelle ΔE ; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une troisième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque AB est une seconde de deux médiales, divisée au point Γ ; les droites AG , GB seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface médiale (39. 10); la somme des carrés de AG et de GB est donc médiale. Mais elle est égale au rectangle ΔA ; le rectangle ΔA est donc médial; et il est appliqué à la rationnelle ΔE ; la droite ΔM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (25. 10). Par la même raison, la droite MH est rationnelle, et incommensurable en longueur avec MA , c'est-à-dire avec ΔE ; chacune des droites ΔM , MH

τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὥς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἴσι ρηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικνύον δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ομοίως δὲ τοῖς προτέροις ἐπιλογισμῶν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Οπερ ἔδει δεῖξαι.

rum ΔΜ, ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Et quoniam incommensurabilis est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur et ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ incommensurabile est, hoc est ΔΛ ipsi ΜΖ; quare et ΔΜ ipsi ΜΗ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et tertiam esse. Congruenter utique præcedentibus concludemus maiorem esse ΔΜ ipsâ ΜΗ, et commensurabilem ΔΚ ipsi ΚΜ. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, le carré de ΑΓ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΔΛ avec ΜΖ; la droite ΔΜ est donc incommensurable avec ΜΗ. Mais ces droites sont rationnelles; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi une troisième de deux noms. Nous concluons comme auparavant que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que ΔΚ est commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ est donc plus grande que la puissance de ΜΗ du carré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ'.

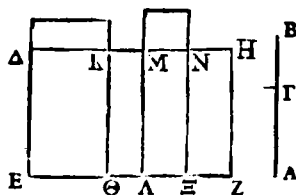
PROPOSITIO LXIV.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐστω μείζων ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν AG τῆς GB , ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ AE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν AE παραβεβλήσθω τὸ AZ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν AH . λέγω ὅτι ἡ AH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major AB , divisa ad Γ , ita ut major sit AG quàm GB , rationalis autem aliqua sit AE , et quadrato ex AB æquale ad ipsam AE applicetur AZ parallelogrammum, latitudinem faciens AH ; dico AH ex binis nominibus esse quartam.



Κατεσκευάσθω γάρ² τὰ αὐτὰ τοῖς προειρημένοις. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ AG , GB δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam major est AB divisa ad Γ , ipsæ AG , GB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium.

PROPOSITION LXIV.

Le carré d'une majeure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

Soit la majeure AB , divisée en Γ , la droite AG étant plus grande que GB ; soit aussi une rationelle AE ; appliquons à AE un parallélogramme AZ , qui étant égal au carré de AB , ait la droite AH pour largeur; je dis que AH est une quatrième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la majeure AB est divisée au point Γ , les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites

μέσον. Ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἄρα καὶ² τὸ ΔΑ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ³ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται⁴ ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα⁵ ῥηταὶ εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὁμοίων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον δὲ⁶ ὅτι καὶ τετάρτη. Ομοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον⁷, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ⁹. Εὰν δὲ ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ¹⁰ ἠλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ

Quoniam igitur rationale est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, rationale igitur et ΔΑ; rationalis igitur est et ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ, et ad rationalem ΜΛ applicatur; rationalis igitur est et ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et quartam. Congruenter utique præcedentibus ostendemus, maiorem esse ΔΜ quam ΜΗ, et rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΜΝ. Quoniam igitur incommensurabile est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ; incommensurabile igitur est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare incommensurabilis est et ΚΔ ipsi ΚΜ. Si autem sint duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommen-

médial (40. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est rationelle, le rectangle ΔΑ sera rationel; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΜΖ, est médial, et qu'il est appliqué à la rationelle ΜΛ, la droite ΜΗ sera rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10); la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer qu'elle est aussi la quatrième de deux noms. Nous démontrerons, comme auparavant, que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ. Et puisque le quarré de ΑΓ est incommensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera incommensurable avec ΚΛ (10. 10); la droite ΚΔ est donc incommensurable avec ΚΜ. Mais si deux droites sont inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme, étant défailant d'une figure quarrée, partage la plus grande droite en parties incommen-

274 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήκει', ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

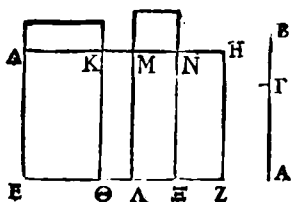
surabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΔΜ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξΐ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

PROPOSITIO LXV.

Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διηρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ

Sit rationale et medium potens ΑΒ, divisa in rectas ad Γ, ita ut major sit ΑΓ, et exponatur rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΒ

mensurables en longueur, la puissance de la plus grande droite surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la plus grande droite (19. 10); la puissance de ΔΜ surpassera donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΔΜ. Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et ΔΜ est commensurable avec la rationelle exposée ΔΕ; ΔΗ est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXV.

Le quarré d'une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, pouvant une surface rationelle et une surface médiale. soit divisée en ses droites au point Γ, la droite ΑΓ étant la plus grande; soit exposée la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 275

ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γάρ¹ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστὶν ἡ AB, διηρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσην, τὸ δ' ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μίσην ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μίσην ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΑ· ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν² ἡ ΜΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει³. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ δευχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ

æquale ad ipsam ΔΕ applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ; dico ΔΗ ex binis nominibus esse quintam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Quoniam igitur rationale et medium potens est AB, divisa ad Γ; ergo ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ; medium igitur est et ΔΑ; quare rationalis est ΔΜ, et longitudine incommensurabilis ipsi ΔΕ. Rursus, quoniam rationale est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ; rationalis igitur est ΜΗ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; incommensurabilis igitur ΔΜ ipsi ΜΗ; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Dico et quintam esse. Similiter enim demonstrabitur rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΜΝ, et incommensurabilem ΔΚ ipsi ΚΜ longitu-

rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un parallélogramme ΔΖ égal au quarré de AB, ce parallélogramme ayant ΔΗ pour largeur; je dis que ΔΗ est une cinquième de deux noms.

Car faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB, qui est divisée au point Γ, peut une surface rationnelle et une surface médiale, les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est médiale, le rectangle ΔΑ sera médial; la droite ΔΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΜΖ, est rationel, la droite ΜΗ sera rationnelle et commensurable en longueur avec ΔΕ (21. 10); la droite ΔΜ est donc incommensurable avec ΜΗ (13. 10); les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis qu'elle est aussi une cinquième de deux noms. Car nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ, et que ΔΚ est in-

276 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήκει⁴· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ⁵ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

dine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et minor ΜΗ commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΕ'.

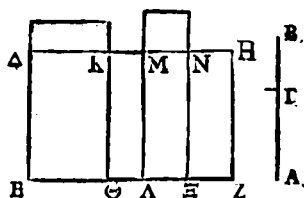
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν

PROPOSITIO LXVI.

Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens ΑΒ, divisa ad Γ, rationalis autem sit ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ



ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτην.

quadrato ex ΑΒ æquale applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ; dico ΔΗ ex binis nominibus esse sextam.

commensurable en longueur avec KM; la puissance de ΔΜ surpasse donc la puissance de ΜΗ du carré d'une droite incommensurable avec ΔΜ (19. 10). Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la plus petite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10) Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVI.

Le carré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, divisée au point Γ, puisse deux médiales; soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ le parallélogramme ΔΖ égal au carré de ΑΒ, et ayant ΔΗ pour largeur; je dis que ΔΗ est une sixième de deux noms.

Κατισκυιάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, διηρημένη κατὰ τὸ Γ . αἱ AG , GB ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγχείμενον τῷ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $\Delta\Lambda$, MZ , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερα τῶν ΔM , MH , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Lambda$ τῷ MZ . ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔM τῇ MH . αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι ἐκ δύο ἄρα ὁνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH . Λέγω ὅτι καὶ ἔκτη. Ομοίως δὲ πάλιν³ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK , KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ὅτι ἡ ΔK τῇ KM μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἡ

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam AB bina media potens est, divisa ad Γ ; ipsæ AG , GB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile ex ipsarum quadratis compositum composito ex rectangulis sub ipsis; quare ex jam demonstratis medium est utrumque ipsorum $\Delta\Lambda$, MZ , et ad rationalem ΔE applicantur; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔM , MH , et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Et quoniam incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum AG , GB rectangulo bis sub AG , GB , incommensurabile igitur est $\Delta\Lambda$ ipsi MZ ; incommensurabilis igitur est et ΔM ipsi MH ; ipsæ ΔM , MH igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔH . Dico et sextam esse. Similiter utique rursus ostendemus rectangulum sub ΔK , KM æquale esse quadrato ex MN , et ΔK ipsi KM longitudine esse incommensurabilem; et propter

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB , divisée au point Γ , peut deux médiales, les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme de leurs quarrés étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces droites (42. 10), chacun des rectangles $\Delta\Lambda$, MZ sera médial, d'après ce qui a été démontré; mais ils sont appliqués à la rationnelle ΔE ; chacune des droites ΔM , MH est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). Et puisque la somme quarrés de AG et de GB est incommensurable avec le double rectangle sous AG , GB , le rectangle $\Delta\Lambda$ sera incommensurable avec MZ ; la droite ΔM est donc incommensurable avec MH (10. 10); les droites ΔM , MH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔH est donc une droite de deux noms. Je dis qu'elle est aussi une sixième de deux noms. Nous démontrerons encore de la même manière que le rectangle sous ΔK , KM est égal au quarré de MN , et que ΔK est incommensurable en longueur avec KM ; par la

278 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΜ τῆς ΜΗ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἢ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτη. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

eadem utique ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γεγονένω ὥς ἡ ΑΒ

PROPOSITIO LXVII.

Recta quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem.

Sit ex binis nominibus ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico ΓΔ ex binis nominibus esse et ordine eamdem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis nominibus est ΑΒ, dividatur in nomina ad Ε, et sit majus nomen ΑΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Fiat ut

même raison, la puissance de ΔΜ surpassera la puissance de ΜΗ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΔΜ (19. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVII.

La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

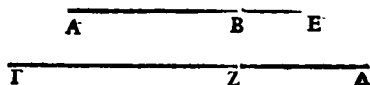
Soit ΑΒ une droite de deux noms, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux noms, et qu'elle est du même ordre que ΑΒ.

Car, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10). Faisons en sorte que

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 279

πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἴσθιν ὥς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἢ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἴσθι καὶ ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ρηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἴσθιν ὥς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν

AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ; et reliqua igitur EB ad reliquam ΖΔ est ut AB ad ΓΔ. Commensurabilis verò AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur est et quidem AE ipsi ΓΖ, ipsa verò EB ipsi ΖΔ. Et sunt rationales AE, EB; rationales igitur sunt et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓΖ ita EB ad ΖΔ; permutando



ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἴσθιν ὥς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἴσι ρηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἴσθιν ἢ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι τῇ τάξει ἴσθιν ἢ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται ἥτοι³ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἢ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται⁴ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἢ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν

igitur est ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ; ipsæ autem AE, EB potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et sunt rationales; ex binis igitur nominibus est ΓΔ. Dico et ordine esse eandem ipsi AB.

Vel enim AE quam EB plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Si quidem igitur AE quam EB plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si

AB soit à ΓΔ comme AE est à ΓΖ; la droite restante EB sera à la droite restante ΖΔ comme AB est à ΓΔ (19. 5). Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite AE est donc commensurable avec ΓΖ, et EB avec ΖΔ (10. 10). Mais les droites AE, EB sont rationelles; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc rationelles. Et puisque AE est à ΓΖ comme EB est à ΖΔ; par permutation, AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais les droites AE, EB ne sont commensurables qu'en puissance; les droites ΓΖ, ΖΔ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais elles sont rationelles; ΓΔ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que AB.

Car la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec AE. Si la puissance de AE surpasse la puissance de EB du quarré d'une droite commensurable avec AE, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΓΖ (15. 10);

σύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται⁵. καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστι πρώτη, τουτίστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρος ἔστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται⁶ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ

quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis eidem erit; et ob id utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. Si verò ΕΒ commensurabilis est expositæ rationali, et ΖΔ commensurabilis est eidem, et ob id rursus ordine eadem erit ipsi ΑΒ, utraque enim ipsarum erit ex binis nominibus secunda. Si autem



οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μίζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μίζον δύναται⁷ τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος ἔστιν αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τετάρτη.

neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ commensurabilis sit expositæ rationali, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ commensurabilis eidem erit, et est utraque tertia. Si verò ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΑΕ commensurabilis est expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis est eidem, et est utraque quarta. Si autem

et si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera aussi commensurable avec elle (12. 10). Chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donc la première de deux noms, c'est-à-dire que ces droites sont du même ordre. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΖΔ sera aussi commensurable avec elle, et la droite ΓΔ sera encore du même ordre que ΑΒ, car chacune d'elles sera une seconde de deux noms. Mais si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une troisième de deux noms. Si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΖ (15. 10). Si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une quatrième de deux noms. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 281

Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἴσται ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἐστὶ⁸ τῇ ἐκκειμένῃ ῤητῇ, καὶ ἴσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

EB, et ZΔ, et erit utraque quinta. Si verò neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et ipsarum ΓΖ, ΖΔ neutra commensurabilis est expositæ rationali, et erit utraque sexta.

Quare recta ei quæ est ex binis, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΗ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτῇ¹ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω² εἰς τὰς μίσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ³. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν

PROPOSITIO LXVIII.

Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit longitudine ipsa ΓΔ; dico ΓΔ ex binis mediis esse, et ordine eandem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis mediis est ΑΒ, dividatur in medias ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et fiat ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; et reliqua igitur ΕΒ ad reliquam ΖΔ est ut ΑΒ ad ΓΔ.

rationnelle exposée, la droite ΖΔ le sera aussi, et chacune d'elles sera une cinquième de deux noms; et enfin si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une sixième de deux noms. Donc, etc.

PROPOSITION LXVIII.

La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

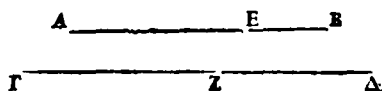
Soit ΑΒ une droite de deux médiales, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux médiales, et que cette droite est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΒ est une droite de deux médiales, qu'elle soit divisée en ses médiales au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement (38 et 39. 10). Faisons en sorte que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ; la droite restante ΕΒ sera à la droite restante ΖΔ comme ΑΒ est à ΓΔ.

282 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΖΔ ἴσθιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ⁴. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ⁵· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ⁶, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι⁷· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν⁸. Εδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἴστί. Λόγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἴσθι τῇ ΑΒ.

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et utraque ipsarum ΑΕ, ΕΒ utrique ipsarum ΓΖ, ΖΔ; mediæ verò ΑΕ, ΕΒ; mediæ igitur et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ, ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ potentiâ solùm commensurabiles sunt; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm commensurabiles sunt. Ostensæ sunt verò et mediæ; ergo ΓΔ ex binis mediis est. Dico et ordine eamdem esse ipsi AB.



Επεὶ γάρ ἴσθιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ⁹· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα¹⁰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὐκ ῥητόν ἴσθι τὸ

Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; et ut igitur ex ΑΕ quadratum ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; permutando igitur ex ΑΕ quadratum ad ipsum ex ΓΖ ita sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum ad ipsum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurabile autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurabile igitur et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Sive

Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; chacune des droites ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec chacune des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont médiales; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc médiales (24. 10). Et puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, et que les droites ΑΕ, ΕΒ ne sont commensurables qu'en puissance, les droites ΓΖ, ΖΔ ne seront commensurables qu'en puissance. Mais on a démontré qu'elles sont médiales; la droite ΓΔ est donc une droite de deux médiales (38 et 39. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, le carré de ΑΕ sera au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le carré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (11. 5, et 1. 6); donc, par permutation, le carré de ΑΕ est au carré de ΓΖ comme le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le carré de ΑΕ est commensurable avec le carré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est rationel, le rectangle

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 283

ὕπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητὸν ἔστι· καὶ διὰ τοῦτο ἔστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή¹¹. Ὅπρι ἴδι διῆξαι.

igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ rationale est; et ob id est ex binis mediis prima. Sive medium rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, medium et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est utraque secunda; et ob id ΓΔ ipsi ΑΒ ordine eadem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10^η.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἔστιν.

Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μείζων ἔστί.

Διηρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. Γεγονένω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἥτε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ³. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ

PROPOSITIO LXIX.

Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

Sit major ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ majorem esse.

Dividatur ΑΒ ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium. Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam est ut ΑΒ ad ΓΔ ita et ΑΕ ad ΓΖ et ΕΒ ad ΖΔ; et ut igitur ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΒ ad ΖΔ.

sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et ΓΔ sera, par conséquent, une première de deux médiales (38. 10). Si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial. Mais les droites ΓΔ, ΑΒ sont l'une et l'autre la seconde de deux médiales (39. 10); la droite ΓΔ sera, par conséquent aussi, du même ordre que la droite ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIX.

Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

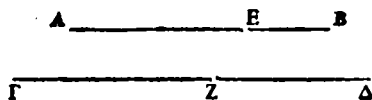
Soit la majeure ΑΒ; et que ΓΔ soit commensurable avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite majeure.

Divisons ΑΒ au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (40. 10). Car faisons les mêmes choses qu'au-paravant. Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ, et comme ΕΒ est à ΖΔ, la droite

284 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ἡ EB πρὸς τὴν ZA. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AE, EB ἑκατέρα τῶν ΓZ, ZA. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ οὕτως ἡ EB πρὸς τὴν ZA⁴, καὶ ἑναλλάξ ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB⁵ οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν⁶ ZA· καὶ συνθίπτει ἄρα ἐστὶν⁷ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔZ⁸. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE, EB utrique ipsarum ΓZ, ZA. Et quoniam est ut AE ad ΓZ ita EB ad ZA, et permutando ut AE ad EB ita ΓZ ad ZA; et componendo igitur est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BE ita ex ΓΔ



ἀπὸ τῆς BE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔZ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ, ZA· καὶ ἑναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ, ZA. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB τοῖς ἀπὸ τῶν ΓZ,

quadratum ad ipsum ex ΔZ. Similiter utique demonstrabimus et ut ex AB quadratum ad ipsum ex AE ita esse ex ΓΔ quadratum ad ipsum ex ΓZ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsa ex AE, EB ita ex ΓΔ quadratum ad ipsa ex ΓZ, ZA; et permutando igitur est ut ex AB quadratum ad ipsum ex ΓΔ ita ex AE, EB quadrata ad ipsa ex ΓZ, ZA. Commensurable autem ex AB quadratum quadrato ex ΓΔ; commensurabilia igitur et ex AE, EB quadrata

AE sera à ΓZ comme EB est à ZA (11.5). Mais AB est commensurable avec ΓΔ; chacune des droites AE, EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓZ, ZA. Et puisque AE est à ΓZ comme EB est à ZA; par permutation, AE sera à EB comme ΓZ est à ZA; donc, par addition, AB est à BE comme ΓΔ est à ΔZ; le carré de AB est donc au carré de BE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΔZ (22.6). Nous démontrerons semblablement que le carré de AB est au carré de AE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΓZ; le carré de AB est donc à la somme des carrés des droites AE, EB comme le carré de ΓΔ est à la somme des carrés des droites ΓZ, ZA; donc, par permutation, le carré de AB est au carré de ΓΔ comme la somme des carrés des droites AE, EB est à la somme des carrés des droites ΓZ, ZA. Mais le carré de AB est commensurable avec le carré de ΓΔ; la somme des carrés des droites AE, EB est donc com-

ΖΔ. Καὶ ἴσται τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. Ομοίως δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρον ἴσται τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἴσται μίσην τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μίσην ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δύναμει ἀσύμμετροί εἰσιθ, ποιεῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα¹⁰ ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσην· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. Ὅπρι ἴδει διῆξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μίσην δυνάμειν σύμμετρος καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μίσην δυνάμειν ἐστίν.

quadratis ex ΓΖ, ΖΔ. Et sunt quadrata ex ΑΕ, ΕΒ simul rationalia; et quadrata ex ΓΖ, ΖΔ simul rationalia sunt. Similiter verò et rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ commensurable est rectangulo bis sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est medium rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur et rectangulum bis sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; tota igitur ΓΔ irrationalis est, quæ vocatur major.

Recta igitur majori commensurabilis major est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LXX.

Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

mensurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais la somme des carrés des droites ΑΕ, ΕΒ est rationelle (40. 10); la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc rationelle (déf. 9. 10). Par la même raison, le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est commensurable avec le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial (40. 10); le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial (24. 10); les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial; la droite entière ΓΔ est donc l'irrationelle appelée la droite majeure (40. 10).

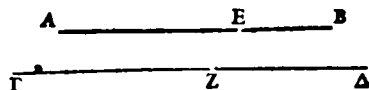
Une droite commensurable avec la majeure, est donc elle-même une droite majeure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXX.

Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Εστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. Διεκτίον ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Sit rationale et medium potens AB , et ipsi AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$; ostendendum est et $\Gamma\Delta$ rationale et medium potentem esse.



Διηρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῶν συγχεμένων ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῶν ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. ὥστε καὶ τὸ μὲν³ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ῥητόν. ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$. Οπερ εἶδει δεῖξαι.

Dividatur AB in rectas ad E ; ipsæ AE , EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; et eadem construantur quæ suprâ. Similiter utique demonstrabimus et ΓZ , $Z\Delta$ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurable quidem compositum ex quadratis ipsarum AE , EB composito ex quadratis ipsarum ΓZ , $Z\Delta$, rectangulum verò sub AE , EB rectangulo sub ΓZ , $Z\Delta$; quare et quidem compositum ex ipsarum ΓZ , $Z\Delta$ quadratis est medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; rationale igitur et medium potens est $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

Que la droite AB puisse une surface rationelle et une surface médiale, et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable avec AB ; il faut démontrer que la droite $\Gamma\Delta$ peut aussi une surface rationelle et une surface médiale.

Divisons AB en ses droites au point E ; les droites AE , EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Faisons la même construction qu'au paravant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓZ , $Z\Delta$ sont incommensurables en puissance, que la somme des quarrés des droites AE , EB est commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓZ , $Z\Delta$, et que le rectangle sous AE , EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$; la somme des quarrés des droites ΓZ , $Z\Delta$ est donc médiale, et le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$ rationel (24. 10); la droite $\Gamma\Delta$ port donc une surface rationelle et une surface médiale (41. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αά.

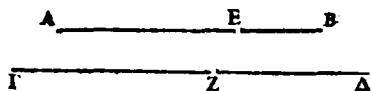
PROPOSITIO LXXI.

Ἡ τῇ δύο μίσα δυναμένη σύμμετρος δύο μίσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐστω δύο μίσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεῖκτέον δὲ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μίσα δυναμένη ἐστίν.

Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

Sit bina media potens AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; ostendendum est et ΓΔ bina media potentem esse.



Ἐπεὶ γὰρ δύο μίσα δυναμένη ἐστίν ἡ AB, διηρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ, ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων² μίσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μίσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· καὶ κατασκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas ad E; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum AE, EB quadratis rectangulo sub AE, EB; et construantur eadem quæ supra. Similiter utique demonstrabimus et ΓΖ, ΖΔ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurable quidem

PROPOSITION LXXI.

Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

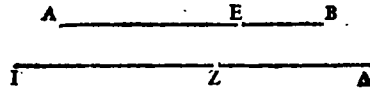
Que la droite AB puisse deux surfaces médiales, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; il faut démontrer que ΓΔ peut aussi deux surfaces médiales.

Car, puisque la droite AB peut deux surfaces médiales, qu'elle soit divisée en ses droites au point E; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés des droites AE, EB étant incommensurable avec le rectangle sous les droites AE, EB (42. 10). Faisons la même construction qu'anparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓΖ, ΖΔ sont incommensurables en puissance; que la somme des carrés des droites AE, EB est

288 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῶν συγχεμένων ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ,
ΕΒ τῶν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ συγ-

compositum ex quadratis ipsarum ΑΕ, ΕΒ com-
posito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangu-
lum verò sub ΑΕ, ΕΒ rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ;



κείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων
μίσην ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον, καὶ
ἐστὶ ἀσύμμετρον τὸ συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῶν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἡ
ἄρα ΓΔ ἴση δύο μίσην δυναμένη ἐστίν. Ὅπερ ἔδει
δείξαι.

quare et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ qua-
dratis medium est, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ
medium, et adhuc incommensurabile compo-
situm ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis rectangulo
sub ΓΖ, ΖΔ; ergo ΓΔ bina media potens est.
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 65.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρις
ἄλλοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ
δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ
μέσον δυναμένη.

Ἐστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ·
λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἥτοι ἐκ

PROPOSITIO LXXII.

Rationali et medio compositis, quatuor irra-
tionales fiunt, vel ex binis nominibus recta,
vel ex binis mediis prima, vel major, vel et
rationale et medium potens.

Sit rationale quidem ipsum ΑΒ, medium verò
ΓΔ; dico rectam, quæ ΑΔ spatium potest, vel

commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle
sous ΑΕ, ΕΒ l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; la somme des quarrés des
droites ΓΖ, ΖΔ est donc médiale, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ médial aussi, et la somme
des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ incommensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ
(24. 10); la droite ΓΔ peut donc deux surfaces médiales (42. 10). Ce qu'il fallait
démontrer.

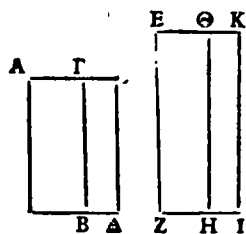
PROPOSITION LXXII.

Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre
droites irrationnelles; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux
médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle
et une surface médiale.

Soit la surface rationnelle ΑΒ, et la surface médiale ΓΔ; je dis que la droite qui

δύο ὀνομάτων ἴσιν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζον, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ AB τοῦ $\Gamma\Delta$ ἥτοι μείζον ἴσιν, ἢ ἔλασσον. Ἐστὼ πρότερον μείζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ παραβιβάσθω παρὰ τὴν EZ τῷ AB ἴσον τὸ EH , πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · τῷ δὲ $\Gamma\Delta$ ἴσον παρὰ τὴν EZ , τουτίστι τὴν $\Theta H'$,



παραβιβάσθω τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . Καὶ ἐπεὶ ῥητὸν ἴστι τὸ AB , καὶ ἴσιν ἴσον τῷ EH ²· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ EH , καὶ παρὰ ῥητὴν³ τὴν EZ παραβιβάσθω πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · ἡ $E\Theta$ ἄρα ῥητὴ ἴστι⁴ καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἴστι⁵ τὸ $\Gamma\Delta$, καὶ ἴσιν ἴσον τῷ ΘI ⁶· μέσον ἄρα ἴστι καὶ τὸ ΘI , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται, τουτίστι τὴν $\Theta H'$ ⁷, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK · ῥητὴ ἄρα

ex binis nominibus esse, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale et medium potentem.

Etenim AB quam $\Gamma\Delta$ vel majus est, vel minus. Sit primum majus; et exponatur rationalis EZ , et applicetur ad ipsam EZ ipsi AB æquale EH , latitudinem faciens $E\Theta$; ipsi autem $\Gamma\Delta$ æquale ad EZ , hoc est ΘH , applicetur ΘI latitu-

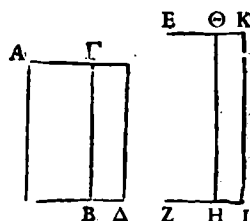
dinem faciens ΘK . Et quoniam rationale est AB , et est æquale ipsi EH ; rationale igitur et EH , et ad rationalem EZ applicatur latitudinem faciens $E\Theta$; ipsa $E\Theta$ igitur rationalis est et commensurabilis ipsi EZ longitudine. Rursus, quoniam medium est $\Gamma\Delta$, et est æquale ipsi ΘI ; medium igitur est et ΘI , et ad rationalem EZ applicatur, hoc est ad ΘH , latitudinem faciens ΘK ; rationalis igitur

peut la surface $A\Delta$, est ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou une droite majeure, ou la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

Car la surface AB est ou plus grande ou plus petite que $\Gamma\Delta$. Qu'elle soit d'abord plus grande. Soit exposée la rationnelle EZ ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à AB , ce parallélogramme ayant la droite $E\Theta$ pour largeur; appliquons aussi à EZ , c'est-à-dire à ΘH , un parallélogramme ΘI égal à $\Gamma\Delta$, ce parallélogramme ayant la droite ΘK pour largeur. Puisque AB est rationnel et égal à EH , le parallélogramme EH sera rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle EZ , et il a pour largeur la droite $E\Theta$; la droite $E\Theta$ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec EZ (21. 10). De plus, puisque $\Gamma\Delta$ est médial, et qu'il est égal à ΘI , le parallélogramme ΘI sera médial; mais il est appliqué à la rationnelle EZ , c'est-à-dire

ἐστὶν ἡ ΘK , καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Delta$, ῥητὸν δὲ τὸ AB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ $\Gamma\Delta$, ὥστε καὶ τὸ EH ἀσύμμετρον ἐστὶ τῷ ΘI . Ὡς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘI οὕτως ἐστὶν ἡ $\text{E}\Theta$ πρὸς τὴν ΘK , ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $\text{E}\Theta$ τῇ ΘK μήκει· καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ $\text{E}\Theta$, ΘK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων

est ΘK , et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam medium est $\Gamma\Delta$, rationale autem AB ; incommensurabile igitur est AB ipsi $\Gamma\Delta$; quare et EH incommensurabile est ipsi ΘI . Ut autem EH ad ΘI ita est $\text{E}\Theta$ ad ΘK ; incommensurabilis igitur est et $\text{E}\Theta$ ipsi ΘK longitudine; et sunt ambæ rationales; ipsæ $\text{E}\Theta$, ΘK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EK divisa



ἐστὶν ἡ EK διηρημένη κατὰ τὸ Θ . Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ $\Gamma\Delta$, ἴσον δὲ τὸ μὲν AB τῷ EH , τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ τῷ ΘI , μείζον ἄρα καὶ τὸ EH τοῦ ΘI , καὶ ἡ $\text{E}\Theta$ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘK . Ἦτοι οὖν ἡ $\text{E}\Theta$ τῆς ΘK μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ἡ⁸ μείζων ἡ ΘE σύμμετρος

ad Θ . Et quoniam majus est AB quam $\Gamma\Delta$, æquale verò AB quidem ipsi EH , ipsum verò $\Gamma\Delta$ ipsi ΘI ; majus igitur et EH quam ΘI ; et $\text{E}\Theta$ igitur major est quam ΘK . Vel igitur $\text{E}\Theta$ quam ΘK plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et est major

à ΘH , et il a pour largeur la droite ΘK ; la droite ΘK est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). Et puisque $\Gamma\Delta$ est médial, et que AB est rationnel, AB sera incommensurable avec $\Gamma\Delta$; le parallélogramme EH est donc incommensurable avec ΘI . Mais EH est à ΘI comme $\text{E}\Theta$ est à ΘK ; la droite $\text{E}\Theta$ est donc incommensurable en longueur avec ΘK (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites $\text{E}\Theta$, ΘK sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite EK divisée au point Θ est donc une droite de deux noms. Et puisque AB est plus grand que $\Gamma\Delta$, que AB est égal à EH , et que $\Gamma\Delta$ est égal à ΘI , le parallélogramme EH est plus grand que ΘI ; la droite $\text{E}\Theta$ sera par conséquent plus grande que ΘK . La puissance de $\text{E}\Theta$ surpasse donc celle de ΘK du carré d'une droite commensurable ou incommensurable en longueur avec $\text{E}\Theta$. Que la puissance de $\text{E}\Theta$ surpasse d'abord la puissance de ΘK du carré d'une droite commensurable

τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΓ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὲ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζων τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ἡ Θ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὲ ἴστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἥτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μείζων δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,

ΘΚ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est prima, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ, recta spatium potens ex binis nominibus est; recta igitur ipsum ΕΙ potens ex binis nominibus est; quare et recta ipsum ΑΔ potens ex binis nominibus est. Sed ΕΘ quam ΘΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est major ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quarta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus quartâ, recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major; recta igitur spatium ΕΙ potens major est; quare et recta ipsum ΑΔ potens major est.

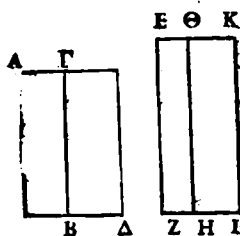
Sed et sit minus ΑΒ quam ΓΔ; et ΕΗ igitur minus est quam ΘΙ; quare et ΕΘ minor est quam ΘΚ; vel autem ΘΚ quam ΕΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-

avec ΕΘ; mais ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite de deux noms; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ, puisque ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure (58. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite majeure; la droite qui peut la surface ΑΔ est donc aussi une droite majeure.

Mais que la surface ΑΒ soit plus petite que la surface ΓΔ; la surface ΕΗ sera plus petite que la surface ΘΙ; la droite ΕΘ sera par conséquent plus petite que ΘΚ; or, la puissance de ΘΚ surpasse la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΕΘ; mais ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite de deux noms; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ, puisque ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure (58. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite majeure; la droite qui peut la surface ΑΔ est donc aussi une droite majeure.

ἡ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἔστιν¹⁰ ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διυτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται¹¹ ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων

drato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est secunda, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus secundâ, recta spatium potens ex binis mediis est prima; recta igitur spatium ΕΙ



ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον¹² δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἀλλὰ δὲ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν¹³ ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων

potens ex binis mediis est prima; quare et recta spatium ΑΔ potens ex binis mediis est prima. Sed et ΚΘ quam ΕΘ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quinta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis

surable ou incommensurable en longueur avec ΕΚ. Que la puissance de ΕΚ surpasse d'abord la puissance de ΕΘ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΕΚ, puisque la droite ΕΘ, plus petite que ΕΚ, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est la première de deux médiales (56. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc la première de deux médiales; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la première de deux médiales. Mais que la puissance de ΚΘ surpasse la puissance de ΕΘ du carré d'une droite incommensurable avec ΚΘ; puisque ΕΘ, plus petit que ΚΘ, est commensurable avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la cinquième de deux

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 293

πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν· ἢ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν.

Ρητῷ ἄρα καὶ μίσην, καὶ τὰ ἰζήσ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μίσην ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἢτοι ἢ ἐκ δύο μίσην δευτέρα, ἢ ἢ δύο μίσην δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μίσην ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢτοι ἐκ δύο μίσην ἐστὶ δευτέρα, ἢ ἢ δύο μίσην δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢτοι μείζον ἐστίν, ἢ ἴσους. Ἐστω³ πρότερον μείζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκείσθω ῥητὴ ἢ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον

nominibus quintâ, recta spatium potens rationale et medium potens est; recta igitur spatium EI potens rationale et medium potens est; quare et recta spatium ΑΔ potens rationale et medium potens est.

Rationali igitur et medio, etc.

PROPOSITIO LXXIII.

Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se ΑΒ, ΓΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis esse secundam, vel bina media potentem.

Etenim ΑΒ quam ΓΔ vel majus est, vel minus. Sit primum majus ΑΒ quam ΓΔ; et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi quidem ΑΒ

noms, la droite qui peut cette surface est celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale (59. 10); la droite qui peut la surface EI est donc celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale. Donc, etc.

PROPOSITION LXXIII.

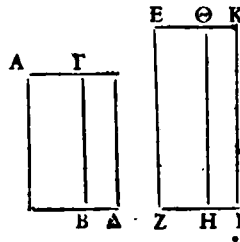
Deux surfaces médiales incommensurables entre elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux surfaces médiales ΑΒ, ΓΔ qui sont incommensurables entre elles; je dis que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Car la surface ΑΒ est ou plus grande ou plus petite que la surface ΓΔ. Que ΑΒ soit d'abord plus grand que ΓΔ; soit exposée la rationnelle ΕΖ; et appliquons à ΕΖ un

παρὰ τὴν EZ παραβελήσθω τὸ EH πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον AB, ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν EH, ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ AB τῷ ΓΔ, καὶ ἐστὶν

æquale ad EZ applicetur EH latitudinem faciens ΕΘ, ipsi verò ΓΔ æquale ΘΙ latitudinem faciens ΘΚ. Et quoniam medium est utrumque ipsorum AB, ΓΔ; medium igitur et utrumque ipsorum EH, ΘΙ, et ad rationalem EZ applicantur, quæ latitudinem faciunt ΕΘ, ΘΚ; utraque igitur ipsarum ΕΘ, ΘΚ rationalis est, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam incommensurabile est AB ipsi ΓΔ, et est æquale



ἴσον τὸ μὲν AB τῷ EH, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ EH τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. Ἡτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυ-

quidem AB ipsi EH, ipsum verò ΓΔ ipsi ΘΙ; incommensurabile igitur est et EH ipsi ΘΙ. Ut autem EH ad ΘΙ ita est ΕΘ ad ΘΚ; incommensurabilis igitur est ΕΘ ipsi ΘΚ longitudine; ipsæ ΕΘ, ΘΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΕΚ. Vel autem ΕΘ quam ΘΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ

parallélogramme EH égal à AB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΘ; appliquons aussi à EZ un parallélogramme ΘΙ égal à ΓΔ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘΚ. Puisque les surfaces AB, ΓΔ sont médiales l'une et l'autre, les surfaces EH, ΘΙ seront aussi médiales l'une et l'autre; mais ces surfaces sont appliquées à EZ, et elles ont pour largeur les droites ΕΘ, ΘΚ; les droites ΕΘ, ΘΚ sont donc rationnelles l'une et l'autre (23. 10), et incommensurables en longueur avec EZ. Et puisque AB est incommensurable avec ΓΔ, que AB est égal à EH, et que ΓΔ est égal à ΘΙ, la surface EH sera incommensurable avec ΘΙ. Mais EH est à ΘΙ comme ΕΘ est à ΘΚ; la droite ΕΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΚ; les droites ΕΘ, ΘΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΕΚ est donc une droite de deux noms. Or, la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable

νάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἢ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἢ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἢ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. Ἀλλὰ δὴ ἢ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον δυνασθῶ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει, ἢ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν· ὥστε καὶ⁵ ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ⁶ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι, καὶ ἑλάττω ἢ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶ, δύο ἢ μέσα δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΕΘ, ΘΚ commensurabilis est expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est tertia, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens ex binis mediis est secunda; recta igitur ipsum ΕΙ, hoc est ΑΔ potens, ex binis mediis est secunda. Sed ΕΘ quam ΘΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et incommensurabilis est utraque ipsarum ΕΘ, ΘΚ ipsi ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est sexta. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens bina media potens est; quare et spatium ΑΔ potens bina media potens est. Similiter utique demonstrabimus, et si minus sit ΑΒ quam ΓΔ, rectam quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

Duobus igitur mediis, etc.

avec ΕΘ. Que la puissance de ΕΘ surpasse d'abord la puissance de ΘΚ d'une droite commensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΘΚ ne sont ni l'une ni l'autre commensurables en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la troisième de deux noms; mais la droite ΕΖ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la seconde de deux médiales (57. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ, c'est-à-dire ΑΔ, est donc la seconde de deux médiales. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΘΚ sont l'une et l'autre incommensurables en longueur avec ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Mais si une surface est comprise sous une rationelle et sous une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la droite qui peut deux médiales (60. 10); la droite qui peut la surface ΑΔ est donc la droite qui peut deux médiales. Si ΑΒ était plus petit que ΓΔ, nous démontrerions semblablement que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

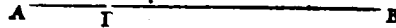
Εὰν ἀπὸ ρητῆς ρητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ρητῆς τῆς AB ρητὴ ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλούμενη ἀποτομή.

PROPOSITIO LXXIV.

Si à rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur $BΓ$, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalem esse, quæ vocatur apotome.



Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · καὶ

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, atque est ut AB ad $BΓ$ ita ex AB quadratum ad rectangulum sub AB , $BΓ$, incommensurable igitur est ex AB quadratum rectangulo sub AB , $BΓ$; sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt ex AB , $BΓ$ quadrata, rectangulo verò sub AB , $BΓ$ commensurable est rectangulum bis sub AB , $BΓ$; quadrata igitur ex AB , $BΓ$ incommensurabilia sunt rec-

PROPOSITION LXXIV.

Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

Que la rationnelle $BΓ$, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, soit retranchée de la droite AB ; je dis que la droite restante $ΑΓ$, appelée apotome, est irrationnelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$, et que AB est à $BΓ$ comme le carré de AB est au rectangle sous AB , $BΓ$ (1.6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous AB , $BΓ$; mais la somme des carrés de AB et de $BΓ$ est commensurable avec le carré de AB (16.10), et le double rectangle sous AB , $BΓ$ est commensurable avec le rectangle sous AB , $BΓ$; la somme des carrés des droites AB , $BΓ$ est donc incommensurable avec le double rec-

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 297

λοιπὴ ἄρα τῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ². Πητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλεῖσθω δὲ ἀποτομή.

tangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; et reliquo igitur quadrato ex ΑΓ incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; quoniam et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ æqualia sunt rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΑΓ. Rationalia autem sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οἶ.

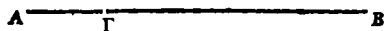
Εὰν ἀπὸ μέσης μίση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ἑλῆς ῥητὸν περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Απὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μίση ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ΑΒ,

PROPOSITIO LXXV.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim ΑΒ media auferatur ΒΓ, potentiâ solùm commensurabilis existens ipsi ΑΒ,



μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιούσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

et cum eâ ΑΒ rationale faciens rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

tangle sous ΑΒ, ΒΓ (14. 10); la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite ΑΓ (17. 10), parce que la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est égale au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le quarré de ΑΓ (7. 2). Mais la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est rationelle; la droite ΑΓ est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et elle sera appelée apotome.

PROPOSITION LXXV.

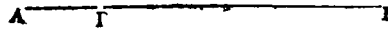
Si d'une médiâle on retranche une médiâle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationelle, la droite restante est irrationelle, et elle s'appèlera le premier apotome de la médiâle.

De la médiâle ΑΒ retranchons la médiâle ΒΓ, commensurable en puissance seulement avec ΑΒ, et faisant avec ΑΒ le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ rationel; je dis que la droite restante ΑΓ est irrationelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiâle.

298 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ αἱ AB, BG μίσαι εἰσὶ, μίσα ἐστὶ²
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG . Ρητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ
τῶν AB, BG ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν $AB,$
 BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ

Quoniam enim AB, BG medię sunt, media
sunt et quadrata ex AB, BG . Rationale autem
rectangulum bis sub AB, BG ; incommensura-
bilia igitur ex AB, BG quadrata rectangulo bis
sub AB, BG ; et reliquo igitur quadrato ex AG



ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν³
 AB, BG ἐπεὶ καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον
ἔσται, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.
Ρητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἄλογον ἄρα
τὸ ἀπὸ τῆς AG ἄλογος ἄρα ἐστίν⁴ ἡ AG , κα-
λείσθω δὲ⁵ μίσης ἀποτομὴ πρώτη.

incommensurable est rectangulum bis sub $AB,$
 BG ; quoniam et si tota magnitudo cum unā ip-
sarum incommensurabilis sit, et quæ à principio
magnitudines incommensurabiles erunt. Ratio-
nale autem bis rectangulum sub AB, BG ; irratio-
nale igitur quadratum ex AG ; irrationalis igitur
est AG , vocetur autem medię apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ες'.

Εὰν ἀπὸ μίσης μίση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον
σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέ-
σον περιέχῃ¹ ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ
μίσης ἀποτομὴ δευτέρα.

PROPOSITIO LXXVI.

Si a mediā media auferatur, potentiā solum
commensurabilis existens toti, quæ cum totā
medium continet; reliqua irrationalis est, vo-
cetur autem medię apotome secunda.

Car, puisque les droites AB, BG sont médiales, les quarrés des droites AB, BG seront médiaux. Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; la somme des quarrés des droites AB, BG est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG ; le double rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite AG (7. 2); parce que si une grandeur entière est incommensurable avec l'une de celles qui la composent, les grandeurs composantes sont incommensurables (17. 10). Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; le quarré de AG est donc irrationel; la droite AG est donc irrationelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

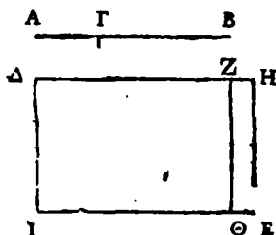
PROPOSITION LXXVI.

Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seu-
lement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface
médiale, la droite restante est irrationelle, et elle s'appèlera le second apotome
de la médiale.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 299

Απὸ γὰρ μίσης τῆς AB μίση ἀφῆρῆσθαι ἡ $BΓ$,
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ AB ,
μετὰ δὲ τῆς² ὅλης τῆς AB μίσην περιέχουσα
τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$
ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μίσης ἀποτομὴν δι-
τίρα.

A mediâ enim AB media auferatur $BΓ$, po-
tentiâ solùm commensurabilis existens toti AB ,
et cum totâ AB mediũm continens rectangulum
sub AB , $BΓ$; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalẽ
esse, vocetur autem mediæ apotome secunda.



Εκκείσθαι γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ
τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβελήσθαι
τὸ $ΔΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ
τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβελήσθαι τὸ
 $ΔΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΕ$
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. Καὶ ἐπεὶ μίση ἐστὶ³
τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ · μίσην ἄρα καὶ τὸ $ΔΕ$.
Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος
ποιοῦν τὴν $ΔΗ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗ$, καὶ
ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μῆκει. Πάλιν, ἐπεὶ μίσην

Exponatur enim rationalis $ΔΙ$, et quadratis
quidem ex AB , $BΓ$ æquale ad ipsam $ΔΙ$ ap-
plicetur $ΔΕ$ latitudinem faciens $ΔΗ$, rectangulo
verò bis sub AB , $BΓ$ æquale ad ipsam $ΔΙ$ appli-
cetur $ΔΘ$ latitudinem faciens $ΔΖ$; reliquum
igitur $ΖΕ$ æquale est quadrato ex $ΑΓ$. Et quo-
niam media sunt quadrata ex AB , $BΓ$; medium
igitur et $ΔΕ$. Et ad rationalem $ΔΙ$ applicatur
latitudinem faciens $ΔΗ$; rationalis igitur est
 $ΔΗ$, et incommensurabilis ipsi $ΔΙ$ longitudine.

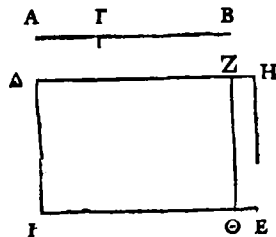
De la médiale AB retranchons la médiale $BΓ$, commensurable en puissance seu-
lement avec la droite entière AB , et comprenant avec la droite entière AB le rec-
tangle médial sous AB , $BΓ$; je dis que la droite restante $ΑΓ$ est irrationnelle, et elle
sera appelée le second apotome de la médiale.

Soit exposée la rationnelle $ΔΙ$; appliquons à $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΕ$ égal à la
somme des quarrés des droites AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la
droite $ΔΗ$; appliquons aussi à la droite $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΘ$ égal au double
rectangle sous AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite $ΔΖ$; le
reste $ΖΕ$ sera égal au quarré de $ΑΓ$ (7. 2). Et puisque les quarrés des droites
 AB , $BΓ$ sont médiaux, le parallélogramme $ΔΕ$ sera médial (24. cor. 10). Mais il est
appliqué à la rationnelle $ΔΙ$, et il a pour largeur la droite $ΔΗ$; la droite $ΔΗ$ est donc
rationnelle et incommensurable en longueur avec $ΔΙ$ (23. 10). De plus, puisque le

300 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ μείσον ἐστί. Καὶ ἴσιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μείσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβηται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ AB, BΓ δυτάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB καὶ τῇ BΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν AB,

Rursus, quoniam medium est rectangulum sub AB, BΓ; et rectangulum bis igitur sub AB, BΓ medium est. Atque est æquale ipsi ΔΘ; et ΔΘ igitur medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam AB, BΓ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AB et ipsi BΓ longitudine; incommensurable igitur et ex AB quadratum rectangulo sub



BΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστί τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ⁵. Ἰσὸν δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁶ τὸ ΔΕ τῷ

AB, BΓ. Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quadrata ex AB, BΓ, rectangulo autem sub AB, BΓ commensurable est rectangulum bis sub AB, BΓ; incommensurable igitur est rectangulum bis sub AB, BΓ quadratis ex AB, BΓ. Æquale verò quadratis quidem ex AB, BΓ ipsum ΔΕ, rectangulo autem bis sub AB, BΓ ipsum ΔΘ; incommensurable igitur est ΔΕ ipsi

rectangle sous AB, BΓ est médial, le double rectangle sous AB, BΓ sera médial (24. cor. 10). Mais il est égal à ΔΘ; le parallélogramme ΔΘ est donc médial, et il est appliqué à la rationnelle ΔΙ, sa largeur étant la droite ΔΖ; la droite ΔΖ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque les droites AB, BΓ ne sont commensurables qu'en puissance, la droite AB sera incommensurable en longueur avec BΓ; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BΓ (1.6, et 10. 10). Mais la somme des carrés des droites AB, BΓ est commensurable avec le carré de AB (16. 10), et le double rectangle sous AB, BΓ est commensurable avec le rectangle sous AB, BΓ (6. 10); le double rectangle sous AB, BΓ est donc incommensurable avec la somme des carrés des droites AB, BΓ. Mais ΔΕ est égal à la somme des carrés des droites AB, BΓ, et ΔΘ égal au double rectangle sous AB, BΓ; le parallélogramme ΔΕ est donc incommensurable avec ΔΘ. Mais

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 301

ΔΘ. Ως δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον⁸ ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυνάμειν ἄρα αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μίσης¹⁰ ἀποτομὴ δευτέρα.

ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita ΗΔ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΗΔ ipsi ΔΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ergo ΗΔ, ΔΖ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ΖΗ apotome est. Rationalis autem ΔΙ, et sub rationali et irrationali contentum rectangulum irrationalis est; et recta potens igitur ipsum irrationalis est. Et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΟΖ.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ρητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσην· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐλάσσων.

Απὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ποιούσα

PROPOSITIO LXXVII.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

A rectâ enim ΑΒ recta auferatur ΒΓ, potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum

ΔΕ est à ΔΘ comme ΗΔ est à ΔΖ; la droite ΗΔ est donc incommensurable en longueur avec ΔΖ. Mais ces droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΗ est donc un apotome (74. 10). Mais la droite ΔΙ est rationnelle, et le rectangle compris sous une rationnelle et sous une irrationnelle est irrationnel (39. 10); la droite qui peut ce rectangle est donc irrationnelle. Mais ΑΓ peut ΖΕ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVII.

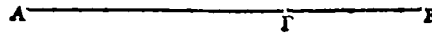
Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

De la droite ΑΒ retranchons la droite ΒΓ, qui était incommensurable en puissance

302 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἅμα μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ AG ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

totā AB compositum quidem ex quadratis ipsarum AB, BG simul rationale, rectangulum verò bis sub AB, BG simul medium; dico reliquam AG irrationalem esse, vocetur autem minor.



Επεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ ἀναστρέφαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς AG³. Ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG· ἄλογος ἄρα ἡ AG¹, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, BG quadratis rationale est, rectangulum verò bis sub AB, BG medium; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex AB, BG rectangulo bis sub AB, BG; et convertendo incommensurabilia sunt ex AB, BG quadrata quadrato ex AG. Rationalia autem quadrata ex AB, BG; irrationalia igitur quadratum ex AG; irrationalis igitur AG, vocetur autem minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οή.

PROPOSITIO LXXVIII.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθείᾳ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν

Si a rectā recta auferatur, potentiā incommensurabilis existens toti, et cum totā faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium,

avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés des droites AB, BG rationelle, et le double rectangle sous AB, BG médial; je dis que la droite restante AG est irrationelle, et elle sera appelée mineure.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BG est rationelle, et que le double rectangle sous AB, BG est médial, la somme des quarrés des droites AB, BG sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG; donc, par conversion, la somme des quarrés des droites AB, BG est incommensurable avec le quarré de AG (17. 10). Mais la somme des quarrés des droites AB, BG est rationelle; le quarré de AG est donc irrationnel; la droite AG est donc irrationelle, et elle sera appelée mineure.

PROPOSITION LXXVIII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 303

τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθείᾳ ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ AB , ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα².

rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur $BΓ$, potentia incommensurabilis existens toti AB , faciens quidem compositum ex ipsarum AB , $BΓ$ quadratis medium, rectangulum verò bis sub AB , $BΓ$ rationale; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalem esse, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.



Ἐπὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῇ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι τῇ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$. Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$, καλεῖσθαι δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB , $BΓ$ quadratis medium est, rectangulum verò bis sub AB , $BΓ$ rationale; incommensurabilia igitur sunt ex AB , $BΓ$ quadrata rectangulo bis sub AB , $BΓ$; et reliquum igitur quadratum ex $ΑΓ$ incommensurabile est rectangulo bis sub AB , $BΓ$. Atque est rectangulum bis sub AB , $BΓ$ rationale; quadratum igitur ex $ΑΓ$ irrationale est; irrationalis igitur est $ΑΓ$, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite $BΓ$, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB , fasse la somme des quarrés de AB et de $BΓ$ médiale, et le double rectangle sous AB , $BΓ$ rationel; je dis que la droite restante $ΑΓ$ est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car, puisque la somme des quarrés des droites AB , $BΓ$ est médiale, et que le double rectangle sous AB , $BΓ$ est rationel, la somme des quarrés des droites AB , $BΓ$ sera incommensurable avec le double rectangle sous AB , $BΓ$; le quarré restant de la droite $ΑΓ$ est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB , $BΓ$ (17. 10). Mais le double rectangle sous AB , $BΓ$ est rationel; le quarré de $ΑΓ$ est donc irrationnel; la droite $ΑΓ$ est donc irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΘΒ'.

Εάν ἀπὸ εὐθείας εὐθείᾳ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν¹ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ² δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν ἢ λοιπῇ ἀλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Απὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθείᾳ ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ AB , ποιοῦσα τὰ προκείμενα³. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$ ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα⁴.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ ῥητὴν⁵ τὴν $ΔΙ$ παρατε-
λέσθω τὸ $ΔΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ $ΔΘ$

PROPOSITIO LXXIX.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur $BΓ$, potentiâ incommensurabilis existens ipsi AB , faciens proposita; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalem esse, quæ vocatur cum medio medium totum faciens.

Exponatur enim rationalis $ΔΙ$, et quadratis quidem ex AB , $BΓ$ æquale ad rationalem $ΔΙ$ applicetur $ΔΕ$ latitudinem faciens $ΔΗ$, rectangulo autem bis sub AB , $BΓ$ æquale auferatur $ΔΘ$

PROPOSITION LXXIX.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des quarrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

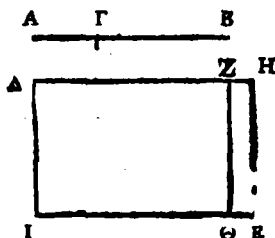
De la droite AB retranchons la droite $BΓ$, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB , fasse ce qui est proposé; je dis que la droite restante $ΑΓ$ est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car soit exposée la rationnelle $ΔΙ$; appliquons à la rationnelle $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΕ$ égal à la somme des quarrés des droites AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite $ΔΗ$; retranchons de $ΔΕ$ un parallélogramme $ΔΘ$ égal au double rectangle compris sous AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 305

πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ⁶. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζον ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΔΕ· μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ πα-
ράκειται πλάτος ποιοῦν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ

latitudinem faciens ΔΖ; reliquum igitur ΖΕ æquale est quadrato ex ΑΓ; quare ipsa ΑΓ potest ipsum ΖΕ. Et quoniam compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, atque est æquale ipsi ΔΕ; medium igitur est ΔΕ, et ad rationalem ΔΙ applicatur, latitudinem faciens ΔΗ; ratio-



ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζον ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μείζον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἐστὶ¹⁰ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ¹¹. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἴσιν

nalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Rursus, quoniam rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ medium est, atque est æquale ipsi ΔΘ; ergo ΔΘ medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, incommensurable igitur est et ΔΕ ipsi ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita est et ΔΗ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΔΗ

droite ΔΖ, le parallélogramme restant ΖΕ sera égal au carré de ΑΓ (7. 2); la droite ΑΓ peut donc la surface ΖΕ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΕ, le parallélogramme ΔΕ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΗ pour largeur; la droite ΔΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, et qu'il est égal à ΔΘ, le parallélogramme ΔΘ sera médial; mais il est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΖ pour largeur; la droite ΔΖ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le parallélogramme ΔΕ sera incommensurable avec le parallélogramme ΔΘ. Mais ΔΕ est à ΔΘ comme ΔΗ est à ΔΖ (1. 6); la droite ΔΗ est donc incommensurable

306 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἴστιν ἡ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον¹² ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλίσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

ipsi ΔΖ. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΗΔ, ΔΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΗ, rationalis autem ΖΘ. Sed sub rationali et apotome contentum rectangulum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Ἐστω ἀποτομή ἡ ΑΒ, προσαρμύζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσκει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω ἡ ΒΔ· καὶ² αἱ

PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Sit apotome ΑΒ, congruens autem eidem ipsa ΒΓ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti.

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ,

avec ΔΖ (10. 10). Mais ces deux droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΖΗ est donc un apotome (74. 10), et ΖΘ une rationnelle. Puisque le rectangle compris sous une rationnelle et un apotome est irrationnel (14. 10), que la droite qui peut ce rectangle est irrationnelle, et que ΑΓ peut la surface ΖΕ (39. 10), la droite ΑΓ sera irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROPOSITION LXXX.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

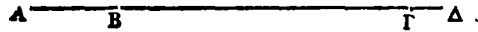
Soit l'apotome ΑΒ, et que ΒΓ lui convienne; les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10); je dis qu'une autre rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière ne convient pas avec ΑΒ.

Que la droite ΒΔ, si cela est possible, convienne avec ΑΒ; les droites ΑΔ, ΔΒ

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 307

$ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ὃ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἀμφοτέρω ὑπέρχει· ἐναλλάξ ἄρα ὃ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν

$ΔΒ$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam quo superant quadrata ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔΒ$, hoc superant et quadrata ex $ΑΓ$, $ΓΒ$ rectangulum bis sub $ΑΓ$, $ΓΒ$; eodem enim quadrato ex $ΑΒ$ utraque superant; permutando igitur quo su-



$ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῳ ὑπερέχει καὶ³ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. Ταῖ δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὴ γὰρ ἀμφοτέρω⁵. καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἀμφοτέρω, μίσει δὲ μίσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα $ΑΒ$ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλη.

perant quadrata ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ quadrata ex $ΑΓ$, $ΓΒ$, hoc superat et rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔΒ$ rectangulum bis sub $ΑΓ$, $ΓΒ$. Quadrata autem ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ quadrata ex $ΑΓ$, $ΓΒ$ superant rationali; rationalis enim utraque; et rectangulum bis igitur sub $ΑΔ$, $ΔΒ$ superat rationali rectangulum bis sub $ΑΓ$, $ΓΒ$, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali; ergo ipsi $ΑΒ$ altera non congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Μία ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Media igitur, etc.

seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpasse le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$ de la même grandeur dont la somme des quarrés des droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ surpasse le double rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$, car ces deux excès sont égaux chacun au quarré de $ΑΒ$ (7. 2), par permutation, la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpassera la somme des quarrés des droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ de la même grandeur dont le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpasse le double rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$. Mais la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpasse la somme des quarrés des droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ d'une surface rationnelle, car ces deux sommes sont rationnelles; le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpasse donc le double rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$ d'une surface rationnelle; ce qui est impossible, parce que ces deux grandeurs sont médiales, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle (27. 10); une autre rationnelle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, ne peut donc pas convenir avec $ΑΒ$. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

PROPOSITIO LXXXI.

Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ πρώτη μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἐστω γὰρ μέση ἀποτομή πρώτη ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμόζιτω ἡ BF . αἱ AF , FB ἄρα² μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν AF , FB . λέγω ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim media apotome prima AB , et ipsi AB congruat BF ; ipsæ AF , FB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub AF , FB ; dico ipsi AB alteram non congruere mediam, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ rationale contineat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω καὶ ἡ ΔB . αἱ ἄρα $\Delta\Delta$, ΔB μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB . Καὶ ἐπεὶ ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB τοῦ ὧς ὑπὸ τῶν $\Delta\Delta$, ΔB , τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὰ

Si enim possibile, congruat et ΔB ; ergo $\Delta\Delta$, ΔB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub $\Delta\Delta$, ΔB . Et quoniam quo superant quadrata ex $\Delta\Delta$, ΔB rectangulum bis sub $\Delta\Delta$, ΔB , hoc

PROPOSITION LXXXI.

Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

Soit AB un premier apotome médial, et que BF conviène avec AB ; les droites AF , FB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AF , FB (75. 10); je dis qu'une autre médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB .

Que la droite ΔB conviène avec AB , si cela est possible; les droites $\Delta\Delta$, ΔB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface rationnelle sous $\Delta\Delta$, ΔB (75. 10). Et puisque la somme des carrés des droites $\Delta\Delta$, ΔB surpasse le double rectangle sous $\Delta\Delta$, ΔB de la même grandeur dont

ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ³ ὑπερίχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλάξ ἄρα ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τοῦτο ὑπερίχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἀμφοτέρω, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερίχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσῃ, καὶ τὰ ἐξῆς.

superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; superant enim eodem ex ΑΒ quadrato; permutando igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali.

Mediæ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς.

PROPOSITIO LXXXII.

Τῇ μέσῃ¹ ἀποτομῇ δευτέρῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα² τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Mediæ apotomæ secundæ una solum congruit recta media, potentiâ solum commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

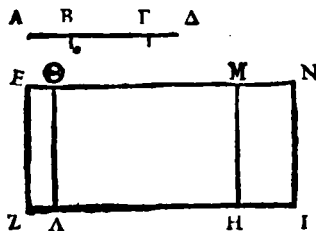
la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces excès sont chacun le carré de ΑΒ (7. 2); par permutation, la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des carrés de ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle, car ces surfaces sont rationnelles l'une et l'autre; la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse donc la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle; ce qui est impossible, parce que ces surfaces sont médiales l'une et l'autre, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle (27. 10). Il n'y a donc, etc.

PROPOSITION LXXXII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

310 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω μίση³ ἀποτομή δευτέρα ἡ AB, καὶ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι, μίσην περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ὑθεῖα μίση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μίσην περιέχουσα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΒΔ· καὶ⁴ αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι, μίσην περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν⁵ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβιβάσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῆρῆσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΑ. Πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ

Sit media apotome secunda AB, et ipsi AB congruat BΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, medium continentes rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; dico ipsi AB alteram non congruere rectam mediam quæ potentiâ solum commensurabilis sit toti, et cum totâ medium contineat.

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ igitur ΑΔ, ΔΒ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, medium continentes rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ. Et exponatur rationalis ΕΖ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΗ, latitudinem faciens ΕΜ; rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur ΕΑ æquale est quadrato ex ΑΒ; quare ΑΒ potest ipsum ΕΑ. Rursus utique quadratis ex ΑΔ, ΔΒ

Soit un second apotome médial AB, et que la droite BΓ conviène avec AB; les droites ΑΓ, ΓΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous ΑΓ, ΓΒ (76. 10); je dis qu'une autre droite médiale commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB.

Que ΒΔ conviène avec AB, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous ΑΔ, ΔΒ (76. 10). Soit exposée la rationnelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, qui ait pour largeur la droite ΕΜ, et retranchons de ΕΗ un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘΜ; le reste ΕΑ sera égal au quarré de ΑΒ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc la surface ΕΑ. De plus, appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΙ égal à la somme des quarrés des

τὴν ΕΖ παραβελήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΑ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσαι ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέτον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέτον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν^δ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἐστὶ^ε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ^ς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμ-

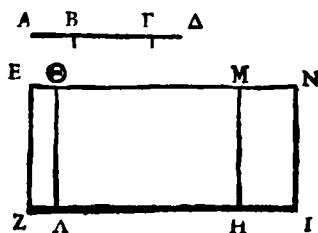
æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΙ, latitudinem faciens ΕΝ; est autem et ΕΑ æquale ex ΑΒ quadrato; reliquum igitur ΘΙ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam mediæ sunt ΑΓ, ΓΒ, media igitur sunt et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ. Et sunt æqualia ipsi ΕΗ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ, et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ medium est. Atque est æquale ipsi ΘΗ; et ΘΗ igitur medium est, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur est et ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita est ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurable igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem

droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΝ; mais ΕΑ est égal au carré de ΑΒ; le reste ΘΙ est donc égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (7. 2). Et puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont médiales, les carrés des droites ΑΓ, ΓΒ seront médiaux. Mais la somme de ces carrés est égale au parallélogramme ΕΗ; le parallélogramme ΕΗ est donc médial (cor. 24. 10), et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΕΜ, est appliqué à ΕΖ; la droite ΕΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). De plus, puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ sera médial (cor. 24. 10). Mais ce rectangle est égal au parallélogramme ΘΗ; le parallélogramme ΘΗ est donc médial; et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΘΜ, est appliqué à la rationnelle ΕΖ; la droite ΘΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Et puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΓ sera incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le carré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est commen-

312 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρά ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος

ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Atque est quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΗ; incommensurable igitur est ΕΗ ipsi ΘΗ. Ut autem ΕΗ ad ΘΗ ita est



ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ, ΘΜ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ προσαρμόζει ἐνθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

ΕΜ ad ΘΜ; incommensurabilis igitur est ΕΜ ipsi ΘΜ longitudine. Et sunt utræque rationales; ipsæ ΕΜ, ΘΜ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus et ΘΝ ipsi congruere; apotomæ igitur alia et alia congruit recta, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quod est impossibile.

Τῇ ἄρα μέση, καὶ τὰ ἐξῆς.

Mediæ igitur, etc.

surable avec le carré de ΑΓ (16. 10); et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et ΘΗ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ. Mais ΕΗ est à ΘΗ comme ΕΜ est à ΘΜ (1. 6); la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΘΜ. Mais ces deux droites sont rationelles; les droites ΕΜ, ΘΜ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome, et ΘΜ convient avec cet apotome (74. 10). Nous démontrions semblablement que ΘΝ lui convient aussi; deux droites différentes, commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui est impossible (80. 10). Il n'y a donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

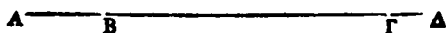
PROPOSITIO LXXXIII.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει ὑθεῖα
δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ
τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
ῤῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμό-
ζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν
ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῤῥητὸν, τὸ δὲ δις
ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα ὑθεῖα
οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Minori una solùm congruit recta potentiâ in-
commensurabilis existens toti, faciens cum totâ
compositum quidem ex ipsarum quadratis ratio-
nale, rectangulum verò bis sub ipsis medium.

Sit minor ΑΒ, et ipsi ΑΒ congruens sit ΒΓ;
ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensu-
rabiles, facientes quidem compositum ex ipsa-
rum quadratis rationale, rectangulum verò bis
sub ipsis medium; dico ipsi ΑΒ alteram rectam
non congruere, quæ eadem faciat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ
αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι,
ποιοῦσαι τὰ προειρημένα². Καὶ ἐπεὶ ᾗ ὑπέχει
τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,
τούτῃ ὑπέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ,
ΔΒ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, fa-
cientes ea quæ dicta sunt. Et quoniam quo su-
perant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ,
hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ

PROPOSITION LXXXIII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationnelle, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Soit la mineure ΑΒ, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ; les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationnelle, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant médial (77. 10); je dis qu'aucune autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec ΑΒ.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui vient d'être dit (77. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous

314 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων³ ὑπερέχει ῥητῶ, ῥητὰ γάρ ἐστιν⁴ ἀμφοτέρων· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γάρ ἐστιν⁵ ἀμφοτέρων.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι, καὶ τὰ ἐξῆς⁶.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιούση μία μόνον προσαρμόζει ἐνθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιῶσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ¹. αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιῶσα.

ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (7. 2), et que la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpassera d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce qui est impossible (27. 10); car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre. Donc, etc.

PROPOSITION LXXXIV.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Que ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ étant médiale, et le doublé rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel (78. 10); je dis qu'une autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec ΑΒ.

rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, rationalia enim sunt utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, quod est impossibile, media enim sunt utraque.

Minori igitur, etc.

PROPOSITIO LXXXIV.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale.

Sit recta ΑΒ cum rationali medium totum faciens, congruens autem ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere eadem facientem.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθείαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐπὶ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν². Ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀκαλούθως τοῖς³ πρὸ

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ, ΔΒ igitur rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidein compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, congruenter præ-



αὐτοῦ· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ, ῥητὰ γάρ· ἐστὶν ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μίσα γάρ ἐστίν⁴ ἀμφοτέρω· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ἔλλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει⁵. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

cedentibus; rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim sunt utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile; media enim sunt utraque; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens ea quæ dicta sunt; una igitur solum congruet. Quod oportebat ostendere.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ rationel (78. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, comme dans ce qui précède (7. 2), et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible; car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre (27. 10). Il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière ce qu'on a dit; il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΙ.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεΐα δυνάμει ἀσύμμετρος οὕτα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὰ προειρημένα². λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεΐα³ οὐ προσαρμόσκει, ποιούσα τὰ προειρημένα⁴.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα⁵ ἅμα μέσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα⁶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ,

PROPOSITIO LXXXV.

Ei quæ cum medio medium totum facit una solum congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta ΑΒ cum medio medium totum faciens, ipsi autem congruens ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt; dico ipsi ΑΒ alteram rectam non congruere, facientem ea quæ dicta sunt.

Si enim possibile, congruat ΒΔ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata simul media, et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ medium, et adhuc quadrata ex ΑΔ, ΔΒ incommensurabilia rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et exponatur ra-

PROPOSITION LXXXV.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et commensurable avec la somme de leurs quarrés.

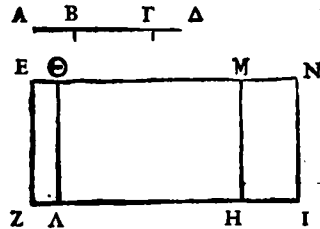
Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΒΓ conviène avec ΑΒ; les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, et feront ce qui vient d'être dit (79. 10); je dis qu'une autre droite, faisant ce qui vient d'être dit, ne convient point avec ΑΒ.

Que ΒΔ, s'il est possible, conviène avec ΑΒ, les droites ΑΔ, ΔΒ étant incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés médiale, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ médial, et la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ incommensurable avec le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Soit exposée la rationnelle ΕΖ;

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 317

καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παρατελλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφαιρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ὅρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἵσθαι τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς μὲν^δ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παρατελλήσθω τὸ ΕΙ,

tionalis EZ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam EZ applicetur ΕΗ, latitudinem faciens ΕΜ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur, ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur quadratum ex ΑΒ æquale est ipsi ΕΛ; ipsa igitur ΑΒ potest ipsum ΕΛ. Rursus, quadratis quidem ex ΑΔ, ΔΒ æquale ad ipsam EZ applicetur ΕΙ, latitudinem



πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ὅρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἵσθαι τῷ ΕΙ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἵσθαι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἵσθαι τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἵσθαι καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἵσθαι ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἵσθαι τὸ

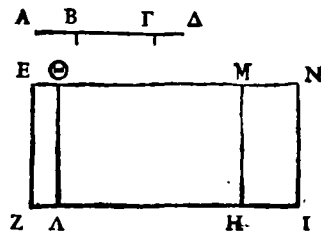
faciens ΕΝ. Est autem et quadratum ex ΑΒ æquale ipsi ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsi ΕΙ. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΕΗ; medium igitur est et ΕΗ; et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis

appliquons à EZ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΜ; et retranchons de ΕΗ un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant ΘΜ pour largeur; le quarré restant de ΑΒ sera égal au parallélogramme ΕΛ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc le parallélogramme ΕΛ. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme ΕΙ égal à la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΝ. Mais le quarré de ΑΒ est égal au parallélogramme ΕΛ; le double parallélogramme restant compris sous ΑΔ, ΔΒ est donc égal à ΕΙ (7. 2). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est médiale, et que cette somme est égale à ΕΗ, le parallélogramme ΕΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à EZ, et il a pour largeur la droite ΕΜ; la droite ΕΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, et qu'il

318 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ⁹ ΘΗ·
μῖσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΕΖ
παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ρητὴ ἄρα
ἴστιν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ
ἵπαι ἀσύμμετρά ἴσιν τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ
δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα¹⁰ ἴσιν καὶ
τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἴσιν καὶ ἡ ΕΜ

sub ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΘΗ; me-
dium igitur et ΘΗ, et ad rationalem ΕΖ appli-
catur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur
est ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitu-
dine. Et quoniam incommensurabilia sunt qua-
drata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ,
incommensurabile igitur est et ΕΗ ipsi ΘΗ; in-



τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ
ἄρα ΕΜ, ΜΘ ρηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-
τροι· ἀποτομή ἄρα ἴστιν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα
δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ
πάλιν ἀποτομή ἐστίν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ
ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρ-
μίζει ρητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος¹¹ οὔσα τῇ
ὅλη, ὅπερ εἰδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ
εἰτίρα προσαρμόσει εὐθεῖα· τῇ ἄρα ΑΒ μία

commensurabilis igitur est et ΕΜ ipsi ΜΘ longi-
tudine. Et sunt utraq̃ue rationales; ipsæ igitur
ΕΜ, ΜΘ rationales sunt potentiâ solùm com-
mensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et
ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demons-
trabimus ΕΘ rursus apotomen esse, et ΘΝ
congruentem ipsi; apotomæ igitur alia et alia
congruit rationalis, potentiâ solùm commen-
surabilis existens toti, quod demonstratum est
impossibile; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet

est égal à ΘΗ, le parallélogramme ΘΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationnelle ΕΖ, et il a pour largeur la droite ΘΜ; la droite ΘΜ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Mais la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ; la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΘ (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΕΜ, ΜΘ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome (74. 10), et ΘΜ convient avec ΕΘ. Nous démontrerions semblablement que ΕΘ est encore un apotome, et que ΘΝ convient avec ΕΘ; des rationnelles différentes commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui a été démontré impossible (80. 10); une autre droite ne convient donc pas avec ΑΒ;

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, κατὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετραγώνη¹² ἅμα μέσον, καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι¹³ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνη ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

recta; ipsi igitur AB una solùm congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et ex ipsis quadrata simul media, et rectangulum bis sub ipsis medium, et adhuc ex ipsis quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

DEFINITIONES TERTIÆ.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, εἰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μίζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β. Εἰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ἢ τῇ ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μίζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ. Εἰν δὲ μηδενίαν σύμμετρος ἢ τῇ ἑκκει-

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit ex-

il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec AB, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière AB, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial, et la somme des quarrés incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites. Ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appellera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la

320 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μένη ῥητῇ μήκει, ἢ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης
μῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμεύτρου ἑαυτῇ, κα-
λείσθω ἀποτομή τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης
μῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμεύτρου ἑαυτῇ μή-
κει, ἐὰν μὲν ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ
μήκει, καλείσθω ἀποτομή τετάρτη.

ε. Εὰν δὲ ᾖ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς. Εὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.

Εὐρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει
σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ
ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ
οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΖΔ' μὴ ἔστω

positæ rationali longitudine, et tota quam
congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi
commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus pos-
sit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili lon-
gitudine, si quidem tota commensurabilis sit ex-
positæ rationali longitudine, vocetur apotome
quarta.

5. Si verò sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

PROPOSITIO LXXXVI.

Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine
commensurabilis sit ΒΗ; rationalis igitur est et
ΒΗ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔΕ,
ΕΖ, quorum excessus ΖΔ non sit quadratus;

rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de
la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le
reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la
congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite
entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle
exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste
s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationnelle exposée,
le reste s'appèlera sixième apotome.

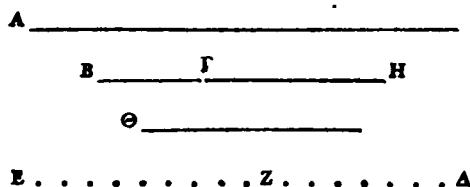
PROPOSITION LXXXVI.

Trouver un premier apotome.

Soit exposée la rationnelle Α, et que ΒΗ soit commensurable en longueur avec Α, la
droite ΒΗ sera rationnelle. Soient exposés deux nombres quarrés ΔΕ, ΕΖ, dont l'ex-
cès ΖΔ ne soit pas un nombre quarré (30. lem. 1. 10), le nombre ΔΕ n'aura pas avec ΔΖ

τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πιποισθῶ ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον²· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ·

neque igitur ΕΔ ad ΔΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad quadratum ex ΗΓ; commensurabile igitur est ex ΒΗ quadratum quadrato ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum



ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη. Ὡ γὰρ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν

ex ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et quoniam ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et primam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ.

la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Faisons en sorte que ΕΔ soit à ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ; le quarré de ΒΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΓ (6. 10). Mais le quarré de ΒΗ est rationel; le quarré de ΗΓ est donc aussi rationel; la droite ΗΓ est donc rationelle. Et puisque ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (9. 10); la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un premier apotome. Car que l'excès du quarré de ΒΗ sur le quarré de ΗΓ soit le

322 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ³. καὶ ἀνατρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὥς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἐκότερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει⁴· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι⁵.

Et quoniam est ut ΔΕ ad ΖΔ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ; et convertendo igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΗΒ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, uterque enim quadratus est; et quadratum ex ΗΒ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΗΒ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est prima.

Inventa est igitur prima apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de Θ. Puisque ΔΕ est à ΖΔ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΔΕ sera à ΕΖ comme le quarré de ΗΒ est au quarré de Θ (19. cor. 5). Mais le nombre ΔΕ a avec le nombre ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, car ces nombres sont des quarrés l'un et l'autre; le quarré de ΗΒ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΗΒ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10).

On a donc trouvé un premier apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ.

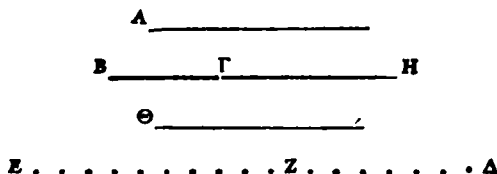
PROPOSITIO LXXXVII.

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Invenire secundam apotomen.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἴστω τετράγωνος. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ².

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α commensurabilis longitudine ipsa ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔΕ, ΕΖ, quorum excessus ΔΖ non sit quadratus. Et fiat ut ΖΔ ad ΔΕ ita ex ΓΗ quadratum ad



σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον³ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνῳ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ⁴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ· Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ⁵ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα⁶

ipsum ex ΗΒ; commensurable igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur est et ex ΗΒ; rationalis igitur est ΗΒ. Et quoniam ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis est ΓΗ ipsi ΗΒ longitudine. Et sunt utraque rationales; ipsæ ΓΗ,

PROPOSITION LXXXVII.

Trouver un second apotome.

Soit exposée la rationelle Α, et que la droite ΗΓ soit commensurable en longueur avec Α; la droite ΗΓ sera rationelle (30. lem. 1. 10). Soient exposés deux nombres quarrés ΔΕ, ΕΖ, dont l'excès ΔΖ ne soit pas un quarré. Faisons en sorte que ΖΔ soit à ΔΕ comme le quarré de ΓΗ est au quarré de ΗΒ; le quarré de ΓΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΒ (6. 10). Mais le quarré de ΓΗ est rationel; le quarré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΗΒ est donc rationelle. Et puisque le quarré de ΓΗ n'a pas avec le quarré de ΗΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite ΓΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΒ (9. 10). Mais ces droites sont

324 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Ὡς γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμὸν· ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἐστὶν ἐκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

HB igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo BG apotome est. Dico et secundam. Quo enim majus est quadratum ex BH quadrato ex HG, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex BH quadratum ad ipsum ex HG ita EA numerus ad numerum AZ; convertendo igitur est ut ex BH quadratum ad ipsum ex Θ ita AE ad EZ. Atque est uterque ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus; quadratum igitur ex BH ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est BH ipsi Θ longitudine. Et BH quam HG plus potest quadrato ex Θ; ergo BH quam HG plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo BG apotome est secunda.

Inventa est igitur secunda apotome BG. Quod oportebat facere.

rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΗ, ΗΒ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un second apotome. Car que l'excès du carré de ΒΗ sur le carré de ΗΓ soit le carré de Θ. Puisque le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ comme le nombre ΕΔ est au nombre ΔΖ, par conversion, le carré de ΒΗ sera au carré de Θ comme ΔΕ est à ΕΖ. Mais ΔΕ et ΕΖ sont des carrés l'un et l'autre; le carré de ΒΗ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du carré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10).

On a donc trouvé un second apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη.

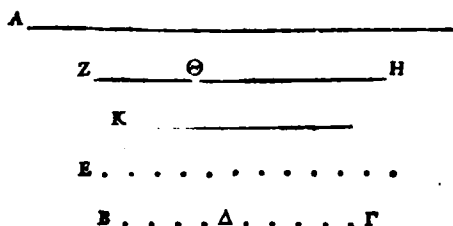
PROPOSITIO LXXXVIII.

Εὐρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Invenire tertiam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχῃτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ

Exponatur rationalis Α, et exponantur tres numeri Ε, ΒΓ, ΓΔ, rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et fiat ut quidem Ε ad ΒΓ ita ex



ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετράγωνον¹. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ². ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον³. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐχ ἔχει

Α quadratum ad quadratum ex ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad quadratum ex ΗΘ; commensurable igitur est ex Α quadratum quadrato ex ΖΗ. Rationale autem ex Α quadratum; rationale igitur et quadratum ex ΖΗ; rationalis igitur est ΖΗ. Et quoniam Ε ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus

PROPOSITION LXXXVIII.

Trouver un troisième apotome.

Soient exposés la rationnelle Α, et les trois nombres Ε, ΒΓ, ΓΔ, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; que ΓΒ ait avec ΒΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; faisons en sorte que Ε soit à ΒΓ comme le carré de Α est au carré de ΖΗ, et que ΒΓ soit à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; le carré de Α sera commensurable avec le carré de ΖΗ (6. 10). Mais le carré de Α est rationel; le carré de ΖΗ est donc rationel; la droite ΖΗ est donc rationnelle. Et puisque Ε n'a pas

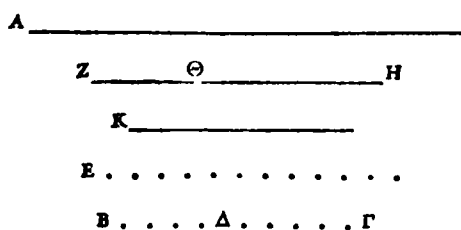
ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον⁴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α πρὸς τὴν ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον⁵ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διῖσου ἄρα ἐστὶν

numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Α ipsi ΖΗ longitudine. Rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; commensurabile igitur est ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ; rationalis igitur est ΗΘ. Et quoniam ΒΓ ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΖΘ. Dico et tertiam. Quoniam enim est ut quidem Ε ad ΒΓ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita

avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de Α n'aura pas avec le carré de ΖΗ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera commensurable avec le carré de ΗΘ. Mais le carré de ΖΗ est rationel; le carré de ΗΘ est donc rationel; la droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque ΒΓ n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΖΗ n'aura pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΖΗ, ΗΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΘ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi qu'elle est un troisième apotome. Car puisque Ε est à ΒΓ comme le carré de Α est au carré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Ε sera à ΓΔ

ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· εὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει⁸. Ω εὖν μιλζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

ex A quadratum ad ipsum ex ΘΗ. Ipse autem E ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur A ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine. Quo igitur majus est quadratum ex ΖΗ quadrato



τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρίψαντι ἔρα ἐστὶν ὥς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον⁹ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν·

ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex ΖΗ igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur

comme le carré de A est au carré de ΘΗ (22. 5); mais E n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de A n'a donc pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée A. Que le carré de Κ soit la grandeur dont le carré de ΖΗ surpasse le carré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ (19. 5). Mais ΓΒ a avec ΒΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΖΗ a donc avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite

328 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τοῦ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδέτερά τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Ὅπερ εἶναι ποιῆσαι.

est ZH ipsi K longitudine. Et ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex K ; ergo ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ZH , $H\Theta$ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine; ergo $Z\Theta$ apotome est tertia.

Inventa est igitur tertia apotome $Z\Theta$. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΘ'.

Εὐρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τὸν ΔΖ, ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ

PROPOSITIO LXXXIX.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A , et ipsi A longitudine commensurabilis BH ; rationalis igitur est et BH . Et exponantur duo numeri ΔZ , ZE ; ita ut totus ΔE ad utrumque ipsorum ΔZ , ZE rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΔE ad EZ ita ex BH quadratum ad ipsum ex $H\Gamma$; commensurabile igitur

ZH est donc commensurable en longueur avec K (9. 10). Mais la puissance de ZH surpasse la puissance de $H\Theta$ du carré de K ; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de $H\Theta$ du carré d'une droite commensurable avec ZH ; mais aucune des droites ZH , $H\Theta$ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée A ; la droite $Z\Theta$ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10).

On a donc trouvé un troisième apotome $Z\Theta$. Ce qu'il fallait faire.

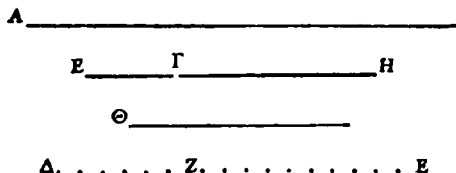
PROPOSITION LXXXIX.

Trouver un quatrième apotome.

Soit exposée la rationelle A , et que BH soit commensurable en longueur avec A ; la droite BH sera rationelle. Soient exposés les deux nombres ΔZ , ZE , de manière que le nombre entier ΔE n'ait pas avec chacun des nombres ΔZ , ZE la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; et faisons en sorte que ΔE soit à EZ comme le carré de BH est au carré de $H\Gamma$; le carré de BH sera commensurable

τῆς BH τῷ ἀπὸ τῆς HG. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BH· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HG· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ HG. Καὶ ἵπαι ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HG λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος

est quadratum ex HG. Rationale autem quadratum ex BH; rationale igitur et quadratum ex HG; rationalis igitur est HG. Et quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex BH quadratum ad ipsum ex HG rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum



ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ HG μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ BH, HG ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον συμμετροί· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ BG. Λέγω δὲ ἔτι καὶ τετάρτη'. Ὡς οὖν μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς HG, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HG, καὶ³ ἀναστρέφαιτι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος

numerum; incommensurabilis igitur est BH ipsi HG longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ BH, HG igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est BG. Dico et quartam. Quo enim majus est quadratum ex BH quadrato ex HG, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex BH quadratum ad ipsum ex HG, et convertendo igitur est ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex BH quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-

avec le carré de HG (6. 10). Mais le carré de BH est rationel, le carré de HG est donc rationel; la droite HG est donc rationelle. Et puisque ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de BH n'aura pas non plus avec le carré de HG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite BH est donc incommensurable en longueur avec HG (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites BH, HG sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite BG est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un quatrième apotome. Que le carré de Θ soit ce dont le carré de BH surpasse le carré de HG. Puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le carré de BH est au carré de HG, par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le carré de BH est au carré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de BH n'a donc pas non plus avec le carré de

330 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἰαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ⁵ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΒΓ⁶ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εὔρηται ἄρα ἡ ΒΓ⁷ τετάρτη ἀποτομή. Ὅπερ ἴδιαι ποιῆσαι.

tum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine; et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est quarta.

Inventa est igitur ΒΓ quarta apotome. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4'.

Εὐρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει¹ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν² ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς

PROPOSITIO XC.

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine commensurabilis sit ΓΗ; rationalis igitur est ΓΗ. Et exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut ΔΕ ad utrumque ipsorum ΔΖ, ΖΕ rationem rursus non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut ΖΕ ad ΕΑ

Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (g. 10); mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10).

On a donc trouvé un quatrième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

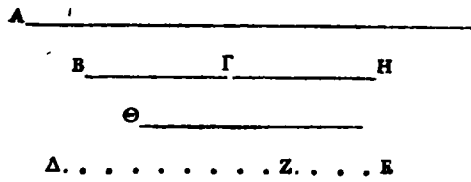
PROPOSITION XC.

Trouver un cinquième apotome.

Soit exposée la rationelle Α, et que ΓΗ soit commensurable en longueur avec Α; la droite ΓΗ sera rationelle. Soient exposés aussi deux nombres ΔΖ, ΖΕ, de manière que ΔΕ n'ait ni avec l'un ni avec l'autre des nombres ΔΖ, ΖΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; et faisons en sorte que ΖΕ soit à

τὸν³ ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

ita ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ; commensurable igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΒ; rationalis igitur est et ΒΗ. Et quoniam est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



μόν· οὐδ' ἄρα⁵ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ὡς γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ

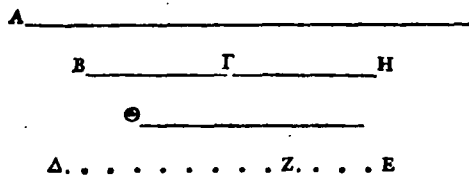
tum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et quintam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex

ΕΔ comme le carré de ΓΗ est au carré de ΗΒ; le carré de ΓΗ sera commensurable avec le carré de ΗΒ (6. 10). Mais le carré de ΓΗ est rationel; le carré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΒΗ est donc rationnelle. Et puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ, et que ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais elles sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΗ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un cinquième apotome. Que le carré de Θ soit ce dont le carré de ΒΗ surpasse le carré de ΗΓ. Puisque le

332 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀνα-
στρέψαντι ἄρα ἴστιν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως
τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΕΔ πρὸς
τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς
ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος

ΗΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, convertendo igitur est ut
ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum
ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet
quam quadratus numerus ad quadratum nume-
rum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum
ex Θ rationem habet quam quadratus numerus



ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἴστιν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ
ΒΗ τῆς ΗΓ μίζον⁶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ
ἄρα τῆς ΗΓ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-
μέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἴστιν ἡ προσαρμό-
ζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ
Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἴσθι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ
ἔδει ποιῆσαι.

ad quadratum numerum; incommensurabilis
igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam
ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam
ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi incom-
mensurabili longitudine. Atque est congruus
ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α lon-
gitudine; ergo ΒΓ apotome est quinta.

Inventa est igitur quinta apotome ΒΓ. Quod
oportebat facere.

quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ comme ΔΕ est à ΕΖ; par conversion, ΕΔ sera à
ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison
qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas
non plus avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre
quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais
la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de
ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite incommensurable en
longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la
rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10).

On a donc trouvé un cinquième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

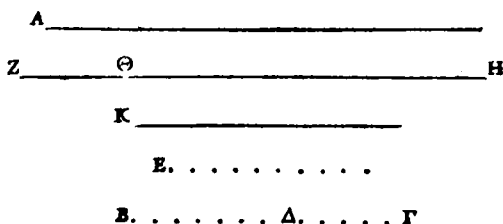
Εὕρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ $E, B\Gamma, \Gamma\Delta$ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἵτι δὲ καὶ ὁ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον μὴ ἰχέτω ὢν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὥς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH^2 , ὥς δὲ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$.

PROPOSITIO XCI.

Invenire sextam apotomen.

Exponatur rationalis A , et tres numeri $E, B\Gamma, \Gamma\Delta$ rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum; adhuc autem et ΓB ad $B\Delta$ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut quidem E ad $B\Gamma$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH , ut verò $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $H\Theta$.



Ἐπεὶ οὖν ἴστιν ὥς ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς ZH . ῤητὸν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς A ῤητὸν ἄρα καὶ τὸ

Quoniam igitur est ut E ad $B\Gamma$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH ; commensurable igitur ex A quadratum quadrato ex ZH . Rationale autem quadratum ex A ; rationale igitur et

PROPOSITION XCI.

Trouver un sixième apotome.

Soient exposés la rationnelle A , et trois nombres $E, B\Gamma, \Gamma\Delta$, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; de plus, que ΓB n'ait pas avec $B\Delta$ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; faisons en sorte que E soit à $B\Gamma$ comme le carré de A est au carré de ZH , et que $B\Gamma$ soit à $\Gamma\Delta$ comme le carré de ZH est au carré de $H\Theta$.

Puisque E est à $B\Gamma$ comme le carré de A est au carré de ZH , le carré de A sera commensurable avec le carré de ZH . Mais le carré de A est rationel; le

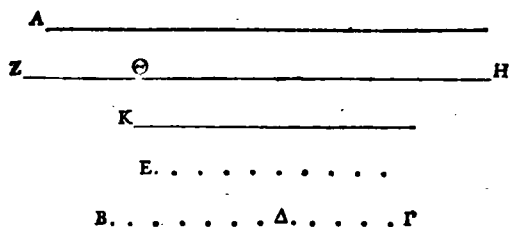
ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἔκτῃ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ

quadratum ex ZH ; rationalis igitur est et ZH . Et quoniam E ad $B\Gamma$ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est A ipsi ZH longitudine. Rursus, quoniam est ut $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $H\Theta$; commensurabile igitur ex ZH quadratum quadrato ex $H\Theta$. Rationale autem quadratum ex ZH ; rationale igitur et quadratum ex $H\Theta$; rationalis igitur et $H\Theta$. Et quoniam $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ZH quadratum ad ipsum ex $H\Theta$ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi $H\Theta$ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ZH , $H\Theta$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo $Z\Theta$ apotome est. Dico et sextam. Quoniam enim est ut quidem E ad $B\Gamma$ ita ex A quadratum ad ipsum ex

quarré de ZH est donc rationel; la droite ZH est donc rationnelle. Et puisque E n'a pas avec $B\Gamma$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de A n'aura pas non plus avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). De plus, puisque $B\Gamma$ est à $\Gamma\Delta$ comme le quarré de ZH est au quarré de $H\Theta$; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de $H\Theta$. Mais le quarré de ZH est rationel; le quarré de $H\Theta$ est donc rationel (6. 10); la droite $H\Theta$ est donc rationnelle. Et puisque $B\Gamma$ n'a pas avec $\Gamma\Delta$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ZH n'aura pas non plus avec le quarré de $H\Theta$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec $H\Theta$ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ZH , $H\Theta$ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite $Z\Theta$ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un sixième apotome. Car puisque E est à $B\Gamma$ comme le quarré de A est au

ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διήσου ἄρα ἴστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἴστιν ἡ

ZH, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Ε ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur



Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα³ τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἴστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. Ω οὖν μεῖζόν ἴστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἴστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέφαντι ἄρα ἴστιν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

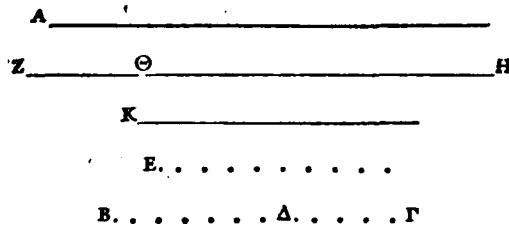
est Α ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est rationali Α longitudine. Quo enim majus est quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ, convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ qua-

quarré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, par égalité, Ε sera à ΓΔ comme le quarré de Α est au quarré de ΗΘ. Mais Ε n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de Α n'aura donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (g. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec Α. Que le quarré de Κ soit ce dont le quarré de ΖΗ surpasse le quarré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΓΒ n'a pas avec ΒΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de

336 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς Κ λόγον ἔχει ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύνатаι ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ

dratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi Κ longi-



μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον δύνатаι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρές ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτη.

tudine. Et ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex Κ; ergo ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali Α longitudine; ergo ΖΘ apotome est sexta.

Εὑρηται ἄρα ἡ ἑκτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Οπερ εἶδει ποιῆσαι.

Inventa est igitur sexta apotome ΖΘ. Quod oportebat facere.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

SCHOLIUM.

Εἶστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὑρησιν τῶν εἰρημένων ἑξ ἀποτομῶν. Καὶ δὴ ἔστω εὐρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ' ἐκ δύο ὀνο-

Licet autem et expeditius demonstrare inventionem dictarum sex apotomarum. Et igitur oporteat invenire primam apotomen, exponatur

ΖΗ n'a donc pas non plus avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec Κ (9. 10). Mais la puissance de la droite ΖΗ surpasse la puissance de la droite ΗΘ du carré de Κ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΖΗ. Mais aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΖΗ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10).

On a donc trouvé un sixième apotome ΖΘ. Ce qu'il fallait faire.

SCHOLIE.

On peut démontrer plus brièvement la recherche des six apotomes dont nous venons de parler. Car qu'il faille trouver un premier apotome; soit exposé

μάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἥς μείζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς

ex binis nominibus prima ΑΓ, cujus majus nomen ipsa ΑΒ, et ipsi ΒΓ æqualis ponatur ΒΔ; ergo ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΑΒ quam ΒΓ, hoc

Α Δ Β Γ

ΒΔ, μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἐκυτῇ. Καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομή ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΒ². Ομοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὐρήσμεν, ἐκθίμενοι τὰς ἰσαριθμούς ἐκ δύο ὀνομάτων.

est quam ΒΔ, plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et ΑΒ commensurabilis est expositæ rationali longitudine; apotome igitur prima est ΑΒ. Similiter utique et reliquas apotomas inveniemus, exponendo eas quæ sunt ejusdem ordinis ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

PROPOSITIO XCII.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

Περιέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

Contineatur enim spatium ΑΒ sub rationali ΑΓ et apotome primâ ΑΔ; dico rectam quæ spatium ΑΒ potest apotomen esse.

la première de deux noms ΑΓ; que son plus grand nom soit ΑΒ (49. 10), et faisons ΒΔ égal à ΒΓ; les droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire ΑΒ, ΒΔ, seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10); la puissance de ΑΒ surpassera la puissance de ΒΓ, c'est-à-dire de ΒΔ, du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΒ; mais la droite ΑΒ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée; la droite ΑΒ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Nous trouverons semblablement les autres apotomes en exposant les droites de deux noms qui sont du même ordre (50, 51, 52, 53, et 54. 10).

PROPOSITION XCII.

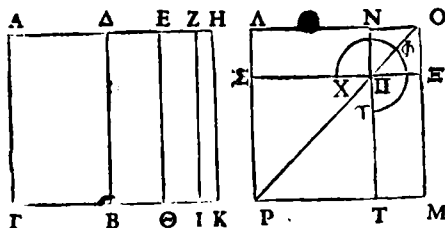
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un premier apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un apotome.

338 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμίζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλό-

Quoniam enim apotome est prima ΑΔ, sit ipsi congruens ΔΗ; ipsæ ΑΗ, ΗΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et tota ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, et ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale



γραμμον² παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί³. Τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Καὶ ἵπαι σύμμετρός ἐστιν ἡ

ad ΑΗ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ. Et per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine; et

Car, puisque ΑΔ est un premier apotome, que ΔΗ lui conviène; les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. trois. 1. 10). Mais la droite entière ΑΗ est commensurable avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ; si donc on applique à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties commensurables (18. 10). Que ΔΗ soit coupé en deux parties égales au point Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle compris sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera commensurable avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque ΑΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ,

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 339

AZ τῇ ZH μήκει· καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ, ZH σύμμετρος ἐστὶ μήκει. ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΓ μήκει. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφιεῖσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΕ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΕ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ

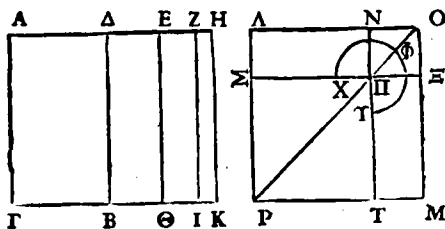
AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Sed AH commensurabilis est ipsi AG; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH commensurabilis est ipsi AG longitudine. Atque est rationalis AG; rationalis igitur et utraque ipsarum AZ, ZH; quare et utrumque ipsorum AI, ZK rationale est. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Ponatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale quadratum ΝΕ auferatur, communem angulum ΑΟΜ habens cum ipso; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΕ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur æquale est sub ΑΖ, ΖΗ contentum rectangulum quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. Sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ, ut verò

la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est commensurable avec AG; chacune de droites AZ, ZH est donc commensurable en longueur avec AG (12. 10). Mais AG est rationnelle; les droites AZ, ZH sont donc rationnelles l'une et l'autre; les parallélogrammes AI, ZK sont donc aussi rationnels l'un et l'autre (20. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ, la droite ΔΗ est donc commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des rectangles ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΕ égal au parallélogramme ΖΚ, le carré ΝΕ ayant l'angle commun ΑΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΕ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que ΟΡ soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au carré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est

340 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἑμ-
προσθεν εἰδείχθη, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ
τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ
ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ
ΔΘ ἴσόν ἐστιν⁸, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΑΞ· τὸ ἄρα ΔΚ

EH ad ZH ita est EK ad KZ; ipsorum igitur
AI, KZ medium proportionale est EK. Est
autem et ipsorum AM, NE medium propor-
tionale MN, ut superius demonstratum est,
atque est quidem AI quadrato AM æquale, ip-
sum verò ZK ipsi NE; et MN igitur ipsi EK
æquale est. Sed quidem EK ipsi ΔΘ est æquale,
ipsum verò MN ipsi ΑΞ; ergo ΔΚ æquale est



ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἐστὶ
δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ τετραγώνοις·
λοιπὸν⁹ ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ
τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ
τῆς ΑΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΑΝ ἄρα
δύναται τὸ ΑΒ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ¹⁰ ἡ ΑΝ ἀπο-
τομή ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν
ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· καὶ ἑκά-
τερον ἄρα τῶν ΑΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τουτίστι

gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ. Est autem et ΑΚ
æquale quadratis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ
æquale est ipsi ΣΤ; sed ΣΤ ex ΑΝ est qua-
dratum; ergo ex ΑΝ quadratum æquale est ipsi
ΑΒ; ipsa ΑΝ igitur potest ipsum ΑΒ. Dico et
ΑΝ apotomen esse. Quoniam enim rationale est
utrumque ipsorum ΑΙ, ΖΚ, atque est æquale
quadratis ΑΜ, ΝΞ; et utrumque igitur ipsorum
ΑΜ, ΝΞ rationale est, hoc est quadratum ex

à EK, et EH est à ZH comme EK est à KZ (1. 6); le parallélogramme EK est donc
moyen proportionel entre les parallélogrammes AI, KZ. Et puisque MN est moyen
proportionel entre AM et ΝΞ, ainsi qu'on l'a démontré plus haut (55. 10), que AI
est égal au quarré AM, et que ΖΚ l'est à ΝΞ, le parallélogramme MN sera égal à EK.
Mais EK est égal à ΔΘ (37. 1), et MN à ΑΞ (43. 1); le parallélogramme ΔΚ est
donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais le parallélogramme ΑΚ
est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc
égal à ΣΤ. Mais ΣΤ est le quarré de ΑΝ; le quarré de ΑΝ est donc égal à ΑΒ; la
droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis aussi que ΑΝ est un apotome. Car puis-
que chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ est rationel, et qu'ils sont égaux aux
quarrés ΑΜ, ΝΞ, chacun des quarrés ΑΜ, ΝΞ, c'est-à-dire chacun des quarrés des

τὸ ἀπὸ ἑκατέρων¹¹ τῶν $\Lambda\Theta$, ON · καὶ ἑκάτερα ἄρα τῶν $\Lambda\Theta$, ON ῥητὴ ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ μείσον ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $\Lambda\Xi$ · μείσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda\Xi$. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $\Lambda\Xi$ μείσον ἐστὶ, τὸ δὲ $\text{N}\Xi$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ¹² τὸ $\Lambda\Xi$ τῷ $\text{N}\Xi$ · ὥς δὲ τὸ $\Lambda\Xi$ πρὸς τὸ $\text{N}\Xi$ οὕτως ἐστὶν ἡ $\Lambda\Theta$ πρὸς τὴν ON · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda\Theta$ τῇ ON μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ $\Lambda\Theta$, ON · ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ AN . Καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυνάμει ἀποτομὴ ἐστὶν.

Εάν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς¹³.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 47'.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυνάμει μείσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς AT καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς AD · λίσσω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυνάμει μείσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

utrisque $\Lambda\Theta$, ON ; et utraque igitur ipsarum $\Lambda\Theta$, ON rationalis est. Rursus, quoniam medium est $\Delta\Theta$, atque est æquale ipsi $\Lambda\Xi$; medium igitur est et $\Lambda\Xi$. Quoniam igitur quidem $\Lambda\Xi$ medium est, ipsum verò $\text{N}\Xi$ rationale, incommensurable igitur est et $\Lambda\Xi$ ipsi $\text{N}\Xi$; ut autem $\Lambda\Xi$ ad $\text{N}\Xi$ ita est $\Lambda\Theta$ ad ON ; incommensurabilis igitur est $\Lambda\Theta$ ipsi ON longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ $\Lambda\Theta$, ON igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est AN . Et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens apotome est.

Si igitur spatium, etc.

PROPOSITIO XCIII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AT et apotome secundâ AD ; dico rectam quæ spatium AB potest mediæ apotomen esse primam.

droites $\Lambda\Theta$, ON sera rationel; les droites $\Lambda\Theta$, ON sont donc rationnelles l'une et l'autre. De plus, puisque le parallélogramme $\Delta\Theta$ est médial, et qu'il est égal à $\Lambda\Xi$, le parallélogramme $\Lambda\Xi$ sera aussi médial. Et puisque $\Lambda\Xi$ est médial, et que $\text{N}\Xi$ est rationel, le parallélogramme $\Lambda\Xi$ sera incommensurable avec le carré $\text{N}\Xi$; mais $\Lambda\Xi$ est à $\text{N}\Xi$ comme $\Lambda\Theta$ est à ON (1.6); la droite $\Lambda\Theta$ est donc incommensurable en longueur avec ON (10.10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites $\Lambda\Theta$, ON sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite AN est donc un apotome (74.10). Mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc un apotome. Si donc, etc.

PROPOSITION XCIII.

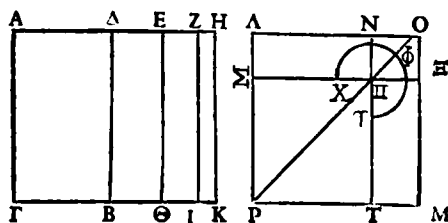
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

Que la surface AB soit comprise sous la rationnelle AT et sous le second apotome AD ; je dis que la droite qui peut la surface AB est un premier apotome d'une médiale.

342. LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἵππει οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἂν ἄρα τῷ τετάρτῳ

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solûm commensurabiles, et congruens ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, sed tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; quoniam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si



μέρι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβλήθῃ ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί³. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ⁴ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβλήσθω ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ,

igitur quartæ parti quadrati ex ΗΔ æquale parallelogrammum ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in Ε; et quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. Et per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ paral-

Que la droite ΔΗ conviène avec ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la congruente ΔΗ sera commensurable avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ (déf. trois. 2. 10), puisque la puissance de ΑΗ surpassera la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΗ, si nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΗΔ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties commensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales au point Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme qui étant égal au quarré de ΕΗ soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera commensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 343

ΖΙ, ΗΚ. Καὶ ἐπὶ σύμμετρος ἐστὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει⁵ καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρω τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ρητὴ δὲ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΖ, ΖΗ ρητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκατέρον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρω τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρος ἐστὶν. Ἀλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει⁶ ἑκατέρον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ρητόν ἐστι. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ τῶν ΑΟΜ⁷· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Εἴτω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις⁸, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ἄρα⁹

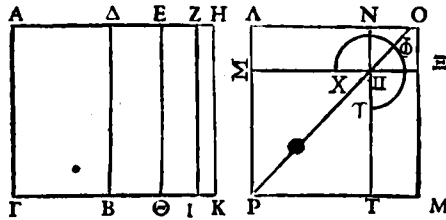
lelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine; et ΑΗ igitur utrique ipsarum ΑΖ, ΖΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΑΗ et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utraque igitur ipsarum ΑΖ, ΖΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΑΙ, ΖΚ medium est Rursus, quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est. Sed ΔΗ commensurabilis est ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ rationale est. Constituaturs igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, circa eundem angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur ΑΙ, ΖΚ media sunt, et commensurabilia inter se, et sunt æqualia quadratis ex ΑΟ, ΟΝ; et qua-

droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque ΑΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΑΗ sera aussi commensurable en longueur avec chacune des droites ΑΖ, ΖΗ (16. 10). Mais ΑΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΑΖ, ΖΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ sera par conséquent médial (22. 10). De plus, puisque ΔΕ est commensurable avec ΕΗ, la droite ΔΗ sera commensurable avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais la droite ΔΗ est commensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΔΘ, ΕΚ est donc rationnel. Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal au parallélogramme ΖΚ, ce carré étant dans le même angle que ΑΜ; savoir, dans l'angle ΑΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ sont médiaux et commensurables entre eux, et qu'ils sont égaux aux carrés des droites ΑΟ, ΟΝ, les carrés des droites ΑΟ, ΟΝ

344 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μία ἐστὶ καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ.
 Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπεὶ
 γὰρ¹⁰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως
 ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν
 ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ. Ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς
 τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ¹¹ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα
 ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ

drata ex ΛΟ, ΟΝ igitur media sunt; et ΛΟ,
 ΟΝ igitur mediæ sunt. Dico et potentiâ solum
 commensurabiles. Quoniam enim rectangulum
 sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est
 igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ; sed ut quidem
 ΑΖ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ. Ut autem ΕΗ ad
 ΖΗ, ita est ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ
 medium proportionale est ΕΚ. Est autem et



τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ
 ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ ΖΚ
 τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ.
 Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ¹² τὸ ΔΘ, τῷ
 δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ἔλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον
 ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν
 ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΜ, ΝΞ, ὧν τὸ
 ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμονι, καὶ τῷ ΝΞ·
 λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτίστι

quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale
 ΜΝ, atque est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ, ipsum
 verò ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΜΝ igitur æquale est ipsi
 ΕΚ. Sed ipsi quidem ΕΚ æquale est ΔΘ, ipsi
 verò ΜΝ æquale ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale
 est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ. Quoniam igitur
 totum ΑΚ æquale est quadratis ΑΜ, ΝΞ, quo-
 rum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ;
 reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est

seront médiaux ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales. Je dis que ces droites
 sont commensurables en puissance seulement. Car puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ
 est égal au carré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais
 ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ ; le parallé-
 logramme ΕΚ est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ.
 Mais ΜΝ est aussi moyen proportionnel entre ΑΜ et ΝΞ (55. 10), et ΑΙ est égal
 à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ ; le parallélogramme ΜΝ est donc égal à ΕΚ. Mais ΔΘ est
 égal à ΕΚ (37. 1), et ΛΞ égal à ΜΝ (43. 1), le parallélogramme entier ΔΚ est
 donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Et puisque le parallélo-
 gramme ΑΚ tout entier est égal à la somme des carrés ΑΜ, ΝΞ, et que la partie
 ΔΚ est égale au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ, le parallélogramme restant

τῷ¹³ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ¹⁴ ἴσον ἔστί τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ¹⁵ ΑΒ χωρίον. Λέγω δὲ¹⁶ ὅτι ἡ ΑΝ μέσης¹⁷ ἀποτομὴ ἔστι πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ ῥητὸν ἔστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΜΝ, τουτίστι¹⁸ τῷ ΑΞ· ῥητὸν ἄρα ἔστι¹⁹ τὸ ΑΞ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ. Μείσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὥς δὲ²⁰ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἔστιν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΑΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσai ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομὴ ἔστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἔστι πρώτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 14.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἔστι δεύτερα.

ΑΒ sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de ΑΝ ; le carré de ΑΝ est donc égal à la surface ΑΒ ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ est un premier apotome d'une médiale. Car, puisque le parallélogramme ΕΚ est rationel et égal à ΜΝ, c'est-à-dire à ΑΞ, le parallélogramme ΑΞ, c'est-à-dire le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ, sera rationel. Mais on a démontré que ΝΞ est médial ; le parallélogramme ΑΞ est donc incommensurable avec ΝΞ ; mais ΑΞ est à ΝΞ comme ΑΟ est à ΟΝ (1.6) ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc incommensurables en longueur ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle ; la droite ΑΝ est donc un premier apotome d'une médiale (75. 10), et elle peut la surface ΑΒ ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un premier apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCIV.

Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

quadrato ex ΑΝ ; quadratum igitur ex ΑΝ æquale est spatio ΑΒ ; ergo ΑΝ potest spatium ΑΒ. Dico et ΑΝ mediæ apotomen esse primam. Quoniam enim rationale est ΕΚ, atque est æquale ipsi ΜΝ, hoc est ipsi ΑΞ ; rationale igitur est ΑΞ, hoc est rectangulum sub ΑΟ, ΟΝ. Medium autem ostensum est ΝΞ ; incommensurable igitur est ΑΞ ipsi ΝΞ ; ut verò ΑΞ ad ΝΞ ita est ΑΟ ad ΟΝ ; ipsæ ΑΟ, ΟΝ igitur incommensurabiles sunt longitudine ; ipsæ igitur ΑΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes ; ergo ΑΝ mediæ apotome est prima, et potest spatium ΑΒ ; recta igitur spatium ΑΒ potens mediæ apotome est prima. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XCIV.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

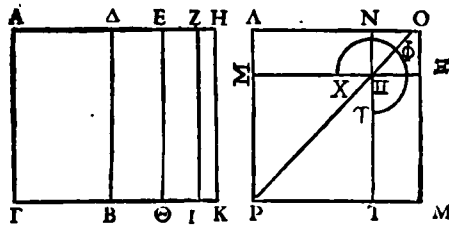
346 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Χωρίον γάρ τὸ AB περιχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μίσης ἀποτομῆς ἴσσι διυτέρα.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμοζούσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζον δύναται

Spatium enim AB contineatur sub rationali AB et apotome tertiâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, mediæ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AD congruens DH; ipsæ AH, HD igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum AH, HD commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG, tota autem AH quam congruens DH plus



τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἴαν ἄρα τῇ τετάρτῃ μίρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελίῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβλήσθω

potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quoniam igitur AH quam DH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex DH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur DH bifariam in E, et quadrato ex EH æquale

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un troisième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est un second apotome d'une médiale.

Car que DH convienne avec AD; les droites AH, HD seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune des droites AH, HD ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente DH du carré d'une droite commensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 3. 10). Et puisque la puissance de AH surpassera la puissance de DH du carré d'une droite commensurable avec AH, si nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de DH, soit délaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera AH en parties commensurables (18. 10). Coupons DH en deux parties égales au point E, et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant

ἑλλείπον ἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ AZ, ZH· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ AZ, ZH σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH ρητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει². Ρητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ AZ σύμμετρός ἐστι μήκει,

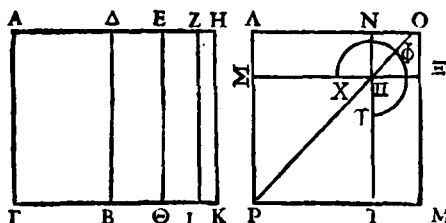
ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH. Et ducantur per puncta E, Z, H ipsi ΑΓ parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ; commensurabiles igitur sunt AZ, ZH; commensurable igitur et AI ipsi ΖΚ. Et quoniam AZ, ZH commensurabiles sunt longitudine, et AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem AH et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH rationalis est et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utrumque igitur ipsorum AI, ΖΚ medium est. Rursus, quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔΗ et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Et quoniam ΑΗ, ΗΔ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΗ ipsi ΔΗ. Sed quidem ΑΗ ipsi AZ commen-

égal au carré de ΕΗ, soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous AZ, ZH. Par les points E, Z, H menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ; les droites AZ, ZH seront commensurables; le parallélogramme AI sera donc commensurable avec ΖΚ. Et puisque les droites AZ, ZH sont commensurables en longueur, la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais ΑΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites AZ, ZH est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes AI, ΖΚ est donc médial (22. 10). De plus, puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ; la droite ΔΗ sera commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΔ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en longueur avec ΔΗ. Mais ΑΗ est commensurable en longueur

348 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

η δὲ ΔH τῇ HE ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ EH μήκει. Ὡς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI τῷ EK ³. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρέσθω τὸ NΞ , περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἐν τῷ AM περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ AM , NΞ .

surabilis est longitudine, ipsa verò ΔH ipsi HE ; incommensurabilis igitur est AZ ipsi EH longitudine. Ut autem AZ ad EH ita est AI ad EK ; incommensurable igitur est AI ipsi EK . Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM , ipsi verò ZK æquale auferatur NΞ , eundem angulum habens cum ipso AM ; ergo circa eandem dia-



Εστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὲρ τῶν AZ , ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ τὸ EK πρὸς τὸ ZK καὶ ὡς ἄρα τὸ AI πρὸς τὸ EK οὕτως τὸ EK πρὸς τὸ ZK ⁵. τῶν ἄρα AI , ZK μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK . Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν AM , NΞ τετραγώνων μίσην ἀνάλογον τὸ MN , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ

metrum sunt quadrata AM , NΞ . Sit ipsorum diameter OP , et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub AZ , ZH æquale est quadrato ex EH , est igitur ut AZ ad EH ita EH ad ZH . Sed ut quidem AZ ad EH ita est AI ad EK , ut verò EH ad ZH ita est EK ad ZK ; et ut igitur AI ad EK ita EK ad ZK ; ipsorum igitur AI , ZK medium proportionale est EK . Est autem et quadratorum AM , NΞ medium proportionale MN , et est æquale quidem AI ipsi AM ,

avec AZ , et ΔH avec HE ; la droite AZ est donc incommensurable en longueur avec EH (13. 10). Mais AZ est à EH comme le parallélogramme AI est au parallélogramme EK (1. 6); le parallélogramme AI est donc incommensurable avec le parallélogramme EK . Faisons le quarré AM égal à AI (14. 2), et retranchons de AM le quarré NΞ égal à ZK , ce quarré étant dans le même angle que AM , les quarrés AM , NΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP , et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ , ZH est égal au quarré de EH ; la droite AZ sera à EH comme EH est à ZH (17. 6). Mais AZ est à EH comme AI est à EK (1. 6), et EH est à ZH comme EK est à ZK ; le parallélogramme AI est donc à EK comme EK est à ZK ; le parallélogramme EK est donc moyen proportionnel entre AI et ZK . Puisque MN est moyen proportionnel entre les quarrés AM , NΞ , que le parallélogramme AI est égal

ΖΚ τῷ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτίστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἢ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ διυτέρα. Ἐπεὶ γὰρ μίσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἴστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· μέση ἄρα ἑκάτερα τῶν ΑΟ, ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρον ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΜ τῷ ΜΝ, τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΑΟ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν

ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ, et ΕΚ igitur æquale est ipsi ΜΝ. Sed quidem ΜΝ æquale est ipsi ΑΞ, ipsum verò ΕΚ æquale est ipsi ΔΘ; et totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ; est autem et ΑΚ æquale ipsis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est ex ΑΝ quadrato; ergo ΑΝ potest spatium ΑΒ. Dico ΑΝ mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim mediæ ostensa sunt ΑΙ, ΖΚ, et sunt æqualia quadratis ex ΑΟ, ΟΝ; medium igitur et utrumque ex ΑΟ, ΟΝ quadratorum; mediæ igitur utraque ipsarum ΑΟ, ΟΝ. Et quoniam commensurable est ΑΙ ipsi ΖΚ, commensurable igitur et ex ΑΟ quadratum quadrato ex ΟΝ. Rursus, quoniam incommensurable demonstratum est ΑΙ ipsi ΕΚ, incommensurable igitur est et ΑΜ ipsi ΜΝ, hoc est quadratum ex ΑΟ rectangulo sub ΑΟ, ΟΝ; quare et ΑΟ incommensurabilis est longitudine ipsi ΟΝ; ipsæ ΑΟ, ΟΝ igitur mediæ sunt potentia solum commensurabiles. Dico et medium eas continere. Quoniam enim medium ostensum est ΕΚ, atque est æquale rectangulo sub ΑΟ, ΟΝ;

à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ, le parallélogramme ΕΚ sera égal à ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΑΞ (43. 1), et ΕΚ égal à ΔΘ (37. 1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais ΑΚ est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc égal à ΣΤ, c'est-à-dire au quarré de ΑΝ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis que ΑΝ est un second apotome d'une médiale. Car puisqu'on a démontré que les surfaces ΑΙ, ΖΚ sont médiales, et qu'elles sont égales aux quarrés des droites ΑΟ, ΟΝ, chacun des quarrés des droites ΑΟ, ΟΝ sera médial; chacune des droites ΑΟ, ΟΝ est donc médiale. Et puisque ΑΙ est commensurable avec ΖΚ, le quarré de ΑΟ sera commensurable avec le quarré de ΟΝ. De plus, puisqu'on a démontré que ΑΙ est incommensurable avec ΕΚ, le quarré ΑΜ sera incommensurable avec ΜΝ, c'est-à-dire le quarré de ΑΟ avec le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ; la droite ΑΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ; les droites ΑΟ, ΟΝ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis que ces droites comprennent une surface médiale. Car puisqu'on a démontré que ΕΚ est médial, et qu'il est égal au rectangle sous ΑΟ, ΟΝ, le rectangle sous ΑΟ, ΟΝ

350 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΛΟ, ΟΝ⁸. μίσην ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε⁹ αἱ ΛΟ, ΟΝ μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι μίσην περιέχουσιν· ἡ ΑΝ ἄρα μίσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον¹⁰. ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μίσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

medium igitur est et rectangulum sub ΛΟ, ΟΝ; quare ΛΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ergo ΑΝ mediæ apotome est secunda, et potest spatium ΑΒ; recta igitur spatium ΑΒ potens mediæ apotome est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί.

Χωρίον γάρ τὸ ΑΒ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ

PROPOSITIO XCV.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome quartâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΒ potest, minorem esse.

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quo-

sera médial; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface médiale; la droite ΑΝ est donc un second apotome d'une médiale (76. 10), et elle peut la surface ΑΒ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un second apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCV.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

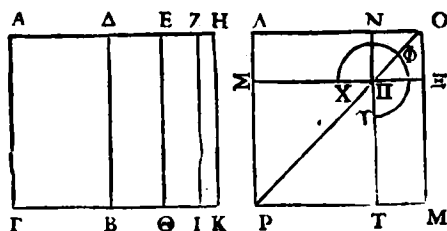
Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un quatrième apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est une mineure.

Car que ΔΗ convienne à ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du quarré d'une droite incommensurable en longueur

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 351

τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἂν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρά τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρά τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ

niam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ;



μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ³. Ηχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν

incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΖ ipsi ΖΗ. Ducantur igitur per puncta Ε, Ζ, Η parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ ipsis ΑΓ, ΒΔ. Quoniam igitur rationalis est ΑΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationale igitur est totum ΑΚ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΔΗ ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est ΔΚ. Rursus, quoniam incom-

avec ΑΗ (déf. trois. 4. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales en Ε; appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit défailant d'une figure quarrée; que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles aux droites ΑΓ, ΒΔ. Puisque ΑΗ est rationnelle et commensurable en longueur avec ΑΓ, le parallélogramme entier ΑΚ sera rationel (20. 10). De plus, puisque ΔΗ est incommensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationnelles l'une et l'autre, le parallélogramme ΔΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque ΑΖ est

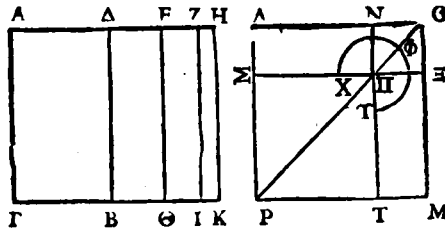
ἡ AZ τῇ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK . Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρήσθω τὸ NE , περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ἐν τῷ AM , τὴν ὑπὸ $ΛΟΜ$ ⁴. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι⁵ τὰ AM , NE τετράγωνα. Εἰσὼ αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς EH , ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν⁶ EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν HZ . Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἔστι τὸ AI πρὸς τὸ EK , ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH οὕτως ἔστι⁷ τὸ EK πρὸς τὸ ZK . τῶν ἄρα AI , ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK . Ἔστι δὲ καὶ τῶν AM , NE τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ AM , τὸ δὲ ZK τῷ NE . καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἔστι τῷ MN . Ἀλλὰ τῷ⁸ μὲν EK ἴσον ἔστι τὸ⁹ $ΔΘ$, τὸ δὲ MN ἴσον ἔστι τῷ $ΛΞ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΔΚ$ ἴσον ἔστι τῷ $ΥΦΧ$ γνώμονι καὶ τῷ NE . Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἔστι τοῖς AM , NE τετραγώνοις, ὧν τὸ $ΔΚ$ ἴσον ἔστι τῷ $ΥΦΧ$ γνώμονι καὶ τῷ NE τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἔστι τῷ $ΣΤ$,

mensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine, incommensurable igitur et AI ipsi ZK . Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM , ipsi verò ZK æquale auferatur NE , eundem habens angulum $ΛΟΜ$ cum ipso AM ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata AM , NE . Sit ipsorum diameter OP , et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub AZ , ZH æquale est quadrato ex EH , proportionale igitur est ut AZ ad EH ita EH ad HZ . Sed ut quidem AZ ad EH ita est AI ad EK , ut verò EH ad ZH ita est EK ad ZK ; ipsorum igitur AI , ZK medium proportionale est EK . Est autem et quadratorum AM , NE medium proportionale MN , et est æquale quidem AI ipsi AM , et ZK ipsi NE ; et EK igitur æquale est ipsi MN . Sed ipsi quidem EK æquale est $ΔΘ$, et MN æquale est ipsi $ΛΞ$; totum igitur $ΔΚ$ æquale est gnomoni $ΥΦΧ$ et ipsi NE . Quoniam igitur totum AK æquale est quadratis AM , NE , quorum AK æquale est gnomoni $ΥΦΧ$ et quadrato NE ; reliquum igitur AB æquale est ipsi $ΣΤ$,

incommensurable en longueur avec ZH , le parallélogramme AI sera incommensurable avec ZK (1. 6). Faisons le carré AM égal à AI , et retranchons de AM un carré NE égal à ZK , ce carré étant autour d'un même angle $ΛΟΜ$ que le carré AM ; les carrés AM , NE seront autour de la même diagonale (26. 6). Que OP soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ , ZH est égal au carré de EH , la droite AZ sera à EH comme EH est à HZ (17. 6). Mais AZ est à EH comme AI est à EK , et EH est à ZH comme EK est à ZK (1. 6); le parallélogramme EK est donc moyen proportionnel entre AI et ZK . Et puisque MN est moyen proportionnel entre les carrés AM , NE , que le parallélogramme AI est égal à AM , et ZK égal à NE , le parallélogramme EK sera égal à MN . Mais $ΔΘ$ est égal à EK (37. 1), et MN égal à $ΛΞ$ (43. 1); le parallélogramme entier $ΔΚ$ est donc égal au gnomon $ΥΦΧ$, conjointement avec NE . Et puisque le parallélogramme entier AK est égal à la somme des carrés AM , NE , et que $ΔΚ$ est égal au gnomon $ΥΦΧ$, conjointement avec le carré NE , le parallélogramme restant AB sera égal à $ΣΤ$, c'est-à-dire au carré de

τουτέστι τῇ ἀπὸ τῆς ΛN τετραγώνῳ· ἡ ΛN ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον. Λέγω δὴ¹⁰ ὅτι ἡ ΛN ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΔK , καὶ ἴστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO , ON τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO , ON ῥητόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔK μέσον ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ ΔK τῇ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON · τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν

hoc est ex ΛN quadrato; ergo ΛN potest spatium AB . Dico et ΛN irrationalem esse quæ appellatur minor. Quoniam enim rationale est ΔK , et est æquale quadratis ex ΛO , ON ; compositum igitur ex quadratis ipsarum ΛO , ON rationale est. Rursus, quoniam ΔK medium est, et est æquale ΔK rectangulo bis sub ΛO , ON ; rectan-



ΛO , ON μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ AI τῇ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τετραγώνον τῇ ἀπὸ τῆς ON τετραγώνῳ¹¹. αἱ ΛO , ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΛN ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἢ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμὴν ἐλάσσων ἐστίν. Ὅπρι εἶδει εἰδείξαι.

tangulum igitur bis sub ΛO , ON medium est. Et quoniam incommensurable demonstratum est AI ipsi ZK , incommensurable igitur et ex ΛO quadratum quadrato ex ON ; ipsæ ΛO , ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; ergo ΛN irrationalis est, quæ appellatur minor, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens minor est. Quod oportebat ostendere.

ΛN ; la droite ΛN peut donc la surface AB . Or, je dis que ΛN est l'irrationnelle qu'on nomme mineure. Car, puisque le parallélogramme ΔK est rationel, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites ΛO , ON , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera rationelle. De plus, puisque ΔK est médial, et qu'il est égal au double rectangle compris sous ΛO , ON , le double rectangle sous ΛO , ON sera médial. Et puisque on a démontré que AI est incommensurable avec ZK , le quarré de ΛO sera incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΛO , ON sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant rationelle la somme de leurs quarrés, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite ΛN est donc l'irrationnelle qu'on appelle mineure (77. 10); mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 45'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ μετὰ τοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AD· λέγω ὅτι ἢ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μέσον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG, ἢ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΔΗ μᾶλλον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον πρὸς τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελίῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον πρὸς τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον

PROPOSITIO XCVI.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AF et apotome quintâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum rationali medium totum facit.

Sit enim ipsi AA congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et congruens ΔΗ commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG, et tota ΑΗ quam congruens ΔΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in puncto E, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ΔΗ applicetur deficiens figurâ qua-

PROPOSITION XCVI.

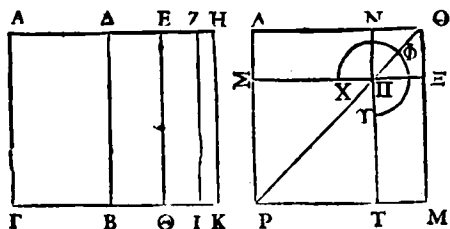
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AR et un cinquième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, que la droite ΔΗ convienne avec AD; les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la congruente ΔΗ sera incommensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΔΗ du quarré d'une droite incommensurable avec la droite entière ΑΗ (déf. trois. 5. 10); si donc nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔΗ en deux parties égales en E, et appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit

εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ'. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· μέσον ἄρα ἴστί τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ρητή ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ρητόν ἐστι

dratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. Et ducantur per Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΗ ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est ΑΚ. Rursus, quoniam rationalis est ΔΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longi-



τὸ ΔΚ. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφαιρέσθω περὶ τὴν αὐτὴν δὲ τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ²· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον³. Λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἡ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον

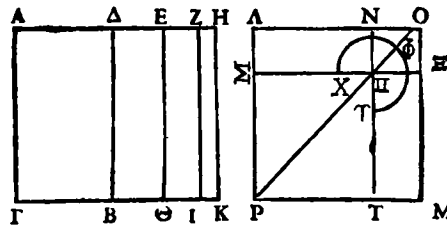
tudine, rationale est ΑΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, eundem habens angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo circa eamdẽ diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Similiter utique demonstrabimus rectam ΑΝ posse spatium ΑΒ. Dico ΑΝ esse eam quæ cum rationali medium totum facit. Quoniam

défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque la droite ΑΗ est incommensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre, le parallélogramme ΑΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque la droite ΔΗ est rationelle, et qu'elle est incommensurable en longueur avec ΑΓ, la surface ΔΚ sera rationelle (20. 10). Faisons le quarré ΑΜ égal à ΑΙ, et retranchons de ΑΜ un quarré ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant autour du même angle ΑΟΜ que ΑΜ; les quarrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diamètre soit ΟΡ, et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière que la droite ΑΝ peut la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ fait avec une surface rationelle un tout médial. Car, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΑΚ est médial, et

356 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἰδείχθη τὸ ΔK , καὶ ἴσιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO , ON · τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO , ON μίσον ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ΔK , καὶ ἴσιν τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON · καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΛO , ON ῥητὸν ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμ-

enim medium ostensum est ΔK , et est æquale quadratis ex ΛO , ON ; compositum igitur ex quadratis ipsarum ΛO , ON medium est. Rursus, quoniam rationale est ΔK , et est æquale rectangulo bis sub ΛO , ON ; et rectangulum bis igitur sub ΛO , ON rationale est. Et quoniam incommensurable est AI ipsi ZK , incom-



μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON · αἱ ΛO , ON ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον· τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛN ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μίσον^δ τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ τὸ AB ἄρα^λ χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἐστίν. Ὅπερ ἴδει διτίζαι.

mensurable igitur est et ex ΛO quadratum quadrato ex ON ; ipsæ ΛO , ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium; rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua igitur ΛN irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum faciens, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

puisque ce parallélogramme est égal à la somme des quarrés des droites ΛO , ON , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera médiale. De plus, puisque le parallélogramme ΔK est rationel, et qu'il est égal au double rectangle sous ΛO , ON , le double rectangle sous ΛO , ON sera rationel. Mais le parallélogramme AI est incommensurable avec ZK ; le quarré de ΛO est donc incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΛO , ON sont donc incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites étant rationel; la droite restante ΛN est donc l'irrationnelle qui est dite pouvant avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς τῆς AD· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδενίᾳ αὐτῶν· σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει· εἰ ἄρα τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παρακληθῇ· ἡλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελίῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ

PROPOSITIO XCVII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AG et apotome sextâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum medio medium totum facit.

Sit enim ipsi AD congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali AG longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΔΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quoniam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti ex ΔΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur

PROPOSITION XCVII.

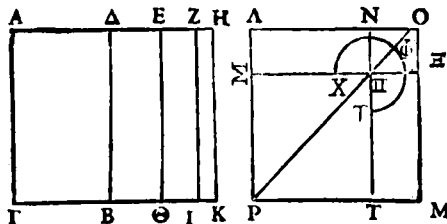
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un sixième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que ΔΗ convienne avec AD, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune de ces droites ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΔΗ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ (déf. trois. 6. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpassera la puissance de ΗΔ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si on applique à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔΗ en deux parties

τὸ E^3 , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδος τετραγώνου, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH ἀσύμμετρος ἄρα ἴσθιν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. Ὡς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἴσθι τὸ AI πρὸς τὸ ZK ἀσύμμετρον ἄρα ἴσθι τὸ AI τῷ ZK . Καὶ ἐπεὶ αἱ AH , AG ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἴσθι τὸ AK . Πάλιν, ἐπεὶ αἱ AG , AH ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἴσθι

igitur AH bifariam in E , et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ , ZH ; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudine. Ut autem AZ ad ZH ita est AI ad ZK ; incommensurable igitur est AI ipsi ZK . Et quoniam AH , AG rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium est AK . Rursus, quoniam AG , AH rationales sunt et incommensu-



καὶ τὸ ΔK^4 . Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HA δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἴσθιν ἡ AH τῇ HA μήκει. Ὡς δὲ ἡ AH πρὸς τὴν HA οὕτως ἴσθι τὸ AK πρὸς τὸ $K\Delta$ ἀσύμμετρον ἄρα ἴσθι τὸ AK τῷ $K\Delta$. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετραγώνον τὸ AM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφ-

rabiles longitudine, medium est et ΔK . Quoniam igitur AH , HA potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AH ipsi HA longitudine. Ut autem AH ad HA ita est AK ad $K\Delta$; incommensurable igitur est AK ipsi $K\Delta$. Constitutur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM , ipsi verò ZK æquale auferatur NZ ,

égales en E , et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au carré de AH , soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le rectangle sous AZ , ZH ; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZH . Mais AZ est à ZH comme AI est à ZK (1. 6); le parallélogramme AI est donc incommensurable avec ZK (10. 10). Et puisque les droites AH , AG sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le parallélogramme AK sera médial (22. 10). De plus, puisque les droites AG , AH sont rationnelles, et incommensurables en longueur, le parallélogramme ΔK sera médial. Puisque les droites AH , HA sont commensurables en puissance seulement, la droite AH sera incommensurable en longueur avec HA . Mais AH est à HA comme AK est à $K\Delta$ (1. 6); le parallélogramme AK est donc incommensurable avec $K\Delta$ (10. 10). Faisons le carré AM égal à AI (14. 2), et retranchons de AM un carré NZ égal à ZK , ce carré

ρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ ΛM γωνίᾳ τὸ $\text{N}\Xi^5$.
 περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὰ ΛM , $\text{N}\Xi$
 τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ
 καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὲ τοῖς ἑπάνω
 δείξομεν ὅτι ἡ ΛN δύναται τὸ AB χωρίον. Λέγω
 ὅτι ἡ ΛN ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά
 ἔστιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον εἰδείχθη τὸ AK , καὶ ἔστιν
 ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO , ON . τὸ ἄρα συγκεί-
 μινον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO , ON μέσον ἔστί.
 Πάλιν, ἐπεὶ μέσον εἰδείχθη τὸ ΔK , καὶ ἔστιν
 ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON . καὶ τὸ δις
 ἄρα⁸ ὑπὸ τῶν ΛO , ON μέσον ἔστί. Καὶ ἐπεὶ
 ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ AK τῷ ΔK , ἀσύμμετρα
 ἄρα ἔστι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛO , ON τετράγωνα
 τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON . Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμε-
 τρον ἔστι τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON . αἱ ΛO , ON
 ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ, τε
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐτῶν τετραγώνων μέσον,
 καὶ τὸ δις ὑπὸ αὐτῶν μέσον, ἴτι τε τὰ ἀπὸ
 αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ αὐτῶν.

eumdem angulum habens cum ipso ΛM ; ergo
 circa eandem diametrum sunt quadrata ΛM ,
 $\text{N}\Xi$. Sit ipsorum diameter OP , et describatur
 figura. Congruenter utique præcedentibus osten-
 demus rectam ΛN posse spatium AB . Dico ΛN esse
 eam quæ cum medio medium totum facit. Quo-
 niam enim medium ostensum est AK , atque est
 æquale quadratis ex ΛO , ON ; compositum igitur
 ex quadratis ipsarum ΛO , ON medium est.
 Rursus, quoniam medium ostensum est ΔK , et
 est æquale rectangulo bis sub ΛO , ON ; et rec-
 tangulum bis igitur sub ΛO , ON medium est.
 Et quoniam incommensurable ostensum est AK
 ipsi ΔK , incommensurabilia igitur sunt et ex
 ΛO , ON quadrata rectangulo bis sub ΛO , ON .
 Et quoniam incommensurable est AI ipsi ZK ,
 incommensurable igitur et ex ΛO quadratum
 quadrato ex ON ; ipsæ ΛO , ON igitur potentiâ
 sunt incommensurabiles, facientes et compo-
 situm ex ipsarum quadratis medium, et rectan-
 gulum bis sub ipsis medium, et adhuc ipsarum
 quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub

étant autour du même angle que ΛM ; les quarrés ΛM , $\text{N}\Xi$ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP , et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que la droite ΛN peut la surface AB . Je dis que la droite ΛN est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Car, puisque nous avons démontré que le parallélogramme AK est médial, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites ΛO , ON , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera médiale. De plus, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΔK est médial, et puisqu'il est égal au double rectangle sous ΛO , ON , le double rectangle sous ΛO , ON sera médial. Et puisqu'on a démontré que AK est incommensurable avec ΔK , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera incommensurable avec le double rectangle sous ΛO , ON . Et puisque AI est incommensurable avec ZK , le quarré de ΛO sera incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΛO , ON sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le

360 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἄρα ΛN ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ $\text{AB}\Theta$ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν. Ὅπρι ἴδι διῆξαι.

ipsis; ergo ΛN irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum faciens, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens est quæ cum medio medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 44.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλέ-
μινος πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομή ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβε-
βλήσθω τὸ ΓE , πλάτος ποιεῖν τὴν ΓZ . λέγω ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-
τροι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH τὸ KL . ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ

PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum ex apotome ad rationalem appli-
catum latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome AB , rationalis autem $\Gamma\Delta$, et quadrato ex AB æquale ad ipsam $\Gamma\Delta$ appli-
cetur ΓE , latitudinem faciens ΓZ ; dico ΓZ apo-
tomen esse primam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB rationales sunt potentiâ solùm commen-
surabiles. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $\Gamma\Delta$ applicetur $\Gamma\Theta$, quadrato autem ex BH ipsum KL , totum igitur $\Gamma\Lambda$ æquale est qua-

double rectangle sous ces mêmes droites; la droite ΛN est donc l'irrationnelle appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (79. 10); mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCVIII.

Le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome.

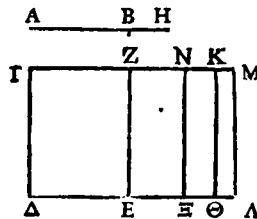
Soit l'apotome AB , et la rationnelle $\Gamma\Delta$; appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme ΓE égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΓZ pour largeur; je dis que ΓZ est un premier apotome.

Car que BH convienne avec AB , les droites AH , HB seront des rationnelles com-
mensurables en puissance seulement (74. 10). Appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallé-
gramme $\Gamma\Theta$ égal au carré de AH , et un parallélogramme KL égal au carré
de BH (45. 1); le parallélogramme entier $\Gamma\Lambda$ sera égal à la somme des carrés

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 361

τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ὡν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ὅρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἄχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἴστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ

dratis ex ΑΗ, ΗΒ. Quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΔ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΑΝ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt, atque est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale ΔΜ; rationale igitur



ΔΜ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτεις ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μείσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴστι² τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΑΖ· μείσον ἄρα τὸ ΑΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτεις ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν³ ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν

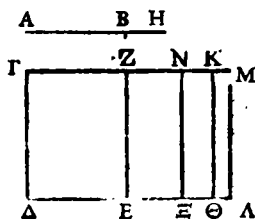
est ΔΜ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ, et est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΑΖ; medium igitur ΑΖ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata quidem ex ΑΗ,

des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais ΓΕ est égal au carré de ΑΒ; le parallélogramme restant ΖΔ est donc égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΑΝ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sont rationels, et que ΔΜ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΔΜ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, et que le parallélogramme ΑΖ est égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΑΖ sera médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΖΜ, la droite ΖΜ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque

362 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον⁵, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ⁶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀπο-

HB rationalia sunt, rectangulum verò bis sub AH, HB medium, incommensurabilia igitur quadrata ex AH, HB rectangulo bis sub AH, HB. Et quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB ipsum ΖΛ; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solum commensura-



τομή ἐστι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πρώτη. Επὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ⁸· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἴστιν

biles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et primam. Quoniam enim quadratorum ex AH, HB medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ; quadrato verò ex BH æquale ΚΛ, quadrato autem ex AH, HB ipsum ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est

les quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ sont rationels, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et ΖΛ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un premier apotome. Car, puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. 10), que ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au quarré de ΒΗ, et que ΝΛ est égal au quarré de ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre les parallélogrammes ΓΘ, ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ

ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν⁹ ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ¹⁰. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι¹¹ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἰλλεῖπον εἶδος τετραγώνου τὸ¹² ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἴστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur ut $\Gamma\Theta$ ad NA ita NA ad KL . Sed ut quidem $\Gamma\Theta$ ad NA ita est $ΓΚ$ ad NM ; ut verò NA ad KL ita est NM ad KM ; ut igitur $ΓΚ$ ad NM ita est NM ad KM ; rectangulum igitur sub $ΓΚ$, KM æquale est quadrato ex MN , hoc est quartæ parti quadrati ex ZM . Et quoniam commensurable est ex AH quadratum quadrato ex HB , commensurable est et $\Gamma\Theta$ ipsi KL . Ut autem $\Gamma\Theta$ ad KL ita $ΓΚ$ ad KM ; commensurabilis igitur est $ΓΚ$ ipsi KM . Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt $ΓΜ$, $MΖ$, et quartæ parti quadrati ex ZM æquale ad $ΓΜ$ applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub $ΓΚ$, KM , et est commensurabilis $ΓΚ$ ipsi KM ; ergo $ΓΜ$ quam $MΖ$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est $ΓΜ$ commensurabilis expositæ rationali $ΓΔ$ longitudine; ergo $ΓΖ$ apotome est prima.

Quadratum igitur, etc.

comme NA est à KL . Mais $\Gamma\Theta$ est à NA comme $ΓΚ$ est à NM , et NA est à KL comme NM est à KM ; la droite $ΓΚ$ est donc à NM comme NM est à KM ; le rectangle sous $ΓΚ$, KM est donc égal au quarré de MN , c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ZM (17. 6). Et puisque le quarré de AH est commensurable avec le quarré de HB , le parallélogramme $\Gamma\Theta$ sera commensurable avec KL . Mais $\Gamma\Theta$ est à KL comme $ΓΚ$ est à KM ; la droite $ΓΚ$ est donc commensurable avec KM (10. 10). Et puisque les deux droites $ΓΜ$, $MΖ$ sont inégales, qu'on a appliqué à $ΓΜ$ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ZM , est défailant d'une figure quarrée, que ce parallélogramme est celui qui est compris sous $ΓΚ$, KM , et que $ΓΚ$ est commensurable avec KM , la puissance de $ΓΜ$ surpassera la puissance de $MΖ$ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec $ΓΜ$ (18. 10). Mais $ΓΜ$ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée $ΓΔ$; la droite $ΓΖ$ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Le quarré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Ἐστω μέσης ἀποτομῆς πρώτη ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ ΓA , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβιβλήσθω τὸ ΓE , πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομὴ ἐστὶ δευτέρα.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμοζούσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβιβλήσθω τὸ $\Gamma \Theta$, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $K\Lambda$, πλάτος ποιοῦν τὴν KM . ὅλον ἄρα τὸ ΓA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB μέσοις οὖσι¹. μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓA . Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓA παραβιβλήσθω, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. Καὶ ἐπὶ τὸ ΓA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῷ

PROPOSITIO XCIX.

Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima AB , rationalis autem ΓA , et quadrato ex AB æquale ad ΓA applicetur ΓE , latitudinem faciens ΓZ ; dico ΓZ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓA applicetur $\Gamma \Theta$, latitudinem faciens ΓK , quadrato verò ex HB æquale $K\Lambda$, latitudinem faciens KM ; totum igitur ΓA æquale est quadratis ex AH , HB quæ media sunt; medium igitur et ΓA . Et ad rationalem ΓA applicatur, latitudinem faciens ΓM ; rationalis igitur est ΓM , et incommensurabilis ipsi ΓA longitudine. Et quoniam ΓA æquale est quadratis ex AH , HB , quorum quadratum ex AB

PROPOSITION XCIX.

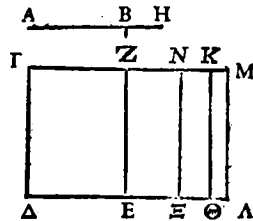
Le carré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second apotome.

Soient un premier apotome d'une médiale AB , et la rationnelle ΓA ; appliquons à ΓA un parallélogramme ΓE , qui étant égal au carré de AB , ait pour largeur la droite ΓZ ; je dis que ΓZ est un second apotome.

Car que BH convienne avec AB , les droites AH , HB seront des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprendront une surface rationnelle (75. 10). Appliquons à ΓA un parallélogramme $\Gamma \Theta$, qui étant égal au carré de AH , ait la droite ΓK pour largeur; appliquons aussi à ΓA un parallélogramme $K\Lambda$, qui étant égal au carré de HB , ait KM pour largeur (45. 1); le parallélogramme entier ΓA sera égal à la somme des carrés des droites AH , HB , ces carrés étant médiaux; le parallélogramme ΓA sera donc médial. Mais il est appliqué à ΓA , et il a ΓM pour largeur; la droite ΓM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΓA (23. 10). Et puisque ΓA est égal à la somme des carrés des droites AH , HB , et que

ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΑ. Ρητὸν δὲ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ρητὸν ἄρα τὸ ΖΑ, καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΑ, μείζον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ,

æquale est ipsi ΓΕ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ipsi ΖΑ. Rationale autem est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ; rationale igitur ΖΑ, et ad rationalem ΖΕ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quoniam igitur quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΓΑ, medium est; rectangulum verò bis



τουτέστι τὸ ΖΑ, ρητὸν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐπὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ρηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον

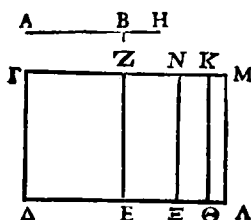
sub ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΖΑ, rationale; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et secundam. Secetur enim ΖΜ bifariam in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ

Le carré de AB est égal à ΓΕ, le double rectangle restant compris sous ΑΗ, ΗΒ sera égal à ΖΑ (7. 2). Mais le double rectangle compris sous ΑΗ, ΗΒ est rationel; le parallélogramme ΖΑ est donc rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a pour largeur ΖΜ; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire le parallélogramme ΓΑ, est médiale, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire ΖΑ, est rationel; le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Or, je dis que cette droite est un second apotome. Car coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ,

366 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴσιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς

æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadratum quidem ex ΑΗ ipsi ΓΘ, rectangulum verò sub ΑΗ, ΗΒ ipsi ΝΛ, quadratum autem ex ΗΒ ipsi ΚΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum



τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ⁶. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον

igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam commensurable est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, commensurable est et ΓΘ ipsi ΚΛ, hoc est ΓΚ ipsi ΚΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti

ΝΛ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, que le carré de ΑΗ est égal à ΓΘ, que le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est égal à ΝΛ, et que le carré de ΒΗ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais le parallélogramme ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ (17. 6). Et puisque le carré de ΑΗ est commensurable avec le carré de ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ, c'est-à-dire ΓΚ avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, et que l'on a appliqué à la plus grande ΓΜ un parallélogramme compris sous ΓΚ, ΚΜ, qui étant égal à la quatrième partie du carré

παρὰ τὴν μίζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ.

Τὸ ἀπὸ μίσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἐστω μίση ἀποτομή δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Ἐστω γάρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέτον περιέχουσai. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΘ

quadrati ex MZ æquale ad maiorem ΓM applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub ΓK , $K M$, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓM quam MZ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens ZM commensurabilis longitudine expositæ rationali $\Gamma \Delta$; ergo ΓZ apotome est secunda.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO C.

Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit media apotome secunda AB , rationalis autem $\Gamma \Delta$, et quadrato ex AB æquale ad $\Gamma \Delta$ applicetur ΓE , latitudinem faciens ΓZ ; dico ΓZ apotomen esse tertiam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $\Gamma \Delta$ applicetur $\Gamma \Theta$

de MZ , est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓM en parties commensurables, la puissance de ΓM surpassera la puissance de MZ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓM (18. 10). Mais la congruente ZM est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée $\Gamma \Delta$; la droite ΓZ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION C.

Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

Soient un second apotome médial AB , et une rationnelle $\Gamma \Delta$; appliquons à $\Gamma \Delta$ un parallélogramme ΓE , qui étant égal au quarré de AB , ait pour largeur la droite ΓZ ; je dis que ΓZ est un troisième apotome.

Que BH conviène avec AB ; les droites AH , HB seront des médiales, qui étant incommensurables en puissance seulement, comprendront une surface médiale (76. 10). Appliquons à $\Gamma \Delta$ un parallélogramme $\Gamma \Theta$, qui étant égal au quarré

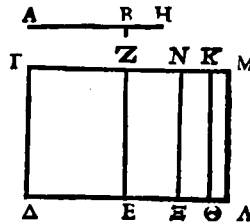
πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβέβλησθαι τὸ ΚΑ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἴστι μίσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μίσον ἄρα καὶ τὸ ΓΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ᾗ ΖΒ ἡ ΝΕ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Μίσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μίσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα

latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex ΒΗ æquale ad ΚΘ applicetur ΚΑ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. Et sunt media quadrata ex ΑΗ, ΗΒ; medium igitur et ΓΑ, et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Et quoniam totum ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ; utrumquæ igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Medium autem rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ; medium igitur est et ΖΑ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ solum sunt commensurabiles, incommensurabilis igitur est longi-

de ΑΗ, ait pour largeur la droite ΓΚ; appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΑ, qui étant égal au carré de ΒΗ, ait pour largeur la droite ΚΜ (45. 1); le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est médiale; le parallélogramme ΓΑ est donc médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que le parallélogramme ΓΕ est égal au carré de ΑΒ, le parallélogramme restant ΖΑ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial; le parallélogramme ΖΑ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en

ἴστί μήκει ἢ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ σύμμετρόν ἴστί· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ². Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἴστί τὸ ΓΑ, τῷ δὲ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἴστί τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα

tudine ipsa AH ipsi HB; incommensurable igitur est et ex AH quadratum rectangulo sub AH, HB. Sed quadrato quidem ex AH commensurabilia sunt quadrata ex AH, HB, rectangulo verò sub AH, HB commensurable est rectangulum bis sub AH, HB; incommensurabilia igitur sunt ex AH, HB quadrata rectangulo bis sub AH, HB. Sed quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΑ, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale



ἴστί τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἴστί ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἴστί ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΖΜ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἴστί ἡ ΓΖ. Λίγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-

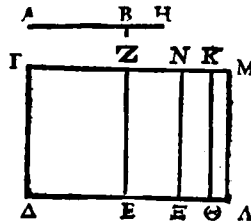
est ΖΑ; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΖΜ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et tertiam. Quoniam enim commensurable est ex

longueur avec HB; le carré de AH est donc incommensurable avec le rectangle sous AH, HB (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de AH et de HB est commensurable avec le carré de AH, et le double rectangle sous AH, HB commensurable avec le rectangle sous AH, HB; la somme des carrés de AH et de HB est donc incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB. Mais le parallélogramme ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites AH, HB, et le parallélogramme ΖΑ égal au double rectangle sous AH, HB; le parallélogramme ΓΑ est donc incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ; la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un troisième apotome. Car puisque

370 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρών ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ³ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσην ἀνάλογόν ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μίσην ἀνάλογόν ἔστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ.

AH quadratum quadrato ex HB, commensurable igitur et ΓΘ ipsi ΚΛ; quare et ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad



ΑΛΛ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἔστιν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἔστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὥς ἴ ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἔστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἔστί τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati

le carré de AH est commensurable avec le carré de HB, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ; la droite ΓΚ est donc aussi commensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ (17. 10). Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui

ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδὲτέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μᾶλλον τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρά.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Εστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμύζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ

ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΓΜ, ΜΖ commensurabilis est longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est tertia.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO CI.

Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad rationalem ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quartam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΗ,

étant égal à la quatrième partie du quarré de ΖΜ, est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties commensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓΜ (18. 10); aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION CI.

Le quarré d'une mineure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

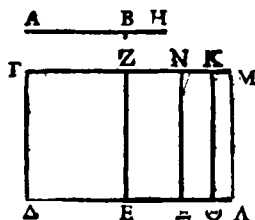
Soient une mineure ΑΒ, et une rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un quatrième apotome.

Car que ΒΗ convienne avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΒ seront incommensurables en puissance; la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera rationelle, et le

372 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον² τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρά-

HB quadratis rationale, rectangulum verò bis sub AH, HB medium. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex BH æquale ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΑ æquale est quadratis ex AH, HB. Atque est compositum ex quadratis ipsarum ΑΗ, ΗΒ rationale; rationale igitur est et ΓΑ, et ad ra-



κεται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν καὶ³ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρῃ τῶν ΓΔ, ΜΑ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν

tionalem ΓΑ applicatur latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur et ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΑ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur et ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν alterutri ipsarum ΓΔ, ΜΑ paral-

double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ sera médial (77. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au carré de ΑΗ, ait ΓΚ pour largeur, et appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au carré de ΒΗ, ait ΚΜ pour largeur (45. 1), le parallélogramme entier ΓΑ sera égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est rationnelle; le parallélogramme ΓΑ est donc rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que ΓΕ est égal au carré de ΑΒ; le parallélogramme restant ΖΑ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle aux droites ΓΔ, ΜΑ; chacun des parallélo-

$Z\Xi$, NA ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μίσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ZA · καὶ τὸ ZA ἄρα μίσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓA μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μίσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Ἰσον δὲ ἐστὶ⁵ τὸ ΓA τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον ἐστὶ⁶ τὸ ZA · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓA τῷ ZA . Ὡς δὲ τὸ ΓA πρὸς τὸ ZA οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM ⁷ πρὸς τὴν ZM · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ ZM μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM , MZ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ . Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ AH , HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB . Καὶ ἔστι τῷ

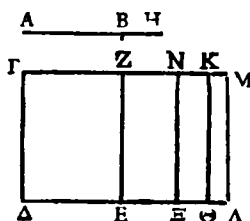
lela $N\Xi$; utrumque igitur ipsorum $Z\Xi$, NA æquale est rectangulo sub AH , HB . Et quoniam rectangulum bis sub AH , HB medium est, et est æquale ipsi ZA ; et ZA igitur medium est, et ad rationalem ZE applicatur latitudinem faciens ZM ; rationalis igitur est ZM , et incommensurabilis ipsi ΓA longitudine. Et quoniam quidem compositum ex quadratis ipsarum AH , HB rationale est, rectangulum verò bis sub AH , HB medium, incommensurabilia sunt quadrata ex AH , HB rectangulo bis sub AH , HB . Æquale autem est ΓA quadratis ex AH , HB , rectangulo verò bis sub AH , HB æquale est ZA ; incommensurable igitur est ΓA ipsi ZA . Ut autem ΓA ad ZA ita est ΓM ad ZM ; incommensurable igitur est ΓM ipsi ZM longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓM , MZ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓZ . Dico et quartam. Quoniam enim AH , HB potentiâ sunt incommensurabiles; incommensurable igitur et ex AH quadratum quadrato ex HB . Atque est quadrato quidem

grammes $Z\Xi$, NA sera égal au rectangle sous AH , HB . Et puisque le double rectangle sous AH , HB est médial et égal à ZA , le parallélogramme ZA sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ZE , et il a ZM pour largeur; la droite ZM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓA (23. 10). Et puisque la somme des carrés des droites AH , HB est rationelle, et que le double rectangle sous AH , HB est médial, la somme des carrés des droites AH , HB sera incommensurable avec le double rectangle sous AH , HB . Mais le parallélogramme ΓA est égal à la somme des carrés des droites AH , HB , et ZA égal au double rectangle sous AH , HB ; le parallélogramme ΓA est donc incommensurable avec ZA . Mais ΓA est à ZA comme ΓM est à ZM (1. 6); la droite ΓM est donc incommensurable en longueur avec la droite ZM (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓM , MZ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓZ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un quatrième apotome. Car, puisque les droites AH , HB sont incommensurables en puissance, le carré de AH sera incommensurable avec le

374 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπει τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσων ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσων ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ

ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadrato quidem ex ΑΗ ipsum ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ ipsum ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ ipsum ΝΛ; ipsorum igitur ΓΘ, ΚΛ medium proportionale est ΝΛ;



πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ὡς δὲ τὸ ΝΛ⁸ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς

est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad. ΝΜ. Ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ.

quarré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, et ΚΛ égal au quarré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre le quarré de ΑΗ et le quarré de ΗΒ (55. lemm. 10), que le parallélogramme ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, le parallélogramme ΚΛ égal au quarré de ΗΒ, et le parallélogramme ΝΛ égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 375

ZM. Επειδ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἑλλειπὸν ἰῶδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη. Τὸ ἄρα ἀπὸ θ, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΜΖ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est tota ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quarta. Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβελλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιούν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

PROPOSITIO CII.

Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit recta ΑΒ quæ cum rationali medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quintam.

puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΜΖ, est défailant d'une figure carrée, que ce rectangle est celui qui est compris sous ΓΚ, ΚΜ, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΜ (19. 10). Mais la droite entière ΓΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10). Le carré, etc.

PROPOSITION CII.

Le carré d'une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface rationnelle un tout médial, et soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un cinquième apotome.

376 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ τῇ AB προσαρμόζοντα ἡ BH αἱ ἄρα AH , HB εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μείσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβελήσθω τὸ $ΓΘ$. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $ΚΛ$. ἔλον ἄρα τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB . Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB ἅμα μείσον ἐστὶ μείσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΛ$. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$ ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB . λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N , καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΔ$, $ΜΛ$ παράλληλος ἡ $NΞ$ ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΖΞ$, $ΝΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ῥητόν ἐστι, καὶ ἴστιν² ἴσον τῷ

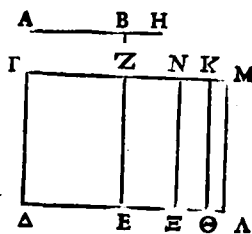
Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΘ$; quadrato verò ex HB æquale $ΚΛ$; totum igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB . Compositum autem ex quadratis ipsarum AH , HB simul medium est; medium igitur est $ΓΛ$. Et ad rationalem $ΓΔ$ applicatur latitudinem faciens $ΓΜ$; rationalis igitur est $ΓΜ$, et incommensurabilis ipsi $ΓΔ$. Et quoniam totum $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum $ΓΕ$ æquale est quadrato ex AB ; reliquum igitur $ΖΛ$ æquale est rectangulo bis sub AH , HB . Secetur igitur ZM bifariam in N , et ducatur per N alterutri ipsarum $ΓΔ$, $ΜΛ$ parallela $NΞ$; utrumque igitur ipsorum $ΖΞ$, $ΝΛ$ æquale est rectangulo sub AH , HB . Et quoniam rectangulum bis sub AH , HB rationale est, et est æquale ipsi $ΖΛ$;

Car que BH conviène avec AB ; les droites AH , HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui soit égal au quarré de AH ; appliquons aussi à cette droite un parallélogramme $ΚΛ$, qui soit égal au quarré de HB (45. 1), le parallélogramme entier $ΓΛ$ sera égal à la somme des quarrés des droites AH , HB . Mais la somme des quarrés des droites AH , HB est médiale; le parallélogramme $ΓΛ$ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle $ΓΔ$, et il a $ΓΜ$ pour largeur; la droite $ΓΜ$ est donc rationelle et incommensurable avec $ΓΔ$ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier $ΓΛ$ est égal à la somme des quarrés des droites AH , HB , et que $ΓΕ$ est égal au quarré de AB , le parallélogramme restant $ΖΛ$ sera égal au double rectangle sous AH , HB (7. 2). Coupons la droite ZM en deux parties égales en N , et par le point N menons la droite $NΞ$ parallèle à l'une ou à l'autre des droites $ΓΔ$, $ΜΛ$; chacun des parallélogrammes $ΖΞ$, $ΝΛ$ sera égal au rectangle sous AH , HB . Et puisque le double rectangle sous AH , HB est rationel, et qu'il est égal à $ΖΛ$,

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 377

ΖΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΑ μείσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΑ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν³ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταὶ εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμ-

rationale igitur est ΖΑ. Et ad rationalem ΕΖ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et commensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Et quoniam quidem ΓΑ medium est, ipsum verò ΖΑ rationale; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur



μετροί· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΑ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ

est ΓΖ. Dico et quintam. Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam incommensurable est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, æquale autem quadratum ex ΑΗ ipsi ΓΘ, quadratum verò ex ΗΒ ipsi ΚΑ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΑ. Ut autem ΓΘ ad ΚΑ ita ΓΚ ad ΚΜ;

le parallélogramme ΖΑ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΑ (21. 10). Et puisque ΓΑ est médial, et ΖΑ rationel, le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un cinquième apotome. Nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ. Puisque le quarré de ΑΗ est incommensurable avec le quarré de ΗΒ, que le quarré de ΑΗ est égal à ΓΘ, et que le quarré de ΗΒ est égal à ΚΑ, le parallélogramme ΓΘ sera incommensurable avec ΚΑ. Mais ΓΘ

378 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΚΑ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ⁵. ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἴστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρός τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

incommensurabilis igitur ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est congruens ΖΜ commensurabilis expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quinta.

Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἑκτὴν.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτὴ.

est à ΚΑ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΖΜ, est défailant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ (9. 10). Mais la congruente ΖΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10). Le carré, etc.

PROPOSITIO CIII.

Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit recta ΑΒ quæ cum medio medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse sextam.

PROPOSITION CIII.

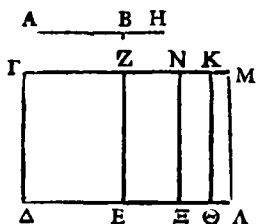
Le carré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial; soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un sixième apotome.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 379

Εστω γάρ τῇ AB προσαρμύζουσα ἡ BH · αἱ ἄρα AH , HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν² AH , HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Παραβελήσθω οὖν παρὰ τὴν $ΓΔ$ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum bis sub AH , HB medium, adhuc autem incommensurabilia ex AH , HB quadrata rectangulo bis sub AH , HB . Applicetur igitur ad $ΓΔ$ quadrato quidem ex AH æquale $ΓΘ$ latitudinem faciens $ΓΚ$, quadrato



BH τὸ $ΚΛ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB · μέσον ἄρα ἐστὶ³ καὶ τὸ $ΓΛ$. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μέσον· καὶ τὸ $ΖΛ$ ἄρα

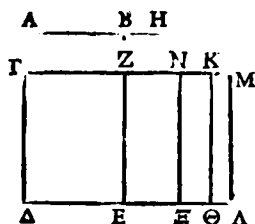
verò ex BH ipsum $ΚΛ$; totum igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB ; medium igitur est et $ΓΛ$. Et ad rationalem $ΓΔ$ applicatur latitudinem faciens $ΓΜ$; rationalis igitur est $ΓΜ$, et incommensurabilis ipsi $ΓΔ$ longitudine. Quoniam igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum $ΓΕ$ æquale est quadrato ex AB ; reliquum igitur $ΖΛ$ æquale est rectangulo bis sub AH , HB . Atque est rectangulum bis sub AH , HB medium;

Car que BH conviène avec AB ; les droites AH , HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces mêmes droites étant incommensurable avec le double rectangle sous AH , HB (79. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui étant égal au quarré de AH , ait $ΓΚ$ pour largeur; appliquons à $ΚΘ$ un parallélogramme $ΚΛ$ égal au quarré de BH ; le parallélogramme entier $ΓΛ$ sera égal à la somme des quarrés des droites AH , HB ; le parallélogramme $ΓΛ$ sera donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle $ΓΔ$, et il a $ΓΜ$ pour largeur; la droite $ΓΜ$ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec $ΓΔ$ (23. 10). Et puisque $ΓΛ$ est égal à la somme des quarrés des droites AH , HB , et que $ΓΕ$ est égal au quarré de AB , le parallélogramme restant $ΖΛ$ sera égal au double rectangle sous AH , HB (7. 2). Mais le double rectangle sous AH , HB est médial; le parallélogramme

380 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μέσον ἐστὶ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἵπαι τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB, καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν⁵ AH, HB ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ

et ZA igitur medium est. Et ad rationalem ZE applicatur latitudinem faciens ZM; rationalis igitur est ZM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata ex AH, HB incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AH, HB, atque est quadratis quidem ex AH, HB æquale ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale ΖΛ; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ;



τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λίγω δὲ ὅτι καὶ ἔκτῃ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ

incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΓΜ, ΜΖ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et sextam. Quoniam enim ΖΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB, secetur bifariam ΖΜ in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ æquale est rectangulo

ZA est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ZE, et il a ZM pour largeur; la droite ZM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ. Et puisque la somme des quarrés des droites AH, HB est incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB, que ΓΛ est égal à la somme des quarrés des droites AH, HB, et que ΖΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un sixième apotome. Car puisque ΖΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ, chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΛ sera

ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δύ-
νάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ
τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ
μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ⁸ ΓΘ, τῷ δὲ
ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα
ἐστὶ⁹ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ
ΚΛ οὕτως ἐστὶν¹⁰ ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμ-
μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν
ἀπὸ τῶν¹¹ ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ
ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ
ΚΛ, τῷ δὲ ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ¹² τὸ
ΝΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ
ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ¹³. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς
ΜΖ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀτυμμέτρου ἑαυτῇ.
Καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἑκκει-
μένη ρητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἑκτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt
incommensurabiles, incommensurabile igitur est
ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Sed qua-
drato quidem ex ΑΗ æquale est ΓΘ, quadrato
verò ex ΗΒ æquale est ΚΛ; incommensurabile
igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita
est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est
ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ,
ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub
ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ
æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ,
rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΝΛ;
est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Et
eâdem ratione ΓΜ quam ΜΖ plus potest qua-
drato ex rectâ sibi incommensurabili. Et neutra
ipsarum commensurabilis est expositæ rationali
ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est sexta.

Quadratum igitur, etc.

égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le carré de ΑΗ sera incommensurable avec le carré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, et ΚΛ égal au carré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc incommensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (5. lem. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Par la même raison, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ; aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Le carré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

PROPOSITIO CIV.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

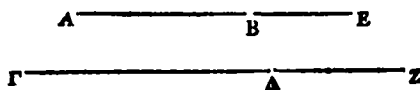
Ἐστω ἀποτομή ἡ AB, καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶν ἡ AB, ἔστω αὐτῇ προσαρμίζουσα ἡ BE· αἱ AE, EB ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γιγνέτω ὁ τῆς

Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit apotome AB, et ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ apotomen esse atque ordine eamdem quæ AB.

Quoniam enim apotome est AB, sit ipsi congruens BE; ipsæ AE, EB igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Et quæ est ipsius AB ad ΓΔ ratio eadem fiat ipsius BE ad ΔΖ;



BE πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἐν ἄρα ἐστὶ² πρὸς ἐν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ AE πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE μὲν³ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ BE τῇ ΔΖ. Καὶ αἱ⁴ AE, EB ῥηταί εἰσι δυ-

et ut una igitur est ad unam, omnes sunt ad omnes; est igitur et ut tota AE ad totam ΓΖ ita AB ad ΓΔ. Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et AE quidem ipsi ΓΖ, ipsa verò BE ipsi ΔΖ. Et AE, EB rationales sunt potentiâ solum commensurabiles;

PROPOSITION CIV.

Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

Soit l'apotome AB, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB; je dis que ΓΔ est un apotome, et que cet apotome est du même ordre que AB.

Car puisque AB est un apotome, que BE lui convienne; les droites AE, EB seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Faisons en sorte que la raison de BE à ΔΖ soit la même que celle de AB à ΓΔ. Un antécédent est donc à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12.5); la droite entière AE est donc à la droite entière ΓΖ comme AB est à ΓΔ. Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite AE est donc commensurable avec ΓΖ, et la droite BE avec ΔΖ (10. 10). Mais les droites AE, EB sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; les

νάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα
 ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή
 ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ
 αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ⁵ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς
 τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλάξ
 ἄρα ἐστὶν⁶ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ
 ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἦτοι δὲ⁷ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ
 μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἡ
 τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς
 ΕΒ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,
 καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συ-
 μέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ
 ΑΕ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ
 δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ,
 καὶ οὐδετέρα⁸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς
 ΕΒ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ,
 καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μίζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ
 ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν
 ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ

et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur rationales sunt potentiâ
 solùm commensurabiles ; apotome igitur est
 ΓΔ. Dico et ordine eamdem quæ ΑΒ. Quo-
 niam enim est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΒΕ ad ΖΔ ;
 permutando igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad
 ΖΔ. Vel autem ΑΕ quam ΕΒ plus potest qua-
 drato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-
 drato ex rectâ incommensurabili. Si quidem
 igitur ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ
 sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest
 quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si
 quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ ratio-
 nali longitudine, et ipsa ΓΖ. Si autem ΕΒ, et ΔΖ.
 Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et neutra
 ipsarum ΓΖ, ΖΔ. Si autem ΑΕ quam ΕΒ plus
 possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili,
 et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ
 sibi incommensurabili. Et si quidem commen-
 surabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine,

droites ΓΖ, ΖΔ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement
 (10. 10) ; la droite ΓΔ est donc un apotome (74. 10). Je dis que cet apotome est
 du même ordre que ΑΒ. Car puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΒΕ est à ΖΔ, par permu-
 tation ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais la puissance de ΑΕ surpasse la puis-
 sance de ΕΒ du carré d'une droite commensurable, ou incommensurable avec ΑΕ.
 Si donc la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite
 commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du
 carré d'une droite commensurable avec ΓΖ. Si ΑΕ est commensurable en
 longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec
 elle. Si ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΔΖ le
 sera aussi ; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec
 la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable en
 longueur avec elle ; et si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du
 carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la
 puissance de ΖΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΖ. Si la droite
 ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera
 commensurable avec elle ; si ΒΕ est commensurable avec la rationnelle exposée,

384 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὲ ἢ BE , καὶ ἢ ZA . Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν AE , EB , οὐδέτερά τῶν FZ , ZA · ἀποτομή ἄρα ἴσῃν ἢ $ΓΔ$ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB . Ὅπῃ ἴδιαι δείξαι.

et ipsa FZ . Si autem BE , et ZA . Si autem neutra ipsarum AE , EB , neutra ipsarum FZ , ZA ; apotome igitur est $ΓΔ$ et ordine eadem quæ AB . Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρί.

Ἡ τῇ μίσης ἀποτομῇ σύμμετρος μίσης ἀποτομή ἴσῃ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω μίσης ἀποτομή ἢ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἴσῃ ἢ $ΓΔ$ · λέγω ὅτι καὶ ἢ $ΓΔ$ μίσης ἀποτομή ἴσῃ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ AB .

Ἐπὶ γὰρ μίσης ἀποτομῇ ἴσῃν ἢ AB , ἴστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἢ BE · αἱ AE , EB ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ζηροῖν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$ οὕτως ἢ BE πρὸς τὴν $ΔΖ$, σύμμετρος ἄρα καὶ ἢ AE τῇ $ΓΖ$, ἢ δὲ BE τῇ $ΔΖ$ · αἱ δὲ AE , EB μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ $ΓΖ$, $ΖΔ$ ἄρα

PROPOSITIO CV.

Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB , et ipsi AB longitudine commensurabilis sit $ΓΔ$; dico et $ΓΔ$ mediæ apotomen esse et ordine eadem quæ AB .

Quoniam enim mediæ apotome est AB , sit ipsi congruens BE ; ipsæ AE , EB igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Et fiat ut AB ad $ΓΔ$ ita BE ad $ΔΖ$, commensurabilis igitur et AE ipsi $ΓΖ$, ipsa verò BE ipsi $ΔΖ$; ipsæ autem AE , EB mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles; et $ΓΖ$, $ΖΔ$ igitur mediæ sunt

ZA le sera aussi; et si aucune des droites AE , EB n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites FZ , ZA ne sera commensurable avec elle; la droite $ΓΔ$ est donc une apotome, et cet apotome est du même ordre que AB (déf. trois. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CV.

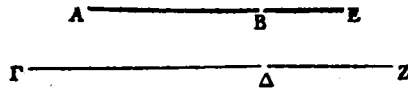
Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

Que AB soit un apotome d'une médiale, et que $ΓΔ$ soit commensurable en longueur avec AB ; je dis que $ΓΔ$ est un apotome d'une médiale, et que cet apotome est du même ordre que AB .

Car, puisque AB est un apotome d'une médiale, que BE conviène avec la droite AB , les droites AE , EB seront des médiales commensurables en puissance seulement (76. 10). Faisons en sorte que AB soit à $ΓΔ$ comme BE est à $ΔΖ$; la droite AE sera commensurable avec $ΓΖ$, et la droite BE commensurable avec $ΔΖ$; mais les droites AE , EB sont des médiales commensurables en puissance seulement; les

μέσας εἰς δύναμιν μόνον σύμμετροι²· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ³ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ⁴· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς

potentiâ solùm commensurabiles; mediæ igitur apotome est ΓΔ. Dico et ordine esse eamdem quæ ΑΒ. Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; est igitur et ut ex ΑΕ quadratum



τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ⁵. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητὸν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἐσταί⁷ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ⁸ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ⁹ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurable igitur est et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Et si igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, rationale erit et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; et si medium est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, medium est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ ΑΒ. Quod oportebat ostendere.

droites ΓΖ, ΖΗ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale. Je dis que cette droite est un apotome du même ordre que ΑΒ. Car, puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, le carré de ΑΕ sera au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le carré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (1. 6); mais le carré de ΑΕ est commensurable avec le carré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est rationel, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρς'.

PROPOSITIO CVI.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

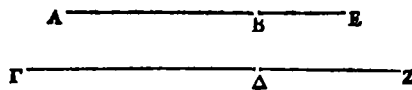
Εἴτω γάρ' ἐλάσσων ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ $ΓΔ$. Λίγω ὅτι καὶ ἡ $ΓΔ$ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέτω γάρ τὰ αὐτὰ τῷ προτέρῳ². Καὶ ἐπεὶ αἱ AE , EB δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ $ΓΖ$, $ΖΔ$ ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς τὴν $ΖΔ$. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim minor AB , et ipsi AB commensurabilis $ΓΔ$; dico et $ΓΔ$ minorem esse.

Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam AE , EB potentiâ sunt incommensurabiles, et $ΓΖ$, $ΖΔ$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Quoniam igitur est ut AE ad EB ita $ΓΖ$ ad $ΖΔ$; est igitur et ut ex AE quadratum ad ip-



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΖ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΔ$. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν³ AE , EB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΔ$ ⁴. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BE τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΖ$. σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΓΖ$, $ΖΔ$ τετραγώνων. Πητὸν

sum ex EB ita ex $ΓΖ$ quadratum ad ipsum ex $ΖΔ$; componendo igitur est ut ex AE , EB quadrata ad ipsum ex EB ita ex $ΓΖ$, $ΖΔ$ quadrata ad ipsum ex $ΖΔ$. Commensurable autem est ex BE quadratum quadrato ex $ΔΖ$; commensurable igitur et compositum ex ipsarum AE , EB quadratis composito ex ipsarum $ΓΖ$, $ΖΔ$ quadratis. Rationale autem est compositum ex

PROPOSITION CVI.

Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

Soit AB une mineure, et que $ΓΔ$ soit commensurable avec AB ; je dis que $ΓΔ$ est une mineure.

Car faisons les mêmes choses qu'auparavant. Puisque les droites AE , EB sont incommensurables en puissance, les droites $ΓΖ$, $ΖΔ$ seront incommensurables en puissance. Et puisque AE est à EB comme $ΓΖ$ est à $ΖΔ$, le carré de AE sera au carré de EB comme le carré de $ΓΖ$ est au carré de $ΖΔ$ (22.6); donc, par addition, la somme des carrés des droites AE , EB est au carré de EB comme la somme des carrés des droites $ΓΖ$, $ΖΔ$ est au carré de $ΖΔ$ (18.5). Mais le carré de BE est commensurable avec le carré de $ΖΔ$; la somme des carrés des droites AE , EB est donc commensurable avec la somme des carrés des droites $ΓΖ$, $ΖΔ$ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites AE , EB est rationnelle; la somme

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 387

δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν⁵ ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ⁶. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ⁷, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Μίσην δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μίσην ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσην· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Οὔτε ἴδιαι δεικνύται.

Α Λ Α Ω Σ'.

Ἐστω ἐλάττων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω² ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλάττων ἐστίν.

Ἐκτίσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ³, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ τετάρτη

ipsarum ΑΕ, ΕΒ quadratis; rationale igitur est et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis. Rursus, quoniam est ut ex ΑΕ quadratum ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ, commensurable igitur est et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Medium autem rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; minor igitur est ΓΔ. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit minor Α, et ipsi Α commensurabilis sit Β; dico Β minorem esse.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, et quadrato ex Α æquale ad ipsam ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quarta ΓΖ.

des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc aussi rationnelle. De plus, puisque le carré de ΑΕ est au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le carré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, et que le carré de ΑΕ est commensurable avec le carré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ sera commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial; le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (24. 10); la droite ΓΔ est donc une mineure (77. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

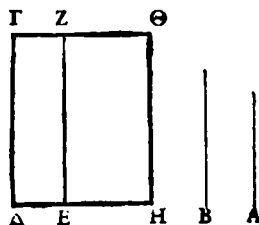
Soit Α une mineure, et que Β soit commensurable avec Α; je dis que la droite Β est une mineure.

Soit exposée la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de Α, ait ΓΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un quatrième

388 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

η ΓΖ. Τῷ⁵ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβέβληθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν⁶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ⁷ τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ⁸ τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα

Quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B; commensurable igitur est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est ΓΕ, quadrato verò ex B æquale est ΖΗ; commensurable igitur est ΓΕ



ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. Ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως ἐστὶν⁹ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν¹⁰ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Ἀποτομή δὲ ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς¹¹ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης¹², ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάττων ἐστὶ. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάττων ἄρα¹³ ἐστὶν ἡ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsi ΖΗ. Ut autem ΓΕ ad ΖΗ ita est ΓΖ ad ΖΘ; commensurabilis igitur est ΓΖ ipsi ΖΘ longitudine. Apotome autem est quarta ΓΖ; apotome igitur est et ΖΘ quarta; spatium ΖΗ igitur continetur sub rationali et apotome quartâ. Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ; recta spatium igitur potens minor est. Potest autem ipsum ΖΗ ipsa Β; minor igitur est Β. Quod oportebat ostendere.

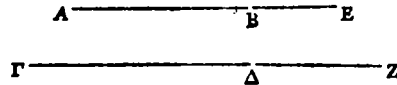
apotome (101. 10). Appliquons à ZE un parallélogramme ΖΗ, qui étant égal au carré de Β, ait ΖΘ pour largeur. Puisque Α est commensurable avec Β, le carré de Α sera commensurable avec le carré de Β. Mais ΓΕ est égal au carré de Α, et ΖΗ égal au carré de Β; le parallélogramme ΓΕ est donc commensurable avec ΖΗ. Mais ΓΕ est à ΖΗ comme ΓΖ est à ΖΘ (1. 6); la droite ΓΖ est donc commensurable en longueur avec ΖΘ (10. 10); mais la droite ΓΖ est un quatrième apotome; la droite ΖΘ est donc un quatrième apotome (104. 10); la surface ΖΗ est donc comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome. Mais si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure (95. 10). Mais la droite Β peut la surface ΖΗ; la droite Β est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ.

PROPOSITIO CVII.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ
σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ
ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ
AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ
ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.



Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE· αἱ
AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιού-
σαι τὸ μὲν συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE,
EB τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.
Καὶ τὰ αὐτὰ κατισκιάσθω. Ὁμοίως δὲ δει-
ξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ³ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῇ
αὐτῇ λόγῃ εἰσὶ ταῖς AE, EB, καὶ σύμμετρον
ἐστὶ τὸ⁴ συγχεόμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB
τετραγώνων τῇ συγχεομένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῇ

Recta ei quæ cum rationali medium totum
facit commensurabilis et ipsa cum rationali me-
dium totum faciens est.

Sit cum rationali medium totum faciens AB,
et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ
cum rationali medium totum facere.

Sit enim ipsi AB congruens BE; ipsæ AE, EB
igitur potentiâ sunt incommensurabiles, fa-
cientes quidem compositum ex ipsarum AE,
EB quadratis medium, rectangulum verò sub
ipsis rationale. Et eadem construantur. Con-
gruenter præcedentibus utique ostendemus,
rectas ΓΖ, ΖΔ in eadem ratione esse cum ipsis
AE, EB, et commensurabile esse compositum
ex ipsarum AE, EB quadratis composito
ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis, rectangulum

PROPOSITION CVII.

La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la droite AB fasse avec une surface rationnelle un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car que BE convienne avec AB, les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationnel (78. 10). Faisons la même construction. Nous démontrerons comme auparavant que les droites ΓΖ, ΖΔ sont en même raison que les droites AE, EB; que la somme des carrés des droites AE, EB est commensurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ; et que le

ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦνται τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μείσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ'.

Ἐστω² μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβελήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ

verò sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; quare et ΓΖ, ΖΔ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; recta ΓΔ igitur est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit cum rationali medium totum faciens Α, et Β commensurabilis ipsi; dico Β cum rationali medium totum facere.

Exponatur rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex Α æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quinta ΓΖ. Quadrato autem ex Β æquale ad ipsam ΖΕ applicetur ΖΗ latitudinem faciens ΖΘ. Quoniam igitur commensurabilis est Α ipsi Β, commensurable est et ex Α quadratum quadrato ex Β. Sed quadrato quidem ex Α æquale ΓΕ; quadrato

rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant médiale la somme de leurs quarrés, et rationel le rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite ΓΔ fait donc avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

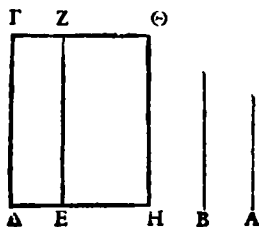
Que Α fasse avec une rationelle un tout médial, et que Β soit commensurable avec Α; je dis que Β fait avec une surface rationelle un tout médial.

Soit exposée la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de Α, ait ΓΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un cinquième apotome (102. 10). Appliquons à ΖΕ un parallélogramme ΖΗ, qui étant égal au quarré de Β, ait ΖΘ pour largeur. Puisque Α est commensurable avec Β, le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de Β. Mais ΓΕ est égal au quarré de Α,

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 391

ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Αποτομή δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ³ δὲ ἡ ΖΕ.

autem ex B æquale ZH; commensurable igitur est GE ipsi ZH; commensurabilis igitur et GZ ipsi ZΘ longitudine. Apotome autem quinta GZ; apotome igitur est quinta et ZΘ, rationalis verò ZE.



Εάν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπρι εἶδει διῆξαι.

Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens cum rationali medium totum facit. Potest autem ipsum ZH ipsa B; ipsa igitur B cum rationali medium totum faciens est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρή.

PROPOSITIO CVIII.

Ἡ τῇ μετὰ μίσου μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μίσου μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

et ZH au carré de B; le parallélogramme GE est donc commensurable avec ZH; la droite GZ est donc commensurable en longueur avec ZΘ. Mais GZ est un cinquième apotome; la droite ZΘ est donc un cinquième apotome (104. 10). Mais la droite ZE est rationnelle: or, si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface fait avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10). Mais la droite B peut la surface ZH; la droite B fait donc avec une surface rationnelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

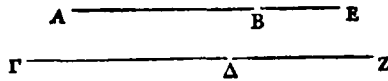
PROPOSITION CVIII.

Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

392 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, καὶ τῇ AB ἴστω¹ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ² ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Sit cum medio medium totum faciens ipsa AB, et ipsi AB sit commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ cum medio medium totum facere.



Εστω γάρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ AE, EB σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε³ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'

Sit enim ipsi AB congruens BE, et eadem construantur; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum quadratis rectangulo sub ipsis. Et sunt, ut ostensum est, AE, EB commensurabiles ipsis ΓΖ, ΖΔ, et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangulum autem sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsa-

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que la droite ΓΔ fait aussi avec une surface médiale un tout médial.

Que BE convienne avec AB, et faisons la même construction; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces mêmes droites (79. 10). Et puisque les droites AE, EB sont commensurables avec les droites ΓΖ, ΖΔ, ainsi qu'on l'a démontré; que la somme des quarrés des droites AE, EB est aussi commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, les droites ΓΖ, ΖΔ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces droites étant aussi incommensurable avec

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν ἡ ΓΔ ἄρα
μιτὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν. Ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

rum quadratis rectangulo sub ipsis; ipsa igitur
ΓΔ cum medio medium totum facit. Quod
oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν
χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι
ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφηρήσθω τὸ
ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη τὸ
ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι ἀποτομή, ἢ
ἐλάττων.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ
ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ῥητογώνιον πα-
ραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφη-
ρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ
ΛΘ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓ, μέσον δὲ
τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ
τῷ ΗΚ· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον

PROPOSITIO CIX.

Medio a rationali detracto, recta reliquum
spatium potens una duarum irrationalium fit,
vel apotome, vel minor.

A rationali enim ΒΓ medium auferatur ΒΔ;
dico rectam, quæ reliquum spatium ΕΓ potest,
unam duarum irrationalium fieri, vel apoto-
men, vel minorem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et ipsi quidem
ΒΓ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum paral-
lelogrammum ΗΘ, ipsi verò ΒΔ æquale auferatur
ΗΚ; reliquum igitur ΕΓ æquale est ipsi ΛΘ.
Quoniam igitur rationale quidem est ΒΓ; me-
dium verò ΒΔ, æquale ΒΓ quidem ipsi ΗΘ, ipsum
verò ΒΔ ipsi ΗΚ; rationale quidem igitur est ΗΘ,

le rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite ΓΔ fera avec une surface
médiale un tout médial (79. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CIX.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationelle, la droite qui
peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes ; savoir, ou un
apotome, ou une mineure.

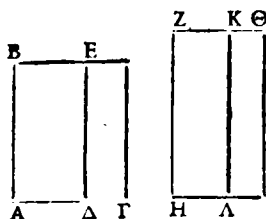
Qu'une surface médiale ΒΔ soit retranchée d'une surface rationelle ΒΓ ; je dis que
la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes ;
savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Car soit exposée une rationelle ΖΗ ; appliquons à ΖΗ un parallélogramme rec-
tangle ΗΘ qui soit égal à ΒΓ, et retranchons ΗΚ égal à ΒΔ ; le reste ΕΓ sera égal à ΛΘ.
Puisque ΒΓ est rationel, que ΒΔ est médial, que ΒΓ est égal à ΗΘ, et que ΒΔ est
égal à ΗΚ, le parallélogramme ΗΘ sera rationel, et le parallélogramme ΗΚ mé-

394 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὲ τὸ ΗΚ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται ῥητὴ ἄρα μὲν³ ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμοζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου⁴. Διτάσθω πρότερον τῷ

medium verò ΗΚ; et ad rationalem ΖΗ applicatur; rationalis igitur quidem ΖΘ et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine, rationalis verò ΖΚ et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; incommensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΖΘ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, ipsi autem congruens ΚΖ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili.



ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιέχον⁵ ἡ διαιμένη ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ

Possit primum quadrato ex rectâ incommensurabili. Atque est tota ΘΖ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur prima est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome primâ contentum recta potens apotome est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΓΕ, apotome est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus

dial. Mais ces parallélogrammes sont appliqués à la rationelle ΖΗ; la droite ΖΘ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10), et la droite ΖΚ rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10); la droite ΖΘ est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (13. 10); les droites ΖΘ, ΖΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΚΖ est la droite qui convient à ΚΘ (74. 10): or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite ou commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Qu'elle la surpasse d'abord du quarré d'une droite incommensurable. Mais la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ; la droite ΚΘ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un premier apotome est elle-même un apotome (92. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΓΕ, est donc un apotome. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 395

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα^δ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιέχομενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν⁷. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et est tota ΖΘ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur quarta est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome quartâ contentum recta potens minor est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, minor est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρί.

Απὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλλοι γίνονται, ἥτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Απὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβελήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὲ ἀκαλούθως ῥητὴ

PROPOSITIO CX.

Rationalē a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

A medio enim ΒΓ rationale auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam cum rationali medium totum facientem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et applicentur similiter spatia; est igitur consequenter rationalis

d'une droite incommensurable avec ΘΖ, la droite ΚΘ sera un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10), parce que la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΖΗ. Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un quatrième apotome est une mineure (95. 10); la droite qui peut la surface ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CX.

Une surface rationelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

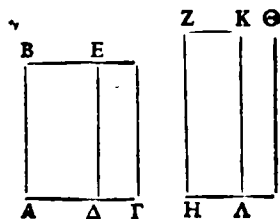
Retranchons la surface rationelle ΒΔ de la surface mediale ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationelles suivantes; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial:

Car soit exposée une rationelle ΖΗ; appliquons semblablement des surfaces à ΖΗ;

396 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν

quidem ΖΘ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Rationalis autem ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, et ipsi congruens ΖΚ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi



ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ δευτέρα² ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τοῦτίστι τὸ ΕΓ, δυναμένη, μέσης ἀποτομῇ πρώτη ἐστὶν³. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζων⁴ δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ⁵, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ μήκει τῇ

commensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur est secunda ΚΘ. Rationalis autem ΖΗ; quare ipsa potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome prima est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine;

la droite ΖΘ sera conséquemment une rationnelle, et cette droite sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10); mais la droite ΖΚ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΖΚ convient avec cette droite (74. 10). Or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un second apotome (déf. trois. 2. 10). Mais ΖΗ est une rationnelle; la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc un premier apotome d'une médiale (93. 10). Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 397

ΖΗ· ἀποτομή ἄρα^δ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

apotome igitur quinta est ΚΘ; quare recta potens spatium ΕΓ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριζ΄.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσύμμετρου τῷ ἔλφ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλλοι γίνονται, ἥτοι μ΄σης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἀφηρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ἔλφ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλλόγων, ἥτοι μ΄σης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ τοῦ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἐπὶ γὰρ μέσον ὅστιν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν ὅστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ², τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι³ καὶ ἡ ΘΖ

PROPOSITIO CXI.

Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum faciens.

Auferatur enim ut in propositis figuris a medio ΒΓ medium ΒΔ, incommensurabile toti; dico rectam, quæ potest spatium ΕΓ, unam esse duarum irrationalium, vel mediæ apotomen secundam, vel cum medio medium totum facientem.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum ΒΓ, ΒΔ, et incommensurabile est ΒΓ ipsi ΒΔ, hoc est ΗΘ ipsi ΗΚ, incommensurabilis

ΖΗ, la droite ΚΘ sera un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10); la droite qui peut la surface ΕΓ fait donc avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CXI.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

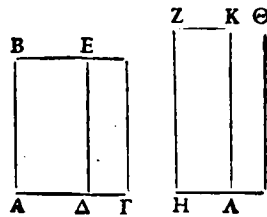
Retranchons, comme dans les figures précédentes, de la surface médiale ΒΓ la surface médiale ΒΔ, incommensurable avec la surface entière; je dis que la droite qui peut ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car puisque chacun des parallélogrammes ΒΓ, ΒΔ est médial, et que ΒΓ est incommensurable avec ΒΔ, c'est-à-dire ΗΘ avec ΗΚ, la droite ΘΖ sera incom-

398 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Εἰ μὲν δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστὶν ἄρα τρίτη⁶ ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης

est et ΘΖ ipsi ΖΚ; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solûm commensurabiles; apotome igitur est ΘΚ. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome est igitur tertia ΚΘ. Rationalis autem ΚΛ, rectangulum verò sub ratio-



περιχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἀλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μείσης ἀποτομή διυτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτίστι, τὸ ΕΓ δυναμένη μείσης ἀποτομή ἐστι διυτέρα⁷. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα⁸ τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστὶν ἄρα ἕκτη ἡ ΚΘ⁹. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ

nali et apotome tertiâ contentum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, vocatur autem mediæ apotome secunda; quare recta potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome est secunda. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine; apotome est igitur sexta ΚΘ. Rectangulum autem sub rationali et apotome

mesurable avec ΖΚ (1. 6 et 10. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc de rationnelles commensurables en puissance seulement (23. 10); la droite ΘΚ est donc un apotome (74. 10). Si donc la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un troisième apotome (déf. 3. 10). Puisque ΚΛ est une rationnelle, que le rectangle compris sous une rationnelle et un troisième apotome est irrationnel (94. 10), que la droite qui peut cette surface est irrationnelle, et que cette droite est appelée second apotome d'une médiale, la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, sera un second apotome d'une médiale. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΚΘ sera un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Mais la droite qui peut un rectangle

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 399

ἀποτομῆς ἑκτῆς ἢ δυναμένη ἔστιν ἡ¹⁰ μετὰ μέ-
σου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα· ἢ τὸ ΛΘ ἄρα¹¹,
τουτίστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον
τὸ ὅλον ποιούσα ἔστιν. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

sexta recta potens est quæ cum medio medium
totum facit; ipsa igitur potens spatium ΛΘ,
hoc est ΕΓ, cum medio medium totum facit.
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριζ'.

PROPOSITIO CXII.

Ἡ ἀποτομή οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο
ὀνομάτων.

Ἐστω ἀποτομή ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ
ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ
ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν
ΔΓ παραβελήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος
ποιοῦν τὴν ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἔστιν ἡ ΑΒ,
ἀποτομή πρώτη ἔστιν ἡ ΔΕ. Ἐστω αὐτῇ προσαρ-
μόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυ-
νάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μείζον
δύναται τὸ ἀπὸ σύμμετρον ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ

Apotome non est eadem quæ ex binis no-
minibus.

Sit apotome ΑΒ; dico ΑΒ non esse eadem
quæ ex binis nominibus.

Si enim possibile, sit; et exponatur ratio-
nalis ΔΓ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ratio-
nalem ΔΓ applicetur rectangulum ΓΕ, latitudi-
nem faciens ΔΕ. Quoniam igitur apotome est
ΑΒ, apotome prima est ΔΕ. Sit ipsi congruens
ΕΖ; ipsæ ΔΖ, ΖΕ igitur rationales sunt poten-
tiâ solum commensurabiles, et ΔΖ quam ΖΕ
plus potest quadrato ex rectâ sibi commensu-

compris sous une rationnelle et un sixième apotome, est une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (97. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CXII.

Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

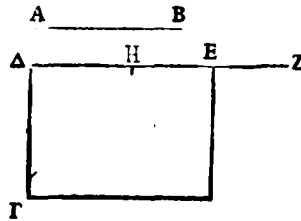
Soit l'apotome ΑΒ; je dis que ΑΒ n'est pas la même droite que celle de deux noms.

Car que cela soit, si c'est possible; soit exposée une rationnelle ΔΓ, et appliquons à la rationnelle ΔΓ un rectangle ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΔΕ pour largeur (45. 1). Puisque la droite ΑΒ est un apotome, la droite ΔΕ sera un premier apotome (98. 10). Que ΕΖ convienne avec ΔΕ; les droites ΔΖ, ΖΕ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΔΖ surpassera la puissance de ΖΕ du carré d'une droite commensurable avec ΔΖ, et ΔΖ sera com-

400 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ² ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν³ ἡ ΔΕ. Διηρώσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἡ ΔΗ

rabili, et ΔΖ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine. Rursus, quoniam ex binis nominibus est ΑΒ; ex binis igitur nominibus prima est ΔΕ. Dividatur in nomina ad punctum Η, et sit majus nomen ΔΗ; ipsæ ΔΗ, ΗΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et ΔΗ quam ΗΕ plus potest



τῆς ΗΕ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· καὶ⁴ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα τῇ⁵ ΖΗ σύμμετρός ἐστιν ἡ⁶ ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει⁷, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ

quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et major ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine; et ΔΖ igitur ipsi ΔΗ commensurabilis est longitudine; et reliquæ igitur ΖΗ commensurabilis est ΔΖ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ, rationalis autem est ΔΖ; rationalis igitur est et ΖΗ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ longitudine, incommensurabilis autem ΔΖ ipsi ΖΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΖΗ

mesurable en longueur avec la rationnelle exposée ΔΓ (déf. trois. 1. 10). De plus, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, la droite ΔΕ sera une première de deux noms (61. 10). Que ΔΕ soit divisée en ses noms au point Η, et que ΔΗ soit son plus grand nom; les droites ΔΗ, ΗΕ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10). Mais la puissance de ΔΗ surpasse la puissance de ΗΕ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΗ, et la plus grande droite ΔΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΔΓ; la droite ΔΖ est donc commensurable en longueur avec ΔΗ (12. 10); la droite ΔΖ est donc commensurable avec la droite restante ΗΖ. Et puisque ΔΖ est commensurable avec ΖΗ, et que ΔΖ est rationnelle, la droite ΖΗ sera rationnelle. Et puisque ΔΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, et que la droite ΔΖ est incommensurable en longueur avec ΖΕ, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 401

μήκει. Καὶ εἰσι ρηταί⁸· αἱ HZ, ZE ἄρα ρηταὶ εἰσι⁹ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ HE. Ἀλλὰ καὶ ρητὴ, ὅπερ ἐστὶν¹⁰ ἀδύνατον.

Η ἄρα ἀποτομή, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi EZ. Et sunt rationales; ipsæ HZ, ZE igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est HE. Sed et rationalis, quod est impossibile.

Apotome igitur, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Η ἀποτομή καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μίσει οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μίσεως παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον

COROLLARIUM.

Apotome et quæ post ipsam irrationales neque mediæ neque inter se sunt eadem; quadratum quidem enim ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem et incommensurabilem ipsi ad quam applicatur longitudine. Quadratum autem ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. Quadratum autem ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. Quadratum autem ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. Quadratum autem ex minori ad rationalem applicatum

droite EZ; mais ces droites sont rationnelles; les droites HZ, ZE sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite HE est donc un apotome (74. 10). Mais elle est aussi rationnelle, ce qui est impossible. Un apotome, etc.

C O R O L L A I R E.

L'apotome et les irrationnelles qui la suivent ne sont ni médiales, ni les mêmes entr'elles; car le carré d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (23. 10). Le carré d'un apotome étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome (98. 10); le carré d'un premier apotome d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un second apotome (99. 10); le carré d'un second apotome d'une mediale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un troisième apotome (100. 10); le carré d'une mineure étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un qua-

402 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πλάτος ποιῇ ἀποτομὴν τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μίσειν τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ ἀποτομὴν πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μίσου μίσειν τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦτε' πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἐστίν· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ² τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλλοι διαφύρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δίδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὔσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μὲν³ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολουθῶς ἐκάστη τῇ τάξει τῇ⁴ καθ' αὐτήν· αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολουθῶς· ἑτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἑτεραι αἱ μετὰ⁵ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους 17'.

latitudinem facit apotomen quartam. Quadratum verò ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam. Quadratum autem ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter se; a primâ quidem, quod rationalis sit; inter se verò, quod ordine non sint eadem; manifestum et ipsas irrationales differre inter se. Et quoniam demonstratum est apotomen non esse eandem quæ ex binis nominibus; faciunt autem latitudines ad rationalem applicatæ post apotomen apotomas consequenter eodem ordine quæ post ipsam; ipsæ verò post ipsam ex binis nominibus latitudines ex binis nominibus, et quæ sunt eodem ordine congruenter; aliæ igitur sunt quæ post apotomen, et aliæ quæ post ipsam ex binis nominibus, ita ut sint ordine omnes irrationales tredecim,

trième apotome (101. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle fait un cinquième apotome (102. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle fait un sixième apotome (103. 10). Puis donc que les largeurs dont nous venons de parler diffèrent de la première droite et entr'elles; qu'elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationnelle, et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre, il est évident que ces irrationnelles sont différentes entr'elles. Et puisqu'on a démontré que l'apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms (112. 10), que les carrés de l'apotome et des droites qui viennent ensuite étant appliqués à une rationnelle font des largeurs qui sont des apotomes du même ordre que les droites qui suivent l'apotome, et que les carrés de la droite de deux noms, et des droites qui viennent ensuite, étant appliqués à une rationnelle, font des largeurs qui sont des droites de deux noms du même ordre que celles qui suivent la droite de deux noms (61, 62, 63, 64, 65 et 66. 10); les droites qui suivent l'apotome et la droite de deux noms sont donc différentes entr'elles, de manière que toutes ces irrationnelles sont au nombre de treize.

- α. Μίσσην.
 β. Εκ δύο ὀνομάτων.
 γ. Εκ δύο μίσων πρώτην.
 δ. Εκ δύο μίσων δευτέραν.
 ε. Μείζονα.
 ς. Ρητὸν καὶ μίσσον δυναμένην.
 ζ. Δύο μίσα δυναμένην.
 η. Αποτομήν.
 θ. Μίσση^δ ἀποτομήν πρώτην.
 ι. Μίσση^ε ἀποτομήν δευτέραν.
 ια. Ελάττωνα.
 ιβ. Μετὰ ρητοῦ μίσσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
 ιγ. Μετὰ μίσου μίσσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

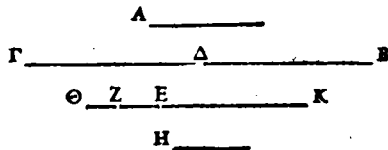
1. Media.
 2. Recta ex binis nominibus.
 3. Ex binis mediis prima.
 4. Ex binis mediis secunda.
 5. Major.
 6. Rationale et medium potens.
 7. Bina media potens.
 8. Apotome.
 9. Mediæ apotome prima.
 10. Mediæ apotome secunda.
 11. Minor.
 12. Cum rationali medium totum faciens.
 15. Cum medio medium totum faciens.

1. La médiale.
 2. La droite de deux noms.
 3. La première de deux médiales.
 4. La seconde de deux médiales.
 5. La majeure.
 6. La droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.
 7. La droite qui peut deux surfaces médiales.
 8. L'apotome.
 9. Le premier apotome d'une médiale.
 10. Le second apotome d'une médiale.
 11. La mineure.
 12. La droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.
 13. La droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομή τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν¹ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δι² ἡ ΒΓ, ἥς μίζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστίν, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔξει³ τάξιν τῇ ΒΓ.



Εστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ

Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

Sit rationalis quidem Α, ex binis nominibus verò ΒΓ, cujus majus nomen sit ΓΔ, et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, ΕΖ; dico ΕΖ apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis ΓΔ, ΔΒ, et in eâdem ratione, et adhuc ΕΖ eundem habituram ordinem quem ΒΓ.

Sit enim rursus quadrato ex Α æquale rectangulum sub ΒΔ, Η. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, ΕΖ æquale est rectangulo sub ΒΔ, Η;

PROPOSITION CXIII.

Le quarré d'une rationelle étant appliqué à une droite de deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

Soit Α une rationelle, et ΒΓ une droite de deux noms, dont le plus grand nom soit ΓΔ; que le rectangle sous ΒΓ, ΕΖ soit égal au quarré de Α; je dis que ΕΖ est un apotome dont les noms sont commensurables avec les droites ΓΔ, ΔΒ, et en même raison que ces droites, et que ΕΖ sera du même ordre que ΒΓ.

Que le rectangle sous ΒΔ, Η soit encore égal au quarré de Α. Puisque le rectangle sous ΒΓ, ΕΖ est égal au rectangle sous ΒΔ, Η, la droite ΓΒ sera à ΒΔ comme Η

πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἢ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἢ Η τῆς ΕΖ. Ἐστω τῇ Η ἴση ἢ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἔστιν⁵ ὡς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γεγονέτω ὡς ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἢ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἔστιν ὡς ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγουμένων⁶ πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. Ὡς δὲ ἢ ΖΚ πρὸς τὴν⁷ ΚΕ οὕτως ἔστιν ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΘΚ πρὸς τὴν⁸ ΚΖ οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁹ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ οὕτως ἢ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἔπει αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἢ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἢ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἐστὶ¹⁰ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ¹¹ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ

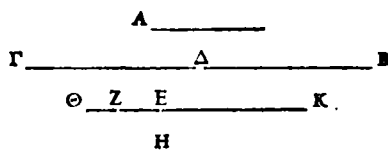
est igitur ut ΓB ad $B\Delta$ ita H ad EZ . Major autem ΓB quam $B\Delta$; major igitur et H quam EZ . Sit ipsi H æqualis $E\Theta$; est igitur ut ΓB ad $B\Delta$ ita ΘE ad EZ ; dividendo igitur est ut $\Gamma\Delta$ ad $B\Delta$ ita ΘZ ad ZE . Fiat ut ΘZ ad ZE ita ZK ad KE ; et tota igitur ΘK ad totam KZ est ut ZK ad KE , ut enim unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut autem ZK ad KE ita est $\Gamma\Delta$ ad ΔB ; et ut igitur ΘK ad KZ ita $\Gamma\Delta$ ad ΔB . Commensurable autem ex $\Gamma\Delta$ quadratum quadrato ex ΔB ; commensurable igitur est et ex ΘK quadratum quadrato ex KZ . Atque est ut ex ΘK quadratum ad ipsum ex KZ ita ΘK ad KE , quoniam tres rectæ ΘK , KZ , KE proportionales sunt; commensurabilis igitur ΘK ipsi KE longitudine; quare et ΘE ipsi EK commensurabilis est longitudine. Et quoniam quadratum ex A æquale est rectangulo sub ΘE , $B\Delta$, rationale autem est quadratum ex A ; rationale igitur est et rectangulum sub ΘK , $B\Delta$. Et

est à EZ (16. 6). Mais ΓB est plus grand que $B\Delta$; la droite H est donc plus grande que EZ . Que $E\Theta$ soit égal à H , la droite ΓB sera à $B\Delta$ comme ΘE est à EZ ; donc, par soustraction, $\Gamma\Delta$ est à $B\Delta$ comme ΘZ est à ZE (17. 5). Faisons en sorte que ΘZ soit à ZE comme ZK est à KE ; la droite entière ΘK sera à la droite entière KZ comme ZK est à KE ; car un antécédent est à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5). Mais ZK est à KE comme $\Gamma\Delta$ est à ΔB ; la droite ΘK est donc à KZ comme $\Gamma\Delta$ est à ΔB ; mais le carré de $\Gamma\Delta$ est commensurable avec le carré de ΔB (37. 10); le carré de ΘK est donc commensurable avec le carré de KZ (10. 10). Mais le carré de ΘK est au carré de KZ comme ΘK est à KE , parce que les trois droites ΘK , KZ , KE sont proportionnelles (20. cor. 2.6); la droite ΘK est donc commensurable en longueur avec KE ; la droite ΘE est donc aussi commensurable en longueur avec EK (16. 10). Et puisque le carré de A est égal au rectangle sous ΘE , $B\Delta$, et que le carré de A est rationel, le rectangle sous ΘK , $B\Delta$ sera rationel. Mais ce rectangle est appliqué à la rationelle $B\Delta$; la droite

406 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν¹² ΔΒ οὕτως· ἡ ΖΚ πρὸς τὴν¹³ ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρ' δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει¹⁴· ῥητὴ

ad rationalem ΒΔ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine; quare et ipsi commensurabilis ΕΚ rationalis est et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ, ipsæ autem ΓΔ, ΔΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Rationalis autem est ΚΕ, et commensurabilis ipsi ΒΔ lon-



ἄρα ἐστὶ¹⁵ καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει¹⁶. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ¹⁷ σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἦτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ¹⁸, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

gitudine; rationalis igitur est et ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine; ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur rationales potentiâ solùm sunt commensurabiles; apotome igitur est ΕΖ. Vel autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex

ΘΕ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ (21. 10); la droite ΕΚ, qui est commensurable avec ΘΕ, est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ. Et puisque ΓΔ est à ΔΒ comme ΖΚ est à ΚΕ, et que les droites ΓΔ, ΔΒ sont commensurables en puissance seulement, les droites ΖΚ, ΚΕ seront commensurables en puissance seulement. Mais ΚΕ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΒΔ; la droite ΖΚ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ; les droites ΖΚ, ΚΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΖ est donc un apotome (74. 10). Mais la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΓΔ. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du quarré d'une droite commensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du quarré d'une droite commensurable avec ΖΚ, et

Καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἴσθιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα¹⁹ τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα²⁰ τῶν ΖΚ, ΚΕ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δύνησεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ²¹. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρος ἴσθι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα²² τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἴσθιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ²³ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρα ἴσθι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει²⁴ τῇ ΒΓ. Ὅπρι ἴδει δεῖξαι.

recta sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΓΔ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si autem neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ. Si autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex recta sibi incommensurabili. Et si quidem ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si verò neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ; quare apotome est ΖΕ, cujus nomina ΖΚ, ΚΕ commensurabilia sunt nominibus ΓΔ, ΔΒ rectæ ex binis nominibus, et in eadem ratione, et eundem habebit ordinem quem ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi; si ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, ΚΕ lui sera aussi commensurable; et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable. Si la puissance de ΓΔ surpassé la puissance de ΔΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du carré d'une droite incommensurable avec ΖΚ. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi; si la droite ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΕ lui sera aussi commensurable. Et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable; la droite ΖΕ est donc un apotome, dont les noms ΖΚ, ΚΕ sont commensurables avec les noms ΓΔ, ΔΒ d'une droite de deux noms, et en même raison qu'eux; et la droite ΖΕ sera du même ordre que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

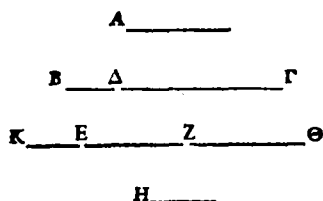
PROPOSITIO CXIV.

Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γινόμενη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἐστὼ ρητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομή δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ρητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀπο-

Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

Sit rationalis quidem Α, apotome verò ΒΔ; et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΔ, ΚΘ, ita ut quadratum ex rationali Α ad



τομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι καὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

apotomen ΒΔ applicatum latitudinem faciat ΚΘ; dico et ex binis nominibus esse ΚΘ; cujus nomina commensurabilia sunt ipsius ΒΔ nominibus, et in eadem ratione, et adhuc ΚΘ eundem habere ordinem quem ΒΔ.

PROPOSITION CXIV.

Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

Soit la rationnelle Α, et l'apotome ΒΔ; que le rectangle sous ΒΔ, ΚΘ soit égal au carré de Α, de manière que le carré de la rationnelle Α étant appliqué à l'apotome ΒΔ ait ΚΘ pour largeur; je dis que ΚΘ est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de ΒΔ, et en même raison qu'eux, et que ΚΘ est du même ordre que ΒΔ.

Εστω γάρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω⁴ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβίβληται⁵ ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ⁶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΗΖ. Μειζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μειζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γεγονέντω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτίστιν ὡς⁸ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσι⁹ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσι σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως¹⁰ ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως¹¹ ἡ ΘΖ πρὸς τὴν

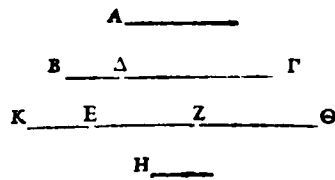
Sit enim ipsi ΒΔ congruens ΔΓ; ipsæ ΒΓ, ΓΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, Η. Rationale autem quadratum ex Α; rationale igitur et rectangulum sub ΒΓ, Η. Et ad rationalem ΒΓ applicatur; rationalis igitur est Η, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, Η æquale est rectangulo sub ΒΔ, ΚΘ, proportionaliter igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et ΚΘ quam Η. Ponatur ipsi Η æqualis ΚΕ; commensurabilis igitur est ΚΕ ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΚ ad ΚΕ; convertendo igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΕ. Fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; et reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ est ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc est ut ΒΓ ad ΓΔ. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΚΖ, ΖΘ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et quoniam est ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΚΖ ad ΖΘ, sed ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ; et ut igitur ΚΖ ad ΖΘ

Car que ΔΓ conviène avec ΒΔ, les droites ΒΓ, ΓΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Que le rectangle sous ΒΓ, Η soit égal au quarré de Α. Puisque le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΒΓ, Η sera aussi rationel. Mais il est appliqué à la rationelle ΒΓ; la droite Η est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ (21. 10). Et puisque le rectangle sous ΒΓ, Η est égal au rectangle sous ΒΔ, ΚΘ, la droite ΓΒ sera à la droite ΒΔ comme ΚΘ est à Η (16. 6). Mais la droite ΓΒ est plus grande que ΒΔ; la droite ΚΘ est donc plus grande que la droite Η. Faisons ΚΕ égale à Η; la droite ΚΕ sera commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΓΒ est à ΒΔ comme ΘΚ est à ΚΕ, par conversion ΒΓ sera à ΓΔ comme ΚΘ est à ΘΕ. Faisons en sorte que ΚΘ soit à ΘΕ comme ΘΖ est à ΖΕ, la droite restante ΚΖ sera à ΖΘ comme ΚΘ est à ΘΕ, c'est-à-dire comme ΒΓ est à ΓΔ (19. 5). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont commensurables en puissance seulement; les droites ΚΖ, ΖΘ sont donc commensurables en puissance seulement. Et puisque ΚΘ est à ΘΕ comme ΚΖ est à ΖΘ, et que ΚΘ est à ΘΕ comme ΘΖ est à ΖΕ; la droite

410 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ZE· καὶ ὡς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ οὕτως¹² ἡ ΘZ πρὸς τὴν ZE· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης¹³ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς KZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΘ. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς KZ τῇ ἀπὸ τῆς ZΘ, αἱ γὰρ KZ, ZΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ¹⁴ καὶ ἡ KZ τῇ

ita ΘZ ad ZE; quare et ut prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ; et ut igitur KZ ad ZE ita ex KZ quadratum ad ipsum ex ZΘ. Commensurable autem est ex KZ quadratnm quadrato ex ZΘ, ipsæ enim KZ, ZΘ potentiâ sunt commensurabiles; commensurabilis igitur est et KZ ipsi ZE longitudine; quare ZK



ZE μήκει· ὥστε ἡ ZK καὶ τῇ KE σύμμετρος ἐστὶ¹⁵ μήκει. Ρητὴ δὲ ἐστὶν ἡ KE, καὶ σύμμετρος τῇ BΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ KZ, καὶ σύμμετρος τῇ BΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ· ἐναλλάξ ἄρα¹⁶ ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν KZ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ZΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ BΓ τῇ KZ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ZΘ¹⁷ μήκει. Αἱ δὲ BΓ, ΓΔ¹⁸ ρηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ KZ, ZΘ ἄρα ρηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμε-

et ipsi KE commensurabilis est longitudine. Rationalis autem est KE, et commensurabilis ipsi BΓ longitudine; rationalis igitur et KZ, et commensurabilis ipsi BΓ longitudine. Et quoniam est ut BΓ ad ΓΔ ita KZ ad ZΘ; permutando igitur ut BΓ ad KZ ita ΔΓ ad ZΘ. Commensurabilis autem BΓ ipsi KZ; commensurabilis igitur et ΓΔ ipsi ZΘ longitudine. Ipsæ autem BΓ, ΓΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ipsæ KZ, ZΘ igitur rationales sunt potentiâ

KZ sera à ZΘ comme ΘZ est à ZE; la première droite est donc à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde (20. cor. 2. 6); la droite KZ est donc à ZE comme le carré de KZ est au carré de ZΘ; mais le carré de KZ est commensurable avec le carré de ZΘ, parce que les droites KZ, ZΘ sont commensurables en puissance; la droite KZ est donc commensurable en longueur avec ZE; la droite ZK est donc commensurable en longueur avec KE (16. 10). Mais KE est rationnelle, et commensurable en longueur avec BΓ; la droite KZ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec BΓ. Et puisque BΓ est à ΓΔ comme KZ est à ZΘ, par permutation BΓ sera à KZ comme ΔΓ est à ZΘ. Mais BΓ est commensurable avec KZ; la droite ΓΔ est donc commensurable en longueur avec ZΘ (10. 10). Mais les droites BΓ, ΓΔ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; les droites KZ, ZΘ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement;

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 411

τροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν¹⁹ ἡ ΚΘ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μίζον δυνήσεται²⁰ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ²¹ οὐδέτερά τῶν ΚΖ, ΖΘ. Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυσμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μίζον δυνήσεται²² τῷ ἀπὸ ἀσυσμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ²³ οὐδέτερά τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι²⁴ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν. Οὔτε ἴδιαι διῆξαι.

solum commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΚΘ. Si quidem igitur ΒΓ quam ΓΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ. Si autem ΒΓ quam ΓΔ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ; ex binis igitur nominibus est ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commensurabilia sunt apotomæ nominibus ΒΓ, ΓΔ, et in eadem ratione; et adhuc ΚΘ eundem quem ΒΓ habet ordinem. Quod oportebat ostendere.

la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Si donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle. Si la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle; la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms, dont les noms ΚΖ, ΖΘ sont commensurables avec les noms ΒΓ, ΓΔ de cet apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, ΚΘ sera du même ordre que ΒΓ (déf. sec. et tr. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριέ.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τί' ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι.

Περιχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν $AB, \Gamma A$, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς AB , καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓA , ἥς μείζον ὀνόμα ἐστι τὸ GE · καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ GE, EA σύμμετρά τι τοῖς² τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς AZ, ZB , καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω ἡ³ ὑπὸ τῶν $AB, \Gamma A$ δυναμένη ἡ H · λέγω ὅτι ῥητή ἐστὶν ἡ H .

Εκκείσθω γὰρ ῥητή ἡ Θ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓA παραβελήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν KL · ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ KL , ἥς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ KM, MA , σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς GE, EA , καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ GE, EA σύμμετροί τί' ἐῖσι ταῖς AZ, ZB , καὶ ἐν τῷ

PROPOSITIO CXV.

Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eâdem ratione; recta spatium potens rationalis est.

Contineatur enim spatium sub $AB, \Gamma A$, sub apotome AB , et rectâ ΓA ex binis nominibus, cujus majus nomen est GE ; et siut nomina GE, EA rectæ ex binis nominibus commensurabilia et apotomæ nominibus AZ, ZB , et in eâdem ratione; et sit recta H spatium sub $AB, \Gamma A$ potens; dico rationalem esse ipsam H .

Exponatur enim rationalis Θ , et quadrato ex Θ æquale ad ΓA applicetur latitudinem faciens KL ; apotome igitur est KL , cujus nomina sint KM, MA , commensurabilia nominibus GE, EA rectæ ex binis nominibus, et in eâdem ratione. Sed et ipsæ GE, EA commensurabiles sunt ipsis AZ, ZB , et in eâdem ratione; est igitur

PROPOSITION CXV.

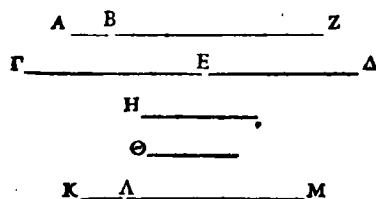
Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationelle.

Qu'une surface soit comprise sous $AB, \Gamma A$, c'est-à-dire sous un apotome AB , et sous une droite de deux noms ΓA , dont GE est le plus grand nom; que les noms GE, EA de la droite de deux noms soient commensurables avec les noms AZ, ZB de l'apotome AB , et en même raison qu'eux; et que H soit la droite qui peut la surface comprise sous $AB, \Gamma A$; je dis que la droite H est rationelle.

Car soit exposée la rationelle Θ ; appliquons à ΓA un parallélogramme, qui étant égal au carré de Θ , ait KL pour largeur (45. 1); la droite KL sera un apotome, dont les noms KM, MA seront commensurables avec les noms GE, EA de la droite de deux noms, et en même raison qu'eux (113. 10). Mais les droites GE, EA sont commensurables avec les droites AZ, ZB , et en même raison qu'elles; la droite AZ est

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 413

αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB οὕτως ἡ KM πρὸς τὴν ΜΛ⁵. ἑναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM⁶. Σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM· σύμμετρος ἄρα ἔστι⁷ καὶ ἡ AB τῇ ΚΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν⁸ ΚΛ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ.



σύμμετρον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ὑπὸ τῶν⁹ ΓΔ, ΚΛ. Ἰσὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἔστι τῷ¹⁰ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ¹¹ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ρητὸν ἄρα ἔστι¹² καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ρητὴ ἄρα ἔστιν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB.

Εὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ut AZ ad ZB ita KM ad ΜΛ; permutando igitur est ut AZ ad KM ita ZB ad ΛΜ; et reliqua igitur AB ad reliquam ΚΛ est ut AZ ad KM. Commensurabilis autem AZ ipsi KM; commensurabilis igitur est et AB ipsi ΚΛ. Atque est ut AB ad ΚΛ ita sub ΓΔ, AB rectangulum ad ipsum sub ΓΔ, ΚΛ; commensu-

rabile igitur est et sub ΓΔ, AB rectangulum rectangulo sub ΓΔ, ΚΛ. Æquale autem sub ΓΔ, ΚΛ rectangulum quadrato ex Θ; commensurabile igitur est sub ΓΔ, AB rectangulum quadrato ex Θ. Rectangulum autem sub ΓΔ, AB æquale est quadrato ex Η; commensurable igitur et ex Η quadratum quadrato ex Θ. Rationale autem quadratum ex Θ; rationale igitur est et quadratum ex Η; rationalis igitur est Η, et potest spatium sub ΓΔ, AB.

Si igitur spatium, etc.

donc à ZB comme KM est à ΜΛ (11. 5); donc, par permutation, la droite AZ sera à KM comme ZB est à ΛΜ; la droite restante AB est donc à la droite restante ΚΛ comme AZ est à KM (19. 5). Mais AZ est commensurable avec KM; la droite AB est donc commensurable avec ΚΛ (10. 10). Mais AB est à ΚΛ comme le rectangle sous ΓΔ, AB est au rectangle sous ΓΔ, ΚΛ (1. 6); le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΔ, ΚΛ. Mais le rectangle sous ΓΔ, ΚΛ est égal au carré de Θ; le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le carré de Θ. Mais le rectangle sous ΓΔ, AB est égal au carré de Η; le carré de Η est donc commensurable avec le carré de Θ. Mais le carré de Θ est rationel; le carré de Η est donc rationel; la droite Η est donc rationelle, et cette droite peut la surface comprise sous ΓΔ, AB. Si donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ γίγνεται ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεται¹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρις'.

Ἀπὸ μίσης ἄπειροι ἀλογοὶ γίνονται, καὶ οὐδὲμία² οὐδὲμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἐστω μίση ἢ A · λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς A ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδὲμία² οὐδὲμιᾶ τῶν πρότερον ἐστίν³ ἢ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ B , καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A , B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ · ἀλογος ἄρα ἐστὶν ἢ Γ · τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἀλογόν ἐστι. Καὶ οὐδὲμιᾶ τῶν πρότερον ἐστὶν ἢ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδὲμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ μίσην. Πάλιν δὲ, τῷ

COROLLARIUM.

Et ex iis manifestum nobis est fieri posse, ut rationale spatium sub irrationalibus rectis continetur.

PROPOSITIO CXVI.

A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nullæ nulli præcedentium eadem.

Sit media A ; dico ex ipsâ A infinitas irrationales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eandem.

Exponatur ratio nalis B , et rectangulo sub A , B æquale sit quadratum ex Γ ; irrationalis igitur est Γ ; rectangulum enim sub irrationali et rationali irrationale est. Et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus utique, rectangulo sub

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident pour nous qu'il est possible qu'une surface rationnelle soit comprise sous deux droites irrationnelles.

PROPOSITION CXVI.

Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

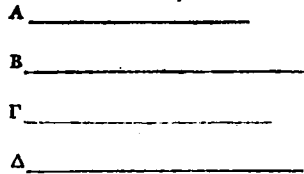
Soit la médiale A ; je dis qu'il résulte de A une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles n'est commensurable avec aucune de celles qui la précèdent.

Soit exposée la rationnelle B , et que le carré de r soit égal au rectangle sous A , B , la droite r sera irrationnelle (déf. 11. 10); car le rectangle compris sous une irrationnelle et une rationnelle est irrationnel (39. sch. 10), et la droite r ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une surface rationnelle ne fait une largeur médiale (61, 62, 63, 64, 65, 66, 98, 99, 100, 101, 102, 113. 10). De plus, que le carré de Δ soit égal

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 415

ὕπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν⁵ ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν

B, Γ æquale sit quadratum ex Δ; irrationale igitur quadratum ex Δ; irrationalis igitur est Δ, et nulli præcedentium est eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem ap-



παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν Γ. Ομοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβα-
νούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι
ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾶ⁶ οὐδεμιᾷ τῶν
πρότερον ἡ αὐτή. Οπερ ἴδει δεῖξαι.

plicatum latitudinem facit ipsam Γ. Similiter, utique eodem ordine infinitè protracto, evidens est a mediâ infinitas irrationales gigni, et nul-
lam nulli præcedentium eandem. Quod oportebat ostendere.

Α Λ Λ Ω Σ'.

A L I T E R.

Ἐστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται², καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή³.

Ἡχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἴστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον

Sit media ΑΓ; dico ex ipsâ ΑΓ infinitas irra-
tionales gigni, et nullam nulli præcedentium esse eandem.

Ducatur ipsi ΑΓ ad rectos angulos ipsa ΑΒ, et sit rationalis ΑΒ, et compleatur ΒΓ, irra-

au rectangle sous Β, Γ; le quarré de Δ sera irrationnel (39. sch. 10); la droite Δ est donc irrationnelle, et elle n'est aucune de celles qui la précèdent; car le quarré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fait la largeur Γ. En procédant à l'infini de la même manière, il est évident qu'il résultera d'une médiale une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles ne sera la même qu'aucune de celles qui la précèdent. Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

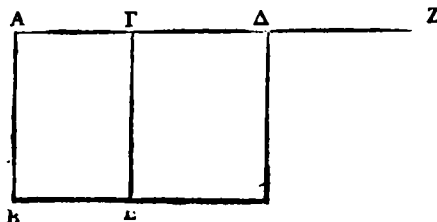
Soit la médiale ΑΓ; je dis qu'il résulte de ΑΓ une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Menons la droite ΑΒ perpendiculaire à ΑΓ; que la droite ΑΒ soit rationnelle, et achevons le parallélogramme ΒΓ; le parallélogramme ΒΓ sera irrationnel, ainsi que

416 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῶ μέσση. Πάλιν, συμ-

tionale igitur est ΒΓ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΓΔ; irrationalis igitur ΓΔ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus,



πιπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῶ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς⁶ μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς.

compleatur ΕΔ; irracionale igitur est ΕΔ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΔΖ; irrationalis igitur est ΔΖ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit ipsam ΓΔ.

A mediâ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριβ'.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

PROPOSITIO CXVII.

Propouatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

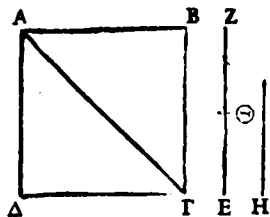
la droite qui pourra ce parallélogramme. Que la droite ΓΔ puisse ce parallélogramme; la droite ΓΔ sera irrationnelle, et ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera une largeur médiale. De plus, achevons le parallélogramme ΕΔ, le parallélogramme ΕΔ sera irrationnel, ainsi que la droite qui peut ce parallélogramme. Que la droite ΔΖ puisse ce parallélogramme; la droite ΔΖ sera irrationnelle, et cette droite ne sera aucune des droites qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera la largeur ΓΔ. Il résulte donc, etc.

PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Εἴτω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρος ἴστι τῇ ΑΒ μήκει.

Sit quadratum ΑΒΓΔ, ipsius autem diameter ΑΓ; dico ΑΓ incommensurabilem esse ipsi ΑΒ longitudine.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερόν μὲν οὖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἴστι² τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἴστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν³ Η, καὶ ἴστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἴστιν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἴσται μονάς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ⁴ λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονάς⁵ τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ἴστιν⁶ ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ

Si enim possibile, sit commensurabilis; dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse et imparrem; evidens est quidem quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. Et quoniam commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ, ipsa ΑΓ igitur ad ΑΒ rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat rationem quam ΕΖ ad Η, et sint ΕΖ, Η minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur unitas est ΕΖ. Si enim ΕΖ esset unitas, et habet rationem ad Η quam habet ΑΓ ad ΑΒ, et major ΑΓ quam ΑΒ; major igitur et ΕΖ unitas quam Η numerus, quod absurdum; non igitur unitas est ΕΖ; numerus igitur. Et quoniam est ut

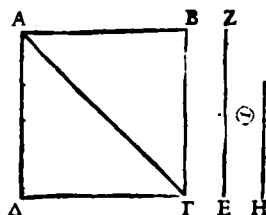
Soit le carré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le carré de ΑΓ est double du carré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le carré de ΓΑ

418 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. Διπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς AB διπλασίον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H ἄρτιος ἄρα ἐστίν⁸ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἀν⁹ ἦν, ἐπειδήπερ ἰάν

GA ad AB ita EZ ad H, et ut igitur ex GA quadratum ad ipsum ex AB ita ex EZ quadratum ad ipsum ex H. Duplum autem ex GA quadratum quadrati ex AB; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H; par igitur est quadratus ex EZ; quare et ipse EZ par est. Si enim esset impar, et ex ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quocunque com-



περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἦ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ EZ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ EZ, H ἀριθμοὶ¹⁰ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς¹¹, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐστίν¹² ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ, H δυὰς ἀν¹³ ἐμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἡμισυ, πρώτους ὄντας

ponantur, multitudo autem ipsorum impar sit, totus impar est; ipse EZ igitur par est. Secetur bifariam in Θ. Et quoniam numeri EZ, H minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Atque est EZ par; impar igitur est H. Si enim esset par, ipsos EZ, H binarius metiretur, omnis enim par habet partem dimidiam, primos existentes

sera au quarré de AB comme le quarré de EZ est au quarré de H. Mais le quarré de ΓΑ est double du quarré de AB; le quarré de EZ est donc double du quarré de H; le quarré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair; car s'il était impair, son quarré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 419

πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ H · περισσὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιον ἐστὶν¹⁴ ὁ EZ τοῦ $EΘ$, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ $EΘ$ διπλάσιος δι' ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H · διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ ἀπὸ τοῦ $EΘ$ ¹⁵. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ H · ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ H . Ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα¹⁶. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Α Λ Λ Ω Σ'.

Εστω² ἀντὶ μὲν τοῦ διαμέτρου ἡ A , ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ B · λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω σύμμετρος· καὶ γιγνέτω³ πάλιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ EZ ἀριθμὸς πρὸς τὸν H , καὶ ἴστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς οἱ EZ , H^4 · οἱ EZ , H ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Λέγω πρῶτον ὅτι H οὐκ ἴστί μονάς. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω

inter se, quod est impossibile; non igitur par est H ; impar igitur. Et quoniam duplus est EZ ipsius $EΘ$, quadruplus igitur ex EZ quadratus quadrati ex $EΘ$; duplus autem ex EZ quadratus quadrati ex H ; duplus igitur ex H quadratus quadrati ex $EΘ$; par igitur est quadratus ex H ; par igitur ex dictis ipse H . Sed et impar, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est $ΑΓ$ ipsi $ΑΒ$ longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit pro diametro quidem A , pro latere verò B ; dico incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim possibile, sit commensurabilis; et fiat rursus ut A ad B ita EZ numerus ad H , et sint minimi EZ , H eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi EZ , H igitur primi inter se sunt. Dico primum H non esse unitatem. Si enim

Le nombre H n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais EZ est double de $EΘ$; le carré de EZ est donc quadruple du carré de $EΘ$ (11. 8). Mais le carré de EZ est double du carré de H ; le carré de H est donc double du carré de $EΘ$; le carré de H est donc pair; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite $ΑΓ$ n'est donc pas commensurable en longueur avec $ΑΒ$; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

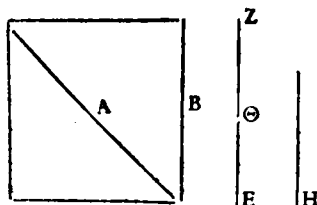
A U T R E M E N T.

Soit A la diagonale, et B le côté; je dis que A est incommensurable en longueur avec B . Que A , s'il est possible, soit commensurable avec B ; faisons en sorte que A soit encore à B comme le nombre EZ est au nombre H , et que les nombres EZ , H soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (24. 7); les nombres EZ , H seront premiers entr'eux. Je dis d'abord que H n'est pas l'unité; que H soit l'unité,

420 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μονάς. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς ἡ *A* πρὸς τὴν *B* οὕτως ὁ *EZ* πρὸς τὸν *H*· καὶ ὡς ἄρα τὸ⁵ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ⁶ ἀπὸ τῆς *B* οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ⁷ *EZ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*. Διπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τοῦ ἀπὸ τῆς *B*· διπλασίον⁸ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *EZ* τοῦ ἀπὸ τοῦ *H*. Καὶ ἐστὶ μονάς ὁ *H*. Δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ⁹ *EZ* τετραγώνος, ὅπερ

possible, sit unitas. Et quoniam est ut *A* ad *B* ita *EZ* ad *H*; et ut igitur ex *A* quadratum ad ipsum ex *B* ita ex *EZ* quadratus ad ipsum ex *H*. Duplum autem ex *A* quadratum quadrati ex *B*; duplus igitur et ex *EZ* quadratus quadrati ex *H*. Atque est unitas ipse *H*; binarius igitur ex *EZ* quadratus, quod est impossibile;



ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ *H*· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *A* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *B* οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ¹⁰ *EZ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *H*, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *B* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *A* οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *H* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *EZ*. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *B* τὸ ἀπὸ τῆς *A*· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *H* τετραγώνος τὸν ἀπὸ τοῦ *EZ*· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ *H* τὸν *EZ* μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ *H*· ὁ *H* ἄρα τοῦς *EZ*, *H* μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρές ἐστιν ἡ *A* τῇ *B* μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

non igitur unitas est ipse *H*; numerus igitur. Et quoniam est ut ex *A* quadratum ad ipsum ex *B* ita ex *EZ* quadratus ad ipsum ex *H*, et invertendo ut ex *B* quadratum ad ipsum ex *A* ita ex *H* quadratus ad ipsum ex *EZ*. Metitur autem quadratum ex *B* quadratum ex *A*; metitur igitur et quadratus ex *H* quadratum ex *EZ*; quare et *H* latus ipsius ipsum *EZ* metitur. Metitur autem et *H* se ipsum; ipse *H* igitur ipsos *EZ*, *H* metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est *A* ipsi *B* longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

si cela est possible. Puisque *A* est à *B* comme *EZ* est à *H*, le carré de *A* sera au carré de *B* comme le carré de *EZ* est au carré de *H*. Mais le carré de *A* est double du carré de *B*; le carré de *EZ* est donc double du carré de *H*; mais *H* est l'unité; le carré de *EZ* est donc le nombre deux, ce qui est impossible, *H* n'est donc pas l'unité; *H* est donc un nombre. Et puisque le carré de *A* est au carré de *B* comme le carré de *EZ* est au carré de *H*, par inversion, le carré de *B* sera au carré de *A* comme le carré de *H* est au carré de *EZ*. Mais le carré de *B* mesure le carré de *A*; le carré de *H* mesure donc le carré de *EZ*, le nombre *H* mesure donc le nombre *EZ* (14. 8). Mais *H* se mesure lui-même; le nombre *H* mesure donc les nombres *EZ*, *H* qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; la droite *A* n'est donc pas commensurable en longueur avec la droite *B*; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

ΣΧΟΛΙΟΝ¹.

SCHOLIUM.

Εὐρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὐρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λίγω δὲ ἐπίπιδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Εὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν² μίσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἴσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εἶδος³ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀνα-

Inventis utique longitudine incommensurabilibus rectis, ut Α, Β, inveniuntur et aliæ plurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus, dico et superficies incommensurabiles inter se. Si enim rectarum Α, Β mediam proportionalem Γ sumamus, erit ut Α ad Β ita figura ex Α ad figuram ex Γ, similem et si-



γραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἑτέρα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε καὶ κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς⁵ Α, Γ, ἐπεὶπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὐρηνται ἄρα καὶ ἐπίπιδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δειδωμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφύρων ἀσυμμέτρων χωρίων⁷, διίξομεν τοῖς⁸ ἀπὸ τῆς τῶν στεριῶν θεωρίᾳ, ὡς ἔστι καὶ στεριὰ σύμμετρά τι καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.

milititer descriptam, sive quadrata sint descripta, sive alia rectilinea similia, sive circuli circa diametros Α, Γ, quoniam circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata; inventa igitur erunt et plana spatia incommensurabilia inter se. Quod oportebat ostendere. /

Ostensis utique et duarum dimensionum diversis incommensurabilibus spatiis, demonstrabimus ex solidorum theoriâ, esse etiam solida et commensurabilia et incommensura-

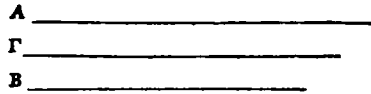
SCHOLIE.

Des droites incommensurables en longueur étant trouvées, comme les droites Α, Β, on trouvera plusieurs autres grandeurs de deux dimensions, c'est-à-dire des surfaces incommensurables entr'elles. Car si l'on prend une moyenne proportionnelle Γ entre les droites Α, Β (13. 6); la droite Α sera à Β comme la figure construite sur la droite Α est à la figure construite sur la droite Γ, les figures Α, Γ étant semblables et semblablement décrites (20. 6), soit que les figures décrites soient des quarrés ou des figures rectilignes semblables; ou bien des cercles décrits autour des diamètres Α, Γ, parce que les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres (2. 12). On aura donc trouvé des surfaces planes incommensurables entr'elles. Ce qu'il fallait démontrer.

Ayant donc démontré que diverses figures de deux dimensions sont incommensurables entr'elles, nous démontrerons qu'il y a des solides commensurables et incommensurables entr'eux, d'après la théorie des solides. Car si sur les quarrés

Εάν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῃ στερεὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὲν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, εἴαν ἀπ' αὐτῶν ἰσοῦψεῖς κῶνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς¹⁰ αἱ βάσεις, τουτίστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ



μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἷτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους¹¹ καὶ οἱ κυλίνδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κυλίνδροι. Καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἵστί σύμμετρία καὶ ἀσύμμετρία¹², ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

bilia inter se. Si enim super quadrata ex Α, Β, vel æqualia ipsis rectilinea, constituamus æque alta solida, parallelepipeda, vel pyramides, vel prismata, solida constructa erunt inter se ut bases. Et si quidem commensurabiles sint bases, commensurabilia erunt et solida; si verò incommensurabiles, incommensurabilia. Quod oportebat ostendere.

Sed quidem et duobus circulis existentibus Α, Β, si super ipsos conos æque altos, vel cylindros constituamus, erunt hi inter se ut bases, hoc est ut circuli Α, Β. Et si quidem com-

mensurabiles sint circuli, commensurabiles erunt et coni inter se et cylindri; si verò incommensurabiles sint circuli, incommensurabiles erunt et coni et cylindri. Et manifestum est nobis fieri non solum et in lineis et superficiebus commensurabilitatem et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris.

des droites Α, Β ou sur des figures rectilignes qui leur soient égales, nous construisons des solides de même hauteur, des parallélépipèdes, des pyramides, des prismes; les solides qu'on aura construits seront entr'eux comme leurs bases (32. 11, et 6. 5. 12). Si les bases sont commensurables, les solides seront commensurables; et si les bases sont incommensurables, les solides le seront aussi (10. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on a deux cercles Α, Β, et si sur ces cercles on construit des cônes ou des cylindres de même hauteur, ces solides seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire comme les cercles Α, Β (11. 12). Si les cercles sont commensurables, les cônes et les cylindres seront commensurables entr'eux (10. 10); et si les cercles sont incommensurables, les cônes et les cylindres seront incommensurables. Il est donc évident pour nous que la commensurabilité ou l'incommensurabilité se rencontre non seulement dans les lignes et dans les surfaces, mais encore dans les solides.

COLLATIO

CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ

REGIÆ,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI
SUNT MOMENTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Ε, Ζ, Η, Θ	τῷ πλήθει	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	Id.	deest.
4. ὁ, τε μίζων τὸν μίζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτίστι	Id.	deest.

PROPOSITIO II.

1. ἂν τις ἐπιτάξῃ, ...	Id.	ἐπιτάξῃ τις,
2. ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πει- ποίηκεν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
in hac demonstratione quater deest adhuc hoc vocabulum.		
4. τῶν	τὸν	concordat cum edit. Paris.
5. Ως δὲ	Id.	ἀλλ' ὡς

424 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. οὕτως	οὕτως καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. ἀλλ'	<i>Id.</i>	ἰδίχθῃ δὴ καὶ
8. τι	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐ- τοῖς, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. ἰὰν	ἀν	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

1. μὲν ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ μὲν
2. αἰὶ	αἰ	concordat cum edit. Paris.
3. οὐ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Καὶ ἐπεὶ οἱ E, Z ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόν- των αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλ- λήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν E, Z ἑαυτὸν μὲν . . .	<i>Id.</i>	Οἱ ἄρα αὐτῶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ E, Z πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν
5. ἑκάτερον τῶν	<i>Id.</i>	τὸν ἕτερον τῶν
6. καὶ οἱ H, K ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. .	<i>Id.</i>	οἱ H, K ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ Λ, Ξ.
7. Καὶ εἰσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλ- λήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ A, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ.

PROPOSITIO IV.

1. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
2. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
6. τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις, ἴσονται τινες τῶν Θ, H, K, Λ ἐλάσ-	ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἐν τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις.	concordat cum edit. Paris.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS. 425

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

συνεῖς ἀριθμοὶ ἐν τε τοῖς τοῦ Α
πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς
τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν
Ζ λόγους.

a.

b, d, e, f, g, h, k, l, n.

7. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ	Id.	τῶν ὑπὸ Β, Γ
9. μιτρούμανός ἐστιν, ...	μιτρίται, ...	concordat cum edit. Paris.
10. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε	Id.	εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ
15. ἔτι	Id.	deest.
16. ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγους. Εἰ γὰρ μὴ, ...	Id.	Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις,
17. ἀνάλογον	Id.	deest.
18. τε	Id.	deest.
19. ἀνάλογον	Id.	deest.
20. ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς	ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσι τοῖς	ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς

PROPOSITIO V.

1. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
3. τὴν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
4. Καὶ ὁ Δ	Id. a, d, e, f, g, n.	Οἱ ἄρα Η, Θ, Κ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν τοὺς τῶν πλευρῶν λό- γους. Αλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λό- γον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν λόγῳ οὖν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ. Ο Δ γὰρ h, k, l.

426 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

5. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρίτω ὁ Α *Id.* Λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ.
τὸν Γ. Καὶ ὅσοι Ὅσοι γὰρ
2. ἀριθμὸν μετρεῖ, ... *Id.* μετρεῖ ἀριθμὸν.
3. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. οὐ *Id.* μὴ
2. μετρήσει *Id.* μετρήσει, ὅπερ ἀτοπον· ὑπόκειται
γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖν·

PROPOSITIO VIII.

1. αὐτοῖς deest. concordat cum edit. Paris.
2. οἱ deest. concordat cum edit. Paris.
3. τουτίστιν ὁ ἡγούμενος τὸν *Id.* ἰσάκεις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ
ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν
ἐπόμενον. Ἰσάκεις ἄρα ὁ Η τὸν
Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Α τὸν Ζ· ὁσάκεις
δὴ
4. εἰσὶν καὶ εἰσιν concordat cum edit. Paris.
5. ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· *Id.* ἀνάλογόν εἰσιν ἑξῆς

PROPOSITIO IX.

1. μονάδος μονάδος ἑξῆς concordat cum edit. Paris.
2. μεταξὺ *Id.* deest.
3. τῆς τῆς Ε concordat cum edit. Paris.
4. ὁ Ζ *Id.* ὁ Ζ πρὸς
5. τῷ Ζ *Id.* αὐτῷ
6. ὁ Θ ὁ Ε concordat cum edit. Paris.
7. ἶσος δὲ ὁ Μ τῷ Α· *Id.* Ο δὲ Μ τῷ Α ἶσος ἐστίν·

PROPOSITIO X.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἀριθμῶν	ἀριθμῶν ἑκατέρου . . .	concordat cum edit. Paris.
2. μονάδος	<i>Id.</i>	μοιᾶδος ἐξῆς
3. τε	<i>Id.</i>	deest.
4. ἄρα	ἄρα ἀριθμὸς	concordat cum edit. Paris.
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πεποιήκειν	<i>Id.</i>	deest.
7. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Α, . .	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XI.

1. ἴστιν	<i>Id.</i>	ἴστιν ἀριθμὸς
2. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β .	<i>Id.</i> α.	Πάλιν, ἐπὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλα- πλασιάσας τὸν Ε πεποιήκειν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, δύο δὲ ἀριθ- μοὶ οἱ Γ, Δ εἶνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ πολλαπλασιάσαν- τες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Αλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε <i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
3. ὁ Ε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πλευράν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

1. καὶ ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ ἄρα
2. ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλα- σιάσας τὸν Ε πεποιήκει, . .	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐπὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ἔ, τε Α πρὸς τὸν Θ, τὸν Θ	καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ, τε Α πρὸς τὸν Θ	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἰξῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
3. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ἴστωσαν	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἀλλὰ δὴ μετρεῖται ὁ Γ τὸν Δ	πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ με- τρεῖται	concordat cum edit. Paris.
4. ἰξῆς	<i>Id.</i>	deest.
5. μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρήσει.
3. ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιά- σας τὸν Η ποιεῖται, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖται, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖται, δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖται, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖται, δὲ
4. δὴ	<i>Id.</i>	ἐπεὶ γὰρ
5. Καὶ ἐπεὶ	<i>Id.</i>	ἐπεὶ γὰρ

PROPOSITIO XVI.

1. οὐδ'	<i>Id.</i>	οὐδὲ ὅδε
2. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴστωσαν	<i>Id.</i>	deest.
4. λίγω	λίγω δὲ	concordat cum edit. Paris.
5. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρήσει.
6. μετρεῖται	<i>Id.</i>	μετρεῖται δὴ
7. μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	καὶ ὁ τὸν Δ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι . . .	ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τουτέστιν ἥπερ ἡ ὁμολογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολογον.	<i>Id.</i>	ἡ ὁμολογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμολογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ὅ, τι	<i>Id.</i>	ὅ

PROPOSITIO XIX.

1. μὲν ὁ	<i>Id.</i>	ὁ μὲν
2. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. εἰδείχθη.	<i>Id.</i>	εἰδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Α.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. εἰσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ·	Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ πρὸς τὸν Θ· α. . .	concordat cum edit. Paris. <i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
8. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
9. λόγῳ.	<i>Id.</i>	deest.
10. Θ	<i>Id.</i>	Θ λόγῳ
11. πολλαπλασιάσας	<i>Id.</i>	πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῆς Ζ, Η
12. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
13. ἔστιν ἄρα ὡς	καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα	concordat cum edit. Paris.
14. ὅ, τι	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. οἱ	<i>Id.</i>	deest.
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δὴ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. δὲ	<i>Id.</i>	δὴ
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πο- λλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μιτρῇ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἰκάντερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν	<i>Id. a, h, l.</i>	Ἐπεὶ γὰρ ἰκάντερος τῶν Ζ, Η τὸν Ε πολλαπλασιάσας ἰκάντερον τῶν Γ, Β πεποίηκε· <i>b, d, e,</i> <i>f, g, k, n.</i>
8. Καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η . . .	<i>Id.</i>	deest.
9. πλευραὶ αὐτῶν	<i>Id.</i>	αὐτῶν πλευραὶ

PROPOSITIO XXI.

1. οἱ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γὰρ	<i>Id.</i>	γὰρ τρεῖς
3. τρεῖς	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀριθμοί	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τοῦ πρὸ	<i>Id.</i>	deest.
6. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
7. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ·	<i>Id.</i>	deest.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS. 431

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

8. δὴ ὁ Ε τὸν Γ . . .	<i>Id.</i> . . .	δὲ ὁ Η τὸν Β
9. καὶ . . .	<i>Id.</i> . . .	deest.
10. πεποίηκε . . .	<i>Id.</i> . . .	πεποίηκε τὸν δὲ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν
11. αὐτοῦ . . .	<i>Id.</i> . . .	αὐτῶν
12. δὴ . . .	deest. . .	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως . . .	deest. . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIV.

1. οὕτως . . .	deest. . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. λέγω . . .	<i>Id.</i> . . .	λέγω δὴ
2. ἀριθμοὶ, . . .	deest. . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVII.

1. ἀριθμοὶ . . .	<i>Id.</i> . . .	deest.

LIBER NONUS. .

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἐπίπεδοι	<i>Id.</i>	deest.
2. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν . .	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν
3. ἀριθμῶν μεταξὺ	<i>Id.</i>	μεταξὺ ἀριθμῶν

PROPOSITIO II.

1. ἀριθμοί.	<i>Id.</i>	deest.
2. Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω .	<i>Id.</i>	Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλα- πλασιάσαντες ἀλλήλους τετρά- γωνον τὸν Γ ποιείτωσαν·
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἀριθμός.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα Α, Β	<i>Id.</i>	Α, Β ἄρα

PROPOSITIO III.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀριθμοὶ ἑμπεπτώκασιν· . .	<i>Id.</i>	ἑμπεπτώκασιν ἀριθμοί·
6. ἑμπεσοῦνται	<i>Id.</i>	ἑμπεπτώκασιν
7. δεύτερος	<i>Id.</i>	τίτατος

PROPOSITIO IV.

1. γὰρ Α	<i>Id.</i>	Α γὰρ
2. οἱ Α, Β·	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμός	<i>Id.</i>	deest.

2. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.
3. τῶν Id. τὸν

PROPOSITIO VI.

1. ἑαυτὸν Id. ἑαυτὸν μὲν
2. ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ Id. τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ
τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ
δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς
ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς $b, d,$
ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α $f, g, h, k, l, m, n.$
πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β
πολλαπλασιάσας τὸν Γ πιποίη-
κεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ
τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ
δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς
ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς
ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β
πρὸς τὸν Γ. Αλλ' ὡς ἡ μονὰς
πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν
Β· καὶ ὡς ἄρα

Nota. Tredecim priores
propositiones desunt in co-
dice 2344.

3. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.
4. οἱ Id. deest.
5. Β, Γ deest. concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ Id. deest.
κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας .
2. πιποίηκεν· Id. πιποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε
πολλαπλασιάσας τὸν Γ πιποίη-
κεν·

PROPOSITIO VIII.

1. ἴσται Id. ἴστιν
2. πάντες, ... deest. concordat cum edit. Paris.

434 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
3. πάντες, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πάντες.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. πάντες.	Id.	ἅπαντες.
6. ἀριθμὸν	Id.	deest.
7. πάντες	Id.	deest.
8. μὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴστί·	Id.	deest.
10. πάντες κύβοι εἰσὶ	Id.	ἅπαντες κύβοι τί εἰσι

PROPOSITIO IX.

1. ἀριθμοὶ ἐξῆς	ἐξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθ- μοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁσοῖδηποτοῦν	Id.	ὅποσοιούν
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	τι	concordat cum edit. Paris.
5. δὴ	Id.	δὲ
6. καὶ	Id.	deest.
7. λέγω	Id.	λέγω δὴ
8. καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἴστί. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO X.

1. γὰρ	Id.	deest.
2. ὁσοῖδηποτοῦν	Id.	deest.
3. χωρὶς	Id.	πλὴν
4. καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων. .	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὑπόκειται·	Id.	ὑπόκειται·
7. τετράγωνός ἐστι, ...	Id.	deest.
8. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. κύβον·	Id.	κύβον· οἱ B, Γ ἄρα ὅμοιοι στέραιοι.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε . . .	<i>Id.</i>	ἐλάττω ὁ Β τὸν Ε μείζονα
2. αὐτῷ	<i>Id.</i>	τῷ Δ
3. τῷ Δ	<i>Id.</i>	αὐτῷ
4. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.	καὶ φανερόν ὅτι ἢν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μοιᾶδος τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖται ἀπὸ τοῦ μετρούμενου κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.	deest in codicibus <i>b, c, d,</i> <i>e, g, h, k, l, m, n</i> ; hoc corollarium inter lineas codicis <i>f</i> est exaratum.

PROPOSITIO XII.

1. ἰξῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρήται, ...	<i>Id.</i>	μετρεῖται,
3. ἰσοσιδηποτοῦν	<i>Id.</i>	ἰσοσιδηποτοῦν
4. ἰξῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μετρεῖται ὁ Ε τὸν Α. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος	ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος ἴστι	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὅ τε	<i>Id.</i>	ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάτ- των τὸν ἐλάττωνα, τοῦτέστιν ὁ
13. καὶ ὁ Ε τὸν Α.	ὁ Ε τὸν Α, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενος.	concordat cum edit. Paris.
14. πρώτου	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἄλλου	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀπὸ μονάδος ὁποσοιῶν ἀριθμοὶ ἴξῃς	deest.	ὁποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος
3. πᾶς	Id.	ἅπας
4. ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Id.	deest.
5. πρώτου μετρηθήσεται, . . .	Id.	μετρηθήσεται πρώτου,
6. τὸν Δ μετρεῖ	Id.	μετρεῖ τὸν Δ,
7. ὁ Ζ οὐκ ἴστι	Id.	οὐκ ἔστιν ὁ Ζ
8. ἰστὶ πρώτος, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖ- ται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Id.	ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ὑπὸ τῶν	Id.	ἐκ τῶν
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ὑφ'	ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

1. πρώτου	Id.	deest.
2. τῶν	Id.	deest.
3. ἰστὶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μετρούμενός·	Id.	μετρούμενον·

PROPOSITIO XV.

1. τῶν Α, Β, Γ	Id.	deest.
2. δὴ	Id.	δα

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. πρὸς τὸν EZ πρῶτοί εἰσιν. *Id.* πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν EZ.
4. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ᾦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Ὡστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν.
6. ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι.
7. τῶν deest. concordat cum edit. Paris.
8. τῶν deest. concordat cum edit. Paris.
- ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί.
- καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. *b, d, e, f, g, h, k, m.*
- concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVI.

1. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.
2. ἀριθμοὶ *Id.* deest.
3. ἔχοντας *Id.* ἔχοντας αὐτοῖς
4. ἄτοπον *Id.* ἄτοπόν ἐστιν
5. ἴσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β . . *Id.* ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐστὶν

PROPOSITIO XVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEx 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἔχοντας	<i>Id.</i>	ἔχοντας αὐτοῖς
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὁ Α καὶ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ Α

PROPOSITIO XVIII.

1. καὶ εἰ	<i>Id.</i>	Εἰ μὲν οὖν
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. πότε	<i>Id.</i>	
2. πότε	<i>Id.</i>	εἰ

Tertium *alinea* sic se habet in codicibus *a*, *b*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Ἡ οὐκ εἶσιν ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὕτε ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, οὕτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ καὶ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Tertium *alinea* sic se habet in editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Οἱ δὲ Α, Β, Γ ἥτοι ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὐ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἰσίν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ οὕτε ἀνάλογον ἐξῆς, οὕτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Post quartum *alineā* hæc leguntur in codicibus *a, d, g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Μὴ ἴστωσαν δὲ οἱ *A, B, Γ* ἐξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρῶτων πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εἰδ' οὐκ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς εἶσιν, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. Εἰ γὰρ μὴ, προσευρήσθω, καὶ ἴστω ὁ *Δ*· ὥς οὖν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως ὁ

A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ----- E-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ *Δ*, ὥστε εἶναι ὥς τὸν *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως τὸν *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, καὶ γαίετιω ὥς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς μὲν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, ὥς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *E* πρὸς τὸν *E*· διίσου ἄρα ὥς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Οἱ δὲ *A, Γ* πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὥς ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς *A, B, Γ* δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Γ πρὸς τὸν *Δ*, ὥς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*· ἐξ ἴσου γοῦν ὥς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Ἀλλὰ μὴν οἱ *A, Γ* πρῶτοι εἶσι, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ *A* ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ πρῶτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς *A, B, Γ* ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἴστωσαν οἱ *A, B, Γ* ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ *A, Γ* μὴ ἴστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Πάλιν οἱ *A, B, Γ* ἀνάλογον ἐξῆς ἴστωσαν μὲν οἱ δὲ *A, Γ* ἄκροι οὐ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστιν.

EDITIO PARISIENSIS.

COD. 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ὁ δὲ <i>A</i>	ὁ <i>A</i> ἄρα	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	μὴν	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τοῖς	<i>Id.</i>	τῶν
7. ἀνάλογον	ἀνάλογον εἰς	concordat cum edit. Paris.

440 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

Post ultimum *alinea* editionis Parisiensis hæc leguntur in codicibus *a*, *d*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Ἀλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἑξῆς ἕττωσαν ἀνάλογον, μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω.

Ἀλλὰ μὴν οὐτ' ἀνάλογον ἑξῆς οἱ Α, Β, Γ οὔτε πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἕττωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, ὁμοίως

Α, 3. Β, 4. Γ, 9. Ε, 12. Δ, 36.
Α, 4. Β, 5. Γ, 14. Ε--- Δ, 70.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

δείξομεν ἂν ὁ Α τὸν Δ μετρή ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν· ἂν δὲ μὴ μετρή, ὅτι ἀδύνατον. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

Nota. Subsequentia adsunt in codice 190 inter et vocabulum ἀλλήλους et vocabulum λέγω secundi *alinea* paginae 439; quæ quidem Euclidis esse non possunt.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

deest.

* Λέγω ὅτι καὶ οὕτως δύνατον. Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ μετρεῖ, προσήσεται ἡ δείξις ὁμοίως τοῖς ἑξῆς. Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ, ἀδύνατον αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Οἷον ἕστω ὁ μὲν Α τριῶν τινῶν, ὁ δὲ Β, ἑξ· ὁ δὲ Γ, ἑπτά· καὶ δηλονοτὶ δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ Α εἴη πέντε, οὐκ ἔστι δυνατόν καὶ ἀπλῶς ὅτε μὲν ὁ Β πολλαπλασιάσας ἐστι τοῦ Α, δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν. Εἰ δὲ μὴ, ἀδύνατον.

deest.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
1. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω. . .	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ ὁ Η ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ εἰσὶν αὐτοῖς,
2. ἄρα	<i>Id.</i>	concordat cum edit. Paris.
3. Ο αὐτὸς δὲ καὶ	<i>Id.</i>	καὶ

PROPOSITIO XXII.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Ἔστι	Ἔστω	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIII.

1. ὅποσοι οὖν περισσοὶ ἀριθμοὶ, .	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ περισσοὶ ὅποσοι οὖν,

PROPOSITIO XXIV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
2. ἀφηρήσθω ἄρτιος, ...	<i>Id.</i>	ἄρτιος ἀφηρήσθω
3. ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ ἄρτιος	ἄρτιός ἐστιν ὁ ΑΓ. . .	concordat cum edit. Paris.
ἄρα ἴσθιν ὁ ΑΓ.		

PROPOSITIO XXV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
2. ὅτι ὁ	<i>Id.</i>	ὅτι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ

PROPOSITIO XXVII.

1. περισσοῦ	<i>Id.</i>	περισσοῦ ἀριθμοῦ
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ὁποσοιῶν ὅποσοι concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIX.

1. ἴστιν *Id.* Ο δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἴστιν.

PROPOSITIO XXX.

1. ὁ ἄρα B ὁ B ἄρα concordat cum edit. Paris.
2. ἴστιν *Id.* deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. διπλασίονα *Id.* διπλάσιον
2. διπλασίῳ *Id.* διπλάσιος
3. ὁ A *Id.* ὁ A καὶ
4. ὁ Δ deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXII.

1. δυάδος *Id.* διάδος
2. δυάδες *Id.* διάδες
3. Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν B, Ὅτι μὲν ἕκαστος ἀρτιός concordat cum edit. Paris.
Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι, φα- ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ
νερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος διάδος
4. Λέγω *Id.* Λέγω δὲ
5. ἡ E deest. concordat cum edit. Paris.
6. ὅτι deest. ὅτι καὶ

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἄρτιος, ... *Id.* ἄρτιος, ὁ ἡμῖς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄρτιος	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. διάδος	Id.	διάδος
3. διάδος	Id.	διάδος
4. περισσός ἐστιν.	Id.	ἐστὶ περισσός.
5. τίμωμεν	Id.	τ' μωμεν
6. ποιῶμεν	Id.	ποιῶμεν,
7. ἀριθμὸν	Id.	deest.
8. διάδα, ...	Id.	τινα περισσὸν ὃ μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, καταντή- σομεν εἰς διάδα,
9. διάδος	Id.	διάδος.
10. ὁ Α	Id.	ὁ Α καὶ

PROPOSITIO XXXV.

1. ἴσοι	Id.	ἴσος
2. πάντας	Id.	ἅπαντας
3. ὁποσοιδηποτοῦν	Id.	ὁσοιδηποτοῦν
4. ἐστὶ	Id.	deest.
5. τοὺς	Id.	τὸν

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὁσοιδηποτοῦν	Id.	ὁποσοιδοῦν
2. deest.	Περὶ τὸν ἐχέτω. Λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ- τιος καὶ ἀρτιάκις πε- ρισσός. Οτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ- τιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἡμισυν οὐκ ἔχει περισ- σόν· λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐσ- τιν. Εὰν γὰρ τὸν Α	deest.

τίμνωμεν δίχα, καὶ τὸν
 ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ
 τοῦτο αἰὲ ποιοῦμεν,
 καταντήσωμεν εἰς τινα
 ἀριθμὸν περισσὸν, ὃς
 μετρήσει τὴν Α κατὰ
 ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ
 οὐ, καταντήσωμεν εἰς
 τινα ἀριθμὸν περισσὸν,
 ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ
 ἄρτιον ἀριθμόν· κατα-
 ντήσωμεν εἰς δυάδα, καὶ
 ἴσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυά-
 δος διπλασιαζομένων,
 ὅπερ οὐκ ὑπόκειται·
 ὥσπερ ὁ Α ἀρτιάκις πε-
 ρισσός ἐστιν. Εδείχθη
 δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος·
 ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός
 ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισ-
 σός. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

3. καὶ	Id.	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μό- νον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει· . .	Id. a.	σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.
4. τετράγωνα	Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.	τετράγωνος
5. ἴσα	Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.	ἴσαι

PROPOSITIO I.

1. γίνονται· ληφθήσεται τι μέ- γεθος, ὃ ἴσται ἔλασσον τοῦ .	Id.	ἂν γίνονται· ληφθήσεται τι μέγε- θος, ὃ ἴσται ἔλασσον
2. καὶ τοῦτο αἰὶ γίνονται, ληφ- θήσεται τι μέγεθος ὃ ἴσται .	Id.	καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεί- ζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰὶ γίνονται, ληφθήσεται τι μέγε- θος ὃ ἴσται
3. Τὸ Γ γὰρ	Id.	Τὸ γὰρ Γ
4. AB	Id.	AB μεγέθους
5. ἡμίσεος	Id.	ἡμίσεος
6. ἢ τὸ ἥμισυ	Id.	τοῦ ἡμίσεος
7. ἢ τὸ ἥμισυ	Id.	τοῦ ἡμίσεος
8. ἡμίση	Id.	ἡμίση

ΑΛΛΩΣ*.

ALITER.

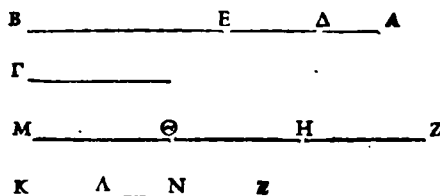
Ἐκείσθω δύο μεγέθη ἀνισα τὰ AB, Γ, ἴστω
δὲ τὸ Γ ἔλασσον¹, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, Exponantur duæ magnitudines inæquales AB,
Γ, sit autem Γ minor, et quoniam minor est

AUTREMENT.

Soient exposées deux grandeurs inégales AB, Γ; que Γ soit la plus petite.

* Hoc ἄλλως in margine codicis a est exaratum; deest autem in codicibus d, g, et in omnibus aliis est in textu.

πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὶ τοῦ AB μείζονος μείζον. Γεγονέτω ὡς τὸ ZM, καὶ διη-
ρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἴστω² τὰ MΘ,
ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀφηρέσθω μείζον
ἢ τὸ ἥμισυ τὸ BE, καὶ ἀπὸ τοῦ AE μείζον ἢ τὸ
ἥμισυ τὸ EA. Καὶ τοῦτο αἰ γιγνέσθω³ ἕως αἰ
ἐν τῷ AB διαιρέσεις ἴσαι γίνωνται ταῖς ἐν τῷ
ZM διαιρέσει. Γεγονέτωσαν ὡς αἰ BE, EA, ΔA,
καὶ τῷ ΔA ἕκαστον τῶν KA, AN, NE ἴστω
ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω⁴ ἕως αἰ⁵ διαιρέσεις
τοῦ KE ἴσαι γίνωνται ταῖς τοῦ ZM.



Καὶ ἐπεὶ τὸ BE μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἴσται τοῦ
AB, τὸ BE μείζον ἴσται τοῦ EA· πολλῶν ἄρα
μείζον ἴσται τοῦ ΔA. Αλλὰ τὸ ΔA ἴσον ἴσται τῷ
EN⁶· τὸ BE ἄρα μείζον ἴσται τοῦ NE. Πάλιν,
ἐπεὶ τὸ EA μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἴσται τοῦ EA,
μείζον ἴσται τοῦ ΔA. Αλλὰ τὸ ΔA ἴσται ἴσον τῷ

Γ, multiplicata, erit aliquando magnitudine AB
major. Fiat ut ZM, et dividatur in partes
æquales ipsi Γ, et sit MΘ, ΘΗ, ΗΖ, et ab
AB auferatur majus quam dimidium BE, et ab
AE majus quam dimidium EA. Atque hoc sem-
per fiat quoad divisiones quæ in AB æquales
fiant divisionibus quæ in ZM. Fiant ut BZ, EA,
ΔA, et ipsi ΔA unaquæque ipsarum KA, AN,
NE sit æqualis, atque hoc fiat quoad divisiones
ipsius KE æquales fiant divisionibus ipsius ZM.

Et quoniam BE major quam dimidium est ip-
sius AB, ipsa BE major est quam EA; multo igitur
major est quam ΔA. Sed ΔA æqualis est ipsi EN;
ergo BE major est quam NE. Rursus, quoniam
EA major quam dimidium est EA, major est
quam ΔA. Sed ΔA est æqualis ipsi NA; ergo

Puisque la grandeur Γ est la plus petite, cette grandeur étant multipliée deviendra
enfin plus grande que AB. Qu'elle devienne ZM. Partageons ZM en parties égales
chacune à Γ; que ces parties soient MΘ, ΘΗ, ΗΖ; retranchons de AB une partie
BE plus grande que sa moitié, de AE une partie EA plus grande que sa moitié, et
faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit
égal au nombre des divisions de ZM. Que les divisions de AB soient BE, EA, ΔA; que
chacune des droites de KA, AN, NE soit égale à ΔA, et que le nombre des divisions
de KE soit égal au nombre des divisions de ZM.

Puisque BE est plus grand que la moitié de AB, la droite BE sera plus
grande que ΔA, et à plus forte raison que ΔA. Mais ΔA est égal à EN; la
droite BE est donc plus grande que NE. De plus, puisque la droite EA est
plus grande que la moitié de EA, cette droite sera plus grande que ΔA. Mais

ΝΑ⁷· τὸ ΕΔ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ ΝΑ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μείζον ἐστὶ τοῦ ΞΑ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ⁸· ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μείζον ἐστὶν ὅλου τοῦ ΞΚ. ΑΛΛὰ τοῦ ΒΑ μείζον ἐστὶ τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μείζον ἐστὶ τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἐστὶ δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλῆθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΞΚ πρὸς τὸ ΖΜ. Μείζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΑΚ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΑ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ ΑΔ. Οπιρ ἴδιαι δείξαι.

ΕΔ major est quam ΝΑ; tota igitur ΒΔ major est quam ΞΑ. Æquale autem ΔΑ ipsi ΑΚ; tota igitur ΒΑ major est quam tota ΞΚ. Sed quam ΒΑ major est ΜΖ; multo igitur ΜΖ major est quam ΞΚ. Et quoniam ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ æquales inter se sunt, sunt autem et ipsæ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ æquales inter se, atque est æqualis multitudo ipsarum in ΜΖ multitudini ipsarum in ΞΚ; est igitur ut ΚΑ ad ΖΗ ita ΞΚ ad ΖΜ. Major autem ΖΜ quam ΞΚ; major igitur et ΖΗ quam ΑΚ. Atque est quidem ΖΗ æqualis ipsi Γ; ipsa autem ΚΑ ipsi ΑΔ; ergo Γ major est quam ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

ΑΔ est égal à ΝΑ; la droite ΕΔ est donc plus grande que ΝΑ; la droite entière ΒΔ est donc plus grande que ΞΑ. Mais ΔΑ est égal à ΑΚ; la droite entière ΒΑ est donc plus grande que la droite entière ΞΚ. Mais ΜΖ est plus grand que ΒΑ; la droite ΜΖ est donc à plus forte raison plus grande que ΞΚ. Et puisque les droites ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ sont égales entr'elles, que les droites ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties de ΜΖ est égal au nombre des parties de ΞΚ, la droite ΚΑ sera à ΖΗ comme ΞΚ est à ΖΜ (12. 5). Mais ΖΜ est plus grand que ΞΚ; la droite ΖΗ est donc plus grande que ΑΚ (14. 5). Mais ΖΗ est égal à Γ, et ΚΑ égal à ΑΔ; la droite Γ est donc plus grande que ΑΔ. Ce qu'il falloit démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἴστω δὲ τὸ Γ ἴλαπτον, . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἴστω . . .	Id.	τὰ ἴσα τῷ Γ
3. γιγνέσθω	γίνεσθω	concordat cum edit. Paris.
4. γιγνέσθω	γίνεσθω	concordat cum edit. Paris.
5. ἂν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ· . . .	Id.	τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΝ·
7. τὸ ΑΔ ἐστὶν ἴσον τῷ ΝΑ· . . .	Id.	τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΝΑ·
8. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ . . .	Id.	Αλλὰ καὶ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΚ·

PROPOSITIO II.

1. ὄντων	Id.	ἐκκειμένων

2. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ ὄντος
3. τὸ	<i>Id.</i>	ὁ
4. ἰστὶν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

1. μεγέθη σύμμετρα	<i>Id.</i>	σύμμετρα μεγέθη
2. μέγεθος ἥτοι	μέγεθος	ἥτοι
3. οὖν	<i>Id.</i>	οὖν τὸ AB τὸ ΓΔ
4. τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἰστὶ, καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον	<i>Id.</i>	κοινὸν μέτρον ἰστὶ τῶν AB, ΓΔ. Καὶ φανερόν ὅτι μέτρον ἰστὶ μέγιστον
5. καὶ ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος	<i>Id.</i>	ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάτ- τονος αἰ
6. ΕΔ	<i>Id.</i>	ΓΔ
7. ΑΖ δὲ	<i>Id.</i>	δὲ ΑΖ
8. τὸ ΑΖ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μετρεῖ	Hæc phrasis contrac- ta margini exarata est manu alienâ.	concordat cum edit. Paris.
9. Ἐστω	<i>Id.</i>	μετρεῖται, καὶ
10. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. λοιπὸν	<i>Id.</i>	λοιπὸν ἄρα
12. AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	AB, ΓΔ μεγέθη

PROPOSITIO IV.

1. δύο	<i>Id.</i>	deest.
2. οὐ	<i>Id.</i>	οὐ μετρεῖ
3. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A, B, τὸ Δ ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ . . .	Hæc phrasis exarata est litteris mino- ribus in infimâ pa- ginâ.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ Δ ἄρα	τὸ δὲ ΑΔ	concordat cum edit. Paris.
5. A, B οὐ μετρεῖ	<i>Id.</i>	A, B, Γ οὐ μετρήσει. Εἰ γὰρ δυ- νατὸν, μετρεῖται τὰ A, B, Γ μειζόν τοῦ Δ μεγέθους, τὸ E.

a, e. Καὶ ἐπεὶ τὰ *A, B, Γ* μετρεῖ,
καὶ τὰ *A, B* μετρήσει, καὶ τὸ
τῶν *A, B* μέγιστον κοινὸν μέτρον
μετρήσει τὸ *Δ*, τὸ μείζον τὸ
ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον. *d, f,*
g, h, l, m, n.

6. οὖν	<i>Id.</i>	deest.
7. μετρήσει	<i>Id.</i>	μετρεῖ
8. Τὸ <i>E</i> ἄρα τὰ <i>A, B, Γ</i> μετρεῖ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴστί μέτρον	<i>Id.</i>	μέτρον ἴστί.
10. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
11. <i>A, B</i>	<i>Id.</i>	<i>A, B</i> ἄρα
12. Τὸ δὲ τῶν <i>Γ, Δ</i> μέγιστον κοι- νὸν μέτρον ἴστί τὸ <i>E</i> · τὸ <i>Z</i> ἄρα τὸ <i>E</i> μετρεῖ, ...	ἴστί δὲ τὸ <i>E</i> , τὸ <i>Z</i> ἄρα τὸ <i>E</i> μετρήσει, ...	concordat cum edit. Paris.
13. μεγέθη	deest.	concordat cum edit Paris.
14. ἴαν	ἴαν	concordat cum edit. Paris.
15. συμμέτρων δοθέντων, ...	<i>Id.</i>	δοθέντων συμμέτρων,

COROLLARIUM.

16. μέτρον μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει μέτρον.
17. προχωρήσει.	προχωρήσει. Οπὶρ ἴδω δείξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
2. τὰ <i>A, B</i> πρὸς ἀλλήλα	<i>Id.</i>	πρὸς ἀλλήλα τὰ <i>A, B</i>
3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	ταὐτὸ
4. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

450 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

linea 1	μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α.	Legere est in infimā paginā edit. Oxoniæ : <i>illa in uncis inclusa desiderantur in utroque codd. mss.</i>	concordat cum edit. Paris.
		Illa non desiderantur in codicibus <i>a, d, e, f, g, h, l, m, n.</i>	
5.	τὸ Γ	ὁ Γ	concordat cum edit. Paris.
6.	ἀριθμόν·	<i>Id.</i>	deest.
7.	τῷ Ζ	<i>Id.</i>	τῷ Ζ μετρίθη
8.	τὸν Ε.	<i>Id.</i>	τὸν Ε ἀριθμόν.
9.	ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
10.	τὸ Α	deest.	concordat cum edit. Paris.
11.	μετρεῖ	deest.	μὲν

A L I T E R*.

1.	οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2.	τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
3.	οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4.	οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5.	τὸ	<i>Id.</i>	τὸν
6.	καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7.	μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἴπτι	deest.	concordat cum edit. Paris.
8.	Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.	<i>Id.</i>	deest.

C O R O L L A R I U M**.

1.	ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν οὕτως ἢ εὐθείᾳ	<i>Id.</i>	τὸν Δ ἀριθμόν πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν οὕτως τὴν εὐθείαν
2.	εὐθείας.	εὐθείας. Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

* Deest in codd. *d, e*; reperitur autem in codd. *f, g, h, l, m, n*; atque est exaratum in summā paginā codicis *a*.

** Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἴστι	<i>Id.</i>	ἴσται
2. Εἰ γὰρ ἴσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθ- μὸς πρὸς ἀριθμὸν.	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἴστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὅνπερ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

PROPOSITIO IX.

1. ὃν	<i>Id.</i>	ὅνπερ
2. ὃν	<i>Id.</i>	ὅνπερ
3. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
4. ὃν	<i>Id.</i>	ὅνπερ
5. πρὸς τὸν Δ, ...	<i>Id.</i>	ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν,
6. τοῦ δι Γ πρὸς τὸν Δ	<i>Id.</i>	τοῦ δι τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν
7. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον.	<i>Id.</i>	ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετρά- γωνον ἀριθμὸν. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.
10. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
13. τοῦ Δ	<i>Id.</i>	τοῦ Δ τετράγωνον
14. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
15. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
16. τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
17. τετραγώνου	<i>Id.</i>	τετραγώνου ἀριθμοῦ
18. τοῦ Δ	<i>Id.</i>	τοῦ Δ ἀριθμοῦ
19. τετράγωνον	<i>Id.</i>	τετράγωνον ἀριθμὸν
20. τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
21. λόγου	<i>Id.</i>	ἀριθμοῦ λόγον
22. ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ ἀριθμὸς
23. τὸν Δ	<i>Id.</i>	τὸν Δ ἀριθμὸν

452 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
24. μήκει.	<i>Id.</i>	μήκει. Οπιρ ἴδι διῖξαι.
25. δὴ	<i>Id.</i>	δὴ
26. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
27. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
29. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
30. δὴ	<i>Id.</i>	δὴ
31. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴστι
33. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ variæ partes hujus ἄλλως insertæ sunt in varias partes propositionis 9; in codicibus autem *a* et *d* hoc ἄλλως exaratum est in margine; in codicibus vero *a*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n* sic ordo se habet: 1° prop. 9 corollarium; 2° lemma prop. 10; 3° ἄλλως prop. 9; 4° prop. 11; 5° prop. 10.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ δὲ Γ τὸν Δ	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Δ
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ὁ δὲ Δ τὸν Γ	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Γ
linea 13 ἀριθμόν.	<i>Id.</i>	ἀριθμόν. Οπιρ ἴδι διῖξαι.
5. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστι	ἴστι	concordat cum edit. Paris.
7. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η,	Legere est in infima paginâ editionis Oxoniæ : desiderantur in codd. mss.	concordat cum edit. Paris.

Illa non desiderantur in codicibus *a*, *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

linea 12 ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, etc. usque ad vocabulum ὅπερ.	Legere quoque est in infimâ paginâ : <i>illa uncis inclusa non agnoscunt codd. mss.</i>	concordat cum edit. Paris.
	Illa agnoscunt codices <i>a, e, f, g, h, l, m, n.</i>	
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τὸν Ζ. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.	τὸν Ζ.	concordat cum edit. Paris.

C O R O L L A R I U M*.

1. φανερόν	<i>Id.</i>	φανερόν ἴστω
2. ἴσται	<i>Id.</i>	deest.
3. σύμμετροι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.	deest. <i>a, d, e, f, g, h, l, m, n.</i>	concordat cum edit. Paris.
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. εἰσὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. οὖν	<i>Id.</i>	deest.
8. ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἴσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, ...	<i>Id.</i>	ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἑτερόν τινα ἀριθμὸν, σύμμετρά ἴσται τὰ τετράγωνα, τοῦτίστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει,
9. τὰ μὲν μήκει σύμμετρα	<i>Id.</i>	αἱ μὲν μήκει σύμμετροι
10. τὰ	<i>Id.</i>	αἱ
11. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. δυνάμει.	deest.	δυνάμει ἀσύμμετροι.
13. Ἐπεὶ δὲ γὰρ	<i>Id.</i>	Ἐπειδήπερ
14. ἀριθμὸς	τετράγωνος ἀριθμὸς	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

15. ἀριθμὸν, ...	τετράγωνον ἀριθμὸν, . .	concordat cum edit. Paris.
16. τῷ	<i>Id.</i>	deest.
17. μήκει δύνανται, ...	<i>Id.</i>	καὶ δύνανται μήκει,
18. μήκει	<i>Id.</i>	ἴσιν

PROPOSITIO X.

2. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσιν.
3. ἴσται.	<i>Id.</i>	ἴσιν.
4. ἀριθμὸν	<i>Id. a, d, e, h, l.</i> . .	ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει λόγον ἐν ἀριθ- μοῦς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λό- γον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθ- μὸν, καὶ ἴσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον, ὑπέκειται γὰρ ἀσύμμετρον τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν <i>f, g, m, n.</i>

PROPOSITIO XI.

1. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
3. τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσιύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμ- μετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν μό- νον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὲ ἡ Ε.	<i>Id. a, e, h, l.</i> . .	τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμιν τὰ μέτρα λαμ- βάνεσθαι, οἷον ἐτῇ Α, δυνά- μει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, του- τίστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμ- μετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγου γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μή- κει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ. <i>d, f, g, m, n.</i>

PROPOSITIO XII.

1. Β τῷ Γ, ...	Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

Hæc propositio, quæ prorsus eadem est quæ subsequens, exarata est vocabulis contractis, et alienâ manu in summâ paginâ codicis *a*, in margine vero cod. *d*, et in textu codd. *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἄλλω	<i>Id.</i>	ἰτέρῳ
lin. 9 paginae 147 τὸ Β τῷ Γ,	τὸ Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.

LEMMA.

1. ὀρθή ἐστιν	<i>Id.</i>	ἐστὶν ὀρθή
2. τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
3. εὐθεῖαι δοθεῖσαι	<i>Id.</i>	δοθεῖσαι εὐθεῖαι
4. κείσθωσαν	<i>Id.</i>	ἐκείσθωσαν

PROPOSITIO XV.

1. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει
2. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει.
3. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει
4. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει.
5. δὴ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
6. τῇ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVI.

1. ἴστί σύμμετρον.	<i>Id.</i>	σύμμετρον ἴστιν.
2. ΑΓ	<i>Id.</i>	καὶ τὸ ΑΓ

456 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ΑΓ ἐνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴστω σύμ- AB, ΒΓ ἴστω σύμμετρον concordat cum edit. Paris.
ματρον, ἴστω δὲ τῷ ΑΒ* . . τῇ ΑΒ*

PROPOSITIO XVII.

1. Συγκρίσθω *Id.* Συγκρίσθωσαν
2. ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, με- ἀσύμμετρον τὸ ΓΑ, ΑΓ με- concordat cum edit. Paris.
τρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Με- τρήσει τι μέγεθος. Με-
τρίτω, καὶ ἴστω, εἰ δυνατόν, τρίτω, εἰ δυνατόν, καὶ
τὸ Δ. ἴστω τὸ Δ.
3. ἴσθιν ἀδύνατον* *Id.* ἀδύνατόν ἴσθιν*
4. ἴστω, καὶ ἴστω δὴ concordat cum edit. Paris.
5. ἴσται *Id.* ἴστι
6. ὑπέκιντο *Id.* ὑπέκιντο
7. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ deest. *a, d, e, f, g.* concordat cum edit. Paris.
ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἴστι, καὶ
ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἴσται. .

LEMMA*.

1. παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, . *Id.* τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον,
2. ΑΓ, ΓΔ, τουτίσσι τὸ ὑπὸ τῶν *Id.* ΑΓ, ΓΒ.
ΑΓ, ΓΒ.

PROPOSITIO XVIII.

1. παραλληλόγραμμον . . . deest. concordat cum edit. Paris.
2. μήκει* *Id.* μήκη*
3. μήκει. deest. concordat cum edit. Paris.
4. δύνηται *Id.* δυνήσεται
5. μήκει, ... deest. concordat cum edit. Paris.
6. τιτάρτω *Id.* τιτάρτω μίρει
7. παραλληλόγραμμον . . . deest. concordat cum edit. Paris.
8. μήκει. *Id.* μήκη.
9. παραλληλόγραμμον . . . deest. concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

10. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τῇ	Id.	τῇ
12. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τετραπλασίου τοῦ	Id.	τετράκις
14. τετραπλασίῳ τοῦ	Id.	τετράκις
15. τετραπλασίῳ τοῦ	Id.	τετράκις
16. ἡ ΖΔ	Id.	ΖΔ
17. τετραπλασίῳ τοῦ	Id.	τετράκις
18. σύμμετρός ἐστι ταῖς BZ, ΓΔ μήκει*	Id.	ταῖς BZ, ΓΔ ἐστὶ σύμμετρος μήκει*
19. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
21. μείζον τῆς Α	deest.	τῆς Α μείζον
22. ἑαυτῇ*	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 paginæ 159 σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ* ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει* καὶ διελόντι	Id.	τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἴση γάρ ἐστι ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ* καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΔΓ* δηλονότι

PROPOSITIO XIX.

1. μήκει*	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δύνηται	Id.	δυνήσεται
3. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πρότερον, ...	Id.	προτίετο
5. ὅτι καὶ	Id.	οὖν ὅτι
6. μήκει, ...	Id.	deest.
linea 13 paginæ 160 ἄρα	Id.	deest.
linea 2 paginæ 161 ἑαυτῇ. . . .	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
8. ἑαυτῇ*	ἑαυτῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἡ	Id.	καὶ ἡ

SCHOLIUM I*.

1. Ἐπεὶ	Id.	Ἐπεὶ δὲ

* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

II.

2. εἰςὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμεις	αἱ δὲ δυνάμεις σύμμετροι	concordat cum edit. Paris.
3. δὴ δύναται μήκει	Id.	δηλαδὴ δύναται καὶ μήκει
4. ἐπεὶ αἱ	Id.	αἱ γὰρ
5. αὐτῇ	Id.	deest.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'*

SCHOLIUM II.

ῤητὰς γὰρ¹ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένη ῤητῇ ἥτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰςὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένη ῤητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῤηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὃ ῤηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῤηταὶ μήκει σύμμετροι, ἱπακουμένου καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰςὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως² ῤηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οἱ δὲ αἱ ῤηταὶ σύμμετροί εἰσιν,

Rationales enim vocat eas expositæ rationali vel longitudine et potentiâ commensurabiles, vel potentiâ solùm. Sunt autem et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt expositæ rationali, potentiâ vero solùm commensurabiles, et ob id rursus dicuntur rationales et commensurabiles inter se quatenus rationales, sed commensurabiles inter se, vel longitudine scilicet et potentiâ vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentiâ; si vero potentiâ solùm inter se sunt commensurabiles, dicuntur et ipsæ sic rationales potentiâ solùm commensurabiles. Quod et rationales commensurabiles sint, ex his manifestum est; quoniam

SCHOLIE II.

Car il appelle rationnelles celles qui sont commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement avec la rationnelle exposée. Il est d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec la rationnelle exposée, lui sont commensurables en puissance seulement; et à cause de cela elles sont encore dites rationnelles et commensurables entr'elles en tant que rationnelles; mais commensurables entr'elles en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, elles sont dites rationnelles commensurables en longueur, afin que l'on entende qu'elles le sont aussi en puissance; mais si elles sont commensurables entr'elles en puissance seulement, elles sont dites rationnelles commensurables en puissance seulement. Or, il est évident que les rationnelles sont com-

* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

ἐντεῦθεν δὴλον· ἵπαι γὰρ ῥηταὶ εἰσιν αἱ τῇ ἐκ-
κειμένη ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμ-
μετρα καὶ ἀλλήλοις ἰσὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα
ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν³.

enim rationales sunt quæ expositæ rationali
commensurabiles, quæ vero eidem commensu-
rabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ
igitur rationales commensurabiles sunt.

mensurables; car puisque les rationnelles sont commensurables avec la rationnelle
exposée, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur
sont commensurables entr'elles (12. 10), il s'ensuit que les rationnelles sont
commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ῥητὰς γὰρ	<i>Id.</i>	ῥητὰς
2. οὕτως	<i>Id.</i>	deest.
3. εἰσιν.	<i>Id.</i>	εἰσιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XX.

1. εἰρημένων	<i>Id.</i>	προειρημένων
2. σύμμετρος δὲ ἴστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἰσὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXI.

1. προειρημένων	<i>Id.</i>	εἰρημένων
2. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ἰσὶ

LEMMA*.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
2. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴστιν ἡ Α·	<i>Id.</i>	ἡ Α ἴστιν.
4. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	hæc phrasis contrac- ta est.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXII.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴστω

* Non deest in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

2. μίση.	μίση, διὰ τὸ τήν ἴσον ἀνα- γράφουσαν τιτράγωνον τῷ ΑΓ χωρίῳ ἢ καλεῖ μίσην, μίσην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>a, d.</i>	μίση, διὰ τὸ ἀπ' αὐτῆς τιτρά- γωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῷ ΑΒ, ΒΓ, καὶ μίσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>e,</i> <i>f, g, h, l, m, n.</i>

Subsequens scholium nihil aliud est quam propositio 22 aliter demonstrata.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

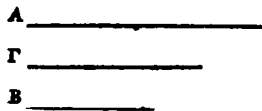
SCHOLIUM.

Μίση ἴστίαν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περι-
χόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Υπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων
εὐθειῶν τῶν Α, Β περιχέσθω χωρίον. Δεικνύον
ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Media est irrationalis quæ potest spatium con-
tinentum sub rationalibus potentiâ solùm com-
mensurabilibus.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm com-
mensurabilibus rectis Α, Β contineatur spatium.
Ostendendum est irrationale esse hujusmodi
spatium.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β μίση ἀνάλογον ἡ Γ·
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς Γ·
ὥστε ἡ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἴστί ἄρα

Sumatur enim ipsarum Α, Β media propor-
tionalis Γ; rectangulum igitur sub Α, Β æquale
est quadrato ex Γ; quare Γ potest rectangulum

S C H O L I E.

La médiale qui peut une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement, est irrationnelle.

Qu'une surface soit comprise sous les droites rationnelles Α, Β commensurables en puissance seulement; il faut démontrer qu'une telle surface est irrationnelle.

Car prenons une droite γ moyenne proportionnelle entre Α et Β; le rectangle sous Α, Β sera égal au carré de γ (17. 6); la droite γ peut donc le rectangle

* Deest in codd. *a, c, d, e, f, g, h, l, m, n*; reperitur vero in cod. *g*.

ὥς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ , ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δίδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιβ' τοῦ ε' στοιχείου. Ἀσύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς Γ . Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν A, B ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ . Μέση δὲ ἐκλήθη, ἵτι ἄλογος οὔσα μέσον δύο ρητῶν τῶν A, B ἀνάλογόν ἐστιν.

sub A, B ; est igitur ut A ad B ita ex A quadratum ad ipsum ex Γ , ut enim prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ, hoc epim demonstratum est in corollario propositionis 28 sexti Elementorum. Incommensurabilis autem A ipsi B longitudine; incommensurable igitur et ex A quadratum quadrato ex Γ . Rationale autem quadratum ex A ; irrationale igitur rectangulum sub A, B ; irrationalis igitur est Γ . Media autem vocatur, quod irrationalis existens media duarum rationalium A, B proportionalis est.

sous A, B ; la droite A est donc à B comme le carré de A est au carré de Γ ; car la première est à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde, ainsi que cela est démontré dans le corollaire 28 du sixième livre des Éléments. Mais A est incommensurable en longueur avec B ; le carré de A est donc incommensurable avec le carré de Γ (10. 10). Mais le carré de A est rationel; le rectangle compris sous A, B est donc irrationel; la droite Γ est donc irrationelle; et on l'appelle médiale, parce qu'étant irrationelle, elle est moyenne proportionnelle entre les deux rationelles A, B .

LEMMA*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἔστιν	<i>Id.</i>	ἔσται
2. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. παραβαλλόμενον	<i>Id.</i>	παραβαλλόμενον
2. ὀρθογώνιον	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἔστι
6. περιχομένην	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codd. $a, d, e, f, g, h, l, m, n$.

PROPOSITIO XXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEx 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Ἡ δὲ τὸ	Id.	τὸ δὲ
3. δυναμένη μίση ἴστί	Id.	εὐθεῖον περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἀ- λογόν ἴστί, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἀλογός ἴστί, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μίση*

COROLLARIUM*.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει.	Id.	μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι.

Subsequentia, quæ desunt in codd. *e, m, n*, reperiuntur in codd. *a, d, f, g, l*.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μίση, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μίσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μίση καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὼ μίσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μίσαι μήκει σύμμετροι, ἱπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οἱ δὲ

Sunt autem rursus et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt mediæ, potentiâ vero solùm commensurabiles, et dicuntur rursus mediæ, quoniam commensurabiles sunt potentiâ mediæ et commensurabiles inter se, nam mediæ aliæ commensurabiles inter se vel longitudine scilicet et potentiâ, vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ mediæ longitudine commensurabiles, consequenter etiam et potentiâ. Si autem potentiâ solùm sunt commensurabiles, dicuntur et sic mediæ potentiâ solùm com-

Il est encore d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec une médiale, ne sont commensurables avec elle qu'en puissance; on les appelle encore médiales, parce qu'elles sont commensurables en puissance avec une médiale et commensurables entr'elles; car les autres médiales sont commensurables entr'elles, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, on les appelle médiales commensurables en longueur, et par conséquent en puissance; et si elles ne sont commensurables qu'en puissance, on les appelle médiales commensurables en puissance seulement. On

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

αἱ μῖσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως² δεικνύον. Ἐπεὶ αἱ μῖσαι μίση τινὲ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἴσθι σύμμετρα· αἱ ἄρα μῖσαι σύμμετροί εἰσιν.

mensurabiles. Quod vero mediæ commensurabiles sint, sic ostendendum est. Quoniam mediæ mediæ cuidam commensurabiles sunt, et quæ eidem commensurabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ igitur mediæ commensurabiles sunt.

démontre ainsi que ces médiales sont commensurables. Puisque ces médiales sont commensurables avec une médiale, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles, les médiales sont commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. μῖσαι	Id.	deest.
2. οὕτως	Id.	οὕτω

PROPOSITIO XXV.

1. κατὰ τινὰ τῶν εἰρημίνων τρώ- πων	Id.	deest.
2. ἴσθι	Id.	ἴσθι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. εὐθειῶν	Id.	deest.
2. περιχέσθω ἑρθογώνιον	Id.	ἑρθογώνιον περιχέσθω
3. ἡ μείσον ἴσθιν	Id.	ἴσθιν ἡ μείσον.
4. ἄρα	Id.	ἄρα ἴσθι
5. Καὶ ἐπὶ	Id.	Ἐπὶ οὖν
6. Καὶ ἴσθιν	Id.	Ἐστὶν ἄρα καὶ
7. σύμμετρός ἴσθι	Id.	ἡ ΘΚ σύμμετρός ἴσθι τῇ ΘΝ, τ. υ. τίσθι
8. ΘΜ	Id.	ΘΜ ἄρα
9. ἡ μείσον ἴσθιν	Id.	ἴσθιν ἡ μείσον

PROPOSITIO XXVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴσθιν ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἰστί.
2. παράκειται	<i>Id.</i>	παράκεινται.
4. ἰστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 21 paginæ 179 Μίσον	<i>Id.</i>	Οὐκ ἄρα μίσον μίσου,
ἄρα μίσου, ...		

PROPOSITIO XXVIII.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἰστί	<i>Id.</i>	deest.
6. σύμμετροι. Ὅπερ ἴδι διζῆαι.	<i>Id.</i>	σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Ὅπερ ἴδι διζῆαι.

PROPOSITION XXIX.

1. τρεῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσὶ.	καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι. . .	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. μίσον περιέχουσαι. Ὅπερ ἴδι ποιῆσαι.	καὶ τὰ ἰξῆς.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA I*.

1. δὴ	<i>Id.</i>	δὴ
2. ἰκ	<i>Id.</i>	ὑπὸ

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

3. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
4. Οπερ ἴδου δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

C O R O L L A R I U M*.

1. τὸν	<i>Id.</i>	τὴν
2. ὧσιν ἐπίπεδοι.	<i>Id.</i>	ἐπίπεδοι ὧσιν.
3. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετράγωνος.	τετράγωνος. Ὁ ἄρα ὁ	concordat cum edit. Paris.

L E M M A I I**.

1. κατὰ τὸ Δ	τῇ Δ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
4. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
5. Αφηρήσθω	Αφηρήσθω ὁμοίως	concordat cum edit. Paris.
6. AB, BG τετράγωνος	AB, BG	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστί	<i>Id.</i>	ἴσται
11. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
12. τοῦ ἀπὸ τοῦ BE, ...	<i>Id.</i>	deest.
13. μονάς.	<i>Id.</i>	μονάς, μήτε ὁ ἐκ τῶν AB, BG μιτὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ἢ τῇ ἀπὸ τῶν AB, BG μιτὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ.
14. τοῦ ΓΕ ἴσος τῇ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος δι- πλασίον ὁ HA.	τῆς ΓΕ ἴσος τῇ ἀπὸ τῆς BE, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίος ὁ HA.	τοῦ ΓΕ ἴσος τῇ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἴστω διπλασίον ὁ HA τῆς ΔΕ μονάδος.
15. ὁ δὲ AH τοῦ ΔΕ ἴστί δι- πλασίον	<i>Id.</i>	ὧν ὁ AH ἴστί διπλασίον τοῦ ΔΕ*
16. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

** Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

466 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
17. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
18. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ἐκ τῶν	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν
21. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
23. ὁ AB ἴσος τῷ HB, . . .	ἡ AB ἴση τῇ HB, . . .	concordat cum edit. Paris.
24. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
25. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
26. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
27. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. διπλασίῳν	<i>Id.</i>	διπλάσιος κείσθω
29. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
30. διπλασίῳν	<i>Id.</i>	διπλάσιος
31. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
33. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
34. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
35. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἵσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ,	<i>Id.</i>	συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ τῷ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΖ,
36. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
37. τῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
38. αὐτῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
39. τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ·	τῆς ΒΕ·	concordat cum edit. Paris.
40. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
41. τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύται, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος,	τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσ- θωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι,	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXX.

1. τὸν	τὴν	concordat cum edit. Paris.
2. τετράγωνον, ...	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. οὖν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 12 μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μίζον	μίζονα	concordat cum edit. Paris.
7. ποιῆσαι.	Id.	δείξαι.

PROPOSITIO XXXI.

1. ἀριθμοὶ	Id.	deest.
2. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῷ	τῇ	concordat cum edit. Paris.

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

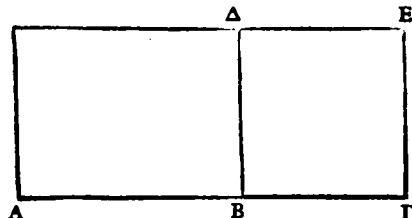
LEMMA.

Εάν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἴσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Si sint duæ rectæ in ratione aliqua, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub duabus rectis ad quadratum ex minori.

Εστῶσαν θὴ δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BG ἐν λόγῳ τινὶ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως

Sint igitur duæ rectæ AB, BG in ratione aliqua; dico esse ut AB ad BG ita sub AB, BG



τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BG. Ανα-
γεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BG τετράγωνον τὸ

rectangulum ad quadratum ex BG. Describatur
enim ex BG quadratum BΔΕΓ, et compleatur

LEMME.

Si l'on a deux droites dans une raison quelconque, l'une d'elles sera à l'autre comme le rectangle sous ces deux droites est au carré de la plus petite.

Soient les deux droites AB, BG dans une raison quelconque; je dis que AB est à BG comme le rectangle sous AB, BG est au carré de BG. Car décrivons sur BG

* Deest in codd. a, d, e, h, l, m, n; reperitur autem in cod. f.

ΒΑΕΓ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμα. Φανερόν δὲ ὅτι ἴστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμα πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἴστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

ΑΔ parallelogrammum. Manifestum est igitur esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ parallelogrammum ad ΒΕ parallelogrammum. Atque est ΑΔ quidem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΒΕ quadratum ex ΒΓ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

le quarré ΒΑΕΓ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Il est évident que ΑΒ est à ΒΓ comme le parallélogramme ΑΔ est au parallélogramme ΒΕ (1. 6). Mais le rectangle ΑΔ est compris sous ΑΒ, ΒΓ; car ΒΓ égale ΒΔ, et le parallélogramme ΒΕ est le quarré de ΒΓ; donc ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au quarré de ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	Id.	τῷ
3. ἴστι	Id.	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. συμμετρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
6. δύναται	Id.	δυνήσεται
7. συμμετρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
8. συμμετρου ἑαυτῇ	ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.	συμμέτρου ἑαυτῷ
9. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μείζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, c.	Id. a.	Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α μείζον δυνῆται τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, f.

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

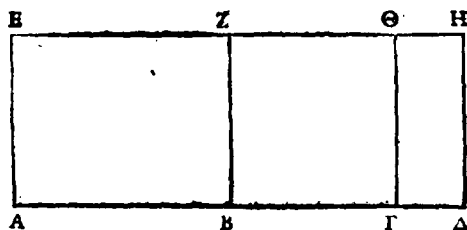
LEMMA.

Εάν ὡςι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μείσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μείσης καὶ ἐλαχίστης.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ AB, BΓ, ΓΔ· λήγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΓ, ΓΔ.

Si sint tres rectæ in ratione aliquâ, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum sub primâ et mediâ ad ipsum sub mediâ et minimâ.

Sint tres rectæ AB, BΓ, ΓΔ in ratione aliquâ; dico esse ut AB ad ΓΔ ita sub AB, BΓ rectangulum ad ipsum sub BΓ, ΓΔ.



Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ κείσθω τῇ BΓ ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ E σημείου τῇ AD εὐθεῖα παράλληλος ἦχθω ἡ EH, διὰ δὲ τῶν B, Γ, Δ σημείων τῇ AE παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ BZ, ΘΓ, ΗΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ AZ

Ducatur enim a puncto A ipsi AB ad rectos angulos AE, et ponatur ipsi BΓ æqualis AE, et per punctum E ipsi AD recta parallela ducatur EH, sed per puncta B, Γ, Δ ipsi AE parallelae ducantur BZ, ΘΓ, ΗΔ. Et quoniam est ut AB ad BΓ ita AZ parallelogrammum ad BΘ pa-

LEMME.

Si l'on a trois droites dans une raison quelconque, la première sera à la troisième comme le rectangle sous la première et la moyenne est au rectangle sous la moyenne et la plus petite.

Soient les trois droites AB, BΓ, ΓΔ dans une raison quelconque; je dis que AB est à ΓΔ comme le rectangle sous AB, BΓ est au rectangle sous BΓ, ΓΔ.

Car du point A menons la droite AE perpendiculaire à AB; faisons AE égal à BΓ; par le point E menons la droite EH parallèle à AD, et par les points B, Γ, Δ menons BZ, ΘΓ, ΗΔ parallèles à AE. Puisque AB est à BΓ comme le parallé-

* Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. c, f, l.

470 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παρλληλό-
 γραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ
 ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· διίσου ἄρα ἔς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν
 ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ
 ΓΗ παρλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ
 τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ,
 τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ
 τῇ ΓΘ.

Εὰν ἄρα τρεῖς ᾖσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

rallelogrammum, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita ΒΘ
 ad ΓΗ; ex æquo igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΖ
 parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΗ.
 Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ,
 æqualis enim ΑΕ ipsi ΒΓ, rectangulum vero ΓΗ
 sub ΒΓ, ΓΔ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΓΘ.

Si igitur tres sint, etc.

gramme ΑΖ est au parallélogramme ΒΘ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme ΒΘ est à ΓΗ
 (1.6); par égalité, ΑΒ sera à ΓΔ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallé-
 gramme ΓΗ. Mais ΑΖ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; car ΑΕ égale ΒΓ, et ΓΗ est le
 rectangle sous ΒΓ, ΓΔ; car ΒΓ égale ΓΘ. Donc, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ·	Id.	αἱ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμ- μετροι,
2. τῆς Δ·	Id.	τῆς Δ, μείσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β.
3. ἴσον	Id.	ἴσον ἔστι
4. ὧς δὲ	Id.	ἀλλ' ὧς
5. μόνον·	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	τῷ	concordat cum edit. Paris.
8. τῷ	Id.	τὸ
9. τὸ	τῷ	concordat cum edit. Paris.
10. αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνά- μει μόνον σύμμετροι· . . .	Id.	deest.
11. τὴν μείζονα	Id.	deest.
12. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ. . .	Id.	Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἐαυτῇ.

ΛΗΜΜΑ*.

LEMMA.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω .	ὑπὸ Α γωνίαν, καὶ ἤχθω	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔτι τὸ	Id.	τὸ δὲ
3. ἴσον ἰστί τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·	ἴσον ἰστί τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ·	ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·
4. τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἰστί . . .	ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἰστί . . .	τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον
5. Καὶ ὅτι	Ἡ καὶ ὅτι	concordat cum edit. Paris.
6. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Ὅπερ εἶδει δειξάμεναι	deest.	concordat cum edit. Paris.

ΛΗΜΜΑ β'**.

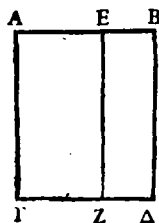
LEMMA II.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἴσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Si recta linea secetur in partes inæquales, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub totâ et majori ad rectangulum sub totâ et minori.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Recta enim aliqua AB secetur in partes inæquales ad E; dico ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE.



Αναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν

Describatur enim ex AB quadratum ΑΓΔΒ, et per punctum E alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΒ

LEMMA II.

Si une ligne droite est partagée en deux parties inégales, une partie sera à une partie comme le rectangle compris sous la droite entière et la plus grande partie est au rectangle compris sous la droite entière et sous la plus petite.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties inégales en E; je dis que AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE.

Car décrivons avec AB le quarré ΑΓΔΒ, et par le point E menons la droite ΕΖ

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

** Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. f, g, l.

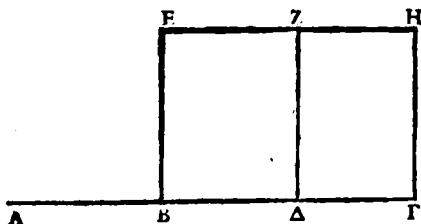
472 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἢ χθω ἢ ΕΖ. Φανερὸν οὖν ὅτι ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἢ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἢ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ γ'.

Εάν ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστώσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἢ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἢ ΒΓ δίχα



κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιον ἔστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.

parallela ducatur ΕΖ. Evidens est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΖΒ. Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΒΑ, ΑΕ, æqualis enim ΑΓ ipsi ΑΒ, rectangulum vero ΖΒ sub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim ΔΒ ipsi ΑΒ; ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita sub ΒΑ, ΑΕ rectangulum ad ipsum sub ΑΒ, ΒΕ. Quod oportebat ostendere.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, secetur autem minima ipsarum in partes æquales; rectangulum sub duabus rectis duplum erit rectanguli sub majori et dimidiâ minimæ.

Sint duæ rectæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major sit ΑΒ, et secetur ΒΓ bifariam in Δ;

dico rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ duplum esse rectanguli sub ΑΒ, ΒΔ.

parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΒ. Il est évident que ΑΕ sera à ΕΒ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélogramme ΖΒ (1. 6). Mais ΑΖ est le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ; car ΑΓ égale ΑΒ, et ΖΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΕ, car ΔΒ est égal à ΑΒ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΕ. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMMA III.

Si deux droites sont inégales, et si la plus petite est coupée en deux parties égales, le rectangle compris sous ces deux droites sera double du rectangle compris sous la plus grande et la moitié de la plus petite.

Soient les deux droites inégales ΑΒ, ΒΓ; que ΑΒ soit la plus grande; coupons ΒΓ en deux parties égales au point Δ; je dis que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΒΔ.

* Deest in codd. a, d, e, f, h, l, m, n; reperitur autem in codd. g, l.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίον· διπλασίον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ducatur enim a puncto B ipsi BG ad rectos angulos ipsa BE, et ponatur ipsi BA æqualis BE, et describatur figura. Quoniam igitur est ut ΔB ad ΔΓ ita BZ ad ΔΗ, componendo igitur ut BG ad ΔΓ ita BH ad ΔΗ. Atque est BG ipsius ΔΓ dupla; duplum igitur est et BH ipsius ΔΗ. Atque est quidem BH rectangulum sub AB, BG, æqualis enim AB ipsi BE, rectangulum vero ΔΗ est ipsum sub AB, ΒΔ, æqualis enim quidem ipsi ΒΔ ipsa ΔΓ, ipsi vero AB ipsa ΔΖ. Quod oportebat ostendere.

Lemma subsequens in codice 190 locum tenet lemmatis secundi edit. Oxoniæ.

Λ Η Μ Μ Α.

Εὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι, ἴσται ὡς ἡ μία πρὸς τὴν ἑτέραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφότερας καὶ τῆς ἑτέρας.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

L E M M A.

Si sint duæ rectæ, erit ut una ad alteram ita rectangulum sub utrâque et unâ ipsarum ad rectangulum sub utrâque et alterâ.

Sint duæ rectæ ΑΒ, ΒΓ; dico esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΓ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ.

Du point B menons BE à angles droits à BG; faisons BE égal à BA, et décrivons la figure. Puisque ΔB est à ΔΓ comme BZ est à ΔΗ (1. 6); par addition, BG sera à ΔΓ comme BH est à ΔΗ. Mais BG est double de ΔΓ; donc BH est double de ΔΗ. Mais BH est le rectangle sous AB, BG, car la droite AB est égale à BE; et ΔΗ est le rectangle sous AB, ΒΔ, car ΔΓ est égal à ΒΔ, et ΔΖ à AB. Ce qu'il fallait démontrer.

L E M M E.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le rectangle compris sous leur somme et sous l'une de ces droites est au rectangle compris sous la somme de ces droites et sous l'autre droite.

Soient les deux droites ΑΒ, ΒΓ; je dis que ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle compris sous ΑΓ, ΑΒ est au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ.

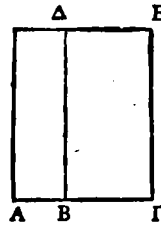
474 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

Ἦχθω γάρ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἴση τῇ ΑΓ ἡ ΒΔ, καὶ συμπληρώσω τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἴστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ

Ducatur enim a puncto B ad rectos angulos æqualis ipsi ΑΓ ipsa ΒΔ, et compleatur ΑΕ parallelogrammum.

Quoniam enim est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΓ; atque est quidem rectangulum ΑΔ ipsum sub ΒΔ,



ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΒ, ταυτίσται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ, ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΒ, ταυτίσται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.

ΑΒ, hoc est rectangulum sub ΓΑ, ΑΒ, æqualis enim supponitur ΒΔ ipsi ΓΑ; est autem rectangulum ΑΓ ipsum sub ΒΔ, ΓΒ, hoc est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΓΑ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

Car du point B menons à angles droits la droite ΒΔ égale à ΑΓ, et achevons le parallélogramme ΑΕ.

Car puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΔΓ (1. 6), que ΑΔ est le rectangle sous ΒΔ, ΑΒ, c'est-à-dire sous ΓΑ, ΑΒ, car ΒΔ est supposé égal à ΓΑ, et que ΔΓ est le rectangle sous ΒΔ, ΓΒ, c'est-à-dire sous ΑΓ, ΓΒ; la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΓΑ, ΑΒ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. τῆς	Id.	τῇ
2. ἀπὸ	Id.	ἀπὸ ἐλάσσενος
3. ἐπεὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. σύμμετρόν ἐστι τῶ	Id.	διπλάσιόν ἐστι τοῦ

PROPOSITIO XXXV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX IGO.	EDITIO OXONIÆ.
1. τοῦ	<i>Id.</i>	τῆς
2. τῆς ΔΒ.	<i>Id.</i>	τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι.
3. διπλῇ	<i>Id.</i>	διπλασίῳ
4. ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ.	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον.
5. τῶν ΑΒ, ΒΓ·	<i>Id.</i>	τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκειται γὰρ οὕτως·
6. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ·	τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ·	concordat cum edit. Paris.
7. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
2. τοῖς ἐπάνω ὁμοίως	<i>Id.</i>	ὁμοίως τοῖς ἐπάνω
3. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴσον ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστιν ἴσον
6. ἴστιν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ·	<i>Id.</i>	ἡ ΔΖ τῇ ΒΕ·
7. μίσον ἄρα	<i>Id.</i>	μίσον, μίσον
8. ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.
9. αἱ ΑΔ, ΔΒ	<i>Id.</i>	deest.
10. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVII.

1. καλεῖσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ὅλη	<i>Id.</i>	deest.
3. αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ,	<i>Id.</i>	τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι,

476 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. ἴστί	<i>Id.</i>	deest. <i>d, f, l.</i>
5. ὀνομάτων.	ὀνομάτων. Εκάλει δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισθαι, κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ ῥητόν. Οἱ περὶ δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.
	<i>a, e, g, h, m, n.</i>	

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ συνθέντι	<i>Id.</i>	συνθέντι ἄρα
3. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG, ὑπόκεινται γὰρ αἱ AB, BG ῥητὸν περιέχουσαι.	<i>Id.</i>	ὑπόκεινται δὲ ῥητὸν περιέχουσαι
4. πρώτη.	πρώτη. Εκάλει δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην, διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν. Οἱ περὶ δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris. <i>d, f, l.</i>
	<i>a, e, g, h, m, n.</i>	

PROPOSITIO XXXIX.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BG παρὰ τὴν ΔΕ	<i>Id.</i>	παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BG
3. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
4. παράκεινται	<i>Id.</i>	παράκεινται
5. Ἐπεὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἔπει
6. τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ	<i>Id.</i>	τῷ ἀπὸ τῆς AB τὸ
7. ἀσύμμετρος ἴστί μήκει. Εδείχθησαν δὲ ῥηταί.	ἴστί ἀσύμμετρος μήκει	concordat cum edit. Paris.
8. χωρίον καὶ	deest.	χωρίον ὥστε καὶ
9. αὐτὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 40 adest in δ subsequens scholium, quod Euclidis esse minime potest.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἀλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γὰρ ἐστὶ² ῥητὸν καὶ παραβέβηται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἀλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἀλογόν ἐστιν³.

SCHOLIUM.

Vocavit autem illam ex binis mediis secundam, quoniam medium et non rationale continetur sub ipsis, posterius est vero medium rationali. Quod autem sub rationali et irrationali continetur irrationale esse, manifestum est. Si enim sit rationale et applicetur ad rationalem, esset et alterum ipsius latus rationale. Sed et irrationale, quod absurdum; spatium igitur sub rationali et irrationali irrationale est.

SCHOLIE.

Il l'appelle seconde de deux médiales, parce que la surface comprise sous AB, BF est médiale et non rationelle, car la surface médiale est après la rationelle. Et il est évident que la surface comprise sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle; car si elle était rationelle, et qu'elle fût appliquée à une droite rationelle, l'autre côté serait rationel. Mais il est irrationel, ce qui est absurde; donc une surface sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. τὸ	<i>Id.</i>	τὸ τὸ
2. ἐστὶ	ἔσται	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστίν.	ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δείξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XL.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. AB, BF	<i>Id.</i>	AB, BF. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BF.

* Deest in codd. d, f, l ; reperitur autem in codd. a, e, g, h, m, n .

Post propositionem 40 adest in δ scholium subsequens, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

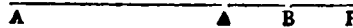
SCHOLIUM.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μέσου¹, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκείουτος τὴν ἰνομασίαν τάττεισθαι. Ὅτι δὲ καὶ² μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, οὕτως δεικνύον.

Φαίρον μὲν οὖν ὅτι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ AB , $BΓ$. Εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

Vocavit autem ipsam majorem, quia quadrata ex AB , $BΓ$ rationalia majora sunt rectangulo medio bis sub AB , $BΓ$, et oportet ex rationalium proprietate nomen imponere. At vero majora esse quadrata ex AB , $BΓ$ rectangulo bis sub AB , $BΓ$, sic demonstrabimus.

Evidens est quidem inæquales esse AB , $BΓ$. Si enim sint æquales, æqualia erunt et quadrata



AB , $BΓ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ῥητὸν, ἔπερ οὐχ ὑπόκειται· ἀνισοὶ ἄρα εἰσιν αἱ AB , $BΓ$. ὑποκείμεθα μείζων ἢ AB , καὶ κείσθω τῇ $BΓ$ ἴση ἢ BD . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , BD ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB , BD καὶ τῷ ἀπὸ τῆς³ AD . ἴση δὲ ἢ $ΔB$ τῇ $BΓ$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$

ex AB , $BΓ$ rectangulo bis sub AB , $BΓ$, et erit rectangulum sub AB , $BΓ$ rationale, quod non supponitur; inæquales igitur sunt AB , $BΓ$. Supponatur major AB , et ponatur ipsi $BΓ$ æqualis BD ; quadrata igitur ex AB , BD æqualia sunt et rectangulo bis sub AB , BD et quadrato ex AD . Æqualis autem $ΔB$ ipsi $BΓ$; qua-

SCHOLIE.

Il l'appèle majeure, parce que la somme des quarrés des rationnelles AB , $BΓ$ est plus grande que le rectangle médial qui est le double rectangle sous AB , $BΓ$, et qu'il fallait choisir un nom d'après la propriété des rationnelles. Nous démontrons ainsi que la somme des quarrés de AB et de $BΓ$ est plus grande que le double rectangle sous AB , $BΓ$.

Car il est évident que les droites AB , $BΓ$ sont inégales. Car si elles étaient égales, la somme des quarrés de AB et de $BΓ$ serait égale au double rectangle sous AB , $BΓ$, et le rectangle sous AB , $BΓ$ serait rationel, ce qui n'est point supposé; donc les droites AB , $BΓ$ sont inégales. Supposons que AB est la plus grande, et faisons BD égal à $BΓ$; la somme des quarrés de AB et de BD sera égale au double rectangle sous AB , BD , et au quarré de AD (7.2). Mais $ΔB$ est égal à $BΓ$; donc

* Deest in codd. d, f, l ; reperitur autem in codd. a, e, g, h, m, n .

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS. 479

ἴσα ἔστι τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB, BG καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AD· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς⁵ AD. Ὅπρι ἴδι διῖξαι.

drata igitur ex AB, BG æqualia sunt et rectangulo bis sub AB, BG et quadrato ex AD; quare quadrata ex AB, BG majora sunt quam rectangulum bis sub AB, BG quadrato ex AD. Quod oportebat ostendere.

la somme des quarrés de AB et de BG est égale au double rectangle sous AB, BG et au quarré de AD; donc la somme des quarrés de AB et de BG surpasse le double rectangle sous AB, BG du quarré de AD. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. μέσου	μίσων	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	Id.	deest.
3. τῆς	Id.	deest.
4. ἐστι	εἶναι	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLI.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. συνθέντι	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 41 adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

ῤῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσι¹, διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῤῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῤῥητοῦ προῦπαρξιν, πρῶτον τὸ ῤῥητὸν³ ἐκάλεσεν⁴.

Rationale autem et medium potentem ipsam vocavit, quia potest bina spatia, unum quidem rationale, alterum vero medium; et quoniam ipsius rationalis prius mentionem fecit, primum rationale vocavit.

SCHOLIE.

Il l'appèle celle dont la puissance est rationelle et médiale, parce que sa puissance renferme deux surfaces, l'une rationelle, et l'autre médiale; et à cause que la surface rationelle est avant la rationelle, il parle d'abord de la rationelle.

* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

480 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. αὐτὴν ἐκάλεισε, ...	καλεῖται αὐτὴ	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ ῥητὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐκάλεισιν.	ἐκάλεισιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLII.

1. τετραγώνων·	τετραγώνῳ·	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ προκείμενα·	<i>Id.</i>	τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν AB, BG μείσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον, καὶ ἔστι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων·
3. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀσύμμετρά ἴστι τὰ	<i>Id.</i>	ἀσύμμετρόν ἴστι τὸ
5. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.

Post propositionem 42 adsunt in *b* duo scholia subsequencia, quæ quidem Euclidis non sunt.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α*.

SCHOLIUM I.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέγα δυναμένην, διὰ τὸ
δυνάσθαι αὐτὴν δύο μέγα χωρία, τὸ, τι συγ-
κείμενον¹ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG, καὶ τὸ² δις
ὑπὸ τῶν AB, BG³.

Vocat autem ipsam bina media potentem,
quia potest bina media spatia, et compositum ex
ipsarum AB, BG quadratis, et rectangulum bis
sub AB, BG.

SCHOLIE I.

Il l'appelle celle dont la puissance est une double médiale, parce que sa puissance égale deux surfaces médiales; savoir, la somme des quarrés de AB et de BG, et le double rectangle sous AB, BG.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τό, τι συγκείμενον	τά, τι συγκείμενα	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	ταῦ	concordat cum edit. Paris.
3. AB, BG.	AB, BG. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

* Deest in cod. *d*; reperitur autem in codd. *a, e, f, g, h, m, n*.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'*

SCHOLIUM II.

Οτι δὲ αἱ εἰρημίαι ἄλογοι μοναχῶς δια-
ροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιου-
σῶν τὰ προκείμενα εἶδη, δείξομεν ἥδη, προσκ-
είμενοι λεημμάτων τοιοῦτον.

At vero dictas irrationales uno tantum modo
dividi in rectas ex quibus componuntur, et quæ
faciunt propositas species, mox ostendemus,
si prius exposuerimus quoddam lemma hujus-
modi.

SCHOLIE II.

Après avoir exposé le lemme suivant, nous démontrerons que les irratio-
nelles dont nous avons parlé ne peuvent se diviser que d'une seule manière dans
les droites qui les composent, et qui constituent les espèces proposées.

LEMMA**.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, καὶ ὑπο- κείσθω	deest.	ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ
2. καὶ	Id.	deest.
3. ἴσθιν	Id.	deest.
4. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ	Id.	ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἴσθιν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ
5. ΑΔ, ΔΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	Id.	ΑΔ, ΔΒ; εἵπερ συναμφοτέρα ἴσα ἴσθιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XLIII.

1. ΑΓ	Id.	ΑΒ
2. τμήμα κατὰ τὸ Γ	Id.	τῇ κατὰ τὸ Δ
3. τῆς διχοτομίας	τοῦ διχοτόμου	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	Id.	τοῦ
5. ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ	Id.	ὄντα· μέσον δὲ

* Reperitur in codd. a, e, f, g, h, l, m, n; deest autem in cod. d.

** Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

PROPOSITIO XLIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. Ἐστω	<i>Id.</i>	Ἐστω δὲ

PROPOSITIO XLV.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ	τῆς διχοτομίας, ὅτι . .	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ΑΔ, ΔΒ ἰσάσσοινα τῶν ἀπὸ	<i>Id.</i>	ΑΓ, ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν
τῶν ΑΓ, ΓΒ, ...		ΑΔ, ΔΒ,
5. Καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐπειδήπερ	ὅτι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLVI.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερ-	<i>Id.</i>	ῥητῶ ὑπερίχει τοῦ δις ὑπὸ τῶν
ἴχει ῥητῶ, ...		ΑΓ, ΓΒ,
linea 9 μόνον διαιρείται. . .	deest.	ἄρα διαιρείται μόνον.

PROPOSITIO XLVII.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὸ δὲ δις	<i>Id.</i>	τὸ δ'
3. τὸ δὲ δις	<i>Id.</i>	τὸ δ'
linea 12 τὰ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ὑπερίχει ῥητῶ, ...	<i>Id.</i>	ῥητῶ ὑπερίχουσι,

PROPOSITIO XLVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. διαιρεῖται	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. δύο μέσα δυναμένη . . , .	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν	<i>Id.</i>	deest.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. ἰλάσσονος	vocabulum ἰλάσσονος .	concordat cum edit. Paris.
	contractum est, et	
	inter lineas manu	
	recenti exaratum.	

Has post definitiones adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non e st.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Εξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἰλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

Sex igitur rectis existentibus ita sumptis, facit primas ordine tres, in quibus major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; secundas autem ordine reliquas tres, in quibus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, propterea quod prius est commensurabile incommensurabili; et adhuc primam quidem, in quâ majus nomen

SCHOLIE.

Six droites étant prises ainsi, il (Euclide) fait une classe de trois droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable avec la plus grande; il fait ensuite une classe de trois autres droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande, parce que le commensurable est avant l'incommensurable. La première classe est celle dont le plus grand nom est commensurable avec la rationnelle exposée; la seconde

* Repertur in codd. *a, d, e, f, g, h, m, n*; deest autem in cod. *l*.

484 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ
 πάλιν προτερεῖν τὸ μείζον τοῦ ἐλάττονος τῷ
 ἐμπεριέχειν τὸ ἔλαττον· τρίτην δὲ, ἐφ' ᾧ μὴ
 δεύτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἔστι² τῇ ἐκκει-
 μίνῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τριῶν ὁμοίως,
 τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως
 τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην,
 καὶ τὴν τρίτην ἑκτὴν.

commensurable est expositæ rationali; secun-
 dam vero, in quâ minus, propterea quod
 rursus majus antecedit minus, cùm contineat
 minus; tertiam autem, in quâ neutrum nomi-
 num est commensurable expositæ rationali; et
 deinceps in tribus similiter, primam dictæ se-
 cundi ordinis quartam appellans, et secundam
 quintam, et tertiam sextam.

classe, est celle dont le plus petit nom est commensurable avec la rationelle ex-
 posée, parce que le plus grand précède le plus petit, puisque le plus grand
 contient le plus petit; la troisième classe enfin, est celle où aucun des noms
 n'est commensurable avec la rationelle exposée. Il fait de la même manière
 une classe des trois autres droites, appelant la première la quatrième de la
 seconde classe, la seconde la cinquième, et la troisième la sixième.

EDITIO PARIISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. δύναται	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστι σύμμετρον	σύμμετρόν ἐστι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLIX.

1. μὲν	Id.	deest.
2. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO L.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα καὶ	ἄρα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι	concordat cum edit. Paris.
3. σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ	τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμ- μετρόν ἐστι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LI.

linea II τετράγωνος ἀριθμὸς	Id.	ἀριθμὸς τετράγωνος
2. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε'	Id.	ῥητὴ δὲ ἡ Ε'

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς *Id.* ἀσύμμετρος ἄρα
τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὅν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
τράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν
4. ἐστὶν deest. concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶν *Id.* deest.

PROPOSITIO LII.

1. τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μῆτις *Id.* ἐκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν
μὴν πρὸς τὸν ΑΓ
2. καὶ *Id.* deest.
3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ *Id.* deest.
ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὅν τε-
τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
γωνον ἀριθμόν·
4. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς τὸ ἀπὸ concordat cum edit. Paris.
5. τετράγωνος ἀριθμὸς *Id.* ἀριθμὸς τετράγωνος
6. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς *Id.* deest.
τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὅν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
τράγωνον ἀριθμόν·
7. ἐστὶν *Id.* deest.

PROPOSITIO LIII.

1. ῥητὴ τις εὐθεῖα *Id.* τις εὐθεῖα ῥητὴ.
2. μήκει deest. concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ *O δὲ* concordat cum edit Paris.
ἐπεὶ ὁ
4. ἄρα *Id.* deest.
5. ἄρα deest. concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα vocabulum ἄρα, diffi- concordat cum edit. Paris.
cile lectu, inter li-
neas manu recenti
exaratum est.
7. τῆς *Id.* τῇ

PROPOSITIO LIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. μήτε	<i>Id.</i>	μήδε
2. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. . . .	<i>Id.</i>	σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ δυναμίς.
3. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥη- τὸν ἄρα καὶ	ῥητὸν ἄρα καὶ . . .	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
linea 9 ΗΘ	<i>Id.</i>	ΚΘ
5. τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς . . .	ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΗΘ . . .	concordat cum edit. Paris.
6. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. αὐτῶν	<i>Id.</i>	τῶν ΖΗ, ΗΘ

L E M M A*.

1. τῇ ΒΗ·	<i>Id.</i>	τῇ ΒΗ μύκκι·
2. ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση· . . .	ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση·	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· . .	ἑκατέρᾳ·	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΚΔ οὕτως ἢ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ·	ΚΔ οὕτως ἢ ΕΓ πρὸς ΓΕ·	concordat cum edit. Paris.
linea 16 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 17 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LV.

1. ΑΒΓΔ	ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
2. ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ . . .	<i>Id.</i>	ἐστὶν ἐκ δύο ὀνομάτων
3. δὲ	<i>Id.</i>	δε
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῶν
5. τοῦ	<i>Id.</i>	τῶν

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

6. σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. . .	σύμμετρον αὐτὴν διαιρεῖ.	σύμμετρα αὐτὴν διαιεῖ.
7. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἀπὸ	Id.	διὰ
9. τῇ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὴν ΚΗ. . . .	τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ τὸ ΕΑ πρὸς ΚΗ. . . .	concordat cum edit. Paris.
12. τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ,	Id.	τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ,
13. ΕΑ τῷ ΜΡ. ὥστε καὶ τῷ ΟΞ.	Id.	ΜΡ τῷ ΕΑ. Αλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΑ τῷ ΓΖ. ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ, ΟΞ.
14. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἐστίν.	Id.	deest.
16. τῇ ΕΖ.	Id.	τῇ ΕΖ μήκει.
17. ἐστίν.	Id.	deest.
18. οὕτως ἢ ΟΝ πρὸς ΝΡ. . .	ἢ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ. . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVI.

1. τὸ	Id.	τὸ μὲν
2. σύμμετρόν.	Id.	σύμμετρές
3. ἐστὶ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	Id.	τῷ
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ . . .	ΑΒ. Καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἢ ΑΕ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἢ ΑΕ ἑκα- τέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει. αἱ ΒΑ, ...	ΑΛΛ' ἢ ΑΕ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα σύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ. αἱ	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστίν.	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ	τῇ	concordat cum edit. Paris.

488 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
10. ὥστε δυνάμεις εἰσὶ σύμμετροι αἱ MN, ΝΞ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. EZ σύμμετρος.	Id.	EZ.
12. ἴστί	Id.	deest.
13. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἄρα ΜΞ	Id.	ΜΞ ἄρα

PROPOSITIO LVII.

1. μείζον ἴστω	τὸ μείζον ἴστί	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ αἱ MN, ΝΞ μίσαι εἰσὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μίσων ἴστί. . .	Id.	καὶ ὅτι αἱ MN, ΝΞ ἐκ δύο μίσων εἰσί.
4. ἀσύμμετρος	Id.	ἀσύμμετρον
5. ἴστί	Id.	deest.
6. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVIII.

1. ἴστί	Id.	deest.
2. δὴ	Id.	δὴ
3. Ἐπεὶ	Id.	Ἐπεὶ γὰρ
4. δυνάμεις	Id.	deest.
5. ἴστί	Id.	deest.
6. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῇ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. συγκείμενον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ εἴσιν ἀσύμμετροι αἱ MN, ΝΞ	Id.	καὶ ἴστί ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ ΝΞ

PROPOSITIO LIX.

1. ἄρα	Id.	deest.
2. τῆς	τῶν	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
3. καὶ ἴστιν	καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ῥητὴ	Id.	ῥητὴ δὲ
7. τῶν MN, NE*	MNE	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LX.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀπὸ τῶν	Id.	deest.
4. ἄρα	Id.	deest.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἴστι μίσον ἑκάτερον αὐ- τῶν, καὶ αἱ MN, NE . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA*.

1. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	Id.	τῶν
4. ἴστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ* . .	ἴστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ* . .	τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ*
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXI.

1. ἑκατέρᾳ τῶν ΜΑ, ΗΞ* . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	Id.	εἰσι
3. ΑΓ, ΓΒ.	Id.	ΑΓ, ΓΒ* ῥητὸν ἄρα ἴστι τὸ συγ- κείμενον ἐκ τῶν ΑΓ, ΓΒ.
4. ἡ ΜΗ ἴστιν, ...	Id.	ἴστιν ἡ ΜΗ,
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μίρει	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

490 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

9. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μίξων δύναται τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ.	Id.	deest.

PROPOSITIO LXII.

1. τὰς μίσας	deest.	τὰ μίσα
2. παρὰ τὴν ΔΕ παραβέβλησθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τὸ . . .	Id.	παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον
3. τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται.	ἴστί τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥη- τὴν ΔΕ παραβέβληται.	τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παρά- κειται.
4. ἴστί	Id.	deest.
5. ἴστί.	Id.	deest.

PROPOSITIO LXIII.

1. γάρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστί διυτέρα.	Id.	διυτέρα ἴστί
3. τὴν ΔΕ ῥητὴν.	Id.	ῥητὴν τὴν ΔΕ.
4. καὶ	Id.	deest.
5. καὶ	Id.	deest.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. προτέροις	Id.	πρότερον
8. ἴστί	Id.	deest.

PROPOSITIO LXIV.

linea 7 τις ἴστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γάρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 καὶ	ἴστί	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΜΛ παράκειται.	ἴστί τὴν ΜΛ.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. δείξομεν τοῖς πρότερον, . . .	Id.	τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα,
8. ἴστί	Id.	deest.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS. 491

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

9. ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ.	Id.	καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐστιν.
10. παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ	Id.	παρὰ τὴν μείζονα
11. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXV.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῇ ΚΜ μήκει	Id.	μήκει τῇ ΚΜ
5. ῥηταὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXVI.

1. ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν . . .	Id.	συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ
2. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. δὲ πάλιν	Id.	γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου

PROPOSITIO LXVII.

1. τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς	ΓΖ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ	concordat cum edit. Paris.
2. τὴν ΖΔ·	ΓΖ πρὸς ΖΔ· . . .	
3. ἥτοι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. δύναται	Id.	δυνήσεται
5. ἴσται	Id.	ἴστί.
6. ἴσται	Id.	ἴστί.
7. δύναται	Id.	δυνήσεται
8. ἴσται	Id.	ἴσται

PROPOSITIO LXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. καὶ αὐτὴ	<i>Id.</i>	deest.
2. διηρήσθω	<i>Id.</i>	διηρημένη
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ	ΓΔ ἢ ΑΕ πρὸς ΓΖ . . .	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΓΔ	ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
5. ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΕ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ	<i>Id.</i>	ἢ μὴν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι μίσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ·
6. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ...	ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετροί εἰσι	<i>Id.</i>	εἰσὶ σύμμετροι·
8. ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι.
9. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ	ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ . .	concordat cum edit. Paris.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ διὰ τοῦτο ἔστιν ἐκ δύο μίσων πρώτη. Εἴτε μίσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μίσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἢ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή. . .	εἴτε μίσον, μίσον καὶ ἴσ- τιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἢ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXIX.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Γεγραίτω γάρ	<i>Id.</i>	Καὶ γεγραίτω
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ . .	ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ·	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΖΔ, ...	ΖΔ	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΕΒ	ΕΒ	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

8. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
9. ἀσύμμετροί εἰσι,	Id.	εἰσὶν ἀσύμμετροι,
10. ἄμα	Id.	deest.

PROPOSITIO LXX.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν	ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.
3. μὲν	Id.	deest.

PROPOSITIO LXXI.

1. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ δὲ	ὥστε καὶ τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ἢ ἄρα ΓΔ	Id.	ἢ ΓΔ ἄρα

PROPOSITIO LXXII.

1. τουτέστι τὴν ΘΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῷ ΕΗ·	Id.	τὸ ΕΗ.
3. ῥητὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἢ ΕΘ ἄρα ῥητὴ ἐστὶ	Id.	ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΘ
5. ἐστὶ	Id.	deest.
6. τῷ ΘΙ·	Id.	τὸ ΘΙ·
7. τουτέστι τὴν ΘΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶν ἢ	Id.	ἔστω
9. ἐστὶν ἢ	Id.	ἔστω
10. ἐστὶν ἢ	Id.	ἔστω
11. περιέχεται	περιέχεται	concordat cum edit. Paris.
12. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ἐστὶν	Id.	ἔστω

PROPOSITIO LXXIII.

1. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἢ	deest.	concordat cum edit. Paris.

3. Εστω	Εστω εἰ τύχοι	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
linea 17 Ομοίως δὲ δείξιμεν ὅτι, καὶ ἑλάττω ἢ τὸ AB τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἴστί, δύο ἡ μίσα δυναμένη	deest.	concordat cum edit. Paris.

Subsequens corollarium in textu adesse deberet.

ΠΟΡΙΣΜΑ*.

COROLLARIUM.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἀλογοὶ οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταὶ· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον

Quæ ex binis nominibus et irrationales quæ post ipsam neque mediæ neque inter se sunt eadem; quadratum enim ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem et longitudine incommensurabilem ipsi ad quam applicatur. Quadratum autem rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam. Quadratum autem primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum autem secundæ ex binis mediis ad rationalem appli-

COROLLAIRE.

La droite de deux noms et les irrationnelles qui la suivent ne sont les mêmes ni avec la médiale, ni entr'elles; en effet, le carré d'une médiale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (23. 10). Le carré d'une droite de deux noms étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une première de deux noms (61. 10). Le carré d'une première de deux médiales étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une seconde de deux noms (63. 10). Le carré d'une seconde de deux médiales étant appliqué à une rationnelle fait une largeur

* Reperitur in codicibus *a, d, e, f, h, l, m, n.*

πλάτος ποιῇ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μίσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτην. Τὰ δὲ εἰρημίνα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

catur latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quadratum autem ex majori ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum autem ex recta rationale et medium potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam. Quadratum autem ex recta bina media potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Ipsæ vero dictæ latitudines differunt et à primâ et inter se, à primâ quidem quod rationalis sit, inter se vero quod ordine non sint eædem, quare et ipsæ irrationales differunt inter se.

qui est une troisième de deux noms (63. 10). Le carré d'une majeure étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une quatrième de deux noms (64. 10). Le carré d'une droite, qui peut une surface rationelle et une surface mediale, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une cinquième de deux noms (65. 10). Le carré d'une droite, qui peut deux surfaces mediales, étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est une sixième de deux noms (66. 10). Or les largeurs dont nous venons de parler sont différentes de la première et différentes entr'elles; elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle; et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre; ces irrationelles sont donc différentes entr'elles.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. Τὰ δὲ	<i>Id.</i>	Ἐπεὶ οὖν τὰ
2. ὥστε	<i>Id.</i>	δῆλον ὡς

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ἑπτὰ εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρη-
μένων ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐ-
τῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἐν
μόνον σημεῖον διαιροῦνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ
δύο ὀνομάτων εἶρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρί-
της, τετάρτης, πέμπτης, ἑκτης, ἀφ' ἧς ἡ
τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλό-
γων, πῇ διαφέρουσι προσχωρῶμενος γὰρ τῇ ἐκ
δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν
ἐξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἑκτὴν ἐξέθετο, δεικ-
νύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς, τὰς
ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ
πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. Ἐν δὲ τῇ
ἑκτῇ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδῆς
αὐταῖς εἰσὶ. Πάλιν, ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς δια-
φορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Septem sunt senarii usque ad ea de quibus hac-
tenus dictum est; quorum primus quidem ostendit
generationem ipsarum; secundus vero divisio-
nem, propterea quod ad unum duntaxat punc-
tum dividuntur; tertius autem ex binis nomi-
nibus inventionem primæ, secundæ, tertiæ,
quartæ, quintæ, sextæ, post quam quartus se-
narius ostendit differentiam irrationalium, quo-
modo illæ differant; usus enim eis quæ ex binis
nominibus ostendit differentiam sex irrationa-
lium. Quintum et sextum exposuit, ostendens
in quinto quidem applicationes quadratorum
ex irrationalibus, quales irrationales faciant la-
titudines applicatorum spatiorum. In sexto au-
tem, quomodo commensurabiles irrationalibus
eiusdem speciei sint. Rursus, in septimo evi-
denter differentiam ipsarum nobis ostendit.

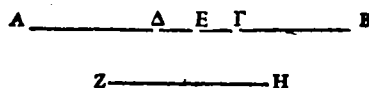
S C H O L I E.

Il y a sept sixains dans ce qui a été dit jusqu'à présent. Le premier fait voir l'origine des irrationnelles (37, 38, 39, 40, 41, 42); le second leur division, parce qu'elles ne peuvent être divisées qu'en un seul point (43, 44, 45, 46, 47, 48); le troisième enseigne à trouver les droites de deux noms: la première de deux noms (49), la seconde (50), la troisième (51), la quatrième (52), la cinquième (53), et enfin la sixième (54); le quatrième sixain démontre la différence des irrationnelles, c'est-à-dire ce en quoi elles diffèrent; car faisant usage des droites de deux noms, il (Euclide) fait voir la différence des six irrationnelles (55, 56, 57, 58, 59, 60); il expose le cinquième et le sixième sixain; dans le cinquième, il démontre les applications des carrés des irrationnelles, c'est-à-dire qu'il démontre quelles sont les irrationnelles que produisent les largeurs des surfaces appliquées (61, 62, 63, 64, 65, 66); dans le sixième, il fait voir comment les droites commensurables avec les irrationnelles sont de la même espèce qu'elles (67, 68, 69, 70, 71); et enfin dans le septième, il nous démontre clairement leur différence (72, 73).

* Deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

Αναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μίση λαμβανόμενη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἷασθ' ὅποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδὴς ἐστὶν ὧν ἐστὶ μίση ἀνάλογον. Καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μισότης ἐν τούτοις ἐστὶ. Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι AB, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερόν ὅτι ἡ AG τῆς GB ἐστὶ μείζων. Αφηρήσθω ἀπὸ

Apparet autem et in his irrationalibus arithmetica proportio; et media sumpta proportionalis portionum cujusque irrationalis secundum arithmetica proportionem, et ipsa ejusdem speciei est cum eis quarum est media proportionalis. Et primum arithmetica medietas in his est. Ponatur enim ex binis nominibus si contigerit AB, et dividatur in nomina ad Γ; evidens est AG quam GB esse majorem. Auferatur ex AG



τῆς AG τῇ GB ἴση ἢ AD, καὶ δίχα τετμήσθω ἢ ΓΔ κατὰ τὸ Ε· φανερόν ὅτι ἡ AE τῇ EB ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ZH· φανερόν δὲ ὅτι ὅ διαφέρει ἡ AG τῆς ZH τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ EB τῆς GB, ἡ μὲν γὰρ AG τῆς ZH τῇ ΕΓ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ZH τῆς GB, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ZH σύμμετρός ἐστι τῇ AB, τῇ γὰρ ἡμισίᾳ αὐτῆς ἐστὶν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ομοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

ipsi GB æqualis AD, et bifariam secetur GA in E; evidens est AE ipsi EB esse æqualem. Ponatur alterutri ipsarum æqualis ZH; manifestum est igitur quo differt AG ab ipsa ZH hoc differre et EB ab ipsa GB, etenim differt AG ab ipsa ZH ipsa EG, eadem vero magnitudine et ipsa ZH differt ab ipsa GB, quod est arithmetice proportionis. Perspicuum est autem ZH commensurabilem esse ipsi AB, dimidiæ enim ipsius est æqualis; quare ipsa ex binis nominibus est. Similiter demonstrabitur et in aliis.

Il y a évidemment dans les irrationnelles une proportion arithmétique; et la moyenne proportionnelle prise arithmétiquement entre les parties d'une irrationnelle quelconque est de la même espèce que les droites entre lesquelles elle est moyenne proportionnelle. Il y a d'abord une médiété arithmétique entre les parties d'une irrationnelle. Car, que AB soit une droite quelconque de deux noms, et que cette droite soit divisée en ses noms au point Γ; il est évident que AG est plus grand que GB. Retranchons de AG une droite AD égale à GB, et partageons GA en deux parties égales en E; il est évident que la droite AE sera égale à la droite EB. Que ZH soit égal à chacune de ces droites; il est évident que la différence de AG à ZH sera la même que la différence de EB à GB; car la différence de AG à ZH est EG, ainsi que la différence de ZH à GB, ce qui appartient à la proportion arithmétique. Mais il est évident que la droite ZH est commensurable avec AB, car elle en est la moitié; la droite ZH est donc une droite de deux noms (67. 10). Nous démontrerons la même chose pour les autres irrationnelles.

PROPOSITIO LXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμ- μετρά ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG	καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσα ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ	concordat cum edit. Paris.
2. ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσα ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXV.

1. καλεῖσθαι	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστί	Id.	deest.
3. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί	Id.	deest.
5. δὲ	δὲ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVI.

1. περιέχῃ	περιέχουσα	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστί	καὶ σύμμετρά ἴστί . .	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BG.	Id.	ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG.
6. ἴστί	Id.	deest.
7. μέκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. μίσης	Id.	μίσση

PROPOSITIO LXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἅμα μίσην .	τὰ προκείμενα . . .	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ	ἡ καλουμένη	concordat cum edit. Paris.
3. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῶ ἀπὸ τῆς AG. . .	λοιπῶ τῇ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῶ ἀπὸ τῆς AG.	concordat cum edit. Paris.
4. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG ἄλογος ἄρα ἡ AG, ...	ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AG, ...	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVIII.

1. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ῥη- τόν	τὰ προκείμενα	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ἡτοῦ μί- σην τὸ ὅλον ποιούσα.	ἡ προειρημένη	concordat cum edit. Paris.
3. AB, BG	Id.	AB, BG τετραγώνων
4. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXIX.

1. τὸ μὲν	τό, τι	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ δὲ	τό, τι	concordat cum edit. Paris.
3. τὰ προκείμενα	Id.	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μί- σην, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμμετρα τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG.

500 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἡ καλουμένη	<i>Id.</i>	καλείσθαι δὲ
5. ῥητὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πλάτος ποιεῦν τὴν ΔΖ· . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ ΔΘ.	τῷ ΔΘ.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστί καὶ
11. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
12. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXX.

1. μόνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Τὰ	<i>Id.</i>	τὸ
5. ἀμφοτέρω·	<i>Id.</i>	ἑκατέρω.

PROPOSITIO LXXXI.

1. μία μόνον	<i>Id.</i>	μόνον μία
2. ΑΓ, ΓΒ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ΑΓ, ΓΒ
3. αὐτῷ	<i>Id.</i>	αὐτῷ πάλιν

PROPOSITIO LXXXII.

1. μίση	μίσης	concordat cum edit. Paris.
2. οὔσα	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. μίση	μίσης	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
6. σύμμετροί εἰσιν, ...	<i>Id.</i>	εἰς σύμμετροι,
7. ἴστί	<i>Id.</i>	καὶ
8. ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστί καὶ

PROPOSITIO LXXXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. τὰ προειρημένα.	<i>Id.</i>	τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετρα- γωνα ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μίσην.
3. τετραγώνων	<i>Id.</i>	deest.
4. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXXIV.

1. προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ ^ο . .	καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζεται ἡ ΒΓ ^ο	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἰτίρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζεται ἡ ΒΔ ^ο καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθειᾶς δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦ- σαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν.	τὰ προκείμενα.	concordat cum edit. Paris.
3. τοῖς	<i>Id.</i>	τῶν
3. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
4. τὰ προειρημένα· μία ἄρα μό- νον προσαρμόσει.	<i>Id.</i>	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐ- τῶν τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιού- σῃ μία μόνον προσαρμόσει.

PROPOSITIO LXXXV.

1. μόνον	μόνη	concordat cum edit. Paris.

502 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. τὰ προειρημένα	<i>Id.</i>	τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μίσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ
3. εὐθεῖα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ποιοῦσα τὰ προειρημένα . . .	<i>Id.</i>	δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μιτὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.
5. τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα	τό, τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων	concordat cum edit. Paris.
6. ἀσύμμετρα	ἀσύμμετρον	concordat cum edit. Paris.
7. ἀφηρήσθω	παρὰ τὴν ΕΖ παραβιβλήσθω	concordat cum edit. Paris.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴστιν ἴσον τῷ	<i>Id.</i>	ἴσον τὸ
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. σύμμετρος	<i>Id.</i>	ἀσύμμετρος
12. τετράγωνα	τετράγωνον	concordat cum edit. Paris.
13. καὶ ἔτι	<i>Id.</i>	ἔτι τι

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. ῥ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVI.

1. ἡ ΖΔ	ὁ ΔΖ	concordat cum edit. Paris.
2. ΗΓ τετράγωνον	<i>Id.</i>	ΗΓ
3. ΗΓ	<i>Id.</i>	ΘΓ
4. τῇ Α μήκει	μήκει τῇ Α	concordat cum edit. Paris.
5. ποιῆσαι	εὐρεῖν	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	concordat cum edit. Paris.

2. HB°	HB τετράγωνον°	concordat cum edit. Paris.
3. ΓΗ τετράγωνον	Id.	ΓΗ
4. ἴστί	Id.	deest.
5. ἀπὸ	Id.	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει°	τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμ- μετρος τῇ Α°	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVIII.

1. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετρά- γωνον°	τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴστιν ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετρά- γωνον°	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνον°	Id.	deest.
3. τετράγωνον°	Id.	deest.
4. τετράγωνον	Id.	deest.
5. τετράγωνον	Id.	deest.
6. οὐδ°	Id.	οὐκ
7. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τῇ Α μήκει.	Id.	μήκει τῇ Α.
9. τετράγωνον	Id.	deest.
10. ἀπὸ	Id.	ἀπὸ τῆς Κ° ἢ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

PROPOSITIO LXXXIX.

1. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστί	Id.	deest.
3. καὶ	Id.	deest.
4. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. μήκει. Καὶ ἴστιν ἡ	καὶ ἴστιν	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα ΒΓ	Id.	ΒΓ ἄρα
7. ΒΓ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XC.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEx 190.	EDITIO OXONIE.
1. μήκει	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσθιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. σύμμετρον ἄρα ἴσθι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ρη- τὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 4 ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ρητὴ	ρητὸν	concordat cum edit. Paris.
5. οὐδ' ἄρα	οὐδὲ	concordat cum edit. Paris.
6. μίζον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCI.

1. ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὲν ἔχεται ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ- μὸν	<i>Id.</i>	deest.
3. οὐδιτέρα ἄρα	<i>Id.</i>	καὶ οὐδιτέρα

SCHOLIUM.

1. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. πρώτη ἴσθιν ἡ ΑΒ.	<i>Id.</i>	ἴσθιν ἡ ΑΓ πρώτη.

PROPOSITIO XCII.

1. πρώτης	<i>Id.</i>	deest.
2. παραλληλόγραμμον	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελιῖ	διαιρεῖ	concordat cum edit. Paris.
4. περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, . . .	<i>Id.</i>	τῷ ὑπὸ τῆς ΕΗ,
5. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴσθι	<i>Id.</i>	deest.
7. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
8. ἴσιν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἴσιν,
9. λοιπὸν	<i>Id.</i>	καὶ λοιπὸν
10. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. ἑκατέρων	ἑκατέρας.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCIII.

1. ὅλη ἡ ΑΗ	<i>Id.</i>	ΑΗ ὅλη
2. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελιῖ	διαιριῖ.	concordat cum edit. Paris.
4. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
5. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΑΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμε- τρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν ὑπὸ ΑΟΜ·	τῷ ἀπὸ τῶν ΑΟΜ· . . .	concordat cum edit. Paris.
8. καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπεὶ γὰρ	<i>Id.</i>	δυνάμει σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ γὰρ
11. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τουτίστι τῷ	τὸ δὲ ΤΣ ἐστὶ τῷ . . .	concordat cum edit. Paris.
14. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ . . .	τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα . . .	concordat cum edit. Paris.
15. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
16. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. μίσης	μίση	concordat cum edit. Paris.
18. τῷ ΜΝ, τουτίστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ὡς δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ὡς ἄρα

PROPOSITIO XCIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH ῥητὴ ἴστί καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ	ὥστε καὶ αἱ AZ, ZH·	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει·	Id.	deest.
3. ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ AI τῷ EK.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί	Id.	deest.
5. τὸ ZK·	ZK·	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστί	Id.	deest.
7. τῷ ZK, ...	Id.	τῷ τῷ ZK,
8. τῶν AO, ON·	Id.	τῆς AO, ON·
9. ὥστε	Id.	ὥστε καὶ
10. χωρίον·	Id.	deest.

PROPOSITIO XCV.

1. τῆς	Id.	deest.
2. δύναται	δυναμένη	concordat cum edit. Paris.
3. μήκει ἢ AZ τῇ ZH·	Id.	ἢ AZ τῇ ZH μήκει.
4. τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὄν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ· . .	περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ἀπὸ τῶν ΑΟΜ, τὴν ΝΞ·	concordat cum edit. Paris.
5. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί	Id.	deest.
8. τῷ	Id.	τὸ
9. τὸ	Id.	τῷ
10. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετραγώνω·	Id.	deest.

PROPOSITIO XCVI.

1. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

2. περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ·	τὸν ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ·	concordat cum edit. Paris.
3. χωρίον.	<i>Id.</i>	deest.
4. καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι.	καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι.	concordat cum edit. Paris.
5. λοιπὴ	ἡ λοιπὴ	concordat cum edit. Paris.
6. μίσον	<i>Id.</i>	deest.
7. ἄρα χωρίον	<i>Id.</i>	χωρίον

PROPOSITIO XCVII.

1. τῶν ΑΗ, ΗΔ	αὐτῶν	concordat cum edit. Paris.
2. παραβληθῇ	<i>Id.</i>	παραβάλλωμιν
3. τὸ Ε, ...	<i>Id.</i>	τὸ Ε σημειῶν,
4. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μίσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν τὸ ΝΞ·	γωνίαν τὸ ΝΞ·	concordat cum edit. Paris.
6. ἡ	<i>Id.</i>	ὁ
7. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ΑΒ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCVIII.

1. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
4. τὸ	τὰ	concordat cum edit. Paris.
5. μίσον, ...	μίσα	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ·	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ·
9. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
10. ὥς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΝΜ·	deest.	concordat cum edit. Paris.

508 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

11. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τὸ	<i>Id.</i>	τῷ

PROPOSITIO XCIX.

1. μέσοις οὖσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα καὶ
3. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
4. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ . . .	τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ἐπὶ σύμμετρόν ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἴστί καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῷ ΚΜ .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ τῷ	<i>Id.</i>	τῷ δὲ
8. τὸ	τῷ	concordat cum edit. Paris.
9. μήκει	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO C.

1. σύμμετρόν ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ὥς	<i>Id.</i>	καὶ ὥς
5. σύμμετρος ἴστί μήκει . . .	<i>Id.</i>	μήκει σύμμετρος ἴστί

PROPOSITIO CI.

1. ῥητήν	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί ἡ ΓΜ	<i>Id.</i>	ἡ ΓΜ

8. τὸ ΝΑ	<i>Id.</i>	ἡ ΝΑ
9. ἄρα ἀπὸ	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ

PROPOSITIO CII.

1. διὰ	<i>Id.</i>	ἀπὸ
2. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. αὐτὴν διαιρεῖ	<i>Id.</i>	διαίρει αὐτήν.

PROPOSITIO CIII.

1. ὅτι	<i>Id.</i>	ὅσι
2. ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν	καὶ ἀσύμμετρον τὸ ἀπὸ τῶν	concordat cum edit. Paris.
3. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀπὸ τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.
10. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
11. ἀπὸ τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἔστι	<i>Id.</i>	deest.
13. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ	<i>Id.</i>	καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μείσον ἀνά- λογόν ἔστι τὸ ΝΑ

PROPOSITIO CIV.

1. μήκει σύμμετρος ἔστω . . .	<i>Id.</i>	σύμμετρος ἔστω μήκει
2. ἔστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ΑΕ μὲν	<i>Id.</i>	μὲν ΑΕ
4. Καὶ αἱ	<i>Id.</i>	Αἱ δὲ
5. ἀποτομὴ ἄρα ἔστιν ἡ ΓΔ. Λέ- γω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ	Ἐπεὶ οὖν	concordat cum edit. Paris.

510 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

6. ἴσθιν	<i>Id.</i>	deest.
7. δὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὐδετέρα	οὐθίρα	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CV.

1. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE τῇ ΓΖ, ἡ δὲ BE τῇ ΔΖ	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μίσαι εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι	<i>Id.</i>	deest.
3. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ	<i>Id.</i>	Διεκτίον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ
4. τὴν ΖΔ	<i>Id.</i>	τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
5. ΓΖ, ΖΔ.	<i>Id.</i>	ΓΖ, ΖΔ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
6. ἴσθι	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴστι
8. ἴσθι	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴσθι	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVI.

1. γάρ	<i>Id.</i>	deest.
2. τῷ προτέρῳ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴσθιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν	ἴσθιν ὡς τὰ ἀπὸ τῆς	ὡς τὸ ἀπὸ τῶν
4. ΖΔ.	<i>Id.</i>	ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΓΖ, ΖΔ	<i>Id.</i>	ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.
7. τετραγώνῳ, ...	<i>Id.</i>	deest.
8. ἴσθι	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
2. ἴστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Εκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ, . .	Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
4. τετάρτη	Id.	deest.
5. Τῷ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστί	Id.	deest..
7. ἴστί	Id.	deest.
8. ἴστί	Id.	deest.
9. ἴστί	Id.	deest.
10. ἴστί	Id.	deest.
11. ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρ- της	ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ ἀπο- τομῆς τετάρτης τῆς ΖΘ.	concordat cum edit. Paris.
12. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τε- τάρτης	Id.	deest.
13. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVII.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	Id.	deest.
3. αἱ	Id.	ἡ
4. ἴστί τὸ	Id.	τὸ μὲν

ALITER**.

2. Εστω	Εστω ἡ	concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ	ῥητὸν	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	ἄρα ἡ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post propositionem 116, et in capite habet ἡ τῇ ἰσάσσοι σύμμετρος ἰσάσσαν ἴστί; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 106.

** Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post ἄλλως præcedens, et habet in capite ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσοι τὸ ὅλον ποιεῖσιν σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσοι τὸ ὅλον ποιοῦσά ἴστί; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 107.

PROPOSITIO CVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴστω	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CIX.

1. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἄρα μὲν	μὲν ἄρα	ἄρα ἴστί
4. ἰαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέ- τρου	ἢ οὐ	concordat cum edit. Paris.
5. περιέχομενον	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἴστί.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITION CX.

1. αὐτῇ	ταύτῃ	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα ἴστί διυτέρα	διυτέρα ἴστί	concordat cum edit. Paris.
3. πρώτη ἴστί.	<i>Id.</i>	ἴστί πρώτη.
4. τῆς ΖΚ μείζον	<i>Id.</i>	μείζον τῆς ΖΚ
5. ἰαυτῇ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXI.

1. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴστί τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ...	τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἴσται ἀκο- λούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμ- μετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἴστί· ὑπόκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ,	concordat cum edit. Paris.

3. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εἰ μὲν δὴ	<i>Id.</i>	προσαρμόζοντα δὲ ἡ ΚΖ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΗ μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, ἡ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν
5. τῇ ΖΗ μήκει	<i>Id.</i>	μήκει τῇ ΖΗ.
6. ἴστιν ἄρα τρίτη	τρίτη ἴστιν	concordat cum edit. Paris.
7. μείσς ἀποτομή ἴστι δευτέρα.	μείσς ἀποτομή δευτέρα ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΕΓ δυναμένη μείσς ἀποτομή ἴστι δευτέρα.	ἀποτομή μείσς δευτέρα.
8. μήκει, καὶ οὐδέτερα . . .	καὶ οὐδέτερα	concordat cum edit. Paris.
9. ΖΗ μήκει ἀποτομή ἴστιν ἄρα ἔκτη ἡ ΚΘ.	ἡ ΖΗ μήκει ἀποτομή ἔκτη ἴστιν ἡ ΚΘ.	ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ ἀπο- τομή ἴστιν ἄρα ἔκτη ἡ ΘΚ.
10. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, ...	<i>Id.</i>	ὥστε ἡ τὸ ΛΘ,

PROPOSITIO CXII.

linea 16 τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
2. μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ .	<i>Id.</i>	τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν,
3. πρώτη ἴστιν	<i>Id.</i>	ἴστι πρώτη
4. μήκει καὶ	καὶ	μήκει
5. τῇ	ἡ	concordat cum edit. Paris.
6. ἡ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
7. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἴστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἴστιν ἡ ΔΖ, ῥητὴ ἄρα ἴστί καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἴστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἴσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM.

1. τοῦ τε	<i>Id.</i>	τό τε

* Hoc corollarium in omnibus adest codicibus.

II.

514 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
2. ἐπὶ τῇ	<i>Id.</i>	ὅτι
3. αἱ μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῇ	<i>Id.</i>	deest.
5. μετὰ	κατὰ	concordat cum edit. Paris.
6. Μίσος	<i>Id.</i>	Μίσον
7. Μίσος	<i>Id.</i>	Μίσον

PROPOSITIO CXIII.

1. ἔξει τάξιν	<i>Id.</i>	ἔχει
2. ὀνομάτων δὲ	<i>Id.</i>	δὲ ὀνομάτων
3. ἔξει	<i>Id.</i>	ἔχει
4. τῇ Η ἴση	<i>Id.</i>	ἴση τῇ Η
5. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
6. τὴν KE, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγού- μένων	KE ἐν ἡγούμενον	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
10. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
11. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
12. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
16. καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. εἰς	<i>Id.</i>	deest.
18. ἑαυτῇ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. οὐδέτερά	οὐδέτερά	concordat cum edit. Paris.
20. οὐδέτερά	οὐδέτερά	concordat cum edit. Paris.
21. καὶ ἡ ΖΚ τῆς KE μείζον δυ- νήσεται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. οὐδέτερά	οὐδέτερά	concordat cum edit. Paris.
23. τὰ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. τάξιν ἔχει	<i>Id.</i>	ἔχει τάξιν

PROPOSITIO CXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἴστί τοῖς	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴτι ἡ	<i>Id.</i>	ἴτι ἡ
4. ἴστω	ἴστω καὶ	concordat cum edit. Paris.
5. παραβέβηται	<i>Id.</i>	παράκειται
6. ἴσον ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστί ἴσον
7. τὴν Η.	in reliquâ demonstra- tione vocabulum τὴν deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὥς	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης	τὸ ἀπὸ τῆς α	concordat cum edit. Paris.
14. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
15. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. ΓΔ τῇ ΖΘ	ΘΖ τῇ ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
18. δι ΒΓ, ΓΔ	ΒΓ, ΓΔ δι	concordat cum edit. Paris.
19. ἄρα ὀνομάτων ἴστί	ὀνομάτων ἴστί ἄρα	concordat cum edit. Paris.
20. δυνήσεται	<i>Id.</i>	δύναται
21. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. δυνήσεται	<i>Id.</i>	δύναται
23. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXV.

1. τί	<i>Id.</i>	deest.
2. τοῖς	<i>Id.</i>	τοῖς ἀπὸ
3. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
4. τί	<i>Id.</i>	deest.
5. τὴν ΜΑ	ΜΑ	concordat cum edit. Paris.

516 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

6. τὴν KM.	KM.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί	Id.	deest.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἴστί τῷ	τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἴστί τὸ	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἴστί	Id.	deest.

COROLLARIUM.

1. περιέχισθαι.	περιέχισθαι. Οπὴρ ἴδι διῆξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXVI.

1. οὐδμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὐδιμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν πρότερον ἴστιν	Id.	πρότερον ἴστιν
5. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδμία	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R*.

2. γίνονται, ...	γίνονται, ...	concordat cum edit. Paris.
3. οὐδιμία πρότερον ἴστιν ἢ αὐτή.	τῶν πρότερον ἢ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί	Id.	deest.
5. ἴστιν	Id.	deest.
6. Ἀπὸ τῆς	Ἀπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXVII**.

2. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

** In codicibus hæc propositio numero non signatur.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

4. ἔχει δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἔχει
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
7. τῆς ΓΑ	τοῦ ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
8. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.
9. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἀριθμοὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Pa ri.
13. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. διπλάσιον ἔστι	διπλάσιος	concordat cum edit. Paris.
15. ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τούτου EZ τοῦ ἀπὸ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· . .	<i>Id.</i>	ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ·
16. ἀσύμμετρος ἄρα.	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R*.

1. deest.	deest.	Δεικτικόν δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμ- μετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.
2. Ἐστω	<i>Id.</i>	Ἐστω γὰρ
3. σύμμετρος· καὶ γιγνέτω . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οἱ EZ, Η·	<i>Id.</i>	deest.
5. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. διπλάσιος	διπλάσιον	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῦ	αὐτῇ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

SCHOLIUM*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
2. εὐθείων	<i>Id.</i>	deest.
3. εἶδος	ἐπίπιδον	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. τὰς	<i>Id.</i>	τοὺς
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἀσυμμέτρων χωρίων, . . .	<i>Id.</i>	χωρίων ἀσυμμέτρων,
8. τοῖς	<i>Id.</i>	deest.
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. πρὸς ἀλλήλους	<i>Id.</i>	ἀλλήλοισι
12. γίγονεν ἔτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἔστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, .	γίγονε διὸ οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφα- νειῶν ἔστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, . .	γίγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἔστι συμμετρία καὶ ἀσυμμε- τρία,

* Hoc scholium, quod in omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex sequen-
tibus pendet.

FINIS TOMI SECUNDI.

ERRATA.

Pagina	linea		Pagina	linea	
xxxiv,	5,	ea et, <i>lege</i> ea et fere.	365*,	4,	incommensurable, <i>le-</i>
xxliv,	alinea 3,	inaliquot exemplaribus			<i>ge</i> commensurable.
		pro B, <i>lege</i> A.	365*,	10, b.	rationelle et incom-
164*,	5, b.	encore, <i>lege</i> déjà.			mensurable, <i>lege</i> ra-
166*,	4, b.	irrationel, <i>lege</i> ra-			tionelle et commen-
		tionel.			surable.
171,		littera r deest in figurâ.	366*,	6,	la droite, <i>lege</i> le pa-
254*,	3, b.	la droite AE, <i>lege</i> la			rallélogramme.
		puissance de AE.	367*,	2,	imcommensurable, <i>le-</i>
264*,		littera B deest in figurâ.			<i>ge</i> commensurable.
277*,	7, b.	la somme, <i>lege</i> la som-	374*,	4,	la droite, <i>lege</i> le pa-
		me des.			rallélogramme.
279,		in figurâ littera B ponat-	394*,	4,	ZH, <i>lege</i> ZK; et eadem
		tur in loco litteræ E,			correctio in lingua
		et vice versâ.			græcâ et in lingua
283*,	3,	ΔE, <i>lege</i> AB.			latinâ.
308*,	6,	surface médiale, <i>lege</i>	394*,	8,	incommensurable, <i>le-</i>
		surface rationelle.			<i>ge</i> commensurable.
316*,	5,	commensurable, <i>lege</i>	394*,	10,	ἀσυμμετρον, <i>lege</i> συμμέ-
		incommensurable.			τρον.
329*		in secundâ lineâ figuræ	394*,	11,	incommensurabili, <i>le-</i>
		littera B ponatur in			<i>ge</i> commensurabili.
		loco litteræ E.	396*,	2,	21, 10, <i>lege</i> 32, 10.
251,	5,	18. 10, <i>lege</i> 19. 10.	396,	3,	23, 10, <i>lege</i> 21, 10.
352,	3,	ΑΟΜ, <i>lege</i> ΔΟΜ.	405*,	1, b.	ΘΚ, <i>lege</i> ΘΕ, et eadem
358*,	1,	quarré de AH, <i>lisez</i>			correctio in lingua
		quarré de EH.			græcâ et lingua latinâ.
362*,	2, b.	ἀπὸ, <i>lege</i> ὑπὸ.	405,	1, b.	ΘΚ, ΒΔ, <i>lege</i> ΘΕ, ΒΔ.
362*,	3,	quadrato autem ex,	446*,	3, b.	plus grande que ΔΑ,
		<i>lege</i> rectangulo au-			<i>lege</i> plus grande que
		tem sub.			ΕΑ.
362*,	2,	quarré de, <i>lege</i> rectan-	446*,	1, b.	ΔΑ, <i>lege</i> ΔΑ.
		gle sous.	479*,	1, b.	avant la rationelle, <i>le-</i>
365*,	5,	ἀσυμμετρος, <i>lege</i> σύμμι-			<i>ge</i> avant la médiale.
		τρος.			
365*,	6,	incommensurabilis, <i>le-</i>			
		<i>ge</i> commensurabilis.			