

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT.

LES OEUVRES D'EUCLIDE.



Cet Ouvrage se trouve aussi à Paris, aux indications suivantes :

CHEZ { L'AUTEUR, rue de Provence, n° 25 ;
TREUTTEL et WURTZ, libraires à Paris, rue de Lille, n° 17 ;
FIRMIN DIDOT, rue Jacob, n° 24 ;
Madame veuve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.

LES OEUVRES D'EUCLIDE,

EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'APRÈS un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

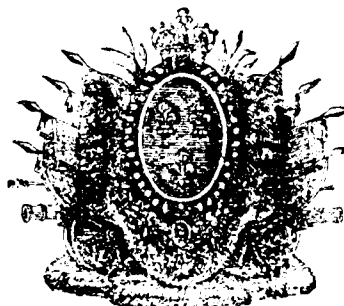
PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DÉDIÉ AU ROI.

TOME SECOND.



A PARIS,

CHEZ M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, n° 4.

1816.

PRÉFACE.

P R Æ F A T I O.

Hoc volumen, quo liber octavus, nonus et decimus continetur, jampridem editum fuisset, nisi plura impedimenta, quæ sane non prævideram, moram aliquam attulissent opusque intermisissent. Tertium et ultimum volumen prelo subjicitur, et sub ortum proximæ æstatis prodibit in lucem.

Malignus quidam rumor percrebuerat me jam non habere in manibus vaticanæ bibliothecæ codicem 190, ac proinde ab incæpto destitisse. Quo rumore nihil absurdius; rogante enim et impetrante regni interioris administro, codex ille fidei meæ creditus est, ac penes me erit, donec opus meum in lucem sit editum.

Interim, omissâ aliquandiu ~~Bæ~~lidis mei curâ, ultimam Apollonio meo manum admovi, quod quidem opus absolutum ac sub judice est, nempe Scientiarum Academiâ. Typis mandabitur græcis, latinis et gallicis: accedent variæ lectiones regiæ bibliothecæ codicum, necnon et Oxoniæ editionis, quæ, fatente ipso editore, confecta est juxta duos græcos codices, scatentes vitiis, ac prorsus iisdem, utpote ex uno et eodem codice exaratos.

Hæc editio complectetur Conicorum Apollonii septem libros qui supersunt, Pappi lemmata, Eutocii commentarios, et Sereni duos libros de cylindro et cono.

Archimedis operibus necnon Eutocii commentariis edendis græce, latine et gallice operam impendo. Quando nitidissima Oxoniæ editio prelo fuit subjecta, jam obierat Torelli, vir magnæ doctrinæ, antequam ultimam manum Archimedi suo admovisset, et ob id maculis scatet. Quod si

P R É F A C E.

Ce volume, qui renferme le huitième, le neuvième et le dixième livre, aurait paru depuis long-temps, si plusieurs obstacles qu'il ne m'était pas donné de prévoir, n'eussent retardé et suspendu plusieurs fois l'impression de mon ouvrage. Le troisième et dernier volume est sous presse, et paraîtra au commencement de l'été prochain.

On avait répandu le bruit que n'ayant plus entre mes mains le manuscrit 190 de la bibliothèque du Vatican, j'avais abandonné mon entreprise : ce bruit était sans fondement, ce manuscrit n'est jamais sorti de mes mains ; à la sollicitation du Ministre de l'intérieur, ce volume sera laissé à ma disposition jusqu'à la publication entière de mon ouvrage.

Les interruptions de l'impression de mon Euclide m'ont laissé le temps nécessaire pour mettre la dernière main à mon Apollonius. Mon travail est terminé, et soumis à l'examen de l'Académie des Sciences. Les œuvres d'Apollonius seront imprimées en grec, en latin et en français, avec les variantes des manuscrits grecs de la bibliothèque du Roi et de l'édition d'Oxford, laquelle, de l'aveu même de l'éditeur, ne fut faite que d'après deux manuscrits grecs qui avaient les mêmes défauts, parce qu'ils étaient tous les deux la copie d'un seul et même manuscrit.

Cette édition renfermera les sept livres des Coniques qui nous restent d'Apollonius, les lemmes de Pappus, les commentaires d'Eutocius, et les deux livres du cylindre et du cône de Sérénus.

Je prépare une édition grecque, latine et française des œuvres d'Archimède et des commentaires d'Eutocius. Lorsque la belle édition d'Oxford fut imprimée, le savant Torelli était mort avant d'avoir mis la dernière main à son Archimède, et c'est à cause de cela que cette édition fourmille de

hæc editio Torelli vivente facta fuisset, non equidem hoc ultimum opus aggressus fuisset. Si forte accidit ut mors immatura me quoque prius arripiat, quam Archimedis opera penitus absolverim, tum opus imperfectum ante novissimam diem exuri jubebo, ne quis, me mortuo, illud prelo subicere velit.

Liber decimus Euclidis Elementorum vix quibusdam geometris nostratibus notus est: quin et bene multi illum habent supervacaneum et intellectu perdifficilem.

Utrumque citra manifestam rerum fidem. Hic liber continet et plures propositiones geometris perutiles, et nonnullas illis semper admirandas.

Fateor equidem studentis animum, primo intuitu posse deterreri et avocari, conspectis septemdecim et centum propositionibus hoc in libro contentis; sed unaquæque, velut è fonte communi, derivatur è quibusdam definitionibus ac præcipuis, iisque paucissimis, propositionibus, quarum ope reliqua facillime demonstrantur. Ad hoc hujus libri partes ita inter se dispositæ sunt, ut earum non seriem et juncturam modo, sed concentum et harmoniam oculus, primo conjectu, percipiat. Illic vere notandus est mirabilis ille ordo quem in omnibus suis operibus Euclides constituit.

Hæc vero libri decimi sunt definitiones et propositiones. Hæc tabula synoptica mihi aptissima visa est ad illius comprehensionem acquirendam.

D E F I N I T I O N E S.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eadem mensurâ mesurantur.
2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.
3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mesurantur.
4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

fautes. Si cette édition eût été faite de son vivant, je ne me serais certainement pas chargé de ce dernier travail. Il est très-possible qu'une mort prématurée vienne aussi me surprendre avant que j'aie mis la dernière main aux œuvres d'Archimède. Mais si cela arrive, j'ordonnerai, avant mon dernier jour, de livrer aux flammes un travail imparfait, qu'on serait peut-être tenté de publier après ma mort.

Le dixième livre des Éléments d'Euclide est aujourd'hui très-peu connu des géomètres français : ils regardent généralement ce livre comme superflu, et comme étant très-difficile à entendre.

Ces deux reproches me paraissent mal fondés. Ce livre renferme un grand nombre de propositions utiles aux géomètres, et une foule d'autres qui sont dignes de toute leur admiration.

Les cent dix-sept propositions que contient ce dixième livre seraient peut-être capables de décourager, au premier abord, celui qui veut l'étudier ; mais tout dépend dans ce livre de quelques définitions, et d'un très-petit nombre de propositions fondamentales, à l'aide desquelles tout le reste se démontre avec la plus grande facilité. Ajoutons à cela que les parties en sont tellement disposées, que l'œil en saisit l'ensemble sans le moindre effort. C'est là surtout qu'Euclide se fait remarquer par l'ordre admirable qu'il a su établir dans tous ses ouvrages.

Voici les définitions et les propositions du dixième livre. Ce tableau synoptique me paraît très-propre à en faciliter l'étude.

D É F I N I T I O N S.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocetur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

PROP. I. Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

PROP. II. Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. III. Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

PROP. IV. Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

PROP. V. Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

PROP. VI. Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

PROP. VII. Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

5. Ces choses étant supposées, on démontre qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le quarré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

PROP. I. Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

PROP. II. Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. III. Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. IV. Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

PROP. V. Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VI. Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

PROP. VII. Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

PROP. VIII. Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. IX. A rectis longitudine commensurabilibus quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum et latera habebunt longitudine commensurabilia; sed a rectis longitudine incommensurabilibus quadrata inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

PROP. X. Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.

PROP. XI. Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

PROP. XII. Eidem magnitudini commensurabiles et inter se sunt commensurabiles.

PROP. XIII. Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

PROP. XIV. Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

PROP. XV. Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et tertia quam quarta plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili,

PROP. XVI. Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et

PROP. VIII. Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

PROP. IX. Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

PROP. X. Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

PROP. XI. Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

PROP. XII. Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles.

PROP. XIII. Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

PROP. XIV. Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

PROP. XV. Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième; et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du quarré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

PROP. XVI. Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme

tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

PROP. XVII. Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

PROP. XVIII. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XIX. Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

PROP. XX. Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

sera commensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est commensurable avec une d'elles , les grandeurs proposées seront commensurables.

PROP. XVII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles ; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

PROP. XVIII. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

PROP. XIX. Si l'on a deux droites inégales ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande ; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

PROP. XX. Le rectangle compris sous des droites rationelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

PROP. XXI. Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXII. Sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum irrationale est, et recta quæ potest ipsum irrationalis erit; ea autem vocetur media.

PROP. XXIII. Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

PROP. XXIV. Recta mediæ commensurabilis media est.

PROP. XXV. Sub mediis longitudine commensurabilibus secundùm aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, medium est.

PROP. XXVI. Sub mediis potentiâ solùm commensurabilibus rectis contentum rectangulum, vel rationale vel medium est.

PROP. XXVII. Medium non medium superat rationali.

PROP. XXVIII. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes.

PROP. XXIX. Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

PROP. XXX. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXXI. Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

PROP. XXXII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

PROP. XXI. Si une surface rationnelle est appliquée à une droite rationnelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

PROP. XXII. Le rectangle compris sous des droites rationnelles, commensurables en puissance seulement, est irrationnel; et la droite dont la puissance égale ce rectangle sera irrationnelle; cette droite s'appellera médiale.

PROP. XXIII. Le carré d'une médiale appliqué à une rationnelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

PROP. XXIV. Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

PROP. XXV. Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

PROP. XXVI. Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationnel ou médial.

PROP. XXVII. Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

PROP. XXVIII. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui contiennent une surface rationnelle.

PROP. XXIX. Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale.

PROP. XXX. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXI. Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

PROP. XXXII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationnel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

PROP. XXXIII. Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

PROP. XXXIV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

PROP. XXXV. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale.

PROP. XXXVI. Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

PROP. XXXVII. Si duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componantur, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis nominibus.

PROP. XXXVIII. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

PROP. XXXIX. Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

PROP. XL. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium; tota recta irrationalis est, vocetur autem major.

PROP. XLI. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est, vocetur autem rationale et medium potens.

PROP. XLII. Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum

PROP. XXXIII. Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

PROP. XXXIV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit rationnelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

PROP. XXXV. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle qu'elles comprennent soit rationnel.

PROP. XXXVI. Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites.

PROP. XXXVII. Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

PROP. XXXVIII. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

PROP. XXXIX. Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

PROP. XL. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

PROP. XLI. Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationnel, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut une rationnelle et une médiale.

PROP. XLII. Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces

sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis; tota recta irrationalis est, vocetur autem bina media potens.

PROP. XLIII. Recta ex binis nominibus ad unum solùm punctum dividitur in nomina.

PROP. XLIV. Ex binis mediis prima ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLV. Ex binis mediis secunda ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVI. Major ad idem solùm punctum dividitur.

PROP. XLVII. Recta rationale et medium potens ad unum solùm punctum dividitur.

PROP. XLVIII. Bina media potens ad unum solùm punctum dividitur.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si vero neutrum, sexta.

droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationnelle et sera appelée celle qui peut deux médiales.

PROP. XLIII. La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

PROP. XLIV. La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLV. La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVI. La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVII. La droite qui peut une rationnelle et une médiale ne peut être divisée qu'en un seul point.

PROP. XLVIII. La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

PROP. XLIX. Invenire ex binis nominibus primam.

PROP. L. Invenire ex binis nominibus secundam.

PROP. LI. Invenire ex binis nominibus tertiam.

PROP. LII. Invenire ex binis nominibus quartam.

PROP. LIII. Invenire ex binis nominibus quintam.

PROP. LIV. Invenire ex binis nominibus sextam.

PROP. LV. Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

PROP. LVI. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

PROP. LVII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

PROP. LVIII. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

PROP. LIX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

PROP. LX. Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

PROP. LXI. Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

PROP. LXII. Quadratum primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

PROP. LXIII. Quadratum secundæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

PROP. LXIV. Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

PROP. XLIX. Trouver la première de deux noms.

PROP. L. Trouver la seconde de deux noms.

PROP. LI. Trouver la troisième de deux noms.

PROP. LII. Trouver la quatrième de deux noms.

PROP. LIII. Trouver la cinquième de deux noms.

PROP. LIV. Trouver la sixième de deux noms.

PROP. LV. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

PROP. LVI. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

PROP. LVII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

PROP. LVIII. Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée majeure.

PROP. LIX. Si une surface est comprise sous une irrationnelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LX. Si une surface est comprise sous une rationnelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXI. Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

PROP. LXII. Le carré de la première de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la seconde de deux noms.

PROP. LXIII. Le carré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la troisième de deux noms.

PROP. LXIV. Le carré d'une majeure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

PROP. LXV. Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

PROP. LXVI. Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

PROP. LXVII. Recta ei quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est ordine eadem.

PROP. LXVIII. Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

PROP. LXIX. Recta majori commensurabilis et ipsa major est.

PROP. LXX. Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

PROP. LXXI. Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

PROP. LXXII. Rationali et medio compositis, quatuor irrationales fiunt, vel ex binis nominibus recta, vel ex binis mediis prima, vel major, vel et rationale et medium potens.

PROP. LXXIII. Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

PROP. LXXIV. Si a rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

PROP. LXXV. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

PROP. LXXVI. Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commen-

PROP. LXV. Le quarré d'une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

PROP. LXVI. Le quarré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

PROP. LXVII. La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXVIII. La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

PROP. LXIX. Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

PROP. LXX. Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXI. Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

PROP. LXXII. Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre droites irrationnelles ; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

PROP. LXXIII. Deux surfaces médiales incommensurables entr'elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationnelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

PROP. LXXIV. Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière ; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

PROP. LXXV. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le premier apotome de la médiale.

PROP. LXXVI. Si d'une médiale on retranche une médiale, commensu-

surabilis existens toti, quæ cum totâ medium continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

PROP. LXXVII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum vero sub ipsis mediûm; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

PROP. LXXVIII. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

PROP. LXXIX. Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

PROP. LXXX. Apotomæ una solûm congruit recta rationalis potentiâ solûm commensurabilis existens toti.

PROP. LXXXI. Mediæ apotomæ primæ una solûm congruit recta media, potentiâ solûm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

PROP. LXXXII. Mediæ apotomæ secundæ una solûm congruit recta media, potentiâ solûm commensurabilis existens toti, et cum totâ medium continens.

PROP. LXXXIII. Minori una solûm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex

nable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface médiale, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appellera le second apotome de la médiale.

PROP. LXXVII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

PROP. LXXVIII. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationnel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. LXXIX. Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des carrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. LXXX. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

PROP. LXXXI. Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

PROP. LXXXII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome médial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

PROP. LXXXIII. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des carrés de

ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero bis sub ipsis medium.

PROP. LXXXIV. Ei quæ cum rationali medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti; et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero bis sub ipsis rationale.

PROP. LXXXV. Ei quæ cum medio medium totum facit una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, si quidem tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome quarta.

ces droites rationnelle , et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXIV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

PROP. LXXXV. Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appèlera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable avec la droite entière, le reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si vero sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

PROP. LXXXVI. Invenire primam apotomen.

PROP. LXXXVII. Invenire secundam apotomen.

PROP. LXXXVIII. Invenire tertiam apotomen.

PROP. LXXXIX. Invenire quartam apotomen.

PROP. XC. Invenire quintam apotomen.

PROP. XCI. Invenire sextam apotomen.

PROP. XCII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

PROP. XCIII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

PROP. XCIV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

PROP. XCV. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

PROP. XCVI. Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ eum rationali medium totum facit.

PROP. XCVII. Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ eum medio medium totum facit.

PROP. XCVIII. Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

PROP. XCIX. Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

PROP. C. Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationelle exposée, le reste s'appèlera sixième apotome.

PROP. LXXXVI. Trouver un premier apotome.

PROP. LXXXVII. Trouver un second apotome.

PROP. LXXXVIII. Trouver un troisième apotome.

PROP. LXXXIX. Trouver un quatrième apotome.

PROP. XC. Trouver un cinquième apotome.

PROP. XCI. Trouver un sixième apotome.

PROP. XCII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

PROP. XCIII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

PROP. XCIV. Si une surface est comprise sous une rationelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

PROP. XCV. Si une surface est comprise sous une rationelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

PROP. XCVI. Si une surface est comprise sous une rationelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

PROP. XCVII. Si une surface est comprise sous une rationelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. XCVIII. Le quarré d'un apotome appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un premier apotome.

PROP. XCIX. Le quarré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome.

PROP. C. Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

PROP. CI. Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

PROP. CII. Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

PROP. CIII. Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

PROP. CIV. Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est atque ordine eadem.

PROP. CV. Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

PROP. CVI. Recta minori commensurabilis minor est.

PROP. CVII. Recta ei quæ cum rationali medium totum facit oommen-
surabilis et ipsa cum rationali medium totum faciens est.

PROP. CVIII. Recta ei quæ cum medio medium totum facit commen-
surabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

PROP. CIX. Medio a rationali detracto, recta reliquum spatium potens
una duarum irrationalium fit, vel apotome, vel minor.

PROP. CX. Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt vel
mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

PROP. CXI. Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ
duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio me-
dium totum faciens.

PROP. CXII. Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

PROP. CXIII. Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus

PROP. CI. Le carré d'une mineure appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

PROP. CII. Le carré d'une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

PROP. CIII. Le carré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

PROP. CIV. Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

PROP. CV. Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

PROP. CVI. Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

PROP. CVII. La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. CVIII. Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CIX. Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationnelle, la droite qui peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un apotome, ou une mineure.

PROP. CX. Une surface rationnelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationnelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

PROP. CXI. Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROP. CXII. Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

PROP. CXIII. Le carré d'une rationnelle étant appliqué à une droite de

applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eadem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

PROP. CXIV. Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

PROP. CXV. Si spatium contineatur sub apotome et rectâ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; recta spatium potens rationalis est.

PROP. CXVI. A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla nulli præcedentium eadem.

PROP. CXVII. Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

Hæ sunt definitiones et propositiones libri decimi, quæ omnes propositiones perspicue, simpliciterque demonstrantur.

Hoc volumen permultas lectiones varias continet. Ingens multitudo rerum supervacanearum in textum libri decimi introductæ fuerant; quæ omnes e textu ejectæ sunt.

Aliter demonstrata, corollaria, lemmata et scholia quibus librum decimum expurgavi reperiuntur cum versionibus latinis et gallicis in lectionibus variantibus.

Quæ e textu libri decimi ejecta sunt, illa Euclidi abjudicanda semper fuerunt visa; et quæ ejeci, ea et ex omnibus optimis codicibus fuerunt ejecta. Si quando erravi, hoc erit parvi momenti; adde quod quæ ejecta sunt e textu in lectionibus variantibus reperiuntur. Cæterum mihi erat norma semper fere certa discernendi quæ sunt Euclidis ex illis quæ ab Euclide sunt aliena.

deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

PROP. CXIV. Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

PROP. CXV. Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationnelle.

PROP. CXVI. Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

PROP. CXVII. Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Telles sont les définitions et les propositions du dixième livre : toutes ces propositions sont démontrées d'une manière claire et simple.

Ce volume renferme un très-grand nombre de variantes. Une foule de superfluités avaient été introduites dans le texte du dixième livre; je les en ai fait disparaître.

Les *autrement*, les corollaires, les lemmes et les scholies dont j'ai purgé le dixième livre se trouvent dans les variantes avec leur traduction latine et française.

Ce que j'ai supprimé dans le dixième livre a toujours été regardé comme indigne d'Euclide; ajoutez à cela que les suppressions que j'ai faites sont autorisées presque toutes par les meilleurs manuscrits. Si j'ai erré en quelque chose, le mal n'est pas grand; puisque ce que l'on ne trouve pas dans le texte, on le trouve dans les variantes. Au reste, j'avais une règle presque toujours infallible de discerner ce qui appartient à Euclide de ce qui lui est étranger.

Antiqui geometræ, Euclides scilicet, Archimedes et Apollonius, solebant ad propositum directe tendere, nunquam de viâ declinantes demonstrandi causâ quæ ad progrediendum nequaquam ipsis erant necessaria. Quæ cum ita sint, fere impossibile est illum in errorem labi qui argumentum callide animo complectitur. Accedit illud quod in omnibus ejectis nec Euclidis concinitatem agnoscere est, nec verba ipsi familiaria.

Inter ejecta ex decimo libro invenire est aliter demonstrata quæ nullius sunt momenti. Vide *aliter* propositionis 1, et scholium propositionis 22, quod merum est *aliter*.

Invenire est demonstrationes quæ in libris præcedentibus reperiuntur. Vide lemmata propositionum 31, 32, 33.

Invenire quoque est plura futilia et scioli alicujus glossemata. Vide corollarium propositionis 24, scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum.

In pluribus ejectis Euclides loquens introducit, *καλῶ, ἐκάλει*; *vocat, vocavit*, etc. Vide scholia propositionum 19, 39, 40, 41, 42, 73, et scholium definitionum secundarum, etc.

Hæc et plura alia e textu decimi libri sunt ejecta. In textu plura retinui quæ ex ipso fortasse ejicere potuissem; tale est scholium propositionis 19, et *aliter* propositionum 19, 106, 107, 116, et corollarium propositionis 112, necnon *aliter* propositionis 117, cujus haud dubie demonstratio est una ex elegantissimis totius geometriæ.

Retinui quoque in textu plura alia quæ ex illo ejicere fortasse debuissim, et quæ ex illo ejicerem, si quando alteram Euclidis editionem producerem; tale est lemma propositionis 9, talia sunt etiam lemmata propositionum 14, 17, 33, quæ in libris præcedentibus sunt demonstrata, necnon lemma propositionis 20, et corollarium propositionis 24, quæ nihil sunt nisi inutilia glossemata.

E textu ejicere debuissim propositionem 13, quæ eadem est ac propositio 14, et quæ sine dubio Euclidis non est. Retinui tamen, ut propositiones

Les anciens géomètres, je veux dire Euclide, Archimède et Apollonius, avaient pour usage de marcher constamment vers leur but sans s'écarter jamais de leur chemin, pour s'occuper de ce qui ne leur était pas nécessaire pour aller en avant. Cela étant ainsi, il n'est guère possible, pour une personne qui entend bien la matière, de tomber dans l'erreur. Ajoutez à cela que dans toutes les suppressions que j'ai faites, on ne reconnaît ni la manière, ni même les expressions accoutumées d'Euclide.

Parmi les suppressions que j'ai faites au dixième livre, on trouve des *Autrement* qui ne sont d'aucun prix. Voyez l'*Autrement* de la proposition 1, et la Scholie de la proposition 22, qui n'est qu'un pur *Autrement*.

On y rencontre des démonstrations qui se trouvent dans les livres précédents. Voyez les lemmes des propositions 31, 32, 33.

Ici ce sont des futilités, ce sont des gloses de quelque demi-savant en géométrie. Voyez le corollaire de la proposition 24, les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes.

Dans une grande partie des suppressions que j'ai faites, on fait parler Euclide *καλει, ικαλει*; *il appelle, il appela*. Voyez les scholies des propositions 19, 39, 40, 41, 42, 73, et la scholie des définitions secondes, etc.

Telles sont les suppressions importantes que j'ai cru devoir faire au dixième livre; j'ai conservé dans le texte des choses que j'aurais pu supprimer; telle est la scholie de la proposition 19, les *aliter* des propositions 19, 106, 107 et 116; le corollaire de la proposition 112, ainsi que l'*autrement* de la proposition 117, dont la démonstration est certainement une des plus belles de toute la géométrie.

J'en ai conservé d'autres que j'aurais peut-être dû supprimer, et que je supprimerais certainement dans une nouvelle édition, si jamais elle avait lieu. Tel est le lemme de la proposition 9; tels sont aussi les lemmes des propositions 14, 17, 33, qui sont démontrés dans les livres précédents; ainsi que le lemme de la proposition 20, et le corollaire de la proposition 24, qui ne sont que des gloses inutiles.

J'aurais dû supprimer la proposition 13, qui est la même que la proposition 14, et qui n'est certainement pas d'Euclide. Si je ne l'ai

meæ editionis signarentur iisdem numeris quibus propositiones editionis Oxoniæ.

Retinui etiam scholium quod ultimam propositionem subsequitur, quamvis illud supponat plures propositiones quæ in libris tantum subsequentibus demonstrantur. Hoc scholium retinui, quia illud ostendit quomodo, rectis incommensurabilibus inventis, magnitudines duarum et trium dimensionum inveniri possint inter se incommensurabiles.

Corollarium propositionis 73, quod in lectionibus variis adest, in textu adesse deberet.

Nihil amplius dicam de lectionibus variis libri decimi; nunc de propositione 19 libri noni sum locuturus.

Dixi in notâ quæ reperitur in imâ paginâ hujus propositionis Hervagium volentem emendare duos codices græcos quibus usus fuit in Euclide edendo, pro propositione 19 substituisse græcam versionem versionis latinæ Zamberti, quæ concordat cum codicibus 190, 2466, 2342. Vide lectiones varias. Mea editio plane concordat cum omnibus aliis codicibus. Editio Oxoniæ consentanea est cum editione Basilæ. In imâ paginâ editionis Oxoniæ legere est textum hujus propositionis esse corruptissimum. Textus est corruptus in solis codicibus de quibus mentionem feci; in omnibus vero aliis est maxime purus.

In editionibus Basilæ et Oxoniæ, et in codicibus 190, 2466, 2362, hoc agitur ut ostendatur esse impossibile invenire quartum numerum integrum Δ tribus numeris integris A, B, r proportionalem, quando numeri A, B, r non sunt deinceps proportionales, et quando numeri A, r inter se sunt primi.

Hæc est ratiocinatio :

Hoc sit possibile, et ut A ad B ita sit r ad Δ ; fiat ut B ad r ita sit Δ ad E . Vide secundum *alinea* paginæ 439, et notam propositionis 19.

Atqui evidenter fieri potest ut E qui numerus integer esse debet vel sit vel non sit integer numerus; hæc ratiocinatio igitur est falsa. Et valde miror quod falsitatem hujus ratiocinationis non animadverterit Commandinus, qui erat unus ex primis ætatis suæ geometris.

pas fait; c'était afin que les propositions de mon édition eussent les mêmes numéros que celle d'Oxford.

J'ai conservé aussi la scholie de la fin du dixième livre, quoiqu'elle suppose plusieurs propositions qui ne sont démontrées que dans les livres suivants. J'ai conservé cette scholie, parce qu'elle fait voir comment des droites incommensurables étant trouvées, on peut trouver des grandeurs de deux et de trois dimensions incommensurables entr'elles.

C'est par erreur que le corollaire de la proposition 73 se trouve parmi les variantes, et non dans le texte.

Je ne parlerai pas davantage des variantes du dixième livre. Il ne me reste plus qu'à parler de la proposition 19 du neuvième livre.

J'ai dit dans la note qui est au bas de cette proposition, qu'Hervage, voulant rectifier les deux manuscrits grecs dont il se servit dans son édition d'Euclide, avait mis à la place de la proposition 19 la version grecque de la version latine de Zamberti, qui est entièrement conforme aux trois manuscrits 190, 2466, 2342. Voyez les variantes. Mon édition est entièrement conforme à tous les autres manuscrits. Celle d'Oxford est calquée sur celle de Basle. On lit, au bas de la page, dans l'édition d'Oxford, que cette proposition est tout-à-fait corrompue. Le texte n'est corrompu que dans les trois manuscrits dont je viens de parler; dans tous les autres, il est dans toute sa pureté.

Dans les éditions de Basle et d'Oxford, et dans les trois manuscrits 190, 2466, 2342, il s'agit de démontrer qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre entier Δ proportionnel aux trois nombres entiers A, B, Γ , lorsque les nombres A, B, Γ ne sont pas successivement proportionnels, et que les nombres A, Γ sont premiers entr'eux.

Voici comment on raisonne :

Que cela soit possible, et que A soit à B comme Γ est à Δ ; faisons en sorte que B soit à Γ comme Δ est à E . Voyez le second alinéa de la page 439, et la note de la proposition 19.

Or, il est évident que E , qui doit être un nombre entier, peut ou être ou n'être pas un nombre entier. Ce raisonnement est donc faux. Je suis très-surpris que Commandin, qui était un des premiers géomètres de son temps, n'ait pas aperçu la fausseté de ce raisonnement.

Hæc ratiocinatio non solum falsa est, sed etiam et enuntiatio propositionis demonstrandæ; possibile enim est invenire quartum numerum integrum proportionalem numeris 4, 8, 9, qui quidem non sunt deinceps proportionales, et quorum extremi 4 et 9 primi inter se sunt.

Quod attinet ad partem typographicam summâ diligentia usus sum ut textus hujus voluminis quam maxime emendatus esset. D. Jannet necnon D. Patris, mei operis editor, qui mea specimina accuratissime legerunt, non tenui mihi fuerunt auxilio.

Nota. Propositio 7 libri primi detruncata erat in omnibus græcis codicibus. Vide præfationem primi voluminis, pag. 19. Hanc propositionem integram reperi in versione latinâ quam ex arabicâ linguâ fecit Campanus, et quæ edita fuit Venetiis anno 1482. Hæc propositio ex toto Euclidis dignissima mihi videtur. En hic illa est cum meâ versione græcâ gallicâque : Campani versionem in paucissimis immutavi.

BIBΛION á. ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Εάν ἀπὸ δύο σημείων τῶν ὕσων εὐθείας πειράτων δύο εὐθεῖαι κατὰ τι σημῖον συμπίπτουσιν διαχθῶσιν, ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη οὐ διαχθῆσονται δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ ἄλλον σημῖον συμπίπτουσιν ὥστε ἴσας εἶναι ταῖς τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσας.

Εστω εὐθεῖα ἡ AB, καὶ ἀπὸ τῶν A, B πειράτων διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ AG, BG κατὰ τι σημῖον τὸ Γ συμπίπτουσιν· λέγω δὴ ὅτι ἀπὸ πέρατων τῆς AB, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, οὐ διαχθῆσονται ἄλλαι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσιν κατὰ

Si ex duobus punctis rectæ extremitatibus duæ rectæ in unum punctum concurrentes ducantur, ex iisdem punctis et in iisdem partibus non ducantur duæ aliæ rectæ in aliud punctum concurrentes, ita ut æquales sint rectis eadem extremitates habentibus.

Sit recta AB, et ex A, B extremitatibus ducantur duæ rectæ AG, BG in punctum Γ concurrentes; dico ex extremitatibus rectæ AB, et in iisdem partibus, non ducendas fore duas alias rectas in aliud punctum concurrentes, ita ut

LIVRE I. PROPOSITION VII.

Si des extrémités d'une droite on mène deux droites qui se rencontrent en un point, il est impossible de mener des mêmes points, et du même côté, deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de manière que les droites qui ont les mêmes extrémités soient égales entr'elles.

Soit la droite AB; des extrémités A, B de cette droite menons deux droites AG, BG qui se rencontrent en un point Γ; je dis qu'on ne peut pas du même côté mener des extrémités de AB deux autres droites qui se rencontrent en un autre point, de

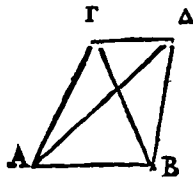
Non seulement ce raisonnement est faux, mais encore l'énoncé de la proposition à démontrer. Car il est très-possible de trouver un quatrième nombre entier proportionnel aux nombres 4, 8, 9, qui ne sont pas successivement proportionnels, et dont les extrêmes 4 et 9 sont premiers entr'eux.

Quant à la partie typographique de ce volume, j'ai fait tous mes efforts pour donner au texte toute la pureté possible. J'ai été puissamment secondé par M. Jannet et M. Patris, éditeur de mon ouvrage, qui ont eu la complaisance de lire les épreuves avec le plus grand soin.

Nota. La proposition VII du premier livre était tronquée dans tous les manuscrits grecs. Voyez la Préface du premier volume, pag. 19. J'ai trouvé cette proposition toute entière dans la version latine faite d'après l'arabe par Campan, et publiée à Venise en 1482. Elle me paraît en tout digne d'Euclide. La voici avec ma version grecque et latine. Je n'ai fait que quelques légers changements à la version de Campan.

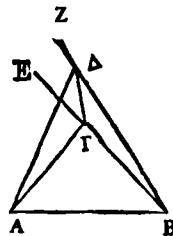
ἄλλον σημείον, ὥστε εὐθείαν μὲν ἀπὸ σημείου τοῦ Α ἡχθεῖσαν ἴσην εἶναι τῇ ΑΓ, ἡχθεῖσαν δὲ ἀπὸ σημείου τοῦ Β ἴσην τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ σημείον τὸ Δ συμπίπτουσαι, καὶ ἔστω εὐθεῖα μὲν ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, εὐθεῖα δὲ ΒΔ ἴση τῇ ΒΓ.



recta quidem ex puncto A ducta æqualis sit ipsi ΑΓ, ducta vero ex puncto B æqualis ipsi ΒΓ.

Si enim possibile, ducantur in eisdem partibus duæ aliæ rectæ in punctum Δ concurrentes; et sit recta quidem ΑΔ æqualis ipsi ΑΓ, recta vero ΒΔ æqualis ipsi ΒΓ.



Ἦτοι σημείον τὸ Δ εἰνδὸς πεσεῖται τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἢ ἐκτός· μὴ γάρ οἱς μίαν τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΒΓ

Vel punctum Δ intra triangulum ΑΒΓ cadet vel extra; non enim in unum laterum ΑΓ, ΒΓ

manière que la droite menée du point A soit égale à ΑΓ, et que la droite menée du point B soit égale à ΒΓ.

Car si cela est possible, menons du même côté deux autres droites qui se rencontrent en un point Δ, de manière que ΑΔ soit égal à ΑΓ, et ΒΔ égal à ΒΓ.

Ou le point Δ tombera en dedans du triangle ΑΒΓ, ou en dehors; car il ne tombera

πιστῆται· εἰ γὰρ πιστῆται, τὸ μέρος τῷ ὅλῳ μείζον ἔσται, ὅπερ ἄτοπον.

Πιπτῆτω πρότερον ἑκτός. Ἦτοι μία τῶν ΑΔ, ΒΔ μίαν τῶν ΑΓ, ΒΓ τομῇ, ἣ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τομῇ.

Τομνέτω δὴ ἡ ΑΔ τὴν ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΑΔ, ΑΓ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶ δύο πλευραὶ αἱ ΒΔ, ΒΓ τοῦ ΒΓΔ τριγώνου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἀλλὰ δὴ μείζων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΔ· ὥστε τὸ μέρος τοῦ ὅλου μείζον ἐστίν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὴ διχθήσεται, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΑΔ τμήνῃ.

Ἀλλὰ δὴ οὐδέτερα τῶν ΑΔ, ΒΔ οὐδέτεραν τῶν ΑΓ, ΒΓ τομνέτω καὶ τὸ Δ σημεῖον ἑκτός· πιπτῆτω τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΓ, καὶ προσεκκεκλήθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΒΓ, ΒΔ εὐθείαι αἱ ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ

cadet; si enim caderet, pars toto major esset, quod absurdum.

Cadat primum extra. Vel una ex ΑΔ, ΒΔ rectis unam ex ΑΓ, ΒΓ rectis secabit, vel neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secabit.

Secet igitur ΑΔ ipsam ΒΓ, et jungatur ΓΔ. Quoniam igitur æqualia sunt duo latera ΑΔ, ΑΓ trianguli ΑΓΔ, æqualis est et angulus ΑΓΔ ipsi ΑΔΓ. Rursus, quoniam æqualia sunt duo latera ΒΔ, ΒΓ trianguli ΒΓΔ, æqualis est et angulus ΒΓΔ angulo ΒΔΓ. Sed et major est angulus ΒΔΓ angulo ΑΔΓ; angulus igitur ΒΓΔ major est angulo ΑΓΔ; quare pars quam totum major est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si ipsa ΒΓ ipsam ΑΔ secet.

Sed et neutra ipsarum ΑΔ, ΒΔ neutram ipsarum ΑΓ, ΒΓ secet, et punctum Δ cadat extra triangulum ΑΒΓ, et jungatur ΔΓ, et producantur in directum ipsarum ΒΓ, ΒΔ rectæ ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam igitur æquales sunt rectæ ΑΓ, ΑΔ, æqualis est et angulus ΑΔΓ ipsi ΑΓΔ. Rursus,

pas sur un des côtés ΑΓ, ΒΓ de ce triangle, parce que, si cela était, la partie serait plus grande que le tout; ce qui est absurde.

Que le point Δ tombe premièrement en dehors; ou l'une des droites ΑΔ, ΒΔ coupera l'une des droites ΑΓ, ΒΓ, ou aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupera aucune des droites ΑΓ, ΒΓ.

Que la droite ΑΔ coupe la droite ΒΓ; joignons ΓΔ. Puisque les deux côtés ΑΔ, ΑΓ du triangle ΑΓΔ sont égaux, l'angle ΑΓΔ sera égal à l'angle ΑΔΓ (5. 1). De plus, puisque les deux côtés ΒΔ, ΒΓ du triangle ΒΓΔ sont égaux, l'angle ΒΓΔ sera égal à l'angle ΒΔΓ (5. 1). Mais l'angle ΒΔΓ est plus grand que l'angle ΑΔΓ; l'angle ΒΓΔ est donc plus grand que l'angle ΑΓΔ; la partie est donc plus grande que le tout, ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si la droite ΒΓ coupait la droite ΑΔ.

Mais qu'aucune des droites ΑΔ, ΒΔ ne coupe aucune des droites ΑΓ, ΒΓ, et que le point Δ tombe hors du triangle ΑΒΓ; joignons ΔΓ, et menons les droites ΓΕ, ΔΖ dans les directions des droites ΒΓ, ΒΔ.

Puisque les droites ΑΓ, ΑΔ sont égales, l'angle ΑΔΓ sera égal à l'angle ΑΓΔ (5. 1).

ἴσαι εἰσὶν αἱ $BΓ$, $ΒΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$ τῇ ὑπὸ $ΕΓΔ$. Ἀλλὰ δὴ ἰλάσσων ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΕΓΔ$ τῆς ὑπὸ $ΑΓΔ$. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$ ἰλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΑΔΓ$. ὥστε καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους ἰλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἄτοπον.

Ομοίως δὲ διχθύνεται, καὶ τὸ $Δ$ σημεῖον ἐντὸς πίπτει τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου. Εὰν ἀπὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

quoniam æquales sunt rectæ $BΓ$, $ΒΔ$, æqualis est et angulus $ΓΔΖ$ angulo $ΕΓΔ$. Sed et minor est angulus $ΕΓΔ$ quam angulus $ΑΓΔ$; angulus igitur $ΓΔΖ$ minor est angulo $ΑΔΓ$; quare et totum quam pars minus est, quod absurdum.

Similiter utique ostendetur, si punctum $Δ$ cadat intra triangulum $ΑΒΓ$. Si ex duobus, etc.

De plus, puisque les droites $BΓ$, $ΒΔ$ sont égales, l'angle $ΓΔΖ$ sera égal à l'angle $ΕΓΔ$ (5.1). Mais l'angle $ΕΓΔ$ est plus petit que l'angle $ΑΓΔ$; l'angle $ΓΔΖ$ est donc plus petit que l'angle $ΑΔΓ$; le tout est donc plus petit que la partie; ce qui est absurde.

La démonstration serait la même, si le point $Δ$ tombait en dedans du triangle $ΑΒΓ$. Donc, etc.

M. Sédillot, membre adjoint du bureau des longitudes, et professeur à la Bibliothèque du Roi, a eu la complaisance de traduire littéralement pour moi cette proposition importante d'Euclide d'après la version arabe de Nassir-Eddin Thoussy, imprimée à Rome en 1594. La version latine de Campan est tout-à-fait conforme à la manière d'Euclide; il n'en est pas de même de la version de Nassir-Eddin Thoussy, quoiqu'elle soit la même pour le fond; il est donc présumable que la version arabe dont s'est servi Campan n'est pas la même que la version arabe imprimée à Rome. Voici la version de M. Sédillot, pour qui la langue arabe est aussi familière que les sciences mathématiques.

Soient menées des deux extrémités d'une ligne droite donnée, deux droites qui se rencontrent en un point quelconque, situé d'un côté déterminé de la ligne donnée, on ne pourra, des deux mêmes points et du même côté de la ligne, mener deux autres droites respectivement égales aux deux premières, chacune à sa corrélatrice, et se rencontrant en un autre point que les deux premières.

Des deux points A et B de la droite $ΑΒ$, je mène les deux droites $ΑΓ$, $ΒΓ$ qui se rencontrent au point $Γ$. Des deux mêmes points et du même côté $Γ$, je mène les deux autres droites $ΑΔ$, $ΒΔ$; $ΑΔ$ étant la corrélatrice de $ΑΓ$, et $ΒΔ$ celle de $ΒΓ$; et je dis que les deux lignes $ΑΔ$ et $ΒΔ$ ne peuvent se rencontrer en un autre point que le point $Γ$.

Supposons qu'elles puissent se rencontrer au point $Δ$; je joins $Δ$ et $Γ$ par la droite $ΔΓ$; les deux

côtés $\Delta\Gamma$, $\Delta\Delta$ sont égaux ; l'angle $\Delta\Gamma\Delta$ plus grand que $\Delta\Gamma\mathcal{B}$ est égal à l'angle $\Gamma\Delta\Delta$ par la cinquième proposition ; ainsi $\Gamma\Delta\Delta$ est plus grand que $\Delta\Gamma\mathcal{B}$.

De même, les deux côtés $\mathcal{B}\Gamma$, $\mathcal{B}\Delta$ sont égaux ; l'angle $\Delta\Gamma\mathcal{B}$ plus petit que $\Gamma\Delta\Delta$ est égal à l'angle $\Gamma\Delta\mathcal{B}$ par la cinquième proposition ; l'angle $\Gamma\Delta\mathcal{B}$ serait donc plus petit que $\Gamma\Delta\Delta$, et celui-ci plus grand que celui-là ; ce qui est absurde. Ainsi la chose proposée est vraie ; ce que nous voulions démontrer.

A l'égard de cette proposition, on peut varier la construction. Ainsi lorsque le point Δ tombe au-dehors du triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma$, l'un des deux côtés $\Delta\mathcal{A}$ ou $\Delta\mathcal{B}$ peut être ou n'être pas coupé par l'un des deux autres côtés $\Gamma\mathcal{A}$ ou $\Gamma\mathcal{B}$; ou bien le point Δ peut tomber dans le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma$, ou enfin sur l'un des deux côtés $\Gamma\mathcal{A}$ ou $\Gamma\mathcal{B}$.

Nous venons de démontrer l'impossibilité du cas indiqué dans la figure première. Prolongeons dans la seconde les deux lignes $\Delta\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\Gamma$, selon leur direction respective dans la région du point Δ , vers les points $\mathcal{E}$, $\mathcal{Z}^*$; puis joignons par une droite les deux points Γ et Δ .

Comme dans la figure 2, les angles $\mathcal{A}\Gamma\Delta$ et $\mathcal{A}\Delta\Gamma$ sont égaux par la cinquième proposition, les angles $\mathcal{E}\Gamma\Delta$ et $\mathcal{Z}\Delta\Gamma$ sont aussi égaux par la même proposition ; l'angle $\mathcal{E}\Gamma\Delta$ égal à $\mathcal{Z}\Delta\Gamma$, qui est plus grand que $\mathcal{A}\Delta\Gamma$ égal à $\mathcal{A}\Gamma\Delta$, serait plus grand que $\mathcal{A}\Gamma\Delta$, et celui-ci plus petit que celui-là, ce qui est absurde.

On montrerait de même l'absurdité pour le cas où le point Δ tomberait dans le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma^{**}$.

Quant au cas^{***} où le point Δ tombe sur la ligne $\mathcal{B}\Gamma$, prolongée ou non, il faudrait que de deux lignes égales l'une fût plus grande ou plus petite que l'autre, ce qui est également absurde.

* Après les points $\mathcal{E}$, $\mathcal{Z}$, la version arabe ajoute : *et vers les points $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$ dans la figure 3.*

** Au lieu de où le point Δ tomberait dans le triangle $\mathcal{A}\mathcal{B}\Gamma$, la version arabe dit simplement : *indiqué dans la figure 3.*

*** Au lieu de au cas, la version arabe dit à la figure 4.

J'ai fait ces légers changements pour ne pas multiplier les figures sans nécessité.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER OCTAVUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α.

Εάν ᾤσιν ὁσοιδηποτῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾤσιν ἰσχύιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

Ἐστώσαν ὅποιοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ , οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ A, B, Γ, Δ ἰσχύιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς.

PROPOSITIO I.

Si sint quotcumque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis.

Sint quotcumque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ , extremi autem eorum A, Δ primi inter se sint; dico ipsos A, B, Γ, Δ minimos esse ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis.

LE HUITIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

Soient A, B, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que leurs extrêmes A, Δ soient premiers entr'eux; je dis que les nombres A, B, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux.

2 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ μὲν, ἕστωσαν ἐλάττωτες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλῆθει τῶν Ε, Ζ,

Si enim non, sint minores ipsis Α, Β, Γ, Δ ipsi Ε, Ζ, Η, Θ in eadem ratione existentes cum ipsis. Et quoniam ipsi Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis Ε, Ζ, Η, Θ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipso-

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε	Ζ	Η	Θ

Η, Θ¹. Δίττου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως² ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι³ ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὃ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστι⁴ ὃ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rum Ε, Ζ, Η, Θ; ex æquo igitur est ut Α ad Δ ita Ε ad Θ. Ipsi autem Α, Δ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri æqualiter metiuntur ipsos eamdem rationem habentes, major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Ε, major minorem, quod est impossibile; non igitur ipsi Ε, Ζ, Η, Θ minores existentes ipsis Α, Β, Γ, Δ in eadem ratione sunt cum ipsis; ipsi Α, Β, Γ, Δ igitur minimi sunt eorum eamdem rationem habentium cum ipsis. Quod oportebat ostendere.

Car si cela n'est point, que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, soient en même raison que ceux-ci. Puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont en même raison que les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Ε, Ζ, Η, Θ, par égalité Α est à Δ comme Ε est à Θ (14. 7). Mais les nombres Α, Δ sont premiers entre eux, et les nombres premiers sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc les nombres Ε, Ζ, Η, Θ, plus petits que les nombres Α, Β, Γ, Δ, ne sont pas en même raison que ceux-ci; donc les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἑλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ¹, ἐν τῇ δοθέντι λόγῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἑλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἑλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ, Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η, Θ ποιεῖτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιεῖτω.

Α, 2. Β, 3.

Γ, 4. Δ, 6.

Ζ, 8. Η, 12.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποιήκει²· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως³ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ

PROPOSITIO II.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in datâ ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ratio ipsius Α ad Β; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in ipsius Α ad Β ratione.

Imperentur quidem quatuor; et Α se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat; ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ faciat, et adhuc Β se ipsum multiplicans ipsum Ε faciat, et adhuc ipse Α ipsos Γ, Δ, Ε multiplicans ipsos Ζ, Η, Θ faciat, ipse vero Β ipsum Ε multiplicans ipsum Κ faciat.

Ε, 9.

Θ, 18. Κ, 27.

Et quoniam ipse Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Γ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Δ fecit, numerus igitur Α duos ipsos Α, Β multiplicans ipsos Γ, Δ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam ipse Α ipsum Β multiplicans ipsum Δ fecit, ipse vero Β se ipsum

PROPOSITION II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans une raison donnée.

Que la raison donnée, dans les plus petits nombres, soit celle de Α à Β; il faut trouver tant de nombres qu'on voudra, qui soient les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β.

Qu'on en demande quatre. Que Α se multipliant lui-même fasse Γ, que Α multipliant Β fasse Δ, que Β se multipliant lui-même fasse Ε, que Α multipliant encore Γ, Δ, Ε fasse Ζ, Η, Θ, et que Β multipliant Ε fasse Κ.

Puisque Α se multipliant lui-même a fait Γ, et que Α multipliant Β a fait Δ, le nombre Α multipliant les deux nombres Α, Β a fait Γ, Δ; donc Α est à Β comme Γ est à Δ (17. 7). De plus, puisque Α multipliant Β a fait Δ, et que Β se multipliant

4 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πιποίηκεν, ὁ δὲ Β ἰαυτὴν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκεν· ἰκάτερος ἄρα τῶν Α, Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἰκάτερον τῶν Δ, Ε πιποίηκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Αλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ, Η πιποίηκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ

multiplicans ipsum E fecit; uterque igitur ipso-
rum Α, Β ipsum Β multiplicans utrumque ipso-
rum Δ, Ε fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Ε.
Sed ut Α ad Β ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad
Δ ita Δ ad Ε. Et quoniam ipse Α ipsos Γ, Δ mul-
tiplicans ipsos Ζ, Η fecit; est igitur ut Γ ad Δ
ita Ζ ad Η. Ut autem Γ ad Δ ita Α ad Β; et

Α, 2.	Β, 3.	
Γ, 4.	Δ, 6.	Ε, 9.
Ζ, 8.	Η, 12.	Θ, 18. Κ, 27.

οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς
τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α
τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Θ πι-
ποίηκεν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η
πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α
πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η
πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε πολλα-
πλασιάσαντες τοὺς Θ, Κ πιποίηκασιν· ἴστιν ἄρα
ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Αλλ' ὡς
ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η
καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η
οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ·
οἱ Γ, Δ, Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ, Η, Θ, Κ ἀνάλογόν
εἰσιν, ἐν τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Λέγω δὲ ὅτι

ut igitur Α ad Β ita Ζ ad Η. Rursus, quoniam
ipse Α ipsos Δ, Ε multiplicans ipsos Η, Θ fecit;
est igitur ut Δ ad Ε ita Η ad Θ. Ut autem
Δ ad Ε ita Α ad Β; et ut Α igitur ad Β ita
Η ad Θ. Et quoniam ipsi Α, Β, ipsum Ε mul-
tiplicantes ipsos Θ, Κ fecerunt; est igitur ut
Α ad Β ita Θ ad Κ. Sed ut Α ad Β ita et Ζ ad
Η et Η ad Θ; et ut igitur Ζ ad Η ita et Η ad
Θ et Θ ad Κ; ipsi Γ, Δ, Ε igitur et ipsi Ζ, Η,
Θ, Κ proportionales sunt, in ipsius Α ad Β ra-
tione. Dico etiam et minimi. Quoniam enim

lui-même a fait Ε, les nombres Α, Β multipliant Β ont fait Δ, Ε; donc Α est à Β
comme Δ est à Ε (18. 7). Mais Α est à Β comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Δ
est à Ε. Et puisque Α multipliant Γ, Δ a fait Ζ, Η, le nombre Γ est à Δ comme Ζ est
à Η. Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Ζ est à Η. De plus,
puisque Α multipliant Δ, Ε a fait Η, Θ, le nombre Δ est à Ε comme Η est à Θ. Mais
Δ est à Ε comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Η est à Θ. Et puisque Α, Β
multipliant Ε ont fait Θ, Κ, le nombre Α est à Β comme Θ est à Κ. Mais Α est à Β
comme Ζ est à Η, et comme Η est à Θ; donc Ζ est à Η comme Η est à Θ, et
comme Θ est à Κ; donc Γ, Δ, Ε et Ζ, Η, Θ, Κ sont proportionnels, dans la raison
de Α à Β. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits. Car puisque Α, Β sont les plus petits

καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς⁹, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν A, B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, E πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, E πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Z, K πεποίηκεν· οἱ Γ, E ἄρα καὶ οἱ Z, K πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ὅσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὅσιν, ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B . Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν¹⁰ τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὅσιν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετραγόνοι εἰσιν· ἐὰν δὲ τίσσaris, κύβοι.

A, B minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi autem minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis primi inter se sunt; ipsi A, B igitur primi inter se sunt. Et uterque quidem ipsorum A, B se ipsum multiplicans utrumque ipsorum Γ, E fecit; utrumque vero ipsorum Γ, E multiplicans, utrumque ipsorum Z, K fecit; ipsi Γ, E igitur et Z, K primi inter se sunt. Si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero eorum primi inter se sint, minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi Γ, Δ, E igitur et ipsi Z, H, Θ, K minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B . Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex hoc igitur evidens est, si tres numeri deinceps proportionales minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, extremos eorum quadratos esse; si autem quatuor, cubos.

nombres de ceux qui ont la même raison avec eux, et que les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec eux sont premiers entr'eux (23. 7), les nombres A, B sont premiers entr'eux. Mais les nombres A, B , se multipliant eux-mêmes, ont fait Γ, E , et les nombres A, B multipliant Γ, E ont fait Z, K ; donc les nombres Γ, E et Z, K sont premiers entr'eux (29. 7). Mais si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, ces nombres sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (1. 8); donc les nombres Γ, Δ, E et les nombres Z, H, Θ, K sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B . Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont des carrés; quesi l'on a quatre nombres, les extrêmes sont des cubes.

6 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εάν ὧσιν ἱποσειοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis; extremi eorum primi inter se sunt.

Εστωσαν ἱποσειοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales, minimi ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis, ipsi Α, Β, Γ, Δ; dico extremos eorum Α, Δ primos inter se esse.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῇ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ

Sumantur enim duo quidem numeri minimi in ipsorum Α, Β, Γ, Δ ratione, ipsi Ε, Ζ,

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ε, 2.	Ζ, 3.		
Η, 4.	Θ, 6.	Κ, 9.	
Λ, 8.	Μ, 12.	Ν, 18.	Ξ, 27.

οἱ Η, Θ, Κ, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους, ὥς οὗ³ τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γίνηται τῇ πλείθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἴστωσαν οἱ Α, Μ, Ν, Ξ.

tres autem Η, Θ, Κ, et semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis facta fuerit multitudini ipsorum Α, Β, Γ, Δ. Sumantur, et sint Α, Μ, Ν, Ξ.

PROPOSITION III.

Si tant de nombres successivement proportionnels que l'on voudra, sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, leurs extrêmes sont premiers entr'eux.

Que tant de nombres Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels qu'on voudra, soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; je ds que leurs extrêmes Α, Δ sont premiers entr'eux.

Car prenons les deux plus petits nombres qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ (2, 8); que ces nombres soient Ε, Ζ; prenons-en trois, et qu'il soient Η, Θ, Κ, et ainsi de suite, toujours un de plus jusqu'à ce qu'on en ait pris une quantité égale à celle des nombres Α, Β, Γ, Δ. Qu'ils soient pris, et qu'ils soient Α, Μ, Ν, Ξ.

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 7

Καὶ ἔπει οἱ Ε, Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἔπει ἑκάτερος τῶν Ε, Ζ ἑαυτὸν μὲν⁴ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ ποιοῖκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν⁵ Λ, Ξ ποιοῖκεν· καὶ οἱ Η, Κ ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί⁶. Καὶ ἔπει οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλῆθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. Καὶ ἴσιν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους⁷· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Λόγων δοθέντων ὅποσωνοῦν ἐν ἐλάχιστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον¹ ἐλάχιστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Puisque les nombres Ε, Ζ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ils sont premiers entr'eux (24. 7). Et puisque les nombres Ε, Ζ se multipliant eux-mêmes ont fait Η, Κ, et que ces mêmes nombres multipliant Η, Κ ont fait Λ, Ξ, les nombres Η, Κ, et les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux (29. 7). Et puisque les nombres Α, Β, Γ, Δ sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, que les nombres Λ, Μ, Ν, Ξ sont les plus petits qui ont la même raison que Α, Β, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Α, Β, Γ, Δ est égale à la quantité des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; chacun des nombres Α, Β, Γ, Δ est égal à chacun des nombres Λ, Μ, Ν, Ξ; donc Α est égal à Λ, et Δ à Ξ. Mais les nombres Λ, Ξ sont premiers entr'eux; donc les nombres Α, Δ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION IV.

Tant de raisons qu'on voudra étant données, dans leurs plus petits nombres, trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons données.

Et quoniam Ε, Ζ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Et quoniam uterque ipsorum Ε, Ζ se ipsum quidem multiplicans utrumque ipsorum Η, Κ fecit, utrumque vero ipsorum Η, Κ multiplicans utrumque ipsorum Λ, Ξ fecit; et ipsi Η, Κ igitur et ipsi Λ, Ξ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi sunt ipsorum eadem rationem habentium cum ipsis, sunt autem et Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eadem ratione existentes cum ipsis Α, Β, Γ, Δ, et est æqualis multitudo ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudini ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ; unusquisque igitur ipsorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem Α ipsi Λ, ipse vero Δ ipsi Ξ. Et sunt Λ, Ξ primi inter se; et Α, Δ igitur primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quocunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps proportionales minimos in datis rationibus.

8 LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ, τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον² ἐλαχίστους, ἐν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Α, 2.	Β, 5.	Γ, 3.	Δ, 4.	Ε, 5.	Ζ, 6.
Θ, 6.	Η, 15.	Κ, 20.	Λ, 24.		
Ν	Ξ	Μ	Ο		

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, ὁ Η. Καὶ ὅσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ³ ὁ Α τὸν Θ μετρεῖται, ὅσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρεῖται· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖται πρότερον. Καὶ ὅσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρεῖται. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον⁴ εἰσὶν ἐν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sint datæ rationes in minimis numeris, et ratio ipsius Α ad Β et ea ipsius Γ ad Δ, et adhuc ea ipsius Ε ad Ζ; oportet igitur numeros invenire deinceps proportionales minimos et in ipsius Α ad Β ratione, et in ea ipsius Γ ad Δ, et adhuc in ea ipsius Ε ad Ζ.

Sumatur enim ab ipsis Β, Γ minimus mensuratus numerus, ipse Η. Et quoties quidem Β ipsum Η metitur toties et Α ipsum Θ metiatur, quoties vero Γ ipsum Η metitur, toties et Δ ipsum Κ metiatur; ipse autem Ε ipsum Κ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Et quoties Ε ipsum Κ metitur toties et Ζ ipsum Λ metiatur. Et quoniam æqualiter Α ipsum Θ metitur et Β ipsum Η; est igitur ut Α ad Β ita Θ ad Η. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, et adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ; ipsi Θ, Η, Κ, Λ igitur deinceps proportionales sunt in ratione et ipsius Α ad Β, et in ea ipsius Γ ad Δ, et adhuc in ea ipsius Ε ad Ζ. Dico etiam

Soient données dans leurs plus petits nombres la raison de Α à Β, celle de Γ à Δ, et celle de Ε à Ζ; il faut trouver les plus petits nombres successivement proportionnels dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et enfin dans celle de Ε à Ζ.

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par Β et Γ (36. 7); que ce soit Η. Que Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, et que Δ mesure Κ autant de fois que Γ mesure Η; ou Ε mesurera Κ ou il ne le mesurera pas. Premièrement que Ε mesure Κ; et que Ζ mesure Λ autant de fois que Ε mesure Κ. Puisque Α mesure Θ autant de fois que Β mesure Η, Α est à Β comme Θ est à Η (13. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme Η est à Κ, et Ε est à Ζ comme Κ est à Λ; les nombres Θ, Η, Κ, Λ sont donc successivement dans la raison de Α à Β, dans celle de Γ à Δ, et encore dans celle de Ε à Ζ; et je dis aussi qu'ils sont les plus

πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μὴ εἴσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἐξῆς ἀνάλογον⁵ ἐλάχιστοι, ἐν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις⁶. Εἰσὼσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι⁷ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μίζων τὸν μίζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ⁸ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ελάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ μετρούμενός ἐστιν⁹, ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μίζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς, ἐν τε τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν¹⁰ τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἂν¹¹ τῇ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

et minimos. Si enim non sunt ipsi Θ, Η, Κ, Δ minimi deinceps proportionales, et in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ, erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Δ minores numeri in rationibus ipsius Α ad Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ. Sint ipsi Ν, Ξ, Μ, Ο. Et quoniam est ut Α ad Β ita Ν ad Ζ, ipsi autem Α, Β minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse Β igitur ipsum Ξ metitur. Propter eadem utique Γ ipsum Ξ metitur; ipsi Β, Γ igitur ipsum Ξ metiuntur, et minimus igitur ab ipsis Β, Γ mensuratus ipsum Ξ metietur. Minimus autem ab ipsis Α, Γ mensuratus, est ipse Η; ipse Η igitur ipsum Ξ metitur, major minorem, quod est impossibile; non igitur erunt aliqui ipsis Θ, Η, Κ, Δ minores numeri deinceps, et in ratione ipsius Α ad Β, et in eâ ipsius Γ ad Δ, et adhuc in eâ ipsius Ε ad Ζ.

petits. Car si Θ, Η, Κ, Λ ne sont pas les plus petits nombres successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ, il y aura certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Λ dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Que ce soient Ν, Ξ, Μ, Ο. Puisque Α est à Β comme Ν est à Ξ, que Α, Β sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre Β mesurera Ξ. Par la même raison Γ mesure Ξ; donc Β et Γ mesurent Ξ; donc le plus petit nombre mesuré par Β, Γ mesure Ξ (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par Β, Γ est Η; donc Η mesure Ξ, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas certains nombres plus petits que Θ, Η, Κ, Λ, successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et enfin de Ε à Ζ.

10 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Μὴ μετρεῖται δὴ ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ εἰληφθῶ δ'¹²
ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς,
ὁ Μ. Καὶ ἰσάκεις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαυ-
τάκεις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν,
Ξ μετρεῖται, ἰσάκεις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαυ-
τάκεις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρεῖται. Καὶ¹³ ἐπεὶ ἰσάκεις
ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ
Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ὡς δὲ ὁ
Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα
ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς

Non metiatur autem E ipsum K. Et sumatur
ab ipsis E, K minimus mensuratus numerus,
ipse M. Et quoties quidem K ipsum M metitur,
toties et uterque ipsorum Θ, Η utrumque ipso-
rum Ν, Ξ metiatur; quoties vero E ipsum M
metitur, toties et Z ipsum O metiatur. Et
quoniam æqualiter Θ ipsum Ν metitur ac Η
ipsum Ξ; est igitur ut Θ ad Η ita Ν ad Ξ. Ut
autem Θ ad Η ita Α ad Β; et ut igitur Α ad Β
ita Ν ad Ξ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ

Α, 4.	Β, 5.	Γ, 2.	Δ, 5.	Ε, 4.	Ζ, 3.
Θ, 8.	Η, 10.	Κ, 15.			
Ν, 32.	Ξ, 40.	Μ, 60.	Ο, 45.		
Π	Ρ	Σ	Τ		

τὸν Μ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ
καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ
οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς
ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε¹⁴ Α πρὸς τὸν Β,
καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι¹⁵ τοῦ Ε πρὸς τὸν
Ζ λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α,
Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μὴ¹⁶, ἔσονται τινες
τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἰλάττονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-
λογον¹⁷ ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις.

ita Ξ ad M. Rursus, quoniam æqualiter E ipsum
M metitur ac Z ipsum O; est igitur ut E ad Z ita
M ad O; ipsi Ν, Ξ, Μ, Θ igitur deinceps pro-
portionales sunt in rationibus et ipsius Α ad
Β, et ipsius Γ ad Δ, et adhuc ipsius Ε ad Ζ.
Dico etiam et minimos in ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε,
Ζ rationibus. Si enim non, erunt aliqui ipsis
Ν, Μ, Ξ, Ο minores numeri deinceps pro-
portionales in rationibus Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ.

Mais que E ne mesure pas K. Soit pris le plus petit nombre mesuré par E, K (36. 7), et que ce soit M. Que les nombres Θ, Η mesurent autant de fois Ν, Ξ que K mesure M, et que Z mesure Ο autant de fois que E mesure M. Puisque Θ mesure Ν autant de fois que Η mesure Ξ, Θ est à Η comme Ν est à Ξ (13. 7.) Mais Θ est à Η comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Ν est à Ξ. Par la même raison Γ est à Δ comme Ξ est à Μ. De plus, puisque E mesure Μ autant de fois que Ζ mesure Ο, Ε est à Ζ comme Μ est à Ο; donc les nombres Ν, Ξ, Μ, Ο sont successivement proportionnels dans les raisons de Α à Β, de Γ à Δ, et de Ε à Ζ. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Car si cela n'est point, il y aura des nombres plus petits que Ν, Ξ, Μ, Ο qui seront successivement proportionnels dans les raisons de Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Que ces nombres soient

Ἐστώσαν οἱ Π , P , Σ , T . Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν P οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B , οἱ δὲ A , B ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ τε¹⁸ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόπινος τὸν ἐπόμενον· ὁ B ἄρα τὸν P μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν P μετρεῖ· οἱ B , Γ ἄρα τὸν P μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν B , Γ μετρούμενος τὸν P μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν B , Γ μετρούμενός, ἴσθιν ὁ H · ὁ H ἄρα τὸν P μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ H πρὸς τὸν P οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Σ · καὶ ὁ K ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ E τὸν Σ · οἱ E , K ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν E , K μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν E , K μετρούμενός ἴσθιν ὁ M · ὁ M ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μίζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἴσθιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴσονται τινες τῶν N , Ξ , M , O ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον¹⁹ ἐν τε τοῖς τοῦ A πρὸς τὸν B καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ · καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις· οἱ N , Ξ , M , O ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς²⁰ A , B , Γ , Δ , E , Z λόγοις. Ὅπερ εἶδεν διέξαι.

Sint H , P , Σ , T . Et quoniam est ut Π ad P ita A ad B , ipsi autem A , B minimi, ipsi vero minimi metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ipse igitur B ipsum P metitur. Propter eadem utique et Γ ipsum P metitur. Ipsi B , Γ igitur ipsum P metiuntur; et minimus igitur ab ipsis B , Γ mensuratus ipsum P metietur. Minimus autem ab ipsis B , Γ mensuratus, est ipse H ; ipse H igitur ipsum P metitur. Et est ut H ad P ita K ad Σ ; et K igitur ipsum Σ metitur. Metitur autem et E ipsum Σ ; ipsi E , K igitur ipsum Σ metiuntur; et minimus igitur ab ipsis E , K mensuratus ipsum Σ metietur. Minimus autem ab ipsis E , K mensuratus, est ipse M ; ipse M igitur ipsum Z metitur, major minorem, quod est impossibile. Non igitur erunt aliqui ipsis N , Ξ , M , O minores numeri deinceps proportionales et in rationibus ipsius A ad B , et ipsius Γ ad Δ , et adhuc ipsius E ad Z ; ipsi N , Ξ , M , O igitur deinceps proportionales minimi sunt in rationibus A , B , Γ , Δ , E , Z . Quod oportebat ostendere.

Π , P , Σ , T . Puisque Π est à P comme A est B , que A , B sont les plus petits, et que les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), le nombre B mesurera P . Par la même raison Γ mesurera P ; donc B , Γ mesurent P ; donc le plus petit nombre mesuré par B , Γ mesurera P (37. 7). Mais le plus petit nombre mesuré par B , Γ est H ; donc H mesure P . Mais H est à P comme K est à Σ (13. 7); donc K mesure Σ (déf. 20. 7); mais E mesure Σ ; donc E , K mesurent Σ ; donc le plus petit nombre mesuré par E , K mesurera Σ . Mais le plus petit nombre mesuré par E , K est M ; donc M mesure Σ , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc il n'y aura pas certains nombres plus petits que N , Ξ , M , O successivement proportionnels dans les raisons de A à B , de Γ à Δ , et de E à Z ; donc N , Ξ , M , O sont les plus petits nombres qui soient successivement proportionnels dans les raisons de A , B , Γ , Δ , E , Z . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

PROPOSITIO V.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστῶσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B , καὶ τοῦ μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ B οἱ E, Z . λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z , εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἕξ ἡς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, E, Δ, Z λόγοις, οἱ H, Θ, K , ὥς τε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν E οὕτως τὸν H πρὸς τὸν Θ , ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς

Plani numeri inter se rationem habent compositam ex lateribus.

Sint plani numeri A, B , et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero B ipsi E, Z ; dico A ad B rationem habere compositam ex lateribus.

Rationibus enim datis, et ipsâ quàm habet Γ ad E , et Δ ad Z , sumantur numeri deinceps minimi in rationibus Γ, E, Δ, Z , ipsi H, Θ, K , ita ut sit ut quidem Γ ad E ita H ad Θ ,

$A, 6.$

$B, 20.$

$A, 12.$

$\Gamma, 2.$

$\Delta, 3.$

$E, 4.$

$Z, 5.$

$H, 3.$

$\Theta, 6.$

$K, 10.$

τὸν Z οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν K . Καὶ ὁ Δ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκει, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκειν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν A .

ut vero Δ ad Z ita Θ ad K . Et ipse Δ ipsum E multiplicans ipsum A faciat. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ multiplicans ipsum A fecit, ipsum vero E multiplicans ipsum A fecit; est igitur ut Γ ad E ita A ad A . Ut autem Γ ad E ita H ad Θ ;

PROPOSITION V.

Les nombres plans ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les nombres plans A, B ; que Γ, Δ soient les côtés de A , et E, Z les côtés de B ; je dis que A a avec B une raison composée des côtés.

La raison de Γ à E , et celle de Δ à Z étant données, soient pris les nombres H, Θ, K qui soient successivement les plus petits dans les raisons de Γ, E, Δ, Z (4. 8), de manière que Γ soit à E comme H est à Θ , et que Δ soit à Z comme Θ est à K . Que Δ multipliant E fasse A . Puisque Δ multipliant Γ fait A , et que Δ multipliant E fait A , Γ est à E comme A est à A (17. 7). Mais

Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὥς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποιήκειν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκειν· ἔστιν ἄρα ὥς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὥς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὥς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὥς ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δίσκου ἄρα ἔστιν ὥς ὁ Η πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ο δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Σ'.

Εὰν ᾖσιν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρίῃ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Ἐστωσαν ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρίτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

et ut igitur H ad Θ ita A ad Λ. Rursus, quoniam E ipsum Δ multiplicans ipsum Λ fecit, sed autem et ipsum Ζ multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Α ad Β. Sed ut Δ ad Ζ ita Θ ad Κ; et ut igitur Θ ad Κ ita Α ad Β. Ostensum est autem ut H ad Θ ita Α ad Λ; ex æquo igitur est ut H ad Κ ita Α ad Β. Ipse autem H ad Κ rationem habet compositam ex lateribus; et Α igitur ad Β rationem habet compositam ex lateribus. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neque alius aliquis ullum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, ipse autem Α ipsum Β non metiatur; dico neque alium aliquem ullum mensurum esse.

Γ est à Ε comme Η et à Θ; donc Η est à Θ comme Α est à Λ. De plus, puisque Ε multipliant Δ fait Α, et que Ε multipliant Ζ fait Β, Δ est à Ζ comme Α est à Β. Mais Δ est à Ζ comme Θ est à Κ; donc Θ est à Κ comme Α est à Β. Mais on a démontré que Η est à Θ comme Α est à Λ; donc, par égalité, Η est à Κ comme Α est à Β (14. 7); mais Η a avec Κ une raison composée des côtés; donc Α a avec Β une raison composée des côtés. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VI.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier ne mesure pas le second, aucun autre n'en mesure un autre.

Soient Α, Β, Γ, Δ, Ε tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α ne mesure pas Β; je dis qu'aucun autre n'en mesurera un autre.

14 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Οτι μὲν οὖν οἱ A, B, Γ, Δ, E ἐξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν. Οὐδὲ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖται ὁ A τὸν Γ . Καὶ ὅσοι εἰσιν οἱ A, B, Γ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ , οἱ Z, H, Θ . Καὶ ἐπεὶ οἱ Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς A, B, Γ , καὶ ἔστιν ἴσον τὸ

$A, 16.$	$B, 24.$	$\Gamma, 36.$	$\Delta, 54.$	$E, 81.$
$Z, 4.$	$H, 6.$	$\Theta, 9.$		

πλῆθος τῶν A, B, Γ τῷ πλῆθει τῶν Z, H, Θ δίττου ἄρα ἴστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H , οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Z τὸν H . οὐκ ἄρα μονὰς ἴστιν ὁ Z , ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ εἰσιν οἱ Z, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Z πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ . οὐδὲ ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

Et quidem ipsos A, B, Γ, Δ, E deinceps non se se metiri evidens est. Non enim A ipsum B metitur. Dico etiam neque alium aliquem ullum mensurum esse. Si enim possibile, metiatur A ipsum Γ . Et quot sunt A, B, Γ tot sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, B, Γ , ipsi Z, H, Θ . Et quoniam Z, H, Θ in eadem ratione sunt cum

ipsis A, B, Γ , et est æqualis multitudo ipsorum A, B, Γ multitudini ipsorum Z, H, Θ ; ex æquo igitur est ut A ad Γ ita Z ad Θ . Et quoniam est ut A ad B ita Z ad H , non metitur autem A ipsum B ; non metitur igitur et Z ipsum H ; non igitur unitas est Z , unitas enim omnem numerum metitur, et sunt Z, Θ primi inter se; neque Z igitur ipsum Θ metitur. Et est ut Z ad Θ ita A ad Γ ; neque A igitur ipsum Γ metitur. Similiter utique ostendemus neque alium aliquem ullum metiri. Quod oportebat ostendere.

Il est certainement évident que les nombres A, B, Γ, Δ, E ne se mesurent point successivement les uns les autres, puisque A ne mesure pas B . Je dis de plus qu'aucun autre n'en mesure un autre; car que A mesure Γ , si cela est possible. Autant qu'il y a de nombres A, B, Γ , autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec A, B, Γ (35. 7), et que ces nombres soient Z, H, Θ . Puisque les nombres Z, H, Θ sont dans la même raison que A, B, Γ , et que la quantité des nombres A, B, Γ est la même que la quantité des nombres Z, H, Θ , par égalité A est à Γ comme Z est à Θ (14. 7). Et puisque A est à B comme Z est à H , et que A ne mesure pas B , Z ne mesure pas H (20. déf. 7); donc Z n'est pas l'unité, parce que l'unité mesure tous les nombres (déf. 1. 7); donc Z, Θ sont premiers entr'eux; donc Z ne mesure pas Θ (déf. 12. 7). Mais Z est à Θ comme A est à Γ ; donc A ne mesure pas Γ . Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'en mesure un autre. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Εάν ὅσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἴσχατον μετρεῖ καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἐστώσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρεῖται· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδὲς οὐδένα μετρήσει². Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Ὅπρ' ἴδει δείξαι.

PROPOSITIO VII.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, et secundum metietur.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α ipsum Δ metiatur; dico et Α ipsum Β metiri.

Si enim non metitur Α ipsum Β, neque alius aliquis ullum metietur. Metitur autem Α ipsum Δ; metitur igitur et Α ipsum Β. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η΄.

Εάν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς¹ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

PROPOSITIO VIII.

Si duos inter numeros in continuum proportionales cadant numeri, quot inter eos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter illos eandem rationem habentes in continuum proportionales cadent.

PROPOSITION VII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si le premier mesure le dernier, il mesurera le second.

Soient Α, Β, Γ, Δ tant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que Α mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Car si Α ne mesure pas Β, aucun autre n'en mesurera un autre (6. 8); mais Α mesure Δ; donc Α mesure Β. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si entre deux nombres tombent des nombres successivement proportionnels, il tombera autant de nombres moyens proportionnels entre deux autres nombres qui ont la même raison que les premiers, qu'il en tombe entre les deux premiers.

16 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτεύσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτεύκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Duos enim inter numeros Α, Β in continuum proportionales cadant numeri Γ, Δ, et fiat ut Α ad Β ita Ε ad Ζ; dico quot inter Α, Β in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Ε, Ζ in continuum proportionales casuros esse numeros.

Α, 2.	Γ, 4.	Δ, 8.	Β, 16.
Η, 1.	Θ, 2.	Κ, 4.	Λ, 8.
Ε, 3.	Μ, 6.	Ν, 12.	Ζ, 24.

Ὅσοι γὰρ εἰσι τῇ πλήθει οἱ Α, Γ, Δ, Β, τοσοῦτοι εἰληφθῶσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β, οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἔπει οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Β, Δ τῇ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ· διῆσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ

Quot enim sunt in multitudine ipsi Α, Γ, Δ, Β totidem sumantur minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, ipsi Η, Θ, Κ, Λ; ergo extremi eorum Η, Λ primi inter se sunt. Et quoniam Α, Γ, Δ, Β cum ipsis Η, Θ, Κ, Λ in eadem ratione sunt, atque est æqualis multitudo ipsorum Α, Γ, Β, Δ multitudini ipsorum Η, Θ, Κ, Λ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Η ad Λ. Ut autem Α ad Β ita Ε ad Ζ; et ut igitur Η ad Λ ita Ε ad Ζ. Ipsi autem Η, Λ primi, primi vero et minimi, minimi autem numeri metiuntur æqua-

Qu'entre les deux nombres Α, Β tombent les nombres moyens proportionnels Γ, Δ, et soit fait en sorte que Α soit à Β comme Ε est à Ζ; je dis qu'il tombera entre Ε, Ζ autant de nombres moyens proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers Α, Β.

Autant qu'il y a de nombres Α, Γ, Δ, Β, autant soient pris de nombres qui soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (35. 7); et que ces nombres soient Η, Θ, Κ, Λ; leurs extrêmes Η, Λ seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque les nombres Α, Γ, Δ, Β sont en même raison que Η, Θ, Κ, Λ, et que la quantité des nombres Α, Γ, Β, Δ est égale à la quantité des nombres Η, Θ, Κ, Λ, par égalité Α sera à Β comme Η est à Λ (14. 7). Mais Α est à Β comme Ε est à Ζ; donc Η est à Λ comme Ε est à Ζ. Mais les nombres Η, Λ sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 17

ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. Ἰσάκεις ἄρα ὁ H τὸν E μετρεῖ, καὶ ὁ Λ τὸν Z · ὁσάκεις δὴ³ ὁ H τὸν E μετρεῖ τοσαυτάκεις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ , K ἑκάτερον τῶν M , N μετρεῖται· οἱ H , Θ , K , Λ ἄρα τοὺς E , M , N , Z ἰσάκεις μετροῦσιν· οἱ H , Θ , K , Λ ἄρα τοῖς E , M , N , Z ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Ἀλλὰ οἱ H , Θ , K , Λ τοῖς A , Γ , Δ , B ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν⁴· οἱ A , Γ , Δ , B ἄρα τοῖς E , M , N , Z ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ A , Γ , Δ , B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ E , M , N , Z ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν⁵· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς A , B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἱμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς E , Z μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἱμπεσοῦνται ἀριθμοί. Ὅπρι ἴδι διῖξαι.

liter ipsos eandem rationem habentes, et major majorem, et minor minorem, hoc est antecedens antecedentem, et consequens consequentem. Æqualiter igitur H ipsum E metitur ac Λ ipsum Z . Quoties autem H ipsum E metitur, toties et uterque ipsorum Θ , K utrumque ipsorum M , N metiatur; ipsi H , Θ , K , Λ igitur ipsos E , M , N , Z æqualiter metiuntur; ergo H , Θ , K , Λ cum ipsis E , M , N , Z in eadem ratione sunt. Sed H , Θ , K , Λ cum ipsis A , Γ , Δ , B in eadem ratione sunt; ipsi A , Γ , Δ , B igitur cum ipsis E , M , N , Z in eadem ratione sunt. Ipsi autem A , Γ , Δ , B deinceps proportionales sunt; et E , M , N , Z igitur deinceps proportionales sunt; quot igitur inter A , B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter et ipsos E , Z in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

petits (23. 7), et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, le plus petit le plus petit; c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc H mesure E autant de fois que Λ mesure Z . Que les nombres Θ , K mesurent les nombres M , N autant de fois que H mesure E ; les nombres H , Θ , K , Λ mesureront également E , M , N , Z ; donc les nombres H , Θ , K , Λ sont en même raison que E , M , N , Z (déf. 20. 7). Mais les nombres H , Θ , K , Λ sont en même raison que les nombres A , Γ , Δ , B ; donc les nombres A , Γ , Δ , B sont en même raison que E , M , N , Z . Mais les nombres A , Γ , Δ , B sont successivement proportionnels; donc les nombres E , M , N , Z sont successivement proportionnels; donc il tombe entre E , Z autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A , B . Ce qu'il fallait démontrer.

18 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος¹ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

Εστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ A, B , καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ² κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτέτωσαν οἱ Γ, Δ , καὶ

Si duo numeri primi inter se sunt, et inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter ipsos in continuum proportionales cadunt numeri, totidem inter utrumque ipsorum, et unitatem deinceps in continuum proportionales cadent.

Sint duo numeri primi inter se A, B , et inter ipsos in continuum proportionales cadant Γ, Δ ,

$A, 8.$	$\Gamma, 12.$	$\Delta, 18.$	$B, 27.$
	$E, 1.$		
	$Z, 2.$	$H, 3.$	
$\Theta, 4.$	$K, 6.$	$\Lambda, 9.$	
$M, 8.$	$N, 12.$	$\Xi, 18.$	$O, 27.$

ἐκκείσθω ἡ E μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν A, B καὶ τῆς³ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

et exponatur E unitas; dico quot inter A, B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque A, B et unitatem in continuum proportionales cadere.

PROPOSITION IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, et s'il tombe entr'eux des nombres successivement proportionnels, il tombera entre chacun de ces nombres et l'unité autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les deux premiers nombres.

Soient deux nombres A, B premiers entr'eux, et qu'entre ces deux nombres il tombe les deux nombres successivement proportionnels Γ, Δ ; et soit E l'unité; je dis qu'entre chacun des nombres A, B il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A, B et l'unité.

Εἰλήφθωσαν γάρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῇ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους ἴως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῇ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, εἰλήφθωσαν, καὶ ἴστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο· φανερὸν δὲ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποιήκει, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ Α πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποιήκει. Καὶ ἔπει οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῇ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ, Β· ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἐκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῇ Α, ὁ δὲ Ο τῇ Β. Καὶ ἔπει ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει· ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Ζ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἰσάκεις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ· ἴστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ

Sumantur enim duo quidem numeri minimi Ζ, Η in ipsorum Α, Γ, Δ, Β ratione existentes, tres vero Θ, Κ, Λ, et semper deinceps uno plures quoad æqualis fiat multitudo eorum multitudini ipsorum Α, Γ, Δ, Β; sumantur, et sint Μ, Ν, Ξ, Ο; evidens est utique Ζ quidem se ipsum multiplicantem ipsum Θ fecisse, multiplicantem vero Θ fecisse Μ, et Η se ipsum quidem multiplicantem fecisse Α, multiplicautem vero Α fecisse Ο. Et quoniam Μ, Ν, Ξ, Ο minimi sunt eandem rationem habentium cum ipsis Ζ, Η, sunt autem et Α, Γ, Δ, Β minimi eandem rationem habentium cum ipsis Ζ, Η, et est æqualis multitudo ipsorum Μ, Ν, Ξ, Ο multitudini ipsorum Α, Γ, Δ, Β; unusquisque igitur ipsorum Μ, Ν, Ξ, Ο unicuique ipsorum Α, Γ, Δ, Β æqualis est; æqualis igitur est ipse quidem Μ ipsi Α, ipse vero Ο ipsi Β. Et quoniam Ζ se ipsum multiplicans ipsum Θ fecit, ergo Ζ ipsum Θ metitur per unitates quæ in Ζ. Metitur autem et Ε unitas ipsum Ζ per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur Ε unitas ipsum Ζ numerum metitur ac Ζ ipsum Θ; est igitur ut Ε

Soient pris les deux plus petits nombres Ζ, Η dans la raison des nombres Α, Γ, Δ, Β (2. 8); ensuite trois Θ, Κ, Λ, et toujours successivement un de plus jusqu'à ce que leur quantité soit égale à celle des nombres Α, Γ, Δ, Β; que ces nombres soient pris, et qu'ils soient Μ, Ν, Ξ, Ο; il est évident que Ζ se multipliant lui-même a fait Θ, que Ζ multipliant Θ a fait Μ, que Η se multipliant lui-même a fait Α, et que Η multipliant Α a fait Ο (2. 8). Puisque les nombres Μ, Ν, Ξ, Ο sont les plus petits de ceux qui ont la même raison que Ζ, Η, que les nombres Α, Γ, Δ, Β sont aussi les plus petits de ceux qui ont la même raison que Ζ, Η, et que la quantité des nombres Μ, Ν, Ξ, Ο est égale à celle des nombres Α, Γ, Δ, Β, chacun des nombres Μ, Ν, Ξ, Ο est égal à chacun des nombres Α, Γ, Δ, Β; donc Μ est égal à Α et Ο à Β. Et puisque Ζ se multipliant lui-même a fait Θ, Ζ mesure Θ par les unités qui sont en Ζ. Mais l'unité Ε mesure Ζ par les unités qui sont en Ζ; donc l'unité Ε mesure Ζ autant de fois que Ζ mesure Θ; donc l'unité Ε est au nombre Ζ comme Ζ est à Θ (déf. 20. 7). De plus, puisque Ζ multi-

20 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀριθμὸν οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Z^4 τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν M πιπύειν· ὁ Θ ἄρα τὸν M μιτρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Z^5 μονάδας. Μιτρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μιτρεῖ καὶ ὁ Θ^6 τὸν M . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν M . Εἰδέχθη δὲ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ · καὶ ὡς ἄρα ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως

unitas ad Z numerum ita Z ad Θ . Rursus, quoniam Z ipsum Θ multiplicans ipsum M facit; ergo Θ ipsum M metitur per unitates quæ in Z . Metitur autem et E unitas ipsum Z numerum per unitates quæ in ipso; æqualiter igitur E unitas ipsum Z numerum metitur ac Θ ipsum M ; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Θ ad M . Ostensum est autem et ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ ; et ut igitur E unitas

А, 8. Г, 12. Д, 18. В, 27.

E, I.

З, 2. Н, 3.

Θ, 4. κ, 6. Λ, 9.

M, 8. N, 12. E, 18. O, 27.

ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α'· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμὸν οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἔμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἔμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ. Ὅπερ εἶδει δι᾽ ἑξαι.

ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad M . $\mathcal{E}$ qualis autem M ipsi A ; est igitur ut E unitas ad Z numerum ita Z ad Θ et Θ ad A . Propter eadem utique et ut E unitas ad H numerum ita H ad Λ et Λ ad B ; quot igitur inter A , B in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter utrumque ipsorum A , B et unitatem E in continuum proportionales cadent numeri. Quod oportebat ostendere.

pliant Θ a fait M , le nombre Θ mesure M par les unités qui sont en Z . Mais l'unité E mesure le nombre Z par les unités qui sont en lui; donc l'unité E mesure Z autant de fois que Θ mesure M ; donc l'unité E est au nombre Z comme Θ est à M . Mais on a démontré que l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ , et comme Θ est à M . Mais M égale A ; donc l'unité E est au nombre Z comme Z est à Θ , et comme Θ est à A . Par la même raison l'unité E est au nombre H comme H est à A , et comme A est à B ; il tombe donc entre chacun des nombres A , B , et l'unité E , autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre A , B . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO X.

Εὰν δύο ἀριθμῶν¹ καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί² ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος² μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί οἱ τε³ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν.

Si inter duos numeros et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, quot inter utrumque ipsorum et unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter ipsos in continuum proportionales cadent.

Duos enim inter numeros Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadant numeri et Δ, Ε et Ζ, Η; dico quot inter utrumque ipsorum Α, Β et unitatem Γ in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter Α, Β numeros in continuum proportionales cadere.

Α, 8.	Κ, 12.	Α, 18.	Β, 27.
Ε, 4.	Θ, 6.	Η, 9.	
	Δ, 2.	Ζ, 3.	
	Γ, 1.		

Ο Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Α ποιεῖτω.

Ipsē Δ enim ipsum Ζ multiplicans ipsum Θ faciat, uterque autem ipsorum Δ, Ζ ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum Κ, Α faciat.

PROPOSITION X.

Si entre deux nombres et l'unité il tombe des nombres successivement proportionnels, il tombe entre les deux premiers nombres autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des premiers et l'unité.

Qu'entre les nombres Α, Β, et l'unité Γ, il tombe les nombres successivement proportionnels Δ, Ε et Ζ, Η; je dis qu'entre Α, Β il tombera autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre chacun des nombres Α, Β et l'unité Γ.

Car que Δ multipliant Ζ fasse Θ, et que chacun des nombres Δ, Ζ multipliant Θ fasse Κ, Α.

22 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς⁵ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ

Et quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita Δ ad E , æqualiter igitur Γ unitas ipsum Δ numerum metitur ac Γ ipsum E . Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ ; et Δ igitur ipsum E metitur per unitates quæ in Δ ; ergo Δ se ipsum multiplicans ipsum E fecit. Rursus, quoniam est ut Γ unitas ad Δ numerum ita E ad A ; æqualiter igitur Γ

A , 8. K , 12. A , 18. B , 27.
 E , 4. Θ , 6. H , 9.
 Δ , 2. Z , 3.
 Γ , 1.

καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποιήκει, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποιήκει, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποιήκει⁶. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ

unitas ipsum Δ numerum metitur ac E ipsum A . Unitas autem Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ in Δ ; et E igitur ipsum A metitur per unitates quæ in Δ ; ergo Δ ipsum E multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Z quidem se ipsum multiplicans ipsum H fecit, ipsum vero H multiplicans ipsum B fecit, et quoniam Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum E fecit, ipsum autem Z multiplicans ipsum Θ fecit; est igitur ut Δ ad Z ita E ad Θ . Propter eadem et ut Δ ad Z ita Θ ad H . Et ut igitur E ad Θ ita Θ ad H .

Puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme Δ est à E , l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que Δ mesure E . Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ ; donc Δ mesure E par les unités qui sont en Δ ; donc Δ se multipliant lui-même fait E . De plus, puisque l'unité Γ est au nombre Δ comme E est à A , l'unité Γ mesure le nombre Δ autant de fois que E mesure A . Mais l'unité Γ mesure le nombre Δ par les unités qui sont en Δ ; donc E mesure A par les unités qui sont en Δ ; donc Δ multipliant E fait A . Par la même raison Z se multipliant lui-même fait H , et Z multipliant H fait B . Mais Δ se multipliant lui-même fait E , et Δ multipliant Z fait Θ ; donc Δ est à Z comme E est à Θ (17. 7). Par la même raison Δ est à Z comme Θ est à H ; donc E est à Θ comme Θ est à H .

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H . Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν E , Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν A , K πεποιήκιν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K . Ἀλλ' ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K . Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ , Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν K , Λ πεποιήκιν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ . Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K · καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν K οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ . Ἐτι ἐπεὶ ὁ Z ἑκάτερον τῶν H , Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ , B πεποιήκιν· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν B . Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z · καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν B . Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν K , καὶ ὁ K πρὸς τὸν Λ , καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν K οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ , καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν K οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Λ , καὶ B ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν A , B καὶ τῆς Γ μοιᾶδες μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς A , B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίσυνται. Ὅπρι ἴδει διῆξαι.

De plus, puisque le nombre Δ multipliant les nombres E , Θ fait les nombres A , K , le nombre E est à Θ comme A est K (17. 7). Mais E est à Θ comme Δ est à Z ; donc Δ est à Z comme A est à K . De plus, puisque les nombres Δ , Z multipliant Θ font les nombres K , Λ , le nombre Δ est à Z comme K est à Λ (18. 7). Mais Δ est à Z comme A est à K ; donc A est à K comme K est à Λ . De plus, puisque le nombre Z multipliant les nombres H , Θ fait les nombres Λ , B , le nombre Θ est à H comme Λ est à B . Mais Θ est à H comme Δ est à Z ; donc Δ est à Z comme Λ est à B . Mais il a été démontré que Δ est à Z comme A est à K , comme K est à Λ ; donc A est à K comme K est à Λ , et comme Λ est à B ; donc les nombres A , K , Λ , B sont successivement proportionnels; donc entre A , B il tombe autant de nombres successivement proportionnels qu'il en tombe entre les nombres A , B et l'unité Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum E , Θ multiplicans utrumque ipsorum A , K fecit; est igitur ut E ad Θ ita A ad K . Sed ut E ad Θ ita Δ ad Z ; et ut igitur Δ ad Z ita A ad K . Rursus, quoniam uterque ipsorum Δ , Z ipsum Θ multiplicans utrumque ipsorum K , Λ fecit; est igitur ut Δ ad Z ita K ad Λ . Sed ut Δ ad Z ita A ad K ; et ut igitur A ad K ita K ad Λ . Præterea, quoniam Z utrumque ipsorum H , Θ multiplicans utrumque ipsorum Λ , B fecit; est igitur ut Θ ad H ita Λ ad B . Ut autem Θ ad H ita Δ ad Z ; et ut igitur Δ ad Z ita Λ ad B . Ostensum est autem et ut Δ ad Z ita A ad K , et K ad Λ ; et ut igitur A ad K ita K ad Λ , et Λ ad B ; ipsi A , K , Λ , B igitur in continuum deinceps sunt proportionales; quot igitur inter utrumque ipsorum A , B et Γ unitatem in continuum proportionales cadunt numeri, totidem et inter A , B in continuum proportionales cadent. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μίσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστώσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A , B , καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ . Λίγω ὅτι τῶν A , B εἰς μίσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

PROPOSITIO XI.

Duorum quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum duplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

Sint quadrati numeri A , B , et ipsius quidem A latus sit Γ , ipsius vero B ipse Δ ; dico ipsorum A , B unum medium proportionalem esse numerum, et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ .

A , 4. E , 6. B , 9.
 Γ , 2. Δ , 3.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω. Καὶ ἐπὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ A , πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἔστιν ὁ Γ . ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν A πεποιήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποιήκει· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ , Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν A , E πεποιήκει· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς

Ipe Γ enim Δ multiplicans ipsum E faciat. Et quoniam quadratus est A , latus autem ipsius est Γ ; ergo Γ se ipsum multiplicans ipsum A fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum multiplicans ipsum B fecit; quoniam igitur Γ utrumque ipsorum Γ , Δ multiplicans utrumque ipsorum A , E fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita A ad E . Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita E ad

PROPOSITION XI.

Entre deux nombres quarrés, il y a un nombre moyen proportionnel, et le quarré est au quarré en raison double de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres quarrés A , B ; que le côté de A soit Γ , et que le côté de B soit Δ ; je dis qu'il y a un nombre moyen proportionnel entre A et B , et que A a avec B une raison double de celle que Γ a avec Δ .

Car que Γ multipliant Δ fasse E . Puisque A est un nombre quarré, et que son côté est Γ , le nombre Γ se multipliant lui-même fait A (déf. 18. 7). Par la même raison le nombre Δ se multipliant lui-même fait B ; donc puisque Γ multipliant l'un et l'autre nombre Γ , Δ fait l'un et l'autre nombre A , E , le nombre Γ est à Δ comme A est à E (17. 7). Par la même raison Γ est à Δ comme E

τὸν B^2 · καὶ ὥς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ E πρὸς τὸν B . Τῶν A, B ἄρα εἰς μέσους ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ E^3 .

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Επεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Ε, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ πλευράν τε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

B; et ut igitur A ad E ita E ad B. Ipsorum A, B igitur unus medius proportionalis est numerus E.

Dico etiam et A ad B duplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ . Quoniam enim tres numeri proportionales sunt A , E , B ; ergo A ad B duplam rationem habet ejus quam A ad E . Ut autem A ad E ita Γ ad Δ ; ergo A ad B duplam rationem habet ejus quam Γ ad Δ latus. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μίσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

PROPOSITIO XII.

Duorum cuborum duo medii proportionales sunt numeri, et cubus ad cubum triplam rationem habet ejus quam latus ad latus.

A, 8. Θ, 12. K, 18. B, 27.
 E, 4. Z, 6. H, 9.
 Γ, 2. Δ, 3.

Εστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ A, B , καὶ τοῦ
μὲν A πλευρὰ ἴστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ . λέγω ὅτι

Sint cubi numeri A , B , et ipsius quidem A latus sit Γ , ipsius vero B ipse Δ ; dico ip-

est à B ; donc A est à E comme E est à B ; donc le nombre E est moyen proportionnel entre A , B.

Je dis aussi que A a avec B une raison double de celle que r a avec Δ . Car puisque les trois nombres A , E , B sont proportionnels, le nombre A a avec B une raison double de celle que A a avec E . Mais A est à E comme r est à Δ ; donc A a avec B une raison double de celle que le côté r a avec le côté Δ . Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionnels, et le cube a avec le cube une raison triple de celle que le côté a avec le côté.

Soient les nombres cubes A, B , et que r soit le côté de A , et Δ le côté de B ; je

26 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἕπιρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιεῖτω.

Α, 8. Θ, 12. Κ, 18. Β, 27.
Ε, 4. Ζ, 6. Η, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πιποίηκε², τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πιποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πιποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πι-

sorum Α, Β duos medios proportionales esse numeros, et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ.

Ipse enim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε faciat, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Ζ faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, uterque vero ipsorum Γ, Δ ipsum Ζ multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ faciat.

Et quoniam cubus est Α, latus autem ipsius ipse Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Ε fecit; ergo Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Δ se ipsum quidem multiplicans ipsum Η fecit, ipsum vero Η multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque ipsorum Ε, Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Propter eadem utique et ut Γ ad Δ ita Ζ ad Η. Rursus, quoniam Γ utrumque ipsorum Ε, Ζ multiplicans utrumque ipsorum Α, Θ fecit; est igitur ut Ε

dis qu'il y a deux nombres moyens proportionnels entre Α, Β, et que Α a avec Β une raison triple de celle que le côté Γ a avec le côté Δ.

Car que le côté Γ se multipliant lui-même fasse Ε, que Γ multipliant Δ fasse Ζ, que Δ se multipliant lui-même fasse Η, et que les nombres Γ, Δ multipliant Ζ fassent les nombres Θ, Κ.

Puisque Α est un cube, que son côté est Γ, et que Γ se multipliant lui-même a fait Ε, le nombre Γ se multipliant lui-même fera Ε, et Γ multipliant Ε fera Α (déf. 19. 7). Par la même raison, Δ se multipliant lui-même fait Η, et Δ multipliant Η fait Β. Et puisque Γ multipliant les nombres Γ, Δ a fait les nombres Ε, Ζ, le nombre Γ est à Δ comme Δ est à Ζ (17. 7). Par la même raison, Γ est à Δ comme Ζ est à Η. De plus, puisque Γ multipliant les nombres Ε, Ζ fait les

ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ³ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ, τε Α πρὸς τὸν Θ⁴ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

Λίγω δὲ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τίσσοις ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα⁵ πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad Z ita A ad Θ. Ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita A ad Θ. Rursus, quoniam uterque ipsorum Γ, Δ ipsum Z. multiplicans utrumque ipsorum Θ, Κ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum Z, Η multiplicans utrumque ipsorum Κ, Β fecit; est igitur ut Z ad Η ita Κ ad Β. Ut autem Z ad Η ita Γ ad Δ; et ut igitur Γ ad Δ ita Κ ad Β. Ostensum autem est et ut Γ ad Δ ita et Α ad Θ, et Θ ad Κ, et Κ ad Β; ipsorum Α, Β igitur duo medii proportionales sunt numeri Θ, Κ.

Dico etiam et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam Γ ad Δ. Quoniam enim quatuor numeri Α, Θ, Κ, Β proportionales sunt; ergo Α ad Β triplam rationem habet ejus quam Α ad Θ. Ut autem Α ad Θ ita Γ ad Δ; et Α igitur ad Β triplam rationem habet ejus quam Γ ad Δ. Quod oportebat ostendere.

nombres Α, Θ, le nombre Ε est à Ζ comme Α est à Θ. Mais Ε est à Ζ comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Α est à Θ. De plus, puisque les nombres Γ, Δ multipliant Ζ ont fait les nombres Θ, Κ; le nombre Γ est à Δ comme Θ est à Κ (18. 7). De plus, puisque Δ multipliant les nombres Ζ, Η fait les nombres Κ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Κ est à Β. Mais Ζ est à Η comme Γ est à Δ; donc Γ est à Δ comme Κ est à Β. Mais il a été démontré que Γ est à Δ comme Α est à Θ, comme Θ est à Κ, et comme Κ est à Β; donc entre Α, Β il y a deux nombres moyens proportionnels Θ, Κ.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Car puisque les quatre nombres Α, Θ, Κ, Β sont proportionnels, Α aura avec Β une raison triple de celle que Α a avec Θ. Mais Α est à Θ comme Γ est à Δ; donc Α a avec Β une raison triple de celle que Γ a avec Δ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

PROPOSITIO XIII.

Εάν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἑξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἑξ ἀρχῆς τοὺς γινόμενους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ αἱεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἐστωσαν ὅποιοι ἄριθμοι ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιήτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιήτωσαν· λέγω ὅτι οἱ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, et se ipsum multiplicans unusquisque faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt; et si ipsi a principio, factos multiplicantes faciant aliquos, et ipsi proportionales erunt, et semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ut Α ad Β ita Β ad Γ, et ipsi Α, Β, Γ se ipsos quidem multiplicantes ipsos Δ, Ε, Ζ faciant, ipsos vero Δ, Ε, Ζ multiplicantes ipsos Η, Θ, Κ faciant; dico et ipsos Δ, Ε, Ζ et ipsos Η, Θ, Κ deinceps proportionales esse.

		Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.		
	Δ, 4.	Α, 8.	Β, 16.	Ζ, 32.	Ζ, 64.	
Η, 8.	Μ, 16.	Ν, 32.	Θ, 64.	Ο, 128.	Π, 256.	Κ, 512.

Ο μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Α πολλαπλα-

Etenim Α quidem ipsum Β multiplicans ipsum Α faciat; uterque vero ipsorum Α, Β

PROPOSITION XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si chacun de ces nombres se multipliant lui-même fait certains nombres, les nombres produits seront proportionnels; et si les premiers nombres multipliant les nombres produits font certains nombres, ceux-ci seront encore proportionnels, et cela arrivera toujours aux derniers produits.

Soient Α, Β, Γ tant de nombres proportionnels qu'on voudra, de manière que Α soit à Β comme Β est à Γ; que les nombres Α, Β, Γ se multipliant eux-mêmes fassent Δ, Ε, Ζ, et que ces mêmes nombres multipliant Δ, Ε, Ζ fassent Η, Θ, Κ; je dis que les nombres Δ, Ε, Ζ, ainsi que Η, Θ, Κ, sont successivement proportionnels.

Car que Α multipliant Β fasse Α; que les nombres Α, Β multipliant Α fassent

σιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιεῖτω. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιεῖτω.

Ομοίως δὲ τοῖς ἑπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Α, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον² ἐν τῇ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἴτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον³ ἐν τῇ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. Καὶ ἴσθιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Α, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἴτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. Καὶ ἴσθιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Α, Β πλῆθος τῇ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλῆθει. Τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῇ τῶν Θ, Ο, Π, Κ καὶ⁵ διίσου ἄρα ἴσθιν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ὅπρι ἴδι διίξαι.

ipsum Α multiplicans utrumque ipsorum Μ, Ν faciat. Et rursus Β quidem ipsum Γ multiplicans ipsum Ξ faciat, uterque vero ipsorum Β, Γ ipsum Ξ multiplicans utrumque ipsorum Ο, Π faciat.

Congruenter utique præcedentibus ostendimus ipsos Δ, Α, Ε et ipsos Η, Μ, Ν, Θ deinceps esse proportionales in ratione ipsius Α ad Β, et adhuc ipsos Ε, Ξ, Ζ et ipsos Θ, Ο, Π, Κ deinceps esse proportionales in ratione ipsius Β ad Γ. Atque est ut Α ad Β ita Β ad Γ; et Δ, Α, Ε igitur in eadem ratione sunt in quā Ε, Ξ, Ζ et adhuc ipsi Η, Μ, Ν, Θ in quā ipsi Θ, Ο, Π, Κ. Et est æqualis quidem ipsorum Δ, Α, Ε multitudo ipsorum Ε, Ξ, Ζ multitudini. Ipsorum vero Η, Μ, Ν, Θ multitudo ipsorum Θ, Ο, Π, Κ multitudini; et ex æquo igitur est ut quidem Δ ad Ε ita Ε ad Ζ, ut vero Η ad Θ ita Θ ad Κ. Quod oportebat ostendere.

Μ, Ν; et de plus, que Β multipliant Γ fasse Ξ, et que les nombres Β, Γ multipliant Ξ fassent Ο, Π.

Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que les nombres Δ, Α, Ε et Η, Μ, Ν, Θ sont successivement proportionnels dans la raison de Α à Β, que les nombres Ε, Ξ, Ζ et Θ, Ο, Π, Κ sont aussi successivement proportionnels dans la raison de Β à Γ. Mais Α est à Β comme Β est à Γ; donc les nombres Δ, Α, Ε sont en même raison que les nombres Ε, Ξ, Ζ, et les nombres Η, Μ, Ν, Θ en même raison que les nombres Θ, Ο, Π, Κ. Mais la quantité des nombres Δ, Α, Ε est égale à la quantité des nombres Ε, Ξ, Ζ; et la quantité des nombres Η, Μ, Ν, Θ est égale à la quantité des nombres Θ, Ο, Π, Κ; donc par égalité Δ est à Ε comme Ε est à Ζ, et Η est à Θ comme Θ est à Κ (14. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

30 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσῃ.

Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἴστωσαν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρίτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Si quadratus quadratum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem eorum sint ipsi Γ, Δ, ipse vero Α ipsum Β metiatur; dico et Γ ipsum Δ metiri.

Α, 4. Ε, 8. Β, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

Ο Γ γάρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἵπαι οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ².

Ἀλλὰ δὴ μετρίτω ὁ Γ τὸν Δ³. λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς⁴ ἀνάλογόν εἰσιν

Ipse Γ enim ipsum Δ multiplicans ipsum Ε faciat; ipsi Α, Ε, Β igitur deinceps proportionales sunt in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Α, Ε, Β deinceps proportionales sunt, et metitur Α ipsum Β; metitur igitur et Α ipsum Ε. Atque est ut Α ad Ε ita Γ ad Δ; ergo metitur et Γ ipsum Δ.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ; dico et Α ipsum Β metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus Α, Ε, Β deinceps proportionales esse in

PROPOSITION XIV.

* Si un nombre quarré mesure un nombre quarré, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le quarré mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrés Α, Β; que Γ, Δ soient leurs côtés; que Α mesure Β; je dis que Γ mesure Δ.

Car que Γ multipliant Δ fasse Ε, les nombres Α, Ε, Β seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ; et puisque Α, Ε, Β sont successivement proportionnels; et que Α mesure Β, Α mesurera Ε (7. 8). Mais Α est à Ε comme Γ est à Δ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ; je dis que Α mesure Β.

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 31

ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴσθιν ὥς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε⁵. Καὶ εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. Εὰν ἄρα τιστράγωνος, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Α ad Ε, metitur autem Γ ipsum Δ; ergo metitur Α ipsum Ε. Et sunt Α, Ε, Β deinceps proportionales; ergo metitur et Α ipsum Β. Si igitur quadratus, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ εἰάν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσῃ.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἴστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ².

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, et latus latus metietur; et si latus latus metiatur, et cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum Β metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius vero Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ metiri.

Α, 8.	Θ, 16.	Κ, 32.	Β, 64.
Ε, 4.	Ζ, 8.	Η, 16.	
	Γ, 2.	Δ, 4.	

Ο Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας

Etenim Γ se ipsum multiplicans ipsum Β faciat, ipse autem Δ se ipsum multiplicans ipsum Η faciat, et adhuc Γ ipsum Δ multiplicans

Α, Ε, Β sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ. Et puisque Γ est à Δ comme Α est à Ε, et que Γ mesure Δ, Α mesurera Ε. Mais Α, Ε, Β sont successivement proportionnels; donc Α mesure Β; donc, etc.

PROPOSITION XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube, le côté mesurera le côté; et si le côté mesure le côté, le cube mesurera le cube.

Car que le nombre cube Α mesure le nombre cube Β; que Γ soit le côté de Α et Δ le côté de Β; je dis que Γ mesure Δ.

Que Γ se multipliant lui-même fasse Ε; que Δ se multipliant lui-même fasse Η;

32 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸν Z^3 , ἑκάτερος δὲ τῶν Γ , Δ τὸν Z πολλαπλα-
σιάσας ἑκάτερον τῶν Θ , Κ ποιεῖτω. Φανερὸν δὲ ὅτι οἱ E , Z , H καὶ οἱ A , Θ , Κ , B ἑξῆς ἀνά-
λογόν εἰσιν ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ· καὶ
ἐπεὶ οἱ A , Θ , Κ , B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ
μετρεῖ ὁ A τὸν B · μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ . Καὶ
ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ·
μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ .

ipsum Z , uterque vero ipsorum Γ , Δ ipsum
 Z multiplicans utrumque ipsorum Θ , Κ faciat.
Evidens utique est ipsos E , Z , H et A , Θ , Κ , B
deinceps proportionales esse in ipsius Γ ad Δ
ratione; et quoniam A , Θ , Κ , B deinceps
proportionales sunt, et metitur A ipsum B ;
ergo metitur et ipsum Θ . Atque est ut A ad Θ
ita Γ ad Δ ; metitur igitur et Γ ipsum Δ .

A , 8.	Θ , 16.	Κ , 32.	B , 64.
E , 4.	Z , 8.	H , 16.	
Γ , 2.	Δ , 4.		

Ἀλλὰ δὲ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ · λέγω ὅτι καὶ
ὁ A τὸν B μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὲ
δείξομεν ὅτι οἱ A , Θ , Κ , B ἑξῆς ἀνάλογόν
εἰσιν ἐν τῇ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ⁵
ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ
οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ · καὶ ὁ A ἄρα τὸν Θ μετρεῖ
ὡς τε καὶ τὸν B μετρεῖ ὁ A . Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Sed et metiatur Γ ipsum Δ ; dico et A ipsum
 B mensurum esse.

Isidem enim constructis, similiter utique os-
tendemus A , Θ , Κ , B deinceps proportionales
esse in ipsius Γ ad Δ ratione. Et quoniam Γ
ipsum Δ metitur, estque ut Γ ad Δ ita A ad Θ ;
et A igitur ipsum Θ metitur; quare et ipsum B
metitur ipse A . Quod oportebat ostendere.

que Γ multipliant Δ fasse Z , et que les nombres Γ , Δ multipliant Z fassent Θ , Κ .
Il est évident que les nombres E , Z , H et A , Θ , Κ , B seront successivement pro-
portionnels dans la raison de Γ à Δ ; et puisque A , Θ , Κ , B sont successivement
proportionnels, et que A mesure B , A mesurera Θ (7. 8). Mais A est à Θ comme
 Γ est à Δ ; donc Γ mesure Δ (déf. 20. 7).

Mais que Γ mesure Δ , je dis que A mesurera B .

Les mêmes choses étant construites, nous démontrerons semblablement que les
nombres A , Θ , Κ , B sont successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ .
Et puisque Γ mesure Δ , et que Γ est à Δ comme A est à Θ , A mesurera Θ ; donc A
mesure B . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσῃ· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσῃ.

Εἰσὼσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ² οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἴστωσαν³ οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρίτω ὁ Α τὸν Β· λέγω δὲ ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρίῃ⁵.

Α, 9.
Γ, 3.

Β, 16.
Δ, 4.

Εἰ γὰρ μετρίῃ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσῃ καὶ ὁ Α τὸν Β. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσῃ.

Μὴ μετρίτω⁶ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσῃ.

Εἰ γὰρ μετρίῃ ὁ Α τὸν Β, μετρήσῃ καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Οὐ μετρίῃ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσῃ. Ὅπῃ ἴδει δειξάσαι.

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri Α, Β, latera autem ipsorum sint Γ, Δ, et non metiatur Α ipsum Β; dico neque Γ ipsum Δ metiri.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, metietur et Α ipsum Β. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metietur.

Non metiatur rursus Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim metitur Α ipsum Β, metietur et Γ ipsum Δ. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si un nombre quarré ne mesure pas un nombre quarré, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le quarré ne mesurera pas le quarré.

Soient les nombres quarrés Α, Β, que Γ, Δ en soient les côtés, et que Α ne mesure pas Β; je dis que Γ ne mesure pas Δ.

Car si Γ mesure Δ, Α mesurera Β (14. 8). Mais Α ne mesure pas Β; donc Γ ne mesurera pas Δ.

De plus, que Γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, Γ mesurera Δ (14. 8). Mais Γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

Εάν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσιν· καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσιν.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἴστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσιν.

Α, 8.

Γ, 2.

PROPOSITIO XVII.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur; et si latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β non metiatur, et ipsius quidem Α latus sit Γ, ipsius verò Β ipse Δ; dico Γ ipsum Δ non mensurum esse.

Β, 27.

Δ, 3.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσιν. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Αλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσιν.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσιν. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, et Α ipsum Β metietur. Non metitur autem Α ipsum Β; neque igitur Γ ipsum Δ metitur.

Sed et non metiatur Γ ipsum Δ; dico neque Α ipsum Β mensurum esse.

Si enim Α ipsum Β metiatur, et Γ ipsum Δ metietur. Non metitur autem Γ ipsum Δ; neque igitur Α ipsum Β metietur. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVII.

Si un nombre cube ne mesure pas un nombre cube, le côté ne mesurera pas le côté; et si le côté ne mesure pas le côté, le cube ne mesurera pas le cube.

Que le nombre cube Α ne mesure pas le nombre cube Β, et que γ soit le côté de Α, et Δ le côté de Β; je dis que γ ne mesurera pas Δ.

Car si γ mesure Δ, Α mesurera Β (15. 8.) Mais Α ne mesure pas Β; donc γ ne mesure pas Δ.

Mais que γ ne mesure pas Δ; je dis que Α ne mesurera pas Β.

Car si Α mesure Β, γ mesurera Δ (15. 8). Mais γ ne mesure pas Δ; donc Α ne mesurera pas Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι¹ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἕστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω οὖν ὅτι τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τοῦτέστιν ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον².

A, 6. H, 12. B, 24.
Γ, 2. Δ, 3. Ε, 4. Ζ, 6.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλαξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως³ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἐπί-

Duorum similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus; et planus ad planum duplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Sint duo numeri similes plani Α, Β, et ipsius quidem Α latera sint Γ, Δ numeri, ipsius vero Β ipsi Ε, Ζ. Et quoniam similes plani sunt qui proportionalia habent latera, est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Dico igitur ipsorum Α, Β unum medium proportionalem esse numerum, et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam Γ ad Ε, vel Α ad Ζ, hoc est ejus quam latus homologum ad homologum.

Et quoniam est ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; alterne igitur est ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ. Et quo-

PROPOSITION XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un nombre moyen proportionnel, et le nombre plan a avec le nombre plan une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient les deux nombres plans semblables Α, Β, que les nombres Γ, Δ soient les côtés de Α, et Ε, Ζ les côtés de Β. Puisque les nombres plans semblables ont leurs côtés proportionnels, Γ est à Δ comme Ε est Ζ (déf. 21. 7); et je dis qu'entre Α, Β il y a un nombre moyen proportionnel, et que Α a avec Β une raison double de celle que Γ a avec Ε, ou de celle que Δ a avec Ζ, c'est-à-dire de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Puisque Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, par permutation Γ est à Ε comme Δ est

36. LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πιδές ἔστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκεν. Ο Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν⁴ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πιποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως⁵ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν⁶ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πιποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πιποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Η, Β ἄρα ἐξ ἑὸς ἀνάλογόν εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἔστιν ἀριθμός.

niam planus est Α, latera autem ipsius ipsi Γ, Δ; ergo Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Β fecit. Ipse Δ utique ipsum Ε multiplicans ipsum Η faciat. Et quoniam Δ ipsum Γ quidem multiplicans ipsum Α fecit, ipsum vero Ε multiplicans ipsum Η fecit; est igitur ut Γ ad Ε ita Α ad Η. Sed ut Γ ad Ε ita Δ ad Ζ; et ut igitur Δ ad Ζ ita Α ad Η. Rursus, quoniam Ε ipsum quidem Δ multiplicans ipsum Η fecit; ipsum vero Ζ multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Δ ad Ζ ita Η ad Β. Ostensum est autem et ut Δ ad Ζ ita Α ad Η; et ut igitur Α ad Η ita Η ad Β; ergo Α, Η, Β deinceps proportionales sunt; ipsorum Α, Β igitur unus medius proportionalis est numerus.

Α, 6. Η, 12. Β, 24.
Γ, 2. Δ, 3. Ε, 4. Ζ, 6.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἐξ ἑὸς

Dico etiam et Α ad Β duplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ ad Ε vel Δ ad Ζ. Quoniam enim Α, Η, Β deinceps proportionales

à Ζ (13. 7). Et puisque Α est un nombre plan, et que Γ, Δ en sont les côtés, Δ multipliant Γ fera Α. Par la même raison Ε multipliant Ζ fera Β. Que Δ multipliant Ε fasse Η. Puisque Δ multipliant Γ fait Α, et que Δ multipliant Ε fait Η, Γ est à Ε comme Α est à Η (17. 7). Mais Γ est à Ε comme Δ est à Ζ; donc Δ est à Ζ comme Α est à Η. De plus, puisque Ε multipliant Δ fait Η, et que Ε multipliant Ζ fait Β, Δ est à Ζ comme Η est à Β. Mais on a démontré que Δ est à Ζ comme Α est à Η; donc Α est à Η comme Η est à Β; donc Α, Η, Β sont successivement proportionnels; donc il y a un nombre moyen proportionnel entre Α et Β.

Je dis que Α a avec Β une raison double de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que Γ a avec Ε ou de celle que Δ a avec Ζ. Car puisque les nombres Α, Η, Β sont successivement proportionnels, Α a avec Β

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 37.

ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ὅπερ εἶδει δεικνύει.

sunt, A ad B duplam rationem habet ejus quam ad H. Atque est ut A ad H ita et Γ ad E et Δ ad Z; et A igitur ad B duplam rationem habet ejus quam et Γ ad E vel Δ ad Z. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὁμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt numeri; et solidus ad similem solidum triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus.

Α, 30.	Ν, 60.	Ξ, 120.	Β, 240.		
	Κ, 6.	Μ, 12.	Λ, 24.		
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.	Η, 6.	Θ, 10.

Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς

Sint duo similes solidi A, B, et ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, Ε, ipsius vero B ipsi Ζ, Η, Θ. Et quoniam similes solidi sunt qui proportionalia habent latera; est igitur ut Γ quidem ad

une raison double de celle que A a avec H. Mais A est à H comme Γ est à E, et comme Δ est à Z; donc A a avec B une raison double de celle que Γ a avec E, ou de celle que Δ a avec Z. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Entre deux nombres solides semblables il y a deux nombres moyens proportionnels; et un nombre solide a avec un nombre solide semblable une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Soient A, B deux nombres solides semblables; que Γ, Δ, Ε soient les côtés de A, et Ζ, Η, Θ les côtés de B. Puisque les nombres solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés homologues proportionnels (déf. 21. 7), Γ est à Δ comme Ζ à Η,

38 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὥς
δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· λέγω
ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν
ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον
ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η
καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Δ ita Z ad H , ut vero Δ ad E ita H ad Θ . Dico
inter ipsos A , B duos medios proportionales
cadere numeros, et A ad B triplam rationem
habere ejus quam Γ ad Z et Δ ad H et adhuc
 E ad Θ .

Α, 30.	Ν, 60.	Ξ, 120.	Β, 240.	
	Κ, 6.	Μ, 12.	Λ, 24.	
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.	Η, 6.
				Θ, 10.

Ο Γ γὰρ τὸν μὲν² Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ
ποιεῖτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν
Λ ποιεῖτω. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ
αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ
Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ· οἱ Κ, Λ ἄρα³ ὅμοιοι
ἐπίπεδοι εἰσὶν ἀριθμοί· τῶν Κ, Λ ἄρα εἰς μέσους
ἀνάλογον ἐστὶν ἀριθμός. Εἰσὶν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα
ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ ὥς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεω-
ρήματι ἐδείχθη⁴. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλα-
πλασιάσας τὸν Κ πεποιήκε, τὸν δὲ Ζ πολλα-
πλασιάσας τὸν Μ πεποιήκεν· ἐστὶν ἄρα ὥς ὁ Γ
πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. Ἀλλ' ὥς ὁ Κ
πρὸς τὸν Μ οὕτως⁵ ὁ Μ πρὸς τὸν Λ· οἱ Κ, Μ, Λ
ἄρα ἐξῆς εἰσὶν⁶ ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ

Etenim Γ ipsum Δ multiplicans ipsum K fa-
ciat, ipse vero Z ipsum H multiplicans ipsum
 Λ faciat. Et quoniam Γ , Δ cum ipsis Z , H in
eadem ratione sunt, et ex quidem ipsis Γ , Δ est
 K , ex ipsis vero Z , H ipse Λ ; ergo K , Λ similes
plani sunt numeri; ipsorum K , Λ igitur unus
medius proportionalis est numerus. Sit M ; ergo
 M est ex ipsis Δ , Z ut in præcedenti theoremate
ostensum est. Et quoniam Δ ipsum quidem Γ
multiplicans ipsum K fecit, ipsum vero Z mul-
tiplicans ipsum M fecit; est igitur ut Γ ad Z
ita K ad M . Sed ut K ad M ita M ad Λ ;
ipsi K , M , Λ igitur deinceps sunt proportionales
in ipsius Γ ad Z ratione. Et quoniam est ut Γ

et Δ est à E comme H est à Θ ; je dis qu'entre les nombres A , B il y a deux
moyens proportionnels, et que A a avec B une raison triple de celle que Γ a avec
 Z , de celle que Δ a avec H , et de celle que E a avec Θ .

Car que Γ multipliant Δ fasse K , et que Z multipliant H fasse Λ . Puisque Γ , Δ
sont en même raison que Z , H ; que K est le produit de Γ par Δ , et Λ le produit de
 Z par H , les nombres K , Λ sont des nombres plans semblables; il y a donc
entre K et Λ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Qu'il soit M ; le nombre
 M sera le produit de Δ par Z , ainsi qu'on l'a démontré dans le théorème
précédent. Puisque Δ multipliant Γ fait K , et que Δ multipliant Z fait M , le
nombre Γ est à Z comme K est à M (17. 7). Mais K est à M comme M est à Λ ;
les nombres K , M , Λ sont donc successivement proportionnels dans la raison de

λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ⁷. αἱ Κ, Μ, Α ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον⁸ ἢν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ⁹ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ¹⁰. Ἐκάτερος δὲ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιεῖται. Καὶ ἐπὶ στεριός ἔστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποῖνκεν· ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἔστιν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποῖνκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Θ τὸν Α πολλαπλασιάσας¹¹ τὸν Β πιποῖνκεν. Καὶ ἐπὶ ἂν Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποῖνκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πιποῖνκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ¹² ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν,

ad Δ ita Z ad H; alterne igitur est ut Γ ad Z ita Δ ad H. Rursus, quoniam est ut Δ ad Ε ita Η ad Θ; alterne igitur est ut Δ ad Η ita Ε ad Θ; ipsi Κ, Μ, Α igitur deinceps sunt proportionales et in ipsius Γ ad Ζ ratione et in ipsius Δ ad Η et adhuc in ipsius Ε ad Θ. Uterque autem ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrumque ipsorum Ν, Ξ faciat. Et quoniam solidus est Α, latera autem ipsius sunt Γ, Δ, Ε; ergo Ε ipsum ex Γ, Δ multiplicans ipsum Α fecit; ipse autem ex Γ, Δ est Κ; ergo Ε ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit. Propter eadem utique et Θ ipsum Α multiplicans ipsum Β fecit. Et quoniam Ε ipsum Κ multiplicans ipsum Α fecit; sed quidem et ipsum Μ multiplicans ipsum Ν fecit; est igitur ut Κ ad Μ ita Α ad Ν. Ut autem Κ ad Μ ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ; et ut igitur Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita Α ad Ν. Rursus, quoniam uterque ipsorum Ε, Θ ipsum Μ multiplicans utrum-

Γ à Ζ. Et puisque Γ est à Δ comme Ζ est à Η, par permutation Γ est à Ζ comme Δ est à Η (13. 7). De plus, puisque Δ est à Ε comme Η est à Θ, par permutation Δ est à Η comme Ε est à Θ (13. 7); les nombres Κ, Μ, Α sont donc successivement proportionnels dans la raison de Γ à Ζ, de Δ à Η, et de Ε à Θ. Que les nombres Ε, Θ multipliant Μ fassent Ν, Ξ. Puisque Α est un nombre solide, et que ses côtés sont Γ, Δ, Ε, le nombre Ε multipliant le produit de Γ par Δ fera Α; mais le produit de Γ par Δ est Κ; donc Ε multipliant Κ fait Α. Par la même raison, Θ multipliant Α fait Β. Et puisque Ε multipliant Κ fait Α, et que Ε multipliant Μ fait Ν, Κ est à Μ comme Α est à Ν (17. 7). Mais Κ est à Μ comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Γ est à Ζ, et Δ à Η, et Ε à Θ, comme Α est à Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Θ multipliant Μ font Ν, Ξ, le nombre Ε est

40 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς¹³ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε¹⁴ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν, ἔπει ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν ταῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

que ipsorum Ν, Ξ fecit; est igitur ut Ε ad Θ ita Ν ad Ξ. Sed ut Ε ad Θ ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η; est igitur ut Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita et Α ad Ν et Ν ad Ξ. Rursus, quoniam Θ ipsum Μ multiplicans ipsum Ξ fecit, sed etiam et ipsum Α multiplicans ipsum Β fecit; est igitur ut Μ ad Α ita Ξ ad Β. Sed ut Μ ad Α ita et Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ; et igitur ut Γ ad Ζ et Δ ad Η et Ε ad Θ ita non solum Ξ ad Β sed et Α ad Ν et Ν ad Ξ; ipsi Α, Ν, Ξ, Β igitur deinceps sunt proportionales in dictis laterum rationibus.

Α, 30.	Ν, 60.	Ξ, 120.	Β, 240.
	Κ, 6.	Μ, 12.	Α, 24.
Γ, 2.	Δ, 3.	Ε, 5.	Ζ, 4.
		Η, 6.	Θ, 10.

Λέγω ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢ περ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς

Dico et Α ad Β triplam rationem habere ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam habet Γ numerus ad Ζ, vel Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ. Quoniam enim quatuor numeri deinceps proportionales sunt Α, Ν, Ξ,

à Θ comme Ν est à Ξ. Mais Ε est à Θ comme Γ est à Ζ, et comme Δ est à Η; donc Γ est à Ζ, Δ à Η, et Ε à Θ, comme Α est à Ν, et comme Ν est à Ξ. De plus, puisque Θ multipliant Μ fait Ξ, et que Θ multipliant Α fait Β, Μ est à Α comme Ξ est à Β. Mais Μ est à Α comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Γ est à Ζ, Δ à Η, et Ε à Θ, non seulement comme Ξ est à Β, mais encore comme Α est à Ν, et comme Ν est à Ξ; les nombres Α, Ν, Ξ, Β sont donc successivement proportionnels dans lesdites raisons des côtés.

Je dis aussi que Α a avec Β une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Ζ, ou de celle que Δ a avec Η, et encore de celle que Ε a avec Θ. Car puisque

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 41

ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ΑΛΛ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως ἰδέσθην ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

B; ergo A ad B triplam rationem habet ejus quam A ad N. Sed ut A ad N ita ostensum est et Γ ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ; et A igitur ad B triplam rationem habet ejus quam homologum latus ad homologum latus, hoc est quam Γ numerus ad Ζ et Δ ad Η et adhuc Ε ad Θ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Εὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β unus medius proportionalis cadat numerus Γ; dico ipsos Α, Β similes planos esse numeros.

Α, 8.	Γ, 12.	Β, 18.
Δ, 2.	Ε, 3.	Ζ, 4. Η, 6.

Εἰληφθῶσαν γὰρ² ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἔστιν

Sumantur enim Δ, Ε minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ;

les quatre nombres Α, Ν, Ξ, Β sont successivement proportionnels, le nombre Α a avec Β une raison triple de celle que Α a avec Ν. Mais on a démontré que Α est à Ν comme Γ est à Ζ, comme Δ est à Η, et comme Ε est à Θ; donc Α a avec Β une raison triple de celle qu'un côté homologue a avec un côté homologue, c'est-à-dire de celle que le nombre Γ a avec Ζ, de celle que Δ a avec Η, et de celle que Ε a avec Θ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XX.

Si entre deux nombres il tombe un nombre moyen proportionnel, ces nombres seront des plans semblables.

Car qu'entre les deux nombres Α, Β il tombe un moyen proportionnel Γ; je dis que les nombres Α, Β sont des plans semblables.

Car prenons les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Β.

42 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ .
 Ὡς δὴ ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν B^3 .
 ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν Γ .
 Ὡς δὴ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες
 ἔστωσαν ἐν τῷ Z · ὁ Z ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας
 τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν
 Γ πεποίηκεν⁴. ὥς τε ὁ A ἐπίπιδός ἐστι, πλευραὶ
 δὲ αὐτοῦ οἱ Δ , Z . Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ , E ἐλά-
 χιστοὶ εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς
 Γ , B · ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν B .
 Ὡς δὲ ὁ E τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες
 ἔστωσαν ἐν τῷ H · καὶ ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ

est igitur Δ ad E ita A ad Γ . Ut autem A ad Γ
 ita Γ ad B ; æqualiter igitur Δ ipsum A metitur
 ac E ipsum Γ . Quoties autem Δ ipsum A metitur,
 tot unitates sint in Z ; ergo Z ipsum Δ multi-
 plicans ipsum A fecit, ipsum autem E multipli-
 cans ipsum Γ fecit; quare A planus est, latera
 vero ipsius Δ , Z . Rursus, quoniam Δ , E mi-
 nimi sunt ipsorum eandem rationem habentium
 cum ipsis Γ , B ; æqualiter igitur Δ ipsum Γ
 metitur ac E ipsum B . Quoties autem E ipsum
 B metitur, tot unitates sint in H ; ergo E ipsum

A , 8. Γ , 12. B , 18.
 Δ , 2. E , 3. Z , 4. H , 6.

κατὰ τὰς ἐν τῷ H μονάδας· ὁ H ἄρα τὸν E
 πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε· ὁ B ἄρα
 ἐπίπιδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ E , H .
 οἱ A , B ἄρα ἐπίπιδοί εἰσιν ἀριθμοί. Λέγω δὴ ἔτι
 καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Z τὸν μὲν Δ πολλαπλα-
 σιάσας τὸν A πεποίηκε· τὸν δὲ E πολλαπλα-
 σιάσας τὸν Γ πεποίηκε· ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν A
 μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν Γ · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν
 E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ , τουτέστιν ὁ Γ πρὸς

B metitur per unitates quæ in H ; ergo H ipsum
 E multiplicans ipsum B fecit; ergo B planus est,
 latera vero ipsius sunt ipsi E , H ; ergo A , B plani
 sunt numeri. Dico etiam et similes. Quoniam
 enim Z ipsum quidem Δ multiplicans ipsum A
 fecit, ipsum vero E multiplicans ipsum Γ fecit;
 æqualiter igitur Δ ipsum A metitur ac E ipsum
 Γ ; est igitur ut Δ ad E ita A ad Γ , hoc est

A , Γ (35. 7), et qu'ils soient Δ , E . Le nombre Δ sera à E comme A est à Γ . Mais
 A est à Γ comme Γ est à B ; donc Δ mesure A autant de fois que E mesure Γ . Qu'il
 y ait autant d'unités dans Z que Δ mesure de fois A . Le nombre Z multipliant Δ
 fera A , et Z multipliant E fera Γ ; donc A est un nombre plan, dont les côtés
 sont Δ , Z . De plus, puisque les nombres Δ , E sont les plus petits de ceux qui ont
 la même raison avec Γ , B , le nombre Δ mesurera Γ autant de fois que E mesure B .
 Qu'il y ait autant d'unités dans H que E mesure de fois B ; le nombre E mesurera B
 par les unités qui sont dans H , et le nombre H multipliant E fera B ; donc B est
 un nombre plan, dont les côtés sont E , H ; donc A , B sont des nombres plans.
 Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car, puisque Z multipliant Δ fait A , et
 que Z multipliant E fait Γ , Δ mesure A autant de fois que E mesure Γ ; donc Δ est à
 E comme A est à Γ , c'est-à-dire comme Γ est à B . De plus, puisque E multipliant

τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Εἰκάτερος τῶν Ζ, Η
πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β ποιοῖκεν⁷· ἴστιν
ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β.
Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε·
καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν
Η. Καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε
πρὸς τὸν Η⁸. οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπτεδοι ἀριθ-
μοὶ εἰσιν, αἱ γὰρ πλειυαὶ αὐτῶν⁹ ἀνάλογόν
εἰσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Γ ad Β. Rursus, quoniam Ε utrumque ipsorum
Ζ, Η multiplicans ipsos Γ, Β fecit, est igitur ut
Ζ ad Η ita Γ ad Β. Ut autem Γ ad Β ita Δ ad Ε;
et igitur ut Δ ad Ε ita Ζ ad Η. Et alterne ut Δ
ad Ζ ita Ε ad Η; ergo Α, Β similes plani nu-
meri sunt, etenim ipsorum latera sunt propor-
tionalia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπ-
τωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον
ἐμπιπτεύωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β
ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν.

PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros duo medii proportio-
nales cadant numeri, similes solidi sunt numeri.

Inter duos enim numeros Α, Β duo medii
proportionales cadant numeri Γ, Δ; dico ipsos
Α, Β similes solidos esse.

Α, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	Β, 648.
Ε, 1.	Ζ, 3.	Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Λ, 3.
			Μ, 3.
			Ξ, 72.

Εἰλήφθωσαν γάρ² ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν
αὐτὸν λόγον ἰχόιτων τοῖς Α, Γ, Δ, τρεῖς³ οἱ

Sumantur enim tres minimi numeri ipsorum
eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Γ,

Ζ, Η fait Γ, Β, le nombre Ζ est à Η comme Γ est à Β (18. 7). Mais Γ est à Β comme
Δ est à Ε; donc Δ est à Ε comme Ζ est à Η. Et par permutation Δ est à Ζ comme
Ε est à Η (13. 7.) Donc Α, Β sont des nombres plans semblables (déf. 21. 7),
puisque leurs côtés sont proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXI.

Si entre deux nombres il tombe deux nombres moyens proportionnels, ces
nombres seront des solides semblables.

Qu'entre les nombres Α, Β il tombe deux nombres moyens proportionnels
Γ, Δ; je dis que les nombres Α, Β sont des solides semblables.

Prenons les trois plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec

44 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί. Ἐστῶσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ· φανερόν ἄρα ἵστί· ἐκ τοῦ πρό⁵ τούτου ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον⁶ ἐν τε τῇ τεῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῇ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντων τοῖς Α, Γ, Δ· καὶ ἵστί· ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ⁷· διῖσου ἄρα ἵστί· ὡς ὁ Ε πρὸς

Δ, scilicet ipsi Ε, Ζ, Η; ergo extremi eorum Ε, Η primi inter se sunt Et quoniam inter Ε, Η unus medius proportionalis cecidit numerus Ζ; ergo Ε, Η numeri similes plani sunt numeri. Sint igitur ipsius quidem Ε latera ipsi Θ, Κ, ipsius vero Η ipsi Α, Μ; evidens igitur est ex antecedente Ε, Ζ, Η deinceps esse proportionales in ipsius Θ ad Α ratione et in ipsius Κ ad Μ. Et quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ; et est æqualis multitudo ipsorum Ε, Ζ, Η multitudini ipsorum Α, Γ, Δ; ex æquo igitur est

Α, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	Ε, 648.
Ε, 1.	Ζ, 3.	Η, 9.	
Θ, 1.	Κ, 1.	Ν, 24.	Α, 3. Μ, 3. Ζ, 72.

τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. Οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, ταυτίστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ὑπόμεινος τὸν ὑπόμεινον· ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. Ὅσάκεις δὲ

ut Ε ad Η ita Α ad Δ. Ipsi autem Ε, Η primi, primi vero et minimi, minimi autem metiuntur ipsos æqualiter eandem rationem habentes cum ipsis, major majorem, et minor minorem, hoc est et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; æqualiter igitur Ε ipsum Α metitur ac Η ipsum Δ. Quoties

Α, Γ, Δ (35. 7); qu'ils soient Ε, Ζ, Η; leurs extrêmes Ε, Η seront premiers entr'eux (3. 8). Et puisque entre Ε, Η il tombe un moyen proportionnel Ζ, les nombres Ε, Η seront des nombres plans semblables (20. 8). Que Θ, Κ soient les côtés de Ε, et Α, Μ les côtés de Η; il est évident, d'après ce qui précède, que les nombres Ε, Ζ, Η sont successivement proportionnels dans la raison de Θ à Α et de Κ à Μ. Et puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, et que la quantité des nombres Ε, Ζ, Η est égale à la quantité des nombres Α, Γ, Δ, par égalité Ε est à Η comme Α est à Δ (14. 7). Mais les nombres Ε, Η sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, le plus grand le plus grand, et le plus petit le plus petit, c'est-à-dire l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); le nombre Ε mesure donc le nombre Α autant de fois que Η mesure Δ.

ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάζας τὸν Α πεποιήκειν. Ο δὲ Ε ἴστιν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάζας τὸν Α πεποιήκει· στερεὸς ἄρα ἴστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Γ, Δ, Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. Οσαῖκις δὲ ὁ Ε τὸν Γ⁸ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Ξ. Καὶ ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάζας τὸν Β πεποιήκειν. Ο δὲ Η ἴστιν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάζας τὸν Β πεποιήκει¹⁰. στερεὸς ἄρα ἴστιν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ¹¹ εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοὶ εἰσι. Λέγω δὲ¹² ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάζαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτίστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Αλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως¹³ ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καὶ εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ,

autem Ε ipsum Α metitur, tot unitates sint in Ν; ergo Ν ipsum Ε multiplicans ipsum Α fecit. Est autem Ε ex ipsis Θ, Κ; ergo Ν ipsum ex Θ, Κ multiplicans ipsum Α fecit; solidus igitur est Α, latera autem ipsius sunt Θ, Κ, Ν. Rursus, quoniam Ε, Ζ, Η minimi sunt ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Γ, Δ, Β; æqualiter igitur Ε ipsum Γ metitur ac Η ipsum Β. Quoties autem Ε ipsum Γ metitur, tot unitates sint in Ξ; ergo Η ipsum Β metitur per unitates quæ in Ξ; ergo Ξ ipsum Η multiplicans ipsum Β fecit. Est autem Η ex Λ, Μ; ergo Ξ ipsum ex Λ, Μ multiplicans ipsum Β fecit; solidus igitur est Β; latera autem ipsius sunt Λ, Μ, Ξ; ergo Α, Β solidi sunt. Dico etiam et similes. Quoniam enim Ν, Ξ ipsum Ε multiplicantes ipsos Α, Γ fecerunt; est igitur ut Ν ad Ξ ita Α ad Γ, hoc est Ε ad Ζ. Sed ut Ε ad Ζ ita Θ ad Α et Κ ad Μ; et ut igitur Θ ad Α ita Κ ad Μ et Ν ad Ξ. Et sunt quidem Θ, Κ, Ν la-

Qu'il y ait autant d'unités dans Ν que Ε mesure de fois Α; le nombre Ν multipliant Ε fera Α. Mais Ε est le produit de Θ par Κ; donc le nombre Ν multipliant le produit de Θ par Κ fait Α; donc Α est un nombre solide, dont les côtés sont Θ, Κ, Ν. De plus, puisque les nombres Ε, Ζ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec Γ, Δ, Β, le nombre Ε mesure Γ autant de fois que Η mesure Β. Qu'il y ait autant d'unités dans Ξ que Ε mesure de fois Γ; le nombre Η mesurera Β par les unités qui sont dans Ξ; donc Ξ multipliant Η fera Β. Mais Η est le produit de Λ par Μ; donc Ξ multipliant le produit de Λ par Μ fera Β; donc Β est un nombre solide, dont les côtés sont Λ, Μ, Ξ; donc Α, Β sont des nombres solides. Je dis aussi que ces nombres sont semblables. Car puisque les nombres Ν, Ξ multipliant Ε font Α, Γ, le nombre Ν sera à Ξ comme Α est à Γ, c'est-à-dire comme Ε est à Ζ (17. 7). Mais Ε est à Ζ comme Θ est à Λ, et comme Κ est à Μ; donc Θ est à Λ comme Κ est à Μ, et comme Ν est à Ξ. Mais Θ, Κ, Ν

46 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ν πλευρὰ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Α, Μ πλευρὰ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι.

tera ipsius Α, ipsi vero Ξ, Α, Μ latera ipsius Β; ergo Α, Β similes solidi sunt. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

PROPOSITIO XXII.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ᾖσται.

Εστώσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, primus autem quadratus sit, et tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, primus autem Α quadratus sit; dico et tertium Γ quadratum esse.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

Επεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπιδοι εἰσι. Τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Γ unus medius proportionalis est numerus Β; ergo Α, Γ similes solidi sunt. Quadratus autem Α; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

sont les côtés de Α, et Ξ, Α, Μ les côtés de Β; donc les nombres Α, Β sont des solides semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si trois nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un carré, le troisième sera un carré.

Soient Α, Β, Γ trois nombres successivement proportionnels, et que le premier Α soit un carré; je dis que le troisième Γ est un carré.

Puisque entre les nombres Α, Γ il y a un moyen proportionnel Β, les nombres Α, Γ sont des plans semblables (20. 8). Mais Α est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Εὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ᾖσιν,
ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἴσται.

Si quatuor numeri deinceps proportionales
sint, primus autem cubus sit, et quartus cubus
erit.

Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ
Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἴστω· λέγω ὅτι
καὶ ὁ Δ κύβος ἴστί.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales
Α, Β, Γ, Δ, ipse autem Α cubus sit; dico et
Δ cubum esse.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μίσοι ἀνάλογόν εἰσιν
ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὁμοιοὶ εἰσι στερεοὶ
ἀριθμοί. Κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ.
Ὅπερ εἶδει δείξαι.

Quoniam enim ipsorum Α, Δ duo medii
proportionales sunt numeri Β, Γ; ergo Α, Δ
similes sunt solidi numeri. Cubus autem Α; cu-
bus igitur et Δ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIII.

Si quatre nombres sont successivement proportionnels, et si le premier est un cube, le quatrième sera un cube.

Soient Α, Β, Γ, Δ quatre nombres successivement proportionnels, et que Α soit un cube; je dis que Δ est un cube.

Car puisque entre Α, Δ il y a deux nombres moyens proportionnels Β, Γ, les nombres Α, Δ sont des solides semblables (21. 8). Mais Α est un nombre cube; donc Δ est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

48 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾗ· καὶ ὁ διῦτερος τετράγωνος ἴσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α τετράγωνος ἴστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Β τετράγωνός ἐστιν.

Α, 4.
Γ, 16.

Si duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus sit, et secundus quadratus erit.

Duo enim numeri Α, Β inter se rationem habeant quam quadratus numerus Γ ad quadratum numerum Δ, ipse autem Α quadratus sit; dico et Β quadratum esse.

Β, 9.
Δ, 36.

Επεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἴσθιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως· ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἴσθιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Οἷον ἴδι διῆξαι.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati sunt; ergo Γ, Δ similes plani sunt; inter Γ, Δ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Γ ad Δ ita Α ad Β; et inter Α, Β igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est Α quadratus; et Β igitur quadratus est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et si le premier est un quarré, le second sera un quarré.

Car que les deux nombres Α, Β ayent entr'eux la même raison que le nombre quarré Γ a avec le nombre quarré Δ, et que Α soit un quarré; je dis que Β est un quarré.

Car puisque Γ, Δ sont des quarrés, les nombres Γ, Δ sont des plans semblables; il tombe donc entre Γ, Δ un nombre moyen proportionnel (18. 8). Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; il tombe donc aussi un nombre moyen proportionnel entre Α et Β (8. 8). Mais Α est un quarré; donc Β est un quarré (22. 8.) Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω¹ ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἔστί.

Si duo numeri inter se rationem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit.

Duo enim numeri Α, Β inter se rationem habeant quam cubus numerus Γ ad cubum numerum Δ, cubus autem sit Α; dico et Β cubum esse.

Α, 8. Ε, 12. Ζ, 18. Β, 27.
Γ, 64. Δ, 216.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσιν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί², τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥς τε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπίπτει τῶσαν οἱ

Quoniam enim Γ, Δ cubi sunt, ipsi Γ, Δ similes solidi sunt; inter Γ, Δ igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Quot autem inter Γ, Δ in continuum proportionales cadunt numeri, tot et inter eos eandem rationem habentes cum ipsis; quare et inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant Ε, Ζ. Quo-

PROPOSITION XXV.

Si deux nombres ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube, et si le premier est un cube, le second sera aussi un cube.

Car que les nombres Α, Β aient entr'eux la même raison que le nombre cube γ a avec le nombre cube Δ, et que Α soit un cube; je dis que Β est aussi un cube.

Car puisque γ, Δ sont des cubes, les nombres γ, Δ sont des solides semblables; il tombe donc entre γ et Δ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais autant il tombe entre γ et Δ de nombres successivement proportionnels, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison avec eux (8. 8); il tombera donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels. Que ces nombres soient Ε, Ζ.

50 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

E, Z. Επειὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A, E, Z, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ A· κύβος ἄρα καὶ ὁ B. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

niam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales sunt, atque est cubus A; cubus igitur et B. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint similes plani numeri A, B; dico A ad B rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

A, 6.	Γ, 12.	B, 24.
Δ, 1.	E, 2.	Z, 4.

Επειὶ γὰρ οἱ A, B ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Εμπιπτότω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, Γ, B, οἱ Δ, E, Z· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Z τετράγωνοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Quoniam enim A, B plani sunt; inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Cadat, et sit Γ, et sumantur minimi numeri Δ, E, Z ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis A, Γ, B; extremi igitur eorum Δ, Z quadrati sunt. Et quoniam est ut Δ ad Z ita A ad B,

Puisque les quatre nombres A, E, Z, B sont successivement proportionnels, et que A est un cube, le nombre B sera aussi un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Les nombres qui sont des plans semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

Soient A, B des nombres plans semblables; je dis que A a avec B la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

Car puisque les nombres A, B sont des plans, il tombe un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Qu'il en tombe un, et qu'il soit Γ. Prenons les plus petits nombres qui ont la même raison avec A, Γ, B (35. 7), et qu'ils soient Δ, E, Z; leurs extrêmes Δ, Z seront des carrés (cor. 2. 8). Et puisque Δ est à Z

LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 51

Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καὶ εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

et sunt Δ, Ζ quadrati; ergo Α ad Β rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

Ἐστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi numeri inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint similes solidi numeri Α, Β; dico Α ad Β rationem habere quam cubus numerus ad cubum numerum.

Α, 16.	Γ, 24.	Δ, 36.	Β, 54.
Ε, 8.	Ζ, 12.	Η, 18.	Θ, 27.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπίπτειν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε,

Quoniam enim Α, Β similes solidi sunt; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri. Cadant Γ, Δ, et sumantur minimi numeri ipsorum eandem rationem habentium cum ipsis Α, Γ, Δ, Β, æquales ipsis multitudine, Ε, Ζ,

comme Α est à Β, et que Δ, Ζ sont des quarrés, le nombre Α aura avec le nombre Β la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Les nombres solides semblables ont entr'eux la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Soient Α, Β des nombres solides semblables; je dis que Α a avec Β la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube.

Car puisque les nombres Α, Β sont des solides semblables, il tombe deux moyens proportionnels entre Α, Β (19. 8). Qu'ils soient Γ, Δ. Prenons en même quantité les plus petits nombres de ceux qui ont la même raison avec Α, Γ, Δ, Β (2. 8); qu'ils soient Ε, Ζ, Η, Θ; leurs extrêmes Ε, Θ seront des cubes

52 LE HUITIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσὶ.
Καὶ ἴστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β·
καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος
ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν. Ὅπερ ἔδει διῆξαι.

Η, Θ; ergo extremi eorum Ε, Θ cubi sunt.
Atque est ut Ε ad Θ ita Α ad Β; ergo Α ad Β
rationem habet quam cubus numerus ad cubum
numerum. Quod oportebat ostendere.

(cor. 2. 8). Mais Ε est à Θ comme Α est à Β; donc Α a avec Β la même raison qu'un nombre cube a avec un nombre cube. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU HUITIÈME LIVRE.

EUCCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER NONUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ.

Εὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιασάντες ἀλλήλους ποιῶσι τινα, ὁ γινόμενος τετράγωνος ἴσται.

Εστώσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιήτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

PROPOSITIO I.

Si duo similes plani numeri se se multiplicantes faciunt aliquem, factus quadratus erit.

Sint duo similes plani numeri Α, Β, et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ quadratum esse.

Α, 6. Β, 54.
Δ, 36. Γ, 324.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιήτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Quoniam igitur

LE NEUVIÈME LIVRE

DES ÉLEMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Si deux nombres plans semblables se multipliant l'un l'autre produisent un nombre, le produit sera un carré.

Soient Α, Β deux nombres plans semblables, et que Α multipliant Β fasse Γ; je dis que Γ est un carré.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un carré.

54 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ Α ἑαυτὸν μὲν² πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ³

A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. Et quoniam Α, Β similes plani sunt numeri; inter Α, Β igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Si autem inter duos numeros in continuum pro-

Α, 6. Β, 54.
Δ, 36. Γ, 324.

κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥς τε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. Οὔτε ἴδι διῆξαι.

portionales cadunt numeri, quot inter ipsos cadunt totidem et inter eos eandem rationem habentes; quare et inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est quadratus Δ; quadratus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

PROPOSITIO II.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί¹.

Si duo numeri se se multiplicantes faciunt quadratum, similes plani sunt numeri.

Puisque A se multipliant lui-même fait Δ, et que A multipliant B fait Γ, le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres Α, Β sont des plans semblables, il tombe un nombre moyen proportionnel entre Α et Β (18. 8). Mais si entre deux nombres il tombe des nombres successivement proportionnels, autant il en tombe entre ces deux nombres, autant il en tombera entre ceux qui ont la même raison (8. 8); il tombe donc entre Δ et Γ un nombre moyen proportionnel. Mais Δ est un carré; donc Γ est un carré. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II.

Si deux nombres se multipliant l'un l'autre font un carré, ces nombres seront des plans semblables.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B , καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω^α. λέγω ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί.

Sint duo numeri A, B , et A ipsum B multiplicans quadratum ipsum Γ faciat; dico A, B similes planos esse numeros.

$A, 3. \quad B, 12.$
 $\Delta, 9. \quad \Gamma, 36.$

Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως^β ὁ Δ πρὸς τὸν Γ . Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ · οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν τῶν Δ, Γ ἄρα εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός^γ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B · καὶ τῶν A, B ἄρα εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Εἰ δὲ δύο ἀριθμῶν εἰς μίσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί· οἱ ἄρα A, B ὅμοιοι εἰσιν ἐπίπεδοι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipsa enim A se se multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ quadratus est. Et quoniam A se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit; ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ . Et quoniam Δ quadratus est, sed et Γ ; ergo Δ, Γ similes plani sunt; inter Δ, Γ igitur unus medius proportionalis cadit numerus. Atque est ut Δ ad Γ ita A ad B ; et inter A, B igitur unus medius proportionalis cadit. Si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadit, similes plani sunt numeri; ergo A, B similes sunt plani. Quod oportebat ostendere.

Soient les deux nombres A, B , et que A multipliant B fasse le carré Γ ; je dis que les nombres A, B sont des plans semblables.

Car que A se multipliant lui-même fasse Δ ; le nombre Δ sera un carré. Et puisque A se multipliant lui-même fait Δ , et que A multipliant B fait Γ , le nombre A est à B comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque Δ est un carré ainsi que Γ , les nombres Δ, Γ sont des plans semblables; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre Δ et Γ (8. 8). Mais Δ est à Γ comme A est à B ; il tombe donc un nombre moyen proportionnel entre A et B (18. 8). Mais si un nombre moyen proportionnel tombe entre deux nombres, ces nombres sont des plans semblables (20. 8); donc les nombres A, B sont plans et semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἔστίν.

Si cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A se ipsum multiplicans ipsum B faciat; dico B cubum esse.

A, 8.

Δ, 4.

Γ, 2.

B, 64.

I.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρὰ, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω· φανερὸν δὲ ἔστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποῖνκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποῖνκε· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πιποῖνκε· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας·

Sumatur enim ipsius A latus Γ, et Γ se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; manifestum igitur est Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Α facere. Et quoniam Γ se ipsum multiplicantem ipsum Δ fecit; ergo Γ ipsum Δ metitur per unitates quæ in ipso. Sed etiam et unitas ipsum Γ metitur per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. Rursus, quoniam Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Α fecit; ergo Δ ipsum Α metitur per unitates quæ in Γ. Metitur autem et unitas ipsum Γ per unitates quæ in ipso; est

PROPOSITION III.

Si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube A se multipliant lui-même fasse B; je dis que B est un cube.

Car prenons le côté Γ de A, et que Γ se multipliant lui-même fasse Δ; il est évident que Γ multipliant Δ fera A (déf. 19. 7). Et puisque Γ se multipliant lui-même a fait Δ, le nombre Γ mesurera Δ par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Γ comme Γ est à Δ (déf. 20. 7.) De plus, puisque Γ multipliant Δ a fait A, le nombre Δ mesure A par les unités qui sont en Γ. Mais l'unité mesure Γ par les unités qui sont

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως² ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως³ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μίσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ Γ, Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάζας τὸν Β πιποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μίσοι ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἐμπεπτώκασιν⁵, καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μίσοι ἀνάλογον ἐμπίσυνται⁶ ἀριθμοί. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μίσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾗ, καὶ ὁ δεύτερος⁷ κύβος ἴσται. Καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

igitur ut unitas ad Γ ita Δ ad Α. Sed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ; et ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ, et Δ ad Α; ergo inter unitatem et numerum Α duo medii proportionales in continuum cadunt numeri Γ, Δ. Rursus, quoniam Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo Α ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum Α per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad Α ita Α ad Β. Sed inter unitatem et Α duo medii proportionales numeri cadunt; et inter Α, Β igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Si autem inter duos numeros duo medii proportionales cadunt, primus autem cubus sit, et secundus cubus erit. Atque est Α cubus; et Β igitur cubus est. Quod oportebat ostendere.

en lui; l'unité est donc à γ comme Δ est à Α. Mais l'unité est à γ comme γ est à Δ; donc l'unité est à γ comme γ est à Δ, et comme Δ est à Α; il tombe donc entre l'unité et le nombre Α deux nombres moyens γ, Δ successivement proportionnels. De plus, puisque Α se multipliant lui-même fait Β, le nombre Α mesure Β par les unités qui sont en lui. Mais l'unité mesure Α par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à Α comme Α est à Β (déf. 20. 7). Mais entre l'unité et le nombre Α il tombe deux nombres moyens proportionnels; il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais si entre deux nombres il tombe deux moyens proportionnels, et si le premier est un cube, le second sera un cube (23. 8). Mais Α est un cube; donc Β est un cube. Ce qu'il fallait démontrer.

58 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

PROPOSITIO IV.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάζας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ ποιίτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans facit aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus Α cubum numerum ipsum Β multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ cubum esse.

Α, 8. Β, 27.
Δ, 64. Γ, 216.

Ο γὰρ Α' ἑαυτὸν πολλαπλασιάζας τὸν Δ ποιίτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάζας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάζας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ Α, Β². τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὡς τε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπισσύνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Ipsa enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; ergo Δ cubus est. Et quoniam Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Et quoniam Α, Β cubi sunt, similes solidi sunt Α, Β; ergo inter Α, Β duo medii proportionales cadunt numeri; quare et inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Δ; cubus igitur et Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION IV.

Si un nombre cube multipliant un nombre cube fait un nombre, le produit sera un cube.

Car que le nombre cube Α multipliant le nombre cube Β fasse Γ; je dis que Γ est un cube.

Car que Α se multipliant lui-même fasse Δ, le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque Α se multipliant lui-même a fait Δ, et que Α multipliant Β fait Γ, le nombre Α est à Β comme Δ est à Γ (17. 7). Et puisque les nombres Α, Β sont des cubes, les nombres Α, Β sont des solides semblables. Il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (19. 8); il tombera donc aussi entre Δ et Γ deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Δ est un cube; donc Γ est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἴσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς¹ ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιῶν· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἴσται.

Α, 8. Β, 27.
Δ, 64. Γ, 216.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιῶν· κύβος ἄρα ἴσται ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποῖκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πιποῖκεν· ἴσται ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως² ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι τῶν³ Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἴσται ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἴσται κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἴσται καὶ ὁ Β. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans cubum facit, et multiplicatus cubus erit.

Cubus enim numerus Α numerum aliquem ipsum Β multiplicans cubum ipsum Γ faciat; dico Β cubum esse.

Ipse enim Α se ipsum multiplicans ipsum Δ faciat; cubus igitur est Δ. Et quoniam Α se ipsum quidem multiplicans ipsum Δ fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; est igitur ut Α ad Β ita Δ ad Γ. Et quoniam Δ, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter Δ, Γ duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est ut Δ ad Γ ita Α ad Β; et inter Α, Β igitur duo medii proportionales cadunt numeri. Atque est cubus Α; cubus igitur est et Β. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION V.

Si un nombre cube multipliant un nombre fait un cube, le nombre multiplié sera un cube.

Car que le nombre cube Α multipliant un nombre Β fasse le cube γ; je dis que Β est un cube.

Que Α se multipliant lui-même fasse Δ; le nombre Δ sera un cube (3. 9). Et puisque Α se multipliant lui-même fait Δ, et que Α multipliant Β fait γ, le nombre Α est à Β comme Δ est à γ (17. 7). Et puisque Δ et γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il tombe donc entre Δ et γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais Δ est à γ comme Α est à Β; il tombe donc entre Α et Β deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais Α est un cube; donc Β est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5'.

Εάν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὶς κύβος ἴσται.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιεῖτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

Α, 8.

Β, 64.

Γ, 512.

Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἔπει ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἔπει ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς

PROPOSITIO VI.

Si numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit.

Numerus enim A se ipsum multiplicans cubum ipsum B faciat; dico et A cubum esse.

Ipse enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat. Quoniam igitur A se ipsum quidem multiplicans ipsum B fecit, ipsum vero B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ cubus est. Et quoniam A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; ergo A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita A ad B. Et quoniam A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo B ipsum Γ metitur per unitates quæ in A. Metitur autem et unitas ipsum A per unitates quæ in ipso; est igitur ut unitas ad A ita B ad Γ. Sed ut unitas ad A

PROPOSITION VI.

Si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre sera un cube.

Que le nombre A se multipliant lui-même fasse le cube B; je dis que A est un cube.

Car que A multipliant B fasse Γ. Puisque A se multipliant lui-même fait B, et que A multipliant B a fait Γ, le nombre Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque A se multipliant lui-même fait B, le nombre A mesure B par les unités qui sont en lui; mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme A est à B (déf. 20. 7). Et puisque A multipliant B fait Γ, le nombre B mesure Γ par les unités qui sont en A. Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; l'unité est donc à A comme B est à Γ. Mais l'unité est à A comme

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 61

τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα² ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως³ ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπὶ οἷ⁴ Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσι· τῶν Β, Γ⁵ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁶ ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἔστι καὶ ὁ Α. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

ita A ad B; et ut igitur A ad B ita B ad Γ. Et quoniam B, Γ cubi sunt, similes solidi sunt; ergo inter B, Γ duo medii proportionales sunt numeri. Atque est ut B ad Γ ita A ad B; et inter A, B igitur duo medii proportionales sunt numeri. Atque est cubus B; cubus igitur est et A. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

PROPOSITIO VII.

Εὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιήτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεὸς ἔστιν.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans facit aliquem, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem ipsum B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ solidum esse.

Α, 6. Β, 7. Γ, 42.
Δ, 3. Ε, 2.

Ἐπὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. Μετρήσθω ὑπὸ τοῦ Δ. Καὶ

Quoniam enim A compositus est, a numero aliquo mensurabitur. Mensuretur ab ipso Δ. Et

A est à B; donc A est à B comme B est à Γ. Et puisque B et Γ sont des cubes, ces nombres sont des solides semblables; il y a donc entre B et Γ deux nombres moyens proportionnels (19. 8). Mais B est à Γ comme A à B; il y a donc entre A et B deux nombres moyens proportionnels (8. 8). Mais B est un cube; donc A est un cube (23. 8). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION VII.

Si un nombre composé multipliant un nombre en fait un autre, le produit sera un solide.

Car que le nombre composé A multipliant le nombre B fasse Γ; je dis que Γ est un solide.

Car puisque A est un nombre composé, il sera mesuré par quelque nombre

62 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅσας δὲ τὸν Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴσ-
 τωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ
 τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας¹· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλα-
 πλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν

quoties Δ ipsum Α metitur tot unitates sint in Ε.
 Quoniam igitur Δ ipsum Α metitur per unitates
 quæ in Ε; ergo Ε ipsum Δ multiplicans ipsum
 Α fecit. Et quoniam Α ipsum Β multiplicans

Α, 6. Β, 7. Γ, 42.
 Δ, 3. Ε, 2.

Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α
 ἴσθιν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β
 πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν²· ὁ Γ ἄρα
 στεριός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β.
 Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ipsum Γ fecit, est autem Α ex ipsis Δ, Ε; ergo ipse
 ex Δ, Ε ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo
 Γ solidus est, latera autem ipsius sunt Δ, Ε, Β.
 Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνά-
 λογον ᾖσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τε-
 τράγωνος ἔσται¹ καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες πάντες²,
 ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες
 πάντες³, ὁ δὲ ἑβδομος κύβος ἅμα καὶ τετρά-
 γωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες⁴.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps
 proportionales sunt, tertius quidem ab unitate
 quadratus erit, et unum intermittentes omnes;
 sed quartus cubus, et duos intermittentes om-
 nes; septimus vero cubus simul et quadratus,
 et quinque intermittentes omnes.

(déf. 13. 7). Qu'il soit mesuré par Δ; et qu'il y ait en Ε autant d'unités que Δ
 mesure de fois Α. Puisque Δ mesure Α par les unités qui sont en Ε, le nombre Ε
 multipliant Δ fera Α. Et puisque Α multipliant Β fait Γ, et que Α est le produit
 de Δ par Ε, le produit de Δ par Ε multipliant Β fait Γ (16. 7); le nombre Γ est
 donc un nombre solide (déf. 17. 7), dont les côtés sont Δ, Ε, Β. Ce qu'il fallait
 démontrer.

PROPOSITION VIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement
 proportionnels, le troisième, à partir de l'unité, sera un carré, et tous ceux
 qui en laissent un; le quatrième un cube, et tous ceux qui en laissent deux;
 le septième un cube et un carré tout à la fois, et tous ceux qui en laissent cinq.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 63

Εστώσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἑξῆς ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνός καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες⁵.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ; dico quidem tertium ab unitate, ipsum Β, quadratum esse, et unum intermittentes omnes; quartum vero Γ cubum, et duos intermittentes omnes; septimum autem Ζ cubum simul et quadratum, et quinque intermittentes omnes.

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν⁶ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει· τετράγωνός ἄρα ἐστὶν ὁ Β. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἑνα διαλείποντες πάντες⁷ τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ, καὶ

Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Α ad Β; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur et Α ipsum Β. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in ipso; atque Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in Α; ergo Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; quadratus igitur est Β. Et quoniam Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, sed Β quadratus est; et Δ igitur quadratus est. Propter eadem utique et Ζ quadratus est. Similiter etiam demonstrabimus et unum omnes intermittentes quadratos esse. Dico etiam et quartum ab unitate, ipsum Γ, cubum esse, et duos intermit-

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels; je dis que le troisième nombre Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un; que le quatrième Γ est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux; que le septième Ζ est un cube et un carré tout à la fois, ainsi que tous ceux qui en laissent cinq.

Car puisque l'unité est à Α comme Α est à Β, l'unité mesure Α autant de fois que Α mesure Β (déf. 20. 7). Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en Α; le nombre Α se multipliant lui-même fera donc le nombre Β; le nombre Β est donc un carré. Et puisque Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ sera aussi un carré (22. 8). Par la même raison Ζ est un carré. Nous démontrerons de la même manière que tous ceux qui en laissent un sont des carrés. Je dis aussi que le quatrième, Γ, à partir de l'unité, est un cube, et

64 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὥς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἐπεὶ

tentes omnes. Quoniam enim est ut unitas ad Α ita Β ad Γ; æqualiter igitur unitas ipsum Α numerum metitur ac Β ipsum Γ. Sed unitas ipsum Α numerum metitur per unitates quæ in Α; et Β igitur ipsum Γ metitur per unitates quæ in Α; ergo Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit. Quoniam igitur Α se ipsum

1. Α, 3. Β, 9. Γ, 27. Δ, 81. Ε, 243. Ζ, 729.

οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν⁸ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστὶ⁹· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ἔτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσὶ¹⁰ καὶ τετράγωνοι. Ὅπρι ἴδει δείξαι.

quidem multiplicans ipsum Β fecit, ipsum vero Β multiplicans ipsum Γ fecit; cubus igitur est Γ. Et quoniam Γ, Δ, Ε, Ζ deinceps proportionales sunt, sed Γ cubus est; et Ζ igitur cubus est. Ostensum est autem et quadratum; ergo septimus ab unitate ipse Ζ et cubus est et quadratus. Similiter etiam demonstrabimus et quinque intermittentes omnes cubos esse et quadratos. Quod oportebat ostendere.

tous ceux qui en laissent deux. Car puisque l'unité est à Α comme Β est à Γ, l'unité mesure Α autant de fois que Β mesure Γ. Mais l'unité mesure le nombre Α par les unités qui sont en Α; donc Β mesure Γ par les unités qui sont en Α; donc Α multipliant Β fera Γ. Et puisque Α se multipliant lui-même fait Β, et que Α multipliant Β fait Γ, Γ est un cube (déf. 19. 7). Et puisque Γ, Δ, Ε, Ζ sont successivement proportionnels, et que Γ est un cube, Ζ est aussi un cube (23. 8). Mais on a démontré qu'il est un carré; donc le septième Ζ, à partir de l'unité, est un cube et un carré tout à la fois. Nous démontrerons semblablement que tous ceux qui en laissent cinq sont des cubes et des carrés tout à la fois. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

PROPOSITIO IX.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιὺν ἀριθμοὶ ἐξῆς¹ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾧ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ εἰ μὲν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾧ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἐστώσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὅσοιδη-
ποτοῦν² ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ
μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω
ᾧτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256. Ε, 1024. Ζ, 4096.

Οτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάν-
τες, δίδεικται· λέγω ᾧτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες
τετράγωνοι εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς
ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ
Γ ἄρα³ τετράγωνός ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ,
Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος·
καὶ ὁ Δ ἄρα⁴ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὲ δει-
ξομεν ᾧτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps
proportionales sunt, ipse autem post unitatem
quadratus est; et reliqui omnes quadrati erunt.
Et si ipse post unitatem cubus est; et reliqui
omnes cubi erunt.

Sint ab unitate deinceps proportionales quot-
cunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ipse autem Α
post unitatem sit quadratus; dico et reliquos om-
nes quadratos fore.

Tertium quidem ab unitate Β quadratum
esse, et unum intermittentes omnes, demons-
tratum est; dico et reliquos omnes quadratos
esse. Quoniam enim Α, Β, Γ deinceps propor-
tionales sunt, et est Α quadratus; et Γ
igitur quadratus est. Rursus, quoniam Β, Γ, Δ
deinceps proportionales sunt, et est Β quadratus;
et ipse Δ igitur quadratus est. Similiter etiam de-
monstrabimus et reliquos omnes quadratos esse.

PROPOSITION IX.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un carré, tous les autres seront des carrés; si celui qui est après l'unité est un cube, tous les autres seront des cubes.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres que l'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité soit un carré; je dis que tous les autres seront des carrés.

On a déjà démontré que le troisième Β, à partir de l'unité, est un carré, ainsi que tous ceux qui en laissent un (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont des carrés. Car puisque Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et que Α est un carré, Γ est un carré (22. 8). De plus, puisque les nombres Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Β est un carré, Δ est aussi un carré. Nous démontrerons semblablement que tous les autres sont des carrés.

66 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αλλά δὴ⁵ ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω ὅτι καὶ⁶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσὶν.

Οτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δεικνύται· λέγω γὰρ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσὶν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ

Sed et sit A cubus; dico et reliquos omnes cubos esse.

Quantum quidem ab unitate ipsum Γ cubum esse, et duos intermittentes omnes, demonstratum est; dico et reliquos omnes cubos esse. Quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B; æqualiter igitur unitas ipsa A metitur ac A ipsum B. Sed unitas ipsum A metitur per uni-

1. A, 8. B, 64. Γ, 512. Δ, 4096. E, 32768. Z, 262144.

κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος κύβος ἐστὶ· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστὶ⁸. Καὶ ἐπεὶ τίσσαρις ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστὶ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστὶ, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσὶν. Ὅπερ εἶδει δείξαι.

tates quæ in ipso; et A igitur ipsum B metitur per unitates quæ in ipso; ergo A se ipsum multiplicans ipsum B fecit, atque est A cubus. Si autem cubus numerus se ipsum multiplicans facit aliquem, factus cubus est; et B igitur cubus est. Et quoniam quatuor numeri Α, Β, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, et est Α cubus; et Δ igitur cubus est. Propter eadem utique et E cubus est, et similiter reliqui omnes cubi sunt. Quod oportebat ostendere.

Mais que A soit un cube; je dis que tous les autres sont des cubes.

On a déjà démontré que le quatrième, à partir de l'unité, est un cube, ainsi que tous ceux qui en laissent deux (8. 9); je dis aussi que tous les autres sont aussi des cubes. Car puisque l'unité est à A comme A est à B, l'unité mesure A autant de fois que A mesure B (déf. 21. 7). Mais l'unité mesure A par les unités qui sont en lui; donc A mesure B par les unités qui sont en lui; donc A se multipliant lui-même fait B; mais A est un cube; et si un nombre cube se multipliant lui-même fait un nombre, le produit est un cube (3. 9); donc B est un cube. Et puisque les quatre nombres Α, Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que Α est un cube, Δ est un cube 23. 8. Par la même raison E est aussi un cube, ainsi que tous les autres. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι΄.

PROPOSITIO X.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποιοιῶν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾗσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾗ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾗ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Εστώσαν γάρ¹ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν² ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ἔτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς³ τοῦ τρίτου τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων⁴.

1. Α, 2. Β, 4. Γ, 8. Δ, 16. Ε, 32. Ζ, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Ἔστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

Si ab unitate quocunque numeri proportionales sunt, ipse autem post unitatem non est quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate et unum intermittentes omnes. Et si ipse post unitatem cubus non est, neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate et duos intermittentes omnes.

Sint enim ab unitate deinceps proportionales quocunque numeri Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, sed post unitatem ipse Α non sit quadratus; dico neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Si enim possibile, sit Γ quadratus. Est autem et Β quadratus; ergo Β, Γ inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum

PROPOSITION X.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité n'est point un carré, aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent un. Et si celui qui est après l'unité n'est pas un cube, aucun autre ne sera un cube, excepté le quatrième, à partir de l'unité, et tous ceux qui en laissent deux.

Car soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ successivement proportionnels, et que celui qui est après l'unité ne soit pas un carré, savoir Α; je dis qu'aucun autre ne sera un carré, excepté le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Car si cela est possible, que Γ soit un carré. Mais Β est aussi un carré (8. 9); donc Β et Γ ont entr'eux la même raison qu'un nombre carré a avec un nombre

68 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁵ ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥς τε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσι. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειτο· οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι⁷, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. Λέγω δὴ⁸ ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

numerum. Et est ut B ad Γ ita A ad B; ergo A, B inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare A, B similes plani sunt. Et est quadratus B; quadratus igitur est et A, quod non supponebatur; non igitur Γ quadratus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate et unum intermittentes.

Sed et non sit A cubus. Dico etiam neque alium ullum cubum fore, præter quartum ab unitate et duos intermittentes.

1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16. E, 32. Z, 64.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁹ ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον¹⁰. Καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς

Si enim possibile, sit Δ cubus. Est autem et Γ cubus, quartus enim est ab unitate, et est ut Γ ad Δ ita B ad Γ; et B igitur ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum. Et est Γ cubus; et B igitur cubus est. Et quoniam ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς

quarré; et B est à Γ comme A est à B; donc A, B ont entr'eux la même raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc A, B sont des plans semblables (déf. 22. 7). Mais B est un quarré; donc A est un quarré, ce qui n'est point supposé; donc Γ n'est point un quarré. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un quarré, si ce n'est le troisième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent un.

Mais que A ne soit pas un cube; je dis qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux.

Car si cela est possible, que Δ soit un cube. Mais Γ est un cube; car c'est le quatrième nombre, à partir de l'unité (8. 9), et Γ est à Δ comme B est à Γ; donc B a avec Γ la même raison qu'un cube a avec un cube. Mais Γ est un cube; donc B est un cube. Et puisque l'unité est à A comme A est à B, et que l'unité mesure

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 69

πρὸς τὸν Α οὕτως¹¹ ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἢ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας·¹² ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιῶν. Εὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων¹³. Ὅπερ ἴδι διίξαι.

est ut unitas ad Α ita Α ad Β, sed unitas ipsum Α metitur per unitates quæ in ipso; et Α igitur ipsum Β metitur per unitates quæ in ipso; ergo Α se ipsum multiplicans cubum Β fecit. Si autem numerus se ipsum multiplicans cubum facit, et ipse cubus erit; cubus igitur et Α, quod non supponitur; non igitur Δ cubus est. Similiter utique demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate et duos intermittentes. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατὰ τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Εστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος¹ ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινα τῶν Γ, Δ.

PROPOSITIO XI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, minor maiorem metitur per aliquem eorum qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate Α quotcunque numeri deinceps proportionales Β, Γ, Δ, Ε; dico eorum Β, Γ, Δ, Ε minimum Β ipsum Ε metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

Α par les unités qui sont en lui; donc Α mesure Β par les unités qui sont en lui (déf. 21. 7); donc Α se multipliant lui-même fera le cube Β. Mais si un nombre se multipliant lui-même fait un cube, ce nombre est un cube (6. 9); Α est donc un cube, ce qui n'est point supposé; donc Δ n'est pas un cube. Nous démontrerons semblablement qu'aucun autre n'est un cube, si ce n'est le quatrième, à partir de l'unité, et ceux qui en laissent deux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, le plus petit mesure le plus grand par quelqu'un de ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité Α, tant de nombres qu'on voudra Β, Γ, Δ, Ε successivement proportionnels; je dis que Β, le plus petit des nombres Β, Γ, Δ, Ε, mesure Ε par un des nombres Γ, Δ.

70 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκεις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἀλλὰ ἔτι ἰσάκεις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. Ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας·

Α, 1. Β, 3. Γ, 9. Δ, 27. Ε, 81.

καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῇ Δ³ μονάδας· ὥς τε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μίζονα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινὰ ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι⁴.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποιοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς¹ ἀνάλογον ᾧσιν· ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ ἴσχατος πρῶτων ἀριθμῶν μετρηῖται², ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθῇσεται.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποιοιδηποτοῦν³ ἀριθμοὶ ἐξῆς⁴ ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὑφ' ὧσιν ἂν ὁ Δ πρῶτων ἀριθμῶν μετρηῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθῇσεται.

Car puisque l'unité Α est à Β comme Δ est à Ε, l'unité Α mesure Β autant de fois que Δ mesure Ε (déf. 20. 7); donc par permutation l'unité Α mesure Δ autant de fois que Β mesure Ε (15. 7.) Mais l'unité Α mesure Δ par les unités qui sont en lui; donc Β mesure Ε par les unités qui sont en Δ; le plus petit Β mesure donc Ε, qui est le plus grand, par un des nombres qui sont dans les nombres proportionnels. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, tous les nombres premiers qui mesurent le dernier mesurent aussi celui qui est le plus près de l'unité.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels; je dis que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi Α.

Quoniam enim est ut Α unitas ad Β ita Δ ad Ε; æqualiter igitur Α unitas ipsum Β numerum metitur ac Δ ipsum Ε; alterne igitur æqualiter Α unitas ipsum Δ metitur ac Β ipsum Ε. Sed Α unitas ipsum Δ metitur per uni-

tates quæ in ipso; et Β igitur ipsum Ε metitur per unitates quæ in Δ; quare minor Β majorem ipsum Ε metitur per aliquem numerum eorum qui sunt in proportionalibus numeris. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XII.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt; a quibuscunque ultimus primorum numerorum mensuratur, ab ipsis et proximus unitati mensurabitur.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; dico a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab ipsis et Α mensuratum iri.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 71

Μετρίσθω γὰρ ὁ Δ ὑπὸ τινος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ⁵ τὸν Α μετρίῃ. Μὴ γὰρ μετρίτω ὁ Ε τὸν Α⁶. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν⁷ ὃν μὴ μετρίῃ πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἵπτι ὁ Ε τὸν Δ μετρίῃ, μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκει. Πάλιν, ἵπτι ὁ Α

Mensuretur enim Δ ab aliquo primo numero Ε; dico Ε et ipsum Α metiri. Non enim metiatur Ε ipsum Α. Atque est Ε primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo Ε, Α primi inter se sunt. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur, metiatur eum per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Rursus, quoniam Α ipsum

1. Α, 4. Β, 16. Γ, 64. Δ, 256.
Ε, 2. Θ, 8. Η, 32. Ζ, 128.

τὸν Δ μετρίῃ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποιήκειν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως⁸ ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τι ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἰπόμενος τὸν ἰπόμενον· μετρίῃ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. Μετρίτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

Δ metitur per unitates quæ in Γ; ergo Α ipsum Γ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed utique et Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; est igitur ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α, Ε primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Ε ipsum Γ. Metiatur eum per Η; ergo Ε ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit. Sed et ex antecedente et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α,

Que Δ soit mesuré par un nombre premier Ε; je dis que Α est aussi mesuré par Ε. Que Α ne soit pas mesuré par Ε. Puisque Ε est un nombre premier, et que tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); les nombres Ε, Α sont premiers entr'eux. Et puisque Ε mesure Δ, qu'il le mesure par Ζ; le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. De plus, puisque Α mesure Δ par les unités qui sont en Γ (11. 9), le nombre Α multipliant Γ fera Δ. Mais Ε multipliant Ζ fait Δ; donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais les nombres Α, Ε sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Ε mesure Γ. Qu'il le mesure par Η; le nombre Ε multipliant Η fera Γ. Mais par ce qui précède Α multipliant Β fait Γ; donc le produit

72 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

A, Βῖσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Ε, Η· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως⁹ ὁ Η πρὸς τὸν Β. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν·

B æqualis est ipsi ex E, H; est igitur ut A ad E ita H ad B. Sed et A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur E ipsum B. Metiatur ipsum per Θ; ergo E ipsum Θ multiplicans ipsum B fecit. Sed et A se ipsum multiplicans ipsum B fecit; est igitur ipse ex Θ, E æqualis ipsi

1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256.
E, 2. Θ, 8. H, 32. Z, 128.

ἴσθιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος¹⁰ τῶ ἀπὸ τοῦ Α· ἴσθιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως¹¹ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις, ὅ, τε¹² ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Ε τὸν Α¹³. Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ πρώτου¹⁴ ἀριθμοῦ τίνος μετροῦνται· οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται¹⁵.

ab A; est igitur ut E ad A ita A ad Θ. Sed A, E primi, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; ergo metitur et E ipsum A. Sed et non metitur, quod impossibile; non igitur A, E primi inter se sunt; ergo compositi. Sed compositi a primo numero aliquo mensurantur; ergo A, E a primo aliquo numero mensurantur. Et quoniam E primus

de A par B égale le produit de E par H; donc A est à E comme H est à B. Mais les nombres A, E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure B. Qu'il le mesure par Θ; le nombre E multipliant Θ fera B. Mais A se multipliant lui-même fait B; donc le produit de Θ par E égale le carré de A; donc E est à A comme A est à Θ. Mais A et E sont premiers entr'eux, et les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits nombres mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7). Donc E mesure A. Mais il ne le mesure pas, ce qui est impossible; donc les nombres A, E ne sont pas premiers entr'eux; donc ils sont composés. Mais les nombres composés sont mesurés par quelque nombre premier (déf. 15. 7); donc les nombres A, E sont mesurés par quelque nombre premier.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἐτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἐαυτοῦ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὥς τε καὶ¹⁶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὧν ἂν ὁ Δ πρῶτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιὺν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾗ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Εστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιὺν ἀριθμοὶ ἐξῆς² ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶρεξ τῶν Α, Β, Γ.

supponitur, primus autem ab alio numero non mensuratur nisi a se ipso; ergo Ε ipsos Α, Ε metitur; quare et Ε ipsum Α metitur. Metitur autem et ipsum Δ; ergo Ε ipsos Α, Δ metitur. Similiter utique demonstrabimus a quibuscunque ipse Δ primis numeris mensuretur, ab iisdem et ipsum Α mensuratum iri. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XIII.

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales sunt, ipse autem post unitatem primus est, maximus a nullo alio mensurabitur, nisi ab eis qui sunt in proportionalibus numeris.

Sint ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, ipse Α autem post unitatem primus sit; dico maximum eorum ipsum Δ a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis Α, Β, Γ.

Et puisque Ε est supposé être un nombre premier, et qu'un nombre premier n'est mesuré par aucun autre nombre que par lui-même (déf. 12. 7), le nombre Ε mesurera les nombres Α, Ε; donc Ε mesure Α. Mais il mesure Δ; donc Ε mesure les nombres Α, Δ. Nous démontrerons semblablement que tous les nombres premiers qui mesurent Δ mesureront aussi le nombre Α. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIII.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si celui qui est après l'unité est un nombre premier, aucun autre nombre ne mesurera le plus grand, excepté ceux qui sont dans les nombres proportionnels.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ successivement proportionnels, et que le nombre Α, qui est après l'unité, soit un nombre premier; je dis que le plus grand Δ ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par les nombres Α, Β, Γ.

74 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἴστω ὁ αὐτός· φανερόν δὲ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. Εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτος ἔστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτος ἔστι· σύνθετος ἄρα· πᾶς³ δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται⁴. Λέγω δὲ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται⁵, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ·

Si enim possibile, mensuretur ab ipso E, et ipse E cum nullo ipsorum A, B, Γ sit idem; evidens est autem E primum non esse. Si enim E primus est, et metitur ipsum Δ, et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur E primus est; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo E a primo aliquo numero mensuratur. Dico etiam ipsum a nullo alio numero mensuratum iri, nisi ab ipso A. Si enim ab alio mensu-

1.	A, 5.	B, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	E—	Θ----	H-----	Z-----

κακείνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. Λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἴστω ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Ζ ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἴστω ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἰς ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε.

ratur ipse E, sed E ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum A metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo A ipsum E metitur. Et quoniam E ipsum Δ metitur, metiatur ipsum per Z. Dico Z cum nullo ipsorum A, B, Γ esse eundem. Si enim Z cum uno ipsorum A, B, Γ est idem, et metitur ipsum Δ per E; et unus igitur ipsorum A, B, Γ ipsum Δ metitur

Car si cela est possible, que E mesure Δ, et que E ne soit aucun des nombres A, B, Γ; il est évident que E n'est pas un nombre premier. Car si E est un nombre premier, et s'il mesure Δ, il mesurera A, qui est un nombre premier, E n'étant pas le même que A (12. 9), ce qui est impossible; donc E n'est pas un nombre premier; il est donc composé. Mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier (33. 7); donc E est mesuré par quelque nombre premier. Je dis qu'aucun autre nombre premier ne le mesurera, si ce n'est A. Car si E, qui mesure Δ, est mesuré par un autre nombre, cet autre nombre mesurera Δ; il mesurera donc A, qui est un nombre premier, cet autre n'étant pas le même que A (12. 9); ce qui est impossible. Donc A mesure E. Et puisque E mesure Δ, qu'il le mesure par Z; je dis que Z n'est aucun des nombres A, B, Γ. Car si Z est le même qu'un des nombres A, B, Γ, et s'il mesure Δ par E, un des nombres A, B, Γ

Αλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ Ζ οὐκ ἐστὶ πρῶτος. Εἰ γὰρ πρῶτος⁸, καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα· ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται⁹. Λέγω δὲ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ· κεινός ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥς τε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίηκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πιποίη-

per E. Sed unus ipsorum Α, Β, Γ ipsum Δ metitur per aliquem ipsorum Α, Β, Γ; et E igitur cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem, quod non supponitur; non igitur Ζ cum uno ipsorum Α, Β, Γ est idem. Similiter utique ostendemus ipsum Ζ mensuratum iri ab ipso Α, ostendentes rursus Ζ non esse primum. Si enim primum, et metitur ipsum Δ, et ipsum Α metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; non igitur primus est Ζ; ergo compositus; omnis autem compositus numerus a primo aliquo numero mensuratur; ergo Ζ a primo aliquo numero mensuratur. Dico et ipsum ab alio primo numero non mensuratum iri, nisi ab ipso Α. Si enim alius aliquis primus ipsum Ζ metitur, sed Ζ ipsum Δ metitur; et ille igitur ipsum Δ metietur; quare et ipsum Α metietur primum existentem, non existens cum ipso idem, quod est impossibile; ergo Α ipsum Ζ metitur. Et quoniam Ε ipsum Δ metitur per Ζ; ergo Ε ipsum Ζ multiplicans ipsum Δ fecit. Sed quidem et Α ipsum Γ multiplicans ipsum

mesurera Δ par E. Mais un des nombres Α, Β, Γ mesure Δ par quelqu'un des nombres Α, Β, Γ (11.9); donc Ε sera le même que quelqu'un des nombres Α, Β, Γ, ce qui n'est point supposé; donc Ζ n'est aucun des nombres Α, Β, Γ. Nous démontrerons semblablement que Ζ est mesuré par Α, en faisant voir encore que Ζ n'est pas un nombre premier. Car s'il l'est, et s'il mesure Δ, il mesurera Α, qui est un nombre premier, Ζ n'étant pas le même que Α (12.9); ce qui est impossible; Ζ n'est donc pas un nombre premier; il est donc composé; mais tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier; donc Ζ est mesuré par quelque nombre premier (33.7). Je dis qu'il ne sera mesuré par aucun autre nombre, si ce n'est par Α. Car si Ζ, qui mesure Δ, est mesuré par tout autre nombre premier, cet autre nombre mesurera Δ, et par conséquent Α, qui est un nombre premier, Ζ n'étant pas le même que Α (12.9); ce qui est impossible; donc Α mesure Ζ. Et puisque Ε mesure Δ par Ζ, le nombre Ε multipliant Ζ fera Δ. Mais Α multipliant Γ fait Δ;

76 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

κιν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Ο δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν.

Δ fecit; ipse igitur ex Α, Γ æqualis est ipsi ex Ε, Ζ; proportionaliter igitur est ut Α ad Ε ita Ζ ad Γ. Sed Α ipsum Ε metitur; et Ζ igitur ipsum Γ metitur. Metiatur ipsum per Η. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Η cum uullo ipso- rum Α, Β esse eundem, et ipsum mensuratum iri ab ipso Α. Et quoniam Ζ ipsum Γ metitur per Η; ergo Ζ ipsum Η multiplicans ipsum Γ fecit.

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε-----	Θ-----	Η-----	Ζ-----

Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ οὕτως¹⁰ ὁ Η πρὸς τὸν Β. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκεν. Αλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλα- σιάσας τὸν Β πεποιήκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν¹¹ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως¹² ὁ Α πρὸς τὸν Η.

Sed quidem et Α ipsum Β multiplicans ipsum Γ fecit; ergo ipse ex Α, Β æqualis est ipsi ex Ζ, Η; proportionaliter igitur ut Α ad Ζ ita Η ad Β. Metitur autem Α ipsum Ζ; metitur igitur et Η ipsum Β. Metiatur eum per Θ. Similiter etiam demonstrabimus ipsum Θ cum ipso Α non esse eundem. Et quoniam Η ipsum Β metitur per Θ; ergo Η ipsum Θ multiplicans ipsum Β fecit. Sed et Α se ipsum multiplicans ipsum Β fecit; ergo ipse ex Θ, Η æqualis est ipsi ex Α quadrato; est igitur ut Θ ad Α ita Α

donc le produit de Α par Γ égale le produit de Ε par Ζ; donc Α est à Ε comme Ζ est à Γ (19. 7). Mais Α mesure Ε; donc Ζ mesure Γ (déf. 21. 7); qu'il le mesure par Η. Nous démontrerons semblablement que Η n'est aucun des nombres Α, Β, et que Α mesure Η. Et puisque Ζ mesure Γ par Η, le nombre Ζ multipliant Η fera Γ. Mais Α multipliant Β fait Γ; donc le produit de Α par Β égale le produit de Ζ par Η; donc Α est à Ζ comme Η est à Β. Mais Α mesure Ζ; donc Η mesure Β. Qu'il le mesure par Θ. Nous démontrerons semblablement que Θ n'est pas le même que Α. Et puisque Η mesure Β par Θ, le nombre Η multipliant Θ fait Β. Mais Α se multipliant lui-même fait Β; donc le produit de Θ par Η égale le quarré de Α; donc Θ est à Α comme Α est à Η (20. 7). Mais Α mesure Η;

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 77

Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α
πρῶτον ὄντα, μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ
ἄτρεπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου
ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ.
Οπιρ ἴδει δειξαι.

ad H. Metitur autem A ipsum H; metitur igitur
et Θ ipsum A primum existentem, non existens
cum ipso idem, quod absurdum; non igitur
maximus Δ ab alio numero mensurabitur,
nisi ab ipsis A, B, Γ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτων ἀριθμῶν
μετρεῖται· ὑπ' οὐδινὸς ἄλλου πρῶτου ἀριθμοῦ
μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ελάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρῶτων
ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρεῖσθω· λέγω ὅτι ὁ Α
ὑπ' οὐδινὸς ἄλλου πρῶτου ἀριθμοῦ μετρηθή-
σεται, πᾶριξ τῶν Β, Γ, Δ.

Si minimus numerus a primis numeris mensu-
ratur; a nullo alio primo numero mensurabitur,
nisi ab ipsis a principio metientibus.

Minimus enim numerus A a primis numeris
B, Γ, Δ mensuretur; dico ipsum A a nullo alio
primo numero mensuratum iri, nisi ab ipsis B,
Γ, Δ.

	Α, 30.	
Β, 2.	Γ, 5.	Δ, 5.
E-----		Z-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖσθω ὑπὸ πρῶτου τοῦ
Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἴστω ὁ αὐτός.

Si enim possibile, mensuretur a primo E, et E
cum nullo ipsorum B, Γ, Δ sit idem. Et quoniam

donc Θ mesure A, qui est un nombre premier, Θ n'étant pas le même que
A, ce qui est absurde; donc le plus grand nombre Δ n'est mesuré par aucun
autre nombre, si ce n'est par A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIV.

Si le plus petit nombre est mesuré par des nombres premiers, il ne sera mesuré
par aucun autre nombre premier, si ce n'est par ceux qui le mesuraient d'abord.

Car soit A le plus petit nombre mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ; je
dis que A ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, si ce n'est par B, Γ, Δ.

Car si cela est possible, qu'il soit mesuré par le nombre premier E, et que E ne soit

78 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρεῖται αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάζας τὸν Α πεποιήκει. Καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῶν² πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινὰ, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρεῖ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἵνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετράσιν· οἱ Β, Γ, Δ

E ipsum A metitur, metiatur eum per Z; ergo E ipsum Z multiplicans ipsum A fecit. Et mensuratur A a primis numeris B, Γ, Δ. Si autem duo numeri sese multiplicantes faciunt aliquem, factum vero ex ipsis metitur aliquis primus numerus, et unum eorum a principio metietur; ergo B, Γ, Δ unum ipsorum E, Z

A, 30.

B, 2.

Γ, 3.

Δ, 5.

E-----

Z-----

ἄρα ἵνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάχιστονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν³ ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος⁴· οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, πᾶριξ τῶν Β, Γ, Δ. Οπερ εἶδει δείξαι.

metiantur. Ipsum quidem E non metientur, ipse E enim primus est, et cum nullo ipsorum B, Γ, Δ idem; ipsum Z igitur metientur minorem existentem ipso A, quod est impossibile, ipse enim A ponitur minimus ab ipsis B, Γ, Δ mensuratus; non igitur ipsum A metietur primus numerus, præter ipsos B, Γ, Δ. Quod oportebat ostendere.

aucun des nombres B, Γ, Δ. Puisque E mesure A, qu'il le mesure par Z; le nombre E multipliant Z fera A. Mais A est mesuré par les nombres premiers B, Γ, Δ, et lorsque deux nombres se multipliant l'un l'autre font un nombre, et qu'un nombre premier mesure le produit, ce nombre mesurera un des nombres qu'on avait d'abord supposés (32. 7); les nombres B, Γ, Δ mesurent donc un des nombres E, Z. Mais ils ne mesureront pas E, car E est un nombre premier, et il n'est aucun des nombres B, Γ, Δ; ils mesurent donc Z, qui est plus petit que A; ce qui est impossible, car A est supposé le plus petit nombre mesuré par B, Γ, Δ; donc aucun nombre premier, si ce n'est B, Γ, Δ, ne mesurera A. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

Εὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἐστῶσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Γ, Α πρὸς τὸν Β.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.
Δ. . . Ε. . . Ζ.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. Φανερόν δὲ ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποιήκει, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει. Καὶ ἐπεὶ οἱ

Si tres numeri deinceps proportionales sunt, minimi ipsorum eamdem rationem habentium cum ipsis; duo quicunque compositi ad reliquum primi sunt.

Sint tres numeri deinceps proportionales, Α, Β, Γ, minimi eorum eamdem rationem habentium cum ipsis; dico ipsorum Α, Β, Γ duos quoscunque compositos ad reliquum primos esse, ipsos quidem Α, Β ad Γ, ipsos autem Β, Γ ad Α, et adhuc ipsos Γ, Α ad Β.

Sumantur enim duo ΔΕ, ΕΖ minimi numeri eorum eamdem rationem habentium cum ipsis Α, Β, Γ. Evidens est et quidem ΔΕ se ipsum multiplicantem ipsum Α facere; ipsum vero ΕΖ multiplicantem ipsum Β facere, et adhuc ΕΖ se ipsum multiplicantem ipsum Γ facere. Et

PROPOSITION XV.

Si trois nombres successivement proportionnels sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux, la somme de deux quelconques de ces nombres sera un nombre premier avec le nombre restant.

Que les trois nombres Α, Β, Γ successivement proportionnels soient les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec eux; je dis que la somme de deux des trois nombres Α, Β, Γ est un nombre premier avec le nombre restant, savoir la somme de Α et de Β avec Γ, la somme de Β et de Γ avec Α, et la somme de Γ et de Α avec Β.

Car prenons les deux plus petits nombres ΔΕ, ΕΖ qui ont la même raison avec Α, Β, Γ. Il est évident que ΔΕ se multipliant lui-même fera Α, que ΔΕ multipliant ΕΖ fera Β, et que ΕΖ se multipliant lui-même fera Γ (2. 8). Et puisque

80 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοι εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσι, καὶ συναμφοτέρως πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ μὲν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοι

quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi sunt, primi inter se sunt. Si autem duo numeri primi inter se sunt, et uterque ad utrumque primus est; et ΔΖ igitur ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed quidem et ΔΕ ad ΕΖ primus est; ergo ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi sunt. Si autem duo numeri ad

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.

Δ. . . Ε. . . Ζ.

εἰσιν³. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾖσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥς τε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ὡς τε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος³ πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν⁴. Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοι εἰσιν. Ομοίως δὲ δείξομεν ἔτι καὶ

aliquem numerum primi sunt, et ex ipsis factus ad reliquum primus est; quare ipse ex ΖΔ, ΔΖ ad ΕΖ primus est. Quare et ipse ex ΖΔ, ΔΕ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Si enim duo numeri primi inter se sunt, ipse ex uno ipsorum factus ad reliquum primus est. Sed ipse ex ΖΔ, ΔΕ est ipse ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ; ipse igitur ex ΔΕ cum ipso ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΕΖ primus est. Et ipse quidem ex ΔΕ est Α, ipse vero ex ΔΕ, ΕΖ est Β, ipse autem ex ΕΖ est Γ; ergo Α, Β compositi ad ipsum Γ primi sunt. Similiter utique demonstrabimus et

les nombres ΔΕ, ΕΖ sont les plus petits, ces nombres sont premiers entr'eux (24. 7). Mais si deux nombres sont premiers entr'eux, leur somme est un nombre premier avec chacun d'eux (30. 7); donc ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ. Mais ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc ΔΖ et ΔΕ sont premiers avec ΕΖ. Mais si deux nombres sont premiers avec un autre, le produit de ces deux nombres est premier avec cet autre (26. 7); donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec ΕΖ; donc le produit de ΖΔ par ΔΕ est premier avec le carré de ΕΖ. Car si deux nombres sont premiers entr'eux, le carré de l'un d'eux est premier avec l'autre (27. 7). Mais le produit de ΖΔ par ΔΕ égale le carré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (3. 2); donc le carré de ΔΕ avec le produit de ΔΕ par ΕΖ est un nombre premier avec le carré de ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme de Α et de Β est un nombre premier avec Γ. Nous démontrerons de la même manière que la somme des

οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν ὥς τε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἶναι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἁπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσι. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

ipsos Β, Γ ad Α primos esse. Dico et ipsos Α, Γ ad Β primos esse. Quoniam enim ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est; quare et ipse ex ΔΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primus est. Sed ipsi ex ΔΖ æquales sunt ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ; et ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur cum ipso bis ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ cum ipso semel ex ΔΕ, ΕΖ ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt; et rursus dividendo ipsi ex ΔΕ, ΕΖ igitur ad ipsum ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. Atque est quidem ipse ex ΔΕ ipse Α, ipse autem ex ΔΕ, ΕΖ ipse Β, ipse vero ex ΕΖ ipse Γ; ergo Α, Γ compositi ad ipsum Β primi sunt. Quod oportebat ostendere.

nombres Β, Γ est un nombre premier avec Α. Je dis aussi que la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Car puisque ΔΖ est un nombre premier avec chacun des nombres ΔΕ, ΕΖ (30. 7), le carré de ΔΖ sera un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ (26 et 27. 7). Mais la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est égale au carré de ΔΖ (4. 2); donc la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec deux fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ, avec une fois le produit de ΔΕ par ΕΖ, est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ; donc, par soustraction, la somme des carrés des nombres ΔΕ, ΕΖ est un nombre premier avec le produit de ΔΕ par ΕΖ. Mais le carré de ΔΕ est Α, le produit de ΔΕ par ΕΖ est Β, et le carré de ΕΖ est Γ; donc la somme des nombres Α, Γ est un nombre premier avec Β. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

PROPOSITIO XVI.

Εάν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾖσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Si duo numeri primi inter se sunt, non erit ut primus ad secundum ita secundus ad alium aliquem.

Duo enim numeri Α, Β primi inter se sint; dico non esse ut Α ad Β ita Β ad alium aliquem.

Α, 5.

Β, 8.

Γ-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ² μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας³ ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἰπόμενος τὸν ἰπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον⁴. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β⁵ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim possibile, sit ut Α ad Β ita Β ad Γ. Sed Α, Β primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Β, ut antecedens antecedentem. Metitur autem et se ipsum; ergo Α ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod absurdum; non igitur erit ut Α ad Β ita Β ad Γ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le second est à un autre nombre.

Que les deux nombres Α, Β soient premiers entr'eux; je dis que Α n'est point à Β comme Β est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que Α soit à Β comme Β est à Γ. Mais Α et Β sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7); et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7); donc Α mesure Β, comme un antécédent mesure un antécédent. Mais Α se mesure lui-même; donc Α mesure Α et Β, qui sont premiers entr'eux; ce qui est absurde; donc Α ne sera pas à Β comme Β est à Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

PROPOSITIO XVII.

Εὰν ᾤσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾤσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἑσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Εστώσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem eorum primi inter se sunt; non erit ut primus ad secundum ita ultimus ad alium aliquem.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ; extremi autem eorum ipsi Α, Δ primi inter se sint; dico non esse ut Α ad Β ita Δ ad alium aliquem.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27. Ε-----

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ² μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας³ ἰσάκεις, ὅ, τι ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον μετρεῖ

Si enim possibile, sit ut Α ad Β ita Δ ad Ε; alterne igitur ut Α ad Δ ita Β ad Ε. Sed Α, Δ primi, primi autem et minimi, minimi vero numeri æqualiter metiuntur ipsos eandem rationem habentes, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; metitur igitur

PROPOSITION XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si leurs extrêmes sont premiers entr'eux, le premier ne sera pas au second comme le dernier est à un autre nombre.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, Β, Γ, Δ, et que leurs extrêmes Α, Δ soient premiers entr'eux; je dis que Α n'est pas à Β comme Δ est à un autre nombre.

Car si cela est possible, que Α soit à Β comme Δ est à Ε; par permutation Α sera à Δ comme Β est à Ε (13. 7). Mais les nombres Α, Δ sont des nombres premiers, et les nombres premiers sont les plus petits (23. 7), et les nombres qui sont les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), donc Α mesure Β.

84 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως⁴ ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὥς τε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως⁵ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ΑΛΛ' ὁ

A ipsum B. Atque est ut A ad B ita B ad Γ; et B igitur ipsum Γ metitur, quare et A ipsum Γ metitur. Et quoniam est ut B ad Γ ita Γ ad Δ, metitur autem B ipsum Γ; metitur igitur et Γ ipsum Δ. Sed A ipsum Γ metitur; quare

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E——

Α τὸν Γ μετρεῖ ὥς τε ὁ Α καὶ⁶ τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

A et ipsum Δ metitur. Metitur autem et se ipsum; ergo A ipsos A, Δ metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium aliquem. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

PROPOSITIO XVIII.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· καὶ δεῖν ἔσται ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Duobus numeris datis considerare, an possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Sint dati duo numeri A, B; et oportebit considerare, an possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

Mais A est à B comme B est à Γ; donc B mesure Γ; donc A mesure aussi Γ. Mais B est à Γ comme Γ est à Δ; donc le nombre B mesure Γ, et Γ mesure Δ. Mais A mesure Γ; donc A mesure Δ. Mais il se mesure lui-même; donc A mesure les nombres A, Δ, qui sont premiers entr'eux, ce qui est impossible; donc A n'est pas à B comme Δ est à un autre nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XVIII.

Deux nombres étant donnés, chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

Soient donnés les deux nombres A, B; il faut chercher s'il est possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 85

Οἱ δὲ A, B ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ. Καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσκυρεῖν.

Itaque A, B vel primi inter se sunt, vel non. Et si primi inter se sunt, demonstratum est impossibile esse ipsis tertium proportionalem invenire.

$A, 4. \quad B, 7.$

Ἀλλὰ δὲ μὴ ἴστωσαν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω. Ὁ A δὲ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρεῖτω πρότερον κατὰ τὸν Δ · ὁ A ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν.

Sed et non sint A, B primi inter se, et B se ipsum multiplicans ipsum Γ faciat. Ipse A igitur ipsum Γ vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum per Δ ; ergo A ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit. Sed quidem et B se ip-

$A, 4. \quad B, 6. \quad \Delta, 9. \quad \Gamma, 36.$

Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκειν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ B · ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως² ὁ B πρὸς τὸν Δ · τοῖς A, B ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον³ προσκύρεται, ὁ Δ .

Ἀλλὰ δὲ μὴ μετρεῖτω ὁ A τὸν Γ · λέγω ὅτι τοῖς A, B ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσκυρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσκυρήσθω ὁ Δ ·

sum multiplicans ipsum Γ fecit; ipse igitur ex A, B æqualis est ipsi ex B ; est igitur ut A ad B ita B ad Δ ; ergo ipsis A, B tertius numerus proportionalis Δ inventus est.

Sed et non metiatur A ipsum Γ ; dico ipsis A, B impossibile esse tertium proportionalem invenire numerum. Si enim possibile,

Les nombres A, B sont premiers entr'eux, ou ils ne le sont pas. S'ils sont premiers entr'eux, il est démontré qu'il n'est pas possible de leur trouver un troisième nombre proportionnel (16. 9).

Que les nombres A, B ne soient pas premiers entr'eux, et que B se multipliant lui-même fasse Γ . Le nombre A mesurera Γ ou ne le mesurera pas. Premièrement qu'il le mesure par Δ ; le nombre A multipliant Δ fera Γ . Mais B se multipliant lui-même fait Γ ; donc le produit de A par Δ est égal au carré de B ; donc A est à B comme B est à Δ (20. 7). On a donc trouvé un troisième nombre Δ proportionnel aux nombres A, B .

Mais que A ne mesure pas Γ ; je dis qu'il est impossible de trouver un troisième nombre proportionnel aux nombres A, B . Car si cela est possible, que Δ soit le

86 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥς τε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ

inveniatur ipse Δ; ipse igitur ex Α, Δ æqualis est ipsi ex Β, ipse autem ex Β est ipse Γ; ipse igitur ex Α, Δ æqualis est ipsi Γ; quare Α ipsum Δ multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Α

Α, 6. Β, 4. Δ—— Γ, 16.

τὸν Δ. Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατὸν ἐστὶ τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσεμεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρή. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

ipsum Γ metitur per Δ. At vero supponitur et non metiri, quod absurdum; non igitur possibile est ipsis Α, Β tertium proportionalem invenire numerum, quando Α ipsum Γ non metitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

PROPOSITIO XIX.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε¹ δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσεμεῖν.

Tribus numeris datis considerare, quando possibile sit ipsis quartum proportionalem invenire.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δεῖν ἔστω ἐπισκέψασθαι, πότε² δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσεμεῖν.

Sint dati tres numeri Α, Β, Γ, et oporteat considerare, quando possibile sit ipsis tertium proportionalem invenire.

nombre trouvé; le produit de Α par Δ sera égal au carré de Β (20. 7); mais le carré de Β est Γ; donc le produit de Α par Δ est égal à Γ; donc Α multipliant Δ fait Γ; donc Α mesure Γ par Δ. Mais on a supposé qu'il ne le mesure pas, ce qui est absurde; il est donc impossible de trouver un nombre troisième proportionnel aux nombres Α, Β, lorsque Α ne mesure pas Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XIX.

Trois nombres étant donnés, chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

Soient donnés les trois nombres Α, Β, Γ; il faut chercher quand est-ce que l'on peut leur trouver un quatrième nombre proportionnel.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 87

Οἱ δὲ Ἀ, Β, Γ ἥτοι ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν ἢ οὐ*.

Ipsi vero Α, Β, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi Α, Γ primi inter se sunt; vel non.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλο- Si quidem igitur Α, Β, Γ deinceps sunt pro-
γον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς portionales, et extremi eorum ipsi Α, Γ primi

Ou les nombres Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et leurs extrêmes Α, Γ sont premiers entr'eux; ou bien cela n'est point.

Si les nombres Α, Β, Γ sont successivement proportionnels, et si leurs ex-

* In margine editionis Basilicæ hoc legere est: *Quia Zambertus græcum sine dubio exemplar secutus, exactâ divisione membrorum hic utitur, singula membra demonstrationibus exequitur, volumus eam lectionem inserere; est enim pernecessaria, licet neutrum nostrorum exemplarium tale quidquam haberet.*

Editio Parisiensis concordat cum omnibus codicibus bibliothecæ regię, codicibus 190, 2466, 2542 exceptis, qui concordant cum codice græco quem Zambertus secutus est: versio autem latina Zamberti hæc est:

Jam ipsi Α, Β, Γ, aut continue sunt proportionales, et eorum extremi Α, Γ sunt primi ad invicem; aut non sunt continue proportionales, et eorum extremi primi sunt ad invicem; aut continue sunt proportionales, et eorum extremi non sunt ad invicem primi; vel neque sunt continue proportionales, neque eorum extremi primi sunt ad invicem.

Non sint jam ipsi Α, Β, Γ continue proportionales, extremis rursus primis existentibus ad invicem; dico quod et sic quartum proportionalem invenire est impossibile.

Si enim possibile, inveniatur Δ, ut sit sicut Α ad Β sic Γ ad Δ, fiatque sicut Β ad Γ sic Δ ad Ε. Et quoniam est sicut quidem Α ad Β sic Γ ad Δ, sicut autem Β ad Γ sic Δ ad Ε; ex æquali igitur (per 14 septimi) est sicut Α ad Γ sic Γ ad Ε. At Α, Γ primi sunt, primi autem et minimi, minimi vero metiuntur eandem rationem habentes, antecedens antecedentem, et sequens sequentem (per 21 septimi); metitur igitur Α ipsum Γ, antecedens antecedentem; metitur autem et se ipsum; igitur Α ipsos Α, Γ metitur primos ad invicem existentes, quod est impossibile; ipsis igitur Α, Β, Γ quartum proportionalem invenire est impossibile.

II.

II*

88 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀλλήλους εἰσὶ, δίδυται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν inter se sunt, demonstratum est impossibile

A, 4. B, 6. Γ, 9.

αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. ipsis quartum proportionalem invenire numerum.

Εἰ δὲ οὐ, ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω ὁ δὲ A τὸν Δ ἥτοι μετρεῖ, ἢ οὐ Si autem non, ipse B ipsum Γ multiplicans ipsum Δ faciat; ipse igitur A ipsum Δ vel

A, 8. B, 12. Γ, 18. E, 27. Δ, 216.

μετρεῖ. Μετρεῖται αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν E· metitur, vel non metitur. Metiatur eum primum per E; ergo A ipsum E multiplicans

trêmes A, Γ sont premiers entr'eux, on a démontré qu'il est impossible de leur trouver un quatrième nombre proportionnel (17.9).

Si cela n'est point, que B multipliant Γ fasse Δ; le nombre A mesurera le nombre Δ, ou ne le mesurera pas. Qu'il le mesure d'abord par E; le nombre A

Sed jam rursus sint ipsi A, B, Γ continue proportionales; at A, Γ non sint primi ad invicem; dico quod eis quartum proportionalem invenire est possibile.

Sed jam ipsi A, B, Γ neque continue sint proportionales, neque eorum extremi ad invicem sint primi, et B ipsum Γ multiplicans ipsum efficiat Δ. Similiter ostendetur quod si quidem A ipsum Δ metitur, possibile est eis proportionalem invenire; si autem non metitur, est impossibile. Quod ostendere oportebat.

Divisio editionis Pariensis brevior est, nec tamen minus exacta; etenim quod A, B, Γ vel deinceps sunt proportionales, et extremi eorum ipsi A, Γ primi inter se sunt, vel non; evidens est igitur hanc divisionem comprehendere quatuor casus editionum Basilicæ et Oxoniæ.

Hervagius Euclidis suos codices græcos corrigere voluit, et eos inepte corripuit; perspicuum est enim secundum alinea esse meram principii petitionem. Vide præfatium et lectiones variantes.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 89

ποίηκεν. Αλλὰ μὲν⁴ καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιά-
σας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ
τῷ ἐκ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α
πρὸς τὸν Β οὕτως⁵ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς⁶ Α,
Β, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον⁷ προσύρηται ὁ Ε.

ipsum Δ fecit. At vero et Β ipsum Γ mul-
tiplicans ipsum Δ fecit; ipse igitur ex Α, Ε
æqualis est ipsi ex Β, Γ; proportionaliter
igitur est ut Α ad Β ita Γ ad Ε; ergo ipsis
Α, Β, Γ quartus proportionalis Ε inventus
est.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

Αλλὰ δὴ μὴ μετρίτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ἔτι
ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνά-
λογον προσυρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δύνατον,

At vero non metiatur Α ipsum Δ; dico
impossibile esse ipsis Α, Β, Γ quantum pro-
portionalem invenire numerum. Si enim pos-

Α, 20. Β, 30. Γ, 45. Ε----- Δ, 1350.

προσυρήσθαι ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος
ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. Αλλ' ὁ ἐκ τῶν Β, Γ
ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος
ἐστὶ τῷ Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας
τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ
τὸν Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. Αλλὰ καὶ
οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀτοπον· οὐκ ἄρα δύνατόν

sibile, inveniatur Ε; ipse igitur ex Α, Ε
æqualis est ipsi ex Β, Γ. Sed ipse ex Β, Γ
est ipse Δ; et ipse ex Α, Ε igitur æqualis est
ipsi Δ; ergo Α ipsum Ε multiplicans ipsum
Δ fecit; ergo Α ipsum Δ metitur per Ε;
quare metitur Α ipsum Δ. Sed et non metitur,
quod absurdum; non igitur possibile est ipsis

multipliant Ε fera Δ. Mais Β multipliant Γ fait Δ; donc le produit de Α par Ε est égal au produit de Β par Γ; donc Α est à Β comme Γ est à Ε (19. 7); on a donc trouvé un quatrième nombre proportionnel Ε aux nombres Α, Β, Γ.

Mais que Α ne mesure pas Δ; je dis qu'il est impossible de trouver un quatrième nombre proportionnel aux nombres Α, Β, Γ. Car si cela est possible, soit trouvé Ε; le produit de Α par Ε sera égal au produit de Β par Γ (19. 7). Mais le produit de Β par Γ est Δ; le produit de Α par Ε est donc égal à Δ; donc Α multipliant Ε fera Δ; donc Α mesure Δ par Ε; donc Α mesure Δ. Mais il ne le mesure

90 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι τοῖς A, B, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσ-
εὐρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ A τὸν Δ μὴ μετρή.

A, B, Γ quantum proportionalem invenire nu-
merum, quando A ipsum Δ non metitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

PROPOSITIO XX.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ
προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἐστώσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ
 A, B, Γ . λέγω ὅτι τῶν A, B, Γ πλείους εἰσὶ
πρῶτοι ἀριθμοί.

Primi numeri plures sunt omni propositâ
multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A, B, Γ ; dico
quam ipsi A, B, Γ plures esse primos nu-
meros.

$A, 2.$	$B, 3.$	$\Gamma, 5.$
E	$30.$	ΔZ

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν A, B, Γ ἐλάχιστος
μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ ΔE , καὶ προσκείσθω τῇ
 ΔE μονὰς ἢ ΔZ . ὁ δὲ EZ ἢτοι πρῶτός ἐστιν,

Sumatur enim ipse ab ipsis A, B, Γ minimus
mensuratus, et sit ΔE , et apponatur ipsi ΔE uni-
tas ΔZ ; ipse igitur EZ vel primus est, vel non.

pas, ce qui est absurde; il n'est donc pas possible de trouver un quatrième
nombre proportionnel aux nombres A, B, Γ , lorsque A ne mesure pas Δ .

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité pro-
posée de nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis
que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres
 A, B, Γ .

Soit pris le plus petit nombre mesuré par les nombres A, B, Γ (38. 7), et
que ce nombre soit ΔE ; ajoutons à ΔE l'unité ΔZ ; le nombre EZ sera un nombre

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 91

¶ οὐ. Ἐστω πρότερον πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, EZ πλείους τῶν A, B, Γ .

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ EZ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὲς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ H · λέγω ὅτι ὁ H οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ἴστί· ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω'. Οἱ δὲ A, B, Γ τὸν ΔE μετροῦσι· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔE

Sit primum primus; inventi igitur sunt primi numeri A, B, Γ, EZ plures quam ipsi A, B, Γ .

At vero non sit EZ primus; a primo igitur aliquo numero mensuratur. Mensuretur a primo H ; dico H cum nullo ipsorum A, B, Γ esse eundem. Si enim possibile, sit. Sed A, B, Γ ipsum ΔE metiuntur; et H igitur ipsum ΔE

$$\begin{array}{rcccl} A, 3. & B, 5. & \Gamma, 7. & & \\ B & 105. & \Delta Z & & \\ \hline & H, 53. & & & \end{array}$$

μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EZ · καὶ λοιπὴν ἄρα² τὴν ΔZ μονάδα μετρήσει ὁ H ἀριθμὸς ὧν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ H ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἴστί· ὁ αὐτός. Ὁ αὐτός δὲ καὶ³ ὑπόκειται πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν A, B, Γ , οἱ A, B, Γ, H . Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.

metietur. Metitur autem et ipsum EZ ; et reliquam igitur ipsam ΔZ unitatem metietur ipse H numerus existens, quod absurdum; non igitur H cum uno ipsorum A, B, Γ est idem. Sed ipse et supponitur primus; inventi igitur sunt primi numeri plures A, B, Γ, H propositâ multitudine ipsorum A, B, Γ . Quod oportebat ostendere.

premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers A, B, Γ, EZ qui sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ .

Mais que EZ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier H ; je dis que H n'est aucun des nombres A, B, Γ . Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres A, B, Γ mesurent ΔE , le nombre H mesurera ΔE . Mais H mesure EZ ; donc H , qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔZ , ce qui est absurde; donc H n'est aucun des nombres A, B, Γ . Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers A, B, Γ, H , que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ . Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Εὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποιοι οὖν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συγκείμεθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποιοι οὖν, οἱ AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὁλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

A B Γ . . Δ Ε

Επὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὁλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. Ἀρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. Ὅπερ εἶναι δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ΄.

Εὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποιοι οὖν συντεθῶσι, τὸ ἐκ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ἦ, ὁλος ἄρτιος ἐσται.

PROPOSITIO XXI.

Si pares numeri quotcunque componuntur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ par est, habet partem dimidiam; quare et totus ΑΕ habet partem dimidiam. Par autem numerus est qui bifariam dividitur; par igitur est ΑΕ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXII.

Si impares numeri quotcunque componuntur, multitudo autem ipsorum par est, totus par erit.

PROPOSITION XXI.

Si l'on ajoute tant de nombres pairs que l'on voudra, leur somme sera un nombre pair.

Ajoutons tant de nombres pairs AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ qu'on voudra; je dis que leur somme ΑΕ est un nombre pair.

Puisque chacun des nombres AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ est un nombre pair, chacun de ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6. 7); donc leur somme ΑΕ peut être partagée en deux parties égales. Mais un nombre pair est celui qui peut être partagé en deux parties égales; le nombre ΑΕ est donc un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est paire, leur somme sera paire.

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 93

Συγκείμεσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅσοιδη-
ποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΕ·
λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Componantur enim impares numeri quot-
cunque pares multitudine ipsi AB, BG, ΓΔ,
ΔΕ; dico totum ΑΕ parem esse.

Α. . . Β. . . . Γ. Δ. Ε

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BG, ΓΔ, ΔΕ
περιττός ἐστιν, ἀφαιριθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάσ-
του, ἕκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται·
ἄσπερ καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται.
Ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ
ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim unusquisque ipsorum AB, BG, ΓΔ, ΔΕ impar est, detractâ unitate ab uno-
quoque, unusquisque igitur reliquorum par erit;
quare et compositus ex ipsis par erit. Est autem
et multitudo unitatum par; et totus igitur ΑΕ
par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιούν συντεθῶσι, τὸ
δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἦ· καὶ ὅλος περισσὸς
ἔσται.

Συγκείμεσαν γὰρ ὅποσοιούν περισσοὶ ἀριθ-
μοὶ, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ AB, BG,
ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

PROPOSITIO XXIII.

Si impares numeri quotcunque componuntur,
multitudo autem ipsorum impar est; et totus im-
par erit.

Componantur enim quotcunque impares nu-
meri, quorum multitudo impar sit, ipsi AB, BG,
ΓΔ; dico et totum ΑΔ imparem esse.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, BG, ΓΔ, ΔΕ que l'on voudra, leur quantité étant paire; je dis que leur somme ΑΕ est paire.

Car puisque chacun des nombres AB, BG, ΓΔ, ΔΕ est impair, si l'on retranche une unité de chacun d'eux, chacun des nombres restants sera pair; leur somme sera donc un nombre pair (21. 9). Mais la quantité des unités est paire; donc la somme ΑΕ est paire. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIII.

Si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, et si leur quantité est impaire, leur somme sera impaire.

Ajoutons tant de nombres impairs AB, BG, ΓΔ que l'on voudra, leur quantité étant impaire; je dis que leur somme sera impaire.

94 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Αφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. Ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος· *Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ; reliquus igitur ΓΕ par est. Est autem et ΓΑ par; et totus*

A. B. Γ. E. Δ

καὶ ὁλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. Ὅπερ εἶδει διῆξαι. *igitur ΑΕ par est. Atque est unitas ΔΕ; impar igitur est ΑΔ. Quod oportebat ostendere.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Εὰν ἀπὸ ἁρτίου ἀριθμοῦ ἄρτις ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἐσται.

Si a pari numero par aufertur, reliquus par erit.

Ἀπὸ γὰρ ἁρτίου τοῦ ΑΒ ἀφηρήσθω ἄρτιος ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Α pari enim ipso ΑΒ auferatur par ΒΓ; dico reliquum ΓΑ parem esse.

A. Γ. . . . B

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἡμισυ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἡμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ³. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

Quoniam enim ΑΒ par est, habet partem dimidiam. Propter eadem utique et ΒΓ habet partem dimidiam; quare et reliquus ΓΑ habet partem dimidiam; par igitur est ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

Retranchons de ΓΔ l'unité ΔΕ; le reste ΓΕ sera un nombre pair (déf. 7. 7). Mais ΓΑ est un nombre pair (22. 9); donc la somme ΑΕ est un nombre pair (21. 9). Mais ΔΕ est une unité; donc ΑΔ est un nombre impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre pair, le reste sera pair.

Que du nombre pair ΑΒ soit retranché le nombre pair ΒΓ; je dis que le reste ΓΑ est pair.

Car puisque ΑΒ est un nombre pair, ce nombre a une moitié. Par la même raison, ΒΓ a aussi une moitié; donc le reste ΓΑ a aussi une moitié; donc ΑΓ est un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

PROPOSITIO XXV.

Εάν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ,
ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ
ΒΓ· λήγῃ ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσὸς ἔστιν.

Si a pari numero impar aufertur, reliquus
impar erit.

A pari enim ipso AB impar auferatur BG;
dico reliquum GA imparem esse.

Α Γ. Δ. . . . Β

Αφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ
ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ
λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστι μονὰς
ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσὸς ἔστιν. Ὅπρι εἶδει
δειξάι.

Auferatur ab ipso BG unitas ΓΔ; ergo ΔΒ
par est. Est autem et ΑΒ par; et reliquus igitur
ΑΔ par est. Atque est unitas ΓΔ; ergo ΓΑ
impar est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

PROPOSITIO XXVI.

Εάν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ,
ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Απὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφηρήσθω
ὁ ΒΓ· λήγῃ ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Si ab impari numero impar aufertur, re-
liquus par erit.

Ab impari enim ipso AB impar auferatur BG;
dico reliquum ΓΑ parem esse.

PROPOSITION XXV.

Si d'un nombre pair on retranche un nombre impair, le reste sera impair.

Que du nombre pair AB soit retranché le nombre impair BG; je dis que le reste GA est impair.

Car que l'unité ΓΔ soit retranchée de BG, le reste ΔΒ sera pair (déf. 7. 7). Mais AB est pair; donc le reste ΑΔ est pair (24. 9). Mais ΓΔ est l'unité; donc ΓΑ est impair. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVI.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre impair, le reste sera pair.

Que de AB impair soit retranché BG impair; je dis que le reste ΓΑ est pair.

96 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επὶ γὰρ ὁ AB περισσότες ἐστίν, ἀφαιρήσθω μονὰς ἢ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Διὰ Quoniam enim AB impar est, auferatur unitas ΒΔ; reliquus igitur ΑΔ par est. Per eadem

A. . . . Γ. . . . Δ. B

τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ utique et ΓΔ par est; quare et reliquus ΓΑ
λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι. par est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

PROPOSITIO XXVI.

Εὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσότες ἔσται.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

Απὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφαιρήσθω ὁ ΒΓ· λίγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσότες ἐστίν.

Ab impari enim ipso AB par auferatur ΒΓ; dico reliquum ΓΑ imparem esse.

A. Δ. . . . Γ. . . . B

Αφαιρήσθω γὰρ μονὰς ἢ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἢ ΔΑ³· περισσότες ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Auferatur enim unitas ΑΔ; ergo ΔΒ par est. Est autem et ΒΓ par; et reliquus igitur ΓΔ par est. Est autem et unitas ΔΑ; impar igitur est ΓΑ. Quod oportebat ostendere.

Puisque AB est impair, retranchons-en l'unité ΒΔ, le reste ΑΔ sera pair. Par la même raison ΓΔ sera pair; donc le reste ΓΑ sera pair (24. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXVII.

Si d'un nombre impair on retranche un nombre pair, le reste sera impair.

Que de AB impair soit retranché ΒΓ pair; je dis que le reste ΓΑ est impair.

Car soit retranchée l'unité ΑΔ; le nombre ΔΒ sera pair. Mais ΒΓ est pair; donc le reste ΓΔ est pair (24. 9). Mais ΔΑ est une unité; donc ΓΑ est impair (déf. 7. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

PROPOSITIO XXVIII.

Εάν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιά-
σας ποιῇ τινα, ὁ γινόμενος ἄρτιος ἔσται.

Περὶσσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολ-
λαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ
ἄρτιός ἐστιν.

Si impar numerus parem multiplicans facit
aliquem, factus par erit.

Impar enim numerus A parem B multiplicans
ipsum Γ faciat; dico Γ parem esse.

A. B.
Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ
πικτοίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων
τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ὁ Β
ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. Εάν δὲ
ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν' συντεθῶσιν, ὁ ἕλες
ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Ὅπρ' ἴδει
διῆξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum
Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqua-
libus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est B
par; ergo Γ componitur ex paribus. Si autem
pares numeri quotcunque componuntur, totus
par est; par igitur est Γ. Quod oportebat os-
tendere.

PROPOSITION XXVIII.

Si un nombre impair multipliant un nombre pair fait un nombre, le produit
sera pair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre pair B fasse r; je dis que r
est pair.

Car puisque A multipliant B a fait r, le nombre r est composé d'autant
de nombres égaux à B qu'il y a d'unités dans A. Mais B est pair; donc r
est composé de nombres pairs. Mais la somme de tant nombres pairs que l'on
voudra est un nombre pair (2. 9); donc r est un nombre pair. Ce qu'il fallait
démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

PROPOSITIO XXIX.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσὸς ἔστιν.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans facit aliquem, factus impar erit.

Impar enim numerus A imparem B multiplicans ipsum Γ faciat; dico Γ imparem esse.

A B
Γ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκει· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans ipsum Γ fecit; ergo Γ componitur ex tot numeris æqualibus ipsi B quot sunt in A unitates. Atque est uterque ipsorum A, B impar; ergo Γ componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar est; quare Γ impar est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXIX.

Si un nombre impair multipliant un nombre impair fait un nombre, le produit sera impair.

Que le nombre impair A multipliant le nombre impair B fasse Γ; je dis que Γ est impair.

Car puisque A multipliant B fait Γ, le nombre Γ est composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A. Mais les nombres A, B sont impairs; donc Γ est composé de nombres impairs, dont la quantité est un nombre impair; donc Γ est un nombre impair (23. 9). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λ΄.

PROPOSITIO XXX.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρήῃ,
καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσῃ.

Περὶσσοὺς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β με-
τρίτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ με-
τρήσει.

Si impar numerus parem numerum metitur,
et dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem B metiatur;
dico et dimidium ejus metiri.

A . . . B
Γ . . .

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρίτω αὐτὸν
κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. Εἰ
γὰρ δυνατόν, ἔστω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ
κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας
τὸν Β πεποιήκεν· ὁ ἄρα Β' σύγκειται ἐκ περισσῶν
ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα
περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ
ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα
ἐστίν· ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, διὰ
δὲ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. Ὅπερ
ἶδει δεῖξαι.

Quoniam enim A ipsum B metitur, metiatur
ipsum per Γ; dico Γ non esse imparē. Si
enim possibile, sit. Et quoniam A ipsum B
metitur per Γ; ergo A ipsum Γ multiplicans
ipsum B fecit; ergo B componitur ex imparibus
numeris, quorum multitudo impar est; ergo B
impar est, quod absurdum, supponitur enim
par; non igitur Γ impar est; impar igitur est Γ;
quare A ipsum B metitur pariter, ob id utique et
dimidium ejus metietur. Quod oportebat os-
tendere.

PROPOSITION XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera sa moitié.

Que le nombre impair A mesure le nombre pair B; je dis qu'il mesurera sa moitié.

Car puisque A mesure B, qu'il le mesure par Γ; je dis que Γ n'est pas un nombre impair. Qu'il le soit, si cela est possible. Puisque A mesure B par Γ, le nombre A multipliant Γ fera B; donc B est composé de nombres impairs dont la quantité est un nombre impair; donc B est impair; ce qui est absurde, puisqu'il est supposé pair; donc Γ n'est pas impair; donc Γ est pair; donc A mesure B par un nombre pair; il mesurera sa donc moitié. Ce qu'il fallait démontrer.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Εὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτος ᾗ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα¹ αὐτοῦ πρῶτος ᾖ.

Περὶ σὺν γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρὸς τινὰ ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ᾖ, τοῦ δὲ Β διπλασίον² ᾖ, ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α³ πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔστιν.

PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus est, et ad duplum ipsius primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B primus sit, ipsius autem B duplus sit Γ; dico A ad Γ primum esse.

A B
Γ
Δ-----

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρίτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἔστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὦν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἡμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ⁴. Τοῦ δὲ Γ ἡμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Si enim non sunt A, Γ primi, metietur aliquis eos numerus. Metiatur, et sit Δ. Et est A impar; impar igitur et Δ. Et quoniam Δ impar existens ipsum Γ metitur, atque est Γ par; et dimidium igitur ipsius Γ metietur ipse Δ. Ipsius autem Γ dimidium est ipse Β; ergo Δ ipsum Β metitur. Metitur autem et ipsum Α; ergo Δ ipsos Α, Β metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur Α ad Γ primus non est; ergo Α, Γ primi inter se sunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXI.

Si un nombre impair est premier avec un nombre, il sera premier avec son double.

Que le nombre impair A soit premier avec un nombre B, et que Γ soit double de B; je dis que A est premier avec Γ.

Car si les nombres Α, Γ ne sont pas premiers, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit Δ. Mais Α est impair; donc Δ est impair. Et puisque Δ, qui est impair, mesure Γ, et que Γ est pair, le nombre Δ mesurera la moitié de Γ (30. 9). Mais Β est la moitié de Γ; donc Δ mesure Β. Mais il mesure Α; donc Δ mesure les nombres Α, Β, qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; donc Α ne peut point ne pas être premier avec Γ; donc les nombres Α, Γ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϚ.

PROPOSITIO XXXII.

Τῶν ἀπὸ δυνάδους¹ διπλασιοζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυνάδους² τῆς Α διπλασιασθῶσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτιοὶ εἰσι μόνον.

A binario duplatorum numerorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotcunque numeri B, Γ, Δ; dico B, Γ, Δ pariter pares esse tantum.

E, 1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ, φανερὸν ἀπὸ γὰρ δυνάδους³ ἐστὶ διπλασιασθεὶς. Λέγω⁴ ὅτι καὶ μόνον. Ἐκκείσθω γὰρ μονάς ἡ Ε⁵. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ. Καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἀρτίος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι⁶ ἑκάτερος τῶν Α, Β, Γ ἀρτιάκις ἀρτίος ἐστὶ μόνον. Ὅπρι εἶδει δείξαι.

At vero unumquemque ipsorum B, Γ, Δ pariter parem esse, manifestum est; a binario enim est duplatus. Dico et tantum. Exponatur enim unitas E. Quoniam igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales sunt, et post unitatem ipse A primus est, maximus ipsorum A, B, Γ, Δ ipse Δ a nullo alio mensurabitur, nisi ab ipsis A, B, Γ. Atque est unusquisque ipsorum A, B, Γ par; ergo Δ pariter par est tantum. Similiter utique demonstrabimus unumquemque ipsorum A, B, Γ pariter parem esse tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXII.

Chacun des nombres doubles, à partir du binaire, est parement pair seulement.

Qu'à partir du binaire A, soient tant de nombres doubles qu'on voudra B, Γ, Δ; je dis que les nombres B, Γ, Δ sont parement pairs seulement.

Il est évident que chacun des nombres B, Γ, Δ est parement pair (déf. 8. 7); car chacun est double à partir du binaire. Je dis qu'il l'est seulement. Car soit l'unité E. Puisqu'à partir de l'unité, on aura autant de nombres successivement proportionnels qu'on voudra, et que A est le premier après l'unité, le plus grand des nombres A, B, Γ, Δ, qui est Δ, ne sera mesuré par aucun nombre, si ce n'est par A, B, Γ (13. 9). Mais chacun des nombres A, B, Γ est pair; donc Δ est parement pair seulement. Nous démontrerons semblablement que chacun des nombres A, B, Γ est parement pair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

PROPOSITIO XXXIII.

Εάν ἀριθμὸς τὸν ἡμισυν ἔχη περισσὸν, ἀρτιά-
κας περισσὸς ἐστὶ μόνον.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἡμισυν ἔχεται περισσόν·
λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκας περισσὸς ἐστὶ μόνον.

Si numerus dimidium habet imparem, pariter
impar est tantum.

Numerus enim A dimidium habeat imparem ;
dico A pariter imparem esse tantum.

A.

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκας περισσὸς ἐστὶ, φανερόν·
ὁ γὰρ ἡμισυν αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν
ἀρτιάκας. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται
ὁ Α καὶ ἀρτιάκας ἄρτιος', μετρηθήσεται ὑπ'
ἄρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἡμισυν
αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ, πε-
ρισσὸς ὢν, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπον· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκας
περισσὸς ἐστὶ μόνον. Ὅπερ ἴδει διζῆσαι.

At vero pariter imparem esse, manifestum
est; dimidium enim ipsius impar existens meti-
tur ipsum pariter. Dico utique et tantum. Si enim
esset A et pariter par, mensuraretur a pari per
parem numerum; quare et dimidium ipsius
mensurabitur a pari numero, impar existens,
quod est absurdum; ergo A pariter impar est
tantum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impaire, ce nombre est parement impair seu-
lement.

Que la moitié du nombre A soit impaire; je dis que A est parement impair
seulement.

Il est évident qu'il est parement impair (déf. 9. 7); car sa moitié, qui est im-
paire; le mesure par un nombre pair. Je dis qu'il l'est seulement. Car si A était
aussi parement pair, un nombre pair le mesurerait par un nombre pair (déf. 8. 7);
donc sa moitié qui est impaire, serait mesurée par un nombre pair; ce qui est
absurde; donc A est parement impair seulement. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Εάν ἄρτιος¹ ἀριθμὸς μὴτε τῶν ἀπὸ δυάδος² διπλασιαζομένων ἢ, μὴτε τὸν ἥμισυν ἔχη περισσόν· ἀρτιάκιστε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Αριθμὸς γὰρ ὁ Α μὴτε τῶν ἀπὸ δυάδος³ διπλασιαζομένων ἔστω, μὴτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ τῶν περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκιστε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Α.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερὸν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν⁴. Εάν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν⁵ δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦμεν⁶, καταστήσομεν εἰς τινα ἀριθμὸν⁷ περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ οὐ, καταστήσομεν εἰς δυάδα⁸, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος⁹ διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ Α¹⁰ ἀρτιάκις περισσός ἐστίν. Εδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκιστε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

PROPOSITIO XXXIV.

Si par numerus neque est a binario unus ex duplatis, neque dimidium habet imparem; et pariter par est, et pariter impar.

Numerus enim A neque sit a binario unus ex duplatis, neque dimidium habeat imparem; dico A pariter esse parem, et pariter imparem.

At vero pariter A esse parem, manifestum est; dimidium enim non habet imparem. Dico utique et pariter imparem esse. Si enim ipsum A secamus bifariam, et dimidium ipsius bifariam, et hoc semper facimus, incidemus in aliquem numerum imparem, qui metietur ipsum A per parem numerum. Si enim non, incidemus in binarium, et erit A a binario unus ex duplatis, quod non supponitur; quare A pariter impar est. Ostensum est autem et pariter parem; ergo A et pariter par est, et pariter impar. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXXIV.

Si un nombre, à partir du binaire, n'est pas un de ceux qui sont doubles, et si sa moitié n'est point impaire, il est parement pair et parement impair.

Que le nombre A, à partir du binaire, ne soit pas un de ceux qui sont doubles, et que sa moitié ne soit point impaire; je dis que A est parement pair et parement impair.

Or, il est évident que A est parement pair (déf. 8. 7), puisque sa moitié n'est pas impaire. Je dis de plus que A est parement impair; car si nous partageons A en deux parties égales, et sa moitié en deux parties égales, et si nous faisons toujours la même chose, nous arriverons à quelque nombre impair qui mesurera A par un nombre pair. Car si cela n'est point, nous arriverons au nombre binaire, et A sera, à partir du binaire, un des nombres qui sont doubles, ce qui n'est pas supposé; donc A est parement impair. Mais on a démontré qu'il est parement pair; donc A est parement pair et parement impair. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΙ.

PROPOSITIO XXXV.

Εάν ὧσιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἰσχατοῦ ἴσοι τῷ πρώτῳ ἴσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἰσχατοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.

Εστώσαν ὅσοιδηποτοῦν³ ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ὑπὸ ἰσχύου τοῦ Α, καὶ ἀφῆρῃσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἐκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἴσται ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Si sunt quotcunque numeri deinceps proportionales, auferuntur autem et a secundo et ab ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, incipientes a minimo Α, et auferatur a ΒΓ et ab ΕΖ ipsi Α æqualis, uterque ipsorum ΗΓ, ΖΘ; dico esse ut ΒΗ ad Α ita ΕΘ ad Α, ΒΓ, Δ.

Α
Β Η Γ
Δ
Ε Α Κ Θ Ζ

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Α ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος ἐστίν⁴. λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴσται ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α,

Ponatur enim ipsi quidem ΒΓ æqualis ΖΚ, ipsi autem Δ æqualis ΖΛ. Et quoniam ΖΚ ipsi ΒΓ æqualis est, quorum ΖΘ ipsi ΗΓ æqualis est; reliquus igitur ΘΚ reliquo ΗΒ est æqualis. Et quoniam est ut ΕΖ ad Α ita Δ ad ΒΓ et ΒΓ

PROPOSITION XXXV.

Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui.

Soient tant de nombres qu'on voudra Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ successivement proportionnels, à commencer du plus petit Α, et retranchons de ΒΓ et de ΕΖ les nombres ΗΓ, ΖΘ égaux chacun à Α; je dis que ΒΗ est à Α comme ΕΘ est à la somme des nombres Α, ΒΓ, Δ.

Faisons ΖΚ égal à ΒΓ, et ΖΛ égal à Δ. Puisque ΖΚ est égal à ΒΓ, et que ΖΘ est égal à ΗΓ, le reste ΘΚ est égal au reste ΗΒ. Et puisque ΕΖ est à Δ comme Δ est à ΒΓ

ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ $ΖΛ$, ὁ δὲ $ΒΓ$ τῷ $ΖΚ$, ὁ δὲ $Α$ τῷ $ΖΘ$. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΕΖ$ πρὸς τὸν $ΛΖ$ οὕτως ὁ $ΛΖ$ πρὸς τὸν $ΖΚ$, καὶ ὁ $ΚΖ$ πρὸς τὸν $ΖΘ$. διελόντι, ὡς ὁ $ΕΛ$ πρὸς τὸν $ΛΖ$ οὕτως ὁ $ΑΚ$ πρὸς τὸν $ΖΚ$, καὶ ὁ $ΚΘ$ πρὸς τὸν $ΖΘ$. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἰπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἰπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΚΘ$ πρὸς τὸν $ΖΘ$ οὕτως οἱ $ΕΛ$, $ΑΚ$, $ΚΘ$ πρὸς τοὺς $ΛΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$. ἴσος δὲ ὁ μὲν $ΚΘ$ τῷ $ΒΗ$, ὁ δὲ $ΖΘ$ τῷ $Α$, οἱ δὲ $ΛΖ$, $ΚΖ$, $ΖΘ$ τοῖς Δ , $ΒΓ$, $Α$. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΒΗ$ πρὸς τὸν $Α$ οὕτως ὁ $ΕΘ$ πρὸς τοὺς Δ , $ΒΓ$, $Α$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ad A , æqualis autem Δ ipsi $ΖΛ$, ipse et $ΒΓ$ ipsi $ΖΚ$, ipse et A ipsi $ΖΘ$; est igitur ut $ΕΖ$ ad $ΛΖ$ ita $ΛΖ$ ad $ΖΚ$, et $ΚΖ$ ad $ΖΘ$; dividendo, ut $ΕΛ$ ad $ΛΖ$ ita $ΑΚ$ ad $ΖΚ$, et $ΚΘ$ ad $ΖΘ$; est igitur et ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes; est igitur ut $ΚΘ$ ad $ΖΘ$ ita $ΕΛ$, $ΑΚ$, $ΚΘ$ ad $ΛΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$. Æqualis autem $ΚΘ$ ipsi quidem $ΒΗ$, ipse vero $ΖΘ$ ipsi A , et $ΛΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$ ipsis Δ , $ΒΓ$, A ; est igitur ut $ΒΗ$ ad A ita $ΕΘ$ ad Δ , $ΒΓ$, A ; est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes. Quod oportebat ostendere.

et comme $ΒΓ$ est à A ; que Δ est égal à $ΖΛ$; que $ΒΓ$ est égal à $ΖΚ$, et A égal à $ΖΘ$, le nombre $ΕΖ$ est à $ΖΛ$ comme $ΛΖ$ est à $ΖΚ$, et comme $ΚΖ$ est à $ΖΘ$; donc par soustraction, $ΕΛ$ est à $ΛΖ$ comme $ΑΚ$ est à $ΖΚ$, et comme $ΚΘ$ est à $ΖΘ$; donc un des antécédents est à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12.7); donc $ΚΘ$ est à $ΖΘ$ comme la somme des nombres $ΕΛ$, $ΑΚ$, $ΚΘ$ est à la somme des nombres $ΛΖ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$. Mais $ΚΘ$ est égal à $ΒΗ$, $ΖΘ$ à A , et la somme des nombres $ΖΛ$, $ΚΖ$, $ΘΖ$ à la somme des nombres Δ , $ΒΓ$, A ; donc $ΒΗ$ est à A comme $ΕΘ$ est à la somme des nombres Δ , $ΒΓ$, A ; donc l'excès du second est au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΓ'.

Εάν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτιθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ὥς οὐ ὁ σύμπαρ συντιθεὶς πρῶτος γίνηται, καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τὴν ἰσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γινόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ὥς οὐ ὁ σύμπαρ συντιθεὶς πρῶτος γίνηται, οἱ A, B, Γ, Δ , καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ E , καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH ποιήτω· λέγω ὅτι ὁ ZH τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γὰρ εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσούτοι ἀπὸ τοῦ E εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ $E, \Theta K, \Lambda, M$. διῆσου ἄρα ἐστὶν ὥς ὁ A πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν M . ὁ ἄρα ἐκ τῶν E, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν A, M . Καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν E, Δ ὁ ZH καὶ ὁ ἐκ τῶν A, M

PROPOSITIO XXXVI.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri A, B, Γ, Δ in duplâ analogiâ, quoad totus compositus primus fiat, et toti æqualis sit ipse E , et E ipsum Δ multiplicans ipsum ZH faciat; dico ZH perfectum esse.

Quot enim sunt A, B, Γ, Δ multitudine tot ab ipso E sumantur ipsi $E, \Theta K, \Lambda, M$ in duplâ analogiâ; ex æquo igitur est ut A ad Δ ita E ad M ; ipse igitur ex E, Δ æqualis est ipsi ex A, M . Et est ipse ex E, Δ ipse ZH ; et

PROPOSITION XXXVI.

Si, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si cette somme multipliée par le dernier fait un nombre, le produit sera un nombre parfait.

Soient, à partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra A, B, Γ, Δ successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme devienne un nombre premier; que E soit égal à leur somme, et que E multipliant Δ fasse ZH ; je dis que ZH est un nombre parfait.

Car, à partir de E , prenons une quantité de nombres, en raison double, qui soit égale à celle des nombres A, B, Γ, Δ ; que ces nombres soient $E, \Theta K, \Lambda, M$; par égalité, A sera à Δ comme E est à M (14. 7); donc le produit de E par Δ sera égal au produit de A par M (19. 7). Mais le produit de E par Δ est ZH ; donc le

LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 107

ἀρα ἔστιν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἀρα τὸν Μ πολλαπλα-
σιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἀρα τὸν ΖΗ μι-
τρῆ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Καὶ ἔστι δυνάς
ὁ Α· διπλάσιος ἀρα ἔστιν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἰσὶ δὲ
καὶ οἱ Μ, Α, ΘΚ, Ε ἱζήs διπλάσιοι ἀλλήλων·
οἱ Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ ἀρα ἱζήs ἀνάλογόν εἰσιν

ipse ex Α, Μ igitur est ΖΗ; ergo Α ipsum Μ
multiplicans ipsum ΖΗ fecit; ergo Μ ipsum
ΖΗ metitur per unitates quæ in Α. Atque est
binarius Α; duplus igitur est ΖΗ ipsius Μ. Sunt
autem et Μ, Α, ΘΚ, Ε deinceps dupli inter se;
ergo Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ deinceps proportionales

1.	Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.	Δ, 16.
		62		
	Ε, 31.	Θ	Ν	Κ
		31	31	
	Ζ	Ξ	496	Η
	31		465	
	Π-----		Ο-----	

ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Αφηρέσθω δὴ ἀπὸ
τοῦ διυτίρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἰσχατοῦ τοῦ ΖΗ
τῇ πρώτῃ τῇ Ε ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ·
ἔστιν ἀρα ὡς ἡ τοῦ διυτίρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ
πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἰσχατοῦ ὑπεροχὴ
πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτῇ πάντα· ἔστιν ἀρα ὡς ὁ
ΝΚ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Α,
ΘΚ, Ε. Καὶ ἔστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῇ Ε· καὶ ὁ ΞΗ
ἀρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Α, ΘΚ, Ε. Ἐστὶ δὲ καὶ

sunt in duplâ analogiâ. Auferatur igitur a se-
cundo ΘΚ et ab ultimo ΖΗ ipsi primo Ε
æqualis, uterque ipsorum ΘΝ, ΖΞ; est igitur ut
secundi numeri excessus ad primum ita ex-
cessus ultimi ad omnes præ se ipso existentes;
est igitur ut ΝΚ ad Ε ita ΞΗ ad Μ, Α, ΘΚ, Ε.
Et est ΝΚ æqualis ipsi Ε; et ΞΗ igitur æqualis
est ipsis Μ, Α, ΘΚ, Ε. Est autem et ΞΖ ipsi

produit de Α par Μ est aussi ΖΗ; donc Α multipliant Μ fait ΖΗ; donc Μ mesure ΖΗ
par les unités qui sont en Α. Mais Α est le nombre binaire; donc ΖΗ est double
de Μ; mais les nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε sont successivement doubles les uns des autres;
donc Ε, ΘΚ, Α, Μ, ΖΗ sont successivement proportionnels en raison double. Retran-
chons du second ΘΚ et du dernier ΖΗ, les nombres ΘΝ, ΖΞ égaux chacun
au premier Ε; l'excès du second nombre sera au premier comme l'excès du
dernier est à la somme des nombres qui sont avant lui (35. 9); donc ΝΚ est à Ε
comme ΞΗ est à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΝΚ est égal à Ε; donc
ΞΗ est égal à la somme des nombres Μ, Α, ΘΚ, Ε. Mais ΞΖ est égal à Ε, et Ε

108 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὁ ΕΖ τῷ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Α, Μ καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω ὅτι ὁ καὶ³ ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ ἴστω ὁ αὐτός. Καὶ

E æqualis, sed E ipsis Α, Β, Γ, Δ et unitati; totus igitur ZH æqualis est et ipsis Ε, ΘΚ, Α, Μ et ipsis Α, Β, Γ, Δ et unitati, et mensuratur ab ipsis. Dico et ZH a nullo alio mensuratum iri, nisi ab ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ et ab unitate. Si enim possibile, metiatur aliquis O ipsum ZH, et ipse O cum nullo ipsorum Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ sit idem. Et quoties O ipsum

1.	Α, 2.	Β, 4.	Γ, 8.	Δ, 16.
		62		
Ε, 31.	Θ	Ν	Κ	Α, 124. Μ, 248.
	31	31		
Ζ	Ε	496		Η
	31	465		
Π-----		Ο-----		

ὁσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἴστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάζας τὸν ΖΗ πιποῖνκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάζας τὸν ΖΗ πιποῖνκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἐστίν⁵. ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ με-

ZH metitur tot unitates sint in Π; ergo Π ipsum Ο multiplicans ipsum ZH fecit. At vero quidem Ε ipsum Δ multiplicans ipsum ZH fecit; est igitur ut Ε ad Π ita Ο ad Δ. Et quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt Α, Β, Γ, Δ, sed post unitatem ipse Α primus est; ergo Δ a nullo alio numero mensurabitur, nisi ab ipsis

égal à la somme des nombres Α, Β, Γ, Δ augmentée de l'unité; donc ΖΗ tout entier égale la somme des nombres Ε, ΘΚ, Α, Μ augmentée de la somme des nombres Α, Β, Γ, Δ et de l'unité, et ΖΗ est mesuré par tous ces nombres (11. 9). Je dis que ΖΗ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par les nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ et par l'unité. Car si cela est possible, que quelque nombre Ο mesure ΖΗ, et que Ο ne soit aucun des nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ. Qu'il y ait dans Π autant d'unités que Ο mesure de fois ΖΗ; le nombre Π multipliant Ο fera ΖΗ. Mais Ε multipliant Δ fait ΖΗ; donc Ε est à Π comme Ο est à Δ (19. 7). Et puisque, à partir de l'unité, les nombres Α, Β, Γ, Δ sont successivement proportionnels, et que le premier nombre après l'unité est Α, le nombre Δ n'est mesuré par aucun

τραθήσεται, πάρειξ τῶν A, B, Γ καὶ ὑπόκειται ὁ O οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσῃ ὁ O τὸν Δ . Ἀλλ' ὡς ὁ O πρὸς τὸν Δ οὕτως⁶ ὁ E πρὸς τὸν Π · οὐδὲ ὁ E ἄρα τὸν Π μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὁ E πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν⁷ ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν⁸. οἱ E, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς⁹ ἰσάκεις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ · ἰσάκεις ἄρα ὁ E τὸν O μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ . Ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρειξ τῶν A, B, Γ · ὁ Π ἄρα ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ἐστω τῷ B ὁ αὐτός. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ B, Γ, Δ τῷ πληθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ E , οἱ $E, \Theta K, \Lambda$. Καὶ εἰσὶν οἱ $E, \Theta K, \Lambda$ τοῖς B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διήστου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Δ οὕτως¹⁰ ὁ E πρὸς τὸν Λ · ὁ ἄρα ἐκ τῶν B, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, E . Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, E ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, O · καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, O ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Λ · ἔστιν ἄρα

A, B, Γ ; et supponitur O cum nullo ipsorum A, B, Γ idem; non igitur metietur O ipsum Δ . Sed ut O ad Δ ita E ad Π ; neque E igitur ipsum Π metitur. Et est B primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur primus est; ergo E, Π primi inter se sunt. Sed primi et minimi, minimi autem metiuntur æqualiter ipsos eandem rationem habentes cum ipsis, et antecedens antecedentem, et consequens consequentem; et est ut E ad Π ita O ad Δ ; æqualiter igitur E ipsum O metitur atque Π ipsum Δ . Sed Δ a nullo alio mensuratur, nisi ab ipsis A, B, Γ ; ergo Π cum uno ipsorum A, B, Γ est idem. Sit cum ipso B idem. Et quot sunt B, Γ, Δ multitudinem tot sumantur $E, \Theta K, \Lambda$ ab ipso E . Et sunt $E, \Theta K, \Lambda$ cum ipsis B, Γ, Δ in eadem ratione; ex æquo igitur est ut B ad Δ ita E ad Λ ; ipse igitur ex B, Λ æqualis est ipsi ex Δ, E . Sed ipse ex Δ, E æqualis est ipsi ex Π, O ; et ipse ex Π, O igitur æqualis est ipsi ex B, Λ ; est igitur ut Π ad B ita Δ ad O .

autre nombre que par A, B, Γ (13. 9); mais on a supposé que O n'est aucun des nombres A, B, Γ ; donc O ne mesure pas Δ . Mais O est à Δ comme E est à Π ; donc E ne mesure pas Π (déf. 21. 7). Mais E est un nombre premier, et tout nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne mesure pas (31. 7); donc les nombres E, Π sont premiers entre eux. Mais les nombres premiers sont les plus petits, et les plus petits mesurent également ceux qui ont la même raison avec eux, l'antécédent l'antécédent, et le conséquent le conséquent (21. 7), et E est à Π comme O est à Δ ; donc E mesure O autant de fois que Π mesure Δ . Mais Δ n'est mesuré par aucun nombre, si ce n'est par A, B, Γ ; donc Π est un des nombres A, B, Γ . Qu'il soit B . A partir de E , prenons les nombres $E, \Theta K, \Lambda$ égaux en quantité aux nombres B, Γ, Δ . Mais les nombres $E, \Theta K, \Lambda$ sont en même raison que les nombres B, Γ, Δ ; donc, par égalité, B est à Δ comme E est à Λ ; donc le produit de B par Λ est égal au produit de Δ par E (19. 7). Mais le produit de Δ par E est égal au produit de Π par O ; donc le produit de Π par O est égal au produit

110 LE NEUVIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ὁ Π πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ο. Καὶ ἴσθιν ὁ Π τῷ Β ὁ αὐτός· καὶ ὁ Α ἄρα τῷ Ο ἴσθιν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ Ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ τις ἀριθμός, πᾶριξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ, καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τίλειος δὲ ἀριθμός ἴσθιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεισιν ἴσος ὢν· τίλειος ἄρα ἴσθιν ὁ ΖΗ. Ὅπερ ἔδει διῆξαι.

Et est Π cum ipso Β idem; et Α igitur cum ipso Ο est idem, quod impossibile, etenim Ο supponitur cum nullo ipsorum. expositorum idem; non igitur ipsum ΖΗ metitur aliquis numerus, præter ipsos Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ et unitatem. Et ostensus est ΖΗ ipsis Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ, et unitati æqualis; perfectus autem numerus est suis ipsius partibus æqualis existens; perfectus igitur est ΖΗ. Quod oportebat ostendere.

de Β par Α; donc Π est à Β comme Α est à Ο (19. 7). Mais Π est le même que Β; donc Α est le même que Ο, ce qui est impossible; car on a supposé que Ο n'était aucun des nombres Α, Β, Γ; donc aucun nombre ne mesure ΖΗ, si ce ne sont les nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ et l'unité. Mais on a démontré que ΖΗ égale la somme des nombres Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Α, Μ augmentée de l'unité, et un nombre parfait est celui qui est égal à ses parties (déf. 23. 7); donc ΖΗ est un nombre parfait. Ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU NEUVIÈME LIVRE.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἰνδύχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ. Εὐθεΐαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρήται.

DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quæ eâdem mensurâ mesurantur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam contingit communem mensuram esse.

3. Rectæ potentiâ commensurabiles sunt, quando ab eis quadrata eodem spatio mesurantur.

LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.

δ'. Ασύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γείσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει· καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθειῖσα εὐθεῖα, ῥητή.

ς'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴ τε μήκει καὶ δυνάμει, εἴ τε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετραγώνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῃ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῃ ἀσύμμετρα³, ἄλογα καλείσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεις αὐτά, ἄλογοι· εἰ μὲν τετραγωναί⁴ εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἑτέρα τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα⁵ αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράψουσαι.

4. Incommensurabiles autem, quando ab eis quadratorum nullum contingit spatium communem esse mensuram.

5. His suppositis, ostenditur propositæ rectæ esse rectas multitudine infinitas incommensurabiles, alias quidem longitudine solum, alias autem et potentiâ. Vocetur autem proposita recta, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine et potentiâ, sive potentiâ solum, rationales.

7. Sed huic incommensurabiles irrationales vocentur.

8. Et ipsum quidem a propositâ rectâ quadratum, rationale.

9. Et huic commensurabilia, rationalia.

10. Sed huic incommensurabilia, irrationalia vocentur.

11. Et quæ possunt illa, irrationales; si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si autem altera quæpiam rectilinea, latera a quibus æqualia illis quadrata describuntur.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationel le quarré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les-surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

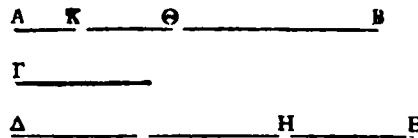
PROPOSITIO I.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἰκκειμένων, ἰὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρηθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίγνεται· λειφθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἴσται ἥλασσον τοῦ ἰκκειμένου ἥλασσονος μεγέθους.

Ἐστω δύο μέγεθη ἀνίστα τὰ AB, Γ, ὧν μείζον τὸ AB· λέγω ὅτι ἰὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρηθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίγνεται, λειφθήσεται τι μέγεθος ὃ ἴσται² ἥλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et ab eo quod reliquum est majus quam dimidium, et hoc semper fiat; relinquetur quædam magnitudo, quæ erit minor expositâ minori magnitudine.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB; dico si ab ipsâ AB auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relictum iri quamdam magnitudinem quæ erit minor magnitudine Γ.



Τὸ Γ γὰρ³ πολλαπλασιαζόμενον ἴσται πρὸς τὸ τοῦ AB⁴ μείζον. Πολλαπλασιάσθω, καὶ ἴστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῇ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ

Etenim Γ multiplicata erit aliquando ipsâ AB minor. Multiplicetur, et sit ΔΕ ipsius quidem Γ multiplex, ipsâ autem AB major, et dividatur ΔΕ in partes ipsi Γ æquales ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, et auferatur ab AB quidem ipsa ΒΘ major quam

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

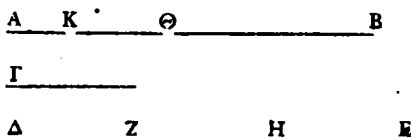
Soient deux grandeurs inégales AB, Γ; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur Γ.

Car Γ étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔΕ soit un multiple de Γ, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔΕ en parties ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ égales chacune à Γ; retranchons de AB une partie ΒΘ

114 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο αἰὶ γινώσθω ὥς ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γίνωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεων· ἕστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὔσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

dimidium ΒΘ, ab ΑΘ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium, et hoc semper fiat quoad divisiones ipsius ΑΒ multitudine æquales fiant ipsius ΔΕ divisionibus; sint igitur divisiones ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ multitudine æquales ipsis ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.



Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφήρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἕλασσον τοῦ ἡμίσεως⁵ τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ⁶ τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μείζον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφήρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ⁷ τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μείζον ἐστίν. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μείζον ἐστίν. Ἐλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μείζονος τὸ ΑΚ μέγεθος ἕλασσον ὃν τοῦ ἐκκειμένου ἕλασσονος μεγέθους τοῦ Γ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Et quoniam major est ΔΕ quam ΑΒ, et ablata est ab ΔΕ quidem ipsa ΕΗ minor quam dimidium, ab ΑΒ autem ipsa ΒΘ major quam dimidium; reliquum igitur ΗΔ reliquo ΘΑ majus est. Et quoniam major est ΗΔ quam ΘΑ, et ablatum est ab ipsâ quidem ΗΔ dimidium ΗΖ, ab ΘΑ autem ipsa ΘΚ major quam dimidium; reliquum igitur ΔΖ reliquo ΑΚ majus est. Æqualis autem ΔΖ ipsi Γ; et Γ igitur quam ΑΚ major est. Minor igitur ΑΚ quam Γ; relicta est igitur ex magnitudine ΑΒ magnitudo ΑΚ minor existens expositâ minore magnitudine Γ. Quod oportebat ostendere.

plus grande que sa moitié, de ΑΘ une partie ΘΚ plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de ΑΒ soit égal au nombre des divisions de ΔΕ; que le nombre des divisions ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ soit donc égal au nombre des divisions ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Puisque ΔΕ est plus grand que ΑΒ, et qu'on a retranché de ΔΕ une partie ΕΗ plus petite que sa moitié, et qu'on a retranché de ΑΒ une partie ΒΘ plus grande que sa moitié, le reste ΗΔ est plus grand que le reste ΘΑ. Et puisque ΗΔ est plus grand que ΘΑ, qu'on a retranché de ΗΔ sa moitié ΗΖ, et que de ΘΑ on a retranché ΘΚ plus grand que sa moitié, le reste ΔΖ sera plus grand que le reste ΑΚ. Mais ΔΖ est égal à Γ; donc Γ est plus grand que ΑΚ; donc ΑΚ est plus petit que Γ. Il reste donc de la grandeur ΑΒ une grandeur ΑΚ plus petite que la grandeur Γ, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

Ομοίως δὲ δειχθῆσονται, καὶ ἡμίση ἢ τὰ ἀφαιρούμενα.

Similiter autem demonstrabitur, et si dimidia essent ablata.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

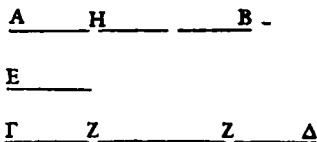
PROPOSITIO II.

Εὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρήῃ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γάρ μεγεθῶν ὄντων¹ ἀνίσων τῶν AB, ΓΔ, καὶ² ἐλάσσονος τοῦ AB, ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖται τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λίγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ AB, ΓΔ μεγέθη.

Si duabus magnitudinibus expositis inæqualibus, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metitur præcedentem; incommensurabiles erunt magnitudines.

Duabus enim magnitudinibus existentibus inæqualibus AB, ΓΔ, et minore AB, detractâ semper minore de majore, reliqua minimè metiatur præcedentem; dico incommensurabiles esse AB, ΓΔ magnitudines.



Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ³ E· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΔZ καταμετροῦν λιπείτω

Si enim sunt commensurabiles, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, si possibile, et sit E; et AB quidem ipsam AZ metiens relinquat

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; ces grandeurs seront incommensurables.

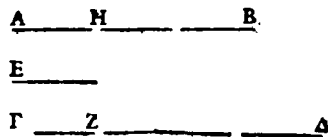
Soient les deux grandeurs inégales AB, ΓΔ; que AB soit la plus petite, et que la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent; je dis que les grandeurs AB, ΓΔ sont incommensurables.

Car si elles sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, s'il est possible, et que ce soit E; que AB mesurant ΔZ

116 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ κατα-
μετροῦν λιπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ
τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος,
ὃ ἴστιν ἔλασσον τοῦ Ε. Γεγονέντω, καὶ λειφθῶ
τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ
μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα

se ipsâ minorem ΓΖ; sed ΓΖ ipsam ΒΗ metiens
relinquat se ipsâ minorem ΑΗ, et hoc semper
fiat, quoad relinquitur aliqua magnitudo, quæ
sit minor quam Ε. Fiat, et relinquitur ΑΗ minor
quam Ε. Quoniam igitur Ε ipsam ΑΒ metitur, sed
ΑΒ ipsam ΔΖ metitur; et Ε igitur ipsam ΔΖ



τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ
λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ
μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ
καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει,
τὸ μείζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.
Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος·
ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam
igitur ΓΖ metietur. Sed ΓΖ ipsam ΒΗ metitur;
et Ε igitur ipsam ΒΗ metitur. Metitur autem et
totam ΑΒ; et reliquam igitur ΑΗ metietur,
major minorem, quod est impossibile. Non
igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ metietur aliqua
magnitudo; incommensurabiles igitur sunt mag-
nitudines ΑΒ, ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν, καὶ τὰ ἰζῆς.

Si igitur duabus magnitudinibus, etc.

laisse ΓΖ plus petit que lui; que ΓΖ mesurant ΒΗ laisse ΑΗ plus petit que lui; que
l'on fasse toujours la même chose jusqu'à ce qu'il reste une certaine grandeur qui
soit plus petite que Ε. Que cela soit fait, et qu'il reste ΑΗ plus petit que Ε
(1. 10). Puisque Ε mesure ΑΒ, et que ΑΒ mesure ΔΖ, Ε mesurera ΔΖ. Mais Ε
mesure ΓΔ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΓΖ. Mais ΓΖ mesure ΒΗ; donc
Ε mesure ΒΗ. Mais Ε mesure ΑΒ tout entier; donc Ε mesurera le reste ΑΗ, le plus
grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc aucune grandeur ne mesurera les
grandeurs ΑΒ, ΓΔ; donc les grandeurs ΑΒ, ΓΔ sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

PROPOSITIO III.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

Ἐστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα¹ τὰ AB, ΓΔ, ὧν ἴλαστον τὸ AB· δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB; oportet igitur ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.



Τὸ AB γὰρ μέγεθος ἤτοι² μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὐ.
Εἰ μὲν οὖν³ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ AB ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἴστί, καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον⁴· μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Etenim AB magnitudo vel metitur ΓΔ vel non. Si quidem metitur, metitur autem et se ipsam; ergo AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est, et manifestum est etiam maximam; major enim magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Μὴ μετρεῖται δὴ τὸ AB τὸ ΓΔ· καὶ ἀνθυπαίρουμένου αὖ τοῦ ἰλάσσοτος⁵ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ,

Non metiatur autem AB ipsam ΓΔ; et deducta semper minore de maiore, reliqua metietur aliquando præcedentem, propterea

PROPOSITION III.

Deux grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

Soient AB, ΓΔ les deux grandeurs commensurables données; que AB soit la plus petite; il faut trouver la plus grande commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ.

Car la grandeur AB mesure ΓΔ ou ne le mesure pas. Si AB mesure ΓΔ, à cause qu'il se mesure lui-même, AB sera une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ, et il est évident qu'elle en est la plus grande, car une grandeur plus grande que AB ne mesurera pas AB.

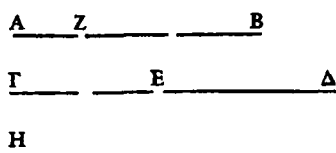
Mais que AB ne mesure pas ΓΔ. Retranchant toujours la plus petite de la plus grande, un reste mesurera enfin le reste précédent (2. 10), parce que les

διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΕΔ⁶ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἕλασεν τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἕλασεν τὸ ΑΖ, τὸ ΑΖ δὲ τὸ ΓΕ μετρίτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρίει, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρίει· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρίει δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔΕ μετρίει· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. Μετρίει δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρίει· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ

quod non sint incommensurabiles AB, ΓΔ; et AB quidem ipsam ΕΔ metiens relinquat se ipsā minorem ΕΓ, sed ΕΓ ipsam ΖΒ metiens relinquat se ipsā minorem ΑΖ, et ΑΖ ipsam ΓΕ metiatur.

Quoniam igitur ΑΖ ipsam ΓΕ metitur, sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et se ipsam; et totam igitur AB metietur ipsa ΑΖ. Sed AB ipsam ΔΕ metitur; et ΑΖ igitur ipsam ΔΕ metietur. Metitur autem et ipsam ΓΕ; et totam igitur ΓΔ me-



AB, ΓΔ μετρίει⁸. τὸ ΑΖ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινόν μέτρον ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μὴ, ἴσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ AB, ΓΔ. Ἐστω⁹ τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ AB μετρίει, ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΕΔ μετρίει· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρίει δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ¹⁰ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρίει· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρίει δὲ καὶ ὅλον τὸ AB· καὶ λοιπὸν¹¹ τὸ

titur; ergo ΑΖ ipsas AB, ΓΔ metitur; ergo ΑΖ ipsarum AB, ΓΔ communis mensura est. Dico et maximam. Si enim non, erit aliqua magnitudo maior ipsā ΑΖ, quæ metietur ipsas AB, ΓΔ. Sit H. Quoniam igitur H ipsam AB metitur, sed AB ipsam ΕΔ metitur; et H igitur ipsam ΕΔ metietur. Metitur autem et totam ΓΔ; et reliquam igitur ΓΕ metietur H. Sed ΓΕ ipsam ΖΒ metitur; et H igitur ipsam ΖΒ metietur. Metitur autem et totam AB; et reliquam

grandeurs AB, ΓΔ ne sont pas incommensurables; que AB mesurant ΕΔ laisse ΕΓ plus petit que lui; que ΕΓ mesurant ΖΒ laisse ΑΖ plus petit que lui, et enfin que ΑΖ mesure ΓΕ.

Puisque ΑΖ mesure ΓΕ, et que ΓΕ mesure ΖΒ, ΑΖ mesurera ΖΒ. Mais ΑΖ se mesure lui-même; donc ΑΖ mesurera AB tout entier. Mais AB mesure ΔΕ; donc ΑΖ mesurera ΔΕ. Mais il mesure ΓΕ; il mesure donc ΓΔ tout entier; donc ΑΖ mesure les grandeurs AB, ΓΔ; donc ΑΖ est une commune mesure des grandeurs AB, ΓΔ. Je dis aussi qu'il en est la plus grande. Car si cela n'est point, il y aura une certaine grandeur plus grande que ΑΖ qui mesurera AB et ΓΔ. Qu'elle soit H. Puisque H mesure AB, et que AB mesure ΕΔ, H mesurera ΕΔ. Mais H mesure ΓΔ tout entier; donc H mesurera le reste ΓΕ. Mais ΓΕ mesure ΖΒ; donc H mesurera ΖΒ. Mais il mesure AB tout entier; il mesurera donc le reste ΑΖ, le plus grand le

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 119

ΑΖ μετρήσει, τὸ μᾶλλον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μᾶλλον τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ¹² μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται τὸ ΑΖ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

igitur ΑΖ metietur, major minorem, quod est impossibile; non igitur major aliqua magnitudo ipsā ΑΖ ipsas ΑΒ, ΓΔ metietur; ergo ΑΖ ipsarum ΑΒ, ΓΔ maxima communis mensura est.

Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis ΑΒ, ΓΔ, maxima communis mensura inventa est ΑΖ. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρήῃ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metitur, et maximam ipsarum communem mensuram metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρήν.

PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

plus petit, ce qui est impossible. Donc quelque grandeur plus grande que ΑΖ ne mesurera pas ΑΒ et ΓΔ; donc ΑΖ est la plus grande commune mesure des grandeurs ΑΒ, ΓΔ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure ΑΖ des deux grandeurs commensurables données ΑΒ, ΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si une grandeur mesure deux grandeurs, elle mesure aussi leur plus grande commune mesure.

PROPOSITION IV.

Trois grandeurs commensurables étant données, trouver leur plus grande commune mesure.

120 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ
A, B, Γ· δεῖ δὴ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν
μέτρον εὑρεῖν.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles
A, B, Γ; oportet igitur ipsarum A, B, Γ maximam
communem mensuram invenire.

A _____
B _____
Γ _____
Δ _____
E _____

Εἰλήφθω γὰρ δύοι τῶν A, B τὸ μέγιστον
κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὲ Δ τὸ Γ
ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ². Μετρεῖται πρότερον. Ἐπεὶ
οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A, B·
τὸ Δ ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ³. τὸ Δ ἄρα⁴ τῶν
A, B, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερὸν ὅτι
καὶ μέγιστον, μείζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ
A, B οὐ μετρεῖ⁵.

Μὴ μετρεῖται δὲ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον
ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-
μετρά ἐστι τὰ A, B, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέ-
γεθος, ὃ διπλασθὲν καὶ τὰ A, B μετρήσει· ὥστε
καὶ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ με-
τρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον
μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστί

Sumatur enim duarum A, B maxima com-
munis mensura, et sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel
metitur vel non. Metiatur primum. Quoniam
igitur Δ ipsam Γ metitur; metitur autem et ipsas
A, B; ergo Δ ipsas A, B, Γ metitur; ergo Δ
ipsarum A, B, Γ communis mensura est. Mani-
festum est etiam et maximam, major enim mag-
nitudine Δ ipsas A, B non metitur.

Sed non metiatur Δ ipsam Γ. Dico primum
commensurabiles esse Γ, Δ. Quoniam enim
commensurabiles sunt A, B, Γ, metietur aliqua
eas magnitudo, quæ scilicet et ipsas A, B me-
tietur; quare et ipsarum A, B maximam com-
munem mensuram Δ metietur. Metitur autem
et Γ; quare dicta magnitudo metietur ipsas Γ, Δ;

Soient A, B, Γ les trois grandeurs commensurables données; il faut trouver la
plus grande commune mesure des grandeurs A, B, Γ.

Prenons la plus grande commune mesure de A et de B (3. 10), et qu'elle soit Δ;
Δ mesure Γ ou ne le mesure pas. Qu'il le mesure d'abord. Puisque Δ mesure
Γ, et qu'il mesure aussi A et B, Δ mesure les grandeurs A, B, Γ; donc Δ
est une commune mesure des grandeurs A, B, Γ. Et il est évident qu'il en est
la plus grande, car une grandeur plus grande que Δ ne mesure pas A et B.

Mais que Δ ne mesure pas Γ; je dis d'abord que les grandeurs Γ, Δ sont
commensurables. Car puisque les grandeurs A, B, Γ sont commensurables,
quelque grandeur les mesurera; mais cette même grandeur mesurera A et B;
elle mesurera donc leur plus grande commune mesure Δ. Mais cette même
grandeur mesure Γ; donc elle mesure Γ et Δ; donc Γ et Δ sont commensurables

τὰ Γ, Δ. Εἰλήφθω οὖν⁶ αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει⁷. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ⁸. τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν ἐστὶ μέτρον⁹. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε

commensurabiles igitur sunt Γ, Δ. Sumatur itaque ipsarum maxima communis mensura, et sit Ε. Quoniam igitur Ε ipsam Δ metitur, sed Δ ipsas Α, Β metitur; et Ε igitur ipsas Α, Β metietur. Metitur autem et Γ. Ergo Ε ipsas Α, Β, Γ metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ communis est mensura. Dico et maximam. Si enim possibile, sit

$\begin{array}{l} \text{A} \text{ ————— } \\ \text{B} \text{ ————— } \\ \text{Γ} \text{ ————— } \\ \text{Δ} \text{ ————— } \\ \text{Ε} \text{ ————— } \\ \text{Ζ} \text{ ————— } \end{array}$

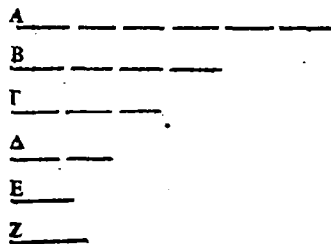
μείζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρίτω τὰ Α, Β, Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα¹⁰ μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β¹¹ μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ¹², τὸ μείζον τὸ ἑλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

aliqua ipsa Ε major magnitudo Ζ, et metiatur ipsas Α, Β, Γ. Et quoniam Ζ ipsas Α, Β, Γ metitur, et ipsas Α, Β igitur metietur; et ipsarum Α, Β maximam communem mensuram metietur. Sed ipsarum Α, Β maxima communis mensura est Δ; ergo Ζ ipsam Δ metitur. Metitur autem et ipsam Γ; ergo Ζ ipsas Γ, Δ metitur; et igitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram metietur Ζ. Sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est Ε; ergo Ζ ipsam Ε metitur, major minorem, quod est

(déf. 1. 10). Prenons donc leur plus grande commune mesure (3. 10), et qu'elle soit Ε. Puisque Ε mesure Δ, et que Δ mesure Α et Β, Ε mesurera Α et Β. Mais il mesure Γ; donc Ε mesure les grandeurs Α, Β, Γ; donc Ε est une commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ. Je dis aussi qu'elle en est la plus grande. Car que ce soit Ζ plus grand que Ε, si cela est possible, et que Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ. Puisque Ζ mesure les grandeurs Α, Β, Γ, il mesurera Α et Β; il mesurera donc la plus grande commune mesure de Α et Β (cor. 3. 10). Mais la plus grande commune mesure de Α et de Β est Δ; donc Ζ mesure Δ; mais il mesure Γ; donc Ζ mesure Γ et Δ; donc Ζ mesurera la plus grande commune mesure de Γ et de Δ. Mais la plus grande commune mesure de Γ et de Δ est Ε; donc Ζ mesure Ε, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible; donc une

122 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα μείζον τι τοῦ Ε μεγέθους μέγιστος τὰ Α, Β, Γ μείζον¹³ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέ-
impossible; non igitur major aliqua ipsa Ε mag-
nitudine magnitudo ipsas Α, Β, Γ magnitudines



γιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἢ ἂν¹⁴ μὴ μετρή· τὸ
Δ τὸ Γ· ἢ ἂν δὲ μετρή, αὐτὸ τὸ Δ.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων¹⁵,
τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρηται. Ὅπερ εἶδει
ποιῆσαι.

metitur; ergo Ε ipsarum Α, Β, Γ maxima
communis mensura est, si non metitur Δ ipsam
Γ; si autem metitur, ipsa Δ.

Tribus igitur magnitudinibus commensura-
libus datis, maxima communis mensura inventa
est. Quod oportebat facere.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἢ ἂν μέγιστος τρία
μεγέθη μετρή, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν
μέτρον μετρήσει¹⁶.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλείονων τὸ μέγιστον κοι-
νὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχω-
ρήσει¹⁷.

COROLLARIUM.

Ex hoc utique manifestum est, si magnitudo
tres magnitudines metitur, et maximam ipsarum
communem mensuram metiri.

Similiter autem et in pluribus maxima com-
munis mensura inveniatur, et corollarium pro-
cedet.

grandeur plus grande que la grandeur Ε ne mesurera pas les grandeurs Α, Β, Γ;
donc Ε sera la plus grande commune mesure des grandeurs Α, Β, Γ, si Δ ne
mesure pas Γ; et s'il le mesure, ce sera Δ.

On a donc trouvé la plus grande commune mesure de trois grandeurs com-
mensurables données. Ce qu'il fallait faire.

COROLLAIRE.

De là il est évident que si une grandeur mesure trois grandeurs, elle mesurera
aussi leur plus grande commune mesure.

On trouvera semblablement la plus grande commune mesure d'un plus grand
nombre de grandeurs, et le même corollaire s'en suivra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

PROPOSITIO V.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει,
ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

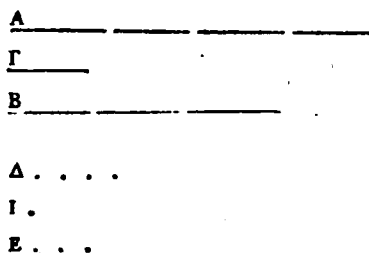
Ἐστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι
τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς
ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει
τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἴστω τὸ Γ. Καὶ
ὅσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρίῃ τοσαῦται μονάδεις ἴσ-
τωςαν ἐν τῷ Δ, ὅσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρίῃ το-
σαῦται μονάδεις ἴστωςαν ἐν τῷ Ε.

Commensurabiles magnitudines inter se ratio-
nem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines Α, Β;
dico Α ad Β rationem habere, quam numerus ad
numerum.

Quoniam enim commensurabiles sunt Α, Β,
metietur aliqua ipsas magnitudo. Metiatur, et
sit Γ. Et quoties Γ ipsam Α metitur tot unitates
sint in Δ, quoties autem Γ ipsam Β metitur tot
unitates sint in Ε.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρίῃ κατὰ τὰς ἐν τῷ
Δ μονάδας, μετρίῃ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ
τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν

Quoniam igitur Γ ipsam Α metitur per uni-
tates quæ in Δ, metitur autem et unitas ipsum Δ
per unitates quæ sunt in ipso; æqualiter igitur

PROPOSITION V.

Les grandeurs commensurables ont entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs commensurables Α, Β; je dis que Α a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car puisque les grandeurs Α, Β sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Γ. Qu'il y ait autant d'unités dans Δ que Γ mesure de fois Α; qu'il y ait aussi autant d'unités dans Ε que Γ mesure de fois Β.

Puisque Γ mesure Α par les unités qui sont en Δ, et que l'unité mesure Δ par les unités qui sont en lui, l'unité mesure le nombre Δ autant de fois que la

124 LE DIXIEME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Δ μετρεῖ ἀριθμὸν¹ καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἵπεί τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας.

unitas ipsum Δ metitur numerum atque Γ magnitudo ipsam Α; est igitur ut Γ ad Α ita unitas ad Δ; convertendo igitur, ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem. Rursus, quoniam Γ ipsam Β metitur per unitates quæ in Ε, metitur autem et unitas ipsum Ε per unitates quæ in ipso; æqualiter,

A _____
Γ _____
B _____
Δ
1 .
Ε . . .

ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως² ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διῶσιν ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὅν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

igitur unitas ipsum Ε metitur atque Γ ipsam Β; est igitur ut Γ ad Β ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Δ numerus ad Ε.

Commensurabiles igitur magnitudines Α, Β inter se rationem habent quam Δ numerus ad numerum Ε. Quod oportebat ostendere.

grandeur Γ mesure Α; donc Γ est à Α comme l'unité est à Δ; donc, par conversion, Α est à Γ comme Δ est à l'unité. De plus, puisque Γ mesure Β par les unités qui sont en Ε, et que l'unité mesure Ε par les unités qui sont en lui, l'unité mesure Ε autant de fois que Γ mesure Β; donc Γ est à Β comme l'unité est à Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc, par égalité, Α est à Β comme le nombre Δ est à Ε.

Donc les grandeurs commensurables Α, Β ont entr'elles la raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Σ'.

PROPOSITIO VI.

Εὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

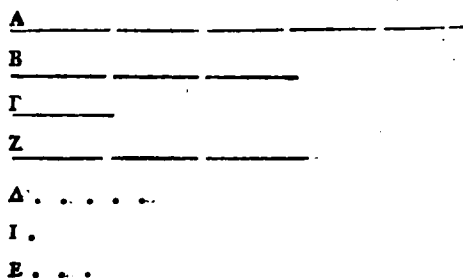
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδεις εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρησθῶ τὸ Α, καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδεις, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συκκίσθω τὸ Ζ.

Si duæ magnitudines inter se rationem habent quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Δ ad numerum Ε; dico commensurabiles esse Α, Β magnitudines.

Quot enim sunt in Δ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Γ; quot autem sunt in Ε unitates, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi Γ componatur Ζ.



Ἐπὶ οὖν ὅσαι εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδεις τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α

Quoniam igitur quot sunt in Δ unitates, tot sunt et in Α magnitudines æquales ipsi Γ; quæ pars igitur est unitas ipsius Δ, eadem pars est et Γ ipsius Α; est igitur ut Γ ad Α ita

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs ont entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront commensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β aient entr'elles la même raison que le nombre Δ a avec le nombre Ε; je dis que les grandeurs Α, Β sont commensurables.

Car que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Δ; que Γ soit égal à une de ces parties; et que Ζ soit composé d'autant de grandeurs égales à Ε qu'il y a d'unités en Ε.

Puisqu'il y a dans Α autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Δ, Γ sera la même partie de Α que l'unité l'est de Δ; donc Γ est à Α comme

126 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Γ⁵ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν⁶· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ⁷ ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε⁸. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ

unitas ad Δ. Metitur autem unitas ipsum Δ numerum; metitur igitur et Γ ipsam Α. Et quoniam est ut Γ ad Α ita unitas ad Δ numerum; convertendo igitur fit Α ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. Rursus, quoniam quot sunt in Ε unitates, tot sunt et in Ζ partes æquales ipsi Γ; est igitur ut Γ ad Ζ ita unitas ad Ε. Ostensum est autem et ut Α ad Γ ita Δ ad unitatem; ex æquo

A _____
B _____
Γ _____
Ζ _____
Δ
Ι .
Ε

οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διῶσου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ἔστι⁹ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α¹⁰ πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἔστι τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. Ἀλλὰ μετρεῖ¹¹ καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ Α τῷ Β.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

igitur est ut Α ad Ζ ita Δ ad Ε. Sed ut Δ ad Ε ita est Α ad Β; et ut igitur Α ad Β ita et Α ad Ζ; ergo Α ad utramque ipsarum Β, Ζ eandem habet rationem; æqualis igitur est Β ipsi Ζ. Metitur autem Γ ipsam Ζ; metitur igitur et Β. Sed metitur et Α; ergo Γ ipsas Α, Β metitur; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

l'unité est à Δ. Mais l'unité mesure le nombre Δ; donc Γ mesure Α. Et puisque Γ est à Α comme l'unité est au nombre Δ, par conversion Α est à Γ comme le nombre Δ est à l'unité. De plus, puisqu'il y a en Ζ autant de grandeurs égales à Γ qu'il y a d'unités en Ε, Γ sera à Ζ comme l'unité est au nombre Ε. Mais on a démontré que Α est à Γ comme Δ est à l'unité; donc par égalité Α est à Ζ comme Δ est à Ε. Mais Δ est à Ε comme Α est à Β; donc Α est à Β comme Α est à Ζ; donc Α a la même raison avec Β et avec Ζ; donc Β égale Ζ (g. 5). Mais Γ mesure Ζ; donc il mesure Β. Mais Γ mesure Α; donc Γ mesure Α et Β; donc Α est commensurable avec Β (déf. 1. 10). Donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντες ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρα ἴσιν τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐν αὐτῶν ἴσον ἴστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν εὐτὼς¹ τὸ Ε πρὸς τὸ² Α. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς

ALITER.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ; dico commensurabiles esse magnitudines.

Quot enim sunt in Γ unitates, in tot partes æquales dividatur Α, et uni ipsarum æqualis sit Ε; est igitur ut unitas ad Γ numerum ita Ε ad Α. Est autem et ut Γ ad Δ ita Α ad Β; ex æquo

A _____
B _____
E _____
Γ
Δ . . .
I .

τὸν Δ οὕτως³ τὸ Α πρὸς τὸ Β· διόσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως⁴ τὸ Ε πρὸς τὸ⁵ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ⁶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ⁷ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἐκότερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρα ἴσιν, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι⁸.

igitur est ut unitas ad Δ ita Ε ad Β. Metitur autem et unitas ipsum Δ; metitur igitur et Ε ipsam Β. Metitur autem et Ε ipsam Α, quoniam et unitas ipsum Γ; ergo Ε utramque ipsarum Α, Β metitur; ergo Α, Β commensurabiles sunt, et est ipsarum communis mensura Ε. Quod oportebat ostendere.

AUTREMENT.

Que les deux grandeurs Α et Β aient entr'elles la même raison que le nombre Γ avec le nombre Δ; je dis que ces grandeurs sont commensurables.

Que Α soit partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités en Γ, et que Ε soit égal à une de ces parties; l'unité sera au nombre Γ comme Ε est à Α. Mais Γ est à Δ comme Α est à Β; donc, par égalité, l'unité est à Δ comme Ε est à Β. Mais l'unité mesure Δ; donc Ε mesure Β. Mais Ε mesure Α, puisque l'unité mesure Γ; donc Ε mesure Α et Β; donc Α et Β sont commensurables, et Ε est leur commune mesure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ᾖσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεία ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν. Εὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἴσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ

A _____
 B _____
 Z _____
 Δ
 Ε

ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Αλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας².

Ex hoc utique manifestum est, si sint duo numeri ut Δ, Ε, et recta ut Α, possibile esse fieri ut Δ numerus ad Ε numerum ita rectam ad rectam. Si autem et ipsarum Α, Ζ media proportionalis sumatur ut Β, erit ut Α ad Ζ ita

quadratum ex Α ad ipsum ex Β, hoc est ut prima ad tertiam ita figura ex primâ ad ipsam ex secundâ, similem et similiter descriptam. Sed ut Α ad Ζ ita est Δ numerus ad Ε numerum; factum est igitur et ut Δ numerus ad Ε numerum ita figura ex rectâ Α ad ipsam ex rectâ Β.

C O R O L L A I R E.

De là il est évident que si l'on a deux nombres comme Δ et Ε, et une droite comme Α, il sera possible de faire en sorte que le nombre Δ soit au nombre Ε comme la droite Α est à une autre droite. Mais si l'on prend une moyenne proportionnelle comme Β entre Α et Ζ (cor. 20. 6), Α sera à Ζ comme le carré de Α est au carré de Β; c'est-à-dire que la première sera à la troisième, comme la figure décrite sur la première est à la figure semblable et semblablement décrite sur la troisième (cor. 20. 6). Mais Α est à Ζ comme le nombre Δ est au nombre Ε; on a donc fait de telle manière que le nombre Δ est au nombre Ε comme la figure décrite sur la droite Α est à la figure décrite sur la droite Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

PROPOSITIO VII.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐστὼ ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint incommensurabiles magnitudines Α, Β; dico Α ad Β rationem non habere quam numerus ad numerum.

$$\frac{A}{B}$$

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα, καὶ τὰ ἰζήσ.

Si enim habet Α ad Β rationem quam numerus ad numerum, commensurabilis erit Α ipsi Β. Non est autem; non igitur Α ad Β rationem habet quam numerus ad numerum.

Incommensurabiles igitur, etc.

PROPOSITION VII.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Soient les grandeurs incommensurables Α, Β; je dis que Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre.

Car si Α avait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre, Α serait commensurable avec Β (6. 10). Mais il ne l'est pas; donc Α n'a pas avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η.

PROPOSITIO VIII.

Εάν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον μὴ ἔχοντες ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐσσι τὰ Α, Β μεγέθη.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt magnitudines.

Duæ enim magnitudines Α, Β inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum; dico incommensurabiles esse Α, Β magnitudines.

A _____
B _____

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. Οὐκ ἔχει δὲ ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Εάν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si enim fuerit commensurabilis Α ipsi Β, rationem habebit quam numerus ad numerum. Non habet autem; incommensurabiles igitur sunt Α, Β magnitudines.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION VIII.

Si deux grandeurs n'ont pas entr'elles la même raison qu'un nombre a avec un nombre, ces grandeurs seront incommensurables.

Que les deux grandeurs Α, Β n'aient pas entr'elles la raison qu'un nombre a avec un nombre; je dis que les grandeurs Α, Β sont incommensurables.

Car si elles étaient commensurables, Α aurait avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais il ne l'a pas; donc les grandeurs Α, Β sont incommensurables; donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

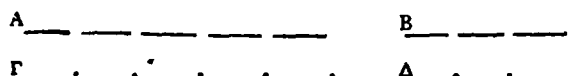
PROPOSITIO IX.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετρά-
γωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ἐν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τε-
τράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὅν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ
τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει σύμμετρος· τὰ δὲ ἀπὸ
τῶν μήκει ἀσύμμετρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς
ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὅτι τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα
τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὅτι τετρά-
γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ
τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμέτρος.

Εἰσὼσαν γάρ³ αἱ A, B μήκει σύμμετροι·

A rectis longitudine commensurabilibus qua-
drata inter se rationem habent quam quadratus
numerus ad quadratum numerum, et quadrata
inter se rationem habentia quam quadratus nu-
merus ad quadratum numerum et latera habe-
bunt longitudine commensurabilia; sed a rec-
tis longitudine incommensurabilibus quadrata
inter se rationem non habent quam quadratus
numerus ad quadratum numerum, et quadrata
inter se rationem non habentia quam quadratus
numerus ad quadratum numerum neque latera
habebunt longitudine commensurabilia.

Sint enim A, B longitudine commensurabiles;



λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ
ἀπὸ τῆς B τετράγωνον λόγον ἔχει ὅτι τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

dico ex A quadratum ad quadratum ex B ra-
tionem habere quam quadratus numerus ad qua-
dratum numerum.

PROPOSITION IX.

Les quarrés des droites commensurables en longueur ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ont leurs côtés commensurables en longueur; les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.

Car que les droites A, B soient commensurables en longueur; je dis que le quarré de A a avec le quarré de B la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ἡ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ⁵, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ⁶ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετραγώνος πρὸς τὸν τετραγώνον ἀριθμὸν⁷ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἐστὶν ἄρα καὶ⁸ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνον⁹.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνον¹⁰ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετραγώνον¹¹· λέγω ὅτι σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνον

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine; ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat eam quam Γ ad Δ. Quoniam igitur est ut A ad B ita Γ ad Δ, sed ipsius quidem ex A ad B rationis duplicata est ratio quadrati ex A ad quadratum ex B; similes enim figuræ in duplicatâ ratione sunt homologorum laterum; ipsius autem Γ ad Δ rationis duplicata est ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ, duorum enim quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus, et quadratus ad quadratum numerum duplicatam rationem habet ejus quam latus ad latus; est igitur et ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ.

At vero sit ut ex A quadratum ad quadratum ex B ita ex Γ quadratus ad quadratum ex Δ; dico commensurabilem esse A ipsi B longitudine. Quoniam enim est ut ex A

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, A aura avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Qu'il ait celle que Γ a avec Δ. Puisque A est à B comme Γ est à Δ; que la raison du quarré de A au quarré de B est double de la raison de A avec B, car les figures semblables sont en raison double de leurs côtés homologues (20. 6; que la raison du quarré de Γ au quarré de Δ est double de celle de Γ à Δ, car il y a un moyen proportionnel entre deux nombres quarrés (11. 8); et que le quarré d'un nombre a avec le quarré d'un nombre une raison double de celle d'un côté à un côté, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ.

Mais que le quarré de A soit au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ; je dis que A est commensurable en longueur avec B. Car puisque

γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B^{12} οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ^{13} . ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B^{14} λόγος διπλασίων ἐστὶ¹⁵ τοῦ

quadratum ad ipsum ex Γ ita ex Γ quadratus ad ipsum ex Δ ; sed quidem ex A quadrati ad ipsum ex B ratio duplicata est ipsius ex



τῆς A πρὸς τὴν B λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ^{16} τετραγώνου¹⁷ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ^{18} τετράγωνον¹⁹ λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ^{20} πρὸς τὸν Δ λόγου²¹. ἔστιν ἄρα καὶ ὥς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ Γ^{22} πρὸς τὸν Δ^{23} . ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ . σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει²⁴.

A ad B rationis, quadrati autem ex Γ ad quadratum ex Δ ratio duplicata est ipsius Γ ad ipsum Δ rationis; est igitur et ut A ad B ita Γ ad Δ ; ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad numerum Δ ; commensurabilis igitur est A ipsi B longitudine.

Ἀλλὰ δὴ²⁵ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ A τῇ B μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B^{26} λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον²⁷ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ A τῇ B μήκει²⁸. Οὐκ ἐστὶ δὲ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A

At vero incommensurabilis sit A ipsi B longitudine; dico ex A quadratum ad ipsum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim habet ex A quadratum ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum, commensurabilis erit A ipsi B longitudine. Non est autem; non

le carré de A est au carré de B comme le carré de Γ est au carré de Δ , que la raison du carré de A au carré de B est double de la raison de A à B (20. 6), et que la raison du carré de Γ au carré de Δ est double aussi de la raison de Γ à Δ (11. 8), A sera à B comme Γ est à Δ ; donc A a avec B la raison que le nombre Γ a avec le nombre Δ ; donc A est commensurable en longueur avec B (6. 10).

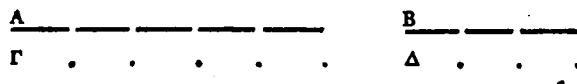
Mais que A soit incommensurable en longueur avec B ; je dis que le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Car si le carré de A avait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, A serait commensurable en longueur avec B . Mais

τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον²⁹ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ³⁰ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον³¹ λόγον μὴ ἔχεται ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

igitur ex A quadratum ad quadratum ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus denique ex A quadratum ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; dico



λίγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει. Εἰ γὰρ ἔσται³² σύμμετρος ἡ A τῇ B μήκει³³, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δὲ οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει, καὶ τὰ ἐξῆς.

incommensurabilem esse A ipsi B longitudine. Si enim fuerit commensurabilis A ipsi B longitudine, habebit ex A quadratum ad ipsum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Non habet autem; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine.

Ergo a rectis longitudine, etc.

cela n'est point; donc le carré de A n'a pas avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré.

De plus, que le carré de A au carré de B n'ait pas la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; je dis que A est incommensurable en longueur avec B. Car si A était commensurable en longueur avec B, le carré de A aurait avec le carré de B la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Mais il ne l'a pas; donc A n'est pas commensurable en longueur avec B; donc, etc.

ΑΛΛΩΣ.

Επεὶ γὰρ σύμμετρος ἔστιν ἡ Α τῇ Β μήκει¹, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ² πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω. Επεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ

A	—	—	—	—	—
Γ.	.	.	.	.	.
Ε.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τοῦτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως³ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ⁴ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ

ALITER.

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Γ ad Δ, et Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum E faciat, ipse autem Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Z faciat, et Δ se ipsum multiplicans ipsum H faciat. Quoniam itaque Γ se ipsum quidem multiplicans

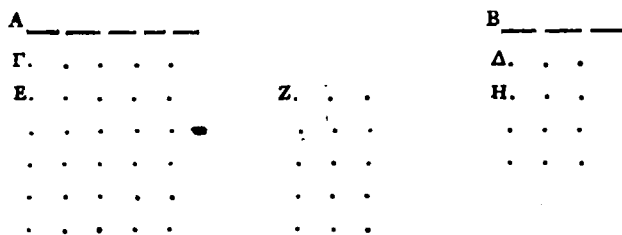
B	—	—	—
Δ.	.	.	.
Η.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

ipsum E fecit, ipsum vero Δ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad Δ, hoc est ut A ad B ita E ad Z. Sed ut A ad B ita ex A quadratum ad rectangulum sub A, B; est igitur ut ex A quadratum ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. Rursus, quoniam Δ se ipsum multiplicans ipsum H fecit, ipse vero Δ ipsum Γ multiplicans ipsum Z fecit; est igitur ut Γ ad

AUTREMENT.

Car puisque A est commensurable en longueur avec B, il a avec lui la raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Que ce soit celle que Γ a avec Δ; que Γ se multipliant lui-même fasse E, que Γ multipliant Δ fasse Z, et que Δ se multipliant lui-même fasse H. Puisque Γ se multipliant lui-même fait E, et que Γ multipliant Δ fait Z, Γ est à Δ, c'est-à-dire A est à B comme E est à Z (17. 7). Mais A est à B comme le quarré de A est au rectangle sous A, B (1. 6); donc le quarré de A est au rectangle sous A, B comme E est à Z. De plus, puisque Δ se multipliant lui-même a fait H, et que Δ multipliant Γ a fait Z, Γ est à Δ,

πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, του-
τέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν
Η. Αλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ
τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς
τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ
πρὸς τὸν Η. Αλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ
ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· διίσου
ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως
ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Ἐστὶ δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η
τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἔστιν, ὁ δὲ
Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
τετράγωνον ἀριθμὸν.



Αλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς
τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμι-
τρός ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει⁵. Ἐστω γὰρ τοῦ
μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ

Δ, hoc est ut A ad B, ita Z ad H. Sed ut
A ad B ita sub A, B rectangulum ad qua-
dratum ex B; est igitur ut sub A, B rectangulum
ad quadratum ex B ita Z ad H. Sed ut ex A
quadratum ad rectangulum sub A, B, ita erat
E ad Z; ex æquo igitur ut ex A quadratum ad
ipsum ex B ita erat E ad H. Est autem uterque ipso-
rum E, H quadratus, ipse quidem enim E ex Γ est,
ipse vero H ex Δ; ergo ex A quadratum ad
ipsum ex B rationem habet quam quadratus nu-
ad quadratum numerum.

At vero habeat ex A quadratum ad ipsum
ex B rationem quam quadratus numerus E ad
quadratum numerum H; dico commensura-
bilem esse A ipsi B longitudine. Sit enim ipsius
quidem E latus ipse Γ, ipsius autem H ipse Δ,

c'est-à-dire A est à B comme Z est à H (17. 7). Mais A est à B comme le rec-
tangle sous A, B est au carré de B (1. 6); donc le rectangle sous A, B est au
carré de B comme Z est à H. Mais le carré de A est au rectangle sous A, B
comme E est à Z; donc par égalité le carré de A est au carré de B comme E
est à H. Mais les nombres E, H sont des carrés, car E est le carré de Γ, et
H le carré de Δ; donc le carré de A a avec le carré de B la raison qu'un
nombre carré a avec un nombre carré.

Mais que le carré de A ait avec le carré de B la raison que le nombre
carré E a avec le nombre carré H; je dis que A est commensurable en lon-
gueur avec B. Car que Γ soit le côté de E, et Δ le côté de H, et que Γ multi-

τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἵπαι τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μείσον ἀνάλογόν ἐστι⁶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η⁷, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτίστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁸ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως⁹ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ¹⁰. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

et Γ ipsum Δ multiplicans ipsum Ζ faciat; ergo Ε, Ζ, Η deinceps sunt proportionales in ratione ipsius Γ ad Δ. Et quoniam ipsorum ex Α, Β medium proportionale est rectangulum sub Α, Β, ipsorum autem Ε, Η ipse Ζ; est igitur ut ex Α quadratum ad rectangulum sub Α, Β ita Ε ad Ζ. Ut autem sub Α, Β rectangulum ad quadratum ex Β ita Ζ ad Η, sed ut ex Α quadratum ad rectangulum sub Α, Β ita Α ad Β; ergo Α, Β commensurabiles sunt, rationem enim habent quam numerus Ε ad numerum Ζ, hoc est quam Γ ad Δ; ut enim Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; etenim Γ se ipsum quidem multiplicans ipsum Ε fecit, ipsum autem Δ multiplicans ipsum Ζ fecit; est igitur ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. Quod oportebat ostendere.

pliant Δ fasse Ζ, les nombres Ε, Ζ, Η seront successivement proportionnels dans la raison de Γ à Δ (17. 7). Et puisque le rectangle sous Α, Β est moyen proportionnel entre les quarrés de Α et de Β (1. 6), et que Ζ l'est entre Ε et Η (11. 8), le quarré de Α sera au rectangle sous Α, Β comme Ε est à Ζ. Mais le rectangle sous Α, Β est au quarré de Β comme Ζ est à Η, et le quarré de Α est au rectangle sous Α, Β comme Α est à Β; donc Α et Β sont commensurables, car ils ont la raison qu'a le nombre Ε avec le nombre Ζ, c'est-à-dire la raison que Γ a avec Δ; car Γ est à Δ comme Ε est à Ζ, puisque Γ se multipliant lui-même fait Ε, et que Γ multipliant Δ a fait Ζ; donc Γ est à Δ comme Ε est à Ζ (17. 7). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν¹ ἐκ τῶν διειρημένων ἵσταί² ὅτι αἱ μῆκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι³ οὐ πάντως καὶ μῆκει, καὶ αἱ μῆκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μῆκει⁴.

Εἴπερ γὰρ⁵ τὰ ἀπὸ τῶν μῆκει συμμέτρων εὐθεϊῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μῆκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ⁶ μῆκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ οὖν⁷ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μῆκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα

COROLLARIUM.

Et manifestum ex demonstratis erit, rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ, rectas autem potentiâ commensurabiles non semper et longitudine, et rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ incommensurabiles, rectas autem potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

Quoniam enim ex commensurabilibus longitudine rectis quadrata rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, magnitudines autem rationem habentes quam numerus ad numerum commensurabiles sunt; quare longitudine commensurabiles rectæ non solum sunt longitudine commensurabiles, sed etiam potentiâ.

Rursus, quoniam igitur quæcumque quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, longitudine ostensa sunt commensurabilia, et potentiâ latera existentia commensurabilia, cum ipsorum qua-

COROLLAIRE.

D'après ce qui a été démontré, il est évident que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance; que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur; que celles qui sont incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, et que celles qui sont incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

Car puisque les carrés des droites commensurables en longueur ont la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que les grandeurs qui ont la raison qu'un nombre a avec un nombre sont commensurables, les droites commensurables en longueur sont commensurables non seulement en longueur, mais encore en puissance.

De plus, puisqu'on a démontré que les carrés qui sont entr'eux comme un nombre carré est à un nombre carré, ont leurs côtés commensurables en longueur, et que des droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés

λόγον ἔχουν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ' ἀπλῶς ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει⁸, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα⁹ πάντως καὶ δυνάμει, τὰ¹⁰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ¹¹ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει¹². Επεὶ δὴ γὰρ¹³ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχουν ὃν ἀριθμὸς¹⁴ πρὸς ἀριθμὸν¹⁵, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὔσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ τῇ¹⁶ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύναται¹⁷ οὔσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει

drata rationem habeant quam numerus ad numerum; quæcumque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam numerus ad numerum, commensurabilia quidem erunt eadem quadrata potentiâ, non autem et longitudine; quare quadrata quidem longitudine commensurabilia omnino et potentiâ, quadrata autem potentiâ non semper et longitudine, nisi et rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico etiam rectas longitudine incommensurabiles non semper et potentiâ. Quoniam igitur rectæ potentiâ commensurabiles possunt rationem non habere quam numerus ad numerum, et idcirco potentiâ sunt commensurabiles, longitudine vero incommensurabiles; quare rectæ longitudine incommensurabiles non omnino et potentiâ, sed longitudine incommensurabiles existentes possunt potentiâ esse et commensurabiles et incommensurabiles.

Rectæ autem potentiâ incommensurabiles,

ont la raison qu'un nombre a avec un nombre, les quarrés qui n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et qui n'ont simplement que la raison qu'un nombre a avec un nombre, ont leurs côtés commensurables en puissance, mais non en longueur; donc les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, et les droites commensurables en puissance ne le sont pas toujours en longueur, à moins que leurs puissances n'ayent entre elles la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

Je dis aussi que les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance; car elles peuvent n'avoir pas la raison qu'un nombre a avec un nombre, et elles sont à cause de cela commensurables en puissance et incommensurables en longueur; donc les droites incommensurables en longueur ne le sont pas toujours en puissance, mais les droites incommensurables en longueur peuvent être commensurables et incommensurables en puissance.

Mais les droites incommensurables en puissance sont toujours incommensu-

140 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει¹⁸ σύμμετροι, ἴσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει¹⁹.

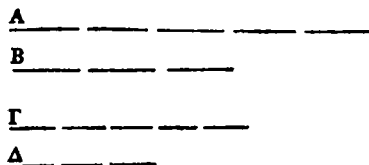
omnino et longitudine incommensurabiles; si enim commensurabiles, erunt et potentiâ commensurabiles. Supponuntur autem et incommensurabiles, quod est absurdum; rectæ igitur potentiâ incommensurabiles omnino et longitudine.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Εὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ διυτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἴσται· καὶ τὸ πρῶτον τῷ διυτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ¹ ἀσύμμετρον ἴσται.

PROPOSITIO X.

Si quatuor magnitudines proportionales sunt, prima autem secundæ commensurabilis est, et tertia quartæ commensurabilis erit; et si prima secundæ incommensurabilis est, et tertia quartæ incommensurabilis erit.



Εστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἴστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἴσται².

Sint quatuor magnitudines proportionales Α, Β, Γ, Δ, ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa Α autem ipsi Β commensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ commensurabilem fore.

rables en longueur; car si elles étaient commensurables en longueur, elles seraient commensurables en puissance. Mais on les suppose incommensurables, ce qui est absurde; donc les droites incommensurables en puissance le sont toujours en longueur.

PROPOSITION X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est commensurable avec la seconde, la troisième sera commensurable avec la quatrième; et si la première est incommensurable avec la seconde, la troisième sera incommensurable avec la quatrième.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ; que Α soit à Β comme Γ est à Δ; et que Α soit commensurable avec Β; je dis que Γ sera commensurable avec Δ.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 141

Επει γὰρ σύμμετρον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Αλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται³. Επει γὰρ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Εάν ἄρα τέσσαρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Λ Η Μ Μ Α.

Δίδεται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B, ergo A ad B rationem habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; et Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

At vero A ipsi B incommensurabilis sit; dico et Γ ipsi Δ incommensurabilem fore. Quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B; ergo A ad B rationem non habet quam numerus ad numerum. Atque est ut A ad B ita Γ ad Δ; neque Γ igitur ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum; incommensurabilis igitur est Γ ipsi Δ.

Si igitur quatuor, etc.

L E M M A.

Ostensum est in arithmeticiis similes planos numeros inter se rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et si

Car puisque A est commensurable avec B, A a avec B la même raison qu'un nombre a avec un nombre (5. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ a avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est commensurable avec Δ (6. 10.)

Mais que A soit incommensurable avec B; je dis que Γ sera incommensurable avec Δ. Car puisque A est incommensurable avec B, A n'a pas avec B la raison qu'un nombre a avec un nombre (7. 10). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc Γ n'a pas avec Δ la raison qu'un nombre a avec un nombre; donc Γ est incommensurable avec Δ; donc, etc.

L E M M E.

On a démontré dans les livres d'arithmétique (26. 8) que les nombres plans semblables ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

μόν· καὶ ὅτι ἰὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτίστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

duo numeri inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes esse planos. Et manifestum est ex his, non similes planos numeros, hoc est non proportionalia habentes latera, inter se rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim haberent, similes plani essent, quod non supponitur; ergo non similes plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ Α· δι' δὲ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

PROPOSITIO XI.

Propositæ rectæ invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram autem et potentiâ.

Sit proposita recta A; oportet igitur ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine solum, alteram autem et potentiâ.

et que si deux nombres ont entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, ces nombres sont des plans semblables. De là il est évident que des nombres plans non semblables, c'est-à-dire des nombres plans qui n'ont pas leurs côtés proportionnels, n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré. Car s'ils l'avaient, ils seraient des plans semblables, ce qui n'est pas supposé; donc des plans non semblables n'ont pas la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré.

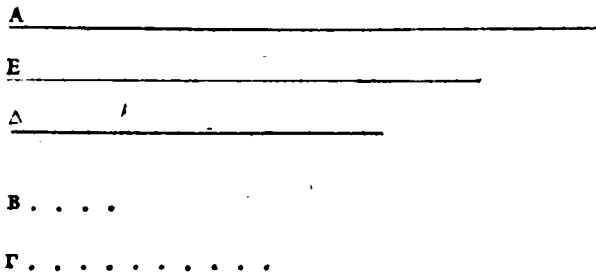
PROPOSITION XI.

Trouver deux droites incommensurables avec la droite proposée, l'une en longueur seulement, et l'autre en puissance.

Soit A la droite proposée; il faut trouver deux droites incommensurables avec A, l'une en longueur seulement, et l'autre en longueur et en puissance.

Εκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τουτίσστι μὴ ὁμοιοὶ ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἱμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. Καὶ ἵππει ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

Exponentur enim duo numeri Β, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est non similes plani, et fiat ut Β ad Γ ita ex Α quadratum ad quadratum ex Δ, hoc enim tradidimus; commensurable igitur ex Α quadratum ipsi ex Δ. Et quoniam Β ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non igitur ex Α quadratum ad ipsum ex Δ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommen-



ἀριθμοί· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. Εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἴσθιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ

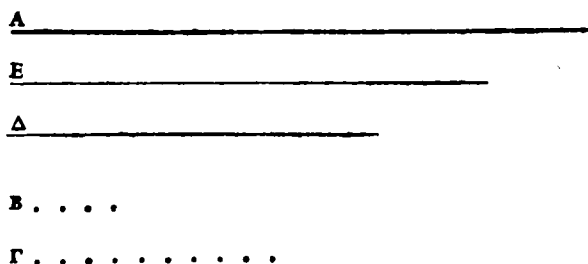
surabilis igitur est Α ipsi Δ longitudine. Sumatur ipsarum Α, Δ media proportionalis Ε; est igitur ut Α ad Δ ita ex Α quadratum ad ipsum ex Ε. Incommensurabilis autem est Α ipsi Δ longitudine; incommensurable igitur est

Car soient deux nombres Β, Γ qui n'ayent pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, c'est-à-dire qui soient deux plans non semblables; et faisons en sorte que Β soit à Γ comme le quarré de Α est au quarré de Δ, ce que nous avons déjà enseigné (cor. 6. 10); le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de Δ. Et puisque Β n'a pas avec Γ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de Α n'aura pas avec le quarré de Δ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc Α est incommensurable en longueur avec Δ (9. 10). Prenons une moyenne proportionnelle Ε entre Α et Δ, Α sera à Δ comme le quarré de Α est au quarré de Ε (cor. 2. 6). Mais Α est incommensurable en longueur avec Δ; donc le quarré de Α est incommensurable avec le quarré

144 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετρά-
γωνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει·

et ex A quadratum ipsi ex E quadrato; incom-
mensurabilis igitur est A ipsi E potentia; ergo



τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσύρνηται
δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν
μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε³.
Οπιρ εἶδει δεῖξαι.

propositæ rectæ A inventæ sunt duæ rectæ
incommensurabiles ipsæ Δ, Ε; longitudine
quidem tantum ipsa Δ, potentia autem et longi-
tudine scilicet ipsa Ε. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

PROPOSITIO XII.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις
ἐστὶ σύμμετρα.

Εκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμε-
τρον· λόγῳ ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

Επεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α
ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς

Eidem magnitudini commensurabiles et
inter se sunt commensurabiles.

Utraque enim ipsarum Α, Β ipsi Γ sit commen-
surabilis; dico et Α ipsi Β esse commensurabilem.

Quoniam enim commensurabilis est Α ipsi Γ,
ergo Α ad Γ rationem habet quam numerus ad

de Ε (10. 10); donc Α est incommensurable en puissance avec Ε. On a donc
trouvé pour la droite proposée Α deux droites incommensurables Δ, Ε, savoir
la droite Δ en longueur seulement, et la droite Ε en puissance et en longueur.
Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XII.

Les grandeurs qui sont commensurables avec une même grandeur sont com-
mensurables entr'elles.

Que chacune des grandeurs Α, Β soit commensurable avec Γ; je dis que Α est
commensurable avec Β.

Car puisque Α est commensurable avec Γ, Α a avec Γ la raison qu'un nombre

ἀριθμόν. Εἰτά ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρον ἔστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εἰτά ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων δοθέντων ὁποῦν, τοῦτε ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰληφθῶσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς δοθείσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

numerus. Habeat quam Δ ad Ε. Rursus, quoniam commensurabilis est Β ipsi Γ, ergo Γ ad Β rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat quam Ζ ad Η. Et rationibus datis quibuscumque, et ipsa quam habet Δ ad Ε et Ζ ad Η, sumantur numeri Θ, Κ, Λ deinceps in datis rationibus, et sit ut quidem Δ ad Ε ita Θ ad Κ, ut autem Ζ ad Η ita Κ ad Λ.

Α _____	Δ	Ζ	Θ
Γ _____	Ε	Η	Κ
Β _____			Λ

Επεὶ οὖν ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· διόσου ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει

Quoniam igitur est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, sed ut Δ ad Ε ita Θ ad Κ; est igitur et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ. Rursus, quoniam est ut Γ ad Β ita Ζ ad Η, sed ut Ζ ad Η ita Κ ad Λ; et ut igitur Γ ad Β ita Κ ad Λ. Est autem et ut Α ad Γ ita Θ ad Κ; ex æquo igitur est ut Α ad Β ita Θ ad Λ; ergo Α ad Β rationem habet

a avec un nombre (5. 10.); qu'il ait celle que Δ a avec Ε. De plus, puisque Β est commensurable avec Γ, Γ a avec Β la raison qu'un nombre a avec un nombre. Qu'il ait celle que Ζ a avec Η. La raison que Δ a avec Ε, et celle que Ζ a avec Η étant données, prenons les nombres Θ, Κ, Λ successivement proportionnels dans les raisons données, de manière que Δ soit à Ε comme Θ est à Κ, et que Ζ soit à Η comme Κ est à Λ.

Puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que Δ est à Ε comme Θ est à Κ, Α sera à Γ comme Θ est à Κ. De plus, puisque Γ est à Β comme Ζ est à Η, et que Ζ est à Η comme Κ est à Λ, Γ est à Β comme Κ est à Λ. Mais Α est à Γ comme Θ est à Κ; donc, par égalité, Α est à Β comme Θ est à Λ (23. 5); donc Α a avec Β la raison que le

146 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὅν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Α· σύμμετρον · quam numerus Θ ad numerum Α; commensurabilis igitur est Α ipsi Β.

ἄρα ἔστι τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Ergo eidem, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εάν ᾗ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾗ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἑτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Εστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.

PROPOSITIO XIII.

Si sunt duæ magnitudines, et altera quidem commensurabilis est eidem, altera autem incommensurabilis; incommensurabiles erunt magnitudines.

Sint enim duæ magnitudines Α, Β, alia autem Γ, et quidem Α ipsi Γ commensurabilis sit, sed Β ipsi Γ incommensurabilis; dico et Α ipsi Β incommensurabilem esse.

A
Γ
B

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν. Ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Si enim est commensurabilis Α ipsi Β, est autem et Γ ipsi Α; et Γ igitur ipsi Β commensurabilis est. Quod non supponitur.

nombre Θ a avec le nombre Α; donc Α est commensurable avec Β (6. 10).
Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Si l'on a deux grandeurs; que l'une d'elles soit commensurable avec une troisième, et que l'autre ne lui soit pas commensurable, ces deux grandeurs seront incommensurables.

Soient les deux grandeurs Α, Β, et une autre grandeur Γ; que Α soit commensurable avec Γ, et que Β soit incommensurable avec Γ; je dis que Α est incommensurable avec Β.

Car si Α était commensurable avec Β, à cause que Γ est commensurable avec Α, Γ serait commensurable avec Β (12. 10). Ce qui n'est pas supposé.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

PROPOSITIO XIV.

Εάν ἡ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὲ ἀσύμμετρον ᾗ· καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἴσται.

Si sunt duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini alicui incommensurabilis est; et reliqua eidem incommensurabilis erit.

Ἐστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῃ τινὲ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἴστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Sint duæ magnitudines commensurabiles Α, Β; altera autem ipsarum Α alii alicui Γ incommensurabilis sit; dico et reliquam Β ipsi Γ incommensurabilem esse.

A _____
Γ _____
B _____

Εἰ γὰρ ἴσται σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστι· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Si enim est commensurabilis Β ipsi Γ, sed et Α ipsi Β commensurabilis est; et Α igitur ipsi Γ commensurabilis est. Sed et incommensurabilis, quod impossibile; non igitur commensurabilis est Β ipsi Γ; incommensurabilis igitur.

Εάν ἄρα ἡ δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

Si igitur sunt duæ magnitudines, etc.

PROPOSITION XIV.

Si deux grandeurs sont commensurables, et si l'une d'elles est incommensurable avec une autre grandeur, la grandeur restante sera aussi incommensurable avec celle-ci.

Soient les deux grandeurs commensurables Α, Β, et que l'une d'elles soit incommensurable avec Γ; je dis que la grandeur restante Β sera aussi incommensurable avec Γ.

Car si Β était commensurable avec Γ, à cause que Α est commensurable avec Β, Α serait commensurable avec Γ (12. 10). Mais Α est incommensurable avec Γ, ce qui est impossible; donc Β n'est pas commensurable avec Γ; donc il lui est incommensurable. Donc, etc.

ΛΗΜΜΑ.

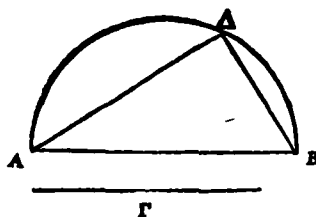
LEMMA.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὐρεῖν τίνι μᾶλλον δύναται ἢ μᾶλλον τῆς ἰσότητος.

Εστωσαν αἱ δοθείσαι δύο ἀνισοὶ εὐθεῖαι, αἱ AB, Γ, ὧν μᾶλλον ἴστω ἡ AB· δεῖ δὲ εὐρεῖν τίνι μᾶλλον δύναται ἢ AB τῆς Γ.

Duabus datis rectis inæqualibus, invenire id quo plus potest major quam minor.

Sint datæ duæ inæquales rectæ AB, Γ, quarum major sit AB; oportet igitur invenire id quo plus potest AB quam Γ.



Γιγράσθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιος, τὸ AΔB, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ AΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔB. Φανερὸν δὲ ὅτι ὀρθὴ ἔστιν ἡ ὑπὸ AΔB γωνία, καὶ ὅτι ἡ AB τῆς AΔ, τουτίστι τῆς Γ, μᾶλλον δύναται τῇ ΔB.

Ομοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμὴν αὐτὰς εὐρίσκεται οὕτως.

Describatur super rectam AB semicirculus AΔB, et in eo aptetur ipsi Γ æqualis AΔ, et jungatur ΔB. Evidens igitur rectum esse AΔB angulum, et AB quam AΔ, hoc est quam Γ, plus posse quadrato ex ΔB.

Similiter autem et datis rectis, quæ potest ipsas invenietur hoc modo.

L E M M E.

Deux droites inégales étant données, trouver ce dont le puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite.

Soient AB, Γ les deux droites inégales données; que AB soit la plus grande; il faut trouver ce dont la puissance de AB surpasse la puissance de Γ.

Décrivons sur AB le demi-cercle AΔB, adaptons dans ce demi-cercle une droite AΔ égale à Γ (1. 4), et joignons ΔB. Il est évident que l'angle AΔB est droit (31. 3), et que la puissance de AB surpasse la puissance de AΔ, c'est-à-dire de Γ, du carré de ΔB (47. 1).

On trouvera de la même manière la droite dont la puissance égale la somme des puissances de deux droites données.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 149

Εστωσαν αἱ δύο ὑπερβαίνει δοθεῖσαι³ αἱ $ΑΔ$, $ΔΒ$ · καὶ δέον ἔστω εὐρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτάς. Κείσθωσαν⁴ γὰρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ $ΑΔΒ$, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ $ΑΒ$ · φανερόν παλιν, ὅτι ἡ τὰς $ΑΔ$, $ΔΒ$ δυναμένη ἐστὶν ἡ $ΑΒ$.

Sint duæ rectæ datæ $ΑΔ$, $ΔΒ$; et oporteat invenire rectam quæ possit ipsas. Ponantur enim, ut rectum angulum $ΑΔΒ$ contineant, et jungatur $ΑΒ$; perspicuum est rursus, ipsas $ΑΔ$, $ΔΒ$ rectam posse $ΑΒ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Εὰν τέσσαρες ὑπερβαίνει ἀνάλογον ᾗσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ¹· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυήσεται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ². Καὶ εἰ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον δύνηται, τῇ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ³· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυήσεται τῇ ἀπὸ ἀσυνμέτρου ἑαυτῇ⁴.

Εστωσαν δὴ⁵ τέσσαρες ὑπερβαίνει ἀνάλογον αἱ $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$, ὥς ἡ $Α$ πρὸς τὴν $Β$ οὕτως ἡ $Γ$ πρὸς τὴν $Δ$, καὶ ἡ $Α$ μὲν τῆς $Β$ μείζον δυνασθῇ τῇ

PROPOSITIO XV.

Si quatuor rectæ proportionales sunt, plus potest autem prima quam secunda, quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si prima quam secunda plus potest, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et tertia quam quarta plus poterit, quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

Sint igitur quatuor rectæ proportionales $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$, ut $Α$ ad $Β$ ita $Γ$ ad $Δ$, et $Α$ quidem quam $Β$ plus possit quadrato ex $Ε$, sed $Γ$ quam $Δ$ plus

Soient $ΑΔ$ et $ΔΒ$ les deux droites données, il faut trouver la droite dont la puissance égale la somme des puissances de ces deux droites; que ces droites soient placées de manière qu'elles comprennent un angle droit $ΑΔΒ$, et joignons $ΑΒ$; il est évident encore que la puissance de $ΑΒ$ égale la somme des puissances des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ (47. 1).

PROPOSITION XV.

Si quatre droites sont proportionnelles, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite commensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera commensurable avec la troisième, et si la puissance de la première surpasse la puissance de la seconde du carré d'une droite incommensurable avec la première, la puissance de la troisième surpassera la puissance de la quatrième du carré d'une droite qui sera incommensurable avec la troisième.

Soient les quatre droites proportionnelles $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$, de manière que $Α$ soit à $Β$ comme $Γ$ est à $Δ$; que la puissance de $Α$ surpasse la puissance de $Β$ du

ἀπὸ τῆς E, ἢ δὲ Γ τῆς Δ μείζον δυνάσθαι τῇ ἀπὸ τῆς Z· λίγω ὅτι εἴτε σύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ⁶ E, σύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ Γ τῇ Z· εἴτε ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ E, ἀσύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ Γ τῇ Z.

possit quadrato ex Z; dico et si commensurabilis sit A ipsi E, commensurabilem esse et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis sit A ipsi E incommensurabilem esse et Γ ipsi Z.

A _____
B _____
E _____

Γ _____
Δ _____
Z _____

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν A, B, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ⁸ τὰ ἀπὸ τῶν Z, Δ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν E, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῶν Z, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἡ E πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Z πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν⁹ ὡς ἡ B πρὸς τὴν E οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Z. Ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δίδου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν E οὕτως ἡ Γ πρὸς

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; est igitur et ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex Γ quadratum ad ipsum ex Δ. Sed ipsi quidem quadrato ex A æqualia sunt ex E, B quadrata, sed ex Γ quadrato æqualia sunt ex Z, Δ quadrata; sunt igitur ut ex E, B quadrata ad ipsum ex B ita ex Z, Δ quadrata ad ipsum ex Δ; dividendo igitur est ut ex E quadratum ad ipsum ex B ita ex Z quadratum ad ipsum ex Δ; est igitur et ut E ad B ita Z ad Δ; convertendo igitur est ut B ad E ita Δ ad Z. Est autem et ut A ad B ita Γ ad Δ; ex æquo igitur est ut A ad E ita Γ ad Z; et si igitur

quarré de la droite E, et que la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré de la droite Z; je dis que si A est commensurable avec E, Γ le sera avec Z; et que si A est incommensurable avec E, Γ le sera aussi avec Z.

Car puisque A est à B comme Γ est à Δ, le quarré de A sera au quarré de B comme le quarré de Γ est au quarré de Δ (cor. 1. 22. 6). Mais la somme des quarrés de E et de B est égale au quarré de A, et la somme des quarrés de Z et de Δ est égale au quarré de Γ; donc la somme des quarrés de E et de B est au quarré de B comme la somme des quarrés de Z et de Δ est au quarré de Δ; donc, par soustraction, le quarré de E est au quarré de B comme le quarré de Z est au quarré de Δ (17. 5); donc E est à B comme Z est à Δ (22. 6); donc, par conversion, B est à E comme Δ est à Z (4. 5). Mais A est à B comme Γ est à Δ; donc, par égalité, A est à E comme Γ est à Z (22. 5); donc si A est commensurable avec

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 151

τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν¹⁰ ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Εὰν ἄρα τέσσαρες, καὶ τὰ ἐξῆς.

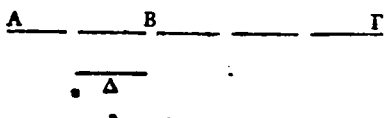
commensurabilis est A ipsi E, commensurabilis est et Γ ipsi Z; et si incommensurabilis est A ipsi E, incommensurabilis est et Γ ipsi Z.

Si igitur quatuor, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντιθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῃ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῃ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ σύμμετρον¹.



Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Επεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ

Si duæ magnitudines commensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum commensurabilis erit; et si tota uni ipsarum commensurabilis est, et quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles ΑΒ, ΒΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ esse commensurabilem.

Quoniam enim commensurabiles sunt ΑΒ, ΒΓ, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur, et totam ΑΓ metietur. Metitur autem et ΑΒ, ΒΓ

E, la droite Γ le sera avec Z; et si A est incommensurable avec E, la droite Γ le sera avec Z (10. 10). Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

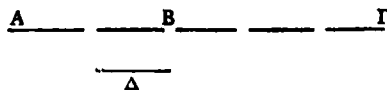
Si l'on ajoute deux grandeurs commensurables, leur somme sera commensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est commensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront commensurables.

Ajoutons les deux grandeurs commensurables ΑΒ, ΒΓ; je dis que la grandeur entière ΑΓ est commensurable avec chacune des grandeurs ΑΒ, ΒΓ.

Car, puisque les grandeurs ΑΒ, ΒΓ sont commensurables, quelque grandeur les mesurera (déf. 1. 10). Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΑΒ et ΒΓ, il mesurera leur somme ΑΓ. Mais il mesure ΑΒ et ΒΓ,

AB, BG· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG, AG² μετρεῖ·
σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AG ἑκατέρῃ τῶν AB, BG.

Αλλὰ δὴ τὸ AG ἐνὶ τῶν AB, BG ἴστω σύμμετρον, ἴστω δὴ τῇ AB³· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ AB, BG σύμμετρά ἐστιν.



Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ AG, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖτω, καὶ ἴστω τὸ Δ. Επεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BG μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BG μετρήσει· σύμμετρά ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BG.

Εὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ.

Εὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῃ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἴσται. Καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἴσται.

ergo Δ ipsas AB, BG, AG metitur; commensurabilis igitur est AG utrique ipsarum AB, BG.

At vero AG uni ipsarum AB, BG sit commensurabilis, sit igitur ipsi AB; dico et AB, BG commensurabiles esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt AG, AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, AB metitur, et reliquam igitur BG metietur. Metitur autem et AB; ergo Δ ipsas AB, BG metitur; commensurabiles igitur sunt AB, BG.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

PROPOSITIO XVII.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componuntur, et tota utrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota uni ipsarum incommensurabilis est, et quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

donc Δ mesure les grandeurs AB, BG, AG; donc AG est commensurable avec AB et BG.

Mais que AG soit commensurable avec une des grandeurs AB, BG; qu'il le soit avec AB; je dis que les grandeurs AB, BG sont commensurables.

Car puisque les grandeurs AG, AB sont commensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure ΓΑ et AB, il mesurera le reste BG. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et BG; donc les grandeurs AB, BG sont commensurables. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

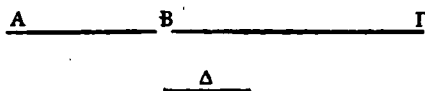
Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables, leur somme sera incommensurable avec chacune d'elles; et si leur somme est incommensurable avec une d'elles, les grandeurs proposées seront incommensurables.

Συγκρίσθω¹ γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ AB, BΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρίτω, καὶ ἴστω, εἰ δυνατόν, τὸ Δ². Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BΓ· ὑπέκκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον³. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, AB μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, AB. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles AB, BΓ; dico et totam ΑΓ utrique ipsarum AB, BΓ incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles ΓΑ, AB, metietur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit, si possibile, ipsa Δ. Quoniam igitur Δ ipsas ΓΑ, AB metitur, et reliquam igitur BΓ metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas AB, BΓ metitur; commensurabiles igitur sunt AB, BΓ. Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas ΓΑ, AB metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt ΓΑ, AB. Similiter utique demonstrabimus et ΑΓ, ΓΒ incommensurabiles esse; ergo ΑΓ utrique ipsarum AB, BΓ incommensurabilis est.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἐνὶ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρον ἴστω, καὶ⁴ πρῶτον τῷ AB· λέγω ὅτι καὶ τὰ AB, BΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. Εἰ γὰρ ἴσται⁵ σύμ-

At vero ΑΓ uni ipsarum AB, BΓ incommensurabilis sit, et primum ipsi AB; dico et AB, BΓ incommensurabiles esse. Si enim essent

Soient ajoutées les deux grandeurs incommensurables AB, BΓ; je dis que leur somme ΑΓ est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, BΓ.

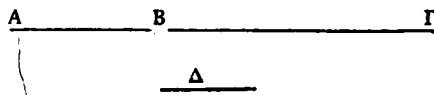
Car si les grandeurs ΓΑ, AB ne sont pas incommensurables, quelque grandeur les mesurera. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ, si cela est possible. Puisque Δ mesure ΓΑ et AB, il mesurera le reste BΓ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure AB et BΓ; donc AB et BΓ sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas ΓΑ et AB; donc ΓΑ et AB sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que ΑΓ et ΓΒ sont incommensurables; donc ΑΓ est incommensurable avec chacune des grandeurs AB, BΓ.

Mais que ΑΓ soit incommensurable avec une des grandeurs AB, BΓ, et qu'il le soit d'abord avec AB; je dis que AB et BΓ sont incommensurables. Car s'ils étaient

154 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρεῖται, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ AB, BΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ AΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓA, AB μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓA, AB. Ὑπείκειτο δὲ

commensurabiles, metiretur aliqua eas magnitudo. Metiatur, et sit Δ. Quoniam igitur Δ ipsas AB, BΓ metitur, et totam igitur AΓ metietur. Metitur autem et ipsam AB; ergo Δ ipsas ΓA, AB metitur; commensurabiles igitur sunt ΓA, AB.



καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ AB, BΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BΓ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ AΓ τῇ ΓB ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ AB, BΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Supponebantur autem et incommensurabiles, quod est impossibile; non igitur ipsas AB, BΓ metietur aliqua magnitudo; incommensurabiles igitur sunt AB, BΓ. Similiter utique demonstrabimus si AΓ ipsi ΓB incommensurabilis sit, etiam AB, BΓ incommensurabiles fore.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur duæ magnitudines, etc.

Λ Η Μ Μ Α.

L E M M A.

Ἐὰν παρὰ τινὰ εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Si ad aliquam rectam applicetur parallelogrammum, deficiens figurâ quadratâ; applicatum æquale est rectangulo sub factis ex applicatione partibus rectæ.

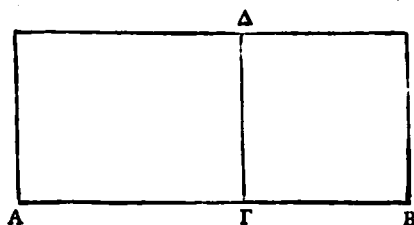
commensurables, quelque grandeur les mesurerait. Que quelque grandeur les mesure, et que ce soit Δ. Puisque Δ mesure AB et BΓ, il mesurera leur somme AΓ. Mais il mesure AB; donc Δ mesure ΓA et AB; donc ΓA et AB sont commensurables. Mais on les a supposées incommensurables, ce qui est impossible; donc quelque grandeur ne mesurera pas AB et BΓ; donc AB et BΓ sont incommensurables. Nous démontrerons semblablement que si AΓ est incommensurable avec ΓB, les grandeurs AB, BΓ seront aussi incommensurables. Donc, etc.

L E M M E.

Si à une droite quelconque on applique un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, le parallélogramme appliqué est égal au rectangle compris sous les parties de la droite faites par l'application.

Παρά γάρ τινα εὐθεΐαν τὴν AB παρασκευάσθω παραλληλόγραμμον τὸ AD , ἑλλειπόν εἶδος τετραγώνῳ τῷ $ΔB$. λέγω ὅτι ἴσον ἴστί τὸ AD τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur parallelogrammum AD , deficiens figurâ quadratâ $ΔB$; dico æquale esse parallelogrammum AD rectangulo sub $ΑΓ, ΓB$.



Καὶ ἴστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ $ΔB$, ἴση ἴστίς ἡ $ΔΓ$ τῇ $ΓB$, καὶ ἴστί τὸ AD τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΔ$, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓB$.

Atque est hoc evidens; quoniam enim quadratum est $ΔB$, æqualis est $ΔΓ$ ipsi $ΓB$, atque est rectangulum AD sub $ΑΓ, ΓΔ$, hoc est sub $ΑΓ, ΓB$.

Εὰν ἄρα παρά τινα εὐθεΐαν, καὶ τὰ ἰζῆς.

Si igitur ad aliquam rectam, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ, ιθ'.

PROPOSITIO XVIII.

Εὰν ᾖσι δύο εὐθεΐαι ἀνίστοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον¹ παρὰ τὴν μείζονα παρακληθῇ ἑλλειπόν εἶδος τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει²· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται

Si sint duæ rectæ ipæquales, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus

Appliquons à une droite quelcouque AB un parallélogramme AD qui soit défailant d'une figure quarrée $ΔB$; je dis que le parallélogramme AD est égal au rectangle compris sous $ΑΓ, ΓB$.

Cela est évident; car puisque $ΔB$ est un quarré, $ΔΓ$ est égal à $ΓB$, et AD est égal au rectangle sous $ΑΓ, ΓΔ$, c'est-à-dire sous $ΑΓ, ΓB$. Donc, etc.

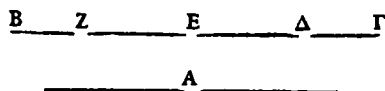
PROPOSITION XVIII.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, et si ce parallélogramme partage la plus grande droite en parties commensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui

156 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ μήκει³. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνηται⁴ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει⁵, τῷ δὲ τετάρτῳ⁶ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον⁷ παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἑλλειπτον εἶδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει⁸.

Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτίστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον⁹ παραβελήσθω ἑλλειπτον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἴστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει¹⁰.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δὴχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ¹¹ ΔΕ ἴση ἢ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἴστί τῇ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμεται εἰς

poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividit longitudine.

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati, hoc est quadrato ex dimidiâ Α, æquale ad ΒΓ parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ, commensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

Secetur enim ΒΓ bifariam in puncto Ε, et ponatur ipsi ΔΕ æqualis ΕΖ; reliqua igitur ΔΓ æqualis est ipsi ΒΖ. Et quoniam recta ΒΓ secatur

sera commensurable en longueur avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande, et si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite droite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties commensurables en longueur.

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ; que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'un quarré, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite Α, c'est-à-dire au quarré de la moitié de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit commensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Partageons ΒΓ en deux parties égales au point Ε, et faisons ΕΖ égal à ΔΕ; le reste ΔΓ sera égal à ΒΖ. Et puisque la droite ΒΓ est coupée en deux parties

μὴν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν¹² ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ¹³ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ¹⁴ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ¹⁵ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίῳ γάρ ἐστι ἡ ΖΔ¹⁶ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ¹⁷ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίῳ γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναιται τῇ ΖΔ. Δεικνέον ὅτι καὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρος

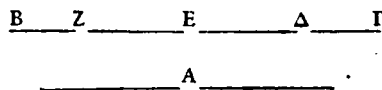
in partes quidem æquales ad Ε, in partes autem inæquales ad Δ; ergo sub ΒΔ, ΔΓ contentum rectangulum cum quadrato ex ΕΔ æquale est quadrato ex ΕΓ, et quadrupla; ergo quater sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum cum quadruplo ex ΔΕ æquale est quater quadrato ex ΕΓ. Sed quidem quadruplo ipsius sub ΒΔ, ΔΓ æquale est ex Α quadratum, quadruplo autem ipsius ex ΔΕ æquale est ex ΔΖ quadratum, dupla enim est ΖΔ ipsius ΔΕ; et quadruplo quadrati ex ΕΓ æquale est ex ΒΓ quadratum, dupla enim est rursus ΒΓ ipsius ΕΓ; ergo ex Α, ΔΖ quadrata æqualia sunt ex ΒΓ quadrato; quare ex ΒΓ quadratum quam quadratum ex Α majus est quadrato ex ΔΖ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et commensurabilem esse ΒΓ ipsi ΖΔ. Quoniam enim commensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, commensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΓΔ longitudine. Sed ΓΔ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ; et ΒΓ igitur commensurabilis est

égales en Ε, et en deux parties inégales en Δ, le rectangle compris sous ΒΔ, ΔΓ avec le quarré de ΕΔ sera égal au quarré de ΕΓ (5. 2). Mais les quadruples sont égaux aux quadruples; donc quatre fois le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ avec le quadruple quarré de ΔΕ est égal au quadruple quarré de ΕΓ. Mais le quarré de Α est quadruple du rectangle sous ΒΔ, ΔΓ, et le quarré de ΔΖ est égal au quadruple quarré de ΔΕ, car ΖΔ est double de ΔΕ; et de plus, le quarré de ΒΓ est égal au quadruple du quarré de ΕΓ; car ΒΓ est double de ΕΓ; donc la somme des quarrés des droites Α, ΔΖ est égale au quarré de ΒΓ; donc le quarré de ΒΓ surpasse le quarré de Α du quarré de ΔΖ; donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est commensurable avec ΖΔ. Car puisque ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (16. 10). Mais ΓΔ est commensurable en longueur avec la somme de ΓΔ et de ΒΖ; car ΓΔ égale ΒΖ (6. 10); donc ΒΓ est commen-

158 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἔστι ταῖς BZ, ΓΔ μήκει¹⁸. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει¹⁹.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει²⁰, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβέβλησθω, ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δύναται δὲ ἡ ΒΓ μείζον τῆς Α²¹ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ²². σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφότερῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμ-

ipsis BZ, ΓΔ longitudine; quare et reliquæ ΖΔ commensurabilis est ΒΓ longitudine; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine.

At vero ΒΓ quam Α plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est commensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed plus potest ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi commensurabili; commensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ commensurabilis est ΒΓ longitudine. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ commen-

surable en longueur avec la somme de BZ et de ΓΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste ΖΔ (16. 10); donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite qui soit commensurable en longueur avec ΒΓ, et appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ. Il faut démontrer que ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite qui est commensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est commensurable en longueur avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (16. 10). Mais la somme des droites ΒΖ et ΔΓ est commensurable avec ΔΓ;

μετρός ἴστί τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἴστί μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἴστί σύμμετρος μήκει.

Εὰν ἄρα ὡς δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

surabilis est ipsi ΔΓ; quare et ΒΓ ipsi ΓΔ commensurabilis est longitudine; et dividendo igitur ΒΔ ipsi ΔΓ est commensurabilis longitudine.

Si igitur duæ rectæ, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Εὰν ὡς δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τῇ δὲ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνηται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῇ δὲ τετάρτῃ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει³.

PROPOSITIO XIX.

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti ex minori quadrati æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividat longitudine; major quam minor plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figurâ quadratâ; in partes incommensurabiles ipsam dividit longitudine.

donc ΒΓ est commensurable en longueur avec ΓΔ (12. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΔΓ (16. 10). Donc, etc.

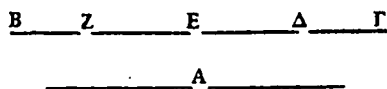
PROPOSITION XIX.

Si l'on a deux droites inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, et si ce parallélogramme divise la plus grande en parties incommensurables en longueur, la puissance de la plus grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite qui sera incommensurable avec la plus grande. Et si la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, ce parallélogramme divisera la plus grande en parties incommensurables en longueur.

160 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστωσαν δύο εὐθείαι ἀνισοί αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῇ δὲ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβελήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Sint duæ rectæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti ex minori Α quadrati æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur, deficiens figurâ quadratâ, et sit sub ΒΔ, ΔΓ rectangulum, incommensurabilis autem sit ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine; dico ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.



Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῇ προτέρῳ, ὁμοίως διίξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῇ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ⁵ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει⁶, ἀσυμμέτρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α

Iisdem enim constructis quæ suprâ, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Ostendendum est et incommensurabilem esse ΒΓ ipsi ΔΖ longitudine. Quoniam enim incommensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine, incommensurabilis igitur est et ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine. Sed ΔΓ commensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; et ΒΓ igitur incommensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ; quare et reliquæ ΖΔ incommensurabilis est ΒΓ longitudine, et ΒΓ quam Α

Soient les deux droites inégales Α, ΒΓ, et que ΒΓ soit la plus grande; appliquons à la plus grande un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite Α; que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ, et que ΒΔ soit incommensurable en longueur avec ΔΓ; je dis que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Ayant fait la même construction qu'auparavant, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Il reste à démontrer que ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΖ. Car puisque ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ, ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Mais ΔΓ est commensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (14. 10); donc ΒΓ est incommensurable avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec le reste ΖΔ (17. 10); mais

μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἢ ΒΓ ἄρα τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνασθὼ δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβιβάσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ΑΛΛ' ἡ ΒΓ τῆς Α μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ⁸. ἀσύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῃ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. Αλλὰ συναμφοτέρος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἢ⁹ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Εἰν' ἄρα ὅτι δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, καὶ τὰ ἐξῆς¹⁰.

plus potest quadrato ex ΖΔ; ergo ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

At plus possit rursus ΒΓ quam Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, quartæ autem parti quadrati ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit quod sub ΒΔ, ΔΓ. Ostendendum est incommensurabilem esse ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus ΒΓ quam Α plus posse quadrato ex ΖΔ. Sed ΒΓ quam Α plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; incommensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΖΔ longitudine; quare et reliquæ utrique ΒΖ, ΔΓ incommensurabilis est ΒΓ. Sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine; ergo ΒΓ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine; quare et dividendo ΒΔ ipsi ΔΓ incommensurabilis est longitudine.

Si igitur sunt duæ rectæ inæquales, etc.

la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ; donc la puissance de ΒΓ surpassera la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ.

Mais que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; appliquons à ΒΓ un parallélogramme qui soit défailant d'une figure quarrée, et qui soit égal à la quatrième partie du quarré de Α; et que ce parallélogramme soit celui qui est sous ΒΔ, ΔΓ; il faut démontrer que ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ.

Ayant fait la même construction, nous démontrerons semblablement que la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré de ΖΔ. Mais la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de Α du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ; donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΖΔ; donc ΒΓ est incommensurable avec le reste, c'est-à-dire avec la somme de ΒΖ et de ΔΓ (17. 10). Mais la somme de ΒΖ et de ΔΓ est commensurable avec ΔΓ (6. 10); donc ΒΓ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (14. 10); donc, par soustraction, ΒΔ est incommensurable en longueur avec ΔΓ (17. 10). Donc, etc.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐπεὶ δὲ δέικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει ἴσοι σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει² οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει³ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερόν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ⁴ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὔσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ⁵ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος⁶.

SCHOLIUM.

Quoniam demonstratum est rectas longitudine commensurabiles omnino et potentiâ esse commensurabiles, rectas autem potentiâ non semper et longitudine, at vero posse longitudine commensurabiles esse et incommensurabiles; evidens est si expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit longitudine, vocari rationalem et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam rectæ longitudine commensurabiles omnino et potentiâ. Si autem expositæ rationali commensurabilis aliqua fuerit potentiâ, si quidem et longitudine, dicitur et sic rationalis et commensurabilis ipsi longitudine et potentiâ. Si autem expositæ rursus rationali commensurabilis aliqua existens potentiâ, longitudine ipsi fuerit incommensurabilis, dicitur et sic rationalis potentiâ solum commensurabilis.

SCHOLIE.

Puisqu'on a démontré que les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance, que celles qui le sont en puissance ne le sont pas toujours en longueur, quoiqu'elles puissent être commensurables et incommensurables en longueur (cor. 9. 10), il est évident que si une droite est commensurable en longueur avec la rationelle proposée, elle est appelée rationelle, et elle est commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance avec la rationelle proposée, puisque les grandeurs commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable non seulement en puissance, mais encore en longueur, avec la rationelle proposée, elle est dite rationelle et commensurable en longueur et en puissance avec la rationelle proposée. Et si enfin une droite commensurable en puissance avec la rationelle proposée lui est incommensurable en longueur, elle est dite rationelle commensurable en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

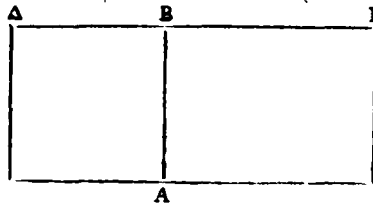
PROPOSITIO XX.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μῆκει συμμέτρων κατὰ τινα τῶν εἰρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχίσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis secundum aliquem dictorum modorum contentum rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis ΑΒ, ΒΓ rectangulum contineatur ΑΓ; dico rationale esse ΑΓ.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μῆκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μῆκει. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ²· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ³ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητόν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ⁴ καὶ τὸ ΑΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Et quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem est ΑΒ ipsi ΒΔ; commensurabilis igitur est ΒΔ ipsi ΒΓ longitudine. Atque est ut ΒΔ ad ΒΓ ita ΔΑ ad ΑΓ; commensurabilis autem est ΒΔ ipsi ΒΓ, commensurable igitur est et ΔΑ ipsi ΑΓ. Rationale autem ΑΔ; rationale igitur est et ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

Ergo sub rationalibus, etc.

PROPOSITION XX.

Le rectangle compris sous des droites rationnelles commensurables en longueur, suivant quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est rationel.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites rationnelles ΑΒ, ΒΓ commensurables en longueur; je dis que ΑΓ est rationel.

Car décrivons sur ΑΒ le quarré ΑΔ; le quarré ΑΔ sera rationel (déf. 6 et cor. 9. 10). Puisque ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ égale ΒΔ, ΒΔ est commensurable en longueur avec ΒΓ. Mais ΒΔ est à ΒΓ comme ΔΑ est à ΑΓ (1. 6), et ΒΔ est commensurable avec ΒΓ; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (10. 10). Mais ΔΑ est rationel; donc ΑΓ est aussi rationel (déf. 9 et pr. 12. 10). Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

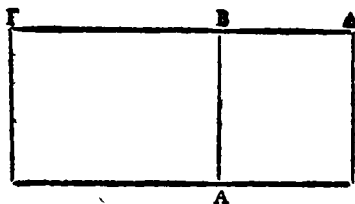
PROPOSITIO XXI.

Εὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιῇ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γάρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατὰ τινα πάλιν τῶν προειρημένων¹ τρόπων τὴν ΑΒ παραβλήσθω, πλάτος ποιούσιν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem faciet rationalem, et longitudine commensurabilem ei ad quam applicatur.

Rationale enim ΑΓ ad rationalem ΑΒ secundum aliquem rursus prædictorum modorum applicetur, latitudinem faciens ΒΓ; dico rationalem esse ΒΓ, et commensurabilem ipsi ΑΒ longitudine.



Αναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἔστί τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἔστί τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· εὐμέμετρος ἄρα ἔστί καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ; rationale igitur est ΑΔ. Rationale autem et ΑΓ; commensurable igitur est ΔΑ ipsi ΑΓ. Atque est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ; commensurabilis igitur est et ΔΒ ipsi ΒΓ. Æqualis autem ΔΒ

PROPOSITION XXI.

Si une surface rationnelle est appliquée à une droite rationnelle, elle fera une largeur rationnelle, et commensurable en longueur avec la droite à laquelle cette surface est appliquée.

Que la surface rationnelle ΑΓ soit appliquée, suivant quelqu'un des modes dont nous avons encore parlé, à la rationnelle ΑΒ, faisant la largeur ΒΓ; je dis que ΒΓ est rationnel et commensurable en longueur avec ΑΒ.

Car décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ; ΑΔ sera rationnel (déf. 6 et cor. 9. 10). Mais ΑΓ est rationnel; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ (déf. 9 et pr. 12. 10). Mais ΔΑ est à ΑΓ comme ΔΒ est à ΒΓ (1. 6); donc ΔΒ est commensurable avec ΒΓ (10. 10). Mais

ἴση δὲ ἡ ΔB τῇ BA · σύμμετρος ἄρα² καὶ ἡ AB τῇ AG . Ρητὴ δὲ ἐστὶν ἡ AB · ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BG , καὶ σύμμετρος τῇ AB μήκει.

Ἐὰν ἄρα ρητὸν, καὶ τὰ ἐξ ἧς.

ipsi BA ; commensurabilis igitur et AB ipsi AG . Rationalis autem est AB ; rationalis igitur est et BG , et commensurabilis ipsi AB longitudine.

Si igitur rationalc, etc.

ΛΗΜΜΑ.

Ἡ δυναμένη ἀλογον χωρίον, ἀλογός ἐστι.

Δυνάσθω γάρ ἡ A ἀλογον χωρίον, τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἡ A ἀλογός ἐστιν.

LEMMA.

Recta quæ potest irrationale spatium, irrationalis est.

Possit enim recta A irrationale spatium, hoc est ex A quadratum æquale sit irrationali spatio; dico A irrationalem esse.

A

Εἰ γὰρ ἔσται¹ ρητὴ ἡ A , ρητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, οὕτως γάρ ἐστιν² ἐν τοῖς ὅροις. Οὐκ ἐστὶ δὲ³ ἀλογος ἄρα ἐστὶν ἡ A^3 . Ὅπρι εἶδει δείξαι⁴.

Si enim esset rationalis A , rationale esset ex ipsâ quadratum, sic enim est in definitionibus. Non est autem; irrationalis igitur est A . Quod oportebat ostendere.

ΔB est égal à BA ; donc AB est commensurable avec AG . Mais AB est rationel; donc BG est aussi rationel, et commensurable en longueur avec AB (déf. 6 et pr. 12. 10). Donc, etc.

LEMME.

La droite dont la puissance est une surface irrationnelle, est irrationnelle.

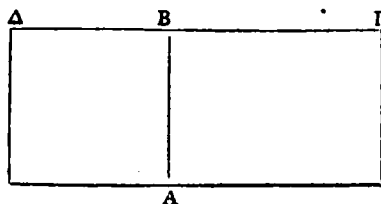
Que la puissance de A soit une surface irrationnelle, c'est-à-dire que le quarré de A soit égal à une surface irrationnelle; je dis que A est irrationel.

Car si A était rationel, le quarré de A serait rationel, ainsi que cela est dit dans les définitions (déf. 8 et cor. 9. 10). Mais il ne l'est pas; donc A est irrationel. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐ-
θειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ
ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογος ἐσται¹. καλεῖσθαι δὲ
μέση.

Υπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων
εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ ὀρθογώνιον περιέχισθαι τὸ
 $ΑΓ$. λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ $ΑΓ$, καὶ ἡ δυνά-
μειν αὐτὸ ἄλογος ἐστι¹. καλεῖσθαι δὲ μέση.



Αναγεγράφθαι γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον
τὸ $ΑΔ$. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμ-
μετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, δυνάμει γὰρ
μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ AB τῇ
 $ΒΔ$. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΔΒ$ τῇ $BΓ$
μήκει. Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $BΓ$ οὕτως

Sub rationalibus potentiâ solùm commensu-
rabilibus rectis contentum rectangulum irratio-
nale est, et recta quæ potest ipsum irrationalis
erit; ea autem vocetur media.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm com-
mensurabilibus rectis AB , $BΓ$ quadratum conti-
neatur $ΑΓ$; dico irrationale esse $ΑΓ$, et rectam
quæ potest ipsum irrationalem esse; ea autem
vocetur media.

Describatur enim ex AB quadratum $ΑΔ$; ra-
tionale igitur est $ΑΔ$. Et quoniam incommensu-
rabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, potentiâ enim
solùm ex supponuntur commensurabiles, æqualis
autem AB ipsi $ΒΔ$; incommensurabilis igitur est
et $ΔΒ$ ipsi $BΓ$ longitudine. Atque est ut $ΒΔ$ ad

PROPOSITION XXII.

Le rectangle compris sous des droites rationelles, commensurables en puis-
sance seulement, est irrationnel, et la droite dont la puissance égale ce rectangle
sera irrationnelle; cette droite s'appellera médiale.

Que le rectangle $ΑΓ$ soit compris sous les droites rationelles AB , $BΓ$ com-
mensurables en puissance seulement; je dis que le rectangle $ΑΓ$ est irrationnel,
et que la droite dont la puissance est égale à ce rectangle est irrationnelle; que
cette droite soit appelée médiale.

Car décrivons sur AB le quarré $ΑΔ$; $ΑΔ$ sera irrationnel. Et puisque AB est in-
commensurable en longueur avec $BΓ$; car on a supposé que ces deux droites
étaient commensurables en puissance seulement, et que de plus AB est égal à $ΒΔ$,
 $ΑΔ$ sera incommensurable en longueur avec $BΓ$. Mais $ΒΔ$ est à $BΓ$ comme $ΑΔ$ est à $ΑΓ$

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 167

τὸ $\Delta\Delta$ πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ ἀσύμμετρον ἄρα ἰσὶ τὸ $\Delta\Delta$ τῇ $\Lambda\Gamma$. Ρητὸν δὲ τὸ $\Delta\Delta$ ἄλογον ἄρα ἰσὶ τὸ $\Lambda\Gamma$. ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ $\Lambda\Gamma$, τουτίστιν ἡ ἴσος αὐτῇ τετράγωνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση². Οὔτε ἴδι διῆξαι³.

$\Delta\Gamma$ ita $\Delta\Delta$ ad $\Lambda\Gamma$; incommensurable igitur est $\Delta\Delta$ ipsi $\Lambda\Gamma$. Rationale autem $\Delta\Delta$; irrationalis igitur est $\Lambda\Gamma$; quare et recta quæ potest ipsum $\Lambda\Gamma$, hoc est recta quæ potest æquale ipsi quadratum, irrationalis est. Ea autem vocetur media. Quod oportebat ostendere.

ΛΗΜΜΑ.

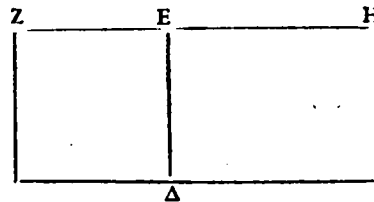
Εάν ὡς δύο εὐθειᾶς, ἴσιν¹ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Εστώσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ZE , EH . λέγω ὅτι ἴσιν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH .

LEMMA.

Si sint duæ rectæ, est ut prima ad secundam ita quadratum ex primâ ad rectangulum sub duabus rectis.

Sint duæ rectæ ZE , EH ; dico esse ut ZE ad EH ita ex ZE quadratum ad rectangulum sub ZE , EH .



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ZE τετράγωνον τὸ ΔZ , καὶ συμπληρώσθω τὸ $H\Delta$. Επεὶ οὖν ἴσιν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ $Z\Delta$ πρὸς τὸ ΔH , καὶ ἴσιν τὸ μὲν $Z\Delta$ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τὸ δὲ ΔH

Describatur enim ex ZE quadratum ΔZ , et compleatur $H\Delta$. Quoniam igitur est ut ZE ad EH ita $Z\Delta$ ad ΔH , atque est quidem $Z\Delta$ quadratum ex ZE , ΔH vero rectangulum sub

(1. 6); donc $\Delta\Delta$ est incommensurable avec $\Lambda\Gamma$ (10. 10); mais $\Delta\Delta$ est rationel; donc $\Lambda\Gamma$ est irrationnel (déf. 10 et pr. 13. 10); donc la droite dont la puissance égale $\Lambda\Gamma$, c'est-à-dire la droite dont la puissance est un carré égal à $\Lambda\Gamma$ est irrationnelle (déf. 11. 10). Cette droite sera appelée médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMME.

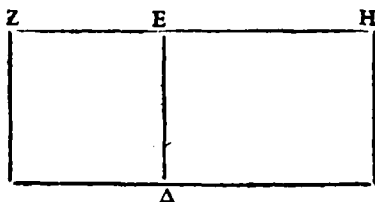
Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le carré de la première est au rectangle compris sous ces deux droites.

Soient les deux droites ZE , EH ; je dis que ZE est à EH comme le carré de ZE est au rectangle compris sous ZE , EH .

Décrivons sur ZE le carré ΔZ , et achevons $H\Delta$. Puisque ZE est à EH comme $Z\Delta$ est à ΔH (1. 6); que $Z\Delta$ est le carré de ZE , et que ΔH est le rectangle sous ΔE

168 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, hoc est sub ZE, EH; est igitur ZE, EH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ut ZE ad EH ita ex ZE quadratum ad rectan-



τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, ΕΗ. Ομοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτίστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Οπὴρ ἔδει δεῖξαι².

gulum sub ZE, EH. Similiter autem et ut sub HE, EZ rectangulum ad quadratum ex EZ, hoc est ut HA ad ZA ita HE ad EZ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

PROPOSITIO XXIII.

Τὸ ἀπὸ μίσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον¹ πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Quadratum ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, et longitudine incommensurabilem ei ad quam applicatur.

Εστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσιν παρὰ τὴν ΒΓ παραβιβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον² τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητὴ ἔστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Sit media quidem Α, rationalis autem ΓΒ; et quadrato ex Α æquale ad ΒΓ applicetur spatium rectangulum ΒΔ latitudinem faciens ΓΔ; dico rationalem esse ΓΔ, et incommensurabilem ipsi ΓΒ longitudine.

ΕΗ, c'est-à-dire sous ZE, ΕΗ, la droite ZE est à EH comme le carré de ZE est au rectangle sous ZE, EH. Semblablement le rectangle sous HE, ΕΖ est au carré de ΕΖ, c'est-à-dire ΗΔ est à ΖΔ comme HE est à ΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

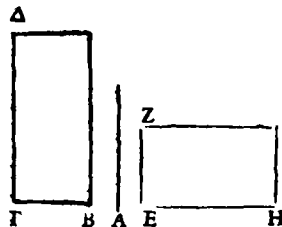
PROPOSITION XXIII.

Le carré d'une médiale appliqué à une rationelle fait une longueur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle il est appliqué.

Soit la médiale Α, et la rationelle ΓΒ; appliquons à ΒΓ un rectangle ΒΔ, qui soit égal au carré de Α, et qui fasse la largeur ΓΔ; je dis que la droite ΓΔ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΒ.

Επει γὰρ μίση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν. Δυνάσθω τὸ ΗΖ. Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΒ τῷ ΗΖ. Ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογωνίον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς

Quoniam enim media est Α, potest spatium contentum sub rationalibus potentiâ solum commensurabilibus. Possit ΗΖ. Potest autem et ΔΒ; æquale igitur est ΔΒ ipsi ΗΖ. Est autem illi et æquiangulum, æqualium autem et æquiangulorum parallelogrammorum reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos; proportionaliter igitur est ut ΒΓ ad ΕΗ ita ΕΖ ad ΓΔ; est igitur et ut ex ΒΓ quadratum



τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γὰρ ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ

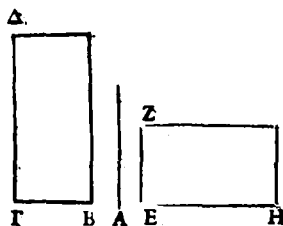
ad ipsum ex ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum ad ipsum ex ΓΔ. Commensurable autem est ex ΓΒ quadratum quadrato ex ΕΗ, rationalis enim est utraque ipsarum; commensurable igitur est et ex ΕΖ quadratum quadrato ex ΓΔ. Rationale autem est quadratum ex ΕΖ; rationale igitur est et quadratum ex ΓΔ; rationalis igitur est ΓΔ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΖ ipsi ΕΗ longitudine, potentiâ enim solum sunt commensurabiles, ut autem ΕΖ ad ΕΗ ita ex ΕΖ quadratum

Car, puisque la droite Α est médiale, sa puissance égale une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement (22. 10). Que sa puissance soit égale à ΗΖ; mais sa puissance égale aussi ΔΒ; donc ΔΒ égale ΗΖ. Mais ΔΒ est équiangle avec ΗΖ; et dans les parallélogrammes équiangles et égaux, les côtés qui comprennent des angles égaux, sont réciproquement proportionnels (14. 6); donc ΒΓ est à ΕΗ comme ΕΖ est à ΓΔ; donc le quarré de ΒΓ est au quarré de ΕΗ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de ΓΔ (22. 6). Mais le quarré de ΓΒ est commensurable avec le quarré de ΕΗ; car chacune de ces droites est rationnelle (22. 10); donc le quarré de ΕΖ est aussi commensurable avec le quarré de ΓΔ (10. 10). Mais le quarré de ΕΖ est rationel; donc le quarré de ΓΔ est rationel aussi; donc ΓΔ est rationel. Et puisque la droite ΕΖ est incommensurable en longueur avec ΕΗ; car celle-ci ne lui est commensurable qu'en puissance, et que

170 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE, EH· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ³
τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῇ ὑπὸ τῶν ZE, EH. Ἀλλὰ τῇ
μὲν ἀπὸ τῆς EZ σύμμετρον ἐστὶ⁴ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ,
ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμεις, τῇ δὲ ὑπὸ τῶν ZE, EH
σύμμετρον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσα γάρ

ad rectangulum sub ZE, EH; incommensurable
igitur est ex EZ quadratum rectangulo sub
ZE, EH. Sed quadrato quidem ex EZ commensurable est quadratum ex ΓΔ, rationales enim
sunt potentiâ, rectangulo autem sub ZE, EH
commensurable est rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ;



ἐστὶ⁵ τῇ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ
τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιχο-
μίνῃ⁶. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν
ΔΓ, ΓΒ οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμ-
μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα
ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. Ὅπερ
ἱδοὶ δεῖξαι.

æqualia enim sunt quadrato ex A; incommensurable igitur est et ex ΓΔ quadratum rectangulo sub ΔΓ, ΓΒ contento. Ut autem ex ΓΔ quadratum ad rectangulum sub ΔΓ, ΓΒ ita est ΔΓ ad ΓΒ; incommensurabilis igitur est ΔΓ ipsi ΓΒ longitudine; rationalis igitur est ΓΔ et incommensurabilis ipsi ΓΒ longitudine. Quod oportebat ostendere.

EZ est à EH comme le quarté de EZ est au rectangle sous ZE, EH (lem. 22. 10), le quarré de EZ est incommensurable avec le rectangle sous ZE, EH (10. 10). Mais le quarré de ΓΔ est commensurable avec le quarté de EZ, car ces droites sont rationnelles en puissance, et le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ZE, EH, car ils sont égaux chacun au quarré de A; donc le quarré de ΓΔ est incommensurable avec le rectangle sous ΔΓ, ΓΒ (13. 10). Mais le quarré de ΓΔ est au rectangle sous ΔΓ, ΓΒ comme ΔΓ est à ΓΒ (lem. 22); donc ΔΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ; donc ΓΔ est rationnel et incommensurable en longueur avec ΓΒ (déf. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

PROPOSITIO XXIV.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

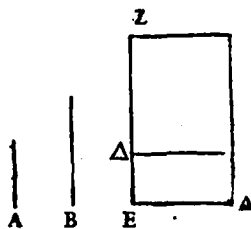
Ἐστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἴστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παρατελέσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παρατελέσθω χωρίον ὀρθόγωνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν

Recta mediæ commensurabilis media est.

Sit media A, et ipsi A commensurabilis sit B; dico et B mediam esse.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex A æquale ad ΓΔ applicetur spatium rectangulum ΓΕ latitudinem faciens ΕΔ; rationalis igitur est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Quadrato autem ex B æquale ad ΔΓ applicetur spatium rectangulum ΓΖ lati-



τὴν ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστίν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῇ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμ-

tudinem faciens ΖΔ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B, commensurable est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est ΕΓ, quadrato autem

PROPOSITION XXIV.

Une droite commensurable avec une médiale, est une médiale.

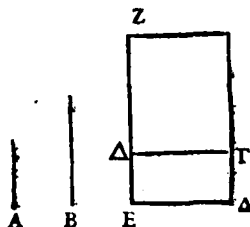
Soit la médiale A, et que B soit commensurable avec A; je dis que la droite B est médiale.

Car soit la rationnelle ΓΔ, et soit appliqué à ΓΔ un rectangle ΓΕ qui, faisant la largeur ΕΔ, soit égal au carré de A; la droite ΕΔ sera rationnelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Soit aussi appliqué à ΔΓ un rectangle ΓΖ qui, faisant la largeur ΖΔ, soit égal au carré de B. Puisque A est commensurable avec B, le carré de A sera commensurable avec le carré de B (cor. 9. 10). Mais ΕΓ est égal au carré de A, et ΓΖ est égal au carré de B;

172 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μῆτρον ἄρα ἔστι τὸ ΕΓ τῇ ΓΖ. Καὶ ἔστιν ὥς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μῆκει. Πῆτὴ δὲ ἔστιν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μῆκει· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μῆκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι, δυνάμεις

ex B æquale ΓΖ; commensurable igitur est ΕΓ ipsi ΓΖ. Atque est ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΕΔ ad ΔΖ; commensurabilis igitur est ΕΔ ipsi ΔΖ longitudine. Rationalis autem est ΕΔ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; rationalis igitur est et ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΓ longitudine; ergo ΓΔ, ΔΖ rationales sunt, potentiâ



μόνον σύμμετροι. Ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμεις μόνον συμμέτρων δυνάμειν μέση ἔστιν³. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυνάμειν μέση ἔστι, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἔστιν ἡ Β.

solùm commensurabiles. Recta autem quæ potest rectangulum sub rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus media est; recta igitur quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ media est, et potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ ipsa B; media igitur est B.

donc ΕΓ est commensurable avec ΓΖ. Mais ΕΓ est à ΓΖ comme ΕΔ est à ΔΖ (1. 6); donc ΕΔ est commensurable en longueur avec ΔΖ (10. 10). Mais la droite ΕΔ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (23. 10); donc la droite ΔΖ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΔΓ (13. 10); donc les droites ΓΔ, ΔΖ sont rationnelles et commensurables en puissance seulement. Mais la droite dont la puissance égale un rectangle sous des rationnelles commensurables en puissance seulement, est une médiale (22. 10); donc la droite, dont la puissance égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ, est une médiale; mais la puissance de B égale le rectangle sous ΓΔ, ΔΖ; donc la droite B est une médiale.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Εκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῇ μίση χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστί. Δύναται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἱ εἰς δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μίση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μίση ἐστίν. Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἑξακολουθεῖ τὴν τῇ μίση μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μίσην, καὶ¹ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει· ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδὴ πᾶρ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Εὰν δὲ τῇ μίση σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λίγονται καὶ οὕτως μίσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει². Εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λίγονται μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι³.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurabile medium esse. Possunt enim ipsa rectæ quæ sunt potentiâ commensurabiles, quarum altera media; quare et reliqua media est. Congruenter autem ipsis in rationalibus dictis, et in mediis quoque colligetur, rectam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, et commensurabilem ipsi non solum longitudine sed et potentiâ, quoniam universè rectæ longitudine commensurabiles semper et potentiâ. Si autem mediæ commensurabilis aliqua recta fuerit potentiâ, siquidem et longitudine, dicuntur et sic mediæ et commensurabiles longitudine et potentiâ. Si autem potentiâ solum, dicuntur mediæ potentiâ solum commensurabiles.

COROLLAIRE.

De là il est évident qu'une surface commensurable avec une surface médiale est médiale. Car les droites dont les puissances sont égales à ces surfaces sont commensurables en puissance, et l'une de ces droites est médiale; donc la droite restante est médiale. Mais d'après ce qui a été dit dans les rationelles, on peut conclure dans les médiales qu'une droite commensurable à une médiale est une médiale, cette droite lui étant commensurable non seulement en longueur, mais encore en puissance; car généralement les droites commensurables en longueur le sont toujours en puissance. Mais si une droite est commensurable en puissance avec une médiale, et si elle l'est aussi en longueur, les médiales sont dites commensurables en longueur et en puissance. Mais si elles ne sont commensurables qu'en puissance, elles sont dites médiales commensurables en puissance seulement.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κί.

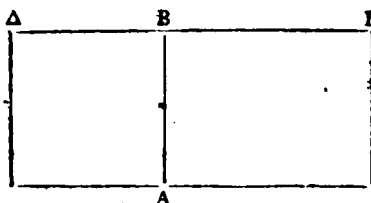
PROPOSITIO XXV.

Τὸ ὑπὸ μέσων μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν κατὰ
τινα τῶν εἰρημάτων τρόπων¹ περιχόμενον ὀρθο-
γώνιον, μέσον ἐστίν.

Υπὸ γὰρ μέσων μῆκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν
ΑΒ, ΒΓ περιχίσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι
τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Sub mediis longitudine commensurabilibus
secundum aliquem dictorum modorum conten-
tum rectangulum, medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabi-
libus rectis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum
ΑΓ; dico ΑΓ medium esse.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον
τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-
μετρός ἐστι² ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μῆκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ
τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ
μῆκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρον ἐστίν.
Μέσον δὲ τὸ ΔΑ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ. Ὅπου
ἴδει διῆξαι.

Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ;
medium igitur est ΑΔ. Et quoniam commensu-
rabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis
autem ΑΒ ipsi ΒΔ; commensurabilis igitur est
est et ΔΒ ipsi ΒΓ longitudine; quare et ΔΑ ipsi
ΑΓ commensurabile est. Medium autem ΔΑ;
medium igitur et ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITION XXV.

Le rectangle compris sous des médiales commensurables en longueur, suivant
quelqu'un des modes dont nous avons parlé, est médial.

Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites médiales ΑΒ, ΒΓ commensu-
rables en longueur; je dis que ΑΓ est médial.

Décrivons sur ΑΒ le carré ΑΔ, ΑΔ sera médial (cor. 24. 10). Et puisque ΑΒ
est commensurable en longueur avec ΒΓ, et que ΑΒ est égal à ΒΔ, la droite ΔΒ est
commensurable en longueur avec ΒΓ; donc ΔΑ est commensurable avec ΑΓ. Mais
ΔΑ est médial (cor. 24. 10); donc ΑΓ est aussi médial. Ce qu'il fallait dé-
montrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

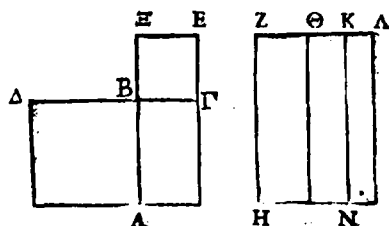
PROPOSITIO XXVI.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐ-
θειῶν¹ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἥτοι ῥητὸν ἢ
μέσον ἐστίν.

Υπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων
εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον² τὸ
ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ ἥτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν³.

Sub mediis potentiâ solùm commensurabi-
libus rectis contentum rectangulum, vel ratio-
nale vel medium est.

Sub mediis enim potentiâ solùm commensura-
bilibus rectis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum
ΑΓ; dico ΑΓ vel rationale vel medium esse.



Αναγινώσκω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα
τὰ ΑΔ, ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν
ΑΔ, ΒΕ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῇ μὲν
ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παρατεθείσθω ὀρθογώνιον
παρὰλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν
ΖΘ, τῇ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παρατε-
θείσθω ὀρθογώνιον παρὰλληλόγραμμον τὸ ΜΚ

Describantur enim ex ΑΒ, ΒΓ quadrata ΑΔ,
ΒΕ; medium igitur est utrumque ipsorum ΑΔ,
ΒΕ. Et exponatur rationalis ΖΗ, et ipsi quidem
ΑΔ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum pa-
rallelogrammum ΗΘ latitudinem faciens ΖΘ,
ipsi autem ΑΓ æquale ad ΘΜ applicetur rectan-
gulum parallelogrammum ΜΚ latitudinem fa-

PROPOSITION XXVI.

Le rectangle compris sous des droites médiales commensurables en puissance seulement, est ou rationel ou médial.

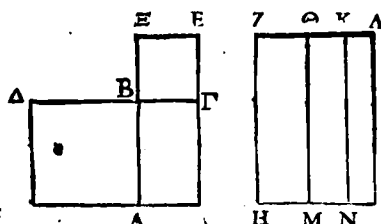
Que le rectangle ΑΓ soit compris sous les droites médiales ΑΒ, ΒΓ, commensurables en puissance seulement; je dis que ΑΓ est ou rationel ou médial.

Car décrivons sur les droites ΑΒ, ΒΓ les quarrés ΑΔ, ΒΕ; chacun des quarrés ΑΔ, ΒΕ sera médial. Soit la rationelle ΖΗ; appliquons à ΖΗ le parallélogramme rectangle ΗΘ, qui ayant ΖΘ pour largeur, soit égal à ΑΔ; appliquons aussi à ΘΜ le parallélogramme rectangle ΜΚ, qui ayant ΘΚ pour largeur, soit égal à

176 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἴτι τῇ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παρατελέσθω τὸ ΝΑ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῇ

ciens ΘΚ, et adhuc ipsi ΒΕ æquale similiter ad ΚΝ applicetur ΝΑ latitudinem faciens ΚΛ; in rectâ igitur sunt ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΔ, ΒΕ, atque est æquale quidem ΑΔ ipsi ΗΘ, ipsum



ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῇ ΝΑ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΑ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παρά-
κειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρω τῶν ΖΘ,
ΚΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ⁵
σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῇ ΒΕ· σύμμετρον ἄρα
ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῇ ΝΑ. Καὶ ἴστιν⁶ ὡς τὸ ΗΘ
πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἢ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμι-
τρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει· αἱ ΖΘ, ΚΛ
ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ
τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν
ΒΔ τῇ ΒΑ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΒΓ· ἴστιν ἄρα ὡς ἢ ΔΒ
πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ. Αλλ'
ὡς μὲν ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς

autem ΒΕ ipsi ΝΑ; medium igitur et utrumque
ipsorum ΗΘ, ΝΑ, et ad rationalem ΖΗ appli-
catur; rationalis igitur est et utraque ipsarum
ΖΘ, ΚΛ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longi-
tudine. Et quoniam commensurable est ΑΔ
ipsi ΒΕ; commensurable igitur est et ΗΘ ipsi
ΝΑ. Atque est ut ΗΘ ad ΝΑ ita ΖΘ ad ΚΛ; com-
mensurabilis igitur est ΖΘ ipsi ΚΛ longitudine;
ergo ΖΘ, ΚΛ rationales sunt longitudine com-
mensurabiles; rationale igitur est rectangulum
sub ΖΘ, ΚΛ. Et quoniam æqualis est quidem
ΒΔ ipsi ΒΑ, ipsa autem ΕΒ ipsi ΒΓ; est igitur
ut ΔΒ ad ΒΓ ita ΑΒ ad ΒΕ. Sed ut ΔΒ ad ΒΓ

ΑΓ, et enfin appliquons semblablement à ΚΝ le parallélogramme rectangle ΝΑ, qui
ayant ΚΑ pour largeur, soit égal à ΒΕ (45. 1); les droites ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ seront
en ligne droite (14. 1). Puisque chacun des carrés ΑΔ, ΒΕ est médial; que
ΑΔ est égal à ΗΘ, et ΒΕ égal à ΝΑ, chacun des rectangles ΗΘ, ΝΑ sera médial;
mais ils sont appliqués sur la rationelle ΖΗ; donc chacune des droites ΖΘ, ΚΛ
est rationelle et incommensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10). Mais ΑΔ est
commensurable avec ΒΕ; donc ΗΘ est commensurable avec ΝΑ. Mais ΗΘ est à ΝΑ
comme ΖΘ est à ΚΛ (1. 6); donc ΖΘ est commensurable en longueur avec ΚΛ
(10. 10); donc les droites ΖΘ, ΚΛ sont des rationelles commensurables en
longueur; le rectangle sous ΖΘ, ΚΛ est donc rationel. Et puisque ΒΔ est égal
à ΒΑ, et ΕΒ égal à ΒΓ, ΔΒ sera à ΒΓ comme ΑΒ est à ΒΕ; mais ΔΒ est à ΒΓ

τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἰσὸν δὲ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΑ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ρητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ρητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ρητὸν ἐστὶ τὸ ΘΝ. Εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ^δ ρηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι· μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα ἥτοι ρητὸν ἢ μίσην ἐστίν^θ. Ἰσὸν δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἥτοι ρητὸν ἢ μίσην ἐστὶ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μίσην, καὶ τὰ ἑξῆς.

ita ΔA ad $A\Gamma$; ut autem AB ad $B\Xi$ ita $A\Gamma$ ad $\Gamma\Xi$; est igitur ut ΔA ad $A\Gamma$ ita $A\Gamma$ ad $\Gamma\Xi$. $\mathcal{A}$ Equale autem est quidem ΔA ipsi $H\Theta$, ipsum vero $A\Gamma$ ipsi MK , ipsum et $\Gamma\Xi$ ipsi NA ; est igitur ut $H\Theta$ ad MK ita MK ad NA ; est igitur et ut $Z\Theta$ ad ΘK ita ΘK ad KL ; rectangulum igitur sub $Z\Theta$, KL æquale est quadrato ex ΘK . Rationale autem rectangulum sub $Z\Theta$, KL ; rationale igitur est et quadratum ex ΘK ; rationalis igitur est ΘK . Et si quidem commensurabilis est ipsi ZH longitudine, rationale est ΘN . Si autem incommensurabilis est ipsi ZH longitudine, ipsæ $K\Theta$, ΘM rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΘN ; ergo ΘN vel rationale vel medium est. $\mathcal{A}$ Equale autem ΘN ipsi $A\Gamma$; ergo $A\Gamma$ vel rationale vel medium est.

Ergo sub mediis, etc.

comme ΔA est à $A\Gamma$, et AB est à $B\Xi$ comme $A\Gamma$ est à $\Gamma\Xi$ (1. 6); donc ΔA est à $A\Gamma$ comme $A\Gamma$ est à $\Gamma\Xi$. Mais ΔA est égal à $H\Theta$, $A\Gamma$ égal à MK , et $\Gamma\Xi$ égal à NA ; donc $H\Theta$ est à MK comme MK est à NA ; donc $Z\Theta$ est à ΘK comme ΘK est à KL ; le rectangle compris sous $Z\Theta$, KL est donc égal au quarré de ΘK (17. 6). Mais le rectangle sous $Z\Theta$, KL est rationel (20. 10); donc le quarré de ΘK est rationnel; donc la droite ΘK est rationnelle. Et si ΘK est commensurable en longueur avec ZH , la surface ΘN sera rationnelle. Mais si ΘK est incommensurable en longueur avec ZH , les droites $K\Theta$, ΘM seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la surface ΘN sera médiale (22. 10); donc ΘN est rationel ou médial. Mais ΘN est égal à $A\Gamma$; donc $A\Gamma$ est ou rationel ou médial. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

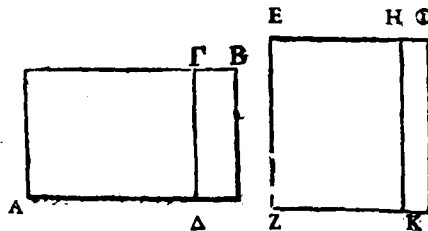
Μέσον μέσου οὐχ ὑπερίχει ρητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ AB μέσου τοῦ $ΑΓ$ ὑπερίχεται ρητῷ τῷ $ΔΒ$, καὶ ἐκκείσθω ρητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ $ZΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $EΘ$, τῷ δὲ $ΑΓ$ ἴσον ἀφαιρήσθω τὸ ZH · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΒΔ$ λοιπῷ τῷ $ΚΘ$ ἴσθιν ἴσων'. Ρητὸν δὲ ἐστὶ τὸ $ΔΒ$ · ρητὸν

PROPOSITIO XXVII.

Medium non medium superat rationali.

Si enim possibile, medium AB medium $ΑΓ$ superet rationali $ΔΒ$, et exponatur rationalia EZ , et ipsi AB æquale ad EZ applicetur parallelogrammum rectangulum $ZΘ$ latitudinem faciens $EΘ$, ipsi autem $ΑΓ$ æquale auferatur ZH ; reliquum igitur $ΒΔ$ reliquo $ΚΘ$ est æquale. Rationale autem est $ΔΒ$; rationale igitur est et



ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΚΘ$. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AB , $ΑΓ$, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AB τῷ $ZΘ$ ἴσον, τὸ δὲ $ΑΓ$ τῷ ZH · μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν $ZΘ$, ZH . Καὶ παρὰ ρητὴν τὴν EZ παράκειται· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν $EΘ$, $ΕΗ$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἴσιν

$ΚΘ$. Quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AB , $ΑΓ$, atque est quidem AB ipsi $ZΘ$ æquale, ipsum autem $ΑΓ$ ipsi ZH ; medium igitur et utrumque ipsorum $ZΘ$, ZH . Et ad rationalem EZ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum $EΘ$, $ΕΗ$, et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam rationale est

PROPOSITION XXVII.

Une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle.

Car, que la surface médiale AB , s'il est possible, surpasse la surface médiale $ΑΓ$ d'une surface rationnelle $ΔΒ$; soit la rationnelle EZ ; appliquons à EZ le parallélogramme rectangle $ZΘ$, qui, étant égal à AB , ait $EΘ$ pour largeur (45. 1); et de $ZΘ$ retranchons ZH égal à $ΑΓ$; le reste $ΒΔ$ sera égal au reste $ΚΘ$. Mais $ΔΒ$ est rationnel donc $ΚΘ$ est rationnel. Et puisque chacune des surfaces AB , $ΑΓ$ est médiale, que AB est égal à $ZΘ$, et que $ΑΓ$ est égal à ZH , chacune des surfaces $ZΘ$, ZH sera médiale. Mais ces surfaces sont appliquées à EZ ; donc chacune des droites $EΘ$, $ΕΗ$ est rationnelle et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). Et puisque $ΔΒ$ est

ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καὶ ἴσιν τῷ ΚΘ· ῥητόν ἄρα ἴσιν καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἴσιν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητὴ ἴσιν, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἴσιν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἴσιν ὥς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετραγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γὰρ ἴσιν αὐτοῦ³. ἀσύμμετρα ἄρα ἴσιν τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφοτέρω ἄρα τάς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπῃ ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἴσιν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἴσιν ἡ ΕΘ. Ἀλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπῃ ἴσιν ἀδύνατον.

Μείζον ἄρα μέισιν, καὶ τὰ ἐξῆς.

rationnel, et qu'il est égal à ΚΘ, ΚΘ sera rationnel ; mais il est appliqué à la rationnelle ΕΖ ; donc ΗΘ est rationnel et commensurable en longueur avec ΕΖ (21. 10). Mais ΕΗ est rationnel et incommensurable en longueur avec ΕΖ ; donc ΕΗ est incommensurable en longueur avec ΗΘ (13. 10). Mais ΕΗ est à ΗΘ comme le carré de ΕΗ est au rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (1. 6) ; donc le carré de ΕΗ est incommensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le carré de ΕΗ, car ces carrés sont rationnels et le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ est commensurable avec le rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, car il en est le double ; donc la somme des carrés de ΕΗ et de ΗΘ est incommensurable avec le double rectangle sous ΕΗ, ΗΘ (14. 10) ; donc la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ, du double du rectangle sous ΕΗ, ΗΘ, qui est le carré de ΕΘ (4. 2), est incommensurable avec la somme des carrés des droites ΕΗ, ΗΘ (17. 10). Mais les carrés de ΕΗ et de ΗΘ sont rationnels ; donc le carré de ΕΘ est irrationnel (déf. 10. 10) ; donc ΕΘ est irrationnel. Mais il est rationnel, ce qui est impossible. Donc, etc.

ΔΒ, atque est æquale ipsi ΚΘ ; rationale igitur est et ΚΘ, et ad rationalem ΕΖ applicatur ; rationalis igitur est ΗΘ, et commensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Sed et ΕΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine ; incommensurabilis igitur est ΕΗ ipsi ΗΘ longitudine. Atque est ut ΕΗ ad ΗΘ ita ex ΕΗ quadratum ad rectangulum sub ΕΗ, ΗΘ ; incommensurable igitur est ex ΕΗ quadratum rectangulo sub ΕΗ, ΗΘ. Sed quadrato quidem ex ΕΗ commensurabilia sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, rationalia enim utraque, rectangulo autem sub ΕΗ, ΗΘ commensurable est rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, duplum enim est ipsius ; incommensurabilia igitur sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata rectangulo bis sub ΕΗ, ΗΘ ; et utraque igitur, ex ΕΗ, ΗΘ quadrata et rectangulum bis sub ΕΗ, ΗΘ, quod est quadratum ex ΕΘ, incommensurabilia sunt quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. Rationalia autem quadrata ex ΕΗ, ΗΘ ; irrationale igitur est quadratum ex ΕΘ ; irrationalis igitur est ΕΘ. Sed et rationalis, quod est impossibile.

Medium igitur medium, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη.

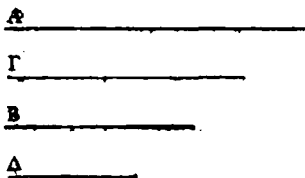
Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους,
ῤητὸν περιχοῦσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῤηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-
μετροι αἱ A, B , καὶ εἰλήθω τῶν A, B μέση
ἀνάλογον ἡ Γ , καὶ γεγόνετω ὡς ἡ A πρὸς τὴν B
οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ .

PROPOSITIO XXVIII.

Medias invenire potentiâ solùm commensu-
rabiles, rationale continentes.

Exponentur duæ rationales potentiâ solùm
commensurabiles A, B , et sumatur ipsarum
 A, B media proportionalis Γ , et fiat ut A ad B
ita Γ ad Δ .



Καὶ ἐπεὶ αἱ A, B ῤηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον
σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B , τουτίστι
τὸ ἀπὸ τῆς Γ , μέσον ἐστὶ· μέση ἄρα ἡ Γ .
Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ
 Γ πρὸς τὴν Δ , αἱ δὲ A, B δυνάμει μόνον σύμ-
μετροι· καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσι
σύμμετροι. Καὶ ἐστὶ μέση ἡ Γ · μέση ἄρα καὶ
ἡ Δ · αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον

Et quoniam A, B rationales sunt potentiâ
solùm commensurabiles, rectangulum igitur
sub A, B , hoc est quadratum ex Γ , medium
est; media igitur Γ . Et quoniam est ut A ad
 B ita Γ ad Δ , ipsæ autem A, B potentiâ solùm
commensurabiles; et Γ, Δ igitur potentiâ solùm
sunt commensurabiles. Atque est media Γ ; media
igitur et Δ ; ergo Γ, Δ mediæ sunt potentiâ

PROPOSITION XXVIII.

Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui con-
tiennent une surface rationelle.

Soient A, B deux rationelles commensurables en puissance seulement; pre-
nons une moyenne proportionnelle Γ entre A et B (13. 6), et faisons en sorte que
 A soit à B comme Γ est à Δ (12. 6).

Puisque les rationelles A, B sont commensurables en puissance seulement,
le rectangle sous A, B (22. 10), c'est-à-dire le carré de Γ , est médial (17. 6);
donc Γ est médial. Et puisque A est à B comme Γ est à Δ , et que les droites
 A, B ne sont commensurables qu'en puissance; les droites Γ, Δ ne sont com-
mensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial
(24. 10); donc les droites Γ, Δ sont des médiales commensurables en puissance

σύμμετροι. Λέγω δὴ² ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἴστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἱναλλάξ ἄρα ἴστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως³ ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Ἀλλὰ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως⁴ ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἴστί⁵ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηται ἄρα μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι⁶.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσαι εὐρεῖν δυνάμεις μόνον συμμέτρους, μέσον περιχοῦσας.

Ἐκκείμεθωσαν τρεῖς¹ ῥηταὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γενοίτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως² ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτίστι

solùm commensurabiles. Dico etiam et ipsas rationale continere. Quoniam enim est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, permutando igitur est ut Α ad Γ ita Β ad Δ. Sed ut Α ad Γ ita Γ' ad Β; et ut igitur Γ ad Β ita Β ad Δ; rectangulum igitur sub Γ, Δ æquale est quadrato ex Β. Rationale autem quadratum ex Β; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ.

Inventæ sunt igitur mediæ potentiâ solùm commensurabiles. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIX.

Medias invenire potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes.

Exponentur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles Α, Β, Γ, et sumatur ipsarum Α, Β media proportionalis Δ, et fiat ut Β ad Γ ita Δ ad Ε.

Quoniam Α, Β rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, rectangulum igitur sub Α, Β,

seulement (24. 10). Je dis aussi qu'elles comprennent une surface rationelle. Car puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, par permutation Α est à Γ comme Β est à Δ (16. 5). Mais Α est à Γ comme Γ est à Β; donc Γ est à Β comme Β est à Δ; donc le rectangle sous Γ, Δ est égal au quarré de Β (17. 6). Mais le quarré de Β est rationel; le rectangle sous Γ, Δ est donc aussi rationel.

On a donc trouvé des médiales commensurable en puissance seulement. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XXIX.

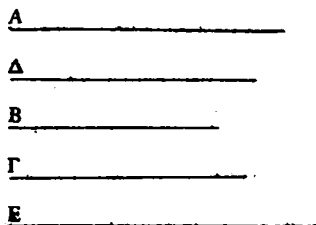
Trouver des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprennent une surface médiale.

Soient les trois rationelles Α, Β, Γ commensurables en puissance seulement; prenons une moyenne proportionnelle Δ entre Α et Β (13. 6), et faisons en sorte que Β soit à Γ comme Δ est à Ε (12. 6).

Puisque les droites Α, Β sont des rationelles commensurables en puissance seulement, le rectangle sous Α, Β (22. 10), c'est-à-dire le quarré de Δ (17. 6)

τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστὶ· μέση ἄρα ἡ Δ.
Καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμεις μόνον εἰσὶ σύμμετροι,
καὶ ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως³ ἡ Δ πρὸς
τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμεις μόνον
εἰσὶ⁴. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ,
Ε ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι.
Λέγω δὴ ὅτι μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν

hoc est quadratum ex Δ, medium est; media
igitur Δ. Et quoniam Β, Γ potentia solū
sunt commensurabiles, atque est ut Β ad Γ
ita Δ ad Ε; ergo Δ, Ε commensurabiles po-
tentia solū sunt. Media autem Δ; media igitur
et Ε; ergo Δ, Ε mediæ sunt potentia solū
commensurabiles. Dico etiam ipsas medium con-



ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως⁵ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε,
ἵναλλαξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως⁶ ἡ Γ
πρὸς τὴν Ε. Ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως⁷ ἡ Δ
πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως⁸
ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον
ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ
τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηται ἄρα μίσαι δυνάμεις μόνον σύμμε-
τροι, μέσον περιέχουσαι. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι⁹.

tinere. Quoniam enim est ut Β ad Γ ita Δ ad
Ε, permutando igitur ut Β ad Δ ita Γ ad Ε.
Ut autem Β ad Δ ita Δ ad Α, et ut igitur
Δ ad Α ita Γ ad Ε; rectangulum igitur sub
Α, Γ æquale est rectangulo sub Δ, Ε. Me-
dium autem rectangulum sub Α, Γ; medium
igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur mediæ potentia solū
commensurabiles, medium continentes. Quod
oportebat facere.

sera médial; donc la droite Δ est médiale. Et puisque les droites Β, Γ ne sont com-
mensurables qu'en puissance, et que Β est à Γ comme Δ est à Ε, les droites Δ, Ε ne
sont commensurables qu'en puissance (10. 10). Mais Δ est médial; donc Ε est
médial (24. 10); donc les droites Δ, Ε sont des médiales commensurables en
puissance seulement. Je dis aussi qu'elles comprennent une surface médiale; car
puisque Β est à Γ comme Δ est à Ε, par permutation Β est à Δ comme Γ est à Ε.
Mais Β est à Δ comme Δ est à Α; donc Δ est à Α comme Γ est à Ε; donc le rec-
tangle sous Α, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε (16. 6). Mais le rectangle sous
Α, Γ est médial (22. 10); donc le rectangle sous Δ, Ε est médial.

On a donc trouvé des médiales commensurables en puissance seulement, qui
comprennent une surface médiale. Ce qu'il fallait faire.

ΛΗΜΜΑ Δ.

Εὕρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AB , BF , ἔστωσαν δὲ ἢ τοὶ ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ ἴαντε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρῇ, ἴαντε ἀπὸ περιττοῦ περιττός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ AF ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω ὁ AF δίχα κατὰ τὸ Δ . Ἐστωσαν δὲ καὶ οἱ AB , BF ἢ τοὶ ἴμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοι

$A \dots \Delta \dots \Gamma \dots B$

εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ³ τῶν AB , BF μετὰ τοῦ³ ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔB τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν AB , BF , ἐπειδὴ περὶ εἰδείχθη ὅτι ἴαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γινόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὐρηταί ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅ, τι ἐκ τῶν AB , BF , καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$, οἳ συντεθέντες ποιοῦσιν τὸν ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ τετράγωνον. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι⁴.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut et compositus ex ipsis sit quadratus.

Exponentur duo numeri AB , BF , sint autem vel pares vel impares. Et quoniam sive à pari par auferatur, sive ab impari impar, reliquus par est; reliquus igitur AF par est. Secetur AF bifariam in Δ . Sint autem et AB , BF vel similes plani vel quadrati, qui et ipsi similes

plani sunt; ergo sub AB , BF numerus cum quadrato ex $\Gamma\Delta$ æqualis est ex ΔB quadrato. Atque est quadratus ex AB , BF numerus, quoniam ostensum est si duo similes plani sese multiplicantes faciant aliquem, facium quadratum esse; inventi sunt igitur duo quadrati numeri, et quadratus ex AB , BF , et quadratus ex $\Gamma\Delta$, qui compositi faciunt ex $B\Delta$ quadratum. Quod oportebat facere.

ΛΗΜΜΑ Ε.

Trouver deux nombres quarrés, de manière que leur somme soit un quarré.

Soient les deux nombres AB , BF ; qu'ils soient ou pairs ou impairs. Puisque si d'un nombre pair on ôte un nombre pair, ou si d'un nombre impair on ôte un impair, le reste est pair (24, et 26. 9); le reste AF est donc pair. Partageons FA en deux parties égales en Δ . Que les nombres AB , BF soient ou des plans semblables ou des quarrés qui sont eux-mêmes des plans semblables; le produit de AB par BF avec le quarré de $\Gamma\Delta$ sera égal au quarré de ΔB (6. 2). Mais le produit de AB par BF est un quarré; car on a démontré que si deux plans semblables se multipliant eux-mêmes font un nombre, le produit est un quarré (1. 9); on a donc trouvé deux nombres quarrés, savoir le produit de AB par BF , et le quarré de $\Gamma\Delta$, dont la somme égale le quarré de $B\Delta$. Ce qu'il falloit faire.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ φανερόν ὅτι εὕρηται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὃ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπερόχην αὐτῶν τὸν¹ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ᾖσιν ἐπίπεδοι². Ὅταν δὲ μὴ ᾖσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηται δύο τετράγωνοι, ὃ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ³ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὃν ἡ ὑπερόχη, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος⁴.

ΛΗΜΜΑ β'.

Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Εστω γάρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαιμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ¹. φανερόν δὲ ὅτι ὁ² ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³

COROLLARIUM.

Et manifestum est inventos esse rursus duos quadratos, et quadratum ex ΒΔ et quadratum ex ΓΔ, ita ut excessus ipsorum sub ΑΒ, ΒΓ sit quadratus, quando ΑΒ, ΒΓ similes sunt plani. Quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, et quadratus ex ΒΔ et quadratus ex ΓΔ, quorum excessus sub ΑΒ, ΒΓ non est quadratus.

LEMMA II.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut ex ipsis compositus non sit quadratus.

Sit enim sub ΑΒ, ΒΓ, ut dicebamus, quadratus, et par ipse ΓΑ, et secetur ΓΑ bifariam in Δ; evidens est utique ex ΑΒ, ΒΓ quadratum

COROLLAIRE.

Il est évident de plus qu'on a trouvé deux quarrés, savoir le quarré de ΒΑ et celui de ΓΔ, de manière que leur différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, est un quarré, lorsque les nombres ΑΒ, ΒΓ sont des plans semblables. Mais lorsque ces nombres ne sont pas des plans semblables, on trouve deux quarrés, celui de ΒΔ et celui de ΓΔ, dont la différence, qui est le produit de ΑΒ par ΒΓ, n'est pas un quarré.

LEMME II.

Trouver deux nombres quarrés, dont la somme ne soit pas un quarré.

Que le produit de ΑΒ par ΒΓ soit un quarré, comme nous l'avons dit; que ΓΑ soit un nombre pair; partageons ΓΑ en deux parties égales en Δ. Il est évident que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré

ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ⁴ ΒΔ τετραγώνῳ. Αφηρέσθω⁵ μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνος⁶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁷ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁸ ΒΔ τετραγώνου. Λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁹ ΓΕ οὐκ ἐστὶ¹⁰ τετραγώνος.

Εἰ γὰρ ἦσται τετραγώνος, ἦτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ¹¹ ΒΕ ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ¹², οὐκ ἐτί δὲ καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἢ μονὰς¹³.

cum quadrato ex ΓΔ æqualem esse quadrato ex ΒΔ. Auferatur unitas ΔΕ; ergo ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ minor est quadrato ex ΒΔ. Dico igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratum cum quadrato ex ΓΕ non esse quadratum.

Si enim fuerit quadratus, vel æqualis est quadrato ex ΒΕ vel minor quadrato ex ΒΕ, non autem et major, ut ne secetur unitas. Sit, si pos-

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ Β

Εστω εἰ δυνατόν πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίον ὁ ΗΑ¹⁴. Εἰπὼ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίον, ὁ δὲ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίον¹⁵. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίον· δίχα ἄρα τίτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁶ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ¹⁷ ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ,

sibile, primum ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΒΕ, et sit ipsius ΔΕ unitatis duplus ΗΑ. Quoniam igitur totus ΑΓ totius ΓΔ est duplus, ipse autem ΑΗ ipsius ΔΕ est duplus; et reliquus igitur ΗΓ reliqui ΕΓ est duplus; bisariam igitur secatur ΗΓ in Ε; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Sed et ex ΑΒ, ΒΓ

de ΓΔ est égal au quarré de ΒΔ (6. 2). Retranchons l'unité ΔΕ; le quarré qui résultera du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ sera plus petit que le quarré de ΒΔ. Et je dis que le quarré qui résulte du produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ n'est pas un quarré.

Car si ce nombre est un quarré, ou il est égal au quarré de ΒΕ, ou il est plus petit que lui; mais il ne peut pas être plus grand; car, si cela était, l'unité serait partagée. Que le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ soit d'abord égal au quarré de ΒΕ, si cela est possible, et que ΗΑ soit double de l'unité ΔΕ. Puisque ΑΓ tout entier est double de ΓΔ tout entier, et que ΑΗ est double de ΔΕ, le reste ΗΓ sera double du reste ΕΓ; donc ΗΓ est partagé en deux parties égales en Ε; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le quarré de ΓΕ est égal au quarré de ΒΕ (6. 2).

ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῇ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ¹⁹ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐκ τῶν²⁰ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ²¹ ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιριθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ²² ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῇ ΗΒ²³, ἔπειρ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ²⁴ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ²⁵ ΒΕ. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ ἱλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ²⁶ ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἴστω τῇ ἀπὸ τοῦ²⁷ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ

quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis supponitur quadrato ex ΒΕ; ergo ex ΗΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ. Et detracto communi quadrato ex ΓΕ, concludetur ΑΒ æqualis ipsi ΗΒ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis est quadrato ex ΒΕ. Dico etiam neque minorem quadrato ex ΒΕ. Si enim possibile, sit quadrato ex ΒΖ æqualis, et ipsius

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ Β

διπλασίον²⁸ ὁ ΘΑ. Καὶ²⁹ συναχθήσεται πάλιν διπλασίον³⁰ ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τιμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³¹ ΖΓ ἴσον γενέσθαι τῇ ἀπὸ τοῦ³² ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³³ ΓΕ ἴσος τῇ ἀπὸ τοῦ³⁴ ΖΒ· ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ³⁵, ἔπειρ ἄτοπον· οὐκ ἄρα

ΔΖ duplus ΘΑ. Et concludetur rursus duplus ΘΓ ipsius ΓΖ, ita ut et ΓΘ bifariam dividatur in Ζ; et ob id ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΖΓ æqualis fit quadrato ex ΒΖ. Supponitur autem et ex ΑΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΖΒ; quare et ex ΘΒ, ΒΓ quadratus cum quadrato ex ΓΖ æqualis erit quadrato ex ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΓΕ, quod absurdum; non igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadratus

Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est supposé égal au carré de ΒΕ; donc le produit de ΗΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ. Le carré commun de ΓΕ étant retranché, on conclura que ΑΒ est égal à ΗΒ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ n'est pas égal au carré de ΒΕ. Je dis, de plus, qu'il n'est pas plus petit que le carré de ΒΕ. Car, si cela est possible, qu'il soit égal au carré de ΒΖ, et que ΘΑ soit double de ΔΖ. On conclura encore que ΘΓ est double de ΓΖ, de manière que ΓΘ sera partagé en deux parties égales en Ζ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le carré de ΖΓ sera égal au carré de ΒΖ (6. 2). Mais le produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ est supposé égal au carré de ΖΒ; donc le produit de ΘΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΖ sera égal au produit de ΑΒ par ΒΓ avec le carré de ΓΕ, ce qui est absurde; donc le produit de ΑΒ

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 187

ὁ ἐκ τῶν AB , BF μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ³⁶ FE ἴσος ἐστὶ τῷ³⁷ ἐλάττονι τοῦ ἀπὸ BE . Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ³⁸ τῷ ἀπὸ τοῦ BE , οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ·³⁹ οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB , BF μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ⁴⁰ FE τετράγωνός ἐστι. Δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύται, ἀρκέσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος⁴¹, ἵνα μὴ μακροτέρας οὐσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.

cum quadrato ex FE æqualis est quadrato minori quam est ipse ex BE . Ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE , neque majori quam est ipse; non igitur ex AB , BF quadratus cum quadrato ex FE quadratus est. Cum autem possibile sit, et in pluribus modis quod dictum demonstrare, sufficiat nobis expositus, ut ne longam tractationem longius producamus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Χ'.

Εὐρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμεις μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμετρου ἰαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ AB , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $\Gamma\Delta$, $\Delta\Xi$, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν¹ FE μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ

PROPOSITIO XXX.

Invenire duas rationales potentia solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine.

Exponentur enim aliqua rationalis AB , et duo quadrati numeri $\Gamma\Delta$, $\Delta\Xi$, ita ut excessus ipsorum FE non sit quadratus, et describatur super rectam AB semicirculus AZB , et fiat

par BF avec le quarré de FE n'est pas égal à un plus petit quarré que celui de BE . Mais on a démontré qu'il n'est pas égal au quarré de BE , ni à un quarré plus grand. Donc le produit de AB par BF avec le quarré de FE n'est pas un quarré. Ce lemme peut se démontrer de plusieurs manières; je me contenterai de celle que je viens d'exposer, afin de ne pas être trop long.

PROPOSITION XXX.

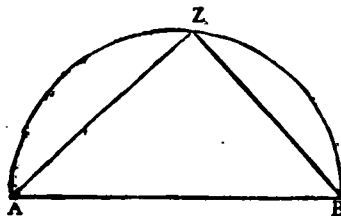
Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient une rationnelle AB , et deux nombres quarrés $\Gamma\Delta$, $\Delta\Xi$, de manière que leur excès FE ne soit pas un quarré (cor. 29. 10). Sur AB décrivons le demi-

188 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον², καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΒ.

ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad quadratum ex ΑΖ, et jungatur ΖΒ.



Γ Ε Δ

Ἐπεὶ οὖν³ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Πητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει

Quoniam igitur est ut ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ, ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam numerus ΔΓ ad numerum ΓΕ; commun-surabile igitur est ex ΒΑ quadratum quadrato ex ΑΖ. Rationale autem quadratum ex ΑΒ; rationale igitur et quadratum ex ΑΖ; rationalis igitur et ΑΖ. Et quoniam ΔΓ ad ΓΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex ΒΑ igitur quadratum ad ipsum ex ΑΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΑ ipsi ΑΖ longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΖ igitur rationales sunt potentiâ solum

cercle AZB; faisons en sorte que ΔΓ soit à ΓΕ comme le quarré de ΒΑ est au quarré de ΑΖ (6. 10), et joignons ΖΒ.

Car, puisque le quarré de ΒΑ est au quarré de ΑΖ comme ΔΓ est à ΓΕ, le quarré de ΒΑ aura avec le quarré de ΑΖ la raison que le nombre ΔΓ a avec le nombre ΓΕ; le quarré de ΒΑ sera donc commensurable avec le quarré de ΑΖ (6. 10). Mais le quarré de ΑΒ est rationel (déf. 8. 10); donc le quarré de ΑΖ est rationel (déf. 9. 10); donc la droite ΑΖ est rationelle (déf. 6. 10). Et puisque ΔΓ n'a pas avec ΓΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΑ n'aura pas avec le quarré de ΑΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc ΒΑ est incommensurable en longueur avec ΑΖ (9. 10); donc les rationelles ΒΑ, ΑΖ ne sont commensurables qu'en puissance (déf. 3. 10). Et

μένων σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ο δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἴστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ ἴστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μείζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει. Ὅπερ ἴδει παύεται.

commensurabiles. Et quoniam est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ex ΒΑ quadratum ad ipsum ex ΑΖ; convertendo igitur ut ΓΔ ad ΔΕ ita ex ΑΒ quadratum ad ipsum ex ΒΖ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et ex ΑΒ igitur quadratum ad ipsum ex ΒΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΑΒ ipsi ΒΖ longitudine. Atque est quadratum ex ΑΒ æquale quadratis ex ΑΖ, ΖΒ; ipsa ΑΒ igitur quam ΑΖ plus potest quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine.

Inventæ sunt igitur duæ rationales potentiæ solùm commensurabiles ΒΑ, ΑΖ, ita ut major ΑΒ quam minor ΑΖ plus possit quadrato ex rectâ ΒΖ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

puisque ΔΓ est à ΓΕ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΑΖ; par conversion ΓΔ est à ΔΕ comme le carré de ΑΒ est au carré de ΒΖ (19. 5 et 47. 1). Mais ΓΔ avec ΔΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc le carré de ΑΒ a avec le carré de ΒΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; donc ΑΒ est commensurable en longueur avec ΒΖ (9. 10). Mais le carré de ΑΒ est égal à la somme des carrés de ΑΖ et de ΖΒ (47. 1); donc la puissance de ΑΒ surpasse la puissance de ΑΖ du carré de la droite commensurable en longueur avec ΑΒ.

On a donc trouvé deux rationnelles ΒΑ, ΑΖ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande ΒΑ surpasse la puissance de la plus petite ΑΖ du carré de la droite ΒΖ commensurable en longueur avec ΑΒ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

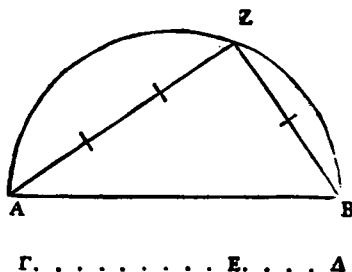
Εὕρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττωτος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ AB , καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ $ΓΕ$, $ΕΔ$, ὥστε τὸν συγκαίμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $ΓΔ$ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γιγράσθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ

PROPOSITIO XXXI.

Invenire duas rationales potentiâ solùm commensurabiles, ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine.

Exponentur rationalis AB , et duo quadrati numeri $ΓΕ$, $ΕΔ$, ita ut $ΓΔ$ compositus ex ipsis non sit quadratus, et describatur super rectam AB semicirculus AZB , et fiat ut $ΓΔ$ ad $ΓΕ$ ita ex



πιποιεῖσθω ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BZ . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὡς² ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ BA , AZ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $ΔΓ$ πρὸς τὸν $ΓΕ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ , ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ $ΓΔ$ πρὸς τὸν

AB quadratum ad ipsum ex AZ , et jungatur BZ ; similiter utique demonstrabimus, ut in antecedente, rectas BA , AZ rationales esse potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam est ut $ΔΓ$ ad $ΓΕ$ ita ex BA quadratum ad ipsum ex AZ ; convertendo igitur ut $ΓΔ$ ad $ΔΕ$ ita

PROPOSITION XXXI.

Trouver deux rationnelles commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite incommensurable en longueur avec elle.

Soient la rationnelle AB , et les deux nombres carrés $ΓΕ$, $ΕΔ$, de manière que leur somme $ΓΔ$ ne soit pas un carré (lem. 2. 29. 10); sur la droite AB , décrivons le demi-cercle AZB ; faisons en sorte que $ΓΔ$ soit à $ΓΕ$ comme le carré de AB est au carré de AZ (cor. 6. 10), et joignons BZ . Nous démontrerons semblablement comme auparavant que les rationnelles BA , AZ ne sont commensurables qu'en puissance. Puisque $ΔΓ$ est à $ΓΕ$ comme le carré de BA est au carré de AZ , par conversion

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 191

ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ. Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ἂν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BZ μήκει. Καὶ δύναται ἡ AB τῆς AZ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ AB, BZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῇ³ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι⁴.

ex AB quadratum ad ipsum ex BZ. Ipse autem ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est AB ipsi BZ longitudine. Et plus potest AB quam AZ quadrato ex recta ZB sibi incommensurabili; ipsæ AB, BZ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et AB quam AZ plus potest quadrato ex recta ZB sibi incommensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛϚ.

Εὐρεῖν δύο μίσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιχοῦσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εκκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ-

PROPOSITIO XXXII.

Invenire duas medias potentiâ solum commensurabiles, rationales continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine.

Exponentur enim duæ rationales potentiâ solum

ΓΔ sera à ΔΕ comme le quarré de AB est au quarré de BZ. Mais ΓΔ n'a pas avec ΔΕ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc le quarré de de AB n'a pas avec le quarré de BZ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; donc AB est incommensurable en longueur avec BZ (9. 10); donc la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré d'une droite ZB incommensurable avec AB; donc les rationelles AB, BZ ne sont commensurables qu'en puissance, et la puissance de AB surpasse la puissance de AZ du quarré de la droite ZB incommensurable en longueur avec AB. Ce qu'il fallait faire.

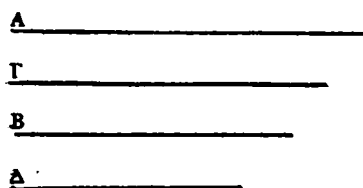
PROPOSITION XXXII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la plus grande.

Soient les deux rationelles A, B commensurables en puissance seulement,

μῖτροι αἱ A, B , ὥστε τὴν A μείζονα οὔσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς B μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ . Μείσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A, B μείσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ μείση ἄρα καὶ ἡ Γ . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ , ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B ῥητὸν ἄρα ἴστί³ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ . Καὶ ἐπεὶ ἴστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν

commensurabiles A, B , ita ut A major existens quam minor B plus possit quadrato ex recta sibi commensurabili longitudine. Et rectangulo sub A, B æquale sit quadratum ex Γ . Medium autem rectangulum sub A, B ; medium igitur et quadratum ex Γ ; media igitur et Γ . Quadrato autem ex B æquale sit rectangulum sub Γ, Δ , rationale autem quadratum ex B ; rationale igitur est et rectangulum sub Γ, Δ . Et quoniam est ut A ad B ita sub A, B rectangulum ad quadratum



A, B ἴσον ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς Γ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ . Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ . Σύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ

ex B ; sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Γ , quadrato autem ex B æquale rectangulum sub Γ, Δ ; ut igitur A ad B ita ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ . Ut autem ex Γ quadratum ad rectangulum sub Γ, Δ ita Γ ad Δ ; et ut igitur A ad B ita Γ ad Δ . Commensurabilis autem A ipsi B potentiâ solùm;

de manière que la puissance de la plus grande A surpasse la puissance de la plus petite B du quarré d'une droite commensurable en longueur avec A (30. 10). Que le quarré de Γ soit égal au rectangle sous A, B . Mais le rectangle sous A, B est médial (22. 10); donc le quarré de Γ est médial; donc la droite Γ est médiale. Que le rectangle sous Γ, Δ soit égal au quarré de B ; puisque le quarré de B est rationel, le rectangle sous Γ, Δ sera rationel. Et puisque A est à B comme le rectangle sous A, B est au quarré de B (1. 6), que le quarré de Γ est égal au rectangle sous A, B , et que le rectangle sous Γ, Δ est égal au quarré de B , la droite A sera à la droite B comme le quarré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ . Mais le quarré de Γ est au rectangle sous Γ, Δ comme Γ est à Δ ; donc A est à B comme Γ est à Δ . Mais A n'est commensurable avec B qu'en puissance; donc Γ n'est

Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μίση ἡ Γ· μίση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως⁴ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μίλλον δύναιται τῇ ἀπὸ συμμέτρου⁵ ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μίλλον δύναιται⁶ τῇ ἀπὸ συμμέτρου⁷ ἑαυτῇ.

Εὕρηται ἄρα δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ, ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μίλλον δύναιται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ⁸ μήκει. Οὗτω ἴδου ποιεῖσθαι⁹.

Ομοίως δὲ διελθόντες καὶ τὸ ἀπὸ ἀσύμμετρου, ὅταν τῆς Β μίλλον δύναιται ἡ Α τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ¹⁰.

commensurabilis igitur et Γ ipsi Δ potentiâ solum. Atque est media Γ; media igitur et Δ. Et quoniam est ut Α ad Β ita Γ ad Δ, ipsa autem Α quam Β plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Γ igitur quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solum commensurabiles Γ, Δ, rationale continentes, et Γ quam Δ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Quod oportebat facere.

Similiter utique ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando quam Β plus potest ipsa Α quadrato ex rectâ sibi incommensurabili.

commensurable avec Δ qu'en puissance (10. 10). Mais Γ est médial; donc Δ est médial (24. 10). Et puisque Α est à Β comme Γ est à Δ, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Β du quarré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré d'une droite commensurable avec Γ (15. 10).

On a donc trouvé deux médiales Γ, Δ commensurables en puissance seulement, qui comprennent un rectangle rationnel; et la puissance de Γ surpasse la puissance de Δ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec Γ. Ce qu'il fallait faire.

Si la puissance de Α surpassait la puissance de Β du quarré d'une droite incommensurable avec Α, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle rationnel, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

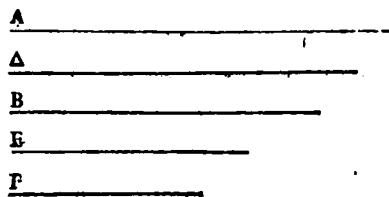
Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττωτος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἐκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, Γ , ὥστε τὴν A τῆς Γ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ^2 · μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ · καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ

PROPOSITIO XXXIII.

Invenire duas medias potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili.

Exponentur tres rationales potentiâ solùm commensurabiles A, B, Γ , ita ut A quam Γ plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et rectangulo quidem sub A, B æquale sit quadratum ex Δ ; medium igitur quadratum ex Δ ; et Δ igitur media est. Rectangulo autem sub B, Γ æquale sit rectangulum sub Δ, E .



τῶν Δ, E . Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον³ τὸ ὑπὸ

Et quoniam est ut sub A, B rectangulum ad ipsum sub B, Γ ita A ad Γ , sed rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Δ , rectangulo autem sub B, Γ æquale

PROPOSITION XXXIII.

Trouver deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande.

Soient les trois rationnelles A, B, Γ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de A surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec A (30. 10); que le carré de Δ soit égal au rectangle sous A, B (14. 2); le carré de Δ sera médial (22. 10), et la droite Δ médiale. Que le rectangle sous Δ, E soit égal au rectangle sous B, Γ (45. 1). Puisque le rectangle sous A, B est au rectangle sous B, Γ comme A est à Γ (1. 6), que le carré de Δ est égal au rectangle sous A, B , et que le rectangle sous Δ, E est égal au rectangle

τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ὡς δὲ⁴ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον⁵· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. Μίσση δὲ ἡ Δ· μίσση ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἔπει ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως⁶ ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Λέγω δὲ ὅτι καὶ μίσσην ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ γ⁷ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ⁸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μίσσην δὲ τὸ⁹ ὑπὸ τῶν Β, Γ· αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι¹⁰· μίσσην ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηται ἄρα δύο μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μίσσην περιέχουσιν· ὥστε τὴν μείζονα¹¹ τῆς ἐλάττονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι¹².

rectangulum sub Δ, Ε; est igitur ut Α ad Γ ita ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε. Ut autem ex Δ quadratum ad rectangulum sub Δ, Ε ita Δ ad Ε; et ut igitur Α ad Γ ita Δ ad Ε. Commensurabilis autem Α ipsi Γ potentiâ solùm; commensurabilis igitur et Δ ipsi Ε potentiâ solùm. Media autem Δ; media igitur et Ε. Et quoniam est ut Α ad Γ ita Δ ad Ε, ipsa autem Α quam Γ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et Δ igitur quam Ε plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Dico etiam et medium esse rectangulum sub Δ, Ε. Quoniam enim æquale est sub Β, Γ rectangulum rectangulo sub Δ, Ε, medium autem rectangulum sub Β, Γ; ipsæ enim Β, Γ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur et rectangulum sub Δ, Ε.

Inventæ sunt igitur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles Δ, Ε, medium continentes; ita ut major quam minor plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quod oportebat facere.

sous Β, Γ, la droite Α est à Γ comme le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε. Mais le carré de Δ est au rectangle sous Δ, Ε comme Δ est à Ε (32. 10); donc Α est à Γ comme Δ est à Ε. Mais Α n'est commensurable avec Γ qu'en puissance; donc Δ n'est commensurable avec Ε qu'en puissance (10. 10); mais Δ est médial; donc Ε est médial (24. 10). Et puisque Α est à Γ comme Δ est à Ε, et que la puissance de Α surpasse la puissance de Γ du carré d'une droite commensurable avec Α, la puissance de Δ surpassera la puissance de Ε du carré d'une droite commensurable avec Δ (15. 10). Je dis aussi que le rectangle sous Δ, Ε est médial. Car puisque le rectangle sous Β, Γ est égal au rectangle sous Δ, Ε, et que le rectangle sous Β, Γ est médial, parce que les rationnelles Β, Γ ne sont commensurables qu'en puissance, le rectangle sous Δ, Ε sera médial.

On a donc trouvé deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du carré d'une droite commensurable avec la plus grande. Ce qu'il fallait faire.

196 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Ομοίως δὲ πάλιν διχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἰαυτῇ¹³.

Λ Η Μ Μ Α.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω¹ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ² ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ³. Καὶ πρῶτον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ⁴ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ ὀρθογώνιου τριγώνου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἤκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπὶ ὁμοίων ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἴστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως

Similiter utique rursus ostendetur et quadratum ex incommensurabili, quando A quam Γ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili,

LEMMA.

Sit triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens sub ΒΑΓ angulum, et ducatur perpendicularis ΑΔ; dico rectangulum quidem sub ΓΒ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΒΑ, rectangulum autem sub ΒΓ, ΓΔ æquale quadrato ex ΓΑ, et rectangulum sub ΒΔ, ΔΓ æquale quadrato ex ΑΔ, et adhuc rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Et primum rectangulum sub ΓΒ, ΒΔ æquale esse quadrato ex ΒΑ.

Quoniam enim in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducitur ΑΔ, ipsa ΑΒΔ, ΑΔΓ igitur triacula similia sunt et toti triangulo ΑΒΓ et inter se. Et quoniam simile est ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΔ, est igitur ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΒΑ ad ΒΔ; rectangulum

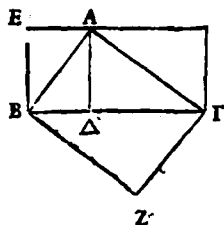
Si la puissance de A surpassait la puissance de Γ du quarré d'une droite incommensurable avec A, on démontrerait semblablement qu'on peut trouver deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent un rectangle médial, de manière que la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande,

LEMME.

Soit le triangle rectangle ΑΒΓ, dont l'angle droit est ΒΑΓ; menons la perpendiculaire ΑΔ; je dis que le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au quarré de ΒΑ, que le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au quarré de ΓΑ, que le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au quarré de ΑΔ, et enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis d'abord que le rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au quarré de ΒΑ.

Car puisque dans un triangle rectangle on a mené de l'angle droit la droite ΑΔ perpendiculaire à la base, les deux triangles ΑΒΔ, ΑΔΓ sont semblables au triangle entier ΑΒΓ, et semblables entr'eux (8. 6). Et puisque le triangle ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΓΒ est à ΒΑ comme ΒΑ est à ΒΔ (déf. 1. 6); donc le

ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ εἰάν ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μίση ἀνάλογόν ἐστιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.



λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὁμοίόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Εὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾖσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Καὶ ὅτι, εἰάν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπλη-

igitur sub ΓΒ, ΒΔ æquale est quadrato ex ΑΒ. Propter eadem utique et rectangulum sub ΒΓ, ΓΔ æquale est quadrato ex ΑΓ. Et quoniam si in rectangulo triangulo à recto angulo ad basim perpendicularis ducatur, ducta inter basim segmenta media proportionalis est; est igitur ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΑΔ ad ΔΓ; rectangulum igitur sub ΒΔ, ΔΓ æquale est quadrato ex ΔΑ. Dico

et rectangulum sub ΒΓ, ΑΔ æquale esse rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quoniam enim, ut dicebamus, simile est ΑΒΓ ipsi ΑΒΔ, est igitur ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΒΑ ad ΑΔ. Si autem quatuor rectæ proportionales sunt, rectangulum sub extremis æquale est rectangulo sub mediis; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Dico et si describamus ΕΓ rectangulum parallelogrammum, et com-

rectangle sous ΓΒ, ΒΔ est égal au carré de ΑΒ (17. 6). Par la même raison, le rectangle sous ΒΓ, ΓΔ est égal au carré de ΑΓ. Et puisque si de l'angle droit d'un triangle rectangle on mène une perpendiculaire à la base, la perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les segments de la base (cor. 8. 6), la droite ΒΔ est à ΔΑ comme ΑΔ est à ΔΓ (18. 6); donc le rectangle sous ΒΔ, ΔΓ est égal au carré de ΔΑ. Je dis enfin que le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Car puisque, comme nous l'avons dit, ΑΒΓ est semblable au triangle ΑΒΔ, ΒΓ est à ΓΑ comme ΒΑ est à ΑΔ. Mais si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle sous les extrêmes est égal au rectangle sous les moyennes (16. 6); donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ sera égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Je dis encore que, si nous décrivons le parallélogramme rectangle ΕΓ, et si nous

198. LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ρώσονται τὸ AZ, ἴσον ἴσται τὸ ΕΓ τῷ AZ, ἐκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ABΓ τριγώνου· καὶ ἴσται τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν⁶ ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. Οπιρ ἴδει διῆξει⁷.

pleamus AZ, æquale fore ΕΓ ipsi AZ, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ABΓ; atque est rectangulum quidem ΕΓ sub ΒΓ, ΑΔ, rectangulum autem AZ sub ΒΑ, ΑΓ; rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ æquale est rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 28.

Εὐρίῃν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Εκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τιτμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ἑποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβελήσθω παραλληλόγραμμον ἑλλειπόν ἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ γιγράσθω ἐπὶ

PROPOSITIO XXXIV.

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium.

Exponantur duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles AB, ΒΓ, ita ut major AB quam minor ΒΓ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et secetur ΒΓ bifariam ad Δ, et quadrato ab alterutrâ ipsarum ΒΔ, ΔΓ æquale ad rectam AB applicetur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et describatur super

achevons AZ, le rectangle ΕΓ sera égal au rectangle AZ, car chacun d'eux est double du triangle ABΓ; mais ΕΓ est le rectangle compris sous ΒΓ, ΑΔ, et AZ le rectangle compris sous ΒΑ, ΑΓ; donc le rectangle sous ΒΓ, ΑΔ est égal au rectangle sous ΒΑ, ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXXIV.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit rationelle, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial.

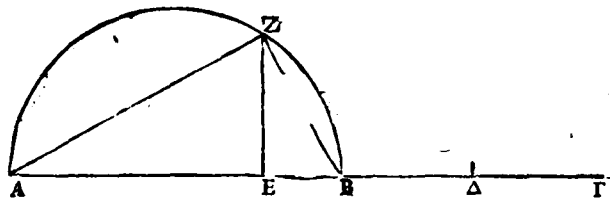
Soient les deux rationelles AB, ΒΓ commensurables en puissance seulement, de manière que la puissance de la plus grande AB surpasse la puissance de la plus petite ΒΓ du quarré d'une droite incommensurable avec AB (31, 10); coupons ΒΓ en deux parties égales en Δ; appliquons à AB un parallélogramme qui, étant égal à l'un ou à l'autre des quarrés des droites ΒΔ, ΔΓ, soit défailant d'une figure quarrée (26. 6), et que ce soit le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ; décrivons

τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ἑβὰς ἡ EZ, καὶ ἐπιζεύχωσαν αἱ AZ, ZB.

Καὶ ἵπτι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ AB, BG, καὶ ἡ AB τῆς BG μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς BG, τουτίστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβηται παραλληλόγραμμον ἡλλεῖπον ἰδίῳ τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB. Καὶ ἵπτι ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE, ἴσον δὲ τὸ

rectam AB semicirculus AZB, et ducatur ipsi AB ad rectos angulos ipsa EZ, et jungantur AZ, ZB.

Et quoniam duæ rectæ inæquales sunt AB, BG, et AB quam BG plus potest quadrato et rectâ sibi incommensurabili; quartæ autem parti quadrati ex BG, hoc est quadrato dimidiæ ipsius, æquale ad AB applicatur parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, et facit rectangulum sub AB, EB; incommensurabilis igitur est AE ipsi EB. Et quoniam est ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE, sed æquale quidem sub AB, AE rec-



μὲν ὑπὸ τῶν AB, AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· αἱ AZ, ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἵπτι ἡ AB ῥητὴ ἐστὶ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ

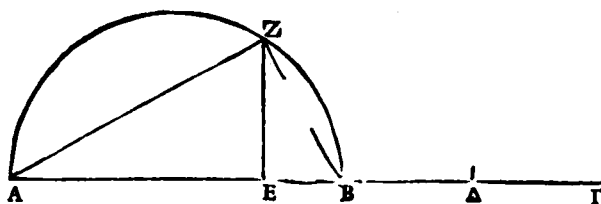
tangulum quadrato ex AZ; ipsum autem sub AB, BE rectangulum quadrato ex BZ; incommensurable igitur est ex AZ quadratum quadrato ex ZB; ergo AZ, ZB potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam AB rationalis est, rationale igitur est et

sur la droite AB le demi-cercle AZB; menons la droite EZ perpendiculaire à AB, et joignons AZ, ZB.

Puisque les deux droites AB, BG sont inégales; que la puissance de AB surpasse la puissance de BG du carré d'une droite incommensurable avec AB; qu'on a appliqué à AB un parallélogramme qui, étant égal à la quatrième partie du carré de BG, c'est-à-dire au carré de la moitié de cette droite, est défailant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme est contenu sous AE, EB, la droite AE sera incommensurable avec EB (19. 10). Et puisque AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE (1. 6), que le rectangle sous AB, AE est égal au carré de AZ, que le rectangle sous AB, BE est égal au carré de BZ, le carré de AZ sera incommensurable avec le carré de ZB; donc les droites AZ, ZB sont incommensurables en puissance. Et puisque la droite AB est ratio-

τὸ ἀπὸ τῆς AB ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ , ZB ῥητόν ἐστι. Καὶ ἔπει πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ , ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BA . διπλὴ ἄρα ἡ $BΓ$ τῆς EZ . ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ

quadratum ex AB ; quare et compositum ex quadratis ipsarum AZ , ZB rationale est. Et quoniam rursus rectangulum sub AE , EB æquale est quadrato ex EZ , supponitur autem sub AE , EB rectangulum et quadrato ex BA æquale; æqualis igitur est ZE ipsi BA ; dupla igitur $BΓ$



τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB , EZ . Μείσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μείσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ . Ἰσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ , ZB . μείσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB . Εδείχθη δὲ καὶ ῥητόν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ , ZB , ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μείσον. Ὅπρι ἴδιαι ποιῆσαι.

ipsius EZ ; quare et rectangulum sub AB , $BΓ$ commensurable est rectangulo sub AB , EZ . Medium autem rectangulum sub AB , $BΓ$; medium igitur et rectangulum sub AB , EZ . Æquale autem sub AB , EZ rectangulum rectangulo sub AZ , ZB ; medium igitur et rectangulum sub AZ , ZB . Ostensum est autem et rationale compositum ex ipsarum quadratis.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AZ , ZB , facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem sub ipsis medium. Quod oportebat facere.

nelle, le carré de AB est rationel; donc la somme des carrés de AZ et de ZB est rationelle. Et de plus, puisque le rectangle sous AE , EB est égal au carré de EZ , et que le rectangle sous AE , EB est supposé égal au carré de BA , la droite ZE est égale à BA ; donc $BΓ$ est double de EZ ; donc le rectangle sous AB , $BΓ$ est commensurable avec le rectangle sous AB , EZ (1. 6). Mais le rectangle sous AB , $BΓ$ est médial (22. 10); donc le rectangle sous AB , EZ est médial. Mais le rectangle sous AB , EZ est égal au rectangle sous AZ , ZB (lem. 1. 35); donc le rectangle sous AZ , ZB est médial. Mais on a démontré que la somme des carrés de AZ et de ZB est rationelle.

On a donc trouvé deux droites AZ , ZB incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs carrés est rationelle, et que le rectangle sous ces mêmes droites est médial. Ce qu'il fallait faire.

Επειὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BZ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA, AZ τῷ ἀπὸ τῆς AD, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BZ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AD τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ². Καὶ ἐπεὶ μείσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, μείσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AD, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ³ ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ⁴. Πητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ⁵· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ZΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν AD, ΔΒ⁶· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AD, ΔΒ ῥητὸν ἐστίν.

Εὐρίηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AD, ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν⁷ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μείσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ὅπερ ἴδιαι ποιεῖσαι.

Quoniam incommensurabilis est AZ ipsi ZB, ipcommensurable igitur est et sub BA, AZ rectangulum rectangulo sub AB, BZ. Sed æquale quidem sub BA, AZ rectangulum quadrato ex AD, sed sub AB, BZ rectangulum quadrato ex ΔΒ; incommensurable igitur est et ex AD quadratum quadrato ex ΔΒ. Et quoniam medium est quadratum ex AB, medium igitur et compositum ex ipsarum AD, ΔΒ quadratis. Et quoniam dupla est ΒΓ ipsius ΔΖ, duplum igitur et sub AB, ΒΓ rectangulum rectanguli sub AB, ZΔ. Rationale autem rectangulum sub AB, ΒΓ; rationale igitur et rectangulum sub AB, ZΔ. Rectangulum autem sub AB, ZΔ æquale rectangulo sub AD, ΔΒ; quare et rectangulum sub AD, ΔΒ rationale est.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ potentiâ incommensurabiles AD, ΔΒ, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale. Quod oportebat facere.

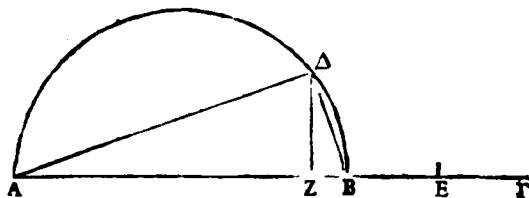
Puisque AZ est incommensurable avec ZB, le rectangle sous BA, AZ est incommensurable avec le rectangle sous AB, BZ (1. 6, et 10. 10). Mais le rectangle sous BA, AZ est égal au quarré de AD, et le rectangle sous AB, BZ est égal au quarré de ΔΒ (34. lem. 1. 10); le quarré de AD est donc incommensurable avec le quarré de ΔΒ. Mais le quarré de AB est médial; donc la somme des quarrés de AD et de ΔΒ est médiale. Et puisque ΒΓ est double de ΔΖ, le rectangle sous AB, ΒΓ est double du rectangle sous AB, ZΔ (1. 6). Mais le rectangle sous AB, ΒΓ est rationel; donc le rectangle sous AB, ZΔ est rationel. Mais le rectangle sous AB, ZΔ est égal au rectangle sous AD, ΔΒ (34. lem. 3. 10); le rectangle sous AD, ΔΒ est donc rationel.

On a donc trouvé deux droites AD, ΔΒ incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς'.

Εὕρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιοῦσας τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἵτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AΔB$, καὶ τὰ λοιπὰ γιγόνετω τοῖς ἐπάνω ἰμοίως² εἰρημίνοις.



Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρός ἐστιν³ ἡ AZ τῇ ZB μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ $AΔ$ τῇ $ΔB$ δυνάμει. Καὶ ἐπὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. Καὶ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB ἴσον

Invenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponentur duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB , $BΓ$, medium continentes, ita ut AB quam $BΓ$ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et describatur super rectam AB semicirculus $AΔB$, et reliqua fiant congruenter iis superiùs dictis.

Et quoniam incommensurabilis est AZ ipsi ZB longitudine, incommensurabilis est et $AΔ$ ipsi $ΔB$ potentiâ. Et quoniam medium est quadratum ex AB , medium igitur et compositum ex quadratis ipsarum $AΔ$, $ΔB$. Et quoniam rectangulum sub AZ , ZB æquale est quadrato

PROPOSITION XXXVI.

Trouver deux droites incommensurables en puissance, de manière que la somme de leurs quarrés soit médiale, et que le rectangle compris sous ces droites soit médial et incommensurable avec la somme des quarrés de ces mêmes droites.

Soient deux médiales AB , $BΓ$ commensurables en puissance seulement, et prenant une surface médiale, de manière que la puissance de AB surpasse la puissance de $BΓ$ du quarré d'une droite incommensurable avec AB (33. 10); et sur AB décrivons le demi-cercle $AΔB$, et faisons le reste comme il a été dit auparavant.

Puisque AZ est incommensurable en longueur avec ZB , la droite $AΔ$ est incommensurable en puissance avec $ΔB$. Et puisque le quarré de AB est médial, la somme des quarrés de $AΔ$ et de $ΔB$ est médiale. Et puisque le rectangle sous AZ , ZB est

ἴστι⁵ τῇ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE, ΔZ, ἴση ἄρα ἴστιν ἡ BE τῇ ΔZ⁶. διπλὴ ἄρα ἡ BΓ τῆς ΖΔ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλασίον ἴστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, ΖΔ. Μείσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μείσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΖΔ· καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, μείσον ἄρα⁷ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἴστιν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ BE· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ BE μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BE ἀσύμμετρον ἴστιν. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἴστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE ἴσον ἴστι τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΖΔ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ⁸.

Εὐρίηται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ⁹ δύναμει ἀσύμμετροι, ποιεῖσαι τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων¹⁰ μείσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μείσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. Ὅπρι ἴδει ποιεῖσαι.

égal au carré de l'une ou de l'autre des droites BE, ΔZ, la droite BE est égale à ΔZ; donc BΓ est double de ΖΔ; le rectangle sous AB, BΓ est donc double du rectangle sous AB, ΖΔ. Mais le rectangle sous AB, BΓ est médial; le rectangle sous AB, ΖΔ est donc médial; mais il est égal au rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (34. lem. 1. 10.); le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ est donc médial. Et puisque AB est incommensurable en longueur avec BΓ, et que ΓΒ est commensurable avec BE, la droite AB est incommensurable en longueur avec BE; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BE (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ est égale au carré de AB, et le rectangle sous AB, ΖΔ, c'est-à-dire le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, est égal au rectangle sous AB, BE; la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ.

On a donc trouvé deux droites ΑΔ, ΔΒ incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme des carrés de ces mêmes droites. Ce qu'il fallait faire.

ex alterutra ipsarum BE, ΔZ, æqualis igitur est BE ipsi ΔZ; dupla igitur BΓ ipsius ΖΔ; quare et rectangulum sub AB, BΓ duplum est rectanguli sub AB, ΖΔ. Medium autem rectangulum sub AB, BΓ; medium igitur et rectangulum sub AB, ΖΔ; atque est æquale rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ, medium igitur et rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam incommensurabilis est AB ipsi BΓ longitudine, commensurabilis autem ΓΒ ipsi BE; incommensurabilis igitur et AB ipsi BE longitudine; quare et ex AB quadratum rectangulo sub AB, BE incommensurabile est. Sed quadrato quidem ex AB æqualia sunt quadrata ex ΑΔ, ΔΒ, rectangulo autem sub AB, BE æquale est rectangulum sub AB, ΖΔ, hoc est rectangulum sub ΑΔ, ΔΒ; incommensurabile igitur est compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ.

Inventæ sunt igitur duæ rectæ ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΖ.

Εάν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συν-
τιθῶσιν, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἐκ
δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον
σύμμετροι αἱ AB, BG· λέγω ὅτι ὅλη ἡ AG
ἀλογός ἐστιν.

PROPOSITIO XXXVII.

Si duæ rationales potentiâ solùm commensu-
rabiles componantur, tota irrationalis est, vo-
cetur autem ex binis nominibus.

Componantur enim duæ rationales potentiâ
solùm commensurabiles AB, BG; dico totam AG
irrationalē esse.



Επεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BG
μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὥς
δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BG· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ
ὑπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς BG. Αλλὰ τῷ
μὲν ὑπὸ τῶν AB, BG σύμμετρόν ἐστι τὸ δις
ὑπὲρ τῶν AB, BG, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BG σύμμετρά
ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG· αἱ γὰρ AB, BG ῥηταὶ
ὥς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα

Quoniam enim incommensurabilis est AB
ipsi BG longitudine, potentiâ enim solùm sunt
commensurabiles, ut autem AB ad BG ita sub
AB, BG rectangulum ad quadratum ex BG; in-
commensurable igitur est sub AB, BG rectan-
gulum quadrato ex BG. Sed rectangulo quidem
sub AB, BG commensurable est rectangulum bis
sub AB, BG, quadrato autem ex BG commensu-
rabilia sunt quadrata ex AB, BG; ipsæ enim AB,
BG rationales sunt potentiâ solùm commensura-
biles; incommensurable igitur est bis sub AB,

PROPOSITION XXXVII.

Si l'on ajoute deux rationnelles commensurables en puissance seulement, leur
somme sera irrationnelle, et sera appelée droite de deux noms.

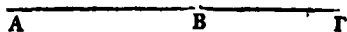
Ajoutons les deux rationnelles AB, BG commensurables en puissance seulement;
je dis que leur somme AG est irrationnelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec BG, ces deux droites
n'étant commensurables qu'en puissance, et que AB est à BG comme le rectangle
sous AB, BG est au carré de BG (1. 6), le rectangle sous AB, BG est incommen-
surable avec le carré de BG (10. 10). Mais le double rectangle sous AB, BG est
commensurable avec le rectangle sous AB, BG (6. 10), et la somme des carrés
de AB et de BG est commensurable avec le carré de BG (16. 10), car les droites
AB, BG sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; le double

206 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴσται τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $BΓ^3$, καὶ συνθίῃσι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$, τουτίσται τὸ

$BΓ$ rectangulum quadratis ex AB , $BΓ$, et componendo, rectangulum bis sub AB , $BΓ$ cum quadratis ex AB , $BΓ$, hoc est quadratum ex $ΑΓ$



ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἀσύμμετρον ἴσται τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. Ρητὸν δὲ τὸ συγκειμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄλογον ἄρα ἴσται τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ὥστε καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστι, καλίσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων⁵.

incommensurable est composito ex ipsarum AB , $BΓ$ quadratis. Rationale autem compositum ex ipsarum AB , $BΓ$ quadratis; irrationale igitur est quadratum ex $ΑΓ$; quare et $ΑΓ$ irrationalis est; vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη.

Εὰν δύο μῖσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντιθῶσι, ῥητὸν περιέχουσιν· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλίσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μῖσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$, ῥητὸν περιέχουσιν· λέγω ὅτι ὅλη ἡ $ΑΓ$ ἄλογός ἐστιν.

Επὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄρα ἀσύμ-

PROPOSITIO XXXVIII.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, rationale continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB , $BΓ$, rationale continentes; dico totam $ΑΓ$ irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi $BΓ$ longitudine, et quadrata ex AB , $BΓ$ igitur

rectangle sous AB , $BΓ$ est donc incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de $BΓ$; donc, par addition, le double rectangle sous AB , $BΓ$ avec la somme des quarrés de AB et de $BΓ$, c'est-à-dire le quarré de $ΑΓ$ (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de $BΓ$ (17. 10). Mais la somme des quarrés de AB , $BΓ$ est rationnelle; le quarré de $ΑΓ$ est donc irrationnel (déf. 10. 10); la droite $ΑΓ$ est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et sera appelée droite de deux noms.

PROPOSITION XXXVIII.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme sera irrationnelle, et sera la première de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB , $BΓ$, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle; je dis que leur somme $ΑΓ$ est irrationnelle.

Car, puisque AB est incommensurable en longueur avec $BΓ$, la somme des

μιστρά ἴστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ συν- incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AB, BG; et componendo, quadrata ex AB, BG cum



ὑπὸ τῶν AB, BG, ὅπερ ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς AΓ, ἀσύμμετρόν ἴστί τῷ ὑπὸ τῶν AB, BG. Πητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG, ὑπόκειται γὰρ αἱ AB, BG ῥητὸν περιέχουσας³. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AΓ· ἄλογος ἄρα ἡ AΓ, καλεῖσθαι δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη⁴.

rectangulo bis sub AB, BG, quod est quadratum ex AΓ, incommensurable est rectangulo sub AB, BG. Rationale autem rectangulum sub AB, BG, supponuntur enim ipsæ AB, BG rationale continere; irrationale igitur quadratum ex AΓ; irrationalis igitur AΓ, vocetur autem ex binis mediis prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΘ'.

Εὰν δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι συντιθῶσι, μέσον περιέχουσας· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Συγκείμεθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ AB, BG, μέσον περιέχουσας· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AΓ.

PROPOSITIO XXXIX.

Si duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles componantur, medium continentes, tota irrationalis est, vocetur autem ex binis mediis secunda.

Componantur enim duæ mediæ potentiâ solùm commensurabiles AB, BG, medium continentes; dico irrationalem esse AΓ.

quarrés de AB et de BG est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (13. 10); donc, par addition, la somme des quarrés de AB et de BG avec le double rectangle sous AB, BG, c'est-à-dire le quarré de AΓ (4. 2), est incommensurable avec le rectangle sous AB, BG. Mais le rectangle sous AB, BG est rationel, car les droites AB, BG sont supposées comprendre un rectangle rationel; le quarré de AΓ est donc irrationnel; la droite AΓ sera donc irrationnelle, et sera appelée la première de deux médiales.

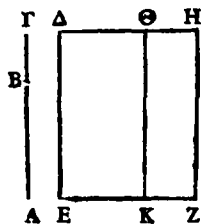
PROPOSITION XXXIX.

Si l'on ajoute deux médiales, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale, leur somme sera irrationnelle, et sera appelée la seconde de deux médiales.

Ajoutons les deux médiales AB, BG, qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface médiale; je dis que la droite AΓ est irrationnelle.

Εκκείσθω γάρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβελήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. Καὶ ἵπαι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβελήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Καὶ ἵπαι μίση ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μίση ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. Μίσην δὲ ὑπέκκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν

Exponatur enim rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΓ æquale ad ΔΕ applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ. Et quoniam quadratum ex ΑΓ æquale est et quadratis ex ΑΒ, ΒΓ et rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, applicetur etiam quadratis ex ΑΒ, ΒΓ ad ΔΕ æquale ΕΘ; reliquum igitur ΖΘ æquale est rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ. Et quoniam media est utraque ipsarum ΑΒ, ΒΓ; media igitur sunt et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ. Medium autem supponitur et rectangulum



ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἴστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μίσην ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΖΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ΔΘ, ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ

bis sub ΑΒ, ΒΓ, atque est quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale ΕΘ, rectangulo verò bis sub ΑΒ, ΒΓ æquale ΖΘ; medium igitur utrumque ipsorum ΕΘ, ΖΘ, et ad rationalem ΔΕ applicantur; rationalis igitur est utraque ipsarum ΔΘ, ΘΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Quoniam igitur incommensurabilis est

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un parallélogramme ΔΖ, qui étant égal au carré de ΑΓ, ait ΔΗ pour largeur (45. 1). Puisque le carré de ΑΓ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et du double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ (4. 2), appliquons à ΔΕ un rectangle ΕΘ égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, le rectangle restant ΖΘ sera égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ. Mais chacune des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, les carrés de ΑΒ et de ΒΓ sont donc médiaux. Et puisque, par supposition, le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, que ΕΘ est égal à la somme des carrés de ΑΒ et de ΒΓ, et que ΖΘ est égal au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, chacun des rectangles ΕΘ, ΖΘ est médial, et ils sont appliqués à la rationnelle ΔΕ; chacune des droites ΔΘ, ΘΗ est donc rationnelle (23. 10) et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΒ est incom-

AB τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἴστιν ὥς ἡ AB πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων, τῇ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ σύμμετρον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῇ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει. Εδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΔΗ ἀλογός ἐστι. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ρητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἀλογόν ἐστιν· ἀλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον· καὶ ἡ δυναμένη αὐτοῦ ἀλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἀλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλίσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα¹⁰.

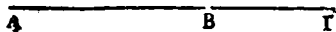
AB ipsi BG longitudine, atque est ut AB ad BG ita ex AB quadratum ad rectangulum sub AB, BG; incommensurable igitur est ex AB quadratum rectangulo sub AB, BG. Sed quadrato quidem ex AB commensurable est compositum ex quadratis ipsarum AB, BG, rectangulo autem sub AB, BG commensurable est rectangulum bis sub AB, BG; incommensurable igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB, BG rectangulo bis sub AB, BG. Sed quadratis quidem ex AB, BG æquale est ipsum ΕΘ, rectangulo autem bis sub AB, BG æquale est ipsum ΘΖ; incommensurable igitur est ΕΘ ipsi ΘΖ; quare et ΔΘ ipsi ΘΗ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem rationales; ipsæ ΔΘ, ΘΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare ΔΗ irrationalis est. Rationalis autem ΔΕ, sed sub irrationali et rationali contentum rectangulum irrationalis est; irrationalis igitur est ΔΖ spatium; et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΖ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem ex binis mediis secunda.

mesurable en longueur avec BG, et que AB est à BG comme le carré de AB est au rectangle sous AB, BG (1. 6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous AB, BG (10. 10). Mais la somme des carrés de AB et de BG est commensurable avec le carré de AB; et le double rectangle sous AB, BG est commensurable avec le rectangle sous AB, BG; la somme des carrés de AB et de BG est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (14. 10). Mais ΕΘ est égal à la somme des carrés de AB et de BG, et ΘΖ est égal au double rectangle sous AB, BG; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΖ; la droite ΔΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΔ. Mais on a démontré que ces droites sont rationnelles; les droites ΔΘ, ΘΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΔΗ est donc irrationnelle (37. 10). Mais la droite ΔΕ est rationnelle, et un rectangle compris sous une irrationnelle et sous une rationnelle est irrationnel; la surface ΔΖ est donc irrationnelle, et par conséquent la droite qui peut cette surface. Mais la puissance de ΑΓ est égale à ΔΖ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée la seconde de deux médiales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Εάν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντι-
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
μείσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἀλογός ἐστι, καλεῖσθω
δὲ μείζων.

Συγκείμεσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι, αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα·
λέγω ὅτι ἀλογός ἐστιν ἡ AG.



Επεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον ἐστὶ,
καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG μείσον ἐστὶ.
Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ῥητὸν·
ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG
τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG· ὥστε
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ
τῶν AB, BG, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG, ἀσύμ-
μετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
AB, BG· ἀλογὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG·
ὥστε καὶ ἡ AG ἀλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείζων.

PROPOSITIO XL.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes quidem compositum ex
ipsarum quadratis rationale, rectangulum autem
sub ipsis medium; tota recta irrationalis est,
vocetur autem major.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB, BG, facientes præposita;
dico irrationalem esse AG.

Quoniam enim rectangulum sub AB, BG me-
dium est, et rectangulum igitur bis sub AB,
BG medium est. Sed compositum ex quadratis
ipsarum AB, BG rationale; incommensurable
igitur est rectangulum bis sub AB, BG compo-
sito ex quadratis ipsarum AB, BG; quare et
ex AB, BG quadrata cum rectangulo bis sub
AB, BG, quod est quadratum ex AG, incommen-
surabilia sunt composito ex quadratis ipsarum
AB, BG; irrationalis igitur est quadratum ex AG;
quare et AG irrationalis est, vocetur autem major.

PROPOSITION XL.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationnelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée majeure.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Puisque le rectangle sous AB, BG est médial, le double rectangle sous AB, BG sera médial (24. cor. 10). Mais la somme des quarrés de AB et de BG est rationnelle; le double rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BG; donc la somme des quarrés de AB et de BG avec le double rectangle sous AB, BG, c'est-à-dire le quarré de AG (4. 2), est incommensurable avec la somme des quarrés de AB et de BG (17. 10); le quarré de AG est donc irrationnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle sera appelée majeure.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

Εὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μίσην, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν
ῥητόν· ἡ ἑλὴν εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ
ῥητόν καὶ μίσην δυναμένην.

Συγκείμεσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι αἱ AB, BG, ποιῶσαι τὰ προκείμενα·
λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG.

A B Γ

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
AB, BG μίσην ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG
ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG·
ὥστε καὶ συνθίγεται² τὸ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρον
ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG. Ῥητόν δὲ τὸ δις
ὑπὸ τῶν AB, BG· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG·
ἄλογος ἄρα ἡ AG, καλεῖσθαι δὲ ῥητόν καὶ μίσην
δυναμένην².

PROPOSITIO XLI.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes quidem compositum ex
ipsarum quadratis medium, rectangulum autem
sub ipsis rationale; tota recta irrationalis est,
vocetur autem rationale et medium potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB, BG, facientes proposita;
dico irrationalem esse AG.

Quoniam enim compositum ex quadratis ip-
sarum AB, BG medium est, rectangulum autem
bis sub AB, BG rationale; incommensurable
igitur est compositum ex quadratis ipsarum AB,
BG rectangulo bis sub AB, BG; quare et compo-
nendo, quadratum ex AG incommensurable est
rectangulo bis sub AB, BG. Rationale autem rec-
tangulum bis sub AB, BG; irrationalis igitur
quadratum ex AG; irrationalis igitur AG, vo-
cetur autem rationale et medium potens.

PROPOSITION XLI.

Si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs
quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant rationel, la droite
entière sera irrationelle, et sera appelée celle qui peut une rationelle et une
médiale.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites
faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationelle.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BG est médiale, et que le
double rectangle sous AB, BG est rationel, la somme des quarrés de AB et de BG
sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG; donc, par addition,
le quarré de AG est incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG (17. 10).
Mais le double rectangle sous AB, BG est rationel; le quarré de AG est donc irra-
tionel; la droite AG est donc irrationelle, et elle est appelée celle qui peut une
rationelle et une médiale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ.

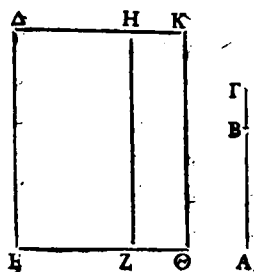
PROPOSITIO XLII.

Εάν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντε-
θῶσι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'
αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν
μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκείμενῳ ἐκ
τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων¹. ἡ ὅλη εὐθεῖα
ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ δύο μέσα δυναμίνη.

Συγκείσθωσαν γάρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ-
μετροι αἱ AB, BG, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα².
λίσσω ὅτι ἡ AG ἄλογός ἐστιν.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles
componantur, facientes et compositum ex ip-
sarum quadratis medium, et rectangulum sub
ipsis medium, et adhuc incommensurable com-
posito ex ipsarum quadratis; tota recta irratio-
nalis est, vocetur autem bina media potens.

Componantur enim duæ rectæ potentiâ in-
commensurabiles AB, BG, facientes proposita;
dico AG irrationalem esse.



Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβιβλήσθω παρὰ
τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ
δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ
μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB,

Exponatur rationalis ΔΕ, et applicetur ad ΔΕ
quadratis quidem ex AB, BG æquale ipsum ΔΖ,
rectangulo autem bis sub AB, BG æquale ipsum
ΗΘ; totum igitur ΔΘ æquale est quadrato ex ΑΓ.
Et quoniam medium est compositum ex qua-

PROPOSITION XLII.

Si l'on ajoute deux grandeurs incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le rectangle sous ces droites étant médial et incommensurable avec la somme de leurs quarrés, la droite entière sera irrationnelle, et sera appelée celle qui peut deux médiales.

Ajoutons les deux droites AB, BG incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui est proposé; je dis que la droite AG est irrationnelle.

Soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un rectangle ΔΖ égal à la somme des quarrés de AB et de BG, et que ΗΘ soit égal au double rectangle sous AB, BG; le rectangle entier ΔΘ sera égal au quarré de ΑΓ (4. 2). Et puisque la somme des

ΒΓ, καὶ ἴστιν³ ἴσον τῷ ΔΖ· μίσην ἄρα ἴστί καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἴστιν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΗΚ ῥητὴ ἴστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἴστι τὰ⁴ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα⁵ ἴστί τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἴστι. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἴστιν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἴστί τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἴστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἴστιν ἡ ΑΓ, καλεῖσθαι δὲ δύο μίσην δυνάμειν⁶.

dratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, atque est æquale ipsi ΔΖ; medium igitur est et ΔΖ; et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Propter eadem utique et ΗΚ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΗΖ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; incommensurable igitur est ΔΖ ipsi ΗΘ; quare et ΔΗ ipsi ΗΚ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΔΗ, ΗΚ rationales sunt potentia solum commensurabiles; irrationalis igitur est ΔΚ quæ appellatur ex binis nominibus. Rationalis autem ΔΕ; irrationalis igitur est ΔΘ, et potens ipsum irrationalis est. Potest autem ipsum ΔΘ ipsa ΑΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem bina media potens.

quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΖ, le rectangle ΔΖ est médial, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; donc ΔΗ est rationel (23. 10), et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Par la même raison, la rationelle ΗΚ est incommensurable en longueur avec ΗΖ, c'est-à-dire avec ΔΕ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΒ et de ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le rectangle ΔΖ est incommensurable avec ΗΘ; donc ΔΗ est incommensurable avec ΗΚ (1. 6, et 10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΗ, ΗΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; donc ΔΚ est la droite irrationelle appelée de deux noms (37. 10). Mais ΔΕ est rationel; donc ΔΘ est irrationel (39. 10), et par conséquent la droite qui peut ΔΘ. Mais ΑΓ peut ΔΘ; donc ΑΓ est irrationel, et cette droite est appelée celle qui peut deux médiales.

ΛΗΜΜΑ.

Εκκείσθω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἀνισα καθ' ἑκατέρᾳ τῶν Γ , Δ , καὶ ὑποκείσθω μείζων ἡ $ΑΓ$ τῆς $\DeltaΒ$. λήγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $\DeltaΒ$.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E . Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $\DeltaΒ$, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ $\DeltaΓ$. καὶ² λοιπὴ ἄρα ἡ $ΑΔ$ λοιπῆς τῆς $ΓΒ$ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΒ$. ἐλάττων ἄρα

LEMMA.

Exponatur recta AB , et secetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ , Δ , et supponatur major $ΑΓ$ quam $\DeltaΒ$; dico quadrata ex $ΑΓ$, $ΓΒ$ majora esse quadratis ex $ΑΔ$, $\DeltaΒ$.

Secetur enim AB bifariam in E . Et quoniam major est $ΑΓ$ quam $\DeltaΒ$, communis auferatur $\DeltaΓ$; et reliqua igitur $ΑΔ$ quam reliqua $ΓΒ$ major est. $\mathcal{A}$ equalis autem $ΑΕ$ ipsi $ΕΒ$; minor



ἐστίν³ ἡ $ΔΕ$ τῆς $ΕΓ$. τὰ Γ , Δ ἄρα σημεία οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΒ$ ⁴. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$. Ὡν τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΕ$ ἱλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$. καὶ λοιπὸν ἄρα

igitur est $ΔΕ$ quam $ΕΓ$; ergo Γ , Δ puncta non æqualiter distant à bipartitâ sectione. Et quoniam sub $ΑΓ$, $ΓΒ$ rectangulum cum quadrato ex $ΕΓ$ æquale est quadrato ex $ΕΒ$, sed et sub $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ rectangulum cum quadrato ex $ΔΕ$ æquale quadrato ex $ΕΒ$; ergo sub $ΑΓ$, $ΓΒ$ rectangulum cum quadrato ex $ΕΓ$ æquale est sub $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ rectangulo cum quadrato ex $ΔΕ$. Quorum quadratum ex $ΔΕ$ minus est quadrato ex $ΕΓ$; et

LEMME.

Soit la droite AB , que cette droite entière soit coupée en parties inégales aux points Γ , Δ , et supposons $ΑΓ$ plus grand que $\DeltaΒ$; je dis que la somme des quarrés $ΑΓ$ et de $ΓΒ$ est plus grande que la somme des quarrés de $ΑΔ$ et de $\DeltaΒ$.

Coupons AB en deux parties égales en E . Puisque $ΑΓ$ est plus grand que $\DeltaΒ$, retranchons la partie commune $\DeltaΓ$; le reste $ΑΔ$ sera plus grand que le reste $ΓΒ$. Mais $ΑΕ$ est égal à $ΕΒ$; donc $ΔΕ$ est plus petit que $ΕΓ$; les points Γ , Δ ne sont donc pas également éloignés du point qui coupe AB en deux parties égales. Et puisque le rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$ avec le quarré de $ΕΓ$ est égal au quarré de $ΕΒ$, et que le rectangle sous $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ avec le quarré de $ΔΕ$ est égal au quarré de $ΕΒ$ (5. 2), le rectangle sous $ΑΓ$, $ΓΒ$ avec le quarré de $ΕΓ$ sera égal au rectangle sous $ΑΔ$, $\DeltaΒ$ avec le quarré de $ΔΕ$. Mais le quarré de $ΔΕ$ est plus petit que le quarré de $ΕΓ$; le rec-

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζον ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Οπερ ἔδει διῆξαι⁵.

reliquum igitur rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo sub ΑΔ, ΔΒ; quare et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; et reliquum igitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ majus est composito ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

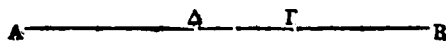
Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητάς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

PROPOSITIO XLIII.

Recta ex binis nominibus ad unum solum punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus recta ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ergo ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentiâ solum commensurabiles.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητάς εἶναι δυνάμει μόνον

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ rationales sint potentiâ solum com-

measurable. Le rectangle restant sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme restante des quarrés de ΑΓ et de ΒΓ est donc plus grande que la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIII.

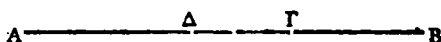
La droite de deux noms ne peut être divisée en ses noms qu'en un point seulement.

Que la droite ΑΒ de deux noms soit divisée en ses noms au point Γ; les droites rationnelles ΑΓ, ΓΒ ne seront commensurables qu'en puissance; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être coupée en un autre point en deux rationnelles commensurables en puissance seulement.

Car si cela se peut, qu'elle soit coupée au point Δ, de manière que les ra-

συμμέτρους. Φανερὸν δὲ ἔστι ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΔΒ$ οὐκ ἴσθιν ἡ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔσται δὲ καὶ ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΓΒ$ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$ οὕτως ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΑ$, καὶ ἔσται ἡ $ΑΒ$ κατὰ τὸ αὐτὸ τμήμα κατὰ τὸ $Γ^2$ διαιρίσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ $Δ$, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΔΒ$ ἴσθιν ἡ αὐτή· διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὰ $Γ, Δ$ σημεῖα οὐκ

mensurabiles. Evidens utique est $ΑΓ$ cum ipsâ $ΔΒ$ non esse eandem. Si enim possibile, sit; erit igitur et $ΑΔ$ cum ipsâ $ΓΒ$ eadem; et erit ut $ΑΓ$ ad $ΓΒ$ ita $ΒΔ$ ad $ΔΑ$, et erit $ΑΒ$ in idem segmentum divisa in puncto $Γ$ atque in puncto $Δ$, quod non supponitur; non igitur $ΑΓ$ cum ipsâ $ΔΒ$ est eadem; ob id igitur et $Γ, Δ$ puncta non æqualiter distant



ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· ὅ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$, τούτῃ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$, διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ, ΓΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ διαφέρει ῥητῶν, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ, ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ,$

à bipartitâ sectione; quo igitur differunt ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata à quadratis ex $ΑΔ, ΔΒ$, hoc differt et rectangulum bis sub $ΑΔ, ΔΒ$ à rectangulo bis sub $ΑΓ, ΓΒ$, propterea quòd et ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata cum rectangulo bis sub $ΑΓ, ΓΒ$ et ex $ΑΔ, ΔΒ$ quadrata cum rectangulo bis sub $ΑΔ, ΔΒ$ æqualia sunt quadrato ex $ΑΒ$. Sed ex $ΑΓ, ΓΒ$ quadrata à quadratis ex $ΑΔ, ΔΒ$ differunt rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis igitur sub $ΑΔ, ΔΒ$ à rectangulo

tionelles $ΑΔ, ΔΒ$ ne soient commensurables qu'en puissance. Il est évident que $ΑΓ$ n'est pas égal à $ΔΒ$. Car que cela soit, si c'est possible; la droite $ΑΔ$ sera alors égale à $ΓΒ$, la droite $ΑΓ$ sera à la droite $ΓΒ$ comme $ΒΔ$ est à $ΔΑ$, et la droite $ΑΒ$ sera coupée en segments égaux au point $Δ$ qu'au point $Γ$, ce qui n'est pas supposé; donc $ΑΓ$ n'est pas égal à $ΔΒ$; donc les points $Γ, Δ$ ne sont pas également éloignés du point qui coupe $ΑΒ$ en deux parties égales; donc la différence de la somme des quarrés de $ΑΓ$ et de $ΒΓ$, à la somme des quarrés de $ΑΔ$ et de $ΔΒ$, est égale à la différence du double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$, au double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$; parce que la somme des quarrés de $ΑΓ$ et de $ΓΒ$ avec le double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$, et la somme des quarrés de $ΑΔ$ et $ΔΒ$ avec le double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$, sont égales chacune au quarré de $ΑΒ$ (4. 2). Mais la différence de la somme des quarrés de $ΑΓ$ et de $ΓΒ$, à la somme des quarrés de $ΑΔ$ et de $ΔΒ$, est une surface rationnelle; car ces deux sommes sont rationnelles; donc la différence du double rectangle sous $ΑΔ, ΔΒ$ au double rectangle sous $ΑΓ, ΓΒ$ est une surface

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 217.

ΓΒ διαφέρει ρητῶ μίσα ὄντα, ἔπερ ἄτοπον· μίσην γὰρ⁵ μίσην οὐχ ὑπερίχει ρητῶ· οὐκ ἄρα ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

bis sub ΑΓ, ΓΒ differt rationali, media existentia, quod absurdum; medium enim non medium superat rationali; non igitur recta ex binis nominibus ad aliud et aliud punctam dividitur; ad unum igitur solum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται¹.

Ἐστω² ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ρητὸν περιχούσας· λίγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

PROPOSITIO XLIV.

Ex binis mediis prima ad unum solum punctum dividitur.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediarum sint potentia solum commensurabiles, rationale continentes; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ρητὸν περιχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾗ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ mediarum sint potentia solum commensurabiles, rationale continentes. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ

rationelle, ces surfaces étant médiales, ce qui est absurde; car une surface mediale ne surpasse pas une surface mediale d'une rationelle (27. 10); une droite de deux noms ne peut donc pas être divisée en plus d'un point; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLIV.

La première de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

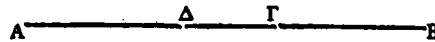
Que la droite ΑΒ, première de deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle; je dis que la droite ΑΒ ne peut être divisée en un autre point.

Car, si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que les médiales ΑΔ, ΔΒ, commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationelle. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au

218 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῶ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· ῥητῶ ἄρα δια-

à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, rationali autem differt rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, rationalia enim utraque;



φέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα καθ' ἓν ἄρα μόνον. Ὅπρι ἴδι διῆξαι.

rationali igitur differunt et ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, media existentia, quod absurdum; non igitur ex binis mediis prima ad aliud et aliud punctum dividitur in nomina; ad unum igitur solum. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μί.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται¹.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δευτέρω μόνον συμμετρους μέσον περιχούσας· φα-

PROPOSITIO XLV.

Ex binis mediis secunda ad unum solum punctum dividitur.

Sit ex binis mediis secunda ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentiâ solum commensurabiles, medium continentes;

double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ à la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ, et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ diffèrent d'une surface rationnelle; car l'une et l'autre de ces grandeurs sont rationnelles; la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ diffère donc d'une surface rationnelle de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est absurde (27. 10); donc une première de deux médiales ne peut pas être divisée en ses noms en deux points différents; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLV.

La seconde de deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

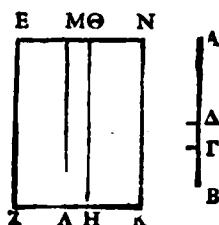
Que ΑΒ, seconde de deux noms, soit divisée au point Γ, de manière que les médiales ΑΓ, ΓΒ, qui comprennent une surface médiale, ne soient commensu-

νερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ² οὐκ εἰσὶ μῆκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ³ κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ⁴, ὥς ἑπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς

evidens est utique punctum Γ non esse in bipartitâ sectione, quoniam non sunt longitudine commensurabiles; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita ut ΑΓ cū ipsâ ΔΒ non sit eadem, sed ΑΓ major ex hypothesi. Evidens est utique quadrata ex ΑΔ, ΔΒ minora esse quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, ut suprâ ostendimus, et ΑΔ, ΔΒ medias esse potentîâ



ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιχούσας. Καὶ⁵ ἐκκείσθω ῥητὴ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον⁶ παρατελέσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφείσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἔστί τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπιν

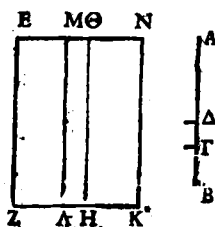
solum commensurabiles, medium continentes. Et exponatur rationalis ΕΖ, et quadrato quidem ex ΑΒ æquale ad ΕΖ parallelogrammum rectangulum applicetur ΕΚ, quadratis autem ex ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΕΗ; reliquum igitur ΕΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rursus et quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, quæ minora os-

rables qu'en puissance. Il est évident que le point Γ n'est pas le milieu de ΑΒ, parce que les droites ΑΓ, ΓΒ ne sont pas commensurables en longueur; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car si cela est possible, qu'elle soit divisée au point Δ, de manière que ΑΓ ne soit pas égal à ΔΒ, et supposons que ΑΓ est plus grand que ΔΒ. Il est évident que la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus petite que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme nous l'avons démontré plus haut (lem. 43. 10), et que les médias ΑΔ, ΔΒ, qui comprennent une surface médiale, ne sont commensurables qu'en puissance (43. 10). Soit la rationnelle ΕΖ; appliquons à ΕΖ un rectangle ΕΚ égal au quarré de ΑΒ, et retranchons ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; le reste ΕΚ sera égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (4. 2). De plus, retranchons ΕΔ égal à la somme des quarrés de ΑΔ et ΔΒ, qui est plus petite que

ἐλάσσονα εἰδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μίσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μίσην ἄρα καὶ⁸ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμε-

tensa sunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, æquale auferatur ΕΛ; et reliquum igitur ΜΚ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam media sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; incommensu-



τρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει· γάρ ὅσοι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ

rabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabile igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, potentiâ enim sunt commensurabiles ΑΓ, ΓΒ; rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis

la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, comme on l'a démontré; le reste ΜΚ sera égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Et puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, le rectangle ΕΗ sera médial; mais ce rectangle est appliqué à la rationnelle ΕΖ; donc ΕΘ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais les médiales ΑΓ, ΓΒ ne sont commensurables qu'en puissance; donc ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le quarré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (1. 6); le quarré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (10. 10). Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le quarré de ΑΓ (16. 10), car les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commen-

τῶν AB, ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῇ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῇ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ οἷσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί οἷσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα¹⁰ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτὴ, ὡς ἔδειξεν¹¹ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῶν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτίστι τὸ ΕΗ, μείζον ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτίστι τοῦ ΜΚ·

sub ΑΓ, ΓΒ; et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ igitur incommensurabilia sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale est ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale est ΘΚ; incommensurable igitur est ΕΗ ipsi ΘΚ; quare et ΕΘ ipsi ΘΝ incommensurabilis est longitudine; et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Si autem duæ rationales potentiâ solùm commensurabiles componentur, tota irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus; recta ΕΝ igitur ex binis nominibus est divisa in Θ. Propter eadem utique ostenduntur et ΕΜ, ΜΝ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et erit ΕΝ ex binis nominibus ad aliud et aliud divisa, et ad Θ et ad Μ, et non est ΕΘ cum ipsâ ΜΝ eadem, quoniam quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt quadratis ex ΑΔ, ΔΒ. Sed quadrata ex ΑΔ, ΔΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ; multò igitur et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΕΗ, majus est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc est

surable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable en longueur avec ΘΝ; mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais si l'on ajoute deux rationelles commensurables en puissance seulement, leur somme est irrationnelle, et est appelée droite de deux noms (37. 10); la droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. On démontrera semblablement que les rationelles ΕΜ, ΜΝ sont commensurables en puissance seulement, et que la droite ΕΝ de deux noms sera divisée en deux points; savoir, en Θ et en Μ; mais ΕΘ n'est pas égal à ΜΝ, puisque la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ (43. 10). Mais la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; la somme des carrés de ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΕΗ, est donc plus grande que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ; c'est-à-dire,

222 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μίζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ
τῇ ΜΝ οὐκ ἐστίν ἡ αὐτή. Ὅπρι ἔδει δεῖξαι.

ipso MK; quare et ΕΘ quàm ΜΝ major est;
ergo ΕΘ cum ipsâ ΜΝ non est eadem. Quod
oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΜΣ'.

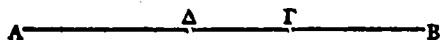
PROPOSITIO XLVI.

Ἡ μίζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαι-
ρεῖται¹.

Major ad idem solùm punctum dividitur.

Ἐστω μίζων ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ,
ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι,
ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ,
ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημείον
οὐ διαιρεῖται.

Sit major ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut
ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, fa-
cientes quidem compositum ex quadratis ip-
sarum ΑΓ, ΓΒ rationale, rectangulum autem
sub ΑΓ, ΓΒ medium; dico ΑΒ in alio puncto
non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ,
ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος
εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ
τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. Καὶ

Si enim possibile, dividatur et in Δ, ita
ut ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint,
facientes quidem compositum ex quadratis ip-
sarum ΑΔ, ΔΒ rationale, rectangulum autem

que le rectangle MK; donc ΕΘ est plus grand que ΜΝ; donc ΕΘ n'est pas égal à ΜΝ.
Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVI.

La majeure ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite majeure soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ
soient incommensurables en puissance seulement, la somme des quarrés de
ΑΓ et de ΒΓ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant médial; je dis que
la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée au point Δ, si cela est possible, de manière que les
droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés
de ΑΔ et de ΔΒ étant rationnelle, et le rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant médial.

ἐπεὶ ὁ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερίχει ῥητῇ, ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῇ⁵, μίσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον διαιρεῖται. Ὅπρι εἰδεῖται.

sub ipsis medium. Et quoniam quo differunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ à rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadrata ex ΑΔ, ΔΒ superant rationali, rationalia enim utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur major ad aliud et aliud punctum dividitur; ad idem solum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

PROPOSITIO XLVII.

Ἡ ῥητὴν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται'.

Ἐστω ῥητὴν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγχείμι-

Recta rationale et medium potens ad unum solum punctum dividitur.

Sit rationale et medium potens ipsa ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex

Puisque la différence de la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, à la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ (4. 2), est égale à la différence du double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, et que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ surpasse d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΔ, et de ΔΒ, car ces surfaces sont rationelles, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; mais ces deux surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une majeure ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un point. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XLVII.

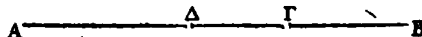
La droite qui peut une rationelle et une mediale ne peut être divisée qu'en un point.

Que la droite ΑΒ, pouvant une rationelle et une mediale, soit divisée au point Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puis-

224 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

νον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δις³ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium; rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ΑΒ in alio puncto non dividi.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι, ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δις³ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῶ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ⁵, μίσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπρι ἴδει διῆξαι.

Si enim possibile, dividatur in puncto Δ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ medium, rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo differt rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc differunt et ex ΑΔ, ΔΒ quadrata à quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulum autem bis sub ΑΓ, ΓΒ à rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, media existentia, quod est impossibile; non igitur rationale et medium potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

sance, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale, et le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel; je dis que la droite ΑΒ ne peut pas être divisée en un autre point.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que les droites ΑΔ, ΔΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ étant rationel. Puisque la différence du double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (4. 2) est égale à la différence de la somme des quarrés de ΑΔ, ΔΒ à la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ, et que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ surpasse d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ, la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΒ surpassera d'une surface rationelle la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ; mais ces surfaces sont médiales, ce qui est impossible (27. 10); une droite pouvant une rationelle et une médiale ne peut donc pas être divisée en deux points; elle ne peut donc l'être qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ.

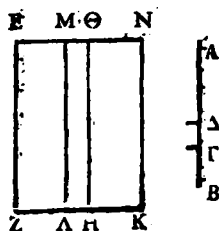
PROPOSITIO XLVIII.

Ἡ δύο μίσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται'.

Ἐστω δύο μίσα δυναμένη^α ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῶν συγκείμενων ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν λέγω ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημείον οὐ διαιρεῖται, ποιούσα τὰ προκείμενα.

Bina media potens ad unum solū punctum dividitur.

Sit bina media potens AB divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentiā incommensurabiles sint, facientes et compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, et rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum quadratis composito ex binis rectangulis sub ipsis; dico AB ad aliud punctum non dividi, faciens proposita.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παρατελείσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ,

Si enim possibile, dividatur in Δ, ita ut rursus scilicet ΑΓ cum ipsâ ΔΒ non sit eadem, sed major ex hypothesi ΑΓ, et exponatur rationalis ΕΖ, et applicetur ad ΕΖ quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub

PROPOSITION XLVIII.

La droite qui peut deux médiales ne peut être divisée qu'en un seul point.

Que la droite AB, qui peut deux médiales, soit divisée en Γ, de manière que les droites ΑΓ, ΓΒ soient incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ étant médiale; le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant ausssi médial; la somme de leurs quarrés étant incommensurable avec le double rectangle compris sous ces droites; je dis que la droite AB n'est pas divisée en un autre point, en faisant ce qui est proposé.

Car, qu'elle soit divisée en Δ, si cela est possible, de manière que ΑΓ ne soit pas égal à ΔΒ, et supposons que ΑΓ soit la plus grande. Soit la rationnelle ΕΖ, et appliquons à ΕΖ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de

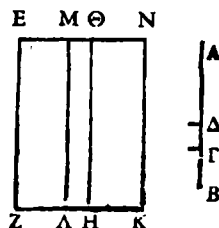
Π.

29*

226 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἕλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὲ παραβελήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστὶ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπέκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα

ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΚ; totum igitur ΕΚ æquale est quadrato ex ΑΒ. Rursus et applicetur ad ΕΖ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ æquale ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ reliquo ΜΚ æquale est. Et quoniam medium supponitur compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ; medium igitur est et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur; rationalis igitur est ΘΕ, et



ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΝ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρος ἐστὶ. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ἰσότητων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. Ομοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διήρηται,

incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Propter eadem utique et ΘΝ rationalis est et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; et ΕΗ igitur ipsi ΘΚ incommensurabile est; quare et ΕΗ ipsi ΘΝ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ergo ΕΝ ex binis nominibus est divisa in Θ. Similiter utique ostendemus et

ΑΓ et de ΓΒ, et ΘΚ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme entier ΕΗ sera égal au carré de ΑΒ (4. 2). De plus, appliquons à ΕΖ le parallélogramme ΕΛ égal à la somme des carrés de ΑΔ et de ΔΒ; le double rectangle restant sous ΑΔ, ΔΒ sera égal au reste ΜΚ (4. 2). Et puisque on a supposé que la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est médiale, ΕΗ sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΕΖ; donc ΘΕ est rationel, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Par la même raison, ΘΝ est rationel et incommensurable en longueur avec ΕΖ. Mais la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; donc ΕΗ est incommensurable avec ΘΚ; donc ΕΘ est incommensurable avec ΘΝ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles; les rationelles ΕΘ, ΘΝ ne sont donc commensurables qu'en puissance; le droite ΕΝ de deux noms est donc divisée au point Θ. Nous démontrerons semblablement qu'elle est divisée au point Μ; mais

καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἢ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ τῶν³ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διήρεται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἐν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsam in M dividi, et non est ΕΘ cum ipsa ΜΝ eadem; recta igitur ex binis nominibus ad aliud et aliud punctum dividitur, quod est absurdum; non igitur bina media potens ad aliud et aliud punctum dividitur; ad unum igitur solum punctum dividitur. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς, κατ' τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθαι ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β. Εὰν δὲ τὸ ἐλάττονον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλεῖσθαι ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

1. Exposita rationali, et recta ex binis nominibus divisâ in nomina, cujus majus nomen quam minus plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si autem minus nomen commensurabile sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus secunda.

ΕΘ n'est pas égal avec ΜΝ; la droite de deux noms est donc divisée en un point et encore en un autre point, ce qui est absurde (43. 10); une droite qui peut deux médiales n'est donc pas divisée en un point et encore en un autre point; elle n'est donc divisée qu'en un seul point. Ce qu'il fallait démontrer.

SECONDES DÉFINITIONS.

1. Une droite rationnelle étant exposée, et une droite de deux noms étant divisée en ses noms, la puissance du plus grand nom de cette droite surpassant la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite commensurable en longueur avec le plus grand nom, si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite entière sera dite première de deux noms.

2. Si le plus petit nom est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, elle sera dite seconde de deux noms.

γ'. Εάν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὲ εἰὰν τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος¹ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει· εἰὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε. Εάν δὲ τὸ ἐλάττω, πέμπτη.

ς'. Εάν δὲ μηδέτερον, ἕκτη².

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

3. Si autem neutrum ipsorum nominum commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus et si majus nomen quàm minus plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si quidem majus nomen commensurable sit longitudine expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si autem minus, quinta.

6. Si verò neutrum, sexta.

PROPOSITIO XLIX.

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ipsum quidem ΒΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΓΑ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur quædam rationalis Δ, et ipsi Δ

3. Si aucun des noms n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite troisième de deux noms.

4. De plus, si la puissance du plus grand nom surpasse la puissance du plus petit nom du quarré d'une droite incommensurable avec le plus grand nom, et si le plus grand nom est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, elle sera dite quatrième de deux noms.

5. Si c'est le plus petit nom, elle sera dite cinquième.

6. Si ce n'est ni l'un ni l'autre, elle sera dite sixième.

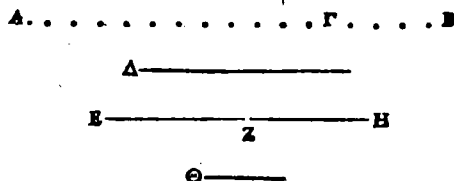
PROPOSITION XLIX.

Trouver la première de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme n'ait pas avec ΓΑ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (30. lem. 1. 10); soit exposée une rationelle Δ, et que ΕΖ soit commen-

τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ EZ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH. Ο δὲ AB πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὰ

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH. Ipse autem AB ad ΑΓ rationem habet quam numerus ad numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam numerus ad numerum; quare commen-



ἀπὸ τῆς EZ τῇ ἀπὸ τῆς ZH. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. Καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

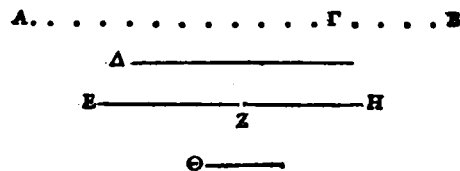
surabile est ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis EZ; rationalis igitur et ZH. Et quoniam BA ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ergo EZ, ZH rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EH. Dico et primam esse.

nable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationelle (déf. 6. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH (cor. 6. 6). Mais AB a avec ΑΓ la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de EZ a donc avec le carré de ZH la raison qu'un nombre a avec un nombre; le carré de EZ est donc commensurable avec le carré de ZH (6. 10). Mais EZ est rationel; donc ZH est rationel. Et puisque BA n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de EZ n'aura pas avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc rationelles commensurables en puissance seulement; la droite EH est donc de deux noms (37. 10); et je dis qu'elle est la première de deux noms.

230 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστὼ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἔστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ

Quoniam enim est ut BA numerus ad ipsum AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH , major autem BA quàm AG ; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH . Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH , Θ . Et quoniam est ut BA ad AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH ; convertendo igitur est ut AB ad BG ita



τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Ὅπρι εἶδει δεῖξαι.

ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ . Ipse autem AB ad BG rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ , ZH , et commensurabilis EZ ipsi Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est prima. Quod oportebat ostendere.

Car puisque le nombre BA est à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH , et que BA est plus grand que AG ; le carré de EZ sera plus grand que le carré de ZH . Que la somme des carrés des droites ZH , Θ soit égale au carré de EZ . Puisque BA est à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH , par conversion, AB sera à BG comme le carré de EZ est au carré de Θ . Mais AB a avec BG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10); la puissance de EZ surpasse la puissance de ZH du carré d'une droite commensurable avec EZ . Mais les droites EZ , ZH sont rationelles, et EZ est commensurable en longueur avec Δ ; la droite EH est donc la première de deux noms (déf. secondes. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 9'.

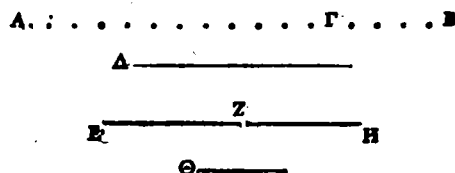
PROPOSITIO L.

Εὕρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων διωτέραν.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ΑΓ verò rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ com-



Δ σύμμετρος ἴστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Γιγνέτω δὴ καὶ ὥς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ὅτι ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ

mensurabilis sit ΖΗ longitudine; rationalis igitur est ΖΗ. Fiat et ut ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ ita ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex ΖΕ; commensurable igitur est ex ΗΖ quadratum quadrato ex ΖΕ; rationalis igitur est et ΖΕ. Et quoniam ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΗΖ quadratum ad ipsum ex

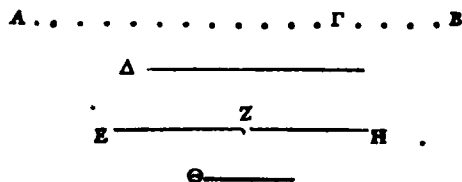
PROPOSITION L.

Trouver la seconde de deux noms.

Soient les deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré (30 lem. 1. 10), et que ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationelle Δ, et que ΖΗ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite ΖΗ sera rationelle. Faisons en sorte que le nombre ΓΑ soit au nombre ΑΒ comme le quarré de ΗΖ est au quarré de ΖΕ (6. eor. 10); le quarré de ΗΖ sera commensurable avec le quarré de ΖΕ (6. 10); la droite ΖΕ est donc rationelle (déf. 6. 10). Et puisque le nombre ΓΑ n'a pas avec le nombre ΑΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΗΖ n'aura pas non plus avec le quarré de ΖΕ la raison

τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δὲ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. Δευτέρου δὲ ὅτι καὶ διυτίρα.

ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est HZ ipsi ZE longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ipsa EH. Ostendendum est et secundam esse.



Επεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω τῇ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Αλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει·

Quoniam enim invertendo est ut AB numerus ad ipsum AG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam AG; majus igitur et ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB ad BG ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Sed AB ad BG rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et quadratum ex EZ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare

qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite HZ est donc incommensurable en longueur avec ZE (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la seconde de deux noms.

Car puisque, par inversion, le nombre AB est à AG comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que AG, le carré de EZ est plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés des droites ZH, Θ soit égale au carré de EZ; par conversion, AB sera à BG comme le carré de EZ est au carré de Θ. Mais AB a avec BG la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de EZ a donc avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite EZ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10);

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 233

ὥστε ἡ EZ τῇ ZH μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ EZ, ZH δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἑλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ³ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Οὔτιρ ἔδει δεῖξαι.

EZ quam ZH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt rationales EZ, ZH potentiâ solùm commensurabiles, et ZH minus nomen commensurabile est expositæ rationali Δ longitudine; ergo EH ex binis nominibus est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

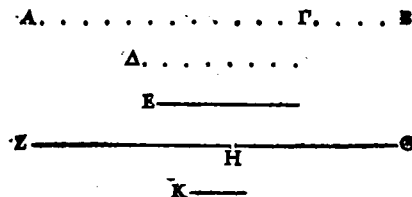
Εὕρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγχείμινον ἑξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

PROPOSITIO LI.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ compositus ex ipsis ad ΒΓ quidem rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum



γωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δὲ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον

numerum, ad ΑΓ autem rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; exponatur autem quidam et alius non quadratus numerus Δ, et ad utrumque ipsorum

(9. 10); la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ZH du quarré d'une droite commensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ZH sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ZH est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite EH est donc une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LI.

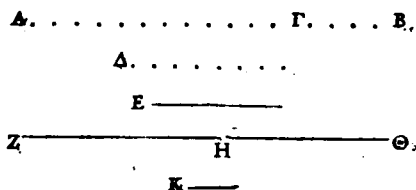
Trouver une troisième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que leur somme ΑΒ ait avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que leur somme ΑΒ n'ait pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un quarré, et que ce nombre n'ait pas avec chacun des nom-

234 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μη ἔχεται ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Β, καὶ γιγνέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ Ε²· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον

BA, ΑΓ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur quædam rationalis recta E, et fiat ut Δ ad AB ita ex E quadratum ad ipsum ex ZH; commensurable igitur est ex E quadratum quadrato ex ZH. Atque est rationalis E; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam Δ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex E quadratum ad ipsum ex



ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γιγνέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est E ipsi ZH longitudine. Fiat autem rursus ut BA numerus ad ipsum ΑΓ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ΗΘ; commensurable igitur est quadratum ex ZH ad ipsum ex ΗΘ. Rationalis autem ZH; rationalis igitur et ΗΘ. Et quoniam AB ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex ZH quadratum ad ipsum ex ΗΘ ratio-

bres BA, ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit enfin une droite rationnelle E, et faisons en sorte que Δ soit à AB comme le carré de E est au carré de ZH; le carré de E sera commensurable avec le carré de ZH. Mais la droite E est rationnelle; la droite ZH est donc rationnelle (6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de E n'a pas non plus avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, la droite E sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). Faisons en sorte que le nombre BA soit à ΑΓ comme le carré de ZH est au carré de ΗΘ; le carré de ZH sera commensurable avec le carré de ΗΘ. Mais la droite ZH est rationnelle; la droite ΗΘ est donc rationnelle. Et puisque AB n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de ZH

τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὁνομάτων ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν³ ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐστω οὖν τῇ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν⁴ ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-

nem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ΖΘ ex binis nominibus est. Dico et tertiam esse.

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut autem ΑΒ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint igitur quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad

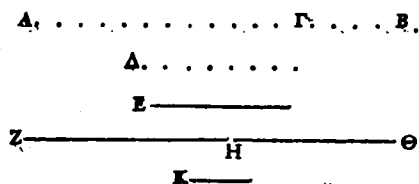
n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une troisième de deux noms.

Car, puisque Δ est à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ, et que ΑΒ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le carré de Ε est au carré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et le carré de Ε n'a pas non plus avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera plus grand que le carré de ΗΘ. Que la somme des carrés de ΗΘ et de Κ soit égale au carré de ΖΗ; par conversion ΑΒ sera à ΒΓ comme le carré de ΖΗ est au carré de Κ. Mais ΑΒ a avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

236 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

γωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστίν⁵ ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μίζον

quadratum numerum; et quadratum ex ZH igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ZH ipsi Κ longitudine; ergo ZH quam ΗΘ plus potest quadrato



δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἶδιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδενίᾳ αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπῃ εἶδει δεῖξαι.

ex rectâ sibi commensurabili. Et sunt ZH, ΗΘ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est ipsi Ε longitudine; ergo ΖΘ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 16.

PROPOSITIO LII.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ· ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad ΒΓ rationem non habeat, neque quidem ad ΑΓ, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis Δ, et ipsi Δ

quarré; le quarré de ZH a donc avec le quarré de Κ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc commensurable en longueur avec Κ; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de ΗΘ du quarré d'une droite commensurable avec ZH. Mais les droites ZH, ΗΘ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec Ε; la droite ΖΘ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 3. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

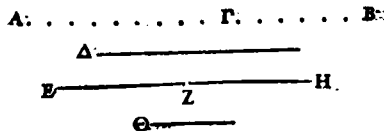
PROPOSITION LII.

Trouver une quatrième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec ΒΓ ni avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit la rationnelle Δ,

τῇ Δ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γιγνέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς³ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη.

commensurabilis sit longitudine ipsa EZ; rationalis igitur est et EZ. Et fiat ut BA numerus ad ipsum ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; commensurable igitur est ex EZ quadratum quadrato ex ZH; rationalis igitur est et ZH. Et quoniam BA ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi ZH longitudine; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare EH ex binis nominibus est. Dico et quartam esse.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ

Quoniam enim est ut BA ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH, major autem BA quam ΑΓ; majus igitur ex EZ quadratum quadrato ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur ut

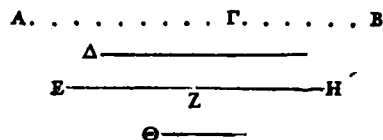
et que la droite EZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite EZ sera rationnelle. Faisons en sorte que le nombre BA soit à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH; le carré de EZ sera commensurable avec le carré de ZH; la droite ZH est donc rationnelle. Et puisque BA n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, et que le carré de EZ n'a pas non plus avec le carré de ZH la raison qu'un nombre carré a avec nombre carré, la droite EZ sera incommensurable en longueur avec ZH (9. 10); les droites EZ, ZH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une quatrième de deux noms.

Car, puisque BA est à ΑΓ comme le carré de EZ est au carré de ZH, et que BA est plus grand que ΑΓ, le carré de EZ est plus grand que le carré de ZH. Que la somme des carrés de ZH et de Θ soit égale au carré de EZ; par con-

238 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ AB πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς⁵ πρὸς τε-

AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem AB ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



τράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν⁶. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ἡ EZ ἄρα τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ EZ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον συμμέτροι, καὶ ἡ EZ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. Ὅπερ ἴδει ποιῆται.

tum numerum; neque igitur ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; ergo EZ quàm ΖΗ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili. Et sunt EZ, ΖΗ rationales potentia solum commensurabiles, et EZ ipsi Δ commensurabilis est longitudine; ergo EH ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γγ'.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν AB πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν

PROPOSITIO LIII.

Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponentur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut AB ad utrumque ipsorum rationem non habeat

version, le nombre AB sera à ΒΓ comme le quarré de EZ est au quarré de Θ. Mais AB n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de EZ n'a donc pas avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite EZ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de EZ surpasse donc la puissance de ΖΗ du quarré d'une droite incommensurable avec EZ. Mais les droites EZ, ΖΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et EZ est commensurable en longueur avec Δ; la droite EH est donc une quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait faire.

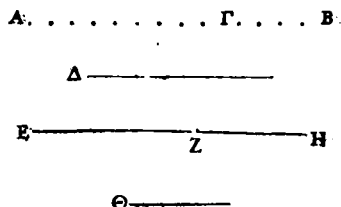
PROPOSITION LIII.

Trouver une cinquième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que AB n'ait pas avec chacun de ces

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ τις εὐθεΐα¹ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ HZ². ῥητὴ ἄρα ἡ HZ. Καὶ γεγονέτω ὥς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZE. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἄρα⁴ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα⁵ ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη.

quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et exponatur rationalis quædam recta Δ, et ipsi Δ commensurabilis sit longitudine ipsa HZ; rationalis igitur HZ. Et fiat ut ΓΑ ad AB ita ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE; rationalis igitur est et ZE. Et quoniam ΓΑ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque ex HZ quadratum ad ipsum ex ZE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; ipsæ EZ, ZH igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis nominibus est EH. Dico et quintam esse.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὥς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ἀνάπαλιν ἄρα⁶ ὥς ὁ BA πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· μίζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

Quoniam enim est ut ΓΑ ad AB ita ex ZH quadratum ad ipsum ex ZE; invertendo igitur ut BA ad ΑΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex ZH; majus igitur ex EZ quadratum quadrato

nombres la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; soit une droite rationelle Δ, et que HZ soit commensurable en longueur avec Δ; la droite HZ sera rationelle. Faisons en sorte que ΓΑ soit à AB comme le quarré de HZ est au quarré de ZE; la droite ZE sera rationelle. Et puisque ΓΑ n'a pas avec AB la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, et que le quarré de HZ n'a pas non plus avec le quarré de ZE la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, les droites EZ, ZH seront des rationelles commensurables en puissance seulement (9. 10); EH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi qu'elle est une cinquième de deux noms.

Car puisque ΓΑ est à AB comme le quarré de ZH est au quarré de ZE, par inversion, BA est à ΑΓ comme le quarré de EZ est au quarré de ZH; le quarré de EZ

ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἐστω οὖν τῇ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἴστί· ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ

ex ZH. Sint igitur quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ; convertendo igitur est ut AB numerus ad ipsum ΒΓ ita ex EZ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; non igitur ex EZ quadratum ad

A. Γ. Β

Δ —————

Ε ————— Ζ ————— Η

Θ —————

ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἴστί· ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἴσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἑλάττω ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπερ ἴδει ποιῆσαι.

ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est EZ ipsi Θ longitudine; quare EZ quàm ΖΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΕΖ, ΖΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΖΗ minus nomen commensurable est expositæ rationali Δ longitudine; ergo ΕΗ ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat facere.

est donc plus grand que le carré de ΖΗ. Que la somme des carrés de ΖΗ et de Θ soit égale au carré de ΕΖ; par conversion, le nombre ΑΒ sera au nombre ΒΓ comme le carré de ΕΖ est au carré de Θ. Mais ΑΒ n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΕΖ n'a donc pas avec le carré de Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΕΖ est donc incommensurable en longueur avec Θ; la puissance de ΕΖ surpasse donc la puissance de ΖΗ du carré d'une droite incommensurable avec ΕΖ. Mais les droites ΕΖ, ΖΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et le plus petit nom ΖΗ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Δ; la droite ΕΗ est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

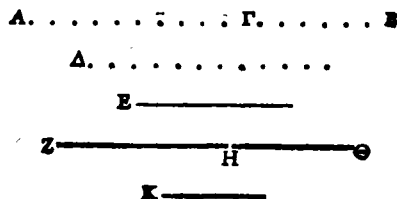
PROPOSITIO LIV.

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Εκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν, μήτε ἢ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε,

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; sit autem et alius numerus Δ non quadratus existens, et non ad utrumque ipsorum ΒΑ, ΑΓ rationem habens quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et exponatur



καὶ γιγνέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ². Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς

quædam rationalis recta Ε, et fiat ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ; commensurable igitur est ex Ε quadratum quadrato ex ΖΗ. Atque est rationalis Ε; rationalis igitur et ΖΗ. Et quoniam non habet Δ ad ΑΒ rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum,

PROPOSITION LIV.

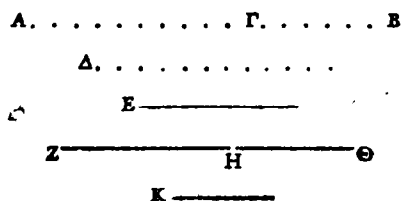
Trouver la sixième de deux noms.

Soient deux nombres ΑΓ, ΓΒ, de manière que ΑΒ n'ait pas avec chacun de ces nombres la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit un autre nombre Δ qui ne soit pas un carré, et qui n'ait pas avec chacun des nombres ΒΑ, ΑΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; soit aussi la droite rationnelle Ε; et faisons en sorte que Δ soit à ΑΒ comme le carré de Ε est au carré de ΖΗ; le carré de Ε sera commensurable avec le carré de ΖΗ. Mais la droite Ε est rationnelle; la droite ΖΗ est donc rationnelle (déf. 6. 10). Et puisque Δ n'a pas avec ΑΒ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre

242 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν
ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ
ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ

neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex
ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad
quadratum numerum; incommensurabilis igitur
est Ε ipsi ΖΗ longitudine. Fiat igitur rursus
ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum
ex ΗΘ. Commensurabile igitur ex ΖΗ quadratum
quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum



ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς
ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἵπαι ὁ ΒΑ πρὸς τὸν
ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς
τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα
ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα
ἐνοματίων ἐστὶν ἡ ΖΘ. Δεικτέον δὲ ὅτι καὶ ἕκτη.

ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ;
rationalis igitur ΗΘ. Et quoniam ΒΑ ad ΑΓ ra-
tionem non habet quam quadratus numerus ad
quadratum numerum, neque quadratum ex ΖΗ
igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet
quam quadratus numerus ad quadratum nume-
rum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ
longitudine; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt
potentiâ solùm commensurabiles; ergo ex binis
nominibus est ΖΘ. Ostendendum est et sextam
esse.

quarré, le quarré de Ε n'aura pas avec le quarré de ΖΗ la raison qu'un nombre
quarré a avec un nombre quarré; la droite Ε est donc incommensurable en lon-
gueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, faisons en sorte que ΒΑ soit à ΑΓ comme le quarré
de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; le quarré de ΖΗ sera commensurable avec le quarré
de ΗΘ. Mais le quarré de ΖΗ est rationel; le quarré de ΗΘ est donc rationel; la
droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque ΒΑ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre
quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΖΗ n'aura pas non plus avec le
quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite
ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); les droites ΖΗ, ΗΘ sont
donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΖΘ est donc une
droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer aussi qu'elle est la sixième de
deux noms.

Επει γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διόσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Εδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ Ε μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐστω οὖν τῇ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

Quoniam enim est ut Δ ad ΑΒ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΖΗ, est autem et ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Δ ad ΑΓ ita ex Ε quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Δ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Ε igitur ad quadratum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Ε ipsi ΗΘ longitudine. Ostensa est autem et ipsi ΖΗ incommensurabilis; utraque igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ incommensurabilis est ipsi Ε longitudine. Et quoniam est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; majus igitur ex ΖΘ quadratum quadrato ex ΗΘ. Sint itaque quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ; convertendo igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quare neque ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum nume-

Car puisque Δ est à ΑΒ comme le quarré de Ε est au quarré de ΖΗ, et que ΒΑ est à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par égalité, Δ sera à ΑΓ comme le quarré de Ε est au quarré de ΗΘ. Mais Δ n'a pas avec ΑΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de Ε n'a donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Ε est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais on a démontré qu'elle est incommensurable avec ΖΗ; chacune des droites ΖΗ, ΗΘ est donc incommensurable en longueur avec Ε. Et puisque ΒΑ est à ΑΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, le quarré de ΖΘ sera plus grand que le quarré de ΗΘ. Que la somme des quarrés de ΗΘ et de Κ soit égale au quarré de ΖΗ; par conversion, ΑΒ sera à ΒΓ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΑΒ n'a pas avec ΒΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΖΗ n'a donc pas avec le quarré de Κ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré;

244 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει· ἡ ZH ἄρα τῆς $H\Theta$ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσιν αἱ ZH , $H\Theta$ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά αὐτῶν⁸ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ E · ἡ $Z\Theta$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτα. Ὅπῃ ἔδει ποιῆσαι.

rum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi K longitudine; ergo ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ZH , $H\Theta$ rationales potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est longitudine expositæ rationali E ; ergo $Z\Theta$ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat facere.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐστω δύο τετράγωνα τὰ AB , $BΓ$, καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AB τῇ BE · ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZB τῇ BH . Καὶ συμπληρώσθω τὸ $ΑΓ$ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ $ΑΓ$, καὶ ἔτι τῶν AB , $BΓ$ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΔH$, καὶ ἔτι τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ $ΔΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ BZ , ἡ δὲ BE τῇ BH · ὅλη ἄρα ἡ $ΔE$ ὅλη τῇ ZH ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν $ΔE$ ἑκατέρᾳ τῶν $ΑΘ$, $KΓ$ ἐστὶν

LEMMA.

Sint duo quadrata AB , $BΓ$, et ponantur ita ut in directum sit AB ipsi BE ; in directum igitur est et ZB ipsi BH . Et compleatur $ΑΓ$ parallelogrammum; dico quadratum esse $ΑΓ$, et ipsorum AB , $BΓ$ medium proportionale esse $ΔH$, et adhuc ipsorum $ΑΓ$, $ΓB$ medium proportionale esse $ΔΓ$.

Quoniam enim æqualis est quidem AB ipsi BZ , ipsa verò BE ipsi BH ; tota igitur $ΔE$ toti ZH est æqualis. Sed quidem $ΔE$ utrique

la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec K ; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de $H\Theta$ du carré d'une droite incommensurable avec ZH ; mais les droites ZH , $H\Theta$ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et aucune de ces droites n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée E ; la droite $Z\Theta$ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait faire.

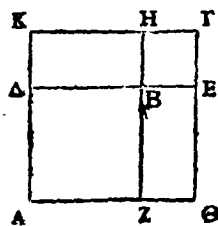
LEMME.

Soient les deux carrés AB , $BΓ$; plaçons-les de manière que la droite AB soit dans la direction de BE ; la droite ZB sera dans la direction de BH . Achéons le parallélogramme $ΑΓ$; je dis que $ΑΓ$ est un carré, que $ΔH$ est moyen proportionnel entre AB et $BΓ$, et que $ΔΓ$ est aussi moyen proportionnel entre $ΑΓ$ et $ΓB$.

Puisque la droite $ΔB$ est égale à BZ , et que BE est égale à BH , la droite entière $ΔE$ sera égale à la droite entière ZH . Mais la droite $ΔE$ est égale à chacune des

ἴση· ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΘΓ ἴσιν ἴση·
καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρα τῶν
ΑΚ, ΘΓ ἴσιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἴστί τὸ ΑΓ
παρὰλληλόγραμμον. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθογώνιον·
τετράγωνον ἄρα ἴστί τὸ ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴσιν
ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν
ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως

ipsarum ΑΘ, ΚΓ est æqualis; ipsa verò ΖΗ utrique
ipsarum ΑΚ, ΘΓ est æqualis; et utraque igitur
ipsarum ΑΘ, ΚΓ utrique ipsarum ΑΚ, ΘΓ
est æqualis; æquilaterum igitur est ΑΓ paralle-
logrammum. Est autem et rectangulum; qua-
dratum igitur est ΑΓ. Et quoniam est ut ΖΒ ad
ΒΗ ita ΔΒ ad ΒΕ, sed ut quidem ΖΒ ad ΒΗ



τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ
οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ
πρὸς τὸ ΔΗ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν
ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΔΗ. Λέγω δὲ
ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΔΓ.
Ἐπεὶ γάρ ἴσιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΚ οὕτως ἡ
ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἴσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ·
καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς
τὴν ΓΗ⁵. Αλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως τὸ
ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ

ita ΑΒ ad ΔΗ, ut verò ΔΒ ad ΒΕ ita ΔΗ
ad ΒΓ; et ut igitur ΑΒ ad ΔΗ ita ΔΗ ad
ΒΓ; ipsorum ΑΒ, ΒΓ igitur medium propor-
tionale est ΔΗ. Dico et ipsorum ΑΓ, ΓΒ me-
dium proportionale esse ΔΓ. Quoniam enim
est ut ΑΔ ad ΑΚ ita ΚΗ ad ΗΓ, æqualis enim est
utraque utrique; et componendo ut ΑΚ ad ΚΔ
ita ΚΓ ad ΓΗ. Sed ut quidem ΑΚ ad ΚΔ ita ΑΓ
ad ΓΔ, ut verò ΚΓ ad ΓΗ ita ΔΓ ad ΓΒ; et ut

droites ΑΘ, ΚΓ, et la droite ΖΗ est aussi égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; chacune des droites ΑΘ, ΚΓ est donc égale à chacune des droites ΑΚ, ΘΓ; donc ΑΓ est un parallélogramme équilatéral. Mais il est aussi rectangle; donc ΑΓ est un carré. Et puisque ΖΒ est à ΒΗ comme ΔΒ est à ΒΕ, que ΖΒ est à ΒΗ comme ΑΒ est à ΔΗ (1. 6), et que ΔΒ est à ΒΕ comme ΔΗ est à ΒΓ, le carré ΑΒ est à ΔΗ comme ΔΗ est à ΒΓ; donc ΔΗ est moyen proportionnel entre ΑΒ et ΒΓ. Je dis aussi que ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Car puisque ΑΔ est à ΑΚ comme ΚΗ est à ΗΓ, à cause que chacune des droites ΑΔ, ΑΚ est égale à chacune des droites ΚΗ, ΗΓ, par addition, ΑΚ sera à ΚΔ comme ΚΓ est à ΓΗ. Mais ΑΚ est à ΚΔ comme ΑΓ est à ΓΔ (1. 6), et ΚΓ est à ΓΗ comme ΔΓ est à ΓΒ; donc

246 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

ΔΓ πρὸς τὴν⁶ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. Ὅπερ πρὸς αὐτὸ δεῖξαι.

igitur ΑΓ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΒΓ; ipsorum ΑΓ, ΓΒ igitur medium proportionale est ΔΓ. Quod proponebatur demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νέ.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ¹ περιχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ² πρώτη ἢ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερόν δὲ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΑΕ τῇ ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἢ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ

PROPOSITIO LV.

Si spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis nominibus.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus primâ ΑΔ; dico rectam quæ potest spatium ΑΓ irrationalem esse, quæ appellatur ex binis nominibus.

Quoniam enim ex binis nominibus est prima ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, et sit majus nomen ΑΕ. Evidens utique est ΑΕ, ΕΔ rationales esse potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus posse quadrato ex rectâ sib commensurabili, et ΑΕ commensura-

ΑΓ est à ΔΓ comme ΔΓ est à ΒΓ; donc ΔΓ est moyen proportionnel entre ΑΓ et ΓΒ. Ce qu'on s'était proposé de démontrer.

PROPOSITION LV.

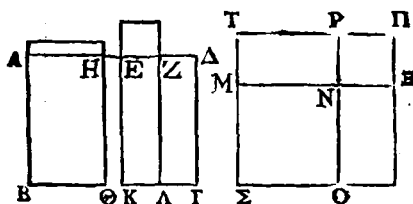
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la droite ΑΔ première de deux noms; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite de deux noms.

Puisque la droite ΑΔ est première de deux noms; qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom. Il est évident que les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, que la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et que ΑΕ sera commensurable en longueur avec la rationnelle

ρητῇ τῇ AB μήκει. Τετμήσθω δὴ³ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Z σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, ἴαν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ⁴ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτίστι τοῦ⁵ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρή⁶. Παραβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον

bilem esse expositæ rationali AB longitudine. Secetur utique EΔ bifariam in puncto Z. Et quoniam AE quam EΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, si igitur quartæ parti quadrati ex minori, hoc est quadrati ex EZ, æquale ad maiorem AE applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Applicetur igitur ad AE qua-



τὸ ὑπὸ τῶν⁷ ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ⁸ τῶν Η, Ε, Ζ ὅποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνιστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΝΡ τῇ

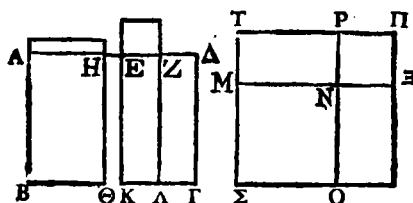
drato ex EZ æquale parallelogrammum sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur est ΑΗ ipsi ΕΗ longitudine. Et ducantur a punctis Η, Ε, Ζ alterutri ipsarum ΑΒ, ΓΔ parallelæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ; et quidem ΑΘ parallelogrammo æquale quadratum constituatur ΣΝ, quadrato autem ΗΚ æquale ipsum ΝΠ, et ponantur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΝΡ ipsi

exposée AB (déf. sec. 1. 10). Coupons EΔ en deux parties égales au point Z. Puisque la puissance de AE surpasse la puissance de EΔ du quarré d'une droite commensurable avec AE, si nous appliquons à la plus grande AE un parallélogramme qui soit égal à la quatrième partie du quarré de la plus petite, c'est-à-dire du quarré de EZ, et défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera cette droite en parties commensurables (18. 10). Que le parallélogramme sous AH, HE, égal au quarré de EZ, soit appliqué à AE (28. 6); la droite AH sera commensurable en longueur avec EH. Des points H, E, Z menons les droites HΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles à l'une ou à l'autre des droites AB, ΓΔ (14. 2). Faisons le quarré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ, le quarré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et faisons en sorte que la droite ΜΝ soit dans la direction de ΝΞ; la droite ΝΡ sera dans la direction

248 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

NO. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλό-
 γραμμον· τιτράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ
 ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς ΕΖ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ
 ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ¹⁰ καὶ ἄς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ
 οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὴν ΚΗ¹¹. τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα
 μίσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Αλλὰ τὸ μὲν ΑΘ
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ¹², τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ

NO. Et compleatur ΣΠ parallelogrammum; qua-
 dratum igitur est ΣΠ. Et quoniam rectangulum
 sub ΑΗ, ΗΕ æquale est quadrato ex ΕΖ; est
 igitur ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ; et ut igitur
 ΑΘ ad ΕΛ ita ΕΛ ad ΚΗ; ipsorum ΑΘ, ΗΚ
 igitur medium proportionale est ΕΛ. Sed qui-
 dem ΑΘ æquale est ipsi ΣΝ, ipsum verò ΗΚ



ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μίσον ἀνάλογόν ἐστι
 τὸ ΕΛ. Ἐστὶ δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μίσον
 ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ
 τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστὶν¹³. Ἐστὶ δὲ
 καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα
 τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τοῦτέστι τῷ
 ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἢ
 ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.
 Ἐπὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμ-
 μετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ.

æquale est ipsi ΝΠ; ipsorum ΣΝ, ΝΠ igitur
 medium proportionale est ΕΛ. Est autem eo-
 rumdem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale et
 ΜΡ; æquale igitur est ΕΛ ipsi ΜΡ; quare et
 ipsi ΟΞ æquale est. Sunt autem et ΑΘ, ΗΚ ipsi
 ΣΝ, ΝΠ æqualia; totum igitur ΑΓ æquale est
 toti ΣΠ, hoc est quadrato ex ΜΞ; ipsum ΑΓ
 igitur potest ipsa ΜΞ; dico ΜΞ ex binis nomi-
 nibus esse. Quoniam enim commensurabilis est
 ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique

de NO (14. 1). Achevons le parallélogramme ΣΠ, le parallélogramme ΣΠ sera un
 carré (lem. précéd.). Puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΕ est égal au carré de ΕΖ,
 la droite ΑΗ sera à ΕΖ comme ΕΖ est à ΕΗ (17. 6); donc ΑΘ est à ΕΛ comme ΕΛ est
 à ΚΗ (1. 6); donc ΕΛ est moyen proportionnel entre ΑΘ et ΗΚ. Mais ΑΘ est égal
 à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; donc ΕΛ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ. Mais
 ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ (lem. précéd.); donc ΕΛ est égal
 à ΜΡ, et par conséquent à ΟΞ (4. 3. 1). Mais la somme des rectangles
 ΑΘ, ΗΚ est égale à la somme des carrés ΣΝ, ΝΠ; donc ΑΓ tout entier est
 égal à ΣΠ tout entier, c'est-à-dire au carré de ΜΞ; la droite ΜΞ peut donc le
 parallélogramme ΑΓ; je dis que ΜΞ est une droite de deux noms. Car puisque ΑΗ
 est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des

Υπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει¹⁴. καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καὶ ἔστι ρητὴ ἡ ΑΒ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ¹⁵ καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ρητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῇ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτίστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ρητὰ ἐστὶ καὶ σύμμετρα. Καὶ ἵπαι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ¹⁶. ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῇ ΕΑ ἀσύμμετρόν ἐστιν¹⁷. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΑ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ¹⁸. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμ-

ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Supponitur autem et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis longitudine; et ΑΗ, ΗΕ igitur ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. Atque est rationalis ΑΒ; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; rationale igitur est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, et est commensurabile ΑΘ ipsi ΗΚ. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ æquale est, ipsum verò ΗΚ ipsi ΝΠ; et ΣΝ, ΝΠ igitur, hoc est quadrata ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt et commensurabilia. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, sed quidem ΑΕ ipsi ΑΗ est commensurabilis, ipsa verò ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis; incommensurabilis igitur et ΑΗ ipsi ΕΖ; quare et ΑΘ ipsi ΕΑ incommensurabile est. Sed quidem ΑΘ ipsi ΣΝ est æquale, ipsum verò ΕΑ ipsi ΜΡ; et ipsum ΣΝ igitur ipsi ΜΡ incommensurabile est. Sed ut ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ; incommensurabilis igitur est ΟΝ ipsi ΝΡ. Æqualis utique quidem ΟΝ ipsi ΝΜ, ipsa verò ΝΡ ipsi ΝΞ; incommensurabilis igitur est ΜΝ ipsi ΝΞ. Atque est quadratum ex ΜΝ commensurabile

droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais on a supposé que ΑΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΕ sont donc commensurables avec ΑΒ (12. 10). Mais la droite ΑΒ est rationnelle; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationnelle; chacun des parallélogrammes ΑΘ, ΗΚ est donc rationnel (20. 10); ΑΘ est donc commensurable avec ΗΚ (10. 10). Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΗΚ est égal à ΝΠ; les carrés ΣΝ, ΝΠ, c'est-à-dire les carrés des droites ΜΝ, ΝΞ, sont donc rationnels et commensurables. Et puisque ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ (37. 10), que ΑΕ est commensurable avec ΑΗ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΑΗ sera incommensurable avec ΕΖ; donc ΑΘ est incommensurable avec ΕΑ. Mais ΑΘ est égal à ΣΝ, et ΕΑ égal à ΜΡ; donc ΣΝ est incommensurable avec ΜΡ. Mais ΣΝ est à ΜΡ comme ΟΝ est à ΝΡ; donc ΟΝ est incommensurable avec ΝΡ (10. 10). Mais la droite ΟΝ est égale à ΝΜ, et ΝΡ est égal à ΝΞ; donc ΜΝ est incommensurable avec ΝΞ. Mais le carré de ΜΝ est commensurable avec le carré de ΝΞ, et ils sont rationnels l'un et l'autre;

250 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μέτρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Οὔτε ἴδι διῆξαι.

quadrato ex ΝΞ, et rationale utrumque; ergo ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΜΞ ex binis nominibus est, et potest ipsum ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιέχσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέρας τῆς ΑΔ· λίγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μῆζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μῆζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου

PROPOSITIO LVI.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus secundâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis prima.

Contineatur enim spatium ΑΒΓΔ sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus secundâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ex binis nominibus secunda est ΑΔ, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ

les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΜΞ est donc une droite de deux noms (37. 10), et elle peut le parallélogramme ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LVI.

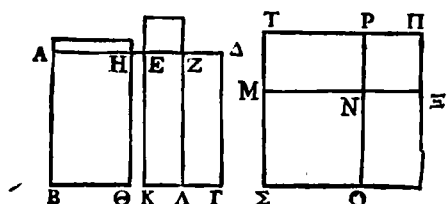
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la seconde de deux noms, la droite qui peut cète surface est l'irrationnelle appelée la première de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la seconde de deux noms ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est la première de deux médiales.

Car puisque ΑΔ est la seconde de deux noms, divisons cette droite en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et

ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἑλάττω ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρον² ἔστι τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρά τὴν ΑΕ παραβεβλησθω ἐλλείπων εἶδος τετραγώνου, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ᾗθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῇ μὲν ΑΘ παράλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνστήτω τὸ ΣΝ, τῇ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ

sibi commensurabili, et minus nomen ΕΔ commensurable est ipsi ΑΒ longitudine. Secetur ipsa ΕΔ bifariam in Ζ, et quadrato ex ΕΖ æquale ad ΑΕ applicetur deficiens figurâ quadratâ, parallelogrammo sub ΑΗ, ΗΕ; commensurabilis igitur ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. Et per puncta Η, Ε, Ζ parallelæ ducantur ipsis ΑΒ, ΔΓ ipsæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, et parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum constituatur ΣΝ, ipsi verò ΗΚ æquale



ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστι³ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερόν δὲ ἐκ τοῦ προειρημένου, ὅτι τὸ ΜΡ μίσην ἀνάλογόν ἔστι τῶν⁴ ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῇ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ· δεικνύον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἔστι πρώτη.

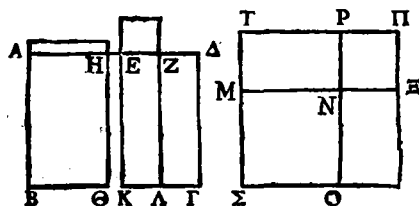
quadratum ΝΠ, et ponatur ita ut in directum sit ΜΝ ipsi ΝΞ; in directum igitur est et ΡΝ ipsi ΝΟ. Et compleatur ΣΠ quadratum; evidens utique est ex iis demonstratis, ipsum ΜΡ medium proportionale esse ipsorum ΣΝ, ΝΠ, et æquale ipsi ΕΛ, et ΑΓ spatium posse ipsam ΜΞ; ostendendum est et ΜΞ ex binis mediis esse

le plus petit nom ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 2. 10). Coupons ΕΔ en deux parties égales en Ζ, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme, qui étant égal au carré de ΕΖ, soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec ΗΕ (18. 10). Par les points Η, Ε, Ζ menons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles aux droites ΑΒ, ΔΓ; faisons le carré ΣΝ égal au parallélogramme ΑΘ; le carré ΝΠ égal au parallélogramme ΗΚ, et plaçons ΜΝ dans la direction de ΝΞ; la droite ΡΝ sera dans la direction de ΝΟ. Achevons le carré ΣΠ; il est évident, d'après ce qui a été démontré (55. 10), que le rectangle ΜΡ est moyen proportionnel entre ΣΝ et ΝΠ; que ΜΡ est égal à ΕΛ, et que ΜΞ peut la surface ΑΓ; il faut démontrer que ΜΞ est la première de deux médiales. Car puisque ΑΕ est incommensurable en

252 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ⁵ ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ⁶ σύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρος ἔστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ⁷, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὅστις μείζον ἔστιν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὅστις ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μείζον ἔστι· καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-

primam. Quoniam enim incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, commensurabilis autem ΕΔ ipsi ΑΒ; incommensurabilis igitur ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, commensurabilis est et ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Atque est rationalis ΑΕ; rationalis igitur et utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ, commensurabilis autem ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ; ergo ΑΗ, ΗΕ incommensurabiles sunt ipsi ΑΒ longitudine; ergo ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; quare medium est utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ; quare utrumque ipsorum ΣΝ, ΝΠ medium est; et ΜΝ,



μετρος ἔστιν⁸ ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρον ἔστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτίεστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτίεστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὅστις δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ¹⁰.

ΝΞ igitur medix sunt. Et quoniam commensurabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine, commensurable est et ΑΘ ipsi ΗΚ, hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; quare potentiâ

longueur avec ΕΔ (37. 10), et que ΕΔ est commensurable avec ΑΒ, la droite ΑΕ sera incommensurable en longueur avec ΑΒ (14. 10). Et puisque ΑΗ est commensurable avec ΗΕ, la droite ΑΕ sera commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ (16. 10). Mais ΑΕ est rationel; chacune des droites ΑΗ, ΗΕ est donc rationnelle. Et puisque ΑΕ est incommensurable avec ΑΒ, et que ΑΕ est commensurable avec chacune des droites ΑΗ, ΗΕ, les droites ΑΗ, ΗΕ seront incommensurables en longueur avec ΑΒ; les droites ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; chacun des rectangles ΑΘ, ΗΚ est donc médial (22. 10); chacun des quarrés ΣΝ, ΝΠ est donc médial; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc médiales. Et puisque ΑΗ est commensurable en longueur avec ΗΕ, le rectangle ΑΘ sera commensurable avec le rectangle ΗΚ (1. 6, et 10. 10), c'est-à-dire le quarré ΣΝ avec le quarré ΝΠ; c'est-à-dire le quarré de ΜΝ avec le quarré de ΝΞ; les droites ΜΝ,

Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρος ἔστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος¹¹. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῇ ΕΛ ἀσύμμετρον ἔστι, τουτίστι τὸ ΣΝ τῇ ΜΡ, τουτίστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτίστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρος ἔστι μήκει. Εδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μίσαι ὄσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λίγω δὲ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἔστι¹² καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἑκατέρᾳ αὐτῶν ῥητὸν ἄρα καὶ ἡ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Εὰν δὲ δύο μίσαι δυνάμει σύμμετροι συντιθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἀλογός ἔστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μίσων πρώτη· ἡ ἄρα ΜΞ¹⁴ ἐκ δύο μίσων ἔστι πρώτη. Ὅπερ εἶδει διζῆσαι.

sunt commensurabiles MN, NZ. Et quoniam incommensurabilis est AE ipsi ED longitudine, sed quidem AE commensurabilis est ipsi AH, ipsa verò AE ipsi EZ commensurabilis; incommensurabilis igitur AH ipsi EZ; quare et AO ipsi EL incommensurabile est, hoc est EN ipsi MP, hoc est ON ipsi NP, hoc est MN ipsi NZ incommensurabilis est longitudine. Ostensæ sunt autem MN, NZ et mediæ existentes et potentiâ commensurabiles; ergo MN, NZ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et eas rationale continere. Quoniam enim ΔΕ supponitur utrique ipsarum AB, EZ commensurabilis; commensurabilis igitur est et ZE ipsi EK. Et rationalis utraque ipsarum; rationale igitur et EL, hoc est MP, sed MP est rectangulum sub MN, NZ. Si verò duæ mediæ potentiâ commensurabiles componantur rationale continentes, tota irrationalis est, appellatur autem ex binis mediis prima; ergo MΞ ex binis mediis est prima. Quod oportebat ostendere.

NΞ sont donc commensurables en puissance. Et puisque AE est incommensurable en longueur avec ED, que AE est commensurable avec AH, et que ΔΕ l'est avec EZ, la droite AH sera incommensurable avec EZ; le rectangle AO est donc incommensurable avec le rectangle EL, c'est-à-dire le carré ΣΝ avec ΜΡ, c'est-à-dire la droite ΟΝ avec la droite ΝΡ, c'est-à-dire que la droite ΜΝ est incommensurable en longueur avec ΝΞ (1.6). Mais on a démontré que les droites ΜΝ, ΝΞ sont et médiales et commensurables en puissance; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis enfin qu'elles comprennent une surface rationnelle. Car puisque ΔΕ est supposé commensurable avec chacune des droites ΑΒ, ΕΖ, la droite ΖΕ sera commensurable avec ΕΚ. Mais chacune d'elles est rationnelle; le rectangle ΕΛ est donc rationnel (20. 10), c'est-à-dire le rectangle ΜΡ qui est compris sous ΜΝ, ΝΞ. Mais si l'on ajoute deux médiales qui n'étant commensurables qu'en puissance, comprennent une surface rationnelle, leur somme est irrationnelle, et s'appelle première de deux médiales (38. 10); donc ΜΞ est une première de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὡς μείζον ἴστω· τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων διυτέρα.

Κατισκυιάσθω· γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἵππει ἐκ δύο ὀνομάτων ἴσθι τρίτη ἢ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἢ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Ομοίως δὲ τοῖς πρότερον διειλεγμένοις δείξομεν ὅτι ἢ ΜΞ ἐστὶν

PROPOSITIO LVII.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus tertiâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ ΑΓ spatium potest, irrationalem esse, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis nominibus est tertiâ ΑΔ; ergo ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quàm ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΑΕ, ΕΔ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine. Congruenter utique suprâ ostensis ostendemus

PROPOSITION LVII.

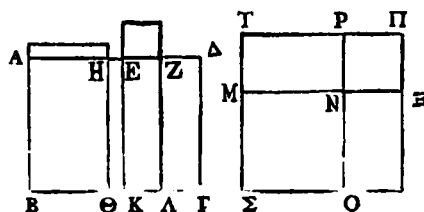
Si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationnelle ΑΒ et sous la troisième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la seconde de deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite ΑΔ est la troisième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la droite ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, et de plus aucune des droites ΑΕ, ΕΔ ne sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 3. 10). Nous démontrerons de la même

ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυνάμει, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ
μέσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ
ἐκ δύο μέσων ἐστὶ³. Δεικνύον δὲ ὅτι καὶ δι-
τέρα. Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ
ΑΒ μήκει, τοῦτίστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ

rectam ΜΞ esse quæ spatium ΑΓ potest; et ΜΝ,
ΝΞ medias esse potentiâ solùm commensura-
biles; quare ΜΞ ex binis mediis est. Osten-
dendum est et secundam esse. Et quoniam
incommensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine,
hoc est ipsi ΕΚ, commensurabilis autem ΔΕ



ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ
ΕΚ μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα
ρηταί εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα
ἐστὶ⁵ τὸ ΕΛ, τοῦτίστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται
ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ
τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ⁷
διττέρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

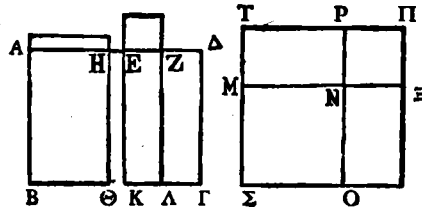
ipsi ΕΖ; incommensurabilis igitur est ΕΖ ipsi
ΕΚ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΖΕ, ΕΚ
igitur rationales sunt potentiâ solùm commensu-
rabiles; medium igitur est ΕΛ, hoc est ΜΡ, et
continetur sub ΜΝ, ΝΞ. Medium igitur est rec-
tangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ergo ΜΞ ex binis mediis
est secunda. Quod oportebat ostendere.

manière que nous l'avons déjà fait que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ (3. 10), et que
les droites ΜΝ, ΝΞ sont des médiales commensurables en puissance seulement; la
droite ΜΞ est donc une droite de deux médiales. Il faut démontrer qu'elle en
est la seconde. Puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-
à-dire avec ΕΚ, et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera incom-
mensurable en longueur avec ΕΚ. Mais ces droites sont rationelles; les droites
ΖΕ, ΕΚ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rec-
tangle ΕΛ, c'est-à-dire le rectangle ΜΡ, est donc médial; mais il est compris sous
ΜΝ, ΝΞ; le rectangle compris sous ΜΝ, ΝΞ est donc médial (39. 10); la droite
ΜΞ est donc une seconde de deux médiales. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νή.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἢ τὸ χωρίον δυναμὶν ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μείζων ἴστω τὸ ΑΕ· λίγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμὶν ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μείζων.



Επεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζων δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὲ ἡ ΔΕ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quartâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ appellatur major.

Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus quartâ ΑΔ, divisâ in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ; dico rectam, quæ spatium ΑΓ potest, irrationalem esse, quæ appellatur major.

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus est quarta, ipsæ ΑΕ, ΕΔ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et ΑΕ quam ΕΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis est longitudine. Secetur utique ΔΕ bifariam

PROPOSITION LVIII.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous la quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure.

Que la surface ΑΓ soit comprise sous la rationelle ΑΒ, et sous la quatrième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationelle appelée majeure.

Car, puisque ΑΔ est la quatrième de deux noms, les droites ΑΕ, ΕΔ seront des rationelles commensurables en puissance seulement, et la puissance de ΑΕ surpassera la puissance de ΕΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, et de plus ΑΕ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 4. 10). Coupons ΔΕ en

δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον
παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον
τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν¹
ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Ἡχθῶσαν παράλληλοι τῇ
ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ
τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὲ ὅτι ἡ τὸ
ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Διεκτίον δὲ²
ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.
Ἐπει³ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει,
ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτίστι
τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει⁴ εἰσὶν
ἀσύμμετροι. Καὶ ἵπτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ
ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἐστὶν ἴσον
τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητόν ἄρα ἐστὶ⁵ καὶ τὸ
συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἵπτι
ἀσύμμετρός ἐστιν⁶ ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτίστι
τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ⁷ ΕΖ·
ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ, ΕΖ
ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον
ἄρα τὸ ΑΕ, τουτίστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται

in Z, et quadrato ex EZ æquale ad ΑΕ appli-
cetur parallelogrammum sub ΑΗ, ΗΕ; in-
commensurabilis igitur est ΑΗ ipsi ΗΕ longitu-
dine. Ducantur ipsi ΑΒ parallelæ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ,
et reliqua eadem quæ suprâ fiant; evidens est
utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est
utique ΜΞ irrationalem esse, quæ vocatur major.
Quoniam incommensurabilis est ΑΗ ipsi ΕΗ lon-
gitudine, incommensurable est et ΑΘ ipsi ΗΚ,
hoc est ΣΝ ipsi ΝΠ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur po-
tentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam
commensurabilis est ΑΕ ipsi ΑΒ longitudine,
rationale est ΑΚ, atque est æquale quadratis ex
ΜΝ, ΝΞ; rationale igitur est et compositum ex
quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam incom-
mensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc
est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ commensurabilis est ipsi
ΕΖ; incommensurabilis igitur ΕΖ ipsi ΕΚ longi-
tudine; ipsæ ΚΕ, ΕΖ igitur rationales sunt
potentiâ solum commensurabiles; medium igitur
ΑΕ, hoc est ΜΡ, et continetur sub ΜΝ, ΝΞ.

deux parties égales en Z, et appliquons à ΑΕ un parallélogramme sous ΑΗ, ΗΕ qui
soit égal au carré de ΕΖ; la droite ΑΗ sera incommensurable en longueur avec
ΗΕ (19. 10). Conduisons les droites ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ parallèles à ΑΒ, et faisons le
reste comme auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut
démontrer que ΜΞ est l'irrationnelle appelée majeure. Puisque ΑΗ est incom-
mensurable en longueur avec ΕΗ, la surface ΑΘ sera incommensurable avec ΗΚ,
c'est-à-dire le carré ΣΝ avec le carré ΝΠ (1. 6, et 10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ
sont donc incommensurables en puissance. Et puisque ΑΕ est commensurable en
longueur avec ΑΒ, le rectangle ΑΚ sera rationel; mais il est égal à la somme des
carrés des droites ΜΝ, ΝΞ; la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ est donc
rationnelle. Et puisque ΔΕ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire
avec ΕΚ; et que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ; la droite ΕΖ sera incommensurable
en longueur avec ΕΚ; les droites ΚΕ, ΕΖ sont donc des rationnelles commensurables
en puissance seulement; le rectangle ΑΕ, c'est-à-dire ΜΡ, est donc médial (22. 10);

258 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$ · μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN , $NΞ$, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον⁸ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $NΞ$, καὶ ἴσιν ἀσύμμετροι αἱ MN , $NΞ$ δυνάμει. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσην, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων· ἡ $MΞ$ ἄρα ἀλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ $ΑΓ$ χωρίον. Οὔτε ἴδιαι διῆξαι.

medium igitur est rectangulum sub MN , $NΞ$, et rationale compositum ex quadratis ipsarum MN , $NΞ$, et sunt incommensurabiles MN , $NΞ$ potentiâ. Si verò duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium, tota irrationalis est. Vocatur autem major; ergo $MΞ$ irrationalis est quæ appellatur major, et potest spatium $ΑΓ$. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 10^η.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὴν καὶ μίσην δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ $ΑΓ$ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς $ΑΒ$, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς $ΑΔ$, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ $Ε$,

PROPOSITIO LIX.

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus quintâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale et medium potens.

Spatium enim $ΑΓ$ contineatur sub rationali $ΑΒ$, et ex binis nominibus quintâ $ΑΔ$, divisâ in nomina ad $Ε$, ita ut majus nomen sit

mais il est contenu sous les droites MN , $NΞ$; le rectangle sous MN , $NΞ$ est donc médial, la somme des quarrés de MN et de $NΞ$ étant rationelle, et les droites MN , $NΞ$ étant incommensurables en puissance. Mais si l'on ajoute deux droites incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationelle, et le rectangle compris sous ces droites étant médial, la somme de ces droites sera irrationelle. Mais cette somme est appelée majeure (40. 10); la droite $MΞ$ est donc l'irrationelle appelée majeure, et elle peut la surface $ΑΓ$. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LIX.

Si une surface est comprise sous une rationelle et sous une cinquième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

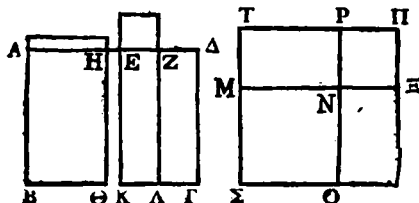
Que la surface $ΑΓ$ soit comprise sous la rationelle $ΑΒ$ et sous une cinquième de deux noms $ΑΔ$, divisée en ses noms au point $Ε$, de manière que $ΑΕ$ soit le plus

ὅστις τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προειρηγμένοις· φανερὸν δὲ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Διεκτίον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμε-

ΑΕ; dico rectam, quæ potest spatium ΑΓ, irrationalem esse, quæ vocatur rationale et medium potens.

Construantur enim eadem quæ suprâ; evidens est utique spatium ΑΓ posse ΜΞ. Ostendendum est autem ΜΞ esse quæ rationale et medium potest. Quoniam enim incommen-



τρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτίστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἶναι ἀσύμμετροι. Καὶ ἵκει ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἐστὶν ἑλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει³. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει⁴, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα⁵ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμε-

surabilis est ΑΗ ipsi ΗΕ, incommensurable igitur est et ΑΘ ipsi ΘΕ, hoc est ex ΜΝ quadratum quadrato ex ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Et quoniam ΑΔ ex bîis nominibus est quinta, atque est minor ipsius portio ΕΔ; commensurable igitur ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine. Sed ΑΕ ipsi ΕΔ est incommensurable longitudine, et ΑΒ igitur ipsi ΑΕ est incommensurable longitudine; ipsæ ΒΑ, ΑΕ igitur rationales sunt potentiâ solum com-

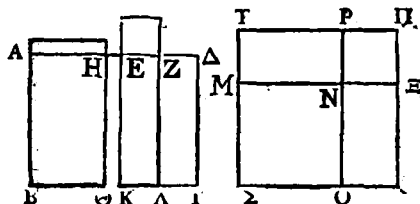
grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est l'irrationnelle appelée la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale.

Faisons la même construction qu'auparavant; il est évident que la droite ΜΞ peut la surface ΑΓ. Il faut démontrer que la droite ΜΞ est celle qui peut une surface rationelle et une surface médiale. Car puisque ΑΗ est incommensurable avec ΗΕ, ΑΘ sera incommensurable avec ΘΕ, c'est-à-dire le carré de ΜΝ avec le carré de ΝΞ (10. 10); les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance. Et puisque la droite ΑΔ est la cinquième de deux noms, et que ΕΔ en est le plus petit segment, la droite ΕΔ sera commensurable en longueur avec ΑΒ (déf. sec. 5. 10). Mais ΑΕ est incommensurable en longueur avec ΕΔ; donc ΑΒ est incommensurable en longueur avec ΑΕ (13. 10); les droites ΒΑ, ΑΕ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; le rec-

260 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τροι· μέσον ἄρα ἰστί τὸ ΑΚ, τουτίστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ ἐπὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτίστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστι· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι. Καὶ

mensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΑΒ longitudine, hoc est ipsi ΕΚ, sed ΔΕ ipsi ΕΖ commensurabilis est; et ΕΖ igitur ipsi ΕΚ com-



ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτίστι τὸ ΜΡ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἰστί, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mensurabilis est. Et rationalis ΕΚ; rationale igitur et ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ; ipsæ ΜΝ, ΝΞ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem sub ipsis rationale; ipsa ΜΞ igitur rationale et medium potest, et potest spatium ΑΓ. Quod oportebat ostendere.

tangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ, est donc médiale (22. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΑΒ, c'est-à-dire avec ΕΚ; que ΔΕ est commensurable avec ΕΖ, la droite ΕΖ sera commensurable avec ΕΚ. Mais la droite ΕΚ est rationelle, le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire ΜΡ (20. 10), c'est-à-dire le rectangle sous ΜΝ, ΝΞ, est donc rationel; les droites ΜΝ, ΝΞ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle compris sous ces droites étant rationel; donc ΜΞ est la droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale (41. 10), et elle peut la surface ΑΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ'.

PROPOSITIO LX.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς· ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη δύο μίσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτῆς τῆς ΑΔ, διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἢ δύο μίσα δυναμένη ἐστί.

Κατεσκευάσθω γάρ· τὰ αὐτὰ τοῖς προειρημένοις. Φανερόν δὲ ὅτι ἢ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἢ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ

Si spatium contineatur sub rationali, et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur bina media potens.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, et ex binis nominibus sextâ ΑΔ, divisâ in nomina ad Ε, ita ut majus nomen sit ΑΕ; dico rectam, quæ potest ipsum ΑΓ, bina media posse.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Evidens est utique ipsum ΑΓ posse ΜΞ, et incommensurabilem esse ΜΝ ipsi ΝΞ potentiâ. Et quoniam incommensurabilis est ΕΑ ipsi ΑΒ longitudine; ipsæ ΕΑ, ΑΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est ΑΚ, hoc est compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine, incommensu-

PROPOSITION LX.

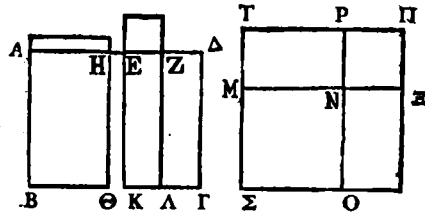
Si une surface est comprise sous une rationelle et une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée la droite qui peut deux médiales.

Que la surface ΑΒΓΔ soit comprise sous la rationelle ΑΒ et sous une sixième de deux noms ΑΔ, divisée en ses noms au point Ε, de manière que ΑΕ soit le plus grand nom; je dis que la droite qui peut la surface ΑΓ est celle qui peut deux médiales.

Faisons la même construction qu'auparavant. Il est évident que ΜΞ peut la surface ΑΓ, et que ΜΝ est incommensurable en puissance avec ΝΞ. Et puisque ΕΑ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, les droites ΕΑ, ΑΒ seront des rationelles commensurables en puissance seulement; le rectangle ΑΚ, c'est-à-dire la somme des carrés de ΜΝ et de ΝΞ, sera donc médial (22. 10). De plus, puisque ΕΔ est incommensurable en longueur avec ΑΒ, la droite ΕΖ sera incommensurable

τῇ ΕΚ· καὶ⁵ αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει
μόνον σύμμετροι· μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, του-
τίστι τὸ ΜΡ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ.

rabilis igitur est et EZ ipsi EK; et ipsæ ZE, EK igitur
rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;
medium igitur est ΕΛ, hoc est ΜΡ, hoc est



Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν⁶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ
τὸ ΑΚ τῇ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Αλλὰ τὸ μὲν
ΑΚ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ,
ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ·
ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν
ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῇ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. Καὶ
ἐστὶ μίσην ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ⁷
δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μίση
δυναμὴν ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. Ὅπερ ἔδει
δείξαι.

rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ. Et quoniam incom-
mensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΖ, et ΑΚ ipsi ΕΛ
incommensurabile est. Sed quidem ΑΚ est
compositum ex quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ,
ipsum verò ΕΛ est rectangulum sub ΜΝ, ΝΞ;
incommensurabile igitur est compositum ex
quadratis ipsarum ΜΝ, ΝΞ rectangulo sub ΜΝ,
ΝΞ. Atque est medium utrumque ipsorum, et
ΜΝ, ΝΞ potentiâ sunt incommensurabiles; ergo
ΜΞ bina media potest, et potest ipsum ΑΓ.
Quod oportebat ostendere.

avec EK, les droites ZE, EK sont donc des rationnelles commensurables en
puissance seulement; le rectangle ΕΛ, c'est-à-dire ΜΡ, c'est-à-dire le rectangle
sous ΜΝ, ΝΞ, sera donc médial. Et puisque ΑΕ est incommensurable avec ΕΖ,
le rectangle ΑΚ sera incommensurable avec ΕΛ. Mais ΑΚ est composé de la somme
des quarrés de ΜΝ, ΝΞ, et ΕΛ est le rectangle sous ΜΝ, ΝΞ; la somme
des quarrés de ΜΝ, ΝΞ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΜΝ, ΝΞ.
Mais l'une et l'autre de ces grandeurs est médiale; les droites ΜΝ, ΝΞ
sont donc incommensurables en puissance; donc ΜΞ est la droite qui peut deux
médiales, et elle peut la surface ΑΓ (42. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΛΗΜΜΑ.

Εάν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιχομένου ὀρθογωνίου.

Εστω εὐθεία ἡ AB, καὶ τμηθῇ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

LEMMA.

Si recta linea secetur in partes inæquales, ipsarum inæqualium quadrata majora sunt rectangulo bis contento sub ipsis inæqualibus.

Sit recta linea AB, et secetur in partes inæquales ad punctum Γ, et sit major ΑΓ; dico quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora esse rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ.



Τετμήσθω γάρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεία γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἑλαττόν ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

Secetur enim AB bifariam in Δ. Quoniam igitur recta linea secatur in partes quidem æquales ad Δ, in partes verò inæquales ad Γ; rectangulum igitur sub ΑΓ, ΓΒ cum quadrato ex ΔΓ æquale est quadrato ex ΑΔ; quare rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ minus est quadrato ex ΑΔ; rectangulum igitur bis sub ΑΓ, ΓΒ minus est quàm duplum quadrati ex ΑΔ. Sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ dupla sunt quadratorum ex ΑΔ, ΔΓ; ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

LEMME.

Si une ligne droite est coupée en parties inégales, la somme des quarrés de ces parties inégales est plus grande que le double rectanglè compris sous ces parties.

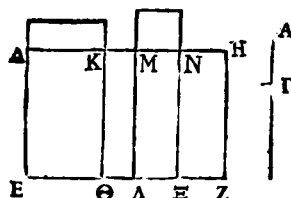
Soit la droite AB; coupons-la en parties inégales au point Γ, et que ΑΓ soit la plus grande; je dis que la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ.

Que la droite AB soit coupée en deux parties égales en Δ. Puisque la ligne droite AB est coupée en parties égales au point Δ, et en parties inégales au point Γ, le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ avec le quarré de ΔΓ sera égal au quarré de ΑΔ (5. 2); le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le quarré de ΑΔ; le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est donc plus petit que le double quarré de ΑΔ. Mais la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est double de la somme des quarrés de ΑΔ et de ΔΓ (9. 2); la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc plus grande que le double rectanglè sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξά.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐστὼ ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB , διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ AG , καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβελήσθω τὸ ΔEZH , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.



Παραβελήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔE τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AG ἴσον τὸ $\Delta\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ ἴσον τὸ $ΚΛ$. λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , ΓB ἴσον ἐστὶ τῷ MZ . Τετμήσθω ἡ MH δίχα κατὰ τὸ N , καὶ παράλληλος ἦχθω ἡ $NΞ$ ἑκατέρᾳ τῶν ML , $HΞ$. ἑκάτερον ἄρα τῶν $MΞ$, NZ ἴσον ἐστὶ τῷ

Quadratum rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

Sit ex binis nominibus ipsa AB , divisa in nomina ad Γ , ita ut majus nomen sit AG , et exponatur rationalis ΔE , et quadrato ex AB æquale ad ΔE applicetur ipsum ΔEZH , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse primam.

Applicetur enim ad ΔE quadrato quidem ex AG æquale $\Delta\Theta$, ipsi verò ex $B\Gamma$ æquale $ΚΛ$; reliquum igitur rectangulum bis sub AG , ΓB æquale est ipsi MZ . Secetur MH bifariam in N , et parallela ducatur ipsa $NΞ$ alterutri ipsarum ML , $HΞ$; utrumque igitur ipsorum $MΞ$,

PROPOSITION LXI.

Le carré d'une droite de deux noms appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est la première de deux noms.

Soit la droite AB de deux noms, divisée en ses noms au point Γ , de manière que AG soit son plus grand nom; soit exposée la rationnelle ΔE , et appliquons à la rationnelle ΔE un rectangle ΔEZH égal au carré de AB , et faisant la largeur ΔH ; je dis que la droite ΔH est une première de deux noms.

Appliquons à la rationnelle ΔE un rectangle $\Delta\Theta$ égal au carré de AG (45. 1), et un rectangle $ΚΛ$ égal au carré de $B\Gamma$; le double rectangle restant sous AG , ΓB sera égal au rectangle MZ (4. 2). Coupons MH en deux parties égales en N , et menons à l'une ou à l'autre des droites ML , $HΞ$ la parallèle $NΞ$; chacun des rectangles

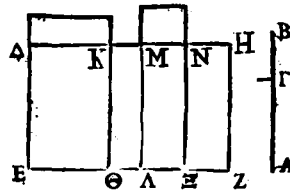
ἄπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητὰ ἐστὶ² καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ἄσπερ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ³. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τοῦτέστι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστὶ⁴, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τοῦτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταὶ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικτέον

ΘΖ æquale est rectangulo semel sub ΑΓ, ΓΒ. Et quoniam ex binis nominibus est ΑΒ divisa in nomina ad Γ; ipsæ ΑΓ, ΓΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationalia sunt et commensurabilia inter se; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ commensurabile est quadratis ex ΑΓ, ΓΒ. Atque est æquale ipsi ΔΛ; rationale igitur est ΔΛ, et ad rationalem ΔΕ applicatur; rationalis igitur est ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; medium igitur est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ. Et ad rationalem ΜΛ applicatur; rationalis igitur et ΜΗ est, et incommensurabilis ipsi ΜΛ, hoc est ipsi ΔΕ, longitudine. Est autem et ΜΔ rationalis, et ipsi ΔΕ longitudine commensurabilis; incommensurabilis igitur est ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΔΗ. Ostendendum est

ΜΞ, ΝΖ sera égal au rectangle compris sous ΑΓ, ΓΒ. Et puisque la droite ΑΒ de deux noms est divisée en ses noms au point Γ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10); les carrés de ΑΓ et de ΓΒ sont donc rationels, et commensurables entre eux; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc commensurable avec la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ (16. 10). Mais elle est égale au rectangle ΔΛ; le rectangle ΔΛ est donc rationel, et il est appliqué à la rationelle ΔΕ; la droite ΔΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10). De plus, puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΜΖ, sera médial. Mais il est appliqué à la rationelle ΜΛ; la droite ΜΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΜΛ, c'est-à-dire avec ΔΕ (23. 10). Mais la droite ΜΔ est rationelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ (13. 10). Mais ces droites sont rationelles; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer

δη ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γάρ⁵ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μείσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτίστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως⁶ ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς

et primam esse. Quoniam enim quadratorum ex ΑΓ, ΓΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ipsorum ΔΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΜΞ; est igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΛ, hoc est ut ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ; rectangulum igitur sub ΔΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ. Et quoniam commensurable est ex ΑΓ quadratum quadrato



ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῷ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. Καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτίστιν τῷ τετάρτῳ μέρει⁸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῷ ΚΜ μήκει⁹. Εὰν δὲ ᾧσι δύο ὀρθοίαι ἀνισοί, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ

ex ΓΒ, commensurable est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilis est longitudine. Et quoniam majora sunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ; majus igitur et ΔΛ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ ipsâ ΜΗ major est. Atque est æquale rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΗ, et commensurabilis ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine. Si autem sunt duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex mi-

qu'elle est aussi une première de deux noms. Car puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est moyen proportionel entre les quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ (55. lem. 10), le rectangle ΜΞ sera moyen proportionel entre les rectangles ΔΘ, ΚΛ; le rectangle ΔΘ est donc à ΜΞ comme ΜΞ est à ΚΛ, c'est-à-dire ΔΚ est à ΜΝ comme ΜΝ est à ΜΚ; le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΜΝ (17. 6). Et puisque le quarré de ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commensurable avec le rectangle ΚΛ (14. 10); la droite ΔΚ est donc commensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est plus grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (61. lem. 10), le rectangle ΔΛ sera plus grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΜΗ, et la droite ΔΚ est commensurable en longueur avec ΚΜ; or, si l'on a deux droites inégales,

ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παρα-
 βληθῇ ἑλλείπον ἰῶδι τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμ-
 μετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάττονος
 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ
 ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ¹⁰. Καὶ εἴσι ρηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ,
 καὶ ἡ ΔΜ μείζον ὄνομα οὔσα σύμμετρός ἐστι
 τῇ ἐκκειμένῃ ρητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ
 δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Οὔτε ἴδιαι δεῖξαι.

nori æquale ad majorem applicetur deficiens
 figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles
 ipsam dividat, major quàm minor plus potest
 quadrato ex rectâ sibi commensurabili; ipsa ΔΜ
 igitur quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ
 sibi commensurabili. Et sunt rationales ΔΜ,
 ΜΗ, et ΔΜ majus nomen existens commensu-
 rabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine;
 ergo ΔΗ ex binis nominibus est prima. Quod
 oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΒ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ρητὴν
 παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνο-
 μάτων δευτέραν.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διηρημένη
 εἰς τὰς μέσας· κατὰ τὸ Γ, ὡς μείζων ἡ ΑΓ, καὶ
 ἐκκείσθω ρητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παρα-

PROPOSITIO LXII.

Quadratum primæ ex binis mediis ad ra-
 tionalem applicatum latitudinem facit ex binis
 nominibus secundam.

Sit ex binis mediis prima ΑΒ, divisa in
 medias ad Γ, quarum major sit ΑΓ, et expo-
 natur rationalis ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ applicetur

si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du
 quarré de la plus petite, si ce parallélogramme est défailant d'une figure quarrée,
 et s'il partage la plus grande en parties commensurables, la puissance de la plus
 grande surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commen-
 surable en longueur avec la plus grande (18. 10); la puissance de ΔΜ surpasse
 donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ. Mais les
 droites ΔΜ, ΜΗ sont rationelles, et ΔΜ, qui est le plus grand nom, est com-
 mensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une
 première de deux noms (déf. sec. 1. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXII.

Le quarré de la première de deux médiales appliqué à une rationelle fait une
 largeur qui est la seconde de deux noms.

Soit ΑΒ la première de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ; que la
 droite ΑΓ soit la plus grande; soit exposée la rationelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ un

μήκει. Καὶ εἴσι ρηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ρηταί
εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὁνο-
μάτων ἴστιν ἡ ΔΗ. Διεκτίον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.
Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ
δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΑ τοῦ
ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμ-
μετροί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμ-
μετροί ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ
τῇ ΚΜ σύμμετρος ἐστι. Καὶ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν
ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς
ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου αὐτῆς.
Καὶ ἴστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ
ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἴστιν δευτέρα. Ὅπρι εἶδει
αἰετῆται.

tudine. Et sunt rationales; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur
rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;
ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum
est et secundam esse. Quoniam enim quadrata
ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt rectangulo bis sub ΑΓ,
ΓΒ; majus igitur et ΔΑ ipso ΜΖ; quare et ΔΜ
ipsâ ΜΗ. Et quoniam commensurabile est ex
ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ, commensurabile
est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare et ΔΚ ipsi ΚΜ com-
mensurabilis est. Atque est rectangulum sub
ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ
quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi
commensurabili. Atque est ΜΗ commensurabilis
ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus
est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΓ΄.

PROPOSITIO LXIII.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας ποσῆς
ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο
ὀνομάτων τρίτην.

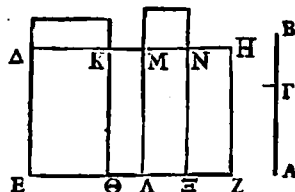
Quadratum secundæ ex binis mediis ad ratio-
nalem applicatum latitudinem facit ex binis no-
minibus tertiam.

les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seule-
ment; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi
la seconde de deux noms. Car puisque la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ est plus
grande que le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (lem. 61. 10), le rectangle ΔΑ sera plus
grand que ΜΖ; la droite ΔΜ est donc plus grande que ΜΗ. Et puisque le quarré de
ΑΓ est commensurable avec le quarré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera commen-
surable avec ΚΛ; la droite ΔΚ est donc commensurable avec ΚΜ. Mais le
rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ surpasse
donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10).
Mais la droite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc
une seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIII.

Le quarré de la seconde de deux médiales appliqué à une rationnelle fait une
largeur qui est la troisième de deux noms.

Εστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB , διηρημένη εἰς τὰς μίσας κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὸ μείζον τμήμα εἶναι τὸ $ΑΓ$, ῥητὴ δὲ τις ἔστω ἡ ΔE , καὶ παρὰ τὴν ΔE τῇ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραλληλόγραμμον παραβελήσθω τὸ ΔZ , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.



Κατισκυιάσθω γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδιγμένοις. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ · αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα μίται εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, μίσην περιέχουσιν· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓB$ μίσην ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῇ $\Delta\Lambda$ · μίσην ἄρα καὶ τὸ $\Delta\Lambda$ · καὶ παράκειται παρὰ τὴν ῥητὴν ΔE · ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔM , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ MH ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΜΛ$, τουτίστι τῇ ΔE , μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα

Sit ex binis mediis secunda AB , divisa in medias ad Γ , ita ut majus segmentum sit $ΑΓ$, rationalis autem aliqua sit ΔE , et ad ipsam ΔE quadrato ex AB æquale parallelogrammum applicetur ΔZ , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse tertiam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam ex binis mediis est secunda AB , divisa ad Γ ; ipsæ $ΑΓ$, $ΓB$ igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, medium continentes; quare et compositum ex quadratis ipsarum $ΑΓ$, $ΓB$ medium est. Atque est æquale ipsi $\Delta\Lambda$; medium igitur et $\Delta\Lambda$; et applicatur ad rationalem ΔE ; rationalis igitur est et ΔM , et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Propter eadem utique et MH rationalis est, et incommensurabilis ipsi $ΜΛ$, hoc est ipsi ΔE , longitudine; rationalis igitur est utraque ipsa-

Soit AB la seconde de deux médiales, divisée en ses médiales au point Γ , de manière que $ΑΓ$ soit son plus grand segment; soit aussi la rationnelle ΔE ; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une troisième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque AB est une seconde de deux médiales, divisée au point Γ ; les droites $ΑΓ$, $ΓB$ seront des médiales commensurables en puissance seulement, qui comprendront une surface médiale (39. 10); la somme des carrés de $ΑΓ$ et de $ΓB$ est donc médiale. Mais elle est égale au rectangle $\Delta\Lambda$; le rectangle $\Delta\Lambda$ est donc médial; et il est appliqué à la rationnelle ΔE ; la droite ΔM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (25. 10). Par la même raison, la droite MH est rationnelle, et incommensurable en longueur avec $ΜΛ$, c'est-à-dire avec ΔE ; chacune des droites ΔM , MH

τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὥς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ⁵ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἴσι ρηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Δεικνύον δὲ⁶ ὅτι καὶ τρίτη. Ομοίως δὲ τοῖς προτέροις⁷ ἐπιλογισύμειθα, ὅτι μείζων ἐστὶν⁸ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδενίᾳ τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

rum ΔΜ, ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Et quoniam incommensurabilis est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurable igitur et ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ; quare et compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ incommensurable est, hoc est ΔΛ ipsi ΜΖ; quare et ΔΜ ipsi ΜΗ incommensurabilis est. Et sunt rationales; ergo ex binis nominibus est ΔΗ. Ostendendum est et tertiam esse. Congruenter utique præcedentibus concludemus majorem esse ΔΜ ipsâ ΜΗ, et commensurabilem ΔΚ ipsi ΚΜ. Atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ; ergo ΔΜ quàm ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est tertia. Quod oportebat ostendere.

est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ. Et puisque ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΓΒ, et que ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, le carré de ΑΓ sera incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés de ΑΓ et de ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΔΛ avec ΜΖ; la droite ΔΜ est donc incommensurable avec ΜΗ. Mais ces droites sont rationnelles; ΔΗ est donc une droite de deux noms. Il faut démontrer qu'elle est aussi une troisième de deux noms. Nous concluons comme auparavant que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que ΔΚ est commensurable avec ΚΜ. Mais le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ; la puissance de ΔΜ est donc plus grande que la puissance de ΜΗ du carré d'une droite commensurable avec ΔΜ (18. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une troisième de deux noms (déf. sec. 5. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΔ'.

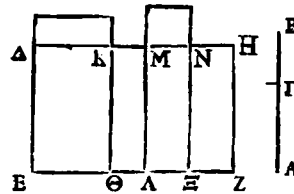
PROPOSITIO LXIV.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐστω μείζων ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν AG τῆς GB , ῥητὴ δέ τις ἴστω ἡ ΔE , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλησθαι τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major AB , divisa ad Γ , ita ut major sit AG quàm GB , rationalis autem aliqua sit ΔE , et quadrato ex AB æquale ad ipsam ΔE applicetur ΔZ parallelogrammum, latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse quartam.



Κατισκυάσθω γάρ^α τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ AG , GB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam major est AB divisa ad Γ , ipsæ AG , GB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium.

PROPOSITION LXIV.

Le carré d'une majeure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est la quatrième de deux noms.

Soit la majeure AB , divisée en Γ , la droite AG étant plus grande que GB ; soit aussi une rationelle ΔE ; appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ , qui étant égal au carré de AB , ait la droite ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une quatrième de deux noms.

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la majeure AB est divisée au point Γ , les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous ces mêmes droites

μείζον. Ἐπεὶ οὖν ῥητὴν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τοῦτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται⁴ ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα⁵ ῥηταὶ εἰσι δικάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. Διεκτίον δὴ⁶ ὅτι καὶ τετάρτη. Ομοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον⁷, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετράν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ⁹. Εὖν δὲ ὥσι δύο ἐνθεῖαι ἀνισοί, τῇ δὲ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ¹⁰ ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ

Quoniam igitur rationale est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, rationale igitur et ΔΛ; rationalis igitur est et ΔΜ, et commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, hoc est ΜΖ, et ad rationalem ΜΛ applicatur; rationalis igitur est et ΜΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine; ipsæ ΔΜ, ΜΗ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex hinc nominibus est ΔΗ. Ostendum est et quartam. Congruenter utique præcedentibus ostendemus, maiorem esse ΔΜ quam ΜΗ, et rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΜΝ. Quoniam igitur incommensurable est ex ΑΓ quadratum quadrato ex ΓΒ; incommensurable igitur est et ΔΘ ipsi ΚΛ; quare incommensurabilis est et ΚΔ ipsi ΚΜ. Si autem sint duæ rectæ inæquales, quartæ verò parti quadrati ex minori æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficient figurâ quadratâ, et in partes incommen-

médial (40. 10). Puisque la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est rationnelle, le rectangle ΔΛ sera rationel; la droite ΔΜ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec ΔΕ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, c'est-à-dire ΜΖ, est médial, et qu'il est appliqué à la rationnelle ΜΛ, la droite ΜΗ sera rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔΕ (23. 10); la droite ΔΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΗ; les droites ΔΜ, ΜΗ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔΗ est donc une droite de deux noms (37. 10). Il faut démontrer qu'elle est aussi la quatrième de deux noms. Nous démontrerons, comme auparavant, que ΔΜ est plus grand que ΜΗ, et que le rectangle sous ΔΚ, ΚΜ est égal au carré de ΜΝ. Et puisque le carré de ΑΓ est incommensurable avec le carré de ΓΒ, le rectangle ΔΘ sera incommensurable avec ΚΛ (10. 10); la droite ΚΔ est donc incommensurable avec ΚΜ. Mais si deux droites sont inégales; si l'on applique à la plus grande un parallélogramme égal à la quatrième partie du carré de la plus petite, et si ce parallélogramme, étant défailant d'une figure carrée, partage la plus grande droite en parties incommen-

274 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήκει¹¹, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τιτάρτη. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

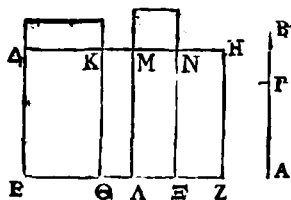
surabiles ipsam dividat longitudine, major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solùm commensurabiles, et ΔΜ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quarta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ξ΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

PROPOSITIO LXV.

Quadratum ex eâ quæ rationale et medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.



Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διηρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ

Sit rationale et medium potens ΑΒ, divisa in rectas ad Γ, ita ut major sit ΑΓ, et exponatur rationalis ΔΕ, et quadrato ex ΑΒ

mensurables en longueur, la puissance de la plus grande droite surpassera la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec la plus grande droite (19. 10); la puissance de ΔΜ surpassera donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΔΜ. Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationelles commensurables en puissance seulement, et ΔΜ est commensurable avec la rationelle exposée ΔΕ; ΔΗ est donc une quatrième de deux noms. (déf. sec. 4. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXV:

Le quarré d'une droite qui peut une surface rationelle et une surface médiale étant appliqué à une rationelle, fait une largeur qui est la cinquième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, pouvant une surface rationelle et une surface médiale, soit divisée en ses droites au point Γ, la droite ΑΓ étant la plus grande; soit exposée la

ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβελήσθω τὸ ΔZ , πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH . λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γάρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστὶν ἡ AB , διηρημένη κατὰ τὸ Γ αἱ AG , GB ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσην, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μίσην ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB μίσην ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔA . ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔM , καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔE . Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , τουτίστι τὸ MZ . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MH , καὶ σύμμετρος τῇ ΔE μήκει³. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔM τῇ MH . αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH . λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ διειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK , KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔK τῇ KM

æquale ad ipsam ΔE applicetur ΔZ , latitudinem faciens ΔH ; dico ΔH ex binis nominibus esse quintam.

Construantur enim eadem quæ suprâ. Quoniam igitur rationale et medium potens est AB , divisa ad Γ ; ergo AG , GB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale. Quoniam igitur medium est compositum ex quadratis ipsarum AG , GB ; medium igitur est et ΔA ; quare rationalis est ΔM , et longitudine incommensurabilis ipsi ΔE . Rursus, quoniam rationale est rectangulum bis sub AG , GB , hoc est MZ ; rationalis igitur est MH , et commensurabilis ipsi ΔE longitudine; incommensurabilis igitur ΔM ipsi MH ; ipsæ ΔM , MH igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔH . Dico et quintam esse. Similiter enim demonstrabitur rectangulum sub ΔK , KM æquale esse quadrato ex MN , et incommensurabilem ΔK ipsi KM longitu-

rationelle ΔE , et appliquons à ΔE un parallélogramme ΔZ égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΔH pour largeur; je dis que ΔH est une cinquième de deux noms.

Car faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB , qui est divisée au point Γ , peut une surface rationnelle et une surface médiale, les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Puisque la somme des carrés des droites AG , GB est médiale, le rectangle ΔA sera médial; la droite ΔM est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous AG , GB , c'est-à-dire MZ , est rationel, la droite MH sera rationnelle et commensurable en longueur avec ΔE (21. 10); la droite ΔM est donc incommensurable avec MH (13. 10); les droites ΔM , MH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔH est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis qu'elle est aussi une cinquième de deux noms. Car nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΔK , KM est égal au carré de MN , et que ΔK est in-

276 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μήκει⁴. ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μίζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταί⁵ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττω ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Ὅπρι εἶδει διῆξαι.

dine; ergo ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et sunt ΔΜ, ΜΗ rationales potentiâ solûm commensurabiles, et minor ΜΗ commensurabilis ipsi ΔΕ longitudine; ergo ΔΗ ex binis nominibus est quinta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΣ'.

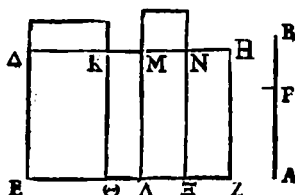
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μίσα δυνάμενης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐστω δύο μίσα δυνάμειν ἡ ΑΒ, διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἴστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν

PROPOSITIO LXVI.

Quadratum ex eâ quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

Sit bina media potens ΑΒ, divisa ad Γ, rationalis autem sit ΔΕ, et ad ipsam ΔΕ



ΔΕ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

quadrato ex ΑΒ æquale applicetur ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ; dico ΔΗ ex binis nominibus esse sextam.

commensurable en longueur avec ΚΜ; la puissance de ΔΜ surpasse donc la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable avec ΔΜ (19. 10). Mais les droites ΔΜ, ΜΗ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement, et la plus petite ΜΗ est commensurable en longueur avec ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10) Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVI.

Le quarré d'une droite qui peut deux médiales étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est la sixième de deux noms.

Que la droite ΑΒ, divisée au point Γ, puisse deux médiales; soit la rationnelle ΔΕ, et appliquons à ΔΕ le parallélogramme ΔΖ égal au quarré de ΑΒ, et ayant ΔΗ pour largeur; je dis que ΔΗ est une sixième de deux noms.

Κατισκυάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB δύο μῆσα δυνάμει ἐστὶ, διηρημένη κατὰ τὸ Γ · αἱ AG , GB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μῆσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μῆσον, καὶ ἐτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν ὥστε κατὰ τὰ προδειγμένα μῆσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $\Delta\Lambda$, MZ , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παρὰκίται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερα τῶν ΔM , MH , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Lambda$ τῷ MZ · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔM τῇ MH · αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH . Λέγω ὅτι καὶ ἔκτῃ. Ομοίως δὲ πάλιν³ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK , KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ὅτι ἡ ΔK τῇ KM μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ

Construantur enim eadem quæ suprâ. Et quoniam AB bina media potens est, divisa ad Γ ; ipsæ AG , GB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable ex ipsarum quadratis compositum composito ex rectangulis sub ipsis; quare ex jam demonstratis medium est utrumque ipsorum $\Delta\Lambda$, MZ , et ad rationalem ΔE applicantur; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔM , MH , et incommensurabilis ipsi ΔE longitudine. Et quoniam incommensurable est compositum ex quadratis ipsarum AG , GB rectangulo bis sub AG , GB , incommensurable igitur est $\Delta\Lambda$ ipsi MZ ; incommensurabilis igitur est et ΔM ipsi MH ; ipsæ ΔM , MH igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo ex binis nominibus est ΔH . Dico et sextam esse. Similiter utique rursus ostendemus rectangulum sub ΔK , KM æquale esse quadrato ex MN , et ΔK ipsi KM longitudine esse incommensurabilem; et propter

Faisons la même construction qu'auparavant. Puisque la droite AB , divisée au point Γ , peut deux médiales, les droites AG , GB seront incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme de leurs carrés étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces droites (42. 10), chacun des rectangles $\Delta\Lambda$, MZ sera médial, d'après ce qui a été démontré; mais ils sont appliqués à la rationnelle ΔE ; chacune des droites ΔM , MH est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΔE (23. 10). Et puisque la somme carrés de AG et de GB est incommensurable avec le double rectangle sous AG , GB , le rectangle $\Delta\Lambda$ sera incommensurable avec MZ ; la droite ΔM est donc incommensurable avec MH (10. 10); les droites ΔM , MH sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΔH est donc une droite de deux noms. Je dis qu'elle est aussi une sixième de deux noms. Nous démontrerons encore de la même manière que le rectangle sous ΔK , KM est égal au carré de MN , et que ΔK est incommensurable en longueur avec KM ; par la

278 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΔΜ τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἢ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτη. Ὅπῃ ἔδει δείξαι.

eadem utique ΔΜ quam ΜΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ longitudine ; ergo ΔΗ ex binis nominibus est sexta. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΖ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτῇ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γεγονέντω ὡς ἡ ΑΒ

PROPOSITIO LXVII.

Recta quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis nominibus est et ordine eadem.

Sit ex binis nominibus ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico ΓΔ ex binis nominibus esse et ordine eandem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis nominibus est ΑΒ, dividatur in nomina ad Ε, et sit majus nomen ΑΕ; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Fiat ut

même raison, la puissance de ΔΜ surpassera la puissance de ΜΗ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΔΜ (19. 10). Mais aucune des droites ΔΜ, ΜΗ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΕ; la droite ΔΗ est donc une sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXVII.

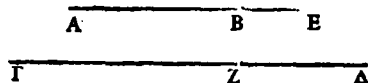
La droite qui est commensurable en longueur avec une droite de deux noms, est aussi elle-même une droite de deux noms, et du même ordre qu'elle.

Soit ΑΒ une droite de deux noms, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux noms, et qu'elle est du même ordre que ΑΒ.

Car, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, qu'elle soit divisée en ses noms au point Ε, et que ΑΕ soit son plus grand nom; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (37. 10). Faisons en sorte que

πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἢ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν

ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; et reliqua igitur ΕΒ ad reliquam ΖΔ est ut ΑΒ ad ΓΔ. Commensurabilis verò ΑΒ ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur est et quidem ΑΕ ipsi ΓΖ, ipsa verò ΕΒ ipsi ΖΔ. Et sunt rationales ΑΕ, ΕΒ; rationales igitur sunt et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΒ ad ΖΔ; permutando



ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἴσι ῥηταὶ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἢ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται ἢ τοῖς τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἢ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἢ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν

igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et sunt rationales; ex binis igitur nominibus est ΓΔ. Dico et ordine esse eamdem ipsi ΑΒ.

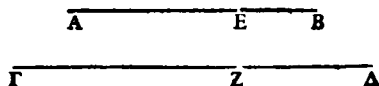
Vel enim ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Si quidem igitur ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si

ΑΒ soit à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ; la droite restante ΕΒ sera à la droite restante ΖΔ comme ΑΒ est à ΓΔ (19. 5). Mais ΑΒ est commensurable en longueur avec ΓΔ; la droite ΑΕ est donc commensurable avec ΓΖ, et ΕΒ avec ΖΔ (10. 10). Mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont rationnelles; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc rationnelles. Et puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΕΒ est à ΖΔ; par permutation, ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais les droites ΑΕ, ΕΒ ne sont commensurables qu'en puissance; les droites ΓΖ, ΖΔ ne sont donc commensurables qu'en puissance. Mais elles sont rationnelles; ΓΔ est donc une droite de deux noms (37. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que ΑΒ.

Car la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΑΕ. Si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite commensurable avec ΓΖ (15. 10);

σύμμετρος ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται⁵. καὶ διὰ τοῦτο ἑκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρος ἔστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκάτερα γὰρ αὐτῶν ἔσται⁶ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ

quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis eidem erit; et ob id utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. Si verò ΕΒ commensurabilis est expositæ rationali, et ΖΔ commensurabilis est eidem, et ob id rursus ordine eadem erit ipsi ΑΒ, utraque enim ipsarum erit ex binis nominibus secunda. Si autem



οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδέτερα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μῖζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μῖζον δύναται⁷ τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος ἔστιν αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκάτερα τετάρτη.

neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ commensurabilis sit expositæ rationali, neutra ipsarum ΓΖ, ΖΔ commensurabilis eidem erit, et est utraque tertia. Si verò ΑΕ quam ΕΒ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΑΕ commensurabilis est expositæ rationali, et ΓΖ commensurabilis est eidem, et est utraque quarta. Si autem

et si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΓΖ sera aussi commensurable avec elle (12. 10). Chacune des droites ΑΒ, ΓΔ est donc la première de deux noms, c'est-à-dire que ces droites sont du même ordre. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΖΔ sera aussi commensurable avec elle, et la droite ΓΔ sera encore du même ordre que ΑΒ, car chacune d'elles sera une seconde de deux noms. Mais si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une troisième de deux noms. Si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du carré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du carré d'une droite incommensurable avec ΓΖ (15. 10). Si la droite ΑΕ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une quatrième de deux noms. Si la droite ΕΒ est commensurable avec la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 281

Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἴσται ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδέτερα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδέτερα σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ, καὶ ἴσται ἑκατέρα ἑκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύο, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΞΙ.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Εστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἴστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Επεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρῶσθω² εἰς τὰς μίσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγνήτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ³· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν

ΕΒ, et ΖΔ, et erit utraque quinta. Si verò neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et ipsarum ΓΖ, ΖΔ neutra commensurabilis est expositæ rationali, et erit utraque sexta.

Quare recta ei quæ est ex binis, etc.

PROPOSITIO LXVIII.

Recta ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis, et ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

Sit ex binis mediis ipsa ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis sit longitudine ipsa ΓΔ; dico ΓΔ ex binis mediis esse, et ordine eadem ipsi ΑΒ.

Quoniam enim ex binis mediis est ΑΒ, dividatur in medias ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur mediarum sunt potentiâ solum commensurabiles. Et fiat ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; et reliqua igitur ΕΒ ad reliquam ΖΔ est ut ΑΒ ad ΓΔ.

rationnelle exposée, la droite ΖΔ le sera aussi, et chacune d'elles sera une cinquième de deux noms; et enfin si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable avec elle, et chacune d'elles sera une sixième de deux noms. Donc, etc.

PROPOSITION LXVIII.

La droite qui est commensurable en longueur avec la droite de deux médiales, est aussi une droite de deux médiales, et du même ordre qu'elle.

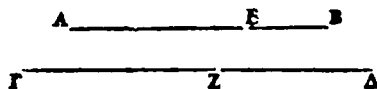
Soit ΑΒ une droite de deux médiales, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une droite de deux médiales, et que cette droite est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΒ est une droite de deux médiales, qu'elle soit divisée en ses médiales au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront des médiales commensurables en puissance seulement (38 et 39. 10). Faisons en sorte que ΑΒ soit à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ; la droite restante ΕΒ sera à la droite restante ΖΔ comme ΑΒ est à ΓΔ.

282 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΖΔ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ⁴. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρω τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ⁵· μίσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἐπὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ⁶, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι⁷· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν⁸. Εδείχθησαν δὲ καὶ μίσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ΑΒ.

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ longitudine; commensurabilis igitur et utraque ipsarum ΑΕ, ΕΒ utrique ipsarum ΓΖ, ΖΔ; mediæ verò ΑΕ, ΕΒ; mediæ igitur et ΓΖ, ΖΔ. Et quoniam est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ, ipsæ autem ΑΕ, ΕΒ potentiâ solùm commensurabiles sunt; et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ solùm commensurabiles sunt. Ostensæ sunt verò et mediæ; ergo ΓΔ ex binis mediis est. Dico et ordine eandem esse ipsi ΑΒ.



Ἐπὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ⁹· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα¹⁰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ

Quoniam enim est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ; et ut igitur ex ΑΕ quadratum ad rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; permutando igitur ex ΑΕ quadratum ad ipsum ex ΓΖ ita sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum ad ipsum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurable igitur et sub ΑΕ, ΕΒ rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Sive

Mais AB est commensurable en longueur avec ΓΔ; chacune des droites ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec chacune des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais les droites ΑΕ, ΕΒ sont médiales; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc médiales (24. 10). Et puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, et que les droites ΑΕ, ΕΒ ne sont commensurables qu'en puissance, les droites ΓΖ, ΖΔ ne seront commensurables qu'en puissance. Mais on a démontré qu'elles sont médiales; la droite ΓΔ est donc une droite de deux médiales (38 et 39. 10). Je dis aussi que ΓΔ est du même ordre que ΑΒ.

Car puisque ΑΕ est à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ, le carré de ΑΕ sera au rectangle sous ΑΕ, ΕΒ comme le carré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (11. 5, et 1. 6); donc, par permutation, le carré de ΑΕ est au carré de ΓΖ comme le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le carré de ΑΕ est commensurable avec le carré de ΓΖ; le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est rationel, le rectangle

ὕπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν
 ἔστι· καὶ διὰ τοῦτο ἔστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη.
 Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ
 ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα·
 καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή¹¹.
 Οπὶρ ἴδω διῆξαι.

igitur rationale est rectangulum sub ΑΕ, ΕΒ, et
 rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ rationale est; et ob
 id est ex binis mediis prima. Sive medium rec-
 tangulum sub ΑΕ, ΕΒ, medium et rectangulum
 sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est utraque secunda; et
 ob id ΓΔ ipsi ΑΒ ordine eadem. Quod opor-
 tebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων
 ἔστιν.

Εστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος
 ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μείζων ἔστί.

Διηρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα
 δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγ-
 κείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν,
 τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. Γεγονίτω γάρ² τὰ αὐτὰ
 τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς
 τὴν ΓΔ οὕτως ἥτε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ
 πρὸς τὴν ΖΔ³· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ

PROPOSITIO LXIX.

Recta majori commensurabilis et ipsa ma-
 jor est.

Sit major ΑΒ, et ipsi ΑΒ commensurabilis
 sit ΓΔ; dico et ΓΔ majorem esse.

Dividatur ΑΒ ad Ε; ipsæ ΑΕ, ΕΒ igitur
 potentiâ sunt incommensurabiles, facientes qui-
 dem compositum ex ipsarum quadratis ratio-
 nale, rectangulum verò sub ipsis medium.
 Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam
 est ut ΑΒ ad ΓΔ ita et ΑΕ ad ΓΖ et ΕΒ ad
 ΖΔ; et ut igitur ΑΕ ad ΓΖ ita ΕΒ ad ΖΔ.

sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et ΓΔ sera, par conséquent, une première de deux mé-
 diales (38. 10). Si le rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera
 médial. Mais les droites ΓΔ, ΔΒ sont l'une et l'autre la seconde de deux médiales
 (39. 10); la droite ΓΔ sera, par conséquent aussi, du même ordre que la droite ΑΒ.
 Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXIX.

Une droite commensurable avec la majeure, est elle-même une droite majeure.

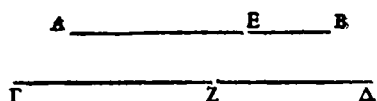
Soit la majeure ΑΒ; et que ΓΔ soit commensurable avec ΑΒ; je dis que ΓΔ est une
 droite majeure.

Divisons ΑΒ au point Ε; les droites ΑΕ, ΕΒ seront incommensurables en puis-
 sance, la somme des quarrés de ces droites étant rationelle, et le rectangle sous
 ces mêmes droites étant médial (40. 10). Car faisons les mêmes choses qu'au-
 paravant. Puisque ΑΒ est à ΓΔ comme ΑΕ est à ΓΖ, et comme ΕΒ est à ΖΔ, la droite

284 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ἡ EB πρὸς τὴν ZΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AE, EB ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ZΔ. Καὶ ἵπεί ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ EB πρὸς τὴν ZΔ⁴, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB⁵ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν⁶ ZΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ἐστίν⁷ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BE οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ⁸. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ

Commensurabilis autem AB ipsi ΓΔ; commensurabilis igitur et utraque ipsarum AE, EB utrique ipsarum ΓΖ, ZΔ. Et quoniam est ut AE ad ΓΖ ita EB ad ZΔ, et permutando ut AE ad EB ita ΓΖ ad ZΔ; et componendo igitur est ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔΖ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsum ex BE ita ex ΓΔ



ἀπὸ τῆς BE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ZΔ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ZΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῇ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ,

quadratum ad ipsum ex ΔΖ. Similiter utique demonstrabimus et ut ex AB quadratum ad ipsum ex AE ita esse ex ΓΔ quadratum ad ipsum ex ΓΖ; et ut igitur ex AB quadratum ad ipsa ex AE, EB ita ex ΓΔ quadratum ad ipsa ex ΓΖ, ZΔ; et permutando igitur est ut ex AB quadratum ad ipsum ex ΓΔ ita ex AE, EB quadrata ad ipsa ex ΓΖ, ZΔ. Commensurable autem ex AB quadratum quadrato ex ΓΔ; commensurabilia igitur et ex AE, EB quadrata

AE sera à ΓΖ comme EB est à ZΔ (11.5). Mais AB est commensurable avec ΓΔ; chacune des droites AE, EB est donc commensurable avec chacune des droites ΓΖ, ZΔ. Et puisque AE est à ΓΖ comme EB est à ZΔ; par permutation, AE sera à EB comme ΓΖ est à ZΔ; donc, par addition, AB est à BE comme ΓΔ est à ΔΖ; le carré de AB est donc au carré de BE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΔΖ (22.6). Nous démontrerons semblablement que le carré de AB est au carré de AE comme le carré de ΓΔ est au carré de ΓΖ; le carré de AB est donc à la somme des carrés des droites AE, EB comme le carré de ΓΔ est à la somme des carrés des droites ΓΖ, ZΔ; donc, par permutation, le carré de AB est au carré de ΓΔ comme la somme des carrés des droites AE, EB est à la somme des carrés des droites ΓΖ, ZΔ. Mais le carré de AB est commensurable avec le carré de ΓΔ; la somme des carrés des droites AE, EB est donc com-

ΖΔ. Καὶ ἴσσι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. Ομοίως δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἴσσι μίσον τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μίσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δύναμις ἀσύμμετροί εἰσιθ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα¹⁰ ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ.

Ἡ τῇ ῥητόν καὶ μίσον δυναμένη σύμμετρος καὶ αὐτῇ ῥητόν καὶ μίσον δυναμένη ἐστίν.

quadratis ex ΓΖ, ΖΔ. Et sunt quadrata ex ΑΕ, ΕΒ simul rationalia; et quadrata ex ΓΖ, ΖΔ simul rationalia sunt. Similiter verò et rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ commensurable est rectangulo bis sub ΓΖ, ΖΔ. Atque est medium rectangulum bis sub ΑΕ, ΕΒ; medium igitur et rectangulum bis sub ΓΖ, ΖΔ; ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; tota igitur ΓΔ irrationalis est, quæ vocatur major.

Recta igitur majori commensurabilis major est. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO LXX.

Recta rationale et medium potenti commensurabilis, et ipsa rationale et medium potens est.

mensurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ. Mais la somme des carrés des droites ΑΕ, ΕΒ est rationnelle (40. 10); la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est donc rationnelle (déf. 9. 10). Par la même raison, le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est commensurable avec le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Mais le double rectangle sous ΑΕ, ΕΒ est médial (40. 10); le double rectangle sous ΓΖ, ΖΔ est donc médial (24. 10); les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial; la droite entière ΓΔ est donc l'irrationnelle appelée la droite majeure (40. 10).

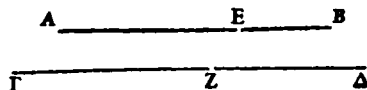
Une droite commensurable avec la majeure, est donc elle-même une droite majeure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION LXX.

Une droite commensurable avec la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, est elle-même une droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

Εστω ῥητὸν καὶ μῖσον δυνάμειν ἡ AB , καὶ τῇ AB σύμμετρος ἴστω ἡ $\Gamma\Delta$. Δεικτέον ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μῖσον δυνάμειν ἴστί.

Sit rationale et medium potens AB , et ipsi AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$; ostendendum est et $\Gamma\Delta$ rationale et medium potentem esse.



Διηρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E . αἱ AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μῖσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. Ομοίως δὲ δίδωμεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῶν ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$. ὥστε καὶ τὸ μὲν³ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων ἴστί μῖσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ῥητόν. ῥητὸν ἄρα καὶ μῖσον δυνάμειν ἴστί ἡ $\Gamma\Delta$. Ὅτι ἴδι διζῶται.

Dividatur AB in rectas ad E ; ipsæ AE , EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; et eadem construantur quæ suprâ. Similiter utique demonstrabimus et ΓZ , $Z\Delta$ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurable quidem compositum ex quadratis ipsarum AE , EB composito ex quadratis ipsarum ΓZ , $Z\Delta$, rectangulum verò sub AE , EB rectangulo sub ΓZ , $Z\Delta$; quare et quidem compositum ex ipsarum ΓZ , $Z\Delta$ quadratis est medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; rationale igitur et medium potens est $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

Que la droite AB puisse une surface rationelle et une surface médiale, et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable avec AB ; il faut démontrer que la droite $\Gamma\Delta$ peut aussi une surface rationelle et une surface médiale.

Divisons AB en ses droites au point E ; les droites AE , EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (41. 10). Faisons la même construction qu'au-paravant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓZ , $Z\Delta$ sont incommensurables en puissance, que la somme des carrés des droites AE , EB est commensurable avec la somme des carrés des droites ΓZ , $Z\Delta$, et que le rectangle sous AE , EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$; la somme des carrés des droites ΓZ , $Z\Delta$ est donc médiale, et le rectangle sous ΓZ , $Z\Delta$ rationel (24. 10); la droite $\Gamma\Delta$ peut donc une surface rationelle et une surface médiale (41. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αά.

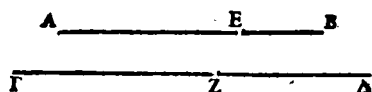
PROPOSITIO LXXI.

Ἡ τῇ δύο μίσα δυναμένη σύμμετρος δύο μίσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐστω δύο μίσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· δείκτιον δὲ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μίσα δυναμένη ἐστίν.

Recta bina media potenti commensurabilis bina media potens est.

Sit bina media potens AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; ostendendum est et ΓΔ bina media potentem esse.



Ἐπεὶ γὰρ δύο μίσα δυναμένη ἐστίν ἡ AB, διηρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ AE, EB, ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ αὐτῶν τετραγώνων² μίσην, καὶ τὸ ὑπὸ αὐτῶν μίσην, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE, EB· καὶ κατισχυάσθω τὰ αὐτὰ ταῖς πρότερον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas ad E; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurabile compositum ex ipsarum AE, EB quadratis rectangulo sub AE, EB; et construantur eadem quæ suprâ. Similiter utique demonstrabimus et ΓΖ, ΖΔ potentiâ esse incommensurabiles, et commensurabile quidem

PROPOSITION LXXI.

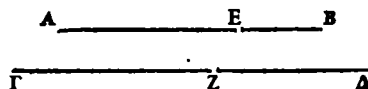
Une droite commensurable avec la droite qui peut deux surfaces médiales, est elle-même une droite qui peut deux surfaces médiales.

Que la droite AB puisse deux surfaces médiales, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; il faut démontrer que ΓΔ peut aussi deux surfaces médiales.

Car, puisque la droite AB peut deux surfaces médiales, qu'elle soit divisée en ses droites au point E; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés des droites AE, EB étant incommensurable avec le rectangle sous les droites AB, EB (42. 10). Faisons la même construction qu'auparavant. Nous démontrerons semblablement que les droites ΓΖ, ΖΔ sont incommensurables en puissance; que la somme des carrés des droites AE, EB est

288 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῶν συγκειμένων ἐκ
τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ,
ΕΒ τῶν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ὥστε καὶ τὸ συγ-
compositum ex quadratis ipsarum ΑΕ, ΕΒ com-
posito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangu-
lum verò sub ΑΕ, ΕΒ rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ ;



κειμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων
μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέσον, καὶ
ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων τῶν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἡ
ἄρα ΓΔ ἴσως δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ὅπερ ἔδει
δείξαι.

quare et compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ qua-
dratis medium est, et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ
medium, et adhuc incommensurable compo-
situm ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis rectangulo
sub ΓΖ, ΖΔ ; ergo ΓΔ bina media potens est.
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ος.

Ρητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες
ἄλλοι γίνονται ἥτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ
δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ
μέσον δυναμένη.

Ἐστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ·
λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἥτοι ἐκ

PROPOSITIO LXXII.

Rationali et medio compositis, quatuor irra-
tionales fiunt, vel ex binis nominibus recta,
vel ex binis mediis prima, vel major, vel et
rationale et medium potens.

Sit rationale quidem ipsum ΑΒ, medium verò
ΓΔ ; dico rectam, quæ ΑΔ spatium potest, vel

commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle
sous ΑΕ, ΕΒ l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ ; la somme des quarrés des
droites ΓΖ, ΖΔ est donc médiale, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ médial aussi, et la somme
des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ incommensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ
(24. 10) ; la droite ΓΔ peut donc deux surfaces médiales (42. 10). Ce qu'il fallait
démontrer.

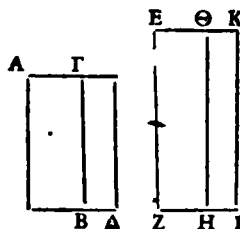
PROPOSITION LXXII.

Si l'on ajoute une surface rationnelle avec une surface médiale, on aura quatre
droites irrationnelles ; savoir, ou une droite de deux noms, ou la première de deux
médiales, ou la droite majeure, ou enfin la droite qui peut une surface rationnelle
et une surface médiale.

Soit la surface rationnelle ΑΒ, et la surface médiale ΓΔ ; je dis que la droite qui

δύο ὀνομάτων ἴσθιν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ AB τοῦ $\Gamma\Delta$ ἥτοι μείζον ἴσθιν, ἢ ἔλασσον. Ἐστω πρότερον μείζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ παραβιβάσθω παρὰ τὴν EZ τῇ AB ἴσον τὸ EH , πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · τῇ δὲ $\Gamma\Delta$ ἴσον παρὰ τὴν EZ , τουτίσθι τὴν $\Theta H'$,



παραβιβάσθω τὸ ΘI πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK . Καὶ ἐπεὶ ῥητὸν ἴσθι τὸ AB , καὶ ἴσθιν ἴσον τῇ EH ²· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ EH , καὶ παρὰ ῥητὴν³ τὴν EZ παραβιβάσθω πλάτος ποιοῦν τὴν $E\Theta$ · ἡ $E\Theta$ ἄρα ῥητὴ ἴσθι καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἴσθι⁵ τὸ $\Gamma\Delta$, καὶ ἴσθιν ἴσον τῇ ΘI ⁶· μέσον ἄρα ἴσθι καὶ τὸ ΘI , καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται, τουτίσθι τὴν $\Theta H'$ ⁷, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK · ῥητὴ ἄρα

ex binis nominibus esse, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale et medium potentem.

Etenim AB quam $\Gamma\Delta$ vel majus est, vel minus. Sit primum majus; et exponatur rationalis EZ , et applicetur ad ipsam EZ ipsi AB æquale EH , latitudinem faciens $E\Theta$; ipsi autem $\Gamma\Delta$ æquale ad EZ , hoc est ΘH , applicetur ΘI latitu-

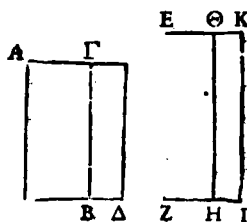
dinem faciens ΘK . Et quoniam rationale est AB , et est æquale ipsi EH ; rationale igitur et EH , et ad rationalem EZ applicatur latitudinem faciens $E\Theta$; ipsa $E\Theta$ igitur rationalis est et commensurabilis ipsi EZ longitudine. Rursus, quoniam medium est $\Gamma\Delta$, et est æquale ipsi ΘI ; medium igitur est et ΘI , et ad rationalem EZ applicatur, hoc est ad ΘH , latitudinem faciens ΘK ; rationalis igitur

peut la surface AD , est ou une droite de deux noms, ou la première de deux médiales, ou une droite majeure, ou la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.

Car la surface AB est ou plus grande ou plus petite que $\Gamma\Delta$. Qu'elle soit d'abord plus grande. Soit exposée la rationnelle EZ ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à AB , ce parallélogramme ayant la droite $E\Theta$ pour largeur; appliquons aussi à EZ , c'est-à-dire à ΘH , un parallélogramme ΘI égal à $\Gamma\Delta$, ce parallélogramme ayant la droite ΘK pour largeur. Puisque AB est rationnel et égal à EH , le parallélogramme EH sera rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle EZ , et il a pour largeur la droite $E\Theta$; la droite $E\Theta$ est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec EZ (21. 10). De plus, puisque $\Gamma\Delta$ est médial, et qu'il est égal à ΘI , le parallélogramme ΘI sera médial; mais il est appliqué à la rationnelle EZ , c'est-à-dire

ἴστιν ἡ ΘK , καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἴστι τὸ $\Gamma\Delta$, ῥητὸν δὲ τὸ AB · ἀσύμμετρον ἄρα ἴστι τὸ AB τῇ $\Gamma\Delta$ · ὥστε καὶ τὸ EH ἀσύμμετρόν ἐστι τῇ ΘI . Ὡς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘI οὕτως ἴστιν ἡ $\text{E}\Theta$ πρὸς τὴν ΘK · ἀσύμμετρος ἄρα ἴστι καὶ ἡ $\text{E}\Theta$ τῇ ΘK μήκει· καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ $\text{E}\Theta$, ΘK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων

est ΘK , et incommensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam medium est $\Gamma\Delta$, rationale autem AB ; incommensurabile igitur est AB ipsi $\Gamma\Delta$; quare et EH incommensurabile est ipsi ΘI . Ut autem EH ad ΘI ita est $\text{E}\Theta$ ad ΘK ; incommensurabilis igitur est et $\text{E}\Theta$ ipsi ΘK longitudine; et sunt ambæ rationales; ipsæ $\text{E}\Theta$, ΘK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ex binis igitur nominibus est EK divisa



ἴστιν ἡ EK διηρημένη κατὰ τὸ Θ . Καὶ ἐπεὶ μείζον ἴστι τὸ AB τοῦ $\Gamma\Delta$, ἴσον δὲ τὸ μὲν AB τῇ EH , τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ τῇ ΘI · μείζον ἄρα καὶ τὸ EH τοῦ ΘI · καὶ ἡ $\text{E}\Theta$ ἄρα μείζων ἴστι τῆς ΘK . Ἥτοι οὖν ἡ $\text{E}\Theta$ τῆς ΘK μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἴστιν ἡ δ μείζων ἢ $\text{E}\Theta$ σύμμετρος

ad Θ . Et quoniam majus est AB quam $\Gamma\Delta$, æquale verò AB quidem ipsi EH , ipsum verò $\Gamma\Delta$ ipsi ΘI ; majus igitur et EH quam ΘI ; et $\text{E}\Theta$ igitur major est quam ΘK . Vel igitur $\text{E}\Theta$ quam ΘK plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili; et est major

à ΘH , et il a pour largeur la droite ΘK ; la droite ΘK est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec EZ (23. 10). Et puisque $\Gamma\Delta$ est médial, et que AB est rationnel, AB sera incommensurable avec $\Gamma\Delta$; le parallélogramme EH est donc incommensurable avec ΘI . Mais EH est à ΘI comme $\text{E}\Theta$ est à ΘK ; la droite $\text{E}\Theta$ est donc incommensurable en longueur avec ΘK (1. 6). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites $\text{E}\Theta$, ΘK sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite EK divisée au point Θ est donc une droite de deux noms. Et puisque AB est plus grand que $\Gamma\Delta$, que AB est égal à EH , et que $\Gamma\Delta$ est égal à ΘI , le parallélogramme EH est plus grand que ΘI ; la droite $\text{E}\Theta$ sera par conséquent plus grande que ΘK . La puissance de $\text{E}\Theta$ surpasse donc celle de ΘK du carré d'une droite commensurable ou incommensurable en longueur avec $\text{E}\Theta$. Que la puissance de $\text{E}\Theta$ surpasse d'abord la puissance de ΘK du carré d'une droite commensurable

τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΓ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μίζων τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἢ θ μίζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μίζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μίζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μίζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἴστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἥτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μίζων δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,

ΘΕ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est prima, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus primâ, recta spatium potens ex binis nominibus est; recta igitur ipsum ΕΙ potens ex binis nominibus est; quare et recta ipsum ΑΔ potens ex binis nominibus est. Sed ΕΘ quam ΘΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est major ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quarta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus quartâ, recta spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major; recta igitur spatium ΕΙ potens major est; quare et recta ipsum ΑΔ potens major est.

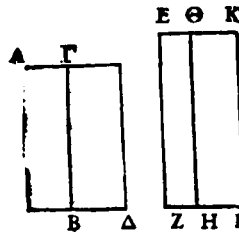
Sed et sit minus ΑΒ quam ΓΔ; et ΕΗ igitur minus est quam ΘΙ; quare et ΕΘ minor est quam ΘΚ; vel autem ΘΚ quam ΕΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-

avec ΕΘ; mais ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc une première de deux noms (déf. sec. 1. 10); mais la droite ΕΖ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la première de deux noms, la droite qui peut cette surface est une droite de deux noms (55. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite de deux noms; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent une droite de deux noms. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ; puisque ΕΘ, plus grand que ΘΚ, est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la quatrième de deux noms (déf. sec. 4. 10); mais la droite ΕΖ est rationelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous une quatrième de deux noms, la droite qui peut cette surface est l'irrationelle appelée majeure (58. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc une droite majeure; la droite qui peut la surface ΑΔ est donc aussi une droite majeure.

Mais que la surface ΑΒ soit plus petite que la surface ΓΔ; la surface ΕΗ sera plus petite que la surface ΘΙ; la droite ΕΘ sera par conséquent plus petite que ΘΚ; or, la puissance de ΘΚ surpasse la puissance de ΕΘ du quarré d'une droite commen-

ἡ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἰαυτῇ μήκει, καὶ ἴστιν¹⁰ ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἴστί διυτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται¹¹ ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἴστί πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων

drato ex rectâ incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est secunda, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis nominibus secundâ, recta spatium potens ex binis mediis est prima; recta igitur spatium ΕΙ



ἴστί πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον¹² δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἴστί πρώτη. Ἀλλὰ δὲ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μείζων δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἰαυτῇ, καὶ ἴστιν¹³ ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἴστί πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων

potens ex binis mediis est prima; quare et recta spatium ΑΔ potens ex binis mediis est prima. Sed et ΚΘ quam ΕΘ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; et est minor ΕΘ commensurabilis expositæ rationali ΕΖ; ergo ΕΚ ex binis nominibus est quinta, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium contineatur sub rationali et ex binis

surable ou incommensurable en longueur avec ΕΚ. Que la puissance de ΕΚ surpasse d'abord la puissance de ΕΘ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΕΚ, puisque la droite ΕΘ, plus petite que ΕΚ, est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la seconde de deux noms (déf. sec. 2. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous une seconde de deux noms, la droite qui peut cette surface est la première de deux médiales (56. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ est donc la première de deux médiales; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la première de deux médiales. Mais que la puissance de ΚΘ surpasse la puissance de ΕΘ du carré d'une droite incommensurable avec ΚΘ; puisque ΕΘ, plus petit que ΚΘ, est commensurable avec la rationnelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ sera la cinquième de deux noms (déf. sec. 5. 10); mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationnelle et sous la cinquième de deux

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 293

πέμπτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν· ἢ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μίσην δυναμένη ἐστίν.

Ρητοῦ ἄρα καὶ μίσου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλλοι γίνονται· ἢτοι ἢ ἐκ δύο μέσων διυτέρα, ἢ ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείμεθα γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ διυτέρα, ἢ ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἴσασιν. Ἐστω³ πρότερον μείζων τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ ΕΖ, καὶ τῇ μὲν ΑΒ ἴσον

uominibus quinta, recta spatium potens rationale et medium potens est; recta igitur spatium EI potens rationale et medium potens est; quare et recta spatium ΑΔ potens rationale et medium potens est.

Rationali igitur et medio, etc.

PROPOSITIO LXXIII.

Duobus mediis incommensurabilibus inter se compositis, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se ΑΒ, ΓΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis esse secundam, vel bina media potentem.

Etenim ΑΒ quam ΓΔ vel majus est, vel minus. Sit primum majus ΑΒ quam ΓΔ; et exponatur rationalis ΕΖ, et ipsi quidem ΑΒ

noms, la droite qui peut cette surface est celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale (59. 10); la droite qui peut la surface EI est donc celle qui peut une surface rationnelle et une surface médiale; la droite qui peut la surface ΑΔ sera par conséquent la droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale. Donc, etc.

PROPOSITION LXXIII.

Deux surfaces médiales incommensurables entre elles étant ajoutées, il en résulte deux droites irrationelles, ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

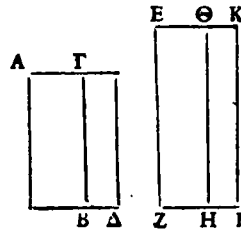
Ajoutons les deux surfaces médiales ΑΒ, ΓΔ qui sont incommensurables entre elles; je dis que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales.

Car la surface ΑΒ est ou plus grande ou plus petite que la surface ΓΔ. Que ΑΒ soit d'abord plus grand que ΓΔ; soit exposée la rationnelle ΕΖ; et appliquons à ΕΖ un

294 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παρὰ τὴν ΕΖ παραβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος
 ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος
 ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον
 ΑΒ, ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ,
 καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκάτερα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ
 ῥητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ
 ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἴστιν

æquale ad EZ applicetur EH latitudinem faciens
 EO, ipsi verò ΓΔ æquale ΘΙ latitudinem fa-
 ciens OK. Et quoniam medium est utrumque
 ipsorum AB, ΓΔ; medium igitur et utrumque
 ipsorum EH, ΘΙ, et ad rationalem EZ appli-
 cantur, quæ latitudinem faciunt EO, OK; utraque
 igitur ipsarum EO, OK rationalis est, et incom-
 mensurabilis ipsi EZ longitudine. Et quoniam
 incommensurabile est AB ipsi ΓΔ, et est æquale



ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμ-
 μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ
 τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν
 ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει·
 αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμ-
 μετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. Ἡτοι
 δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῆς, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυ-

quidem AB ipsi EH, ipsum verò ΓΔ ipsi ΘΙ; in-
 commensurabile igitur est et EH ipsi ΘΙ. Ut au-
 tem EH ad ΘΙ ita est EO ad OK; incommensura-
 bilis igitur est EO ipsi OK longitudine; ipsæ EO,
 OK igitur rationales sunt potentiâ solùm com-
 mensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΕΚ.
 Vel autem EO quam OK plus potest quadrato ex
 rectâ sibi cōmmensurabili, vel quadrato ex rectâ

parallélogramme EH égal à AB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite EΘ; appliquons aussi à EZ un parallélogramme ΘΙ égal à ΓΔ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘΚ. Puisque les surfaces AB, ΓΔ sont médiales l'une et l'autre, les surfaces EH, ΘΙ seront aussi médiales l'une et l'autre; mais ces surfaces sont appliquées à EZ, et elles ont pour largeur les droites EΘ, ΘΚ; les droites EΘ, ΘΚ sont donc rationnelles l'une et l'autre (23. 10), et incommensurables en longueur avec EZ. Et puisque AB est incommensurable avec ΓΔ, que AB est égal à EH, et que ΓΔ est égal à ΘΙ, la surface EH sera incommensurable avec ΘΙ. Mais EH est à ΘΙ comme EΘ est à ΘΚ; la droite EΘ est donc incommensurable en longueur avec ΘΚ; les droites EΘ, ΘΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ΕΚ est donc une droite de deux noms. Or, la puissance de EΘ surpasse la puissance de ΘΚ du carré d'une droite commensurable ou incommensurable

νάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ διυτέρα· ἡ ἄρα τὰ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ διυτέρα. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσυμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει, ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἑκτη. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἑκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ⁵ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι, πᾶν ἑλάττω τῇ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἡ ἐκ δύο μέσων διυτέρα ἐστὶ, δύο ἢ μέγα δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων, καὶ τὰ ἐξῆς 7.

incommensurabili. Possit primum quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΕΘ, ΘΚ commensurabilis est expositæ rationali ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est tertia, rationalis verò ΕΖ. Si autem spatium continueatur sub rationali et ex binis nominibus tertiâ; recta spatium potens ex binis mediis est secunda; recta igitur ipsum ΕΙ, hoc est ΑΔ potens, ex binis mediis est secunda. Sed ΕΘ quam ΘΚ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et incommensurabilis est utraque ipsarum ΕΘ, ΘΚ ipsi ΕΖ longitudine; ergo ΕΚ ex binis nominibus est sexta. Si autem spatium continueatur sub rationali et ex binis nominibus sextâ; recta spatium potens bina media potens est; quare et spatium ΑΔ potens bina media potens est. Similiter utique demonstrabimus, et si minus sit ΑΒ quam ΓΔ, rectam quæ spatium ΑΔ potest, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

Duobus igitur mediis, etc.

avec ΕΘ. Que la puissance de ΕΘ surpasse d'abord la puissance de ΘΚ d'une droite commensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΘΚ ne sont ni l'une ni l'autre commensurables en longueur avec la rationelle exposée ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la troisième de deux noms; mais la droite ΕΖ est rationnelle; or, si une surface est comprise sous une rationelle et sous la troisième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la seconde de deux médiales (57. 10); la droite qui peut la surface ΕΙ, c'est-à-dire ΑΔ, est donc la seconde de deux médiales. Mais que la puissance de ΕΘ surpasse la puissance de ΘΚ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΕΘ; or, les droites ΕΘ, ΘΚ sont l'une et l'autre incommensurables en longueur avec ΕΖ; la droite ΕΚ est donc la sixième de deux noms (déf. sec. 6. 10). Mais si une surface est comprise sous une rationelle et sous une sixième de deux noms, la droite qui peut cette surface est la droite qui peut deux médiales (60. 10); la droite qui peut la surface ΑΔ est donc la droite qui peut deux médiales. Si ΑΒ était plus petit que ΓΔ, nous démontrerions semblablement que la droite qui peut la surface ΑΔ est ou la seconde de deux médiales, ou la droite qui peut deux médiales. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

Εὰν ἀπὸ ρητῆς ρητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἀλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ρητῆς τῆς AB ρητὴ ἀφαιρεσθῶ ἡ BG, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ AG ἀλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή.



Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ BG μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB, BG· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BG σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ

PROPOSITIO LXXIV.

Si à rationali rationalis auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur BG, potentiâ solùm commensurabilis existens toti; dico reliquam AG irrationalem esse, quæ vocatur apotome.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BG longitudine, atque est ut AB ad BG ita ex AB quadratum ad rectangulum sub AB, BG, incommensurable igitur est ex AB quadratum rectangulo sub AB, BG; sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt ex AB, BG quadrata, rectangulo verò sub AB, BG commensurable est rectangulum bis sub AB, BG; quadrata igitur ex AB, BG incommensurabilia sunt rec-

PROPOSITION LXXIV.

Si une droite rationnelle est retranchée d'une droite rationnelle, cette droite n'étant commensurable qu'en puissance avec la droite entière; la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée apotome.

Que la rationnelle BG, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, soit retranchée de la droite AB; je dis que la droite restante AG, appelée apotome, est irrationnelle.

Car puisque AB est incommensurable en longueur avec BG, et que AB est à BG comme le carré de AB est au rectangle sous AB, BG (1. 6), le carré de AB sera incommensurable avec le rectangle sous AB, BG; mais la somme des carrés de AB et de BG est commensurable avec le carré de AB (16. 10), et le double rectangle sous AB, BG est commensurable avec le rectangle sous AB, BG; la somme des carrés des droites AB, BG est donc incommensurable avec le double rec-

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 297

λοιπὴ ἄρα τῇ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ². Πητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλεῖσθαι δὲ ἀποτομή.

tangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ; et reliquo igitur quadrato ex ΑΓ incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; quoniam et quadrata ex ΑΒ, ΒΓ æqualia sunt rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ cum quadrato ex ΑΓ. Rationalia autem sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; irrationalis igitur est ΑΓ, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 6.

Εὰν ἀπὸ μέσης μίση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχῃ ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μέσης ἀποτομὴν πρώτην.

Απὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μίση ἀφαιρεσθῶ ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ΑΒ,

PROPOSITIO LXXV.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, quæ cum totâ rationale continet; reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A mediâ enim ΑΒ media auferatur ΒΓ, potentiâ solùm commensurabilis existens ipsi ΑΒ,



μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιούσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μέσης ἀποτομὴν πρώτην.

et cum eâ ΑΒ rationale faciens rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ; dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

tangle sous ΑΒ, ΒΓ (14. 10); la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite ΑΓ (17. 10), parce que la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est égale au double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, conjointement avec le quarré de ΑΓ (7. 2). Mais la somme des quarrés des droites ΑΒ, ΒΓ est rationelle; la droite ΑΓ est donc irrationnelle (déf. 11. 10), et elle sera appelée apotôme.

PROPOSITION LXXV.

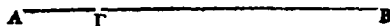
Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface rationnelle, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appèlera le premier apotome de la médiale.

De la médiale ΑΒ retranchons la médiale ΒΓ, commensurable en puissance seulement avec ΑΒ, et faisant avec ΑΒ le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ rationel; je dis que la droite restante ΑΓ est irrationnelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

298 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επὶ γὰρ αἱ AB , $BΓ$ μίσαι εἰσὶ, μίσα ἐστὶ²
καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$. Πητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ
τῶν AB , $BΓ$ ἀσύμμετρα ἔρα τὰ ἀπὸ τῶν AB ,
 $BΓ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ καὶ λοιπῷ ἔρα τῷ

Quoniam enim AB , $BΓ$ mediæ sunt, media
sunt et quadrata ex AB , $BΓ$. Rationale autem
rectangulum bis sub AB , $BΓ$; incommensura-
bilia igitur ex AB , $BΓ$ quadrata rectangulo bis
sub AB , $BΓ$; et reliquo igitur quadrato ex $AΓ$



ἀπὸ τῆς $AΓ$ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν³
 AB , $BΓ$ ἐπὶ καὶ τὸ ὅλον ἐν αὐτῶν ἀσύμμετρον
ᾧ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἴσται.
Πητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἄλογον ἔρα
τὸ ἀπὸ τῆς $AΓ$ ἄλογος ἔρα ἐστὶν⁴ ἡ $AΓ$, κα-
λείσθω δὲ μίσης ἀποτομὴ πρώτη.

incommensurable est rectangulum bis sub AB ,
 $BΓ$; quoniam et si tota magnitudo cum unâ ip-
sarum incommensurabilis sit, et quæ à principio
magnitudines incommensurabiles erunt. Ratio-
nale autem bis rectangulum sub AB , $BΓ$; irratio-
nale igitur quadratum ex $AΓ$; irrationalis igitur
est $AΓ$, vocetur autem mediæ apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15'.

Εὰν ἀπὸ μίσης μίση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον
σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μί-
σον περιέχη¹· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ
μίσης ἀποτομὴ δεύτερα.

PROPOSITIO LXXVI.

Si a mediâ media auferatur, potentiâ solùm
commensurabilis existens toti, quæ cum totâ
medium continet; reliqua irrationalis est, vo-
cetur autem mediæ apotome secunda.

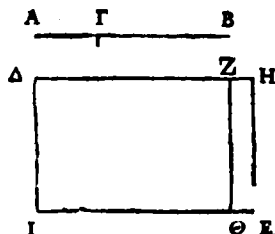
Car, puisque les droites AB , $BΓ$ sont médiales, les quarrés des droites AB , $BΓ$ seront médiaux. Mais le double rectangle sous AB , $BΓ$ est rationel; la somme des quarrés des droites AB , $BΓ$ est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB , $BΓ$; le double rectangle sous AB , $BΓ$ est donc incommensurable avec le quarré restant de la droite $AΓ$ (7. 2); parce que si une grandeur entière est incommensurable avec l'une de celles qui la composent, les grandeurs composantes sont incommensurables (17. 10). Mais le double rectangle sous AB , $BΓ$ est rationel; le quarré de $AΓ$ est donc irrationel; la droite $AΓ$ est donc irrationnelle, et elle sera appelée le premier apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVI.

Si d'une médiale on retranche une médiale, commensurable en puissance seu-
lement avec la droite entière, et comprenant avec la droite entière une surface
médiale, la droite restante est irrationnelle, et elle s'appèlera le second apotome
de la médiale.

Ἀπὸ γὰρ μίσης τῆς AB μίση ἀφηρήσθω ἡ $BΓ$,
 δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ AB ,
 μετὰ δὲ τῆς² ὅλης τῆς AB μίσην περιέχουσα
 τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ · λίγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ $ΑΓ$
 ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μίσης ἀποτομὴ δυν-
 αμίρα.

A mediâ enim AB media auferatur $BΓ$, po-
 tentiâ solùm commensurabilis existens toti AB ,
 et cum totâ AB medium continens rectangulum
 sub AB , $BΓ$; dico reliquam $ΑΓ$ irrationalem
 esse, vocetur autem mediæ apotome secunda.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ $ΔΙ$, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ
 τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβελήσθω
 τὸ $ΔΕ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΗ$, τῇ δὲ δις ὑπὸ
 τῶν AB , $BΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΔΙ$ παραβελήσθω τὸ
 $ΔΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΔΖ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΕ$
 ἴσον ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. Καὶ ἐπεὶ μίση ἐστὶ³
 τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ · μίσην ἄρα καὶ τὸ $ΔΕ$.
 Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΔΙ$ παράκειται πλάτος
 ποιοῦν τὴν $ΔΗ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΔΗ$, καὶ
 ἀσύμμετρος τῇ $ΔΙ$ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μίσην

Exponatur enim rationalis $ΔΙ$, et quadratis
 quidem ex AB , $BΓ$ æquale ad ipsam $ΔΙ$ ap-
 plicetur $ΔΕ$ latitudinem faciens $ΔΗ$, rectangulo
 verò bis sub AB , $BΓ$ æquale ad ipsam $ΔΙ$ appli-
 cetur $ΔΘ$ latitudinem faciens $ΔΖ$; reliquum
 igitur $ΖΕ$ æquale est quadrato ex $ΑΓ$. Et quo-
 niam media sunt quadrata ex AB , $BΓ$; medium
 igitur et $ΔΕ$. Et ad rationalem $ΔΙ$ applicatur
 latitudinem faciens $ΔΗ$; rationalis igitur est
 $ΔΗ$, et incommensurabilis ipsi $ΔΙ$ longitudine.

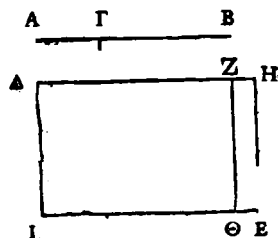
De la médiale AB retranchons la médiale $BΓ$, commensurable en puissance seu-
 lement avec la droite entière AB , et comprenant avec la droite entière AB le rec-
 tangle médial sous AB , $BΓ$; je dis que la droite restante $ΑΓ$ est irrationnelle, et elle
 sera appelée le second apotome de la médiale.

Soit exposée la rationnelle $ΔΙ$; appliquons à $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΕ$ égal à la
 somme des quarrés des droites AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la
 droite $ΔΗ$; appliquons aussi à la droite $ΔΙ$ un parallélogramme $ΔΘ$ égal au double
 rectangle sous AB , $BΓ$, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite $ΔΖ$; le
 reste $ΖΕ$ sera égal au quarré de $ΑΓ$ (7. 2). Et puisque les quarrés des droites
 AB , $BΓ$ sont médiaux, le parallélogramme $ΔΕ$ sera médial (24. cor. 10). Mais il est
 appliqué à la rationnelle $ΔΙ$, et il a pour largeur la droite $ΔΗ$; la droite $ΔΗ$ est donc
 rationnelle et incommensurable en longueur avec $ΔΙ$ (23. 10). De plus, puisque le

300 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἴστί τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG , καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG μέσον ἴστί. Καὶ ἴσιν ἴσον τῷ $\Delta\Theta$, καὶ τὸ $\Delta\Theta$ ἄρα μέσον ἴστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔI παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔZ . ῥητὴ ἄρα ἴστί· ἡ ΔZ , καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔI μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ AB, BG δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἴστί· ἡ AB καὶ τῇ BG μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν $AB,$

Rursus, quoniam medium est rectangulum sub AB, BG ; et rectangulum bis igitur sub AB, BG medium est. Atque est æquale ipsi $\Delta\Theta$; et $\Delta\Theta$ igitur medium est, et ad rationalem ΔI applicatur latitudinem faciens ΔZ ; rationalis igitur est ΔZ , et incommensurabilis ipsi ΔI longitudine. Et quoniam AB, BG potentiâ solum commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AB et ipsi BG longitudine; incommensurable igitur et ex AB quadratum rectangulo sub



BG . Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BG σύμμετρόν ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG · ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BG ⁵. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BG τὸ ΔE , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τὸ $\Delta\Theta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί⁶ τὸ ΔE τῷ

AB, BG . Sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt quadrata ex AB, BG , rectangulo autem sub AB, BG commensurable est rectangulum bis sub AB, BG ; incommensurable igitur est rectangulum bis sub AB, BG quadratis ex AB, BG . Æquale verò quadratis quidem ex AB, BG ipsum ΔE , rectangulo autem bis sub AB, BG ipsum $\Delta\Theta$; incommensurable igitur est ΔE ipsi

rectangle sous AB, BG est médial, le double rectangle sous AB, BG sera médial (24. cor. 10). Mais il est égal à $\Delta\Theta$; le parallélogramme $\Delta\Theta$ est donc médial, et il est appliqué à la rationelle ΔI , sa largeur étant la droite ΔZ ; la droite ΔZ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΔI . Et puisque les droites AB, BG ne sont commensurables qu'en puissance, la droite AB sera incommensurable en longueur avec BG ; le carré de AB est donc incommensurable avec le rectangle sous AB, BG (1.6, et 10. 10). Mais la somme des carrés des droites AB, BG est commensurable avec le carré de AB (16. 10), et le double rectangle sous AB, BG est commensurable avec le rectangle sous AB, BG (6. 10); le double rectangle sous AB, BG est donc incommensurable avec la somme des carrés des droites AB, BG . Mais ΔE est égal à la somme des carrés des droites AB, BG , et $\Delta\Theta$ égal au double rectangle sous AB, BG ; le parallélogramme ΔE est donc incommensurable avec $\Delta\Theta$. Mais

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 301

ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει⁷. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον⁸ ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυνάμειν ἄρα⁹ αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἢ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ μίσης¹⁰ ἀποτομήν διυτέρα.

ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita ΗΔ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΗΔ ipsi ΔΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ergo ΗΔ, ΔΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΖΗ apotome est. Rationalis autem ΔΙ, et sub rationali et irrationali contentum rectangulum irrationalis est; et recta potens igitur ipsum irrationalis est. Et potest ipsum ΖΕ ipsa ΑΓ; ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 87.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιριθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ρητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μίσην· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθαι δὲ ἱλάσσω.

Απὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφαιρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, παροῦσα

PROPOSITIO LXXVII.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens compositum quidem ex ipsis simul rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

A rectâ enim ΑΒ recta auferatur ΒΓ, potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum.

ΔΕ est à ΔΘ comme ΗΔ est à ΔΖ; la droite ΗΔ est donc incommensurable en longueur avec ΔΖ. Mais ces droites sont rationnelles; les droites ΗΔ, ΔΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΗ est donc un apotome (74. 10). Mais la droite ΔΙ est rationnelle, et le rectangle compris sous une rationnelle et sous une irrationnelle est irrationnel (39. 10); la droite qui peut ce rectangle est donc irrationnelle. Mais ΑΓ peut ΖΕ; la droite ΑΓ est donc irrationnelle, et elle sera appelée le second apotome de la médiale.

PROPOSITION LXXVII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites médial, la droite restante est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

De la droite ΑΒ retranchons la droite ΒΓ, qui étant incommensurable en puissance

302 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετὰ τῆς ἑλκς τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ἄμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἄμα μέσον¹. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ AG ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ² ἐλάσσων.

totâ AB compositum quidem ex quadratis ipsarum AB, BG simul rationale, rectangulum verò bis sub AB, BG simul mēdium; dico reliquam AG irrationalem esse, vocetur autem minor.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG· καὶ ἀραστρίψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς AG³. Πητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG ἄλογος ἄρα ἡ AG⁴, καλεῖσθω δὲ ἐλάσσων.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB, BG quadratis rationale est, rectangulum verò bis sub AB, BG mēdium; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex AB, BG rectangulo bis sub AB, BG; et convertendo incommensurabilia sunt ex AB, BG quadrata quadrato ex AG. Rationalia autem quadrata ex AB, BG; irrationalia igitur quadratum ex AG; irrationalis igitur AG, vocetur autem minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οή.

Εὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ἑλκς ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν

PROPOSITIO LXXVIII.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis mēdium,

avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés des droites AB, BG rationelle, et le double rectangle sous AB, BG médial; je dis que la droite restante AG est irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

Car puisque la somme des quarrés des droites AB, BG est rationelle, et que le double rectangle sous AB, BG est médial, la somme des quarrés des droites AB, BG sera incommensurable avec le double rectangle sous AB, BG; donc, par conversion, la somme des quarrés des droites AB, BG est incommensurable avec le quarré de AG (17. 10). Mais la somme des quarrés des droites AB, BG est rationelle; le quarré de AG est donc irrationnel; la droite AG est donc irrationnelle, et elle sera appelée mineure.

PROPOSITION LXXVIII.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des quarrés de

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 303

τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρέσθω ἡ BF , δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ AB , ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , BF τετραγώνων μίσην, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , BF ῥητόν¹. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ AF ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα².



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , BF τετραγώνων μίσην ἐστὶ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , BF ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , BF ³ τῇ δις ὑπὸ τῶν AB , BF . καὶ⁴ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AF ἀσύμμετρίν ἐστι τῇ δις ὑπὸ τῶν AB , BF . Καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , BF ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AF ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AF , καλεῖσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur BF , potentia incommensurabilis existens toti AB , faciens quidem compositum ex ipsarum AB , BF quadratis medium, rectangulum verò bis sub AB , BF rationale; dico reliquam AF irrationalem esse, vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

Quoniam enim quidem compositum ex ipsarum AB , BF quadratis medium est, rectangulum verò bis sub AB , BF rationale; incommensurabilia igitur sunt ex AB , BF quadrata rectangulo bis sub AB , BF ; et reliquum igitur quadratum ex AF incommensurable est rectangulo bis sub AB , BF . Atque est rectangulum bis sub AB , BF rationale; quadratum igitur ex AF irrationale est; irrationalis igitur est AF , vocetur autem cum rationali medium totum faciens.

ces droites médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites rationel, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

De la droite AB retranchons la droite BF , qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB , fasse la somme des quarrés de AB et de BF médiale, et le double rectangle sous AB , BF rationel; je dis que la droite restante AF est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

Car, puisque la somme des quarrés des droites AB , BF est médiale, et que le double rectangle sous AB , BF est rationel, la somme des quarrés des droites AB , BF sera incommensurable avec le double rectangle sous AB , BF ; le quarré restant de la droite AF est donc incommensurable avec le double rectangle sous AB , BF (17. 10). Mais le double rectangle sous AB , BF est rationel; le quarré de AF est donc irrationnel; la droite AF est donc irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΘΒ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν¹ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ² δις ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν ἢ λοιπῇ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ AB, ποιοῦσα τὰ προκείμενα³. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέτον τὸ ὅλον ποιοῦσα⁴.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον παρὰ ῥητὴν⁵ τὴν ΔΙ παρατε-
λέσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΔΘ

PROPOSITIO LXXIX.

Si a rectâ recta auferatur, potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis medium, et adhuc composita ex ipsarum quadratis incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

A rectâ enim AB recta auferatur BG, potentiâ incommensurabilis existens ipsi AB, faciens proposita; dico reliquam AG irrationalem esse, quæ vocatur cum medio medium totum faciens.

Exponatur enim rationalis DI, et quadratis quidem ex AB, BG æquale ad rationalem DI applicetur DE latitudinem faciens DH, rectangulo autem bis sub AB, BG æquale auferatur DΘ

PROPOSITION LXXIX.

Si d'une droite on retranche une droite, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière, fasse avec la droite entière la somme des carrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial aussi, et la somme des carrés de ces droites incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite restante sera irrationnelle, et sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

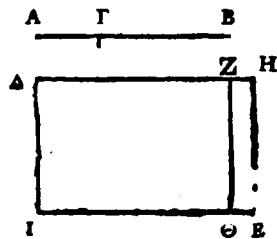
De la droite AB retranchons la droite BG, qui étant incommensurable en puissance avec la droite entière AB, fasse ce qui est proposé; je dis que la droite restante AG est irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car soit exposée la rationnelle DI; appliquons à la rationnelle DI un parallélogramme DE égal à la somme des carrés des droites AB, BG, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite DH; retranchons de DE un parallélogramme DΘ égal au double rectangle compris sous AB, BG, ce parallélogramme ayant pour largeur la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 305

πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ⁶. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μίσην ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΕ· μίσην ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ πα-
ράκειται πλάτος ποιοῦν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ

latitudinem faciens ΔΖ; reliquum igitur ΖΕ æquale est quadrato ex ΑΓ; quare ipsa ΑΓ potest ipsum ΖΕ. Et quoniam compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, atque est æquale ipsi ΔΕ; medium igitur est ΔΕ, et ad rationalem ΔΙ applicatur, latitudinem faciens ΔΗ; ratio-



ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μίσην ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μίσην ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ⁹. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἐστὶ¹⁰ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ¹¹. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἴσιν

nalis igitur est ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Rursus, quoniam rectangulum bis sub ΑΒ, ΒΓ medium est, atque est æquale ipsi ΔΘ; ergo ΔΘ medium est, et ad rationalem ΔΙ applicatur latitudinem faciens ΔΖ; rationalis igitur est ΔΖ, et incommensurabilis ipsi ΔΙ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rectangulo bis sub ΑΒ, ΒΓ, incommensurabile igitur est et ΔΕ ipsi ΔΘ. Ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita est et ΔΗ ad ΔΖ; incommensurabilis igitur est ΔΗ

droite ΔΖ, le parallélogramme restant ΖΕ sera égal au carré de ΑΓ (7. 2); la droite ΑΓ, peut donc la surface ΖΕ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est médiale, et qu'elle est égale à ΔΕ, le parallélogramme ΔΕ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΗ pour largeur; la droite ΔΗ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est médial, et qu'il est égal à ΔΘ, le parallélogramme ΔΘ sera médial; mais il est appliqué à la rationelle ΔΙ, et il a ΔΖ pour largeur; la droite ΔΖ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΔΙ. Et puisque la somme des carrés des droites ΑΒ, ΒΓ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΒ, ΒΓ, le parallélogramme ΔΕ sera incommensurable avec le parallélogramme ΔΘ. Mais ΔΕ est à ΔΘ comme ΔΗ est à ΔΖ (1. 6); la droite ΔΗ est donc incommensurable

306 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ HA , AZ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἔστιν ἡ ZH , ῥητὴ δὲ ἡ $ZΘ$. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον¹² ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ZE ἢ $ΑΓ$ · ἡ $ΑΓ$ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

ipsi AZ . Et sunt ambæ rationales; ipsæ HA , AZ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ZH , rationalis autem $ZΘ$. Sed sub rationali et apotome contentum rectangulum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, et potest ipsum ZE ipsa $ΑΓ$; ergo $ΑΓ$ irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum faciens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Ἐστω ἀποτομή ἡ AB , προσαρμύζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $BΓ$ · αἱ $ΑΓ$, $ΓB$ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόξιντο ἡ BA καὶ² αἱ

PROPOSITIO LXXX.

Apotomæ una solùm congruit recta rationalis potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Sit apotome AB , congruens autem eidem ipsa $BΓ$; ipsæ $ΑΓ$, $ΓB$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; dico ipsi AB alteram non congruere rationalem, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti.

Si enim possibile, congruat BA ; et ipsæ AA ,

avec AZ (10. 10). Mais ces deux droites sont rationnelles; les droites HA , AZ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; ZH est donc un apotome (74. 10), et $ZΘ$ une rationnelle. Puisque le rectangle compris sous une rationnelle et un apotome est irrationnel (14. 10), que la droite qui peut ce rectangle est irrationnelle, et que $ΑΓ$ peut la surface ZE (39. 10), la droite $ΑΓ$ sera irrationnelle, et elle sera appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

PROPOSITION LXXX.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec un apotome, c'est une rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière.

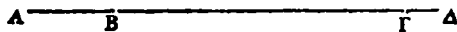
Soit l'apotome AB , et que $BΓ$ lui convienne; les droites $ΑΓ$, $ΓB$ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10); je dis qu'une autre rationnelle commensurable en puissance seulement avec la droite entière ne convient pas avec AB .

Que la droite BA , si cela est possible, convienne avec AB ; les droites AA , AB

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 307

ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφοτέρω ὑπέρχει· ἐναλλάξ ἄρα ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν

ΔΒ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quoniam quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ, hoc superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; eodem enim quadrato ex ΑΒ utraque superant; permutando igitur quo su-



ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ³ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ· ῥητὴ γὰρ ἀμφοτέρω⁵· καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἀμφοτέρω, μίση δὲ μίση οὐχ ὑπερίχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμύζει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλη.

perant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali; rationalis enim utraque; et rectangulum bis igitur sub ΑΔ, ΔΒ superat rationali rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali; ergo ipsi ΑΒ altera non congruit rationalis, potentiâ solùm commensurabilis existens toti.

Μία ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Media igitur, etc.

seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ de la même grandeur dont la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces deux excès sont égaux chacun au carré de ΑΒ (7. 2), par permutation, la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle, car ces deux sommes sont rationnelles; le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse donc le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle; ce qui est impossible, parce que ces deux grandeurs sont médiales, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle (27. 10); une autre rationnelle, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, ne peut donc pas convenir avec ΑΒ. Donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΑ'.

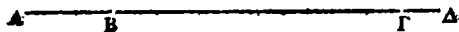
PROPOSITIO LXXXI.

Τῇ μίση ἀποτομῇ πρώτη μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεῖα μίση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἐστω γὰρ μίση ἀποτομή πρώτη ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμόζιτω ἡ $BΓ$ · αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἄρα² μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ · λέγω ὅτι τῇ AB ἰτίρα οὐ προσαρμόζει μίση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Mediæ apotomæ primæ una solùm congruit recta media, potentiâ solùm commensurabilis existens toti, et cum totâ rationale continens.

Sit enim media apotome primæ AB , et ipsi AB congruat $BΓ$; ipsæ $ΑΓ$, $ΓΒ$ igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub $ΑΓ$, $ΓΒ$; dico ipsi AB alteram non congruere mediam, quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ rationale contineat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω καὶ ἡ $ΔΒ$ · αἱ ἄρα $ΑΔ$, $ΔΒ$ μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ · καὶ ἵππὶ ᾧ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὰ

Si enim possibile, congruat et $ΔΒ$; ergo $ΑΔ$, $ΔΒ$ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes rectangulum sub $ΑΔ$, $ΔΒ$. Et quoniam quo superant quadrata ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔΒ$, hoc

PROPOSITION LXXXI.

Il n'y a qu'une droite qui puisse convenir avec le premier apotome médial, c'est une droite médiale commensurable en puissance avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface rationnelle.

Soit AB un premier apotome médial, et que $BΓ$ conviène avec AB ; les droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous $ΑΓ$, $ΓΒ$ (75. 10); je dis qu'une autre médiale, commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB .

Que la droite $ΔΒ$ conviène avec AB , si cela est possible; les droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface rationnelle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$ (75. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpasse le double rectangle sous $ΑΔ$, $ΔΒ$ de la même grandeur dont

ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ³ ὑπερίχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἑαλλάξ ἄρα ᾧ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γὰρ ἀμφότερα, μίσην δὲ μίσου οὐχ ὑπερίχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μίση, καὶ τὰ ἑξῆς.

superant et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; superant enim eodem ex ΑΒ quadrato; permutando igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ. Rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile, media enim utraque, medium autem medium non superat rationali.

Mediæ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς.

Τῇ μίση¹ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσ-
αρμίζει εὐθεῖα μίση, δυνάμει μόνον σύμμετρος
οὕσα² τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μίσην πε-
ριέχουσα.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ apotomæ secundæ una solum con-
gruit recta media, potentiâ solum commen-
surabilis existens toti, et cum totâ medium
continens.

La somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ surpasse le doublé rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, car ces excès sont chacun le quarré de ΑΒ (7. 2); par permutation, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés de ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle, car ces surfaces sont rationnelles l'une et l'autre; la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse donc la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationnelle; ce qui est impossible, parce que ces surfaces sont médiales l'une et l'autre, et qu'une surface médiale ne surpasse pas une surface médiale d'une surface rationnelle (27. 10). Il n'y a donc, etc.

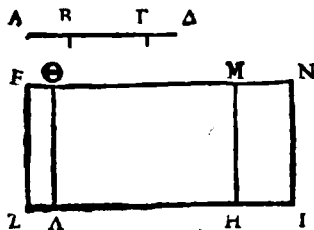
PROPOSITION LXXXII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec le second apotome mé-
dial, c'est une droite médiale, commensurable en puissance seulement avec la
droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale.

310 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εἴς τε μίση³ ἀποτομή δευτέρα ἢ AB, καὶ τῇ AB προσαρμόζουσα ἢ BG· αἱ ἄρα AG, GB μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, μίση περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB· λέγω ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει εὐθείᾳ μίση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὕσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μίσην περιέχουσα.

Sit media apotome secunda AB, et ipsi AB congruat BG; ipsæ igitur AG, GB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub AG, GB; dico ipsi AB alteram non congruere rectam mediam quæ potentiâ solùm commensurabilis sit toti, et cum totâ medium contineat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζω καὶ ἢ BA· καὶ⁴ αἱ ἄρα AD, DB μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι, μίσην περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν AD, DB. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ EZ, καὶ τοῖς μὲν⁵ ἀπὸ τῶν AG, GB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβιβάσθω τὸ EH, πλάτος ποιοῦν τὴν EM· τῇ δὲ δις ὑπὸ τῶν AG, GB ἴσον ἀφαιρέσθω τὸ ΘH, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘM· λοιπὸν ἄρα τὸ EA ἴσον ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς AB· ὥστε ἢ AB δύναται τὸ EA. Πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν AD, DB ἴσον παρὰ

Si enim possibile, congruat BA; et ipsæ igitur AD, DB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes rectangulum sub AD, DB. Et exponatur rationalis EZ, et quadratis quidem ex AG, GB æquale ad ipsam EZ applicetur EH, latitudinem faciens EM; rectangulo autem bis sub AG, GB æquale auferatur ΘH, latitudinem faciens ΘM; reliquum igitur EA æquale est quadrato ex AB; quare AB potest ipsum EA. Rursus utique quadratis ex AD, DB

Soit un second apotome médial AB, et que la droite BG convienne avec AB; les droites AG, GB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AG, GB (76. 10); je dis qu'une autre droite médiale commensurable en puissance seulement avec la droite entière, et comprenant avec elle une surface médiale, ne peut convenir avec AB.

Que BA convienne avec AB, si cela est possible; les droites AD, DB seront des médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant une surface médiale sous AD, DB (76. 10). Soit exposée la rationnelle EZ; appliquons à EZ un parallélogramme EH égal à la somme des quarrés de AG et de GB, qui ait pour largeur la droite EM, et retranchons de EH un parallélogramme ΘH égal au double rectangle sous AG, GB, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΘM; le reste EA sera égal au quarré de AB (7. 2); la droite AB pourra donc la surface EA. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme EI égal à la somme des quarrés des

τὴν ΕΖ παραβιβάσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΑ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μίσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μίσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστὶ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν^δ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἐστὶ^ε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ^ς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμ-

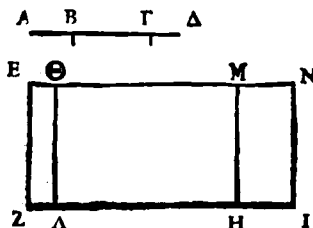
æquale ad ipsam ΕΖ applicetur ΕΙ, latitudinem faciens ΕΝ; est autem et ΕΑ æquale ex ΑΒ quadrato; reliquum igitur ΘΙ æquale est rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et quoniam mediæ sunt ΑΓ, ΓΒ, media igitur sunt et quadrata ex ΑΓ, ΓΒ. Et sunt æqualia ipsi ΕΗ; medium igitur et ΕΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ, et rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ medium est. Atque est æquale ipsi ΘΗ; et ΘΗ igitur medium est, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur est et ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam ΑΓ, ΓΒ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine. Ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita est ex ΑΓ quadratum ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurable igitur est ex ΑΓ quadratum rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ. Sed quadrato quidem

droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΝ; mais ΕΑ est égal au carré de ΑΒ; le reste ΘΙ est donc égal au double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ (7.2). Et puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont médiales, les carrés des droites ΑΓ, ΓΒ seront médiaux. Mais la somme de ces carrés est égale au parallélogramme ΕΗ; le parallélogramme ΕΗ est donc médial (cor. 24. 10), et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΕΜ, est appliqué à ΕΖ; la droite ΕΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). De plus, puisque le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ sera médial (cor. 24. 10). Mais ce rectangle est égal au parallélogramme ΘΗ; le parallélogramme ΘΗ est donc médial; et ce parallélogramme, qui a pour largeur la droite ΘΜ, est appliqué à la rationnelle ΕΖ; la droite ΘΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Et puisque les droites ΑΓ, ΓΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΓ sera incommensurable en longueur avec ΓΒ. Mais ΑΓ est à ΓΒ comme le carré de ΑΓ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le carré de ΑΓ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est commen-

312 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρά ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῇ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρον ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Καὶ ἴστί τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῇ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ ΕΗ τῇ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ οὕτως ἴστί τὴν ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος

ex ΑΓ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, rectangulo autem sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ; incommensurabilia igitur sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ. Atque est quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ΕΗ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale ΘΗ; incommensurable igitur est ΕΗ ipsi ΘΗ. Ut autem ΕΗ ad ΘΗ ita est



ἄρα ἴστί τὴν ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ, ΘΜ ἄρα ῥηταί· εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἴστί τὴν ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλῃ καὶ ἄλλῃ προσαρμόζει εὐθεΐα, δυνάμει μόνον σύμμετρος εὔσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἴστί τὸν ἀδύνατον.

ΕΜ ad ΘΜ; incommensurabilis igitur est ΕΜ ipsi ΘΜ longitudine. Et sunt utræque rationales; ipsæ ΕΜ, ΘΜ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus et ΘΝ ipsi congruere; apotomæ igitur alia et alia congruit recta, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quod est impossibile.

Τῇ ἄρα μέσῃ, καὶ τὰ ἰζῆς.

Mediæ igitur, etc.

surable avec le carré de ΑΓ (16. 10); et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est commensurable avec le rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Mais ΕΗ est égal à la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ, et ΘΗ est égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ. Mais ΕΗ est à ΘΗ comme ΕΜ est à ΘΜ (1. 6); la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΘΜ. Mais ces deux droites sont rationnelles; les droites ΕΜ, ΘΜ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome, et ΘΜ convient avec cet apotome (74. 10). Nous démontrions semblablement que ΘΝ lui convient aussi; deux droites différentes, commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui est impossible (80. 10). Il n'y a donc, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

PROPOSITIO LXXXIII.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μίσην.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ AB , καὶ τῇ AB προσαρμόζουσα ἴστω ἡ $BΓ$. αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μίσην· λέγω ὅτι τῇ AB ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Minori una solùm congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, faciens cum totâ compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium.

Sit minor AB , et ipsi AB congruens sit $BΓ$; ipsæ igitur $ΑΓ$, $ΓΒ$ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; dico ipsi AB alteram rectam non congruere, quæ eadem faciat.



Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω ἡ $ΒΔ$ καὶ αἱ $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ προειρημένα². Καὶ ἐπεὶ ὃ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τούτῃ ὑπερίχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$

Si enim possibile, congruat $ΒΔ$; et ipsæ $ΑΔ$, $ΔΒ$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt. Et quoniam quo superant quadrata ex $ΑΔ$, $ΔΒ$ quadrata ex $ΑΓ$, $ΓΒ$, hoc superat et rectangulum bis sub $ΑΔ$, $ΔΒ$

PROPOSITION LXXXIII.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec une droite mineure, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites rationnelle, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Soit la mineure AB , et que $BΓ$ conviène avec AB ; les droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant rationnelle, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant médial (77. 10); je dis qu'aucune autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec AB .

Que $ΒΔ$ conviène avec AB , si cela est possible; les droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ seront incommensurables en puissance, ces droites faisant ce qui vient d'être dit (77. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites $ΑΔ$, $ΔΒ$ surpasse la somme des quarrés des droites $ΑΓ$, $ΓΒ$ de la même grandeur dont le double rectangle sous

314 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων³ ὑπερίχει ῥητῶ, ῥητὰ γάρ ἐστιν⁴ ἀμφοτέρω· καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μίσα γάρ ἐστιν⁵ ἀμφοτέρω.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι, καὶ τὰ ἐξῆς⁶.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Εστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ'. αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μίσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιῶσα.

ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ (7. 2), et que la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpassera d'une surface rationelle le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce qui est impossible (27. 10); car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre. Donc, etc.

PROPOSITION LXXXIV.

Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface rationelle un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, et rationel le double rectangle compris sous ces mêmes droites.

Que ΑΒ fasse avec une surface rationelle un tout médial, et que ΒΓ convienne avec ΑΒ, les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ étant médiale, et le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ étant rationel (78. 10); je dis qu'une autre droite, faisant les mêmes choses, ne peut convenir avec ΑΒ.

rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, rationalia enim sunt utraque; et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ igitur rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, quod est impossibile, media enim sunt utraque.

Minori igitur, etc.

PROPOSITIO LXXXIV.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una solum congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale.

Sit recta ΑΒ cum rationali medium totum faciens, congruens autem ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΓ, ΓΒ rationale; dico ipsi ΑΒ alteram non congruere eadem facientem.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 315

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθείαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν². Ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερίχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερίχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀκαλούθως τοῖς³ πρὸ

Si enim possibile, congruat ΒΔ; et ipsæ ΑΔ, ΔΒ igitur rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis medium, rectangulum verò bis sub ΑΔ, ΔΒ rationale. Quoniam igitur quo superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc superat et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ, congruenter præ-



αὐτοῦ· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφοτέρω· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερίχει ῥητῶ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μίσα γάρ ἐστιν⁴ ἀμφοτέρω· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημμένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει⁵. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

cedentibus; rectangulum autem bis sub ΑΔ, ΔΒ rectangulum bis sub ΑΓ, ΓΒ superat rationali, rationalia enim sunt utraque; et quadrata ex ΑΔ, ΔΒ igitur quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant rationali, quod est impossibile; media enim sunt utraque; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens ea quæ dicta sunt; una igitur solùm congruet. Quod oportebat ostendere.

Que ΒΔ conviène avec ΑΒ, si cela est possible; les droites ΑΔ, ΔΒ seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ médiale, et le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ rationel (78. 10). Puisque la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpasse la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ de la même grandeur dont le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, comme dans ce qui précède (7. 2), et que le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ surpasse le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle, car ces grandeurs sont rationelles l'une et l'autre, la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ surpassera la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ d'une surface rationelle; ce qui est impossible; car ces grandeurs sont médiales l'une et l'autre (27. 10). Il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière ce qu'on a dit; il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec ΑΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΙ.

PROPOSITIO LXXXV.

Τῇ μετὰ μέσου μίσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον¹ προσαρμόζει εὐθεῖα δύναμις ἀσύμμετρος οὕτα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μίσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μίσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιούσαι τὰ προειρημένα². λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα³ οὐ προσαρμόσει, ποιούσα τὰ προειρημένα⁴.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζιτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμεις ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων⁵ ἅμα μίσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μίσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα⁶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. Καὶ ἐκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ,

Ei quæ cum medio medium totam facit una solum congruit recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum autem bis sub ipsis medium, et adhuc incommensurable composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta ΑΒ cum medio medium totum faciens, ipsi autem congruens ΒΓ; ipsæ igitur ΑΓ, ΓΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes ea quæ dicta sunt; dico ipsi ΑΒ alteram rectam non congruere, facientem ea quæ dicta sunt.

Si enim possibile, congruat ΒΔ, ita ut et ΑΔ, ΔΒ potentiâ incommensurabiles sint, facientes quidem ex ΑΔ, ΔΒ quadrata simul media, et rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ medium, et adhuc quadrata ex ΑΔ, ΔΒ incommensurabilia rectangulo bis sub ΑΔ, ΔΒ. Et exponatur ra-

PROPOSITION LXXXV.

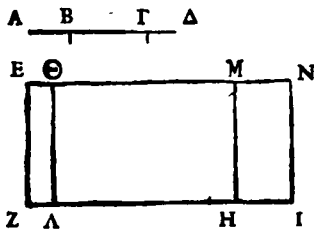
Il n'y a qu'une seule droite qui puisse convenir avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière, et qui fait avec la droite entière la somme des carrés de ces droites médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites médial et commensurable avec la somme de leurs carrés.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΒΓ convienne avec ΑΒ; les droites ΑΓ, ΓΒ seront incommensurables en puissance, et feront ce qui vient d'être dit (79. 10); je dis qu'une autre droite, faisant ce qui vient d'être dit, ne convient point avec ΑΒ.

Que ΒΔ, s'il est possible, convienne avec ΑΒ, les droites ΑΔ, ΔΒ étant incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés médiale, le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ médial, et la somme des carrés des droites ΑΔ, ΔΒ incommensurable avec le double rectangle sous ΑΔ, ΔΒ. Soit exposée la rationnelle ΕΖ;

καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφελήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ὅρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἢ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω τὸ ΕΙ,

tionalis EZ, et quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale ad ipsam EZ applicetur ΕΗ, latitudinem faciens ΕΜ, rectangulo autem bis sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ; reliquum igitur quadratum ex ΑΒ æquale est ipsi ΕΛ; ipsa igitur ΑΒ potest ipsum ΕΛ. Rursus, quadratis quidem ex ΑΔ, ΔΒ æquale ad ipsam EZ applicetur ΕΙ, latitudinem



πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. Καὶ ἐπεὶ μίσην ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μίσην ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μίσην ἐστὶ τὸ

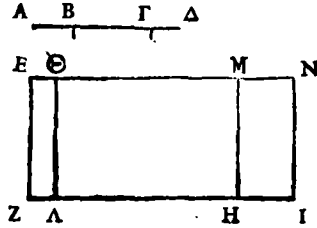
faciens ΕΝ. Est autem et quadratum ex ΑΒ æquale ipsi ΕΛ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΔ, ΔΒ æquale est ipsi ΘΙ. Et quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΕΗ; medium igitur est et ΕΗ; et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΕΜ; rationalis igitur est ΕΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis

appliquons à EZ un parallélogramme ΕΗ égal à la somme des quarrés de ΑΓ et de ΓΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΜ; et retranchons de ΕΗ un parallélogramme ΘΗ égal au double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ, ce parallélogramme ayant ΘΜ pour largeur; le quarré restant de ΑΒ sera égal au parallélogramme ΕΛ (7. 2); la droite ΑΒ pourra donc le parallélogramme ΕΛ. De plus, appliquons à EZ un parallélogramme ΕΙ égal à la somme des quarrés des droites ΑΔ, ΔΒ, ce parallélogramme ayant pour largeur la droite ΕΝ. Mais le quarré de ΑΒ est égal au parallélogramme ΕΛ; le double parallélogramme restant compris sous ΑΔ, ΔΒ est donc égal à ΘΙ (7. 2). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΓ, ΓΒ est médiale, et que cette somme est égale à ΕΗ, le parallélogramme ΕΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à EZ, et il a pour largeur la droite ΕΜ; la droite ΕΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ est médial, et qu'il

318 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὲς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴσιν ἴσον τῷ ΘΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἴσιν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὲς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα¹⁰ ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ

sub ΑΓ, ΓΒ, et est æquale ipsi ΘΗ; medium igitur et ΘΗ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΘΜ; rationalis igitur est ΘΜ, et incommensurabilis ipsi ΕΖ longitudine. Et quoniam incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rectangulo bis sub ΑΓ, ΓΒ, incommensurabile igitur est et ΕΗ ipsi ΘΗ; in-



τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστὶ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμύζει ῥητῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος¹¹ οὔσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ εἰδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἐτίρρα προσαρμόσει εὐθεΐα· τῇ ἄρα ΑΒ μία

commensurabilis igitur est et ΕΜ ipsi ΜΘ longitudine. Et sunt utraque rationales; ipsæ igitur ΕΜ, ΜΘ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΕΘ, et ΘΜ congruens ipsi. Similiter utique demonstrabimus ΕΘ rursus apotomen esse, et ΘΝ congruentem ipsi; apotomæ igitur alia et alia congruit rationalis, potentiâ solum commensurabilis existens toti, quod demonstratum est impossibile; non igitur ipsi ΑΒ altera congruet

est égal à ΘΗ, le parallélogramme ΘΗ sera médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a pour largeur la droite ΘΜ; la droite ΘΜ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΕΖ (23. 10). Mais la somme des carrés des droites ΑΓ, ΓΒ est incommensurable avec le double rectangle sous ΑΓ, ΓΒ; le parallélogramme ΕΗ est donc incommensurable avec ΘΗ; la droite ΕΜ est donc incommensurable en longueur avec ΜΘ (1. 6). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΕΜ, ΜΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΘ est donc un apotome (74. 10), et ΘΜ convient avec ΕΘ. Nous démontrerions semblablement que ΕΘ est encore un apotome, et que ΘΝ convient avec ΕΘ; des rationelles différentes commensurables en puissance seulement avec la droite entière, conviendraient donc avec un apotome, ce qui a été démontré impossible (80. 10); une autre droite ne convient donc pas avec ΑΒ;

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 319

μόνον προσαρμόσει εὐθείᾳ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιεῖσα τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετραγώνη¹² ἅμα μίσον, καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μίσον, καὶ ἔτι¹³ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν. Οπερ ἴδι διίξαι.

recta; ipsi igitur AB una solum congruet recta potentiâ incommensurabilis existens toti, et cum totâ faciens et ex ipsis quadrata simul media, et rectangulum bis sub ipsis medium, et adhuc ex ipsis quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub ipsis. Quod oportebat ostendere.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτεμῆς, εἴν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλεῖσθαι ἀποτομὴν πρώτην.

β. Εἴν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἑαυτῇ, καλεῖσθαι ἀποτομὴν δευτέραν.

γ. Εἴν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκει-

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expositâ rationali et apotome, si quidem tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine, et tota commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, vocetur apotome prima.

2. Si autem congruens commensurabilis sit expositæ rationali longitudine, et tota quam congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vocetur apotome secunda.

3. Si autem neutra commensurabilis sit ex-

il n'y a donc qu'une seule droite qui puisse convenir avec AB, c'est celle qui est incommensurable en puissance avec la droite entière AB, et qui fait avec la droite entière la somme des quarrés de ces droites médiale, le double rectangle sous ces mêmes droites médial, et la somme des quarrés incommensurable avec le double rectangle compris sous ces mêmes droites. Ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITIONS TROISIÈMES.

1. Une rationnelle et un apotome étant exposés, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, le reste s'appellera premier apotome.

2. Si la congruente est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la congruente du quarré d'une droite commensurable en longueur avec la droite entière, le reste s'appellera second apotome.

3. Si aucune de ces deux droites n'est commensurable en longueur avec la

320 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μένη ῥητῇ μήκει, ἢ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης
μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, κα-
λείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, εἰὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης
μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μῆ-
κει, εἰὰν μὲν ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ
μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

ε. Εἰὰν δὲ ᾖ προσαρμοζούσα, πέμπτη.

ς. Εἰὰν δὲ μηδενίκα, ἕκτη.

positæ rationali longitudine, et tota quam
congruens plus possit quadrato ex rectâ sibi
commensurabili, vocetur apotome tertia.

4. Rursus, si tota quam congruens plus pos-
sit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili lon-
gitudine, si quidem tota commensurabilis sit ex-
positæ rationali longitudine, vocetur apotome
quarta.

5. Si verò sit congruens, quinta.

6. Si autem neutra, sexta.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.

Εὐρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει
σύμμετρος ἴστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἴστί καὶ ἡ
ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ
οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΖΔ' μὴ ἴστω

PROPOSITIO LXXXVI.

Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine
commensurabilis sit ΒΗ; rationalis igitur est et
ΒΗ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔΕ,
ΕΖ, quorum excessus ΖΔ non sit quadratus;

rationnelle exposée, et si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de
la congruente du carré d'une droite commensurable avec la droite entière, le
reste s'appèlera troisième apotome.

4. De plus, si la puissance de la droite entière surpasse la puissance de la
congruente du carré d'une droite incommensurable en longueur avec la droite
entièrè, et si la droite entière est commensurable en longueur avec la rationnelle
exposée, le reste s'appèlera quatrième apotome.

5. Si la congruente est commensurable avec la rationnelle exposée, le reste
s'appèlera cinquième apotome.

6. Si aucune de ces droites n'est commensurable avec la rationnelle exposée,
le reste s'appèlera sixième apotome.

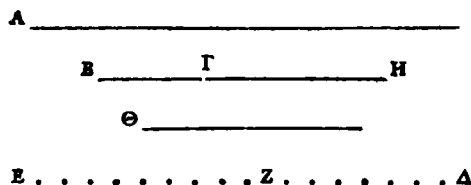
PROPOSITION LXXXVI.

Trouver un premier apotome.

Soit exposée la rationnelle Α, et que ΒΗ soit commensurable en longueur avec Α, la
droite ΒΗ sera rationnelle. Soient exposés deux nombres carrés ΔΕ, ΕΖ, dont l'ex-
cès ΖΔ ne soit pas un nombre carré (30. lem. 1. 10), le nombre ΔΕ n'aura pas avec ΔΖ

τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον²· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ·

neque igitur ΕΔ ad ΔΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad quadratum ex ΗΓ; commensurable igitur est ex ΒΗ quadratum quadrato ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum



ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω ὅτι καὶ πρώτη. Ὡ γὰρ μίζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν

ex ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et quoniam ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et primam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ.

la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré. Faisons en sorte que ΕΔ soit à ΔΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ; le carré de ΒΗ sera commensurable avec le carré de ΗΓ (6. 10). Mais le carré de ΒΗ est rationel; le carré de ΗΓ est donc aussi rationel; la droite ΗΓ est donc rationnelle. Et puisque ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré (9. 10); la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi que cette droite est un premier apotome. Car que l'excès du carré de ΒΗ sur le carré de ΗΓ soit le

322 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ὥς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ³. καὶ ἀνατρίψαντι ἄρα ἔστιν ὥς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἔστιν ἡ ΗΒ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει⁴. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι⁵.

Et quoniam est ut ΔΕ ad ΖΔ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ; et convertendo igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΗΒ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, uterque enim quadratus est; et quadratum ex ΗΒ igitur ad quadratum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur est ΗΒ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est tota ΒΗ commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est prima.

Inventa est igitur prima apotome ΒΓ. Quod oportebat facere.

quarré de Θ. Puisque ΔΕ est à ΖΔ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, par conversion, ΔΕ sera à ΕΖ comme le quarré de ΗΒ est au quarré de Θ (19. cor. 5). Mais le nombre ΔΕ a avec le nombre ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, car ces nombres sont des quarrés l'un et l'autre; le quarré de ΗΒ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΗΒ est donc commensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10).

On a donc trouvé un premier apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.

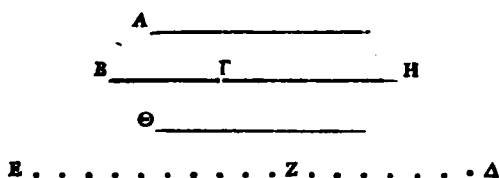
PROPOSITIO LXXXVII.

Εὕρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Invenire secundam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἰστί καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἴστω τετράγωνος. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ².

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α commensurabilis longitudine ipsa ΗΓ; rationalis igitur est et ΗΓ. Et exponantur duo quadrati numeri ΔΕ, ΕΖ, quorum excessus ΔΖ non sit quadratus. Et fiat ut ΖΔ ad ΔΕ ita ex ΓΗ quadratum ad



σύμμετρον ἄρα ἰστί τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον³ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνῳ. ῤητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα ἰστί⁴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἰστί ἡ ΗΒ· Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ⁵ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἰστί ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα⁶

ipsum ex ΗΒ; commensurabile igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur est et ex ΗΒ; rationalis igitur est ΗΒ. Et quoniam ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, incommensurabilis est ΓΗ ipsi ΗΒ longitudine. Et sunt utraque rationales; ipsæ ΓΗ,

PROPOSITION LXXXVII.

Trouver un second apotome.

Soit exposée la rationnelle Α, et que la droite ΗΓ soit commensurable en longueur avec Α; la droite ΗΓ sera rationnelle (30. lem. 1. 10). Soient exposés deux nombres quarrés ΔΕ, ΕΖ, dont l'excès ΔΖ ne soit pas un quarré. Faisons en sorte que ΖΔ soit à ΔΕ comme le quarré de ΓΗ est au quarré de ΗΒ; le quarré de ΓΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΒ (6. 10). Mais le quarré de ΓΗ est rationel; le quarré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΗΒ est donc rationnelle. Et puisque le quarré de ΓΗ n'a pas avec le quarré de ΗΒ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, la droite ΓΗ sera incommensurable en longueur avec ΗΒ (9. 10). Mais ces droites sont

ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ δευτέρα. Ὡ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμὸν· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἐστὶν ἐκά-
 τινος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμό-
 ζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ
 εἶδει ποιῆσαι.

HB igitur rationales sunt potentiâ solùm com-
 mensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et
 secundam. Quo enim majus est quadratum
 ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ.
 Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ip-
 sum ex ΗΓ ita ΕΔ numerus ad numerum ΔΖ;
 convertendo igitur est ut ex ΒΗ quadratum
 ad ipsum ex Θ ita ΔΕ ad ΕΖ. Atque est uterque
 ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus; quadratum igitur ex
 ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habet quam qua-
 dratus numerus ad quadratum numerum; com-
 mensurabilis igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et
 ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo
 ΒΗ quam ΗΓ plus potest quadrato ex rectâ sibi
 commensurabili longitudine. Atque est con-
 gruens ΓΗ commensurabilis expositæ rationali
 Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est secunda.

Inventa est igitur secunda apotome ΒΓ. Quod
 oportebat facere.

rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΗ, ΗΒ sont donc des rationnelles commen-
 surables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je
 dis aussi que cette droite est un second apotome. Car que l'excès du quarré de
 ΒΗ sur le quarré de ΗΓ soit le quarré de Θ. Puisque le quarré de ΒΗ est au quarré
 de ΗΓ comme le nombre ΕΔ est au nombre ΔΖ, par conversion, le quarré de
 ΒΗ sera au quarré de Θ comme ΔΕ est à ΕΖ. Mais ΔΕ et ΕΖ sont des quarrés l'un
 et l'autre; le quarré de ΒΗ a donc avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre
 quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc commensurable en
 longueur avec Θ (9. 10). Mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ
 du quarré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré
 d'une droite commensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est
 commensurable en longueur avec la rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc
 un second apotome (déf. trois. 2. 10).

On a donc trouvé un second apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη.

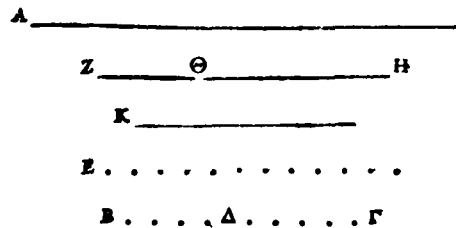
PROPOSITIO LXXXVIII.

Εὐρίην τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Invenire tertiam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ E , $BΓ$, $ΓΔ$, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὃ δὲ $ΓΒ$ πρὸς τὸν $ΒΔ$ λόγον ἔχίτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $ΒΓ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ

Exponatur rationalis A , et exponantur tres numeri E , $BΓ$, $ΓΔ$, rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ipse autem $ΓΒ$ ad $ΒΔ$ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, et fiat ut quidem E ad $BΓ$ ita ex



ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ $BΓ$ πρὸς τὸν $ΓΔ$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $HΘ$ τετράγωνον¹. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ZH τετραγώνῳ². ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον³. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH . ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZH . Καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν $BΓ$ λόγον οὐχ ἔχει

A quadratum ad quadratum ex ZH , ut verò $BΓ$ ad $ΓΔ$ ita ex ZH quadratum ad quadratum ex $HΘ$; commensurable igitur est ex A quadratum quadrato ex ZH . Rationale autem ex A quadratum; rationale igitur et quadratum ex ZH ; rationalis igitur est ZH . Et quoniam E ad $BΓ$ rationem non habet quam quadratus

PROPOSITION LXXXVIII.

Trouver un troisième apotome.

Soient exposés la rationelle A , et les trois nombres E , $BΓ$, $ΓΔ$, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; que $ΓΒ$ ait avec $ΒΔ$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; faisons en sorte que E soit à $BΓ$ comme le quarré de A est au quarré de ZH , et que $BΓ$ soit à $ΓΔ$ comme le quarré de ZH est au quarré de $HΘ$; le quarré de A sera commensurable avec le quarré de ZH (6. 10). Mais le quarré de A est rationel; le quarré de ZH est donc rationel; la droite ZH est donc rationelle. Et puisque E n'a pas

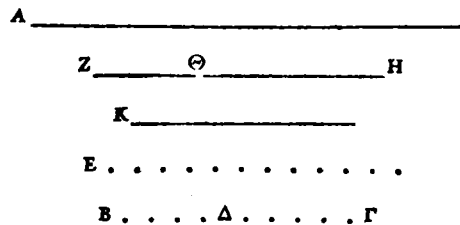
ὅν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἔχει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον⁵ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ρητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν⁷ ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διήσου ἄρα ἐστὶν

numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est Α ipsi ΖΗ longitudine. Rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; commensurable igitur est ex ΖΗ quadratum quadrato ex ΗΘ. Rationale autem quadratum ex ΖΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΘ; rationalis igitur est ΗΘ. Et quoniam ΒΓ ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΖΗ, ΗΘ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΖΘ. Dico et tertiam. Quoniam enim est ut quidem Ε ad ΒΓ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΖΗ, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita

avec ΒΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de Α n'aura pas avec le carré de ΖΗ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΖΗ (9. 10). De plus, puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ, le carré de ΖΗ sera commensurable avec le carré de ΗΘ. Mais le carré de ΖΗ est rationel; le carré de ΗΘ est donc rationel; la droite ΗΘ est donc rationelle. Et puisque ΒΓ n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΖΗ n'aura pas avec le carré de ΗΘ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΖΗ, ΗΘ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΖΘ est donc un apotome (74. 10). Je dis aussi qu'elle est un troisième apotome. Car puisque Ε est à ΒΓ comme le carré de Α est au carré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le carré de ΖΗ est au carré de ΗΘ; par égalité, Ε sera à ΓΔ

ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· εὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδενίτερά ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει⁸. Ω εὖν μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ

ex A quadratum ad ipsum ex ΘΗ. Ipse autem E ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur A ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine. Quo igitur majus est quadratum ex ΖΗ quadrato



τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἵστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον⁹ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν·

ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et quadratum ex ΖΗ igitur ad quadratum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; commensurabilis igitur

comme le quarré de A est au quarré de ΘΗ (22. 5); mais E n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de A n'a donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (9. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée A. Que le quarré de Κ soit la grandeur dont le quarré de ΖΗ surpasse le quarré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ (19. 5). Mais ΓΒ a avec ΒΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΖΗ a donc avec le quarré de Κ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite

328 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ¹⁰ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἡ ΖΘ. Οπερ εἶναι ποιεῖσαι.

est ZH ipsi K longitudine. Et ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex K ; ergo ZH quam $H\Theta$ plus potest quadrato ex recta sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ZH , $H\Theta$ commensurabilis est expositæ rationali A longitudine; ergo $Z\Theta$ apotome est, tertia.

Inventa est igitur tertia apotome $Z\Theta$. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Εὕρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἐκάτερον τὸν ΔΖ, ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ

PROPOSITIO LXXXIX.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A , et ipsi A longitudine commensurabilis BH ; rationalis igitur est et BH . Et exponantur duo numeri ΔZ , ZE ; ita ut totus ΔE ad utrumque ipsorum ΔZ , ZE rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et fiat ut ΔE ad EZ ita ex BH quadratum ad ipsum ex $H\Gamma$; commensurabile igitur

ZH est donc commensurable en longueur avec K (9. 10). Mais la puissance de ZH surpasse la puissance de $H\Theta$ du carré de K ; la puissance de ZH surpasse donc la puissance de $H\Theta$ du carré d'une droite commensurable avec ZH ; mais aucune des droites ZH , $H\Theta$ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée A ; la droite $Z\Theta$ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10).

On a donc trouvé un troisième apotome $Z\Theta$. Ce qu'il fallait faire.

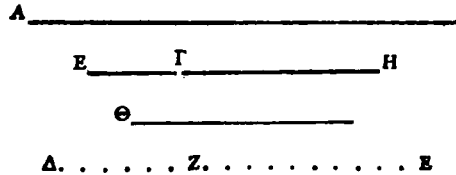
PROPOSITION LXXXIX.

Trouver un quatrième apotome.

Soit exposée la rationnelle A , et que BH soit commensurable en longueur avec A ; la droite BH sera rationnelle. Soient exposés les deux nombres ΔZ , ZE , de manière que le nombre entier ΔE n'ait pas avec chacun des nombres ΔZ , ZE la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; et faisons en sorte que ΔE soit à EZ comme le carré de BH est au carré de $H\Gamma$; le carré de BH sera commensurable

τῆς ΒΗ τῇ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Πητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. Καὶ ἵπαι ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος

est quadratum ex ΗΓ. Rationale autem quadratum ex ΒΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΓ; rationalis igitur est ΗΓ. Et quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum



ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη· Ὡς οὖν μίζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ³ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν⁴ ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος

numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΒΓ. Dico et quartam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, et convertendo igitur est ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-

avec le carré de ΗΓ (6. 10). Mais le carré de ΒΗ est rationel, le carré de ΗΓ est donc rationel; la droite ΗΓ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré, le carré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le carré de ΗΓ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΓ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un quatrième apotome. Que le carré de Θ soit ce dont le carré de ΒΗ surpasse le carré de ΗΓ. Puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le carré de ΒΗ est au carré de ΗΓ, par conversion, ΕΔ sera à ΔΖ comme le carré ΒΗ est au carré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; le carré de ΒΗ n'a donc pas non plus avec le carré de

330 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῇ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ⁵ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΒΓ⁶ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ΒΓ⁷ τετάρτη ἀποτομή. Ὅπρι ἴδι ποιῆσαι.

tum numerum; neque igitur ex BH quadratum ad ipsum ex Θ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est BH ipsi Θ longitudine; et BH quam ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo BH quam ΗΓ plus potest quadrato ex recta sibi incommensurabili longitudine. Atque est tota BH commensurabilis expositæ rationali Α longitudine; ergo ΒΓ apotome est quarta.

Inventa est igitur ΒΓ quarta apotome. Quod oportebat facere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4'.

Εὕρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει¹ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν² ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ; ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς

PROPOSITIO XC.

Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis Α, et ipsi Α longitudine commensurabilis sit ΓΗ; rationalis igitur est ΓΗ. Et exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut ΔΕ ad utrumque ipsorum ΔΖ, ΖΕ rationem rursus non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut ΖΕ ad ΕΔ

Θ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10); mais la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du carré de Θ; la puissance de ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΒΗ. Mais la droite entière ΒΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10).

On a donc trouvé un quatrième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

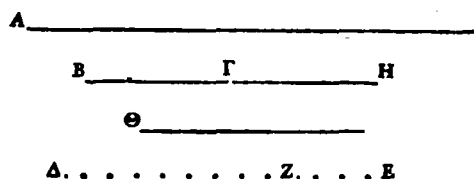
PROPOSITION XC.

Trouver un cinquième apotome.

Soit exposée la rationelle Α, et que ΓΗ soit commensurable en longueur avec Α; la droite ΓΗ sera rationelle. Soient exposés aussi deux nombres ΔΖ, ΖΕ, de manière que ΔΕ n'ait ni avec l'un ni avec l'autre des nombres ΔΖ, ΖΕ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré; et faisons en sorte que ΖΕ soit à

τὸν³ ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ⁴· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ-

ita ex ΓΗ quadratum ad ipsum ex ΗΒ; commensurabile igitur est ex ΓΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Rationale autem quadratum ex ΓΗ; rationale igitur et quadratum ex ΗΒ; rationalis igitur est et ΒΗ. Et quoniam est ut ΔΕ ad ΕΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ, ipse autem ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadra-



μόν· οὐδ' ἄρα⁵ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ρηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ρηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ὡς γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἵστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ

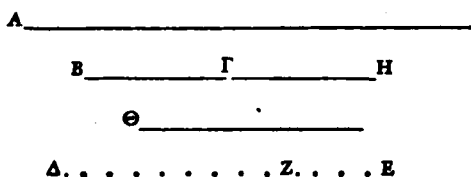
tum numerum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex ΗΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ΒΗ ipsi ΗΓ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΒΗ, ΗΓ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΒΓ apotome est. Dico et quintam. Quo enim majus est quadratum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ, sit quadratum ex Θ. Quoniam igitur est ut ex ΒΗ quadratum ad ipsum ex

ΕΔ comme le quarré de ΓΗ est au quarré de ΗΒ; le quarré de ΓΗ sera commensurable avec le quarré de ΗΒ (6. 10). Mais le quarré de ΓΗ est rationel; le quarré de ΗΒ est donc rationel; la droite ΒΗ est donc rationelle. Et puisque ΔΕ est à ΕΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ, et que ΔΕ n'a pas avec ΕΖ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ΒΗ n'aura pas non plus avec le quarré de ΗΓ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec ΗΓ (9. 10). Mais elles sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΒΗ, ΗΓ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΒΗ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un cinquième apotome. Que le quarré de Θ soit ce dont le quarré de ΒΗ surpasse le quarré de ΗΓ. Puisque le

332 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀνα-
στρέφαντι ἄρα ἰστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως
τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ο δὲ ΕΔ πρὸς
τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς
ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος

ΗΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, convertendo igitur est ut
ut ΕΔ ad ΔΖ ita ex ΒΗ quadratum ad ipsum
ex Θ. Ipse autem ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet
quam quadratus numerus ad quadratum nume-
rum; neque igitur ex ΒΗ quadratum ad ipsum
ex Θ rationem habet quam quadratus numerus



ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἰστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ
ΒΗ τῆς ΗΓ μιῶν τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ
ἄρα τῆς ΗΓ μιῶν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-
μέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἰστὶν ἡ προσαρμό-
ζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ
Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομή ἡ ΒΓ. Ὅπερ
ἔδει ποιῆσαι.

ad quadratum numerum; incommensurabilis
igitur est ΒΗ ipsi Θ longitudine. Et ΒΗ quam
ΗΓ plus potest quadrato ex Θ; ergo ΒΗ quam
ΗΓ plus potest quadrato ex rectā sibi incom-
mensurabili longitudine. Atque est congruens
ΓΗ commensurabilis expositæ rationali Α lon-
gitudine; ergo ΒΓ apotome est quinta.

Inventa est igitur quinta apotome ΒΓ. Quod
oportebat facere.

quarré de ΒΗ est au quarré de ΗΓ comme ΔΕ est à ΕΖ; par conversion, ΕΔ sera à
ΔΖ comme le quarré de ΒΗ est au quarré de Θ. Mais ΕΔ n'a pas avec ΔΖ la raison
qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de ΒΗ n'a donc pas
non plus avec le quarré de Θ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre
quarré; la droite ΒΗ est donc incommensurable en longueur avec Θ (9. 10). Mais
la puissance de ΒΗ surpasse la puissance de ΗΓ du quarré de Θ; la puissance de
ΒΗ surpasse donc la puissance de ΗΓ du quarré d'une droite incommensurable en
longueur avec ΒΗ. Mais la congruente ΓΗ est commensurable en longueur avec la
rationnelle exposée Α; la droite ΒΓ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10).

On a donc trouvé un cinquième apotome ΒΓ. Ce qu'il fallait faire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

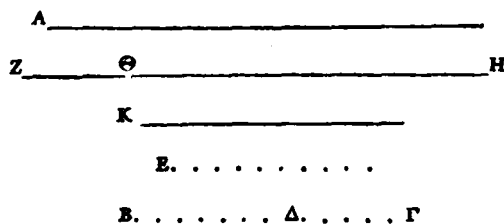
PROPOSITIO XCI.

Εὐρίην τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Invenire sextam apotomen.

Εκτίσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ $E, B\Gamma, \Gamma\Delta$ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον μὴ ἔχίτω ἐν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πιποισέθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH^2 , ὡς δὲ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$.

Exponatur rationalis A , et tres numeri $E, B\Gamma, \Gamma\Delta$ rationem non habentés inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum; adhuc autem et ΓB ad $B\Delta$ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; et fiat ut quidem E ad $B\Gamma$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH , ut verò $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $H\Theta$.



Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH · σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς ZH . Ῥητὸν δὲ τῷ ἀπὸ τῆς A ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ

Quoniam igitur est ut E ad $B\Gamma$ ita ex A quadratum ad ipsum ex ZH ; commensurabile igitur ex A quadratum quadrato ex ZH . Rationale autem quadratum ex A ; rationale igitur et

PROPOSITION XCI.

Trouver un sixième apotome.

Soient exposés la rationelle A , et trois nombres $E, B\Gamma, \Gamma\Delta$, qui n'ayent pas entre eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; de plus, que ΓB n'ait pas avec $B\Delta$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; faisons en sorte que E soit à $B\Gamma$ comme le quarré de A est au quarré de ZH , et que $B\Gamma$ soit à $\Gamma\Delta$ comme le quarré de ZH est au quarré de $H\Theta$.

Puisque E est à $B\Gamma$ comme le quarré de A est au quarré de ZH , le quarré de A sera commensurable avec le quarré de ZH . Mais le quarré de A est rationel; le

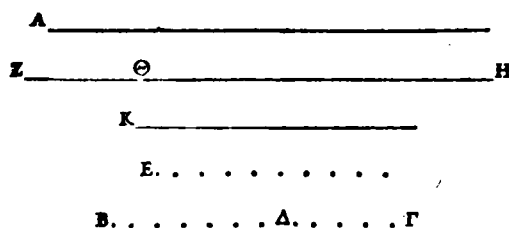
ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἔκτῃ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ

quadratum ex ZH ; rationalis igitur est et ZH . Et quoniam E ad $B\Gamma$ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex A quadratum ad ipsum ex ZH rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est A ipsi ZH longitudine. Rursus, quoniam est ut $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ ita ex ZH quadratum ad ipsum ex $H\Theta$; commensurable igitur ex ZH quadratum quadrato ex $H\Theta$. Rationale autem quadratum ex ZH ; rationale igitur et quadratum ex $H\Theta$; rationalis igitur et $H\Theta$. Et quoniam $B\Gamma$ ad $\Gamma\Delta$ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ZH quadratum ad ipsum ex $H\Theta$ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur est ZH ipsi $H\Theta$ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ZH , $H\Theta$ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; ergo $Z\Theta$ apotome est. Dico et sextam. Quoniam enim est ut quidem E ad $B\Gamma$ ita ex A quadratum ad ipsum ex

quarré de ZH est donc rationel; la droite ZH est donc rationnelle. Et puisque E n'a pas avec $B\Gamma$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de A n'aura pas non plus avec le quarré de ZH la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite A est donc incommensurable en longueur avec ZH (9. 10). De plus, puisque $B\Gamma$ est à $\Gamma\Delta$ comme le quarré de ZH est au quarré de $H\Theta$; le quarré de ZH sera commensurable avec le quarré de $H\Theta$. Mais le quarré de ZH est rationel; le quarré de $H\Theta$ est donc rationel (6. 10); la droite $H\Theta$ est donc rationnelle. Et puisque $B\Gamma$ n'a pas avec $\Gamma\Delta$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de ZH n'aura pas non plus avec le quarré de $H\Theta$ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite ZH est donc incommensurable en longueur avec $H\Theta$ (9. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ZH , $H\Theta$ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite $Z\Theta$ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un sixième apotome. Car puisque E est à $B\Gamma$ comme le quarré de A est au

ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δίδου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ο δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ

ZH, ut verò ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ; ex æquo igitur est ut Ε ad ΓΔ ita ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ. Ipse autem Ε ad ΓΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex Α quadratum ad ipsum ex ΗΘ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; incommensurabilis igitur



Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδεντέρα ἄρα³ τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ Α ῥητῇ μήκει. Ω οὖν μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρίψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ο δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ

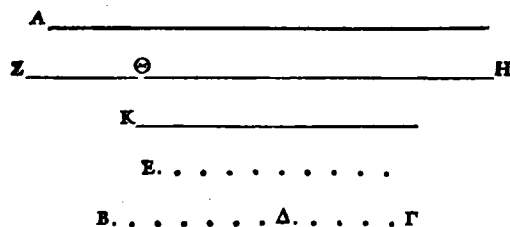
est Α ipsi ΗΘ longitudine; neutra igitur ipsarum ΖΗ, ΗΘ commensurabilis est rationali Α longitudine. Quo enim majus est quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ, sit quadratum ex Κ. Quoniam igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex ΗΘ, convertendo igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ex ΖΗ quadratum ad ipsum ex Κ. Ipse autem ΓΒ ad ΒΔ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque igitur ex ΖΗ qua-

quarré de ΖΗ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ, par égalité, Ε sera à ΓΔ comme le quarré de Α est au quarré de ΗΘ. Mais Ε n'a pas avec ΓΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; le quarré de Α n'aura donc pas avec le quarré de ΗΘ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré; la droite Α est donc incommensurable en longueur avec ΗΘ (g. 10); aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est donc commensurable en longueur avec Α. Que le quarré de Κ soit ce dont le quarré de ΖΗ surpasse le quarré de ΗΘ. Puisque ΒΓ est à ΓΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de ΗΘ; par conversion, ΓΒ sera à ΒΔ comme le quarré de ΖΗ est au quarré de Κ. Mais ΓΒ n'a pas avec ΒΔ la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, le quarré de

336 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύνатаι ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ

dratum ad ipsum ex Κ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; incommensurabilis igitur est ΖΗ ipsi Κ longi-



μειζον τῇ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μειζον δύνатаι τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδέτερά τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτῇ.

tudine. Et ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex Κ ; ergo ΖΗ quam ΗΘ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Et neutra ipsarum ΖΗ , ΗΘ commensurabilis est expositæ rationali Α longitudine ; ergo ΖΘ apotome est sexta.

Εὑρηται ἄρα ἡ ἑκτῇ ἀποτομή ἡ ΖΘ. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Inventa est igitur sexta apotome ΖΘ. Quod oportebat facere.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

SCHOLIUM.

Εἶστι καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρησιν τῶν εἰρημένων ἑξ ἀποτομῶν. Καὶ δὴ ἴστω εὐρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ' ἐκ δύο ὁνο-

Licet autem et expeditius demonstrare inventionem dictarum sex apotomarum. Et igitur oporteat invenire primam apotomen , exponatur

ΖΗ n'a donc pas non plus avec le carré de Κ la raison qu'un nombre carré a avec un nombre carré ; la droite ΖΗ est donc incommensurable en longueur avec Κ (9. 10). Mais la puissance de la droite ΖΗ surpasse la puissance de la droite ΗΘ du carré de Κ ; la puissance de ΖΗ surpasse donc la puissance de ΗΘ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΖΗ. Mais aucune des droites ΖΗ, ΗΘ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée Α ; la droite ΖΗ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10).

On a donc trouvé un sixième apotome ΖΘ. Ce qu'il fallait faire.

SCHOLIE.

On peut démontrer plus brièvement la recherche des six apotomes dont nous venons de parler. Car qu'il faille trouver un premier apotome ; soit exposé

μάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἥς μῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τούτῃσιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τούτῃσιν τῆς

ex binis nominibus prima ΑΓ, cujus majus nomen ipsa ΑΒ, et ipsi ΒΓ æqualis ponatur ΒΔ; ergo ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΑΒ quam ΒΓ, hoc

A — Δ — B — Γ

ΒΔ, μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει· ἀποτομή ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΒ². Ομοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὕρομεν, ἐκθίμνοι τὰς ἰσαριθμούς ἐκ δύο ὀνομάτων.

est quam ΒΔ, plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et ΑΒ commensurabilis est expositæ rationali longitudine; apotome igitur prima est ΑΒ. Similiter utique et reliquas apotomas inveniemus, exponendo eas quæ sunt ejusdem ordinis ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 13.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

Περιχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστίν.

PROPOSITIO XCII.

Si spatium continueatur sub rationali et apotome primâ, recta spatium potens apotome est.

Continueatur enim spatium ΑΒ sub rationali ΑΓ et apotome primâ ΑΔ; dico rectam quæ spatium ΑΒ potest apotomen esse.

la première de deux noms ΑΓ; que son plus grand nom soit ΑΒ (49. 10), et faisons ΒΔ égal à ΒΓ; les droites ΑΒ, ΒΓ, c'est-à-dire ΑΒ, ΒΔ, seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10); la puissance de ΑΒ surpassera la puissance de ΒΓ, c'est-à-dire de ΒΔ, du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΑΒ; mais la droite ΑΒ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée; la droite ΑΒ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Nous trouverons semblablement les autres apotomes en exposant les droites de deux noms qui sont du même ordre (50, 51, 52, 53, et 54. 10).

PROPOSITION XCII.

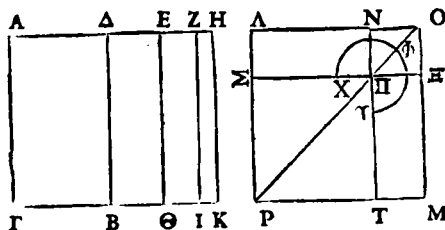
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un premier apotome, la droite qui peut cette surface est un apotome.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un premier apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est un apotome.

338 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Επει γὰρ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη ἡ $\Delta\Delta$, ἴστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔH . αἱ AH , $\text{H}\Delta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ὅλη ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AG , καὶ ἡ AH τῆς $\text{H}\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραλληλό-

Quoniam enim apotome est prima $\Delta\Delta$, sit ipsi congruens ΔH ; ipsæ AH , $\text{H}\Delta$ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et tota AH commensurabilis est expositæ rationali AG , et AH quam $\text{H}\Delta$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale



γραμμον² παραβληθῇ ἑλλειπτον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί³. Τετμήσθω ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβελήσθω ἑλλειπτον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH . Καὶ διὰ τῶν E , Z , H σημείων τῇ AG παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $\text{E}\Theta$, ZI , HK . Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ

ad AH parallelogrammum applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur ΔH bifariam in E , et quadrato ex EH æquale ad ipsam AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ , ZH ; commensurabilis igitur est AZ ipsi ZH . Et per puncta E , Z , H ipsi AG parallelæ ducantur $\text{E}\Theta$, ZI , HK . Et quoniam commensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine; et

Car, puisque $\Delta\Delta$ est un premier apotome, que ΔH lui conviène; les droites AH , $\text{H}\Delta$ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (déf. trois. 1. 10). Mais la droite entière AH est commensurable avec la rationnelle exposée AG , et la puissance de AH surpasse la puissance de $\text{H}\Delta$ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec AH ; si donc on applique à AH un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔH , soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite AH en parties commensurables (18. 10). Que ΔH soit coupé en deux parties égales au point E ; appliquons à AH un parallélogramme qui étant égal au quarré de EH , soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle compris sous AZ , ZH ; la droite AZ sera commensurable avec ZH . Par les points E , Z , H menons les droites $\text{E}\Theta$, ZI , HK parallèles à AG . Puisque AZ est commensurable en longueur avec ZH ,

AZ τῇ ZH μήκει· καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρα τῶν AZ, ZH σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ἀλλὰ ἡ AH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΓ μήκει. Καὶ ἐστὶ ρητὴ ἡ ΑΓ· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AZ, ZH· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν AI, ZK ρητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρος ἐστὶ μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστὶ. Κίεσθω δὴ τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ZH. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ AI πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ

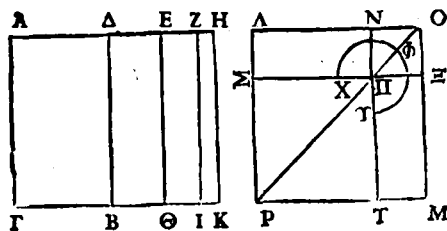
AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Sed AH commensurabilis est ipsi AG; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH commensurabilis est ipsi AG longitudine. Atque est rationalis AG; rationalis igitur et utraque ipsarum AZ, ZH; quare et utrumque ipsorum AI, ZK rationale est. Et quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΔΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ medium est. Ponatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ZK æquale quadratum ΝΞ auferatur, communem angulum ΛΟΜ habens cum ipso; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur æquale est sub AZ, ZH contentum rectangulum quadrato ex ΕΗ, est igitur ut AZ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ZH. Sed ut quidem AZ ad ΕΗ ita AI ad ΕΚ, ut verò

la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est commensurable avec AG; chacune de droites AZ, ZH est donc commensurable en longueur avec AG (12. 10). Mais AG est rationnelle; les droites AZ, ZH sont donc rationnelles l'une et l'autre; les parallélogrammes AI, ZK sont donc aussi rationnels l'un et l'autre (20. 10). Et puisque ΔΕ est commensurable en longueur avec ΕΗ, la droite ΔΗ est donc commensurable en longueur avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais ΔΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des rectangles ΔΘ, ΕΚ est donc médial (22. 10). Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme AI (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal au parallélogramme ZK, le carré ΝΞ ayant l'angle commun ΛΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que ΟΡ soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ, ZH est égal au carré de ΕΗ, la droite AZ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ZH (17. 6). Mais AZ est à ΕΗ comme AI est

340 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μίσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ μίσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἑμ-
προσθεν ἐδείχθη, καὶ ἴστι τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ
τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ
ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ
ΔΘ ἴστιν ἴσον⁸, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΑΞ· τὸ ἄρα ΔΚ

EH ad ZH ita est EK ad KZ; ipsorum igitur
AI, KZ medium proportionale est EK. Est
autem et ipsorum AM, NZ medium propor-
tionale MN, ut superius demonstratum est,
atque est quidem AI quadrato AM æquale, ip-
sum verò ZK ipsi NZ; et MN igitur ipsi EK
æquale est. Sed quidem EK ipsi ΔΘ est æquale,
ipsum verò MN ipsi ΑΞ; ergo ΔΚ æquale est



ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνόμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἐστὶ
δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ τετραγώνοις·
λοιπὸν⁹ ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ
τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ
τῆς ΑΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΑΝ ἄρα
δύναται τὸ ΑΒ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ¹⁰ ἡ ΑΝ ἀπο-
τομή ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκατέρων τῶν
ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἴστιν ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ· καὶ ἑκά-
τερον ἄρα τῶν ΑΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τουτίστι

gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ. Est autem et ΑΚ
æquale quadratis ΑΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ
æquale est ipsi ΣΤ; sed ΣΤ ex ΑΝ est qua-
dratum; ergo ex ΑΝ quadratum æquale est ipsi
ΑΒ; ipsa ΑΝ igitur potest ipsum ΑΒ. Dico et
ΑΝ apotomen esse. Quoniam enim rationale est
utrumque ipsorum ΑΙ, ΖΚ, atque est æquale
quadratis ΑΜ, ΝΞ; et utrumque igitur ipsorum
ΑΜ, ΝΞ rationale est, hoc est quadratum ex

à EK, et EH est à ZH comme EK est à KZ (1.6); le parallélogramme EK est donc
moyen proportionel entre les parallélogrammes AI, KZ. Et puisque MN est moyen
proportionel entre AM et ΝΞ, ainsi qu'on l'a démontré plus haut (55. 10), que AI
est égal au quarré AM, et que ΖΚ l'est à ΝΞ, le parallélogramme MN sera égal à EK.
Mais EK est égal à ΔΘ (37. 1), et MN à ΑΞ (43. 1); le parallélogramme ΔΚ est
donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais le parallélogramme ΑΚ
est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc
égal à ΣΤ. Mais ΣΤ est le quarré de ΑΝ; le quarré de ΑΝ est donc égal à ΑΒ; la
droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis aussi que ΑΝ est un apotome. Car puis-
que chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ est rationel, et qu'ils sont égaux aux
quarrés ΑΜ, ΝΞ, chacun des quarrés ΑΜ, ΝΞ, c'est-à-dire chacun des quarrés des

τὸ ἀπὸ ἑκατέρων¹¹ τῶν $\Lambda\Theta$, ON · καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν $\Lambda\Theta$, ON ῥητὴ ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ μίσην ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $\Lambda\Xi$ · μίσην ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda\Xi$. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $\Lambda\Xi$ μίσην ἐστὶ, τὸ δὲ $\text{N}\Xi$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ¹² τὸ $\Lambda\Xi$ τῷ $\text{N}\Xi$ · ὥς δὲ τὸ $\Lambda\Xi$ πρὸς τὸ $\text{N}\Xi$ οὕτως ἐστὶν ἡ $\Lambda\Theta$ πρὸς τὴν ON · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda\Theta$ τῇ ON μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ $\Lambda\Theta$, ON ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ AN . Καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμὴν ἀποτομὴ ἐστὶν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς¹³.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς διυτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμὴν μίσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Χωρίον γάρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς διυτέρας τῆς AD · λίσσω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμὴν μίσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

droites $\Lambda\Theta$, ON sera rationel ; les droites $\Lambda\Theta$, ON sont donc rationnelles l'une et l'autre. De plus, puisque le parallélogramme $\Delta\Theta$ est médial, et qu'il est égal à $\Lambda\Xi$, le parallélogramme $\Lambda\Xi$ sera aussi médial. Et puisque $\Lambda\Xi$ est médial, et que $\text{N}\Xi$ est rationel, le parallélogramme $\Lambda\Xi$ sera incommensurable avec le carré $\text{N}\Xi$; mais $\Lambda\Xi$ est à $\text{N}\Xi$ comme $\Lambda\Theta$ est à ON (1.6) ; la droite $\Lambda\Theta$ est donc incommensurable en longueur avec ON (10.10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre ; les droites $\Lambda\Theta$, ON sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement ; la droite AN est donc un apotome (74.10). Mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc un apotome. Si donc, etc.

PROPOSITION XCIII.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un second apotome, la droite qui peut cette surface est un premier apotome d'une médiale.

Que la surface AB soit comprise sous la rationnelle AR et sous le second apotome AD ; je dis que la droite qui peut la surface AB est un premier apotome d'une médiale.

utrisque $\Lambda\Theta$, ON ; et utraque igitur ipsarum $\Lambda\Theta$, ON rationalis est. Rursus, quoniam medium est $\Delta\Theta$, atque est æquale ipsi $\Lambda\Xi$; medium igitur est et $\Lambda\Xi$. Quoniam igitur quidem $\Lambda\Xi$ mediani est, ipsum verò $\text{N}\Xi$ rationale, incommensurabile igitur est et $\Lambda\Xi$ ipsi $\text{N}\Xi$; ut autem $\Lambda\Xi$ ad $\text{N}\Xi$ ita est $\Lambda\Theta$ ad ON ; incommensurabilis igitur est $\Lambda\Theta$ ipsi ON longitudine. Et sunt ambæ rationales ; ipsæ $\Lambda\Theta$, ON igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles ; apotome igitur est AN . Et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens apotome est.

Si igitur spatium, etc.

PROPOSITIO XCIII.

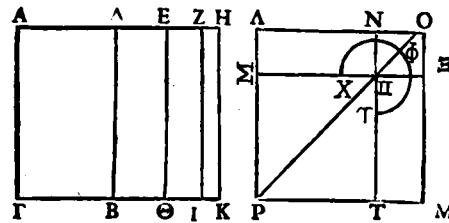
Si spatium continueatur sub rationali et apotome secundâ, recta spatium potens mediæ apotome est prima.

Spatium enim AB continueatur sub rationali AG et apotome secundâ AD ; dico rectam quæ spatium AB potest mediæ apotomen esse primam.

342 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω γάρ τῇ $\Delta\Delta$ προσαρμόζουσα ἡ ΔH · αἱ ἄρα AH , $\text{H}\Delta$ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔH σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG , ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμόζουσας τῆς $\text{H}\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἵππει οὖν ἡ AH τῆς $\text{H}\Delta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἔάν ἄρα τῷ τετάρτῳ

Sit enim ipsi $\Delta\Delta$ congruens ΔH ; ipsæ igitur AH , $\text{H}\Delta$ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et congruens ΔH commensurabilis est expositæ rationali AG , sed tota AH quam congruens $\text{H}\Delta$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; quoniam igitur AH quam $\text{H}\Delta$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine; si



μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Delta$ ἴσον παρὰ τὴν AH παραβλήθῃ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεί³. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E · καὶ τῷ E ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH · σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. Καὶ διὰ τῶν E , Z , H σημείων τῇ AG παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $\text{E}\Theta$,

igitur quartæ parti quadrati ex $\text{H}\Delta$ æquale parallelogrammum ad ipsam ΔH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔH bifariam in E ; et quadrato ex EH æquale parallelogrammum ad ipsam AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ , ZH ; commensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudine. Et per puncta E , Z , H ipsi AG paral-

Que la droite ΔH conviène avec $\Delta\Delta$, les droites AH , $\text{H}\Delta$ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la congruente ΔH sera commensurable avec la rationnelle exposée AG , et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente $\text{H}\Delta$ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec AH (déf. trois. 2. 10), puisque la puissance de AH surpassa la puissance de $\text{H}\Delta$ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec AH , si nous appliquons à AH un parallélogramme qui étant égal à la quatrième partie du quarré de $\text{H}\Delta$, soit défailant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite AH en parties commensurables (18. 10). Coupons ΔH en deux parties égales au point E ; appliquons à AH un parallélogramme qui étant égal au quarré de EH soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous AZ , ZH ; la droite AZ sera commensurable en longueur avec ZH . Par les points E , Z , H menons les

ΖΙ, ΗΚ. Καὶ ἐπὶ σύμμετρός ἐστι ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει⁵· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρός τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ρητὴ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρός τῇ ΑΓ μήκει· ἑκτέρων ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μίσην ἐστί. Πάλιν, ἐπὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστιν. Αλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρός τῇ ΑΓ μήκει⁶· ἑκτέρων ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ρητόν ἐστι. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφ' ἑαυτοῦ τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ τῶν ΑΟΜ⁷· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Εστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μίση ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις⁸, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ἄρα⁹

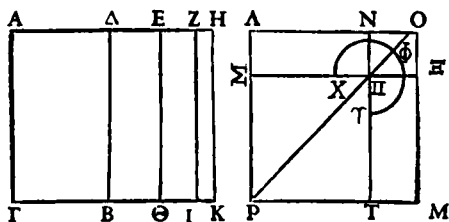
lelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine; et ΑΗ igitur utrique ipsarum ΑΖ, ΖΗ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem ΑΗ et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; et utraque igitur ipsarum ΑΖ, ΖΗ rationalis est, et incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΑΙ, ΖΚ medium est Rursus, quoniam commensurabilis est ΔΕ ipsi ΕΗ, et ΔΗ igitur utrique ipsarum ΔΕ, ΕΗ commensurabilis est. Sed ΔΗ commensurabilis est ipsi ΑΓ longitudine; rationalis igitur est et utraque ipsarum ΔΕ, ΕΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; utrumque igitur ipsorum ΔΘ, ΕΚ rationale est. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, circa eundem angulum ΑΟΜ, cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur ΑΙ, ΖΚ media sunt, et commensurabilia inter se, et sunt æqualia quadratis ex ΑΟ, ΟΝ; et qua-

droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque ΑΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΑΗ sera aussi commensurable en longueur avec chacune des droites ΑΖ, ΖΗ (16. 10). Mais ΑΗ est rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΑΖ, ΖΗ est donc rationnelle et incommensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ sera par conséquent médial (22. 10). De plus, puisque ΔΕ est commensurable avec ΕΗ, la droite ΔΗ sera commensurable avec chacune des droites ΔΕ, ΕΗ. Mais la droite ΔΗ est commensurable en longueur avec ΑΓ; chacune des droites ΔΕ, ΕΗ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΑΓ; chacun des parallélogrammes ΔΘ, ΕΚ est donc rationnel. Faisons le carré ΑΜ égal au parallélogramme ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ un carré ΝΞ égal au parallélogramme ΖΚ, ce carré étant dans le même angle que ΑΜ; savoir, dans l'angle ΑΟΜ; les carrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ sont médiaux, et commensurables entre eux, et qu'ils sont égaux aux carrés des droites ΑΟ, ΟΝ, les carrés des droites ΑΟ, ΟΝ

344 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μία ἐστὶ καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μίσαι ἐστί.
 Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπὶ
 γάρ¹⁰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
 τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως
 ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν
 ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ. Ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς
 τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ¹¹ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα
 ΑΙ, ΖΚ μίσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ

drata ex ΛΟ, ΟΝ igitur mediæ sunt; et ΛΟ,
 ΟΝ igitur mediæ sunt. Dico et potentiâ solûm
 commensurabiles. Quoniam enim rectangulum
 sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est
 igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ; sed ut quidem
 ΑΖ ad ΕΗ ita ΑΙ ad ΕΚ. Ut autem ΕΗ ad
 ΖΗ, ita est ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ
 medium proportionale est ΕΚ. Est autem et



τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μίσον ἀνάλογον τὸ
 ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὰ δὲ ΖΚ
 τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ.
 Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ¹² τὸ ΔΘ, τῷ
 δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον
 ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπὶ οὖν
 ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΜ, ΝΞ, ὥν τὸ
 ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ·
 λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι

quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale
 ΜΝ, atque est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ, ipsum
 verò ΖΚ ipsi ΝΞ; et ΜΝ igitur æquale est ipsi
 ΕΚ. Sed ipsi quidem ΕΚ æquale est ΔΘ, ipsi
 verò ΜΝ æquale ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale
 est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ. Quoniam igitur
 totum ΑΚ æquale est quadratis ΑΜ, ΝΞ, quo-
 rum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ, et ipsi ΝΞ;
 reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est

seront médiaux ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales. Je dis que ces droites
 sont commensurables en puissance seulement. Car puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ
 est égal au carré de ΕΗ, la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais
 ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ ; le parallé-
 logramme ΕΚ est donc moyen proportionel entre les parallélogrammes ΑΙ, ΖΚ.
 Mais ΜΝ est aussi moyen proportionnel entre ΑΜ et ΝΞ (55. 10), et ΑΙ est égal
 à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ ; le parallélogramme ΜΝ est donc égal à ΕΚ. Mais ΔΘ est
 égal à ΕΚ (37. 1), et ΛΞ égal à ΜΝ (43. 1), le parallélogramme entier ΔΚ est
 donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Et puisque le parallélo-
 gramme ΑΚ tout entier est égal à la somme des carrés ΑΜ, ΝΞ, et que la partie
 ΔΚ est égale au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ, le parallélogramme restant

τῆ¹³ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ¹⁴ ἴσον ἔστι τῇ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ¹⁵ ΑΒ χωρίον. Λέγω δὴ¹⁶ ὅτι ἡ ΑΝ μείσς¹⁷ ἀποτομὴ ἔστι πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῇ ΜΝ, τουτίστι¹⁸ τῇ ΑΞ· ῥητόν ἄρα ἔστι¹⁹ τὸ ΑΞ, τουτίστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ. Μείσς δὲ ἰδίχθῃ τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ τῇ ΝΞ· ὡς δὴ²⁰ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἔστιν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΑΟ, ΟΝ μείσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητόν περιέχουσαι· ἡ ΑΝ ἄρα μείσς ἀποτομὴ ἔστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυνάμει μείσς ἀποτομὴ ἔστι πρώτη. Ὅπερ ἴδι διζῆται.

quadrato ex AN; quadratum igitur ex AN æquale est spatio AB; ergo AN potest spatium AB. Dico et AN mediæ apotomen esse primam. Quoniam enim rationale est EK, atque est æquale ipsi MN, hoc est ipsi AX; rationale igitur est AX, hoc est rectangulum sub AO, ON. Medium autem ostensum est NX; incommensurable igitur est AX ipsi NX; ut verè AX ad NX ita est AO ad ON; ipsæ AO, ON igitur incommensurabiles sunt longitudine; ipsæ igitur AO, ON mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, rationale continentes; ergo AN mediæ apotome est prima, et potest spatium AB; recta igitur spatium AB potens mediæ apotome est prima. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48.

PROPOSITIO XCIV.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυνάμει μείσς ἀποτομὴ ἔστι δευτέρα.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome tertiâ, recta spatium potens mediæ apotome est secunda.

AB sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de AN; le carré de AN est donc égal à la surface AB; la droite AN peut donc la surface AB. Or, je dis que AN est un premier apotome d'une médiale. Car, puisque le parallélogramme EK est rationnel et égal à MN, c'est-à-dire à AX, le parallélogramme AX, c'est-à-dire le rectangle sous AO, ON, sera rationnel. Mais on a démontré que NX est médial; le parallélogramme AX est donc incommensurable avec NX; mais AX est à NX comme AO est à ON (1.6); les droites AO, ON sont donc incommensurables en longueur; les droites AO, ON sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface rationnelle; la droite AN est donc un premier apotome d'une médiale (75. 10), et elle peut la surface AB; la droite qui peut la surface AB est donc un premier apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCIV.

Si une surface est comprise sous une rationnelle et un troisième apotome, la droite qui peut cette surface est un second apotome d'une médiale.

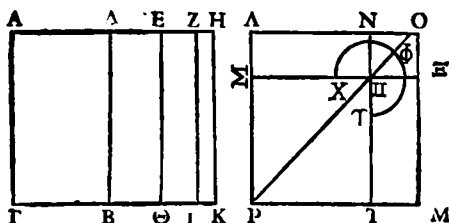
346 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μίσης ἀποτομῆς ἴστί δευτέρα.

Εἴτω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδέτερά τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζον δύναται

Spatium enim AB contineatur sub rationali AB et apotome tertiâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, mediæ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AD congruens DH; ipsæ AH, HD igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et neutra ipsarum AH, HD commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG, tota autem AH quam congruens DH plus



τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἴαν ἄρα τῇ τετάρτῃ μίρει τοῦτ' ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελῶ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῶ

potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Quoniam igitur AH quam DH plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex DH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes commensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur DH bifariam in E, et quadrato ex EH æquale

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un troisième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est un second apotome d'une médiale.

Car que DH convienne avec AD; les droites AH, HD seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune des droites AH, HD ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière AH surpassera la puissance de la congruente DH du carré d'une droite commensurable avec la droite entière AH (déf. trois. 3. 10). Et puisque la puissance de AH surpasse la puissance de DH du carré d'une droite commensurable avec AH, si nous appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de DH, soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera AH en parties commensurables (18. 10). Coupons DH en deux parties égales au point E, et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant

ἰλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH . Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H σημείων τῇ AG παράλληλοι αἱ EO, ZI, HK · σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ AZ, ZH · σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῇ ZK . Καὶ ἵπὲρ αἱ AZ, ZH σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ AH ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν AZ, ZH σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ AH καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH ρητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν AI, ZK μέσον ἐστὶ. Πάλιν, ἵπὲρ σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ EH μήκει, καὶ ἡ $ΔH$ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν $ΔE, EH$ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ρητὴ δὲ ἡ $ΔH$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν $ΔE, EH$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ AG μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΔΘ, EK$ μέσον ἐστὶ. Καὶ ἵπὲρ αἱ $AH, HΔ$ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ AH τῇ $ΔH$. Ἀλλὰ ἡ μὲν AH τῇ AZ σύμμετρός ἐστι μήκει,

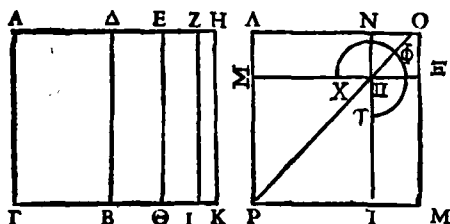
ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ, ZH . Et ducantur per puncta E, Z, H ipsi AG parallelæ EO, ZI, HK ; commensurabiles igitur sunt AZ, ZH ; commensurable igitur et AI ipsi ZK . Et quoniam AZ, ZH commensurabiles sunt longitudine, et AH igitur utrique ipsarum AZ, ZH commensurabilis est longitudine. Rationalis autem AH et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utraque igitur ipsarum AZ, ZH rationalis est et incommensurabilis ipsi AG longitudine; et utrumque igitur ipsorum AI, ZK medium est. Rursus, quoniam commensurabilis est $ΔE$ ipsi EH longitudine, et $ΔH$ igitur utrique ipsarum $ΔE, EH$ commensurabilis est longitudine. Rationalis autem $ΔH$ et incommensurabilis ipsi AG longitudine; rationalis igitur et utraque ipsarum $ΔE, EH$, et incommensurabilis ipsi AG longitudine; utrumque igitur ipsorum $ΔΘ, EK$ medium est. Et quoniam $AH, HΔ$ potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est longitudine ipsa AH ipsi $ΔH$. Sed quidem AH ipsi AZ commen-

égal au carré de EH , soit défailant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous AZ, ZH . Par les points E, Z, H menons les droites EO, ZI, HK parallèles à AG ; les droites AZ, ZH seront commensurables; le parallélogramme AI sera donc commensurable avec ZK . Et puisque les droites AZ, ZH sont commensurables en longueur, la droite AH sera commensurable en longueur avec chacune des droites AZ, ZH (16. 10). Mais AH est rationelle et incommensurable en longueur avec AG ; chacune des droites AZ, ZH est donc rationelle et incommensurable en longueur avec AG ; chacun des parallélogrammes AI, ZK est donc médial (22. 10). De plus, puisque $ΔE$ est commensurable en longueur avec EH ; la droite $ΔH$ sera commensurable en longueur avec chacune des droites $ΔE, EH$. Mais $ΔH$ est rationelle et incommensurable en longueur avec AG ; chacune des droites $ΔE, EH$ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec AG ; chacun des parallélogrammes $ΔΘ, EK$ est donc médial (22. 10). Et puisque les droites $AH, HΔ$ sont commensurables en puissance seulement, la droite AH sera incommensurable en longueur avec $ΔH$. Mais AH est commensurable en longueur

348 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

η δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ³. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρέσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ ΑΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ.

surabilis est longitudine, ipsa verò ΔΗ ipsi ΗΕ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΕΗ longitudine. Ut autem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ; incommensurable igitur est ΑΙ ipsi ΕΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, eundem angulum habens cum ipso ΑΜ; ergo circa eamdem dia-



Εστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ⁵. τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ

metrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ æquale est quadrato ex ΕΗ, est igitur ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. Sed ut quidem ΑΖ ad ΕΗ ita est ΑΙ ad ΕΚ, ut verò ΕΗ ad ΖΗ ita est ΕΚ ad ΖΚ; et ut igitur ΑΙ ad ΕΚ ita ΕΚ ad ΖΚ; ipsorum igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. Est autem et quadratorum ΑΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, et est æquale quidem ΑΙ ipsi ΑΜ,

avec ΑΖ, et ΔΗ avec ΗΕ; la droite ΑΖ est donc incommensurable en longueur avec ΕΗ (13. 10). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme le parallélogramme ΑΙ est au parallélogramme ΕΚ (1. 6); le parallélogramme ΑΙ est donc incommensurable avec le parallélogramme ΕΚ. Faisons le quarré ΑΜ égal à ΑΙ (14. 2), et retranchons de ΑΜ le quarré ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant dans le même angle que ΑΜ, les quarrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit ΟΡ, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ est égal au quarré de ΕΗ; la droite ΑΖ sera à ΕΗ comme ΕΗ est à ΖΗ (17. 6). Mais ΑΖ est à ΕΗ comme ΑΙ est à ΕΚ (1. 6), et ΕΗ est à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΑΙ est donc à ΕΚ comme ΕΚ est à ΖΚ; le parallélogramme ΕΚ est donc moyen proportionnel entre ΑΙ et ΖΚ. Puisque ΜΝ est moyen proportionnel entre les quarrés ΑΜ, ΝΞ, que le parallélogramme ΑΙ est égal

ΖΚ τῇ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῇ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῇ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον ἐστὶ^δ τῇ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῇ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῇ ΝΞ· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΔΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῇ ΣΤ, τουτέστι τῇ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. Λίγω ὅτι ἡ ΑΝ μίσης ἀποτομή ἐστὶ διυτέρα. Ἐπεὶ γὰρ μίσα εἰδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μίσην ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μίσην ἄρα ἑκάτερα τῶν ΛΟ, ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῇ ΖΚ^γ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῇ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ ΑΙ τῇ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΜ τῇ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῇ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λίγω δὲ ὅτι καὶ μίσην περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ μίσην εἰδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῇ ὑπὸ τῶν

ipsum verò ΖΚ ipsi ΝΞ, et ΕΚ igitur æquale est ipsi ΜΝ. Sed quidem ΜΝ æquale est ipsi ΛΞ, ipsum verò ΕΚ æquale est ipsi ΔΘ; et totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi ΝΞ; est autem et ΑΚ æquale ipsis ΔΜ, ΝΞ; reliquum igitur ΑΒ æquale est ipsi ΣΤ, hoc est ex ΑΝ quadrato; ergo ΑΝ potest spatium ΑΒ. Dico ΑΝ mediæ apotomen esse secundam. Quoniam enim media ostensa sunt ΑΙ, ΖΚ, et sunt æqualia quadratis ex ΛΟ, ΟΝ; medium igitur et utrumque ex ΛΟ, ΟΝ quadratorum; media igitur utraque ipsarum ΛΟ, ΟΝ. Et quoniam commensurable est ΑΙ ipsi ΖΚ, commensurable igitur et ex ΛΟ quadratum quadrato ex ΟΝ. Rursus, quoniam incommensurable demonstratum est ΑΙ ipsi ΕΚ, incommensurable igitur est et ΔΜ ipsi ΜΝ, hoc est quadratum ex ΛΟ rectangulo sub ΛΟ, ΟΝ; quare et ΛΟ incommensurabilis est longitudine ipsi ΟΝ; ipsæ ΛΟ, ΟΝ igitur mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles. Dico et medium eas continere. Quoniam enim medium ostensum est ΕΚ, atque est æquale rectangulo sub ΛΟ, ΟΝ;

à ΑΜ, et ΖΚ égal à ΝΞ, le parallélogramme ΕΚ sera égal à ΜΝ. Mais ΜΝ est égal à ΛΞ (43. 1), et ΕΚ égal à ΔΘ (37. 1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec ΝΞ. Mais ΑΚ est égal à la somme des quarrés ΑΜ, ΝΞ; le parallélogramme restant ΑΒ est donc égal à ΣΤ, c'est-à-dire au quarré de ΑΝ; la droite ΑΝ peut donc la surface ΑΒ. Je dis que ΑΝ est un second apotome d'une médiale. Car puisqu'on a démontré que les surfaces ΑΙ, ΖΚ sont médiales, et qu'elles sont égales aux quarrés des droites ΛΟ, ΟΝ, chacun des quarrés des droites ΛΟ, ΟΝ sera médial; chacune des droites ΛΟ, ΟΝ est donc médiale. Et puisque ΑΙ est commensurable avec ΖΚ, le quarré de ΛΟ sera commensurable avec le quarré de ΟΝ. De plus, puisqu'on a démontré que ΑΙ est incommensurable avec ΕΚ, le quarré ΑΜ sera incommensurable avec ΜΝ, c'est-à-dire le quarré de ΛΟ avec le rectangle sous ΛΟ, ΟΝ; la droite ΛΟ est donc incommensurable en longueur avec ΟΝ; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement. Je dis que ces droites comprennent une surface médiale. Car puisqu'on a démontré que ΕΚ est médial, et qu'il est égal au rectangle sous ΛΟ, ΟΝ, le rectangle sous ΛΟ, ΟΝ

350 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΛΟ, ΟΝ⁸ μίσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ⁹ ὥστε αἱ ΛΟ, ΟΝ μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μίσον περιέχουσιν· ἡ ΑΝ ἄρα μίσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον¹⁰· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μίσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα. Ὅπρ' ἴδι διίξαι.

medium igitur est et rectangulum sub ΛΟ, ΟΝ; quare ΛΟ, ΟΝ mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium continentes; ergo ΑΝ mediæ apotome est secunda, et potest spatium ΑΒ; recta igitur spatium ΑΒ potens mediæ apotome est secunda. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 41.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τιτάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἑλάσσων ἐστὶ.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τιτάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἑλάσσων ἐστίν.

Εστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ

PROPOSITIO XCV.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ, recta spatium potens minor est.

Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ et apotome quartâ ΑΔ; dico rectam, quæ spatium ΑΒ potest, minorem esse.

Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, et ΑΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quo-

sera médial; les droites ΛΟ, ΟΝ sont donc des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprennent une surface médiale; la droite ΑΝ est donc un second apotome d'une médiale (76. 10), et elle peut la surface ΑΒ; la droite qui peut la surface ΑΒ est donc un second apotome d'une médiale. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCV.

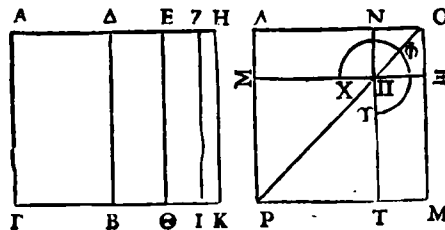
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure.

Que la surface ΑΒ soit comprise sous une rationnelle ΑΓ et sous un quatrième apotome ΑΔ; je dis que la droite qui peut la surface ΑΒ est une mineure.

Car que ΔΗ convienne à ΑΔ, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΑΗ sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΑΓ, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΗΔ du carré d'une droite incommensurable en longueur

τῆς ΗΔ μῖζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου
ἑαυτῇ μήκει· ἰὰν ἄρα τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ
ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ
ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν
διαιεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε,
καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παρα-
βελήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω
τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἰστί

niam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato
ex rectā sibi incommensurabili longitudine; si
igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad
ΑΗ applicetur deficiens figurā quadratā, in
partes incommensurabiles ipsam dividet. Se-
cetur igitur ΔΗ bifariam in Ε, et quadrato ex
ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurā
quadratā, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ;



μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ³. Ηχθωσαν οὖν διὰ τῶν
Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ,
ΖΙ, ΗΚ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἰστί ἡ ΑΗ, καὶ σύμ-
μετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἰστί ὅλον τὸ
ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἰστί ἡ ΔΗ τῇ
ΑΓ μήκει, καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον
ἄρα ἰστί τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἰστί

incommensurabilis igitur est longitudine ipsa ΑΖ
ipsi ΖΗ. Ducantur igitur per puncta Ε, Ζ, Η
parallelae ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ ipsis ΑΓ, ΒΔ: Quoniam
igitur rationalis est ΑΗ, et commensurabilis
ipsi ΑΓ longitudine; ῥητὸν igitur est totum
ΑΚ. Rursus, quoniam incommensurabilis est ΔΗ
ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales;
medium igitur est ΔΚ. Rursus, quoniam incom-

avec ΑΗ (déf. trois. 4. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpasse la puissance de ΗΔ du
quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si nous appliquons à
ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΔΗ, soit
défaillant d'une figure quarrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties
incommensurables (18. 10). Coupons ΔΗ en deux parties égales en Ε; appliquons à
ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au quarré de ΕΗ, soit défaillant d'une figure
quarrée; que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommen-
surable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ paral-
lèles aux droites ΑΓ, ΒΔ. Puisque ΑΗ est rationnelle et commensurable en longueur avec
ΑΓ, le parallélogramme entier ΑΚ sera rationnel (20. 10). De plus, puisque ΔΗ est in-
commensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationnelles l'une
et l'autre, le parallélogramme ΔΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque ΑΖ est

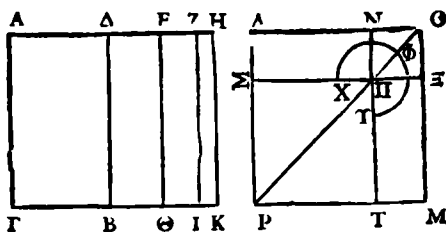
ἡ AZ τῇ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῇ ZK. Συνιστάται οὖν τῇ μὲν AI ἴσον τετραγώνον τὸ AM, τῇ δὲ ZK ἴσον ἀφηρέσθαι τὸ NΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῇ AM, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ⁴. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἴστι⁵ τὰ AM, NΞ τετράγωνα. Εἰσὶν αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθαι τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἴστι τῇ ἀπὸ τῆς EH, ἀνάλογον ἄρα ἴστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τῇ⁶ EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν HZ. Αλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἴστι τὸ AI πρὸς τὸ EK, ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν ZH οὕτως ἴστι⁷ τὸ EK πρὸς τὸ ZK. τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἴστι τὸ EK. Ἐστὶ δὲ καὶ τῶν AM, NΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῇ AM, τὸ δὲ ZK τῇ NΞ· καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἴστι τῇ MN. Αλλὰ τῇ⁸ μὲν EK ἴσον ἴστι τὸ⁹ ΔΘ, τὸ δὲ MN ἴσον ἴστι τῇ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἴστι τῇ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῇ NΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἴστι τοῖς AM, NΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἴστι τῇ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῇ NΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἴστι τῇ ΣΤ,

mensurabilis est AZ ipsi ZH longitudine, incommensurable igitur et AI ipsi ZK. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum AM, ipsi verò ZK æquale auferatur NΞ, eundem habens angulum ΛΟΜ cum ipso AM; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata AM, NΞ. Sit ipsorum diameter OP, et describatur figura. Quoniam igitur rectangulum sub AZ, ZH æquale est quadrato ex EH, proportionale igitur est ut AZ ad EH ita EH ad HZ. Sed ut quidem AZ ad EH ita est AI ad EK, ut verò EH ad ZH ita est EK ad ZK; ipsorum igitur AI, ZK medium proportionale est EK. Est autem et quadratorum AM, NΞ medium proportionale MN, et est æquale quidem AI ipsi AM, et ZK ipsi NΞ; et EK igitur æquale est ipsi MN. Sed ipsi quidem EK æquale est ΔΘ, et MN æquale est ipsi ΛΞ; totum igitur ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et ipsi NΞ. Quoniam igitur totum ΑΚ æquale est quadratis AM, NΞ, quorum ΔΚ æquale est gnomoni ΥΦΧ et quadrato NΞ; reliquum igitur AB æquale est ipsi ΣΤ,

incommensurable en longueur avec ZH, le parallélogramme AI sera incommensurable avec ZK (1.6). Faisons le carré AM égal à AI, et retranchons de AM un carré NΞ égal à ZK, ce carré étant autour d'un même angle AOM que le carré AM; les carrés AM, NΞ seront autour de la même diagonale (26.6). Que OP soit leur diagonale, et décrivons la figure. Puisque le rectangle sous AZ, ZH est égal au carré de EH, la droite AZ sera à EH comme EH est à HZ (17.6). Mais AZ est à EH comme AI est à EK, et EH est à ZH comme EK est à ZK (1.6); le parallélogramme EK est donc moyen proportionnel entre AI et ZK. Et puisque MN est moyen proportionnel entre les carrés AM, NΞ, que le parallélogramme AI est égal à AM, et ZK égal à NΞ, le parallélogramme EK sera égal à MN. Mais ΔΘ est égal à EK (37.1), et MN égal à ΛΞ (43.1); le parallélogramme entier ΔΚ est donc égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec NΞ. Et puisque le parallélogramme entier ΑΚ est égal à la somme des carrés AM, NΞ, et que ΔΚ est égal au gnomon ΥΦΧ, conjointement avec le carré NΞ, le parallélogramme restant AB sera égal à ΣΤ, c'est-à-dire au carré de

τουτίστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛN τετραγώνου· ἡ ΛN ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον. Λέγω δὴ¹⁰ ὅτι ἡ ΛN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητὸν ἐστὶ τὸ AK , καὶ ἴστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO , ON τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO , ON ῥητὸν ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔK μέσον ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ ΔK τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON · τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν

hoc est ex ΛN quadrato; ergo ΛN potest spatium AB . Dico et ΛN irrationalem esse quæ appellatur minor. Quoniam enim rationale est AK , et est æquale quadratis ex ΛO , ON ; compositum igitur ex quadratis ipsarum ΛO , ON rationale est. Rursus, quoniam ΔK medium est, et est æquale ΔK rectangulo bis sub ΛO , ON ; rectau-



ΛO , ON μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον εἰδείχθη τὸ AI τῷ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς ON τετραγώνου¹¹. αἱ ΛO , ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΛN ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμὴν ἐλάσσων ἐστίν. Ὅπρι εἰδεῖ διῆξαι.

tangulum igitur bis sub ΛO , ON medium est. Et quoniam incommensurable demonstratum est AI ipsi ZK , incommensurable igitur et ex ΛO quadratum quadrato ex ON ; ipsæ ΛO , ON igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò bis sub ipsis medium; ergo ΛN irrationalis est, quæ appellatur minor, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens minor est. Quod oportebat ostendere.

ΛN ; la droite ΛN peut donc la surface AB . Or, je dis que ΛN est l'irrationnelle qu'on nomme mineure. Car, puisque le parallélogramme AK est rationel, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites ΛO , ON , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera rationelle. De plus, puisque ΔK est médial, et qu'il est égal au double rectangle compris sous ΛO , ON , le double rectangle sous ΛO , ON sera médial. Et puisque on a démontré que AI est incommensurable avec ZK , le quarré de ΛO sera incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΛO , ON sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant rationelle la somme de leurs quarrés, et médial le double rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite ΛN est donc l'irrationnelle qu'on appelle mineure (77. 10); mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 45'.

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ μετὰ τοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AD· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εἰσὶν γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμόζουσας τῆς ΔΗ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεί. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλειπὸν

PROPOSITIO XCVI.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens est quæ cum rationali medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AG et apotome quintâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum rationali medium totum facit.

Sit enim ipsi AA congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et congruens ΔΗ commensurabilis est longitudine expositæ rationali AG, et tota ΑΗ quam congruens ΔΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili; si igitur quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad ipsam ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur igitur ΔΗ bifariam in puncto Ε, et quadrato ex ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ qua-

PROPOSITION XCVI.

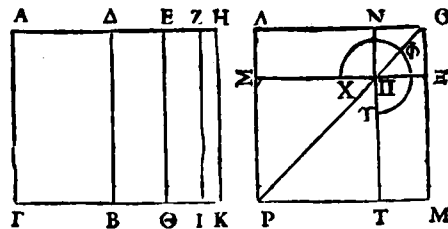
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un cinquième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car, que la droite ΔΗ convienne avec AD; les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement, la congruente ΔΗ sera incommensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΔΗ du carré d'une droite incommensurable avec la droite entière ΑΗ (déf. trois. 5. 10); si donc nous appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΔΗ, soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔΗ en deux parties égales en Ε, et appliquons à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal au carré de ΕΗ, soit

εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἴστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ'. Καὶ ἐπὶ ἀσύμμετρος ἴστιν ἡ ΑΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ ἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· μίσον ἄρα ἴστί τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ρητή ἴστιν ἡ ΔΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ρητόν ἐστι

dratâ, et sit rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ; incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. Et ducantur per Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. Et quoniam incommensurabilis est ΑΗ ipsi ΑΓ longitudine, et sunt ambæ rationales; medium igitur est ΑΚ. Rursus, quoniam rationalis est ΔΗ, et commensurabilis ipsi ΑΓ longi-



τὸ ΑΚ. Συνιστάτω οὖν τῇ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῇ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῆρῆσθαι περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῇ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ². περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἴστι τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθαι τὸ σχῆμα. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον³. Λίγω ὅτι ἡ ΑΝ ἡ μετὰ ρητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἴστιν. Ἐπεὶ γὰρ μίσον

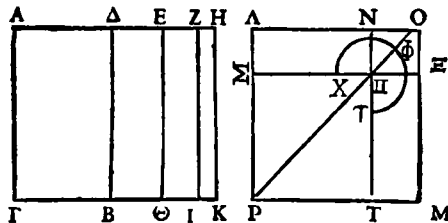
tudine, rationale est ΑΚ. Constituatur igitur ipsi quidem ΑΙ æquale quadratum ΑΜ, ipsi verò ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, eundem habens angulum ΑΟΜ cum ipso ΑΜ; ergo circa eandem diametrum sunt quadrata ΑΜ, ΝΞ. Sit ipsorum diameter ΟΡ, et describatur figura. Similiter utique demonstrabimus rectam ΑΝ posse spatium ΑΒ. Dico ΑΝ esse eam quæ cum rationali medium totum facit. Quoniam

défaillant d'une figure quarrée, et que ce soit le rectangle sous ΑΖ, ΖΗ; la droite ΑΖ sera incommensurable en longueur avec ΖΗ. Par les points Ε, Ζ, Η menons les droites ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ parallèles à ΑΓ. Puisque la droite ΑΗ est incommensurable en longueur avec ΑΓ, et que ces droites sont rationelles l'une et l'autre, le parallélogramme ΑΚ sera médial (22. 10). De plus, puisque la droite ΔΗ est rationelle, et qu'elle est incommensurable en longueur avec ΑΓ, la surface ΑΚ sera rationelle (20. 10). Faisons le quarré ΑΜ égal à ΑΙ, et retranchons de ΑΜ un quarré ΝΞ égal à ΖΚ, ce quarré étant autour du même angle ΑΟΜ que ΑΜ; les quarrés ΑΜ, ΝΞ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diamètre soit ΟΡ, et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière que la droite ΑΝ peut la surface ΑΒ. Or, je dis que ΑΝ fait avec une surface rationelle un tout médial. Car, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΑΚ est médial, et

356 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

εἰδείχθη τὸ $\Delta\mathbf{K}$, καὶ ἴσιν τοῖς ἀπὸ τῶν $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ · τὸ ἄρα συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ μίσην ἐστὶ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ $\Delta\mathbf{K}$, καὶ ἴσιν τῷ δις ὑπὸ τῶν $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ · καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ ῥητόν ἐστι⁴. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ $\mathbf{AI}$ τῷ $\mathbf{ZK}$, ἀσύμ-

enim medium ostensum est $\Delta\mathbf{K}$, et est æquale quadratis ex $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$; compositum igitur ex quadratis ipsarum $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ medium est. Rursus, quoniam rationale est $\Delta\mathbf{K}$, et est æquale rectangulo bis sub $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$; et rectangulum bis igitur sub $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ rationale est. Et quoniam incommensurable est $\mathbf{AI}$ ipsi $\mathbf{ZK}$, incom-



μετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Lambda\mathbf{O}$ τῷ ἀπὸ τῆς $\mathbf{ON}$ · αἱ $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσην· τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄρα ἢ $\Lambda\mathbf{N}$ ἀλογός ἐστιν, ἢ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μίσην⁶ τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ $\mathbf{AB}$ χωρίον· ἢ τὸ $\mathbf{AB}$ ἄρα⁷ χωρίον δυναμένη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

mensurable igitur est et ex $\Lambda\mathbf{O}$ quadratum quadrato ex $\mathbf{ON}$; ipsæ $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium; rectangulum verò bis sub ipsis rationale; reliqua igitur $\Lambda\mathbf{N}$ irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum faciens, et potest spatium $\mathbf{AB}$; recta igitur spatium $\mathbf{AB}$ potens est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

puisque ce parallélogramme est égal à la somme des carrés des droites $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$, la somme des carrés des droites $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ sera médiale. De plus, puisque le parallélogramme $\Delta\mathbf{K}$ est rationel, et qu'il est égal au double rectangle sous $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$, le double rectangle sous $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ sera rationel. Mais le parallélogramme $\mathbf{AI}$ est incommensurable avec $\mathbf{ZK}$; le carré de $\Lambda\mathbf{O}$ est donc incommensurable avec le carré de $\mathbf{ON}$; les droites $\Lambda\mathbf{O}$, $\mathbf{ON}$ sont donc incommensurables en puissance, la somme des carrés de ces droites étant médiale, et le double rectangle sous ces mêmes droites étant rationel; la droite restante $\Lambda\mathbf{N}$ est donc l'irrationnelle qui est dite pouvant avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Mais cette droite peut la surface $\mathbf{AB}$; la droite qui peut la surface $\mathbf{AB}$ est donc celle qui fait avec une surface rationelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 17.

Εάν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστι.

Χωρίον γάρ τὸ AB περιεχίσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς ἑκτῆς τῆς AD· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Εστω γὰρ τῇ AD προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδὲτέρα αὐτῶν· σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ AG μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἰαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἰαυτῇ μήκει· ἰὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελίῃ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ

PROPOSITIO XCVII.

Si spatium contineatur sub rationali et apotome sextâ, recta spatium potens est quæ cum medio medium totum facit.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AG et apotome sextâ AD; dico rectam, quæ spatium AB potest, esse eam quæ cum medio medium totum facit.

Sit enim ipsi AD congruens ΔΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles, et neutra ipsarum commensurabilis est expositæ rationali AG longitudine, et tota ΑΗ quam congruens ΔΗ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine. Quoniam igitur ΑΗ quam ΗΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine; si igitur quartæ parti ex ΔΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figurâ quadratâ, in partes incommensurabiles ipsam dividet. Secetur

PROPOSITION XCVII.

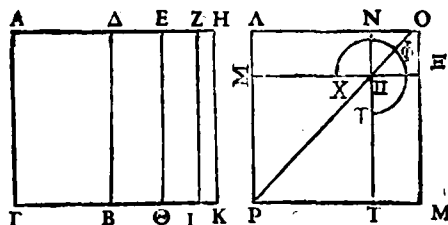
Si une surface est comprise sous une rationnelle et un sixième apotome, la droite qui peut cette surface est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que la surface AB soit comprise sous une rationnelle AG et un sixième apotome AD; je dis que la droite qui peut la surface AB est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Que ΔΗ convienne avec AD, les droites ΑΗ, ΗΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement; aucune de ces droites ne sera commensurable en longueur avec la rationnelle exposée AG, et la puissance de la droite entière ΑΗ surpassera la puissance de la congruente ΔΗ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ (déf. trois. 6. 10). Puisque la puissance de ΑΗ surpassera la puissance de ΗΔ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΑΗ; si on applique à ΑΗ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΔΗ, soit défailant d'une figure carrée, ce parallélogramme divisera la droite ΑΗ en parties incommensurables (19. 10). Coupons la droite ΔΗ en deux parties

τὸ E^3 , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἵστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZH · ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. Ὡς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ZH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ ZK · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AI τῷ ZK . Καὶ ἵπαι αἱ AH , AG ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ AK . Πάλιν, ἵπαι αἱ AG , ΔH ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ

igitur ΔH bifariam in E , et quadrato ex EH æquale ad AH applicetur deficiens figurâ quadratâ, et sit rectangulum sub AZ , ZH ; incommensurabilis igitur est AZ ipsi ZH longitudine. Ut autem AZ ad ZH ita est AI ad ZK ; incommensurable igitur est AI ipsi ZK . Et quoniam AH , AG rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles, medium est AK . Rursus, quoniam AG , ΔH rationales sunt et incommensu-



καὶ τὸ ΔK^4 . Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HA δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ HA μήκει. Ὡς δὲ ἡ AH πρὸς τὴν HA οὕτως ἐστὶ τὸ AK πρὸς τὸ $K\Delta$ · ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AK τῷ $K\Delta$. Συνιστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετραγώνον τὸ ΛM , τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφ-

rabiles longitudine, medium est et ΔK . Quoniam igitur AH , HA potentiâ solùm commensurabiles sunt, incommensurabilis igitur est AH ipsi HA longitudine. Ut autem AH ad HA ita est AK ad $K\Delta$; incommensurable igitur est AK ipsi $K\Delta$. Constituatur igitur ipsi quidem AI æquale quadratum ΛM , ipsi verò ZK æquale auferatur NZ ,

égales en E , et appliquons à AH un parallélogramme, qui étant égal au carré de AH , soit défailant d'une figure carrée; que ce soit le rectangle sous AZ , ZH ; la droite AZ sera incommensurable en longueur avec ZH . Mais AZ est à ZH comme AI est à ZK (1. 6); le parallélogramme AI est donc incommensurable avec ZK (10. 10). Et puisque les droites AH , AG sont des rationelles commensurables en puissance seulement, le parallélogramme AK sera médial (22. 10). De plus, puisque les droites AG , ΔH sont rationelles, et incommensurables en longueur, le parallélogramme ΔK sera médial. Puisque les droites AH , HA sont commensurables en puissance seulement, la droite AH sera incommensurable en longueur avec HA . Mais AH est à HA comme AK est à $K\Delta$ (1. 6); le parallélogramme AK est donc incommensurable avec $K\Delta$ (10. 10). Faisons le carré ΛM égal à AI (14. 2), et retranchons de ΛM un carré $N\Xi$ égal à ZK , ce carré

ρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῇ ΛM γωνίᾳ τὸ $\text{N}\Xi^5$.
 περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὰ ΛM , $\text{N}\Xi$
 τετράγωνα. Ἐστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP , καὶ
 καταγράφθω τὸ σχῆμα. Ομοίως δὲ τοῖς ἐπάνω
 δείξομεν ὅτι ἡ ΛN δύναται τὸ AB χωρίον. Λέγω
 ὅτι ἡ ΛN ἢ μετὰ μίσου μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσά
 ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ μίσην ἰδείχθη τὸ ΔK , καὶ ἔστιν
 ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO , ON . τὸ ἄρα συγκεί-
 μινον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO , ON μίσην ἐστί.
 Πάλιν, ἐπεὶ μίσην ἰδείχθη τὸ ΔK , καὶ ἔστιν
 ἴσον τῇ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON . καὶ τὸ δις
 ἄρα⁸ ὑπὸ τῶν ΛO , ON μίσην ἐστί. Καὶ ἐπεὶ
 ἀσύμμετρον ἰδείχθη τὸ ΔK τῇ ΔK , ἀσύμμετρα
 ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛO , ON τετράγωνα
 τῇ δις ὑπὸ τῶν ΛO , ON . Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμε-
 τρον ἐστὶ τὸ AI τῇ ZK , ἀσύμμετρον ἄρα καὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῇ ἀπὸ τῆς ON . αἱ ΛO , ON
 ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε
 συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσην,
 καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μίσην, ἔτι τε τὰ ἀπ'
 αὐτῶν τετραγῶνα ἀσύμμετρα τῇ δις ὑπ' αὐτῶν.

eundem angulum habens cum ipso ΛM ; ergo
 circa eandem diametrum sunt quadrata ΛM ,
 $\text{N}\Xi$. Sit ipsorum diameter OP , et describatur
 figura. Congruenter utique præcedentibus osten-
 demus rectam ΛN posse spatium AB . Dico ΛN esse
 eam quæ cum medio medium totum facit. Quo-
 niam enim medium ostensum est ΔK , atque est
 æquale quadratis ex ΛO , ON ; compositum igitur
 ex quadratis ipsarum ΛO , ON medium est.
 Rursus, quoniam medium ostensum est ΔK , et
 est æquale rectangulo bis sub ΛO , ON ; et rec-
 tangulum bis igitur sub ΛO , ON medium est.
 Et quoniam incommensurable ostensum est ΔK
 ipsi ΔK , incommensurabilia igitur sunt et ex
 ΛO , ON quadrata rectangulo bis sub ΛO , ON .
 Et quoniam incommensurable est AI ipsi ZK ,
 incommensurable igitur et ex ΛO quadratum
 quadrato ex ON ; ipsæ ΛO , ON igitur potentia
 sunt incommensurabiles, facientes et compo-
 situm ex ipsarum quadratis medium, et rectan-
 gulum bis sub ipsis medium, et adhuc ipsarum
 quadrata incommensurabilia rectangulo bis sub

étant autour du même angle que ΛM ; les quarrés ΛM , $\text{N}\Xi$ seront autour de la même diagonale (26. 6). Que leur diagonale soit OP , et décrivons la figure. Nous démontrerons de la même manière qu'auparavant que la droite ΛN peut la surface AB . Je dis que la droite ΛN est celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Car, puisque nous avons démontré que le parallélogramme ΔK est médial, et qu'il est égal à la somme des quarrés des droites ΛO , ON , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera médiale. De plus, puisqu'on a démontré que le parallélogramme ΔK est médial, et puisqu'il est égal au double rectangle sous ΛO , ON , le double rectangle sous ΛO , ON sera médial. Et puisqu'on a démontré que ΔK est incommensurable avec ΔK , la somme des quarrés des droites ΛO , ON sera incommensurable avec le double rectangle sous ΛO , ON . Et puisque AI est incommensurable avec ZK , le quarré de ΛO sera incommensurable avec le quarré de ON ; les droites ΛO , ON sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant médial, et la somme des quarrés de ces droites étant incommensurable avec le

360 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἡ ἄρα ΛN ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ $\text{AB}\Theta$ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπρι ἴδιαι δείξαι.

ipsis; ergo ΛN irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum faciens, et potest spatium AB ; recta igitur spatium AB potens est quæ cum medio medium totum* facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζή.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομὴ ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβλήσθω τὸ ΓE , πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . λέγω ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH . αἱ ἄρα AH , HB ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβλήσθω τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH τὸ $\text{K}\Lambda$. ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ

Quadratum ex apotome ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Sit apotome AB , rationalis autem $\Gamma\Delta$, et quadrato ex AB æquale ad ipsam $\Gamma\Delta$ applicetur ΓE , latitudinem faciens ΓZ ; dico ΓZ apotomen esse primam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB rationales sunt potentiâ solum commensurabiles. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $\Gamma\Delta$ applicetur $\Gamma\Theta$, quadrato autem ex BH ipsum $\text{K}\Lambda$, totum igitur $\Gamma\Lambda$ æquale est qua-

double rectangle sous ces mêmes droites; la droite ΛN est donc l'irrationnelle appelée la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial (79. 10); mais cette droite peut la surface AB ; la droite qui peut la surface AB est donc celle qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XCVIII.

Le carré d'un apotome appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est un premier apotome.

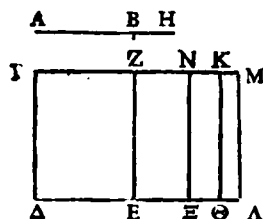
Soit l'apotome AB , et la rationnelle $\Gamma\Delta$; appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme ΓE égal au carré de AB , ce parallélogramme ayant ΓZ pour largeur; je dis que ΓZ est un premier apotome.

Car que BH convienne avec AB , les droites AH , HB seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme $\Gamma\Theta$ égal au carré de AH , et un parallélogramme $\text{K}\Lambda$ égal au carré de BH (45. 1); le parallélogramme entier $\Gamma\Lambda$ sera égal à la somme des carrés

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 361

τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ὡν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ

dratis ex ΑΗ, ΗΒ. Quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΔ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΑΝ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt, atque est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale ΔΜ; rationale igitur



ΔΜ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρατίθεται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΑΖ· μέσον ἄρα τὸ ΑΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπὶ τὰ μὲν

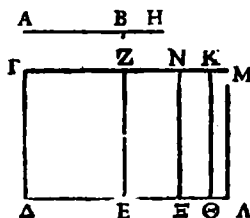
est ΔΜ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Rursus, quoniam medium est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ, et est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΑΖ; medium igitur ΑΖ. Et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata quidem ex ΑΗ,

des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais ΓΕ est égal au carré de ΑΒ; le parallélogramme restant ΖΔ est donc égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΑΝ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sont rationels, et que ΔΜ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΔΜ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). De plus, puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, et que le parallélogramme ΑΖ est égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΑΖ sera médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΖΜ, la droite ΖΜ est donc rationelle et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque

362 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσιον⁵, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ⁶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί· εἰσι δυνάμει μίνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀπο-

HB rationalia sunt, rectangulum verò bis sub AH, HB medium, incommensurabilia igitur quadrata ex AH, HB rectangulo bis sub AH, HB. Et quadratis quidem ex AH, HB æquale est ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB ipsum ΖΛ; incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensura-



τομή ἐστι. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πρώτη. Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσιον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῷ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ⁸. καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μίσιον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἐστὶν

biles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et primam. Quoniam enim quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ; quadrato verò ex ΒΗ æquale ΚΛ, quadrato autem ex ΑΗ, ΗΒ ipsum ΝΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΛ; est

les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sont rationels, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais ΓΛ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et ΖΛ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΛ est donc incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Je dis qu'elle est un premier apotome. Car, puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΒΗ, et que ΝΛ est égal au carré de ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre les parallélogrammes ΓΘ, ΚΛ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ

ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ. Αλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἐστὶν⁹ ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ¹⁰. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι¹¹ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἡ ἀλλοῖον εἶδει τετραγώνῳ τὸ¹² ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐστὶν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

igitur ut $\Gamma\Theta$ ad NA ita NA ad KA . Sed, ut quidem $\Gamma\Theta$ ad NA ita est ΓK ad NM ; ut verò NA ad KA ita est NM ad KM ; ut igitur ΓK ad NM ita est NM ad KM ; rectangulum igitur sub ΓK , KM æquale est quadrato ex MN , hoc est quartæ parti quadrati ex ZM . Et quoniam commensurabile est ex AH quadratum quadrato ex HB , commensurabile est et $\Gamma\Theta$ ipsi KA . Ut autem $\Gamma\Theta$ ad KA ita ΓK ad KM ; commensurabilis igitur est ΓK ipsi KM . Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓM , MZ , et quartæ parti quadrati ex ZM æquale ad ΓM applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub ΓK , KM , et est commensurabilis ΓK ipsi KM ; ergo ΓM quam MZ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est ΓM commensurabilis expositæ rationali $\Gamma\Delta$ longitudine; ergo ΓZ apotome est prima.

Quadratum igitur, etc.

comme NA est à KA . Mais $\Gamma\Theta$ est à NA comme ΓK est à NM , et NA est à KA comme NM est à KM ; la droite ΓK est donc à NM comme NM est à KM ; le rectangle sous ΓK , KM est donc égal au quarré de MN , c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ZM (17. 6). Et puisque le quarré de AH est commensurable avec le quarré de HB , le parallélogramme $\Gamma\Theta$ sera commensurable avec KA . Mais $\Gamma\Theta$ est à KA comme ΓK est à KM ; la droite ΓK est donc commensurable avec KM (10. 10). Et puisque les deux droites ΓM , MZ sont inégales, qu'on a appliqué à ΓM un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ZM , est défailant d'une figure quarrée, que ce parallélogramme est celui qui est compris sous ΓK , KM , et que ΓK est commensurable avec KM , la puissance de ΓM surpassera la puissance de MZ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec ΓM (18. 10). Mais ΓM est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée $\Gamma\Delta$; la droite ΓZ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Le quarré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 48'.

Τὸ ἀπὸ μείσεως ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν διυτίραν.

Ἐστω μείσεως ἀποτομὴ πρώτη ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΕ$, πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΖ$. λέγω ὅτι ἡ $ΓΖ$ ἀποτομὴ ἴστί διυτίρα.

Ἐστω γάρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH αἱ ἄρα AH , HB μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΘ$, πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $ΚΛ$, πλάτος ποιοῦν τὴν $ΚΜ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἴστί τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB μείσεσι οὖσι. μίσην ἄρα καὶ τὸ $ΓΛ$. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παραβεβλήται, πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$. ῥητὴ ἄρα ἴστί ἡ $ΓΜ$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. Καὶ ἐπὶ τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἴστί τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἴστί τῇ

PROPOSITIO XCIX.

Quadratum ex mediâ apotome primâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

Sit mediæ apotome prima AB , rationalis autem $ΓΔ$, et quadrato ex AB æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΕ$, latitudinem faciens $ΓΖ$; dico $ΓΖ$ apotomen esse secundam.

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, rationale continentes. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΘ$, latitudinem faciens $ΓΚ$, quadrato verò ex HB æquale $ΚΛ$, latitudinem faciens $ΚΜ$; totum igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB quæ media sunt; medium igitur et $ΓΛ$. Et ad rationalem $ΓΔ$ applicatur, latitudinem faciens $ΓΜ$; rationalis igitur est $ΓΜ$, et incommensurabilis ipsi $ΓΔ$ longitudine. Et quoniam $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum quadratum ex AB

PROPOSITION XCIX.

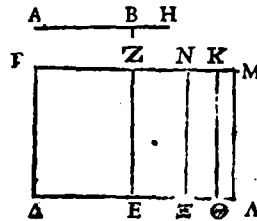
Le carré d'un premier apotome d'une médiale appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second apotome.

Soient un premier apotome d'une médiale AB , et la rationelle $ΓΔ$; appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΕ$, qui étant égal au carré de AB , ait pour largeur la droite $ΓΖ$; je dis que $ΓΖ$ est un second apotome.

Car que BH convienne avec AB , les droites AH , HB seront des médiales, qui étant commensurables en puissance seulement, comprendront une surface rationelle (75. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui étant égal au carré de AH , ait la droite $ΓΚ$ pour largeur; appliquons aussi à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΚΛ$, qui étant égal au carré de HB , ait $ΚΜ$ pour largeur (45. 1); le parallélogramme entier $ΓΛ$ sera égal à la somme des carrés des droites AH , HB , ces carrés étant médiaux; le parallélogramme $ΓΛ$ sera donc médial. Mais il est appliqué à $ΓΔ$, et il a $ΓΜ$ pour largeur; la droite $ΓΜ$ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec $ΓΔ$ (25. 10). Et puisque $ΓΛ$ est égal à la somme des carrés des droites AH , HB , et que

ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΑ. Ρητὸν δὲ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ρητὸν ἄρα τὸ ΖΑ, καὶ παρὰ ρητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΑ μήκει. Ἐπὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΑ, μέσον ἐστὶ· τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ,

æquale est ipsi ΓΕ; reliquum igitur rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ipsi ΖΑ. Rationale autem est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ; rationale igitur ΖΑ, et ad rationalem ΖΕ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Quoniam igitur quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΓΑ, medium est; rectangulum verò bis



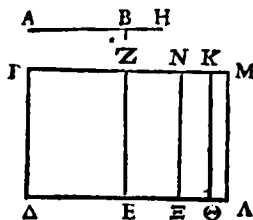
τουτέστι τὸ ΖΑ, ρητὸν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. Τιτμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΑ ἴσον

sub ΑΗ, ΗΒ, hoc est ΖΑ, rationale; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; ergo ΓΖ apotome est. Dico et secundam. Secetur enim ΖΜ bifariam in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΑ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΑ

le carré de AB est égal à ΓΕ, le double rectangle restant compris sous ΑΗ, ΗΒ sera égal à ΖΑ (7. 2). Mais le double rectangle compris sous ΑΗ, ΗΒ est rationel; le parallélogramme ΖΑ est donc rationel; mais il est appliqué à la rationelle ΖΕ, et il a pour largeur ΖΜ; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΑ (21. 10). Et puisque la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire le parallélogramme ΓΑ, est médiale, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, c'est-à-dire ΖΑ, est rationel; le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ. Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Or, je dis que cette droite est un second apotome. Car coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle à ΓΑ; chacun des parallélogrammes ΖΞ,

ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΑ· ἴστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ. ΑΛΛ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἴστιν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἴστιν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἴστιν ἡ ΝΜ πρὸς

æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadratum quidem ex ΑΗ ipsi ΓΘ, rectangulum verò sub ΑΗ, ΗΒ ipsi ΝΑ, quadratum autem ex ΗΒ ipsi ΚΛ; et ipsorum ΓΘ, ΚΛ igitur medium proportionale est ΝΑ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΑ ita ΝΑ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΑ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΑ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum



τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τουτίστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ⁶. Ἐπὶ οὖν δύο εὐθείαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ⁷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον

igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam commensurable est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, commensurable est et ΓΘ ipsi ΚΛ, hoc est ΓΚ ipsi ΚΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti

ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, que le quarré de ΑΗ est égal à ΓΘ, que le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est égal à ΝΑ, et que le quarré de ΗΒ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΝΑ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΑ comme ΝΑ est à ΚΛ. Mais le parallélogramme ΓΘ est à ΝΑ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΑ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et puisque le quarré de ΑΗ est commensurable avec le quarré de ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΛ, c'est-à-dire ΓΚ avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, et que l'on a appliqué à la plus grande ΓΜ un parallélogramme compris sous ΓΚ, ΚΜ, qui étant égal à la quatrième partie du quarré

παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλείπον ἰδίαι τετραγώνῳ τὸ⁸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει⁹ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ.

Τὸ ἀπὸ μίσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἐστω μίση ἀποτομή δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Ἐστω γάρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μίση περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΘ

quadrati ex MZ æquale ad majorem $ΓΜ$ applicatur deficiens figurâ quadratâ rectangulum sub $ΓΚ$, $ΚΜ$, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo $ΓΜ$ quam $ΜΖ$ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili longitudine. Atque est congruens $ΖΜ$ commensurabilis longitudine expositæ rationali $ΓΔ$; ergo $ΓΖ$ apotome est secunda.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO C.

Quadratum ex mediâ apotome secundâ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Sit media apotome secunda $ΑΒ$, rationalis autem $ΓΔ$, et quadrato ex $ΑΒ$ æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΕ$, latitudinem faciens $ΓΖ$; dico $ΓΖ$ apotomen esse tertiam.

Sit enim ipsi $ΑΒ$ congruens $ΒΗ$; ipsæ igitur $ΑΗ$, $ΗΒ$ mediæ sunt potentiâ solum commensurabiles, medium continentes. Et quadrato quidem ex $ΑΗ$ æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΘ$

de MZ , est défaillant d'une figure quarrée, et que ce parallélogramme divise $ΓΜ$ en parties commensurables, la puissance de $ΓΜ$ surpassera la puissance de MZ du quarré d'une droite commensurable en longueur avec $ΓΜ$ (18. 10). Mais la congruente $ΖΜ$ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée $ΓΔ$; la droite $ΓΖ$ est donc un second apotome (déf. trois. 2. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION C.

Le quarré d'un second apotome médial appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome.

Soient un second apotome médial $ΑΒ$, et une rationelle $ΓΔ$; appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΕ$, qui étant égal au quarré de $ΑΒ$, ait pour largeur la droite $ΓΖ$; je dis que $ΓΖ$ est un troisième apotome.

Que $ΒΗ$ convienne avec $ΑΒ$; les droites $ΑΗ$, $ΗΒ$ seront des médiales, qui étant incommensurables en puissance seulement, comprendront une surface médiale (76. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui étant égal au quarré

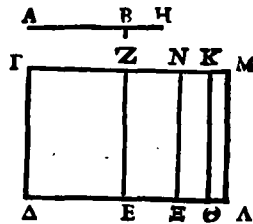
πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβέβλησθαι τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἴσται μίσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μίσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μῆκει. Καὶ ἐπὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημείον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Μίσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μίσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μῆκει. Καὶ ἐπὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα

latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex ΒΗ æquale ad ΚΘ applicetur ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. Et sunt media quadrata ex ΑΗ, ΗΒ; medium igitur et ΓΛ, et ad rationalem ΓΔ applicatur, latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur est ΓΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΛ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΑ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Medium autem rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ; medium igitur est et ΖΛ, et ad rationalem ΕΖ applicatur, latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur et ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles, incommensurabilis igitur est longi-

de ΑΗ, ait pour largeur la droite ΓΚ; appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au carré de ΒΗ, ait pour largeur la droite ΚΜ (45. 1); le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est médiale; le parallélogramme ΓΛ est donc médial; mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΛ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que le parallélogramme ΓΕ est égal au carré de ΑΒ, le parallélogramme restant ΖΛ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ; chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΛ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial; le parallélogramme ΖΛ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ (23. 10). Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont commensurables en puissance seulement, la droite ΑΗ sera incommensurable en

ἴστί μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ σύμμετρον ἴστί τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἴστί τὸ ΓΑ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἴστί τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα

tudine ipsa ΑΗ ipsi ΗΒ; incommensurable igitur est et ex ΑΗ quadratum rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Sed quadrato quidem ex ΑΗ commensurabilia sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ, rectangulo verò sub ΑΗ, ΗΒ commensurable est rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ; incommensurabilia igitur sunt ex ΑΗ, ΗΒ quadrata rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Sed quadratis quidem ex ΑΗ, ΗΒ æquale est ΓΑ, rectangulo verò bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale



ἴστί τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἴστί ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἴστί ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφοτέραι ρηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΖΜ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἴστί ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τρίτη. Ἐπεὶ γὰρ σύμ-

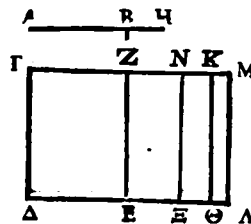
est ΖΑ; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΖΜ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et tertiam. Quoniam enim commensurable est ex

longueur avec ΗΒ; le carré de ΑΗ est donc incommensurable avec le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (1. 6, et 10. 10). Mais la somme des carrés de ΑΗ et de ΗΒ est commensurable avec le carré de ΑΗ, et le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ commensurable avec le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; la somme des carrés de ΑΗ et de ΗΒ est donc incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le parallélogramme ΓΑ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et le parallélogramme ΖΑ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΑ est donc incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ; la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΖΜ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un troisième apotome. Car puisque

370 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μετρήν ἴστί τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα καὶ³ τὸ ΓΘ τῷ ΚΑ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσην ἀνάλογόν ἴστί τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἴστί τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΑ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΑ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΑ ἄρα μίσην ἀνάλογόν ἴστί τὸ ΝΑ· ἴστί ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ.

AH quadratum quadrato ex HB, commensurable igitur et ΓΘ ipsi ΚΑ; quare et ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΑ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΝΑ; et ipsorum ΓΘ, ΚΑ igitur medium proportionale est ΝΑ; est igitur ut ΓΘ ad ΝΑ ita ΝΑ ad



ΑΛΛ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΑ οὕτως ἴστί ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ οὕτως ἴστί ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὥς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἴστί ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἴστί τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτίστί τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Επεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει ταῦ

ΚΑ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΑ ita est ΓΚ ad ΝΜ, ut verò ΝΑ ad ΚΑ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati

le carré de ΑΗ est commensurable avec le carré de ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ sera commensurable avec ΚΑ; la droite ΓΚ est donc aussi commensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (55. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΑ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΑ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΑ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΑ; le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΑ comme ΝΑ est à ΚΑ. Mais ΓΘ est à ΝΑ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΑ est à ΚΑ comme ΝΜ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au carré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du carré de ΖΜ (17. 10). Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 371

ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβηται ἡλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδὲτέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει⁵ τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρά.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ρητὴν παραβέβη-
μενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Εστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ρητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ρητὴν τὴν ΓΔ παραβέβησθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμοζούσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ

ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes commensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et neutra ipsarum ΓΜ, ΜΖ commensurabilis est longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est tertia.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO CI.

Quadratum ex minori ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

Sit minor ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad rationalem ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quartam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ; ipsæ igitur ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΑΗ,

étant égal à la quatrième partie du carré de ΖΜ, est défailant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties commensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite commensurable en longueur avec ΓΜ (18. 10); aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un troisième apotome (déf. trois. 3. 10). Le carré, etc.

PROPOSITION CI.

Le carré d'une mineure appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un quatrième apotome.

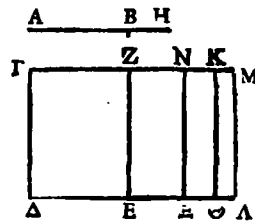
Soient une mineure ΑΒ, et une rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un quatrième apotome.

Car que ΒΗ conviène avec ΑΒ; les droites ΑΗ, ΗΒ seront incommensurables en puissance; la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera rationelle, et le

372 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελύσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον² τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἴστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρά-

HB quadratis rationale, rectangulum verò bis sub AH, HB medium. Et quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ, latitudinem faciens ΓΚ, quadrato verò ex BH æquale ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ; totum igitur ΓΛ æquale est quadratis ex AH, HB. Atque est compositum ex quadratis ipsarum AH, HB rationale; rationale igitur est et ΓΛ, et ad ra-



ειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἔπει ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Τετμήσθω οὖν καὶ³ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἐκάτερον ἄρα τῶν

tionalem ΓΔ applicatur latitudinem faciens ΓΜ; rationalis igitur et ΓΜ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam totum ΓΛ æquale est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, quorum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; reliquum igitur ΖΛ æquale est rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Secetur igitur et ΖΜ bifariam in puncto Ν, et ducatur per Ν alterutri ipsarum ΓΔ, ΜΛ paral-

double rectangle sous AH, HB sera médial (77. 10). Appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΘ, qui étant égal au carré de ΑΗ, ait ΓΚ pour largeur, et appliquons aussi à ΚΘ un parallélogramme ΚΛ, qui étant égal au carré de ΒΗ, ait ΚΜ pour largeur (45. 1), le parallélogramme entier ΓΛ sera égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ. Mais la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ est rationnelle; le parallélogramme ΓΛ est donc rationnel; mais il est appliqué à la rationnelle ΓΔ, et il a pour largeur ΓΜ; la droite ΓΜ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ (21. 10). Et puisque le parallélogramme entier ΓΛ est égal à la somme des carrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et que ΓΕ est égal au carré de ΑΒ; le parallélogramme restant ΖΛ sera égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ (7. 2). Coupons ΖΜ en deux parties égales au point Ν, et par le point Ν menons ΝΞ parallèle aux droites ΓΔ, ΜΛ; chacun des parallélo-

ΖΕ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσον ἐστὶ, καὶ ἴστιν ἴσον τῷ ΖΑ· καὶ τὸ ΖΑ ἄρα μίσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΑ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Ἰσον δὲ ἐστὶ⁵ τὸ ΓΑ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ⁶ τὸ ΖΑ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ⁷ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἶσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Καὶ ἴστι τῷ

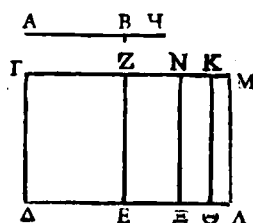
lela ΝΕ; utrumque igitur ipsorum ΖΕ, ΝΑ æquale est rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam rectangulum bis sub ΑΗ, ΗΒ medium est, et est æquale ipsi ΖΑ; et ΖΑ igitur medium est, et ad rationalem ΖΕ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et incommensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Et quoniam quidem compositum ex quadratis ipsarum ΑΗ, ΗΒ rationale est, rectangulum verò bis sub ΑΗ, ΗΒ medium, incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rectangulo bis sub ΑΗ, ΗΒ. Æquale autem est ΓΑ quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, rectangulo verò bis sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΖΑ; incommensurable igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΖΜ; incommensurable igitur est ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et quartam. Quoniam enim ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt incommensurabiles; incommensurable igitur et ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Atque est quadrato quident

grammes ΖΕ, ΝΑ sera égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial et égal à ΖΑ, le parallélogramme ΖΑ sera médial. Mais il est appliqué à la rationnelle ΖΕ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationnelle, et incommensurable en longueur avec ΓΑ (23. 10). Et puisque la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ est rationnelle, et que le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est médial, la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ sera incommensurable avec le double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Mais le parallélogramme ΓΑ est égal à la somme des quarrés des droites ΑΗ, ΗΒ, et ΖΑ égal au double rectangle sous ΑΗ, ΗΒ; le parallélogramme ΓΑ est donc incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΖΜ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΖΜ (10. 10). Mais ces droites sont rationnelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un quatrième apotome. Car, puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le quarré de ΑΗ sera incommensurable avec le

374 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μίσην ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ

ex AH æquale ΓΘ, quadrato verò ex HB æquale ΚΛ; incommensurable igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ, ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est æquale quadrato quidem ex ΑΗ ipsum ΓΘ, quadrato verò ex HB ipsum ΚΛ, rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ ipsum ΝΛ; ipsorum igitur ΓΘ, ΚΛ medium proportionale est ΝΛ;



πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ΑΛΛ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ὡς δὲ τὸ ΝΛ⁸ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς

est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Sed ut quidem ΓΘ ad ΝΛ ita est ΓΚ ad ΝΜ. Ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita est ΝΜ ad ΚΜ; ut igitur ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ; rectangulum igitur sub ΓΚ, ΚΜ æquale est quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ.

quarré de HB. Mais ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, et ΚΛ égal au quarré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre le quarré de ΑΗ et le quarré de ΗΒ (55. lemm. 10), que le parallélogramme ΓΘ est égal au quarré de ΑΗ, le parallélogramme ΚΛ égal au quarré de ΗΒ, et le parallélogramme ΝΛ égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΝΛ sera moyen proportionnel entre ΓΘ et ΚΛ; la droite ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΝΛ comme ΓΚ est à ΝΜ, et ΝΛ est à ΚΛ comme ΝΜ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc à ΝΜ comme ΝΜ est à ΚΜ; le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est donc égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ (17. 6). Et

ZM. Επειδ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἑλλειπὸν εἶδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζων δύναται τῇ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη. Τὸ ἄρα ἀπὸ 9, καὶ τὰ ἐξῆς.

Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΜΖ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est tota ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quarta. Quadratum igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρϛ.

PROPOSITIO CII.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιῶν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Quadratum ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Sit recta ΑΒ quæ cum rationali medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse quintam.

puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du quarré de ΜΖ, est défailant d'une figure quarrée, que ce rectangle est celui qui est compris sous ΓΚ, ΚΜ, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΜ (19. 10). Mais la droite entière ΓΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10). Le quarré, etc.

PROPOSITION CII.

Le quarré d'une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un cinquième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface rationnelle un tout médial, et soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que ΓΖ est un cinquième apotome.

376 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

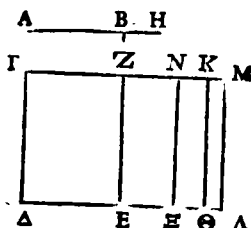
Εστω γάρ τῇ AB προσαρμόζοντα ἡ BH αἰ ἄρα AH , HB εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $ΓΔ$ παραβελήσθω τὸ $ΓΘ$ · τῇ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $ΚΛ$ · ἔλον ἄρα τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB . Τὸ δὲ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB ἅμα μέσον ἐστὶ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΓΛ$. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$. Καὶ ἐπεὶ ἔλον τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὥν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς AB · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΛ$ ἴσον ἐστὶ τῇ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Τιμῆσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N , καὶ ἔχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν $ΓΔ$, $ΜΛ$ παράλληλος ἡ $NΞ$ · ἑκάτερον ἄρα τῶν $ΖΞ$, $ΝΛ$ ἴσον ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν AH , HB . Καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ῥητόν ἐστι, καὶ ἐστὶν² ἴσον τῇ

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB rectæ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis medium, rectangulum verò bis sub ipsis rationale. Et quadrato quidem ex AH æquale ad $ΓΔ$ applicetur $ΓΘ$; quadrato verò ex HB æquale $ΚΛ$; totum igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB . Compositum autem ex quadratis ipsarum AH , HB simul medium est; medium igitur est $ΓΛ$. Et ad rationalem $ΓΔ$ applicatur latitudinem faciens $ΓΜ$; rationalis igitur est $ΓΜ$, et incommensurabilis ipsi $ΓΔ$. Et quoniam totum $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum $ΓΕ$ æquale est quadrato ex AB ; reliquum igitur $ΖΛ$ æquale est rectangulo bis sub AH , HB . Secetur igitur ZM bifariam in N , et ducatur per N alterutri ipsarum $ΓΔ$, $ΜΛ$ parallela $NΞ$; utrumque igitur ipsorum $ΖΞ$, $ΝΛ$ æquale est rectangulo sub AH , HB . Et quoniam rectangulum bis sub AH , HB rationale est, et est æquale ipsi $ΖΛ$;

Car que BH conviène avec AB ; les droites AH , HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, et le double rectangle compris sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui soit égal au quarré de AH ; appliquons aussi à cette droite un parallélogramme $ΚΛ$, qui soit égal au quarré de HB (45. 1), le parallélogramme entier $ΓΛ$ sera égal à la somme des quarrés des droites AH , HB . Mais la somme des quarrés des droites AH , HB est médiale; le parallélogramme $ΓΛ$ est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle $ΓΔ$, et il a $ΓΜ$ pour largeur; la droite $ΓΜ$ est donc rationelle et incommensurable avec $ΓΔ$ (23. 10). Et puisque le parallélogramme entier $ΓΛ$ est égal à la somme des quarrés des droites AH , HB , et que $ΓΕ$ est égal au quarré de AB , le parallélogramme restant $ΖΛ$ sera égal au double rectangle sous AH , HB (7. 2). Coupons la droite ZM en deux parties égales en N , et par le point N menons la droite $NΞ$ parallèle à l'une ou à l'autre des droites $ΓΔ$, $ΜΛ$; chacun des parallélogrammes $ΖΞ$, $ΝΛ$ sera égal au rectangle sous AH , HB . Et puisque le double rectangle sous AH , HB est rationel, et qu'il est égal à $ΖΛ$,

ΖΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΑ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΑ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΑ ῥητὸν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΑ τῷ ΖΑ. Ὡς δὲ τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΖΑ οὕτως ἐστὶν³ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταὶ εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμ-

rationale igitur est ΖΑ. Et ad rationalem ΕΖ applicatur latitudinem faciens ΖΜ; rationalis igitur est ΖΜ, et commensurabilis ipsi ΓΑ longitudine. Et quoniam quidem ΓΑ medium est, ipsum verò ΖΑ rationale; incommensurabile igitur est ΓΑ ipsi ΖΑ. Ut autem ΓΑ ad ΖΑ ita est ΓΜ ad ΜΖ; incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ igitur ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur



μετροί· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ πέμπτη. Ομοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτίστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ

est ΓΖ. Dico et quintam. Similiter enim demonstrabimus rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ æquale esse quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. Et quoniam incommensurabile est ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ, æquale autem quadratum ex ΑΗ ipsi ΓΘ, quadratum verò ex ΗΒ ipsi ΚΛ; incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ;

le parallélogramme ΖΑ sera rationel. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ΕΖ, et il a ΖΜ pour largeur; la droite ΖΜ est donc rationelle, et commensurable en longueur avec ΓΑ (21. 10). Et puisque ΓΑ est médial, et ΖΑ rationel, le parallélogramme ΓΑ sera incommensurable avec ΖΑ. Mais ΓΑ est à ΖΑ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un cinquième apotome. Nous démontrerons semblablement que le rectangle sous ΓΚ, ΚΜ est égal au quarré de ΝΜ, c'est-à-dire à la quatrième partie du quarré de ΖΜ. Puisque le quarré de ΑΗ est incommensurable avec le quarré de ΗΒ, que le quarré de ΑΗ est égal à ΓΘ, et que le quarré de ΗΒ est égal à ΚΛ, le parallélogramme ΓΘ sera incommensurable avec ΚΛ, Mais ΓΘ

378 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῇ τετάρτῃ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἠλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ⁵· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἴστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρός τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πέμπτη.

Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν ἑκτὴν.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθαι τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι· ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶν ἑκτὴ.

est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ; la droite ΓΚ est donc incommensurable en longueur avec ΚΜ. Et puisque les deux droites ΓΜ, ΜΖ sont inégales, que l'on a appliqué à ΓΜ un parallélogramme, qui étant égal à la quatrième partie du carré de ΖΜ, est défailant d'une figure carrée, et que ce parallélogramme divise ΓΜ en parties incommensurables, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ (19. 10). Mais la congruente ΖΜ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10). Le carré, etc.

PROPOSITION CIII.

Le carré d'une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationnelle, fait une largeur qui est un sixième apotome.

Que la droite ΑΒ fasse avec une surface médiale un tout médial; soit la rationnelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΓΖ pour largeur; je dis que la droite ΓΖ est un sixième apotome.

incommensurabilis igitur ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine. Quoniam igitur duæ rectæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, et quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatur deficiens figurâ quadratâ, et in partes incommensurabiles ipsam dividit; ergo ΓΜ quam ΜΖ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Atque est congruens ΖΜ commensurabilis expositæ rationali ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est quinta.

Quadratum igitur, etc.

PROPOSITIO CIII.

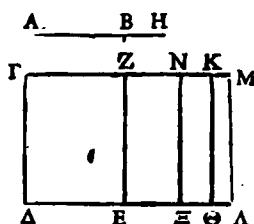
Quadratum ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

Sit recta ΑΒ quæ cum medio medium totum facit, rationalis autem ΓΔ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ apotomen esse sextam.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 379

Εστω γάρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH · αἱ ἄρα AH , HB δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μίσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Παραβιβάσθω οὖν παρὰ τὴν $ΓΔ$ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΚ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς

Sit enim ipsi AB congruens BH ; ipsæ igitur AH , HB potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum bis sub AH , HB medium, adhuc autem incommensurabilia ex AH , HB quadrata rectangulo bis sub AH , HB . Applicetur igitur ad $ΓΔ$ quadrato quidem ex AH æquale $ΓΘ$ latitudinem faciens $ΓΚ$, quadrato



BH τὸ $ΚΛ$ · ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB · μίσον ἄρα ἐστὶ³ καὶ τὸ $ΓΛ$. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $ΓΔ$ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓΜ$ · ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΜ$, καὶ ἀσύμμετρος τῇ $ΓΔ$ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB · λοιπὸν ἄρα τὸ $ΖΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . Καὶ ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB μίσον· καὶ τὸ $ΖΛ$ ἄρα

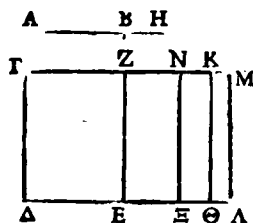
verò ex BH ipsum $ΚΛ$; totum igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB ; medium igitur est et $ΓΛ$. Et ad rationalem $ΓΔ$ applicatur latitudinem faciens $ΓΜ$; rationalis igitur est $ΓΜ$, et incommensurabilis ipsi $ΓΔ$ longitudine. Quoniam igitur $ΓΛ$ æquale est quadratis ex AH , HB , quorum $ΓΕ$ æquale est quadrato ex AB ; reliquum igitur $ΖΛ$ æquale est rectangulo bis sub AH , HB . Atque est rectangulum bis sub AH , HB medium;

Car que BH conviène avec AB ; les droites AH , HB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs quarrés étant médiale, le double rectangle sous ces droites étant aussi médial, et la somme des quarrés de ces mêmes droites étant incommensurable avec le double rectangle sous AH , HB (79. 10). Appliquons à $ΓΔ$ un parallélogramme $ΓΘ$, qui étant égal au quarré de AH , ait $ΓΚ$ pour largeur; appliquons à $ΚΘ$ un parallélogramme $ΚΛ$ égal au quarré de BH ; le parallélogramme entier $ΓΛ$ sera égal à la somme des quarrés des droites AH , HB ; le parallélogramme $ΓΛ$ sera donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle $ΓΔ$, et il a $ΓΜ$ pour largeur; la droite $ΓΜ$ est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec $ΓΔ$ (23. 10). Et puisque $ΓΛ$ est égal à la somme des quarrés des droites AH , HB , et que $ΓΕ$ est égal au quarré de AB , le parallélogramme restant $ΖΛ$ sera égal au double rectangle sous AH , HB (7. 2). Mais le double rectangle sous AH , HB est médial; le parallélogramme

380 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μείσον ἰστί. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα ἰστὶν ἡ ZM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB ἀσύμμετρα ἴσιν τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB, καὶ ἴσιν τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν⁵ AH, HB ἴσιν τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσιν τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἰστί⁶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἰστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἰστὶν ἡ ΓΜ

et ZA igitur medium est. Et ad rationalem ZE applicatur latitudinem faciens ZM; rationalis igitur est ZM, et incommensurabilis ipsi ΓΔ longitudine. Et quoniam quadrata ex AH, HB incommensurabilia sunt rectangulo bis sub AH, HB, atque est quadratis quidem ex AH, HB æquale ΓΛ, rectangulo verò bis sub AH, HB æquale ΖΛ; incommensurabile igitur est ΓΔ ipsi ΖΛ. Ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ;



τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί· αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἰστὶν ἡ ΓΖ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴκται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἰστί τῷ δις ὑπὸ τῶν AH, HB, τιτμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκατέρων ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἰστί τῷ

incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. Et sunt ambæ rationales; ipsæ ΓΜ, ΜΖ igitur rationales sunt potentiâ solum commensurabiles; apotome igitur est ΓΖ. Dico et sextam. Quoniam enim ΖΛ æquale est rectangulo bis sub AH, HB, secetur bifariam ΖΜ in Ν, et ducatur per Ν ipsi ΓΔ parallela ΝΞ; utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΝΛ æquale est rectangulo

ZA est donc médial. Mais ce parallélogramme est appliqué à la rationelle ZE, et il a ZM pour largeur; la droite ZM est donc rationelle, et incommensurable en longueur avec ΓΔ. Et puisque la somme des carrés des droites AH, HB est incommensurable avec le double rectangle sous AH, HB, que ΓΛ est égal à la somme des carrés des droites AH, HB, et que ΖΛ est égal au doublé rectangle sous AH, HB, le parallélogramme ΓΛ sera incommensurable avec ΖΛ. Mais ΓΛ est à ΖΛ comme ΓΜ est à ΜΖ (1. 6); la droite ΓΜ est donc incommensurable en longueur avec la droite ΜΖ (10. 10). Mais ces droites sont rationelles l'une et l'autre; les droites ΓΜ, ΜΖ sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite ΓΖ est donc un apotome (74. 10). Et je dis que cette droite est un sixième apotome. Car puisque ΖΛ est égal au double rectangle sous AH, HB, coupons ΖΜ en deux parties égales en Ν, et par le point Ν menons la droite ΝΞ parallèle à ΓΔ, chacun des parallélogrammes ΖΞ, ΝΛ sera

ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δύ-
 ράμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ
 μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ⁸ ΓΘ, τῷ δὲ
 ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα
 ἐστὶ⁹ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ
 ΚΛ οὕτως ἐστὶν¹⁰ ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμ-
 μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν
 ἀπὸ τῶν¹¹ ΑΗ, ΗΒ μείζον ἀνάλογόν ἐστι τὸ
 ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς
 ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ
 ΚΛ, τῷ δὲ ὕπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ¹² τὸ
 ΝΛ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ
 ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ¹³. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς
 ΜΖ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.
 Καὶ οὐδενίᾳ αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἑκκει-
 μένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστὶν ἑκτη.
 Τὸ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

sub ΑΗ, ΗΒ. Et quoniam ΑΗ, ΗΒ potentiâ sunt
 incommensurabiles, incommensurable igitur est
 ex ΑΗ quadratum quadrato ex ΗΒ. Sed qua-
 drato quidem ex ΑΗ æquale est ΓΘ, quadrato
 verò ex ΗΒ æquale est ΚΛ; incommensurable
 igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. Ut autem ΓΘ ad ΚΛ ita
 est ΓΚ ad ΚΜ; incommensurabilis igitur est
 ΓΚ ipsi ΚΜ. Et quoniam quadratorum ex ΑΗ,
 ΗΒ medium proportionale est rectangulum sub
 ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ
 æquale ΓΘ, quadrato verò ex ΗΒ æquale ΚΛ,
 rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΝΛ;
 est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. Et
 eâdem ratione ΓΜ quam ΜΖ plus potest qua-
 drato ex rectâ sibi incommensurabili. Et neutra
 ipsarum commensurabilis est expositæ rationali
 ΓΔ; ergo ΓΖ apotome est sexta.

Quadratum igitur, etc.

égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ. Et puisque les droites ΑΗ, ΗΒ sont incommensurables en puissance, le carré de ΑΗ sera incommensurable avec le carré de ΗΒ. Mais ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, et ΚΛ égal au carré de ΗΒ; le parallélogramme ΓΘ est donc incommensurable avec ΚΛ. Mais ΓΘ est à ΚΛ comme ΓΚ est à ΚΜ (1. 6); la droite ΓΚ est donc incommensurable avec ΚΜ. Et puisque le rectangle sous ΑΗ, ΗΒ est moyen proportionnel entre les carrés des droites ΑΗ, ΗΒ (5. lem. 10), que ΓΘ est égal au carré de ΑΗ, que ΚΛ est égal au carré de ΗΒ, et que ΝΛ est égal au rectangle sous ΑΗ, ΗΒ, le parallélogramme ΓΘ est donc à ΝΛ comme ΝΛ est à ΚΛ. Par la même raison, la puissance de ΓΜ surpassera la puissance de ΜΖ du carré d'une droite incommensurable en longueur avec ΓΜ; aucune des droites ΓΜ, ΜΖ n'est donc commensurable avec la rationnelle exposée ΓΔ; la droite ΓΖ est donc un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Le carré, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

PROPOSITIO CIV.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

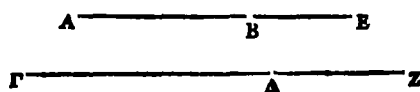
Ἐστω ἀποτομή ἡ AB , καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$. Λέγω ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB .

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστὶν ἡ AB , ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ BE . αἱ AE , EB ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῇ τῆς AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ λόγῳ ὁ αὐτὸς γιγνέτω ὁ τῆς

Recta apotomæ longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit apotome AB , et ipsi AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$; dico et $\Gamma\Delta$ apotomen esse atque ordine eandem quæ AB .

Quoniam enim apotome est AB , sit ipsi congruens BE ; ipsæ AE , EB igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quæ est ipsius AB ad $\Gamma\Delta$ ratio eadem fiat ipsius BE ad ΔZ ;



BE πρὸς τὴν ΔZ . καὶ ὡς ἐν ἄρα ἐστὶ² πρὸς ἐν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ AE πρὸς ὅλην τὴν ΓZ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. Σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE μὲν³ τῇ ΓZ , ἡ δὲ BE τῇ ΔZ . Καὶ αἱ⁴ AE , EB ῥηταὶ εἰσι δυν-

et ut una igitur est ad unam, omnes sunt ad omnes; est igitur et ut tota AE ad totam ΓZ ita AB ad $\Gamma\Delta$. Commensurabilis autem AB ipsi $\Gamma\Delta$ longitudine; commensurabilis igitur et AE quidem ipsi ΓZ , ipsa verò BE ipsi ΔZ . Et AE , EB rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles;

PROPOSITION CIV.

Une droite commensurable en longueur avec un apotome est elle-même un apotome, et du même ordre que lui.

Soit l'apotome AB , et que $\Gamma\Delta$ soit commensurable en longueur avec AB ; je dis que $\Gamma\Delta$ est un apotome, et que cet apotome est du même ordre que AB .

Car puisque AB est un apotome, que BE lui conviène; les droites AE , EB seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Faisons en sorte que la raison de BE à ΔZ soit la même que celle de AB à $\Gamma\Delta$. Un antécédent est donc à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12.5); la droite entière AE est donc à la droite entière ΓZ comme AB est à $\Gamma\Delta$. Mais AB est commensurable en longueur avec $\Gamma\Delta$; la droite AE est donc commensurable avec ΓZ , et la droite BE avec ΔZ (10. 10). Mais les droites AE , EB sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; les

ῥάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα
 ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή
 ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ
 αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ⁵ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς
 τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλάξ
 ἄρα ἐστὶν⁶ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ
 ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἦτοι δὲ⁷ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ
 μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἡ
 τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς
 ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,
 καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμ-
 μέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ
 ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ
 δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΑΕ, ΕΒ,
 καὶ οὐδέτερά⁸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς
 ΕΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ,
 καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ
 ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν
 ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ

et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur rationales sunt potentia
 solum commensurabiles; apotome igitur est
 ΓΔ. Dico et ordinæ eandem quæ ΑΒ. Quo-
 niam enim est ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΒΕ ad ΖΔ;
 permutando igitur est ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad
 ΖΔ. Vel autem ΑΕ quam ΕΒ plus potest qua-
 drato ex rectâ sibi commensurabili, vel qua-
 drato ex rectâ incommensurabili. Si quidem
 igitur ΑΕ quam ΕΒ plus potest quadrato ex rectâ
 sibi commensurabili, et ΓΖ quam ΖΔ plus potest
 quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si
 quidem commensurabilis est ΑΕ expositæ ratio-
 nali longitudine, et ipsa ΓΖ. Si autem ΕΒ, et ΔΖ.
 Si autem neutra ipsarum ΑΕ, ΕΒ, et neutra
 ipsarum ΓΖ, ΖΔ. Si autem ΑΕ quam ΕΒ plus
 possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili,
 et ΓΖ quam ΖΔ plus poterit quadrato ex rectâ
 sibi incommensurabili. Et si quidem commen-
 surabilis est ΑΕ expositæ rationali longitudine,

droites ΓΖ, ΖΔ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement
 (10. 10); la droite ΓΔ est donc un apotome (74. 10). Je dis que cet apotome est
 du même ordre que ΑΒ. Car puisque ΑΕ est à ΓΖ comme ΒΕ est à ΖΔ, par permu-
 tation ΑΕ sera à ΕΒ comme ΓΖ est à ΖΔ. Mais la puissance de ΑΕ surpasse la puis-
 sance de ΕΒ du quarré d'une droite commensurable, ou incommensurable avec ΑΕ.
 Si donc la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du quarré d'une droite
 commensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la puissance de ΖΔ du
 quarré d'une droite commensurable avec ΓΖ. Si ΑΕ est commensurable en
 longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera commensurable avec
 elle. Si ΕΒ est commensurable avec la rationnelle exposée, la droite ΔΖ le
 sera aussi; et si aucune des droites ΑΕ, ΕΒ n'est commensurable en longueur avec
 la rationnelle exposée, aucune des droites ΓΖ, ΖΔ ne sera commensurable en
 longueur avec elle; et si la puissance de ΑΕ surpasse la puissance de ΕΒ du
 quarré d'une droite incommensurable avec ΑΕ, la puissance de ΓΖ surpassera la
 puissance de ΖΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΖ. Si la droite
 ΑΕ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, la droite ΓΖ sera
 commensurable avec elle; si ΒΕ est commensurable avec la rationnelle exposée,

384 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δι' ἢ BE, καὶ ἢ ZΔ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, οὐδετέρα τῶν ΓZ, ZΔ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτὴ τῇ AB. Ὅπρι εἶδει δειξαι.

et ipsa ΓZ. Si autem BE, et ZΔ. Si autem neutra ipsarum AE, EB, neutra ipsarum ΓZ, ZΔ; apotome igitur est ΓΔ et ordine eadem quæ AB. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρέ.

Ἡ τῇ μίσης ἀποτομῇ σύμμετρος μίσης ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτή.

Ἐστω μίσης ἀποτομή ἢ AB, καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἢ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἢ ΓΔ μίσης ἀποτομή ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἢ αὐτὴ τῇ AB.

Ἐπὶ γὰρ μίσης ἀποτομῇ ἐστὶν ἢ AB, ἔστω αὐτῇ προσαρμύζουσα ἢ BE· αἱ AE, EB ἄρα μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γιγνέτω ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἢ BE πρὸς τὴν ΔZ, σύμμετρος ἄρα καὶ ἢ AE τῇ ΓZ, ἢ δὲ BE τῇ ΔZ· αἱ δὲ AE, EB μίσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα

PROPOSITIO CV.

Recta mediæ apotomæ commensurabilis mediæ apotome est atque ordine eadem.

Sit mediæ apotome AB, et ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ; dico et ΓΔ mediæ apotomen esse et ordine eadem quæ AB.

Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit ipsi congruens BE; ipsæ AE, EB igitur mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et fiat ut AB ad ΓΔ ita BE ad ΔZ, commensurabilis igitur et AE ipsi ΓZ, ipsa verò BE ipsi ΔZ; ipsæ autem AE, EB mediæ sunt potentiâ solùm commensurabiles; et ΓZ, ZΔ igitur mediæ sunt

ZΔ le sera aussi; et si aucune des droites AE, EB n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée, aucune des droites ΓZ, ZΔ ne sera commensurable avec elle; la droite ΓΔ est donc une apotome, et cet apotome est du même ordre que AB (déf. trois. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CV.

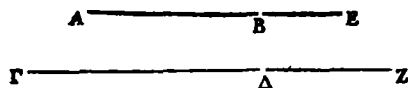
Une droite commensurable avec un apotome d'une médiale est un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que lui.

Que AB soit un apotome d'une médiale, et que ΓΔ soit commensurable en longueur avec AB; je dis que ΓΔ est un apotome d'une médiale, et que cet apotome est du même ordre que AB.

Car, puisque AB est un apotome d'une médiale, que BE convienne avec la droite AB, les droites AE, EB seront des médiales commensurables en puissance seulement (76. 10). Faisons en sorte que AB soit à ΓΔ comme BE est à ΔZ; la droite AE sera commensurable avec ΓZ, et la droite BE commensurable avec ΔZ; mais les droites AE, EB sont des médiales commensurables en puissance seulement; les

μίσαι εἰς δυνάμει μόνον σύμμετροι². μίσης ἄρα ἀποτομή ἐστίν ἡ ΓΔ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστίν ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ³ ἐστίν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ⁴. ἐστίν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς

potentiâ solùm commensurabiles; mediæ igitur apotome est ΓΔ. Dico et ordine esse eandem quæ AB. Quoniam enim est ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ; est igitur et ut ex AE quadratum



τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ⁵. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ῥητόν ἐσται⁷ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ⁸ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, μέσον ἐστὶ⁹ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσης ἄρα ἀποτομή ἐστίν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ὅπρι ἴδιαι διῆξαι.

ad rectangulum sub AE, EB ita ex ΓΖ quadratum ad rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ. Commensurable autem ex AE quadratum quadrato ex ΓΖ; commensurable igitur est et sub AE, EB rectangulum rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ. Et si igitur rationale est rectangulum sub AE, EB, rationale erit et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; et si medium est rectangulum sub AE, EB, medium est et rectangulum sub ΓΖ, ΖΔ; mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ AB. Quod oportebat ostendere.

droites ΓΖ, ΖΗ sont donc des médiales commensurables en puissance seulement ; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale. Je dis que cette droite est un apotome du même ordre que AB. Car, puisque AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ, le carré de AE sera au rectangle sous AE, EB comme le carré de ΓΖ est au rectangle sous ΓΖ, ΖΔ (1. 6); mais le carré de AE est commensurable avec le carré de ΓΖ; le rectangle sous AE, EB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ. Si donc le rectangle sous AE, EB est rationel, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera rationel; et si le rectangle sous AE, EB est médial, le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ sera médial; la droite ΓΔ est donc un apotome d'une médiale, et cet apotome est du même ordre que AB. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρς'.

PROPOSITIO CVI.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

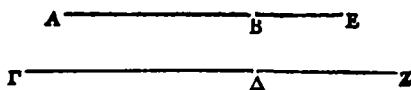
Ἐστω γάρ¹ ἐλάσσων ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.

Γιγνέτω γάρ τὰ αὐτὰ τῇ προτέρῃ². Καὶ ἐπεὶ αἱ AE, EB δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim minor AB, et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ minorem esse.

Fiant enim eadem quæ suprâ. Et quoniam AE, EB potentiâ sunt incommensurabiles, et ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles. Quoniam igitur est ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ; est igitur et ut ex AE quadratum ad ip-



πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν³ AE, EB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ⁴. Σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BE τῇ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῇ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. Πητὸν

sum ex EB ita ex ΓΖ quadratum ad ipsum ex ΖΔ; componendo igitur est ut ex AE, EB quadrata ad ipsum ex EB ita ex ΓΖ, ΖΔ quadrata ad ipsum ex ΖΔ. Commensurable autem est ex BE quadratum quadrato ex ΔΖ; commensurable igitur et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis. Rationale autem est compositum ex

PROPOSITION CVI.

Une droite commensurable avec une mineure est une mineure.

Soit AB une mineure, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ est une mineure.

Car faisons les mêmes choses qu'auparavant. Puisque les droites AE, EB sont incommensurables en puissance, les droites ΓΖ, ΖΔ seront incommensurables en puissance. Et puisque AE est à EB comme ΓΖ est à ΖΔ, le carré de AE sera au carré de EB comme le carré de ΓΖ est au carré de ΖΔ (22.6); donc, par addition, la somme des carrés des droites AE, EB est au carré de EB comme la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ est au carré de ΖΔ (18.5). Mais le carré de BE est commensurable avec le carré de ΖΔ; la somme des carrés des droites AE, EB est donc commensurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ (10. 10). Mais la somme des carrés des droites AE, EB est rationelle; la somme

δέ ἐστὶ τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν⁵ AE, EB τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$ τετραγώνων. Πάλιν, ἰπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$ ⁶. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓZ τετραγώνῳ⁷, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$. Μείσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB · μείσον ἄρα ἐστὶ⁸ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma Z, Z\Delta$. αἱ $\Gamma Z, Z\Delta$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μείσον· ἐλάττω ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

A Λ Α Ω Σ'.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ A , καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω² ἡ B . λέγω ὅτι ἡ B ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὴ³, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβελύσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ . ἀποτομή ἄρα ἐστὶ τετάρτη⁴

ipsarum AE, EB quadratis; rationale igitur est et compositum ex ipsarum $\Gamma Z, Z\Delta$ quadratis. Rursus, quoniam est ut ex AE quadratum ad rectangulum sub AE, EB ita ex ΓZ quadratum ad rectangulum sub $\Gamma Z, Z\Delta$; commensurable autem ex AE quadratum quadrato ex ΓZ , commensurable igitur est et sub AE, EB rectangulum rectangulo sub $\Gamma Z, Z\Delta$. Medium autem rectangulum sub AE, EB ; medium igitur est et rectangulum sub $\Gamma Z, Z\Delta$; ipsæ $\Gamma Z, Z\Delta$ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum verò sub ipsis medium; minor igitur est $\Gamma\Delta$. Quod oportebat ostendere.

A L I T E R.

Sit minor A , et ipsi A commensurabilis sit B ; dico B minorem esse.

Exponatur enim $\Gamma\Delta$ rationalis, et quadrato ex A æquale ad ipsam $\Gamma\Delta$ applicetur ΓE latitudinem faciens ΓZ ; apotome igitur est quarta ΓZ .

des carrés des droites $\Gamma Z, Z\Delta$ est donc aussi rationnelle. De plus, puisque le carré de AE est au rectangle sous AE, EB comme le carré de ΓZ est au rectangle sous $\Gamma Z, Z\Delta$, et que le carré de AE est commensurable avec le carré de ΓZ ; le rectangle sous AE, EB sera commensurable avec le rectangle sous $\Gamma Z, Z\Delta$. Mais le rectangle sous AE, EB est médial; le rectangle sous $\Gamma Z, Z\Delta$ est donc médial; les droites $\Gamma Z, Z\Delta$ sont donc incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant rationnelle, et le rectangle sous ces mêmes droites étant médial (24. 10); la droite $\Gamma\Delta$ est donc une mineure (77. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

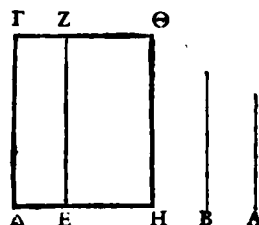
A U T R E M E N T.

Soit A une mineure, et que B soit commensurable avec A ; je dis que la droite B est une mineure.

Soit exposée la rationnelle $\Gamma\Delta$; appliquons à $\Gamma\Delta$ un parallélogramme ΓE , qui étant égal au carré de A , ait ΓZ pour largeur; la droite ΓZ sera un quatrième

η ΓΖ. Τῷ⁵ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβέβλησθαι τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ⁷ τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ⁸ τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα

Quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. Quoniam igitur commensurabilis est A ipsi B; commensurabile igitur est et ex A quadratum quadrato ex B. Sed quadrato quidem ex A æquale est ΓΕ, quadrato verò ex B æquale est ZH; commensurabile igitur est ΓΕ



ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. Ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως ἐστὶν⁹ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν¹⁰ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Ἀποτομὴ δὲ ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς¹¹ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης¹², ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶ. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάττων ἄρα¹³ ἐστὶν ἡ Β. Οἱ περ ἴδει διῆξαι.

ipsi ZH. Ut autem ΓΕ ad ZH ita est ΓΖ ad ΖΘ; commensurabilis igitur est ΓΖ ipsi ΖΘ longitudine. Apotome autem est quarta ΓΖ; apotome igitur est et ΖΘ quarta; spatium ZH igitur continetur sub rationali et apotome quartâ. Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quartâ; recta spatium igitur potens minor est. Potest autem ipsum ZH ipsa Β; minor igitur est Β. Quod oportebat ostendere.

apotome (101. 10). Appliquons à ZE un parallélogramme ZH, qui étant égal au carré de B, ait ΖΘ pour largeur. Puisque A est commensurable avec B, le carré de A sera commensurable avec le carré de B. Mais ΓΕ est égal au carré de A, et ΖΗ égal au carré de B; le parallélogramme ΓΕ est donc commensurable avec ΖΗ. Mais ΓΕ est à ΖΗ comme ΓΖ est à ΖΘ (1. 6); la droite ΓΖ est donc commensurable en longueur avec ΖΘ (10. 10); mais la droite ΓΖ est un quatrième apotome; la droite ΖΘ est donc un quatrième apotome (104. 10); la surface ΖΗ est donc comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome. Mais si une surface est comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome, la droite qui peut cette surface est une mineure (95. 10). Mais la droite Β peut la surface ΖΗ; la droite Β est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ.

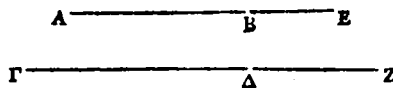
Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ
σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ
ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ
AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ
ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

PROPOSITIO CVII.

Recta ei quæ cum rationali medium totum
facit commensurabilis et ipsa cum rationali me-
dium totum faciens est.

Sit cum rationali medium totum faciens AB,
et ipsi AB commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ
cum rationali medium totum facere.



Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE· αἱ
AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦ-
σαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE,
EB τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν.
Καὶ τὰ αὐτὰ κατισκυιάσθω. Ὁμοίως δὲ δεί-
ξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῇ
αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ ταῖς AE, EB, καὶ σύμμετρον
ἐστὶ τὸ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB
τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν
ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ

Sit enim ipsi AB congruens BE; ipsæ AE, EB
igitur potentiâ sunt incommensurabiles, fa-
cientes quidem compositum ex ipsarum AE,
EB quadratis medium, rectangulum verò sub
ipsis rationale. Et eadem construantur. Con-
gruenter præcedentibus utique ostendemus,
rectas ΓΖ, ΖΔ in eâdem ratione esse cum ipsis
AE, EB, et commensurable esse compositum
ex ipsarum AE, EB quadratis composito
ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis, rectangulum

PROPOSITION CVII.

La droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, fait elle-même avec une surface rationnelle un tout médial.

Que la droite AB fasse avec une surface rationnelle un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que ΓΔ fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car que BE convienne avec AB, les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme des quarrés de ces droites étant médiale, et le rectangle sous ces mêmes droites étant rationel (78. 10). Faisons la même construction. Nous démontrerons comme auparavant que les droites ΓΖ, ΖΔ sont en même raison que les droites AE, EB; que la somme des quarrés des droites AE, EB est commensurable avec la somme des quarrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le

ὕπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγχείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μείσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

verò sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; quare et ΓΖ, ΖΔ potentiâ sunt incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum ΓΖ, ΖΔ quadratis medium, rectangulum verò sub ipsis rationale; recta ΓΔ igitur est quæ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

Α Α Λ Ω Σ'.

A L I T E R.

Εστω² μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Εκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πύμπτῃ ἡ ΓΖ. Τῇ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβελήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῇ δὲ

Sit cum rationali medium totum faciens Α, et Β commensurabilis ipsi; dico Β cum rationali medium totum facere.

Exponatur rationalis ΓΔ, et quadrato quidem ex Α æquale ad ΓΔ applicetur ΓΕ latitudinem faciens ΓΖ; apotome igitur est quinta ΓΖ. Quadrato autem ex Β æquale ad ipsam ΖΕ applicetur ΖΗ latitudinem faciens ΖΘ. Quoniam igitur commensurabilis est Α ipsi Β, commensurable est et ex Α quadratum quadrato ex Β. Sed quadrato quidem ex Α æquale ΓΕ; quadrato

rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ; les droites ΓΖ, ΖΔ sont donc incommensurables en puissance, ces droites faisant médiale la somme de leurs quarrés, et rationel le rectangle compris sous ces mêmes droites; la droite ΓΔ fait donc avec une surface rationelle un tout médial (78. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

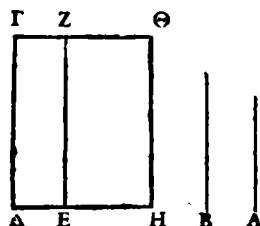
A U T R E M E N T.

Que Α fasse avec une rationelle un tout médial, et que Β soit commensurable avec Α; je dis que Β fait avec une surface rationelle un tout médial.

Soit exposée la rationelle ΓΔ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme ΓΕ, qui étant égal au quarré de Α, ait ΓΖ pour largeur; la droite ΓΖ sera un cinquième apotome (102. 10). Appliquons à ΖΕ un parallélogramme ΖΗ, qui étant égal au quarré de Β, ait ΖΘ pour largeur. Puisque Α est commensurable avec Β, le quarré de Α sera commensurable avec le quarré de Β. Mais ΓΕ est égal au quarré de Α,

ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῇ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Αποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ.

autem ex B æquale ZH; commensurable igitur est GE ipsi ZH; commensurabilis igitur et GZ ipsi ZΘ longitudine. Apotome autem quinta GZ; apotome igitur est quinta et ZΘ, rationalis verò ZE.



Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιούσά ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν. Ὅπρι ἴδει δείξαι.

Si autem spatium contineatur sub rationali et apotome quintâ, recta spatium potens cum rationali medium totum facit. Potest autem ipsum ZH ipsa B; ipsa igitur B cum rationali medium totum faciens est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρή.

PROPOSITIO CVIII.

Ἡ τῇ μετὰ μίσην μίσην τὸ ὅλον ποιούση σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μίσην μίσην τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Recta ei quæ cum medio medium totum facit commensurabilis et ipsa cum medio medium totum faciens est.

et ZH au carré de B; le parallélogramme GE est donc commensurable avec ZH; la droite GZ est donc commensurable en longueur avec ZΘ. Mais GZ est un cinquième apotome; la droite ZΘ est donc un cinquième apotome (104. 10). Mais la droite ZE est rationnelle: or, si une surface est comprise sous une rationnelle et un cinquième apotome, la droite qui peut cette surface fait avec une surface rationnelle un tout médial (96. 10). Mais la droite B peut la surface ZH; la droite B fait donc avec une surface rationnelle un tout médial. Ce qu'il fallait démontrer.

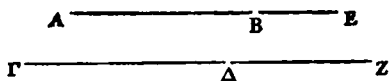
PROPOSITION CVIII.

Une droite commensurable avec la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial, fait elle-même avec une surface médiale un tout médial.

392 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

Εστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, καὶ τῇ AB ἴστω¹ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ² ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Sit cum medio medium totum faciens ipsa AB, et ipsi AB sit commensurabilis ΓΔ; dico et ΓΔ cum medio medium totum facere.



Εστω γάρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BE, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τι συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ AE, EB σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τι³ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ'

Sit enim ipsi AB congruens BE, et eadem construantur; ipsæ AE, EB igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsarum quadratis rectangulo sub ipsis. Et sunt, ut ostensum est, AE, EB commensurabiles ipsis ΓΖ, ΖΔ, et compositum ex ipsarum AE, EB quadratis composito ex quadratis ipsarum ΓΖ, ΖΔ, rectangulum autem sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ΖΔ; et ipsæ ΓΖ, ΖΔ igitur potentiâ sunt incommensurabiles, facientes et compositum ex ipsarum quadratis medium, et rectangulum sub ipsis medium, et adhuc incommensurable compositum ex ipsa-

Que la droite AB fasse avec une surface médiale un tout médial, et que ΓΔ soit commensurable avec AB; je dis que la droite ΓΔ fait aussi avec une surface médiale un tout médial.

Que BE conviène avec AB, et faisons la même construction; les droites AE, EB seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés de ces droites étant incommensurable avec le rectangle compris sous ces mêmes droites (79. 10). Et puisque les droites AE, EB sont commensurables avec les droites ΓΖ, ΖΔ, ainsi qu'on l'a démontré; que la somme des carrés des droites AE, EB est aussi commensurable avec la somme des carrés des droites ΓΖ, ΖΔ, et que le rectangle sous AE, EB l'est aussi avec le rectangle sous ΓΖ, ΖΔ, les droites ΓΖ, ΖΔ seront incommensurables en puissance, la somme de leurs carrés étant médiale, le rectangle compris sous ces mêmes droites étant aussi médial, et la somme des carrés de ces droites étant aussi incommensurable avec

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 393

αὐτῶν τετραγώνων⁴ τῷ ὑπ' αὐτῶν· ἡ ΓΔ ἄρα
μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ὅπρι
ἔδει διῆξαι.

rum quadratis rectangulo sub ipsis; ipsa igitur
ΓΔ cum medio medium totum facit, Quod
oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν
χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι
ἀποτομή, ἢ ἱλάττων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφηρήσθω τὸ
ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον¹ δυναμένη τὸ
ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι ἀποτομή, ἢ
ἱλάττων.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῇ μὲν ΒΓ
ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παρατελέσθω ὀρθογώνιον πα-
ραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῇ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφη-
ρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῇ
ΛΘ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓ, μέσον δὲ
τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν² ΒΓ τῇ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ
τῇ ΗΚ· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον

PROPOSITIO CIX.

Medio a rationali detracto, recta reliquum
spatium potens una duarum irrationalium fit,
vel apotome, vel minor.

A rationali enim ΒΓ medium auferatur ΒΔ;
dico rectam, quæ reliquum spatium ΕΓ potest,
unam duarum irrationalium fieri, vel apoto-
men, vel minorem.

Exponatur enim rationalis ΖΗ, et ipsi quidem
ΒΓ æquale ad ΖΗ applicetur rectangulum paral-
lelogrammum ΗΘ, ipsi verò ΒΔ æquale auferatur
ΗΚ; reliquum igitur ΕΓ æquale est ipsi ΛΘ.
Quoniam igitur rationale quidem est ΒΓ; me-
dium verò ΒΔ, æquale ΒΓ quidem ipsi ΗΘ, ipsum
verò ΒΔ ipsi ΗΚ; rationale quidem igitur est ΗΘ,

le rectangle compris sous ces mêmes droites, la droite ΓΔ fera avec une surface
médiale un tout médial (79. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CIX.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface rationnelle, la droite qui
peut la surface restante est une des deux irrationnelles suivantes ; savoir, ou un
apotome, ou une mineure.

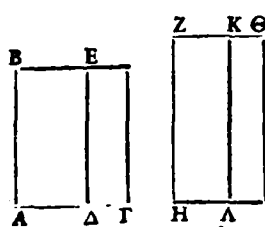
Qu'une surface médiale ΒΔ soit retranchée d'une surface rationnelle ΒΓ ; je dis que
la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes ;
savoir, ou un apotome, ou une mineure.

Car soit exposée une rationnelle ΖΗ ; appliquons à ΖΗ un parallélogramme rec-
tangle ΗΘ qui soit égal à ΒΓ, et retranchons ΗΚ égal à ΒΔ ; le reste ΕΓ sera égal à ΛΘ.
Puisque ΒΓ est rationnel, que ΒΔ est médial, que ΒΓ est égal à ΗΘ, et que ΒΔ est
égal à ΗΚ, le parallélogramme ΗΘ sera rationnel, et le parallélogramme ΗΚ mé-

394 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

δὲ τὸ HK· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται· ῥητὴ ἄρα μὲν³ ἡ ZΘ καὶ σύμμετρος τῇ ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ τῇ ZH μήκει· αἱ ZΘ, ZK ἄρα ῥηταὶ εἰς δύναμις μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ KΘ, προσαρμοζούσα δὲ αὐτῇ ἡ KZ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘZ τῆς ZK μείζον δύναται τῇ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῇ

medium verò HK; et ad rationalem ZH applicatur; rationalis igitur quidem ZΘ et commensurabilis ipsi ZH longitudine, rationalis verò ZK et incommensurabilis ipsi ZH longitudine; incommensurabilis igitur est ZΘ ipsi ZH longitudine; ipsæ ZΘ, ZK igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est KΘ, ipsi autem congruens KZ. Vel autem ΘZ quam ZK plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili.



ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘZ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ZH· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ KΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιέχον⁵ ἡ δυναμὴν ἀποτομῇ ἐστὶν· ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτί ἐστι τὸ ΓΕ, δυναμὴν ἀποτομῇ ἐστὶν. Εἰ δὲ ἡ ΘZ τῆς ZK

Possit primum quadrato ex rectâ incommensurabili. Atque est tota ΘZ commensurabilis expositæ rationali ZH longitudine; apotome igitur prima est KΘ. Spatium autem sub rationali et apotome primâ contentum recta potens apotome est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΓΕ, apotome est. Si autem ΘZ quam ZK plus

dial. Mais ces parallélogrammes sont appliqués à la rationelle ZH; la droite ZΘ est donc rationelle et commensurable en longueur avec ZH (21. 10), et la droite ZK rationelle et incommensurable en longueur avec ZH (23. 10); la droite ZΘ est donc incommensurable en longueur avec ZH (13. 10); les droites ZΘ, ZK sont donc des rationelles commensurables en puissance seulement; la droite KΘ est donc un apotome, et KZ est la droite qui convient à KΘ (74. 10): or, la puissance de ΘZ surpasse la puissance de ZK du quarré d'une droite ou commensurable ou incommensurable avec ΘZ. Qu'elle la surpasse d'abord du quarré d'une droite incommensurable. Mais la droite entière ΘZ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ZH; la droite KΘ est donc un premier apotome (déf. trois. 1. 10). Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationelle et un premier apotome est elle-même un apotome (92. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΓΕ, est donc un apotome. Si la puissance de ΘZ surpasse la puissance de ZK du quarré

μῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα^δ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιέχοντων ἡ δυναμένη ἐλάσσω ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσω ἐστίν^ε. Ὅπρι ἔδει δείξαι.

possit quadrato ex recta sibi incommensurabili, et est tota ZΘ commensurabilis expositæ rationali ZH longitudine; apotome igitur quarta est ΚΘ. Spatium autem sub rationali et apotome quartâ contentum recta potens minor est; ipsa igitur potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, minor est. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρί'.

PROPOSITIO CX.

Απὸ μίσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ πρώτη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Rationali a medio detracto, aliæ duæ irrationalæ fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum faciens.

Απὸ γὰρ μίσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἥτοι μίσης ἀποτομῇ πρώτη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

A medio enim ΒΓ rationale auferatur ΒΔ; dico rectam, quæ reliquum ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam cum rationali medium totum facientem.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβιβάσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἐστὶ δὲ ἀκαλούθως ῥητὴ

Exponatur enim rationalis ZH, et applicentur similiter spatia; est igitur consequenter rationalis

d'une droite incommensurable avec ΘΖ, la droite ΚΘ sera un quatrième apotome (déf. trois. 4. 10), parce que la droite entière ΘΖ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ. Mais la droite qui peut une surface comprise sous une rationnelle et un quatrième apotome est une mineure (95. 10); la droite qui peut la surface ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc une mineure. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CX.

Une surface rationnelle étant retranchée d'une surface médiale, il résulte deux autres irrationnelles; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

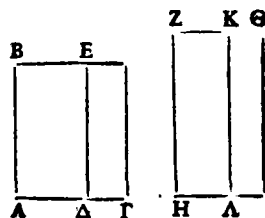
Retranchons la surface rationnelle ΒΔ de la surface mediale ΒΓ; je dis que la droite qui peut la surface restante ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un premier apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.

Car soit exposée une rationnelle ΖΗ; appliquons semblablement des surfaces à ΖΗ;

396 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Πρὶν δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. Ἦτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν

quidem ΖΘ, et incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine. Rationalis autem ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΖΗ longitudine; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΚΘ, et ipsi congruens ΖΚ. Vel autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi



ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἄρα ἐστὶ δευτέρα² ἡ ΚΘ. Πρὶν δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυνάμει, μίσης ἀποτομῇ πρώτη ἐστὶν³. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον⁴ δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ⁵, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ

commensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome igitur est secunda ΚΘ. Rationalis autem ΖΗ; quare ipsa potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome prima est. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine;

la droite ΖΘ sera conséquemment une rationnelle, et cette droite sera incommensurable en longueur avec ΖΗ (21. 10); mais la droite ΖΚ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΖΗ (23. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΚΘ est donc un apotome, et ΖΚ convient avec cette droite (74. 10). Or, la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΘΖ. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un second apotome (déf. trois. 2. 10). Mais ΖΗ est une rationnelle; la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, est donc un premier apotome d'une médiale (93. 10). Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable avec ΘΖ, à cause que la congruente ΖΚ est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 397

ΖΗ· ἀποτομή ἄρα⁶ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα ἐστίν. Ὅπερ εἶδει διῆξαι.

apotome igitur quinta est ΚΘ; quare recta potens spatium ΕΓ cum rationali medium totum facit. Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριά.

Ἀπὸ μίσου μίσου ἀφαιρουμένου ἀσύμμετρου τῷ ἔλφ, αἱ λοιπαὶ δύο ἀλλοιοὶ γίνονται, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἡ μετὰ μίσου μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφηρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μίσου τοῦ ΒΓ μίσην τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ἔλφ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλλόγων, ἥτοι μίσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἡ μετὰ τοῦ μίσου μίσην τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπὶ γὰρ μίσην ἔστιν ἑκάστηρον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ², τουτίστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι³ καὶ ἡ ΘΖ

PROPOSITIO CXI.

Medio a medio detracto incommensurabili toti, reliquæ duæ rationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum faciens.

Auferatur enim ut in propositis figuris a medio ΒΓ medium ΒΔ, incommensurabile toti; dico rectam, quæ potest spatium ΕΓ, unam esse duarum irrationalium, vel mediæ apotomen secundam, vel cum medio medium totum facientem.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum ΒΓ, ΒΔ, et incommensurabile est ΒΓ ipsi ΒΔ, hoc est ΗΘ ipsi ΗΚ, incommensurabilis

ΖΗ, la droite ΚΘ sera un cinquième apotome (déf. trois. 5. 10); la droite qui peut la surface ΕΓ fait donc avec une surface rationelle un tout médial (96. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION CXI.

Une surface médiale étant retranchée d'une surface médiale incommensurable avec la surface entière, il résulte deux droites irrationnelles; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

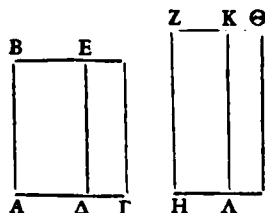
Retranchons, comme dans les figures précédentes, de la surface médiale ΒΓ la surface médiale ΒΔ, incommensurable avec la surface entière; je dis que la droite qui peut ΕΓ est une des deux irrationnelles suivantes; savoir, ou un second apotome d'une médiale, ou une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

Car puisque chacun des parallélogrammes ΒΓ, ΒΔ est médial, et que ΒΓ est incommensurable avec ΒΔ, c'est-à-dire ΗΘ avec ΗΚ, la droite ΘΖ sera incom-

398 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί· εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Εἰ μὲν δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει⁵. ἀποτομή ἐστὶν ἄρα τρίτη⁶ ἡ ΚΘ. Ρητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης

est et ΘΖ ipsi ΖΚ; ipsæ ΘΖ, ΖΚ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles; apotome igitur est ΘΚ. Si quidem igitur ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ longitudine; apotome est igitur tertia ΚΘ. Rationalis autem ΚΛ, rectangulum verò sub ratio-



περιχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυνάμειν αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μίσης ἀποτομή δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τούτῃς τὸ ΕΓ δυνάμειν μίσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα⁷. Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα⁸ τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστὶν ἄρα ἕκτη ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ

nali et apotome tertiâ contentum irrationale est, et recta potens ipsum irrationalis est, vocatur autem mediæ apotome secunda; quare recta potens spatium ΛΘ, hoc est ΕΓ, mediæ apotome est secunda. Si autem ΘΖ quam ΖΚ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili longitudine, et neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est ipsi ΖΗ longitudine; apotome est igitur sexta ΚΘ. Rectangulum autem sub rationali et apotome

mesurable avec ΖΚ (1. 6 et 10. 10); les droites ΘΖ, ΖΚ sont donc de rationnelles commensurables en puissance seulement (23. 10); la droite ΘΚ est donc un apotome (74. 10). Si donc la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite commensurable avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec la rationnelle exposée ΖΗ, la droite ΚΘ sera un troisième apotome (déf. 3. 10). Puisque ΚΛ est une rationnelle, que le rectangle compris sous une rationnelle et un troisième apotome est irrationnel (94. 10), que la droite qui peut cette surface est irrationnelle, et que cette droite est appelée second apotome d'une médiale, la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire ΕΓ, sera un second apotome d'une médiale. Si la puissance de ΘΖ surpasse la puissance de ΖΚ du quarré d'une droite incommensurable en longueur avec ΘΖ; et si aucune des droites ΘΖ, ΖΚ n'est commensurable en longueur avec ΖΗ, la droite ΚΘ sera un sixième apotome (déf. trois. 6. 10). Mais la droite qui peut un rectangle

ἀποτομῆς ἑκτῆς ἢ δυναμένη ἔστιν ἡ¹⁰ μετὰ μέ-
σου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα· ἢ τὸ ΛΘ ἄρα¹¹,
τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον
τὸ ὅλον ποιούσα ἔστιν. Ὅπρι ἴδει διῆξαι.

sexiâ recta potens est quæ cum medio medium
totum facit; ipsa igitur potens spatium ΛΘ,
hoc est ΕΓ, cum medio medium totum facit.
Quod oportebat ostendere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριζ'.

PROPOSITIO CXII.

Ἡ ἀποτομή οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο
ὀνομάτων.

Ἐστω ἀποτομή ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ
ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ
ἡ ΔΓ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν
ΔΓ παραβελήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος
ποιοῦν τὴν ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἔστιν ἡ ΑΒ,
ἀποτομή πρώτη ἔστιν ἡ ΔΕ. Ἐστω αὐτῇ προσαρ-
μόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταὶ εἰς δι-
νάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον
δύναται τὸ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ

Apotome non est eadem quæ ex binis no-
minibus.

Sit apotome ΑΒ; dico ΑΒ non esse eamdem
quæ ex binis nominibus.

Si enim possibile, sit; et exponatur ratio-
nalis ΔΓ, et quadrato ex ΑΒ æquale ad ratio-
nalem ΔΓ applicetur rectangulum ΓΕ, latitudi-
nem faciens ΔΕ. Quoniam igitur apotome est
ΑΒ, apotome prima est ΔΕ. Sit ipsi congruens
ΕΖ; ipsæ ΔΖ, ΖΕ igitur rationales sunt poten-
tiâ solùm commensurabiles, et ΔΖ quam ΖΕ
plus potest quadrato ex rectâ sibi commensu-

compris sous une rationnelle et un sixième apotome, est une droite qui fait avec
une surface médiale un tout médial (97. 10); la droite qui peut ΛΘ, c'est-à-dire
ΕΓ, est donc une droite qui fait avec une surface médiale un tout médial. Ce qu'il
fallait démontrer.

PROPOSITION CXII.

Un apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms.

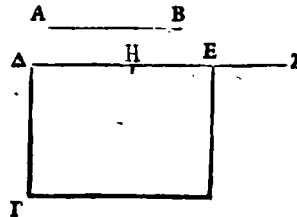
Soit l'apotome ΑΒ; je dis que ΑΒ n'est pas la même droite que celle de
deux noms.

Car que cela soit, si c'est possible; soit exposée une rationnelle ΔΓ, et appliquons
à la rationnelle ΔΓ un rectangle ΓΕ, qui étant égal au carré de ΑΒ, ait ΔΕ pour largeur
(45. 1). Puisque la droite ΑΒ est un apotome, la droite ΔΕ sera un premier apo-
tome (98. 10). Que ΕΖ convienne avec ΔΕ; les droites ΔΖ, ΖΕ seront des rationnelles
commensurables en puissance salement; la puissance de ΔΖ surpassera la puis-
sance de ΖΕ du carré d'une droite commensurable avec ΔΖ, et ΔΖ sera com-

400 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ² ἐκ δύο ὀνομάτων ἔστιν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἔστιν³ ἡ ΔΕ. Διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἡ ΔΗ

rabili, et ΔΖ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine. Rursus, quoniam ex binis nominibus est ΑΒ; ex binis igitur nominibus prima est ΔΕ. Dividatur in nomina ad punctum Η, et sit majus nomen ΔΗ; ipsæ ΔΗ, ΗΕ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et ΔΗ quam ΗΕ plus potest



τῆς ΗΕ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρος ἔστι τῇ ἐκκειμένη ρητῇ τῇ ΔΓ μήκει· καὶ⁴ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρος ἔστι μήκει· καὶ λοιπῇ ἄρα τῇ⁵ ΖΗ σύμμετρος ἔστιν ἡ⁶ ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἔστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ρητὴ δὲ ἔστιν ἡ ΔΖ· ρητὴ ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἔστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει⁷, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἔστι καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ

quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et major ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΔΓ longitudine; et ΔΖ igitur ipsi ΔΗ commensurabilis est longitudine; et reliquæ igitur ΖΗ commensurabilis est ΔΖ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ, rationalis autem est ΔΖ; rationalis igitur est et ΖΗ. Quoniam igitur commensurabilis est ΔΖ ipsi ΖΗ longitudine, incommensurabilis autem ΔΖ ipsi ΖΕ longitudine; incommensurabilis igitur est et ΖΗ

mesurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΓ (déf. trois. 1. 10). De plus, puisque ΑΒ est une droite de deux noms, la droite ΔΕ sera une première de deux noms (61. 10). Que ΔΕ soit divisée en ses noms au point Η, et que ΔΗ soit son plus grand nom; les droites ΔΗ, ΗΕ seront des rationelles commensurables en puissance seulement (déf. sec. 1. 10). Mais la puissance de ΔΗ surpasse la puissance de ΗΕ du carré d'une droite commensurable avec ΔΗ, et la plus grande droite ΔΗ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée ΔΓ; la droite ΔΖ est donc commensurable en longueur avec ΔΗ (12. 10); la droite ΔΖ est donc commensurable avec la droite restante ΗΖ. Et puisque ΔΖ est commensurable avec ΖΗ, et que ΔΖ est rationelle, la droite ΖΗ sera rationelle. Et puisque ΔΖ est commensurable en longueur avec ΖΗ, et que la droite ΔΖ est incommensurable en longueur avec ΖΕ, la droite ΖΗ sera incommensurable en longueur avec la

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 401

μήκει. Καὶ εἰσι ρηταί⁸. αἱ HZ, ZE ἄρα ρηταί
εἰσι⁹ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα
ἔστιν ἡ HE. Ἀλλὰ καὶ ρητὴ, ὅπερ, ἐστὶν¹⁰
ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομή, καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsi EZ. Et sunt rationales; ipsæ HZ, ZE igitur
rationales sunt potentiâ solum commensurabiles;
apotome igitur est HE. Sed et rationalis, quod
est impossibile.

Apotome igitur, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἡ ἀποτομή καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε
τῇ μίσει οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν
γὰρ ἀπὸ μίσεως παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον
πλάτος ποιεῖ ρητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ'
ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς
παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀπο-
τομὴν πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως ἀποτομῆς
πρώτης παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος
ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ μίσεως
ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ρητὴν παραβαλλό-
μενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. Τὸ δὲ
ἀπὸ ἐλάττωτος παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον

COROLLARIUM.

Apotome et quæ post ipsam irrationales neque
mediæ neque inter se sunt eædem; quadratum
quidem enim ex mediâ ad rationalem applicatum
latitudinem facit rationalem et incommensura-
bilem ipsi ad quam applicatur longitudine. Qua-
dratum autem ex apotome ad rationalem appli-
catum latitudinem facit apotomen primam. Qua-
dratum autem ex mediâ apotome primâ ad
rationalem applicatum latitudinem facit apo-
tomen secundam. Quadratum autem ex mediâ
apotome secundâ ad rationalem applicatum lati-
tudinem facit apotomen tertiam. Quadratum
autem ex minori ad rationalem applicatum

droite EZ ; mais ces droites sont rationnelles ; les droites HZ, ZE sont donc des
rationnelles commensurables en puissance seulement ; la droite HE est donc un
apotome (74. 10). Mais elle est aussi rationnelle, ce qui est impossible. Un
apotome, etc.

C O R O L L A I R E.

L'apotome et les irrationnelles qui la suivent ne sont ni médiales, ni les mêmes
entr'elles ; car le quarré d'une mediale étant appliqué à une rationelle fait une
largeur rationelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est
appliquée (23. 10). Le quarré d'un apotome étant appliqué à une rationelle fait une
largeur qui est un premier apotome (98. 10) ; le quarré d'un premier apotome
d'une mediale étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un second
apotome (99. 10) ; le quarré d'un second apotome d'une mediale étant appliqué
à une rationelle fait une largeur qui est un troisième apotome (100. 10) ; le quarré
d'une mineure étant appliqué à une rationelle fait une largeur qui est un qua-

πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μείσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μείσου μείσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦτε¹ πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἐστίν· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ² τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἀλλοιοὶ διαφέρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὔσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μὲν³ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολουθῶς ἐκάστη τῇ τάξει τῇ⁴ καθ' αὐτήν· αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολουθῶς· ἑτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἑτεραι αἱ μετὰ⁵ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ἰγ'.

latitudinem facit apotomen quartam. Quadratum verò ex rectâ quæ cum rationali medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam. Quadratum autem ex rectâ quæ cum medio medium totum facit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. Quoniam igitur dictæ latitudines differunt et a primâ et inter se; a primâ quidem, quod rationalis sit; inter se verò, quod ordine non sint eædem; manifestum et ipsas irrationales differre inter se. Et quoniam demonstratum est apotomen non esse eamdem quæ ex binis nominibus; faciunt autem latitudines ad rationalem applicatæ post apotomen apotomas consequenter eodem ordine quæ post ipsam; ipsæ verò post ipsam ex binis nominibus latitudines ex binis nominibus, et quæ sunt eodem ordine congruenter; aliæ igitur sunt quæ post apotomen, et aliæ quæ post ipsam ex binis nominibus, ita ut sint ordine omnes irrationales tredecim,

trième apotome (101. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface rationelle un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un cinquième apotome (102. 10); le carré d'une droite, qui fait avec une surface médiale un tout médial, étant appliqué à une rationelle fait un sixième apotome (103. 10). Puis donc que les largeurs dont nous venons de parler diffèrent de la première droite et entr'elles; qu'elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationelle, et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre, il est évident que ces irrationelles sont différentes entr'elles. Et puisqu'on a démontré que l'apotome n'est pas la même droite que celle de deux noms (112. 10), que les carrés de l'apotome et des droites qui viennent ensuite étant appliqués à une rationelle font des largeurs qui sont des apotomes du même ordre que les droites qui suivent l'apotome, et que les carrés de la droite de deux noms, et des droites qui viennent ensuite, étant appliqués à une rationelle, font des largeurs qui sont des droites de deux noms du même ordre que celles qui suivent la droite de deux noms (61, 62, 63, 64, 65 et 66. 10); les droites qui suivent l'apotome et la droite de deux noms sont donc différentes entr'elles, de manière que toutes ces irrationelles sont au nombre de treize.

- α. Μίσσην.
 β. Εκ δύο ὀνομάτων.
 γ. Εκ δύο μίσων πρώτην.
 δ. Εκ δύο μίσων δευτέραν.
 ε. Μείζονα.
 ς. Ρητὸν καὶ μίσον δυναμένην.
 ζ. Δύς μίσα δυναμένην.
 η. Αποτομήν.
 θ. Μίσσης⁶ ἀποτομὴν πρώτην.
 ι. Μίσσης⁷ ἀποτομὴν διυτέραν.
 ια. Ελάχιστα.
 ιβ. Μετὰ ῥητοῦ μίσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
 ιγ. Μετὰ μίσου μίσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

1. Media.
 2. Recta ex binis nominibus.
 3. Ex binis mediis prima.
 4. Ex binis mediis secunda.
 5. Major.
 6. Rationale et medium potens.
 7. Bina media potens.
 8. Apotome.
 9. Mediæ apotome prima.
 10. Mediæ apotome secunda.
 11. Minor.
 12. Cum rationali medium totum faciens.
 15. Cum medio medium totum faciens.

1. La médiale.
 2. La droite de deux noms.
 3. La première de deux médiales.
 4. La seconde de deux médiales.
 5. La majeure.
 6. La droite qui peut une surface rationnelle et une surface médiale.
 7. La droite qui peut deux surfaces médiales.
 8. L'apotome.
 9. Le premier apotome d'une médiale.
 10. Le second apotome d'une médiale.
 11. La mineure.
 12. La droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.
 13. La droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.

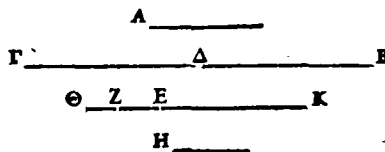
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων
 παραβαλλόμενον πλάτος ποιῶ ἀποτομὴν, ἥς
 τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο
 ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ·
 καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἔξει
 τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων διὰ ἡ ΒΓ, ἥς μιᾶς ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λίγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔχει³ τάξιν τῇ ΒΓ.

Quadratum ex rationali ad rectam ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus rectæ ex binis nominibus, et adhuc in eâdem ratione; et adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem recta ex binis nominibus.

Sit rationalis quidem A , ex binis nominibus
verò EF , cujus majus nomen sit $\Gamma\Delta$, et quadrato
ex A æquale sit rectangulum sub $B\Gamma$, EZ ; dico
 EZ apotomen esse, cujus nomina commensura-
bilia sunt ipsis $\Gamma\Delta$, ΔB , et in eâdem ratione, et
adhuc EZ eundem habituram ordinem quem $B\Gamma$.



Εστω γὰρ πάλιν τῇ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ
 ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ
 ἴσον ἰστί τῇ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ

Sit enim rursus quadrato ex A æquale rectan-
gulum sub $\text{B}\Delta$, H. Quoniam igitur rectangulum
sub $\text{B}\Gamma$, EZ æquale est rectangulo sub $\text{B}\Delta$, H;

PROPOSITION CXIII.

Le carré d'une rationnelle étant appliqué à une droite de deux noms fait une largeur qui est un apotome, dont les noms sont commensurables avec les noms de la droite de deux noms, et ces noms sont en même raison; et de plus, l'apotome qui en résulte sera du même ordre que la droite de deux noms.

Soit A une rationnelle, et BR une droite de deux noms, dont le plus grand nom soit $\Gamma\Delta$; que le rectangle sous BR, EZ soit égal au carré de A; je dis que EZ est un apotome dont les noms sont commensurables avec les droites $\Gamma\Delta$, ΔB , et en même raison que ces droites, et que EZ sera du même ordre que BR.

Que le rectangle sous $\text{B}\Delta$, H soit encore égal au quarré de A . Puisque le rectangle sous $\text{B}\Gamma$, EZ est égal au rectangle sous $\text{B}\Delta$, H , la droite rB sera à $\text{B}\Delta$ comme H

πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἢ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἢ Η τῆς ΕΖ. Ἐστω τῇ Η ἴση ἢ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἔστιν⁵ ὡς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γιγνέτω ὡς ἢ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἢ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἔστιν ὡς ἢ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγούμενων⁶ πρὸς ἐν τῶν ἱπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἱπόμυνα. Ὡς δὲ ἢ ΖΚ πρὸς τὴν⁷ ΚΕ οὕτως ἔστιν ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΘΚ πρὸς τὴν⁸ ΚΖ οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ⁹ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ οὕτως ἢ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἢ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἢ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἐστὶ¹⁰ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ¹¹ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΚ, ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ

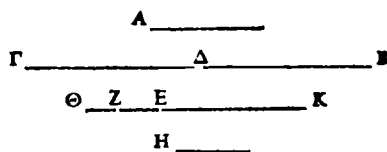
est igitur ut ΓB ad $B\Delta$ ita H ad EZ . Major autem ΓB quam $B\Delta$; major igitur et H quam EZ . Sit ipsi H æqualis $E\Theta$; est igitur ut ΓB ad $B\Delta$ ita ΘE ad EZ ; dividendo igitur est ut $\Gamma\Delta$ ad $B\Delta$ ita ΘZ ad ZE . Fiat ut ΘZ ad ZE ita ZK ad KE ; et tota igitur ΘK ad totam KZ est ut ZK ad KE , ut enim unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Ut autem ZK ad KE ita est $\Gamma\Delta$ ad ΔB ; et ut igitur ΘK ad KZ ita $\Gamma\Delta$ ad ΔB . Commensurabile autem ex $\Gamma\Delta$ quadratum quadrato ex ΔB ; commensurabile igitur est et ex ΘK quadratum quadrato ex KZ . Atque est ut ex ΘK quadratum ad ipsum ex KZ ita ΘK ad KE , quoniam tres rectæ ΘK , KZ , KE proportionales sunt; commensurabilis igitur ΘK ipsi KE longitudine; quare et ΘE ipsi EK commensurabilis est longitudine. Et quoniam quadratum ex A æquale est rectangulo sub ΘE , $B\Delta$, rationale autem est quadratum ex A ; rationale igitur est et rectangulum sub ΘK , $B\Delta$. Et

est à EZ (16. 6). Mais ΓB est plus grand que $B\Delta$; la droite H est donc plus grande que EZ . Que $E\Theta$ soit égal à H , la droite ΓB sera à $B\Delta$ comme ΘE est à EZ ; donc, par soustraction, $\Gamma\Delta$ est à $B\Delta$ comme ΘZ est à ZE (17. 5). Faisons en sorte que ΘZ soit à ZE comme ZK est à KE ; la droite entière ΘK sera à la droite entière KZ comme ZK est à KE ; car un antécédent est à un conséquent comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents (12. 5). Mais ZK est à KE comme $\Gamma\Delta$ est à ΔB ; la droite ΘK est donc à KZ comme $\Gamma\Delta$ est à ΔB ; mais le quarré de $\Gamma\Delta$ est commensurable avec le quarré de ΔB (37. 10); le quarré de ΘK est donc commensurable avec le quarré de KZ (10. 10). Mais le quarré de ΘK est au quarré de KZ comme ΘK est à KE , parce que les trois droites ΘK , KZ , KE sont proportionnelles (20. cor. 2. 6); la droite ΘK est donc commensurable en longueur avec KE ; la droite ΘE est donc aussi commensurable en longueur avec EK (16. 10). Et puisque le quarré de A est égal au rectangle sous ΘE , $B\Delta$, et que le quarré de A est rationel, le rectangle sous ΘK , $B\Delta$ sera rationel. Mais ce rectangle est appliqué à la rationelle $B\Delta$; la droite

406 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν¹² ΔΒ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν¹³ ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει¹⁴. ῥητὴ

ad rationalem ΒΔ applicatur; rationalis igitur est ΕΘ et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine; quare et ipsi commensurabilis ΕΚ rationalis est et commensurabilis ipsi ΒΔ longitudine. Quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ, ipsæ autem ΓΔ, ΔΒ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Rationalis autem est ΚΕ, et commensurabilis ipsi ΒΔ lon-



ἄρα ἐστὶ¹⁵ καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει¹⁶. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ¹⁷ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἦτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυνμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ¹⁸, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

gitudine; rationalis igitur est et ΖΚ, et commensurabilis ipsi ΓΔ longitudine; ipsæ ΖΚ, ΚΕ igitur rationales potentiâ solùm sunt commensurabiles; apotome igitur est ΕΖ. Vel autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, vel quadrato ex rectâ incommensurabili. Si quidem igitur ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex

ΘΕ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ (21. 10); la droite ΕΚ, qui est commensurable avec ΘΕ, est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΒΔ. Et puisque ΓΔ est à ΔΒ comme ΖΚ est à ΚΕ, et que les droites ΓΔ, ΔΒ sont commensurables en puissance seulement, les droites ΖΚ, ΚΕ seront commensurables en puissance seulement. Mais ΚΕ est rationnelle, et commensurable en longueur avec ΒΔ; la droite ΖΚ est donc rationnelle et commensurable en longueur avec ΓΔ; les droites ΖΚ, ΚΕ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement; la droite ΕΖ est donc un apotome (74. 10). Mais la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite commensurable ou incommensurable avec ΓΔ. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du carré d'une droite commensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du carré d'une droite commensurable avec ΖΚ, et

Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα¹⁹ τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα²⁰ τῶν ΖΚ, ΚΕ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ²¹. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἑκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. Εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα²² τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστὶν ἡ ΖΕ, ἥς τὰ ὀνόματα τὰ²³ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει²⁴ τῇ ΒΓ. Οἷον ἴδει δείξαι.

rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΓΔ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si autem neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ. Si autem ΓΔ quam ΔΒ plus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΖΚ quam ΚΕ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΚ. Si autem ΒΔ, et ipsa ΚΕ. Si verò neutra ipsarum ΓΔ, ΔΒ, et neutra ipsarum ΖΚ, ΚΕ; quare apotome est ΖΕ, cujus nomina ΖΚ, ΚΕ commensurabilia sunt nominibus ΓΔ, ΔΒ rectæ ex binis nominibus, et in eâdem ratione, et eundem habebit ordinem quem ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi; si ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, ΚΕ lui sera aussi commensurable; et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable. Si la puissance de ΓΔ surpasse la puissance de ΔΒ du quarré d'une droite incommensurable avec ΓΔ, la puissance de ΖΚ surpassera la puissance de ΚΕ du quarré d'une droite incommensurable avec ΖΚ. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΚ le sera aussi; si la droite ΒΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΕ lui sera aussi commensurable. Et si aucune des droites ΓΔ, ΔΒ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΖΚ, ΚΕ ne lui sera commensurable; la droite ΖΕ est donc un apotome, dont les noms ΖΚ, ΚΕ sont commensurables avec les noms ΓΔ, ΔΒ d'une droite de deux noms, et en même raison qu'eux; et la droite ΖΕ sera du même ordre que ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

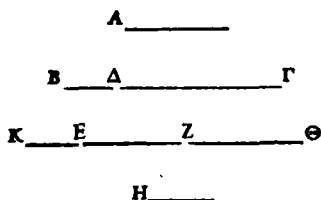
PROPOSITIO CXIV.

Τὸ ἀπὸ ρητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γενόμενη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἐστω ρητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομή δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἴστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ρητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀπο-

Quadratum ex rationali ad apotomen applicatum latitudinem facit rectam ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; adhuc autem quæ fit ex binis nominibus eundem ordinem habet quem apotome.

Sit rationalis quidem Α, apotome verò ΒΔ; et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΔ, ΚΘ, ita ut quadratum ex rationali Α ad



τομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι καὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

apotomen ΒΔ applicatum latitudinem faciat ΚΘ; dico et ex binis nominibus esse ΚΘ; cujus nomina commensurabilia sunt ipsius ΒΔ nominibus, et in eadem ratione, et adhuc ΚΘ eundem habere ordinem quem ΒΔ.

PROPOSITION CXIV.

Le carré d'une rationnelle appliqué à un apotome fait une largeur qui est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, cette droite de deux noms est du même ordre que l'apotome.

Soit la rationnelle Α, et l'apotome ΒΔ; que le rectangle sous ΒΔ, ΚΘ soit égal au carré de Α, de manière que le carré de la rationnelle Α étant appliqué à l'apotome ΒΔ ait ΚΘ pour largeur; je dis que ΚΘ est une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de ΒΔ, et en même raison qu'eux, et que ΚΘ est du même ordre que ΒΔ.

Εστω γάρ τῇ ΒΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω⁴ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβηται⁵ ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ⁶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΗΓ. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέφαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτίστιν ὡς⁸ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ⁹ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως¹⁰ ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως¹¹ ἡ ΟΖ πρὸς τὴν

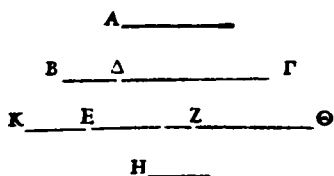
Sit enim ipsi ΒΔ congruens ΔΓ; ipsæ ΒΓ, ΓΔ igitur rationales sunt potentiâ solùm commensurabiles. Et quadrato ex Α æquale sit rectangulum sub ΒΓ, Η. Rationale autem quadratum ex Α; rationale igitur et rectangulum sub ΒΓ, Η. Et ad rationalem ΒΓ applicatur; rationalis igitur est Η, et commensurabilis ipsi ΒΓ longitudine. Quoniam igitur rectangulum sub ΒΓ, Η æquale est rectangulo sub ΒΔ, ΚΘ, proportionaliter igitur est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. Major autem ΓΒ quam ΒΔ; major igitur et ΚΘ quam Η. Ponatur ipsi Η æqualis ΚΕ; commensurabilis igitur est ΚΕ ipsi ΒΓ longitudine. Et quoniam est ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΚ ad ΚΕ; convertendo igitur est ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΕ. Fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΟΖ ad ΖΕ; et reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ est ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc est ut ΒΓ ad ΓΔ. Ipsæ autem ΒΓ, ΓΔ potentiâ solùm sunt commensurabiles; et ipsæ ΚΖ, ΖΘ igitur potentiâ solùm sunt commensurabiles. Et quoniam est ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΚΖ ad ΖΘ, sed ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΟΖ ad ΖΕ; et ut igitur ΚΖ ad ΖΘ

Car que ΔΓ conviène avec ΒΔ, les droites ΒΓ, ΓΔ seront des rationnelles commensurables en puissance seulement (74. 10). Que le rectangle sous ΒΓ, Η soit égal au quarré de Α. Puisque le quarré de Α est rationel, le rectangle sous ΒΓ, Η sera aussi rationel. Mais il est appliqué à la rationelle ΒΓ; la droite Η est donc rationnelle, et commensurable en longueur avec ΒΓ (21. 10). Et puisque le rectangle sous ΒΓ, Η est égal au rectangle sous ΒΔ, ΚΘ, la droite ΓΒ sera à la droite ΒΔ comme ΚΘ est à Η (16. 6). Mais la droite ΓΒ est plus grande que ΒΔ; la droite ΚΘ est donc plus grande que la droite Η. Faisons ΚΕ égale à Η; la droite ΚΕ sera commensurable en longueur avec ΒΓ. Et puisque ΓΒ est à ΒΔ comme ΘΚ est à ΚΕ, par conversion ΒΓ sera à ΓΔ comme ΚΘ est à ΘΕ. Faisons en sorte que ΚΘ soit à ΘΕ comme ΟΖ est à ΖΕ, la droite restante ΚΖ sera à ΖΘ comme ΚΘ est à ΘΕ, c'est-à-dire comme ΒΓ est à ΓΔ (19. 5). Mais les droites ΒΓ, ΓΔ sont commensurables en puissance seulement; les droites ΚΖ, ΖΘ sont donc commensurables en puissance seulement. Et puisque ΚΘ est à ΘΕ comme ΚΖ est à ΖΘ, et que ΚΘ est à ΘΕ comme ΟΖ est à ΖΕ; la droite

410 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ZE· καὶ ὡς ἄρα ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ οὕτως¹²
ἡ ΘZ πρὸς τὴν ZE· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη
πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης¹³
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ KZ
πρὸς τὴν ZE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς KZ πρὸς τὸ
ἀπὸ τῆς ZΘ. Σύμμετρον δὲ ἴστι τὸ ἀπὸ τῆς
KZ τῇ ἀπὸ τῆς ZΘ, αἱ γὰρ KZ, ZΘ δυνάμεις
εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἴστι¹⁴ καὶ ἡ KZ τῇ

ita ΘZ ad ZE; quare et ut prima ad tertiam
ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ;
et ut igitur KZ ad ZE ita ex KZ quadratum ad
ipsum ex ZΘ. Commensurable autem est ex KZ
quadratum quadrato ex ZΘ, ipsæ enim KZ, ZΘ
potentiâ sunt commensurabiles; commensura-
bilis igitur est et KZ ipsi ZE longitudine; quare ZK



ZE μήκει· ὥστε ἡ ZK καὶ τῇ KE σύμμετρος ἴστι¹⁵
μήκει. Ρητὴ δὲ ἴστιν ἡ KE, καὶ σύμμετρος τῇ
BΓ μήκει· ρητὴ ἄρα καὶ ἡ KZ, καὶ σύμμετρος
τῇ BΓ μήκει. Καὶ ἵπαι ἴστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς
τὴν ΓΔ οὕτως ἡ KZ πρὸς τὴν ZΘ· ἑναλλάξ
ἄρα¹⁶ ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν KZ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς
τὴν ZΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ BΓ τῇ KZ· σύμμετρος
ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ZΘ¹⁷ μήκει. Αἱ δὲ BΓ, ΓΔ¹⁸
ρηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ
KZ, ZΘ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυνάμεις μόνον σύμμε-

et ipsi KE commensurabilis est longitudine. Ra-
tionalis autem est KE, et commensurabilis ipsi BΓ
longitudine; rationalis igitur et KZ, et commen-
surabilis ipsi BΓ longitudine. Et quoniam est ut
BΓ ad ΓΔ ita KZ ad ZΘ; permutando igitur ut
BΓ ad KZ ita ΔΓ ad ZΘ. Commensurabilis
autem BΓ ipsi KZ; commensurabilis igitur et
ΓΔ ipsi ZΘ longitudine. Ipsæ autem BΓ, ΓΔ ra-
tionales sunt potentiâ solùm commensurabiles;
et ipsæ KZ, ZΘ igitur rationales sunt potentiâ

KZ sera à ZΘ comme ΘZ est à ZE; la première droite est donc à la troisième
comme le quarré de la première est au quarré de la seconde (20. cor. 2. 6); la
droite KZ est donc à ZE comme le quarré de KZ est au quarré de ZΘ; mais le quarré
de KZ est commensurable avec le quarré de ZΘ, parce que les droites KZ, ZΘ sont com-
mensurables en puissance; la droite KZ est donc commensurable en longueur avec
ZE; la droite ZK est donc commensurable en longueur avec KE (16. 10). Mais KE est
rationnelle, et commensurable en longueur avec BΓ; la droite KZ est donc rationnelle,
et commensurable en longueur avec BΓ. Et puisque BΓ est à ΓΔ comme KZ est à
ZΘ, par permutation BΓ sera à KZ comme ΔΓ est à ZΘ. Mais BΓ est commensurable
avec KZ; la droite ΓΔ est donc commensurable en longueur avec ZΘ (10. 10). Mais
les droites BΓ, ΓΔ sont des rationnelles commensurables en puissance seulement; les
droites KZ, ZΘ sont donc des rationnelles commensurables en puissance seulement;

τροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἴστιν¹⁹ ἡ ΚΘ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζον δυνήσεται²⁰ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ²¹ οὐδέτερά τῶν ΚΖ, ΖΘ. Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζον δυνήσεται²² τῷ ἀπὸ ἀσυσμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδέτερά τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ²³ οὐδέτερά τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἴστιν ἡ ΚΘ, ἥς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι²⁴ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν. Ὅπῃ ἑδὲ διῆξαι.

solum commensurabiles; ex binis igitur nominibus est ΚΘ. Si quidem igitur ΒΓ quam ΓΔ plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi commensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ commensurabilis est expositæ rationali longitudine, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ. Si autem ΒΓ quam ΓΔ plus possit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, et ΚΖ quam ΖΘ plus poterit quadrato ex rectâ sibi incommensurabili. Et si quidem commensurabilis est ΒΓ expositæ rationali longitudine, et ipsa ΚΖ. Si verò ΓΔ, et ipsa ΖΘ. Si autem neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, et neutra ipsarum ΚΖ, ΖΘ; ex binis igitur nominibus est ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commensurabilia sunt apotomæ nominibus ΒΓ, ΓΔ, et in eâdem ratione; et adhuc ΚΘ eundem quem ΒΓ habet ordinem. Quod oportebat ostendere.

la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms (37. 10). Si donc la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite commensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite commensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable avec la rationelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle. Si la puissance de ΒΓ surpasse la puissance de ΓΔ du quarré d'une droite incommensurable avec ΒΓ, la puissance de ΚΖ surpassera la puissance de ΖΘ du quarré d'une droite incommensurable avec ΚΖ. Si ΒΓ est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, la droite ΚΖ lui sera commensurable. Si ΓΔ est commensurable avec la rationelle exposée, la droite ΖΘ le sera aussi; et si aucune des droites ΒΓ, ΓΔ n'est commensurable en longueur avec la rationelle exposée, aucune des droites ΚΖ, ΖΘ ne sera commensurable avec elle; la droite ΚΘ est donc une droite de deux noms, dont les noms ΚΖ, ΖΘ sont commensurables avec les noms ΒΓ, ΓΔ de cet apotome, et en même raison qu'eux; et de plus, ΚΘ sera du même ordre que ΒΓ (déf. sec. et tr. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρι'.
ρβ.

Εὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἥς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τί' ἐστὶ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστὶ.

Περιείσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς AB, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἥς μείζον ὀνομά ἐστὶ τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τι τοῖς² τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς AZ, ZB, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω ἡ³ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ Η.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβελήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἥς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ, σύμμετρά τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τί⁴ εἰσι ταῖς AZ, ZB, καὶ ἐν τῷ

PROPOSITIO CXV.

Si spatium contineatur sub apotome et recta ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, et in eadem ratione; recta spatium potens rationalis est.

Contineatur enim spatium sub AB, ΓΔ, sub apotome AB, et recta ΓΔ ex binis nominibus, cujus majus nomen est ΓΕ; et sint nomina ΓΕ, ΕΔ rectæ ex binis nominibus commensurabilia et apotomæ nominibus AZ, ZB, et in eadem ratione; et sit recta Η spatium sub AB, ΓΔ potens; dico rationalem esse ipsam Η.

Exponatur enim rationalis Θ, et quadrato ex Θ æquale ad ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΚΛ; apotome igitur est ΚΛ, cujus nomina sint ΚΜ, ΜΛ, commensurabilia nominibus ΓΕ, ΕΔ rectæ ex binis nominibus, et in eadem ratione. Sed et ipsæ ΓΕ, ΕΔ commensurabiles sunt ipsis AZ, ZB, et in eadem ratione; est igitur

PROPOSITION CXV.

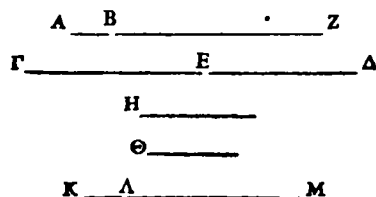
Si une surface est comprise sous un apotome et une droite de deux noms, dont les noms sont commensurables avec les noms de l'apotome, et en même raison qu'eux, la droite qui peut cette surface est rationelle.

Qu'une surface soit comprise sous AB, ΓΔ, c'est-à-dire sous un apotome AB, et sous une droite de deux noms ΓΔ, dont ΓΕ est le plus grand nom; que les noms ΓΕ, ΕΔ de la droite de deux noms soient commensurables avec les noms AZ, ZB de l'apotome AB, et en même raison qu'eux; et que Η soit la droite qui peut la surface comprise sous AB, ΓΔ; je dis que la droite Η est rationelle.

Car soit exposée la rationelle Θ; appliquons à ΓΔ un parallélogramme, qui étant égal au carré de Θ, ait ΚΛ pour largeur (45. 1); la droite ΚΛ sera un apotome, dont les noms ΚΜ, ΜΛ seront commensurables avec les noms ΓΕ, ΕΔ de la droite de deux noms, et en même raison qu'eux (113. 10). Mais les droites ΓΕ, ΕΔ sont commensurables avec les droites AZ, ZB, et en même raison qu'elles; la droite AZ est

αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB οὕτως ἡ KM πρὸς τὴν MA⁵. ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν AM· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν KA ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM⁶. Σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM· σύμμετρος ἄρα ἔστι⁷ καὶ ἡ AB τῇ KA. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν⁸ KA οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, KA.

ut AZ ad ZB ita KM ad MA; permutando igitur est ut AZ ad KM ita ZB ad AM; et reliqua igitur AB ad reliquam KA est ut AZ ad KM. Commensurabilis autem AZ ipsi KM; commensurabilis igitur est et AB ipsi KA. Atque est ut AB ad KA ita sub ΓΔ, AB rectangulum ad ipsum sub ΓΔ, KA; commensu-



σύμμετρον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ὑπὸ τῶν⁹ ΓΔ, KA. Ἰσὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, KA τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἔστι τῷ¹⁰ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ¹¹ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἔστι¹² καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἔστιν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB.

rabile igitur est et sub ΓΔ, AB rectangulum rectangulo sub ΓΔ, KA. Æquale autem sub ΓΔ, KA rectangulum quadrato ex Θ; commensurabile igitur est sub ΓΔ, AB rectangulum quadrato ex Θ. Rectangulum autem sub ΓΔ, AB æquale est quadrato ex Η; commensurabile igitur et ex Η quadratum quadrato ex Θ. Rationale autem quadratum ex Θ; rationale igitur est et quadratum ex Η; rationalis igitur est Η, et potest spatium sub ΓΔ, AB.

Εὰν ἄρα χωρίον, καὶ τὰ ἐξῆς.

Si igitur spatium, etc.

donc à ZB comme KM est à MA (11. 5); donc, par permutation, la droite AZ sera à KM comme ZB est à AM; la droite restante AB est donc à la droite restante KA comme AZ est à KM (19. 5). Mais AZ est commensurable avec KM; la droite AB est donc commensurable avec KA (10. 10). Mais AB est à KA comme le rectangle sous ΓΔ, AB est au rectangle sous ΓΔ, KA (1. 6); le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le rectangle sous ΓΔ, KA. Mais le rectangle sous ΓΔ, KA est égal au carré de Θ; le rectangle sous ΓΔ, AB est donc commensurable avec le carré de Θ. Mais le rectangle sous ΓΔ, AB est égal au carré de Η; le carré de Η est donc commensurable avec le carré de Θ. Mais le carré de Θ est rationel; le carré de Η est donc rationel; la droite Η est donc rationelle, et cette droite peut la surface comprise sous ΓΔ, AB. Si donc, etc.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ρητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων οὖ-
θειῶν περιέχεσθαι¹.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρις'.

Ἀπὸ μίσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐ-
δεμία¹ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἐστω μίση ἢ A · λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς A ἄπειροι
ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία² οὐδεμιᾶ τῶν πρό-
τερόν ἐστιν³ ἢ αὐτή.

Ἐκκείσθω ρητὴ ἢ B , καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A , B
ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ ἄλογος ἄρα ἐστὶν
ἢ Γ · τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ρητῆς ἄλογόν ἐστι.
Καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερόν ἐστιν⁴ ἢ αὐτή· τὸ γὰρ
ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ρητὴν παρα-
βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μίσην. Πάλιν δὲ, τῷ

COROLLARIUM.

Et ex iis manifestum nobis est fieri posse, ut
rationale spatium sub irrationalibus rectis con-
tineatur.

PROPOSITIO CXVI.

A mediâ infinitæ rationales gignuntur, et nulla
nulli præcedentium eadem.

Sit media A ; dico ex ipsâ A infinitas irra-
tionales gigni, et nullam nulli præcedentium esse
eamdem.

Exponatur rationalis B , et rectangulo sub
 A , B æquale sit quadratum ex Γ ; irrationalis
igitur est Γ ; rectangulum enim sub irrationali
et rationali irrationale est. Et nulli præcedentium
est eadem; quadratum enim ex nullâ præceden-
tium ad rationalem applicatum latitudinem
facit mediam. Rursus utique, rectangulo sub

COROLLAIRE.

D'après cela, il est évident pour nous qu'il est possible qu'une surface ratio-
nelle soit comprise sous deux droites irrationnelles.

PROPOSITION CXVI.

Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même
qu'aucune de celles qui la précèdent.

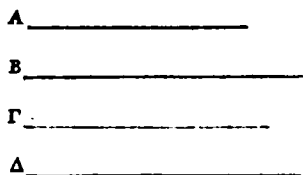
Soit la médiale A ; je dis qu'il résulte de A une infinité d'irrationnelles, et qu'au-
cune d'elles n'est commensurable avec aucune de celles qui la précèdent.

Soit exposée la rationnelle B , et que le carré de Γ soit égal au rectangle sous
 A , B , la droite Γ sera irrationnelle (déf. 11. 10); car le rectangle compris sous une
irrationnelle et une rationnelle est irrationnel (39. sch. 10), et la droite Γ ne sera au-
cune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent
étant appliqué à une surface rationnelle ne fait une largeur médiale (61, 62, 63,
64, 65, 66, 98, 99, 100, 101, 102, 113. 10). De plus, que le carré de Δ soit égal

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 415

ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἴστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον
ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ,
καὶ οὐδὲμιᾶ τῶν πρότερον ἐστίν⁵ ἡ αὐτή· τὸ
γὰρ ἀπ' οὐδὲμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν

B, Γ æquale sit quadratum ex Δ; irrationale
igitur quadratum ex Δ; irrationalis igitur est Δ,
et nulli præcedentium est eadem; quadratum
enim ex nullâ præcedentium ad rationalem ap-



παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν Γ. Ομοίως
δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαί-
νούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι
ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδὲμία⁶ οὐδὲμιᾶ τῶν
πρότερον ἡ αὐτή. Ὅπερ ἴδει διῆξαι.

plicatum latitudinem facit ipsam Γ. Similiter
utique eodem ordine infinitè protracto, evidens
est a mediâ infinitas irrationales gigni, et nul-
lam nulli præcedentium eamdem. Quod opor-
tebat ostendere.

Α Α Λ Ω Σ'.

A L I T E R.

Ἐστω μέση ἡ ΑΓ· λίγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ
ἄπειροι ἄλογοι γίνονται², καὶ οὐδὲμία οὐδὲμιᾶ
πρότερον ἐστὶν ἡ αὐτή³.

Sit media ΑΓ; dico ex ipsâ ΑΓ infinitas irra-
tionales gigni, et nullam nulli præcedentium esse
eamdem.

Ἦχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἴστω
ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον

Ducatur ipsi ΑΓ ad rectos angulos ipsa ΑΒ,
et sit rationalis ΑΒ, et compleatur ΒΓ, irra-

au rectangle sous B, Γ; le carré de Δ sera irrationnel (39. sch. 10); la droite Δ est donc irrationnelle, et elle n'est aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fait la largeur Γ. En procédant à l'infini de la même manière, il est évident qu'il résultera d'une médiale une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles ne sera la même qu'aucune de celles qui la précèdent. Ce qu'il fallait démontrer.

A U T R E M E N T.

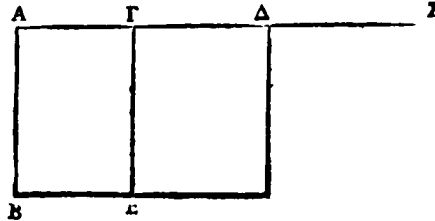
Soit la médiale ΑΓ; je dis qu'il résulte de ΑΓ une infinité d'irrationnelles, et qu'aucune d'elles n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent.

Menons la droite ΑΒ perpendiculaire à ΑΓ; que la droite ΑΒ soit rationnelle, et achevons le parallélogramme ΒΓ; le parallélogramme ΒΓ sera irrationnel, ainsi que

416 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

ἄρα ἰστί τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἰστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν, συμ-

tionale igitur est ΒΓ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΓΔ; irrationalis igitur ΓΔ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit mediam. Rursus,



πιπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἰστί τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἰστι. Δυνασθῶ αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἰστί⁵ ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς⁶ μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἰξῆς.

compleatur ΕΔ; irrationalis igitur est ΕΔ, et recta potens ipsum irrationalis est. Possit ipsum ipsa ΔΖ; irrationalis igitur est ΔΖ, et nulli præcedentium eadem; quadratum enim ex nullâ præcedentium ad rationalem applicatum latitudinem facit ipsam ΓΔ.

A mediâ igitur, etc.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριβ'.

Προκείσθω ἡμῖν διῆξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

PROPOSITIO CXVII.

Proponatur nobis ostendere in quadratis figuris incommensurabilem esse diametrum lateri longitudine.

la droite qui pourra ce parallélogramme. Que la droite ΓΔ puisse ce parallélogramme; la droite ΓΔ sera irrationnelle, et ne sera aucune de celles qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera une largeur médiale. De plus, achevons le parallélogramme ΕΔ, le parallélogramme ΕΔ sera irrationnel, ainsi que la droite qui peut ce parallélogramme. Que la droite ΔΖ puisse ce parallélogramme; la droite ΔΖ sera irrationnelle, et cette droite ne sera aucune des droites qui la précèdent; car le carré d'aucune de celles qui la précèdent étant appliqué à une rationnelle ne fera la largeur ΓΔ. Il résulte donc, etc.

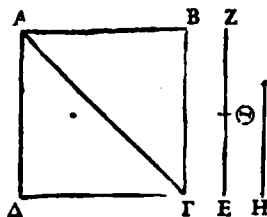
PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE. 417

Εστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ ΑΒ μήκει.

Sit quadratum ΑΒΓΔ, ipsius autem diameter ΑΓ; dico ΑΓ incommensurabilem esse ipsi ΑΒ longitudine.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερόν μιν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι² τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Εἰδέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν³ Η, καὶ ἴστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἴσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ⁴ λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς⁵ τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν⁶ ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ

Si enim possibile, sit commensurabilis; dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse et impar; evidens est quidem quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. Et quoniam commensurabilis est ΑΓ ipsi ΑΒ, ipsa ΑΓ igitur ad ΑΒ rationem habet quam numerus ad numerum. Habeat rationem quam ΕΖ ad Η, et sint ΕΖ, Η minimi eorum eandem rationem habentium cum ipsis; non igitur unitas est ΕΖ. Si enim ΕΖ esset unitas, et habet rationem ad Η quam habet ΑΓ ad ΑΒ, et major ΑΓ quam ΑΒ; major igitur et ΕΖ unitas quam Η numerus, quod absurdum; non igitur unitas est ΕΖ; numerus igitur. Et quoniam est ut

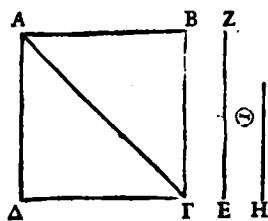
Soit le quarré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.

Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le quarré de ΓΑ

418 LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H, καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AB οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. Διπλασίον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ⁷ τοῦ ἀπὸ τῆς AB· διπλασίον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H· ἄρτιος ἄρα ἐστίν⁸ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ EZ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἀν⁹ ἦν, ἐπειδήπερ ἐάν

GA ad AB ita EZ ad H, et ut igitur ex GA quadratum ad ipsum ex AB ita ex EZ quadratum ad ipsum ex H. Duplum autem ex GA quadratum quadrati ex AB; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H; par igitur est quadratus ex EZ; quare et ipse EZ par est. Si enim esset impar, et ex ipso quadratus impar esset, quoniam si impares numeri quocunque com-



περισσὸν ἀριθμοὶ ὅποιοι οὖν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἦ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ EZ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπὶ οἱ EZ, H ἀριθμοὶ¹⁰ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς¹¹, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Καὶ ἐστίν¹² ὁ EZ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ H. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς EZ; H δυὰς ἀν¹³ ἰμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἡμισυ, πρώτους ὄντας

ponantur, multitudo autem ipsorum impar sit, totus impar est; ipse EZ igitur par est. Secetur bifariam in Θ. Et quoniam numeri EZ, H minimi sunt eorum eandem rationem habentium cum ipsis, primi inter se sunt. Atque est EZ par; impar igitur est H. Si enim esset par, ipsos EZ, H binarius metiretur, omnis enim par habet partem dimidiam, primos existentes

sera au carré de AB comme le carré de EZ est au carré de H. Mais le carré de ΓΑ est double du carré de AB; le carré de EZ est donc double du carré de H; le carré du nombre EZ est donc pair. Le nombre EZ est donc pair; car s'il était impair, son carré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre EZ est donc un nombre pair. Partageons le nombre EZ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres EZ, H sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre EZ est pair; le nombre H est donc impair. Car s'il était pair, les nombres EZ, H, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible.

πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ H · περισσὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιον ἐστὶν¹⁴ ὁ EZ τοῦ $EΘ$, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ $EΘ$ διπλάσιος δι' ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ H τοῦ ἀπὸ τοῦ $EΘ$ ¹⁵. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ H · ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ H . Ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΒ$ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα¹⁶. Ὅπερ ἴδιαι δεῖξαι.

inter se, quod est impossibile; non igitur par est H ; impar igitur. Et quoniam duplus est EZ ipsius $EΘ$, quadruplus igitur ex EZ quadratus quadrati ex $EΘ$; duplus autem ex EZ quadratus quadrati ex H ; duplus igitur ex H quadratus quadrati ex $EΘ$; par igitur est quadratus ex H ; par igitur ex dictis ipse H . Sed et impar, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est $ΑΓ$ ipsi $ΑΒ$ longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

Α Α Α Ω Σ'.

Εστω² ἀντὶ μὲν τοῦ διαμέτρου ἡ A , ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ B · λέγω ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω σύμμετρος· καὶ γιγνησέτω³ πάλιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ὁ EZ ἀριθμὸς πρὸς τὸν H , καὶ ἴστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐτοῖς οἱ EZ , H ⁴· οἱ EZ , H ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. Λέγω πρῶτον ὅτι H οὐκ ἴστί μονάς. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστω

ALITER.

Sit pro diametro quidem A , pro latere verò B ; dico incommensurabilem esse A ipsi B longitudiné. Si enim possibile, sit commensurabilis; et fiat rursus ut A ad B ita EZ numerus ad H , et sint minimi EZ , H eorum eandem rationem habentium cum ipsis; ipsi EZ , H igitur primi inter se sunt. Dico primum H non esse unitatem. Si enim

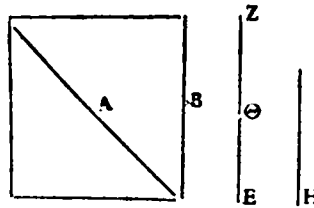
Le nombre H n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais EZ est double de $EΘ$; le carré de EZ est donc quadruple du carré de $EΘ$ (11. 8). Mais le carré de EZ est double du carré de H ; le carré de H est donc double du carré de $EΘ$; le carré de H est donc pair; le nombre H est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite $ΑΓ$ n'est donc pas commensurable en longueur avec $ΑΒ$; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

AUTREMENT.

Soit A la diagonale, et B le côté; je dis que A est incommensurable en longueur avec B . Que A , s'il est possible, soit commensurable avec B ; faisons en sorte que A soit encore à B comme le nombre EZ est au nombre H , et que les nombres EZ , H soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux (24. 7); les nombres EZ , H seront premiers entr'eux. Je dis d'abord que H n'est pas l'unité; que H soit l'unité,

μονάς. Καὶ ἰπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ⁵ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ⁶ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ⁷ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος⁸ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. Καὶ ἔστι μονάς ὁ Η. Δυάς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ⁹ ΕΖ τετράγωνος, ὅπερ

possibile, sit unitas. Et quoniam est ut A ad B ita EZ ad H; et ut igitur ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex EZ quadratus ad ipsum ex H. Duplum autem ex A quadratum quadrati ex B; duplus igitur et ex EZ quadratus quadrati ex H. Atque est unitas ipse H; binarius igitur ex EZ quadratus, quod est impossibile;



ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἰπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ¹⁰ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοῦς ΕΖ, Η μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρος ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

non igitur unitas est ipse H; numerus igitur. Et quoniam est ut ex A quadratum ad ipsum ex B ita ex EZ quadratus ad ipsum ex H, et invertendo ut ex B quadratum ad ipsum ex A ita ex H quadratus ad ipsum ex EZ. Metitur autem quadratum ex B quadratum ex A; metitur igitur et quadratus ex H quadratum ex EZ; quare et H latus ipsius ipsum EZ metitur. Metitur autem et H se ipsum; ipse H igitur ipsos EZ, H metitur, primos existentes inter se, quod est impossibile; non igitur commensurabilis est A ipsi B longitudine; incommensurabilis igitur. Quod oportebat ostendere.

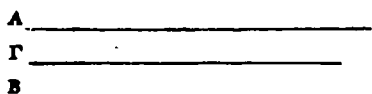
si cela est possible. Puisque A est à B comme EZ est à H, le carré de A sera au carré de B comme le carré de EZ est au carré de H. Mais le carré de A est double du carré de B; le carré de EZ est donc double du carré de H; mais H est l'unité; le carré de EZ est donc le nombre deux, ce qui est impossible, H n'est donc pas l'unité; H est donc un nombre. Et puisque le carré de A est au carré de B comme le carré de EZ est au carré de H, par inversion, le carré de B sera au carré de A comme le carré de H est au carré de EZ. Mais le carré de B mesure le carré de A; le carré de H mesure donc le carré de EZ, le nombre H mesure donc le nombre EZ (14. 8). Mais H se mesure lui-même; le nombre H mesure donc les nombres EZ, H qui sont premiers entr'eux; ce qui est impossible; la droite A n'est donc pas commensurable en longueur avec la droite B; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

ΣΧΟΛΙΟΝ¹.

SCHOLIUM.

Εὐρημένῃ δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὐρίσκεται καὶ ἄλλα πλείστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Εἴν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν² μίσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἴσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εἶδος³ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀνα-

Inventis utique longitudo ine incommensurabilibus rectis, ut Α, Β, invenientur et aliae plurimae magnitudines ex duabus dimensionibus, dico et superficies incommensurabiles inter se. Si enim rectarum Α, Β mediam proportionalem Γ sumamus, erit ut Α ad Β ita figura ex Α ad figuram ex Γ, similem et si-



γραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγγραμμένα, εἴτε ἑτέρα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε καὶ κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς⁵ Α, Γ, ἐπεὶ περ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὐρηται ἄρα καὶ⁶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ὅπερ ἴδει δεῖξαι.

Δειγνύμενων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων⁷, δείξομεν τοῖς⁸ ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίᾳ, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις.

militer descriptam, sive quadrata sint descripta, sive alia rectilinea similia, sive circuli circa diametros Α, Γ, quoniam circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata; inventa igitur erunt et plana spatia incommensurabilia inter se. Quod oportebat ostendere.

Ostensis utique et duarum dimensionum diversis incommensurabilibus spatiis, demonstrabimus ex solidorum theoriâ, esse etiam solida et commensurabilia et incommensura-

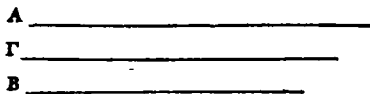
SCHOLIE.

Des droites incommensurables en longueur étant trouvées, comme les droites Α, Β, on trouvera plusieurs autres grandeurs de deux dimensions, c'est-à-dire des surfaces incommensurables entr'elles. Car si l'on prend une moyenne proportionnelle Γ entre les droites Α, Β (13. 6); la droite Α sera à Β comme la figure construite sur la droite Α est à la figure construite sur la droite Γ, les figures Α, Γ étant semblables et semblablement décrites (20. 6), soit que les figures décrites soient des quarrés ou des figures rectilignes semblables; ou bien des cercles décrits autour des diamètres Α, Γ, parce que les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres (2. 12). On aura donc trouvé des surfaces planes incommensurables entr'elles. Ce qu'il fallait démontrer.

Ayant donc démontré que diverses figures de deux dimensions sont incommensurables entr'elles, nous démontrerons qu'il y a des solides commensurables et incommensurables entr'eux, d'après la théorie des solides. Car si sur les quarrés

Εάν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῃ στερεὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἴσται τὰ ἀνασταθίοντα πρὸς ἀλλήλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἴσται καὶ τὰ στερεὰ· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. Ὅπερ ἴδι διίξαι.

Ἀλλὰ μὲν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, εἴαν ἀπ' αὐτῶν ἰσοῦψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἴσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς¹⁰ αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ



μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἴσονται καὶ οἷτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους¹¹ καὶ οἱ κυλίνδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἴσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κυλίνδροι. Καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγωνεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ σύμμετρία καὶ ἀσύμμετρία¹², ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

bilis inter se. Si enim super quadrata ex Α, Β, vel æqualia ipsis rectilinea, constituamus æque alta solida, parallelepipeda, vel pyramides, vel prismata, solida constructa erunt inter se ut bases. Et si quidem commensurabiles sint bases, commensurabilia erunt et solida; si verò incommensurabiles, incommensurabilia. Quod oportebat ostendere.

Sed quidem et duobus circulis existentibus Α, Β, si super ipsos conos æque altos, vel cylindros constituamus, erunt hi inter se ut bases, hoc, est ut circuli Α, Β. Et si quidem com-

mensurabiles sint circuli, commensurabiles erunt et coni inter se et cylindri; si verò incommensurabiles sint circuli, incommensurabiles erunt et coni et cylindri. Et manifestum est nobis fieri non solum et in lineis et superficiebus commensurabilitatem et incommensurabilitatem, sed et in solidis figuris.

des droites Α, Β ou sur des figures rectilignes qui leur soient égales, nous construisons des solides de même hauteur, des parallélépipèdes, des pyramides, des prismes; les solides qu'on aura construits seront entr'eux comme leurs bases (32. 11, et 6. 5. 12). Si les bases sont commensurables, les solides seront commensurables; et si les bases sont incommensurables, les solides le seront aussi (10. 10). Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on a deux cercles Α, Β, et si sur ces cercles on construit des cônes ou des cylindres de même hauteur, ces solides seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire comme les cercles Α, Β (11. 12). Si les cercles sont commensurables, les cônes et les cylindres seront commensurables entr'eux (10. 10); et si les cercles sont incommensurables, les cônes et les cylindres seront incommensurables. Il est donc évident pour nous que la commensurabilité ou l'incommensurabilité se rencontre non seulement dans les lignes et dans les surfaces, mais encore dans les solides.

COLLATIO
CODICIS 190 BIBLIOTHECÆ
REGIÆ,

CUM EDITIONE OXONIÆ,

CUI ADJUNGUNTUR

LECTIONES VARIANTES ALIORUM CODICUM EJUSDEM BIBLIOTHECÆ, QUÆCUMQUE NON PARVI
SUNT MOMENTI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τῶν A, B, Γ, Δ τῶ πλήθει	τῶ πλήθει	concordat cum edit. Paris.
τῶν E, Z, H, Θ		
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οἱ δὲ ἰσάχιστοι	Id.	deest.
4. ὁ, τε μίζων τὸν μίζονα, καὶ	Id.	deest.
ἰλάσσει τὸν ἰλάσσονα, τουτίστι		

PROPOSITIO II.

1. ἂν τις ἐπιτάξῃ, ...	Id.	ἐπίταξέ τις,
2. ἀριθμὸς δὲ ὁ A δύο τεύς A, B	deest.	concordat cum edit. Paris.
πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ π-		
ποίηκεν		
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
in hac demonstratione quater deest adhuc hoc vocabulum.		
4. τῶν	τῶν	concordat cum edit. Paris.
5. Ως δὲ	Id.	ἀλλ' ὥς

424 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

6. οὕτως	οὕτως καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. ἀλλ'	<i>Id.</i>	ἰδίχθη δὴ καὶ
8. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων αὐ- τοῖς, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

COROLLARIUM.

10. ἰὰν	ἂν	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO III.

1. μὲν ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ μὲν
2. αἰτὶ	αἰ	concordat cum edit. Paris.
3. οὗ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Καὶ ἐπεὶ οἱ E, Z ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόν- των αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλ- λήλους εἰσὶ. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν E, Z ἑαυτὸν μὲν . . .	<i>Id.</i>	Οἱ ἄρα αὐτῶν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ E, Z πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν
5. ἑκάτερον τῶν	<i>Id.</i>	τὸν ἕτερον τῶν
6. καὶ οἱ H, K ἄρα καὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ. .	<i>Id.</i>	οἱ H, K ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ A, B.
7. Καὶ εἰσιν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλ- λήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ μὲν A τῷ B, ὁ δὲ B τῷ Γ.

PROPOSITIO IV.

1. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
2. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
6. τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις, ἴσονται τινὲς τῶν Θ, H, K, A ἐλάσ- των Z λόγοις.	ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἐν τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Z λόγοις.	concordat cum edit. Paris.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS. 425

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

συνεχόμενοι ἐν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις.	a.	b, d, e, f, g, h, k, l, n.
7. οἱ δὲ ἐλάχιστοι	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ	Id.	τῶν ὑπὸ Β, Γ
9. μετρούμενός ἐστιν, ...	μετρεῖται, ...	concordat cum edit. Paris.
10. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε	Id.	εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ
15. ἔτι	Id.	deest.
16. ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. Εἰ γὰρ μή, ...	Id.	Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις,
17. ἀνάλογον	Id.	deest.
18. τε	Id.	deest.
19. ἀνάλογον	Id.	deest.
20. ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς	ἀνάλογον ἐλάχιστοί εἰσι τοῖς	ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς

PROPOSITIO V.

1. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	ὁ	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ ὁ Δ	Id. a, d, e, f, g, n.	Οἱ ἄρα Η, Θ, Κ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν τοὺς τῶν πλευρῶν λό- γους. Ἀλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λό- γον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν λόγον οὗν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ. Ο Δ γὰρ h, k, l.

II.

5. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖται ὁ Α *Id.* Λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ.
τὸν Γ. Καὶ ὅσοι Ὅσοι γὰρ
2. ἀριθμὸν μετρεῖ, ... *Id.* μετρεῖ ἀριθμὸν.
3. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VII.

1. οὐ *Id.* μὴ
2. μετρήσει *Id.* μετρήσει, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται
γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖν·

PROPOSITIO VIII.

1. αὐτοῖς deest. concordat cum edit. Paris.
2. οἱ deest. concordat cum edit. Paris.
3. τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν *Id.* ἰσάκεις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ
ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν
ἐπόμενον. Ἰσάκεις ἄρα ὁ Η τὸν
Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Α τὸν Ζ· ὁσάκεις
δὲ
4. εἰσὶν καὶ εἰσιν concordat cum edit. Paris.
5. ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· *Id.* ἀνάλογόν εἰσιν ἑξῆς

PROPOSITIO IX.

1. μονάδος μονάδος ἑξῆς concordat cum edit. Paris.
2. μεταξὺ *Id.* deest.
3. τῆς τῆς Ε concordat cum edit. Paris.
4. ο Ζ *Id.* ὁ Ζ πρὸς
5. τῷ Ζ *Id.* αὐτῷ
6. ἱ Θ ὁ Ε concordat cum edit. Paris.
7. ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Α· *Id.* Ο δὲ Μ τῷ Α ἴσος ἐστίν·

PROPOSITIO X.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEx 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἀριθμῶν	ἀριθμῶν ἑκατέρου . . .	concordat cum edit. Paris.
2. μονάδος	<i>Id.</i>	μονάδος ἑξῆς
3. τε	<i>Id.</i>	deest.
4. ἄρα	ἄρα ἀριθμὸς	concordat cum edit. Paris.
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πεποιήκειν	<i>Id.</i>	deest.
7. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, . .	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XI.

1. ἴστιν	<i>Id.</i>	ἴστιν ἀριθμὸς
2. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β .	<i>Id. a.</i>	Πάλιν, ἵπεί ὁ Γ τὸν Δ πολλα- πλασιάσας τὸν Ε πεποιήκειν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποιήκει, δύο δὲ ἀριθ- μοὶ οἱ Γ, Δ ἵνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ πολλαπλασιάσαν- τες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἴστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Αλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε· <i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
3. ὁ Ε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πλευράν.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XII.

1. καὶ ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ ἄρα
2. ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλα- σιάσας τὸν Ε πεποιήκει, . .	<i>Id.</i>	deest.
3. ἵπεί	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ἔ, τε Α πρὸς τὸν Θ, τὸν Θ	καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ, τε Α πρὸς τὸν Θ	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἰξῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
3. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIV.

1. ἴστωσαν	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἀλλὰ δὴ μετρίτω ὁ Γ τὸν Δ·	πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ με- τρίτω	concordat cum edit. Paris.
4. ἰξῆς	<i>Id.</i>	deest.
5. μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XV.

1. ριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρήσει.
3. ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάζ- σας τὸν Η ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάζσας τὸν Ζ,	<i>Id.</i>	καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάζσας τὸν Ζ ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάζσας τὸν Η ποιεῖτω,
4. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
5. Καὶ ἐπεὶ	<i>Id.</i>	ἐπεὶ γὰρ

PROPOSITIO XVI.

1. οὐδ'	<i>Id.</i>	οὐδὲ δὲ
2. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴστωσαν	<i>Id.</i>	deest.
4. λίγω	λίγω δὲ	concordat cum edit. Paris.
5. μετρεῖ	<i>Id.</i>	μετρήσει.
6. μετρίτω	<i>Id.</i>	μετρίτω δὴ
7. μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	καὶ ὁ Γ τὸν Δ.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι . .	ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· τουτίστιν ἥπερ ὁ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον.	<i>Id.</i>	ἢ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ὁ, τι	<i>Id.</i>	ὁ

PROPOSITIO XIX.

1. μὲν ὁ	<i>Id.</i>	ὁ μὲν
2. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἰδείχθη.	<i>Id.</i>	ἰδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. εἰσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ·	Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ πρὸς τὸν Θ· α. . .	concordat cum edit. Paris. <i>b, d, e, f, g, h, k, l, n.</i>
8. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
9. λόγῳ.	<i>Id.</i>	deest.
10. Θ	<i>Id.</i>	Θ λόγῳ
11. πολλαπλασιάσας	<i>Id.</i>	πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῆς Ζ, Η
12. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
13. ἔστιν ἄρα ὡς	καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα	concordat cum edit. Paris.
14. ὁ, τι	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	COD. 190.	EDITIO OXONIE.
1. οἱ	<i>Id.</i>	deest.
2. γάρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστιν ἄρα ὅς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. δὲ	<i>Id.</i>	δὴ
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολ- λαπλασιάσας τὸν Α πέποιθεκε τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ· ἔστιν ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Β πεποίηκεν	<i>Id.</i> a, h, l.	Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Ζ, Η τὸν Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Β πεποίηκε· b, d, e, f, g, k, n.
8. Καὶ ἐναλλάξ ὅς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η . . .	<i>Id.</i>	deest.
9. πλευραὶ αὐτῶν	<i>Id.</i>	αὐτῶν πλευραὶ

PROPOSITIO XXI.

1. οἱ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γάρ	<i>Id.</i>	γὰρ τρεῖς
3. τρεῖς	<i>Id.</i>	deest.
4. ἀριθμοί	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τοῦ πρὸ	<i>Id.</i>	deest.
6. εἰσιν ἀνάλογον	<i>Id.</i>	ἀνάλογόν εἰσιν
7. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῶ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ·	<i>Id.</i>	deest.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER OCTAVUS. 431

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

8. δὴ ἰ Ε τὸν Γ	<i>Id.</i>	δὲ ὁ Η τὸν Β
9. Καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. πεποίηκε	<i>Id.</i>	πεποίηκε τὸν δὲ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν.
11. αὐτοῦ	<i>Id.</i>	αὐτῶν
12. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIV.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXV.

1. λίγω	<i>Id.</i>	λίγω δὴ
2. ἀριθμοὶ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVII.

1. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.

LIBER NONUS.

PROPOSITIO I.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἐπίπεδοι	<i>Id.</i>	deest.
2. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν . .	<i>Id.</i>	Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν
3. ἀριθμῶν μεταξὺ	<i>Id.</i>	μεταξὺ ἀριθμῶν

PROPOSITIO II.

1. ἀριθμοί.	<i>Id.</i>	deest.
2. Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω .	<i>Id.</i>	Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλα- πλασιάσαντες ἀλλήλους τετρά- γωνον τὸν Γ ποιείτωσαν
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἀριθμός.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα Α, Β	<i>Id.</i>	Α, Β ἄρα

PROPOSITIO III.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀριθμοὶ ἑμπεπτώκασιν . .	<i>Id.</i>	ἑμπεπτώκασιν ἀριθμοί
6. ἑμπίσθονται	<i>Id.</i>	ἑμπεπτώκασιν
7. δεύτερος	<i>Id.</i>	τίταρτος

PROPOSITIO IV.

1. γὰρ Α	<i>Id.</i>	Α γὰρ
2. οἱ Α, Β	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμός	<i>Id.</i>	deest.

2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν	<i>Id.</i>	τὸν

PROPOSITIO VI.

1. ἑαυτὸν	<i>Id.</i>	ἑαυτὸν μὲν
2. ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῇ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν· ἔστιν ἄρα ὡς $b, d, f, g, h, k, l, m, n$.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οἱ	<i>Id.</i>	deest.
5. Β, Γ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

Nota. Tredecim priores propositiones desunt in codice 2344.

PROPOSITIO VII.

1. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας·	<i>Id.</i>	deest.
2. πεποιήκεν·	<i>Id.</i>	πεποιήκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποιήκεν·

PROPOSITIO VIII.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴστιν
2. πάντις, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

434 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
3. πάντες, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πάντες.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. πάντες.	Id.	ἀπαντες.
6. ἀριθμὸν	Id.	deest.
7. πάντες	Id.	deest.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴστί·	Id.	deest.
10. πάντες κύβοι ἴσι	Id.	ἀπαντες κύβοι τί ἴσι

PROPOSITIO IX.

1. ἀριθμοὶ ἐξῆς	ἐξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθ- μοὶ	concordat cum edit. Paris.
2. ἰσοιδηποτοῦν	Id.	ἰσοποιοῦν
3. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	τε	concordat cum edit. Paris.
5. δὲ	Id.	δὲ
6. καὶ	Id.	deest.
7. λέγω	Id.	λέγω δὲ
8. καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἴστί. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO X.

1. γὰρ	Id.	deest.
2. ἰσοιδηποτοῦν	Id.	deest.
3. χωρὶς	Id.	πλὴν
4. καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων. .	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὑπόκειται·	Id.	ὑπόκειται·
7. τετράγωνός ἐστι, ...	Id.	deest.
8. δὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. κύβον·	Id.	κύβον· οἱ B, Γ ἄρα ὅμοιοι στέρεοι.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XI.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε . . .	<i>Id.</i>	ἐλάσσων ὁ Β τὸν Ε μείζονα
2. αὐτῷ	<i>Id.</i>	τῷ Δ
3. τῷ Δ	<i>Id.</i>	αὐτῷ
4. Ὅπῃ ἴδι διίξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

deest.	Καὶ φανερόν ὅτι ἢ ἔχει τάξιν ὁ μιτρῶν ἀπὸ μοιᾶδος τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρούμενου κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ. Ὅπῃ ἴδι διίξαι.	deest in codicibus <i>b, c, d,</i> <i>e, g, h, k, l, m, n</i> ; hoc corollarium inter lineas codicis <i>f</i> est exaratum.

PROPOSITIO XII.

1. ἱξῆς	<i>Id.</i>	deest.
2. μετρεῖται, ...	<i>Id.</i>	μετρεῖται,
3. ὁποσοιδηποτοῦν	<i>Id.</i>	ὁποσοιδηποτοῦν
4. ἱξῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μετρεῖται ὁ Ε τὸν Α. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος	ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος ἴστι	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ὅ τε	<i>Id.</i>	ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάτ- των τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ
13. καὶ ὁ Ε τὸν Α.	ὁ Ε τὸν Α, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον.	concordat cum edit. Paris.
14. πρώτου	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. οἱ Α, Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται. . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἄλλου	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἰξῆς	deest.	ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος
3. πᾶς	Id.	ἅπας
4. ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Id.	deest.
5. πρώτου μετρηθήσεται, ...	Id.	μετρηθήσεται πρώτου,
6. τὸν Δ μετρεῖ	Id.	μετρεῖ τὸν Δ,
7. ὁ Ζ οὐκ ἴστί	Id.	οὐκ ἴστί ὁ Ζ
8. ἴστί πρῶτος, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖ- ται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.	Id.	ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ὑπὸ τῶν	Id.	ἐκ τῶν
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ὑφ'	ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIV.

1. πρώτου	Id.	deest.
2. τῶν	Id.	deest.
3. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. μετρούμενος	Id.	μετρούμενον·

PROPOSITIO XV.

1. τῶν Α, Β, Γ	Id.	deest.
2. δὴ	Id.	δὲ

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. πρὸς τὸν EZ πρῶτοί εἰσιν. . . *Id.* πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν EZ.
 4. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ᾧσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Ὡστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. Εὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν.
 6. ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῇ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι.
 7. τῶν deest. concordat cum edit. Paris.
 8. τῶν deest. concordat cum edit. Paris.
- καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν EZ πρῶτός ἐστιν. Εὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ πρῶτός ἐστιν. *b, d, e, f, g, h, k, m.*
- ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Αλλὰ τῇ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί.

PROPOSITIO XVI.

1. οὕτως deest. concordat cum edit. Paris.
 2. ἀριθμοὶ *Id.* deest.
 3. ἔχοντας *Id.* ἔχοντας αὐτοῖς
 4. ἀτοπόν· *Id.* ἀτοπόν ἐστιν·
 5. ἴσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β . . . *Id.* ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐστὶν

PROPOSITIO XVII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀριθμοὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἔχοντας	<i>Id.</i>	ἔχοντας αὐτοῖς
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ὁ Α καὶ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ Α

PROPOSITIO XVIII.

1. Καὶ εἰ	<i>Id.</i>	Εἰ μὲν οὖν
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀνάλογον	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XIX.

1. πότε	<i>Id.</i>	
2. πότε	<i>Id.</i>	εἰ

Tertium *alinea* sic se habet in codicibus *a*, *b*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

Tertium *alinea* sic se habet in editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Ἡ οὐκ εἰσὶν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὐ τε ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, οὐ τε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ καὶ ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Οἱ δὲ Α, Β, Γ ἤτοι ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὐ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσὶν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ οὐτε ἀνάλογον ἑξῆς, οὐτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Post quartum *alinea* hæc leguntur in codicibus *a, d, g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Μὴ ἴστωσαν δὲ οἱ *A, B, Γ* ἑξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρῶτων πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

Εἰδ' οὐκ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσιν, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. Εἰ γὰρ μὴ, προσυρεσθῶ, καὶ ἴστω ὁ *Δ*· ὡς οὖν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως ὁ

A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ----- E-----

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσυρεσθῶ ὁ *Δ*, ὥστε εἶναι ὡς τὸν *A* πρὸς τὸν *B* οὕτως τὸν *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, καὶ γιγνέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ *A* πρὸς τὸν *B* ὁ *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* ὁ *E* πρὸς τὸν *E*· δίσκου ἄρα ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Οἱ δὲ *A, Γ* πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὡς ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ, πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς *A, B, Γ* δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν.

Γ πρὸς τὸν *Δ*, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*· ἑξ ἴσου γοῦν ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ* οὕτως ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. Ἀλλὰ μὴν οἱ *A, Γ* πρῶτοί εἰσι, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ *A* ἄρα τοὺς *A, Γ* μετρεῖ πρῶτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς *A, B, Γ* ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν ἀδύνατον.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἴστωσαν οἱ *A, B, Γ* ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ *A, Γ* μὴ ἴστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν·

Πάλιν οἱ *A, B, Γ* ἀνάλογον ἑξῆς ἴστωσαν μὲν οἱ δὲ *A, Γ* ἄκροι οὐ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσυρεῖν δυνατόν ἐστιν·

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ὁ δὲ <i>A</i>	ὁ <i>A</i> ἄρα	concordat cum edit. Paris.
4. μὲν	μὴν	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τοῖς	<i>Id.</i>	τῶν
7. ἀνάλογον	ἀνάλογον εἰς	concordat cum edit. Paris.

Post ultimum *alineæ* editionis Parisiensis hæc leguntur in codicibus *a*, *d*, *g*; cum editione vero Parisiensi concordant omnes codices alii.

In editionibus Basilicæ et Oxoniæ.

Αλλὰ δὴ οἱ Α, Β, Γ μήτε ἰξῆς ἕττωσαν ἀνάλογον, μήτε εἰ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω.

Αλλὰ μὴν οὐτ' ἀνάλογον ἰξῆς οἱ Α, Β, Γ οὔτε πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἕττωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, ὁμοίως

Α, 3. Β, 4. Γ, 9. Ε, 12. Δ, 36.

Α, 4. Β, 5. Γ, 14. Ε---- Δ, 70.

Ὁμοίως δὴ δευχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσυρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

δείξομεν ἰὰν ὁ Α τὸν Δ μετρῇ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὐρεῖν δυνατόν ἐστιν ἰὰν δὲ μὴ μετρῇ, ὅτι ἀδύνατον. Ὅπερ ἴδει δείξαι.

Nota. Subsequentia adsunt in codice 190 inter et vocabulum ἀλλήλους et vocabulum λέγω secundi *alineæ* paginæ 439; quæ quidem Euclidis esse non possunt.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

deest. * Λέγω ὅτι καὶ οὕτως δύν
νατον. Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν
ὑπὸ Β, Γ μετρεῖ, προ-
σῆσται ἢ δείξας ὁμοίως
τοῖς ἰξῆς. Εἰ δὲ οὐ με-
τρεῖ ὁ Α τὸν ὑπὸ Β, Γ,
ἀδύνατον αὐτοῖς τέ-
ταρτον ἀνάλογον προσ-
υρεῖν. Οἷον ἔστω ὁ μὲν Α
τριῶν τινῶν, ὁ δὲ Β, ἰξ.
ὁ δὲ Γ, ἑπτά· καὶ δηλο-
υσι δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ Α
εἴη πέντε, οὐκ ἔστι δυ-
νατὸν καὶ ἀπλῶς ὅτι
μὲν ὁ Β πολλαπλασιάζας
ἐστι τοῦ Α, δυνατόν
ἐστι τέταρτον ἀνάλογον
εὐρεῖν. Εἰ δὲ μὴ, ἀδύ-
νατον.

PROPOSITIO XX.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO. OXONIÆ.
1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
1. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἴστα. . .	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ ὁ Η ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ εἰς αὐτὸς,
2. ἄρα	<i>Id.</i>	concordat cum edit. Paris.
3. Ο αὐτὸς δὲ καὶ	<i>Id.</i>	καὶ

PROPOSITIO XXII.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Ἔστι	Ἔτω	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIII.

1. ὁποσοιὺν περισσοὶ ἀριθμοὶ, .	<i>Id.</i>	ἀριθμοὶ περισσοὶ ὁποσοιὺν,

PROPOSITIO XXIV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
2. ἀφηρέσθω ἄρτιος, ...	<i>Id.</i>	ἄρτιος ἀφηρέσθω
3. ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἡμισυ ἄρτιος	ἄρτιός ἐστιν ὁ ΑΓ. . .	concordat cum edit. Paris.
ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ.		

PROPOSITIO XXV.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ
2. ὅτι ὁ	<i>Id.</i>	ὅτι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. ὁ	<i>Id.</i>	καὶ ὁ

PROPOSITIO XXVII.

1. περισσοῦ	<i>Id.</i>	περισσοῦ ἀριθμοῦ
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ὅποσοι οὖν ὅποσοι concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXIX.

1. ἴσθιν' *Id.* Ο δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἐστιν·

PROPOSITIO XXX.

1. ὁ ἄρα Β ὁ Β ἄρα concordat cum edit. Paris.
2. ἴσθιν' *Id.* deest.

PROPOSITIO XXXI.

1. διπλασίονα *Id.* διπλάσιον
2. διπλασίον *Id.* διπλάσιος
3. ὁ Α *Id.* ὁ Α καὶ
4. ὁ Δ deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXII.

1. δυνάδος *Id.* διάδος
2. δυνάδος *Id.* διάδος
3. Οτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν Β, Οτι μὲν ἕκαστος ἀρτιός concordat cum edit. Paris.
Γ, Δ ἀρτιάκις ἀρτιός ἐστι, φα- ἐστι, φαγερόν· ἀπὸ γὰρ
νερόν· ἀπὸ γὰρ δυνάδος . . . διάδος
4. Λέγω *Id.* Λέγω δὲ
5. ἡ Ε deest. concordat cum edit. Paris.
6. ἔστι deest. ἔστι καὶ

PROPOSITIO XXXIII.

1. ἄρτιος, ... *Id.* ἄρτιος, ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἄρτιος	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. διάδος	Id.	διάδος
3. διάδος	Id.	διάδος
4. περισσός ἐστιν.	Id.	ἐστὶ περισσός.
5. τίμωμεν	Id.	τίμωμεν
6. ποιῶμεν	Id.	ποιῶμεν,
7. ἀριθμὸν	Id.	deest.
8. διάδα, ...	Id.	τινα περισσὸν ὃ μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, καταντή- σομεν εἰς διάδα,
9. διάδος	Id.	διάδος
10. ὁ Α	Id.	ὁ Α καὶ

PROPOSITIO XXXV.

2. ἴσοι	Id.	ἴσος
2. πάντας	Id.	ἅπαντας
3. ὅποσοιδηποτοῦν	Id.	ὅσοιδηποτοῦν
4. ἰστί	Id.	deest.
5. τοὺς	Id.	τὸν

PROPOSITIO XXXVI.

1. ὅσοιδηποτοῦν	Id.	ὅποσοιοῦν
2. deest.	Περὶ τὸν ἐλάχιστον. Λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ- τιος καὶ ἀρτιάκις πε- ρισσός. Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρ- τιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἡμισυν οὐκ ἔχει περισ- σόν· λέγω δὲ ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐσ- τιν. Εὰν γὰρ τὸν Α	deest.

τέμνωμεν δίχα, καὶ τὸν
ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ
τοῦτο αἰ ποιοῦμεν,
καταντήσωμεν εἰς τινα
ἀριθμὸν περισσὸν, ὃς
μετρήσει τὸν Α κατὰ
ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ
οὐ, καταντήσωμεν εἰς
τινα ἀριθμὸν περισσὸν,
ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ
ἄρτιον ἀριθμόν· κατα-
τήσωμεν εἰς δυάδα, καὶ
ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυά-
δος διπλασιαζομένων,
ὅπερ οὐκ ὑπόκειται·
ὥσπερ ὁ Α ἀρτιάκις πε-
ρισσός ἐστιν. Εδείχθη
δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος·
ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός
ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισ-
σός. Ὅπερ ἔδει δείξαι.

3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἀριθμὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

LIBER DECIMUS.

DEFINITIONES.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μό- νον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει . . .	Id. a.	σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.
4. τετράγωνα	Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.	τετράγωνος
5. ἴσα	Id. a, b, d, e, f, g, h, k, l, m, n.	ἴσαι

PROPOSITIO I.

1. γίνονται· ληφθήσεται τι μί- γθος, ὃ ἴσται ἔλασσον τοῦ .	Id.	ἂν γίνονται· ληφθήσεται τι μίγι- θος, ὃ ἴσται ἔλασσον
2. καὶ τοῦτο αἰὶ γίνονται, ληφ- θήσεται τι μίγθος ὃ ἴσται .	Id.	καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μίγ- ζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο αἰὶ γίνονται, ληφθήσεται τι μίγι- θος ὃ ἴσται
3. Τὸ Γ γὰρ	Id.	Τὸ γὰρ Γ
4. AB	Id.	AB μεγέθους
5. ἡμίσεις	Id.	ἡμίσεις
6. ἢ τὸ ἥμισυ	Id.	τοῦ ἡμίσιος
7. ἢ τὸ ἥμισυ	Id.	τοῦ ἡμίσιος
8. ἡμίση	Id.	ἡμίση

ΑΛΛΩΣ*.

ALITER.

Εκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ, ἴστω
δὲ τὸ Γ ἔλασσον¹, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, Exponantur duæ magnitudines inæquales AB,
Γ, sit autem Γ minor, et quoniam minor est

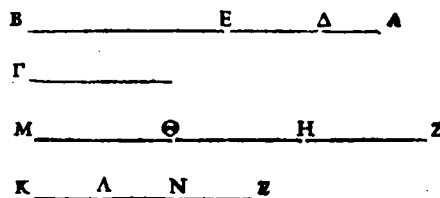
AUTREMENT.

Soient exposées deux grandeurs inégales AB, Γ; que Γ soit la plus petite.

* Hoc ἄλλως in margine codicis a est exaratum; deest autem in codicibus d, g, et in omnibus aliis est in textu.

πολλαπλασιαζόμενον ἴσται ποτὶ τοῦ AB μείζονος μείζον. Γεγονέτω ὡς τὸ ZM, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῇ Γ, καὶ ἴστω² τὰ MΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρέσθω μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ BE, καὶ ἀπὸ τοῦ AE μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ EA. Καὶ τοῦτο αἰὶ γιγνέσθω³ ὥς αἱ ἐν τῇ AB διαιρίσεις ἴσαι γίνωνται ταῖς ἐν τῇ ZM διαιρίσει. Γεγονέτωσαν ὡς αἱ BE, EA, ΔA, καὶ τῇ ΔA ἕκαστον τῶν KA, AN, NE ἴστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω⁴ ὥς αἱ⁵ διαιρίσεις τοῦ KE ἴσαι γίνωνται ταῖς τοῦ ZM.

Γ, multiplicata, erit aliquando magnitudine AB major. Fiat ut ZM, et dividatur in partes æquales ipsi Γ, et sit MΘ, ΘΗ, ΗΖ, et ab AB auferatur majus quam dimidium BE, et ab AE majus quam dimidium EA. Atque hoc semper fiat quoad divisiones quæ in AB æquales fiant divisionibus quæ in ZM. Fiant ut BZ, EA, ΔA, et ipsi ΔA unaquæque ipsarum KA, AN, NE sit æqualis, atque hoc fiat quoad divisiones ipsius KE æquales fiant divisionibus ipsius ZM.



Καὶ ἐπεὶ τὸ BE μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἴσται τοῦ AB, τὸ BE μείζον ἴσται τοῦ EA· πολλῶν ἄρα μείζον ἴσται τοῦ ΔA. Αλλὰ τὸ ΔA ἴσον ἴσται τῇ EN⁶. τὸ BE ἄρα μείζον ἴσται τοῦ NE. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ EA μείζον ἢ τὸ ἥμισυ ἴσται τοῦ EA, μείζον ἴσται τοῦ ΔA. Αλλὰ τὸ ΔA ἴσται ἴσον τῇ

Et quoniam BE major quam dimidium est ipsius AB, ipsa BE major est quam EA; multo igitur major est quam ΔA. Sed ΔA æqualis est ipsi EN; ergo BE major est quam NE. Rursus, quoniam EA major quam dimidium est EA, major est quam ΔA. Sed ΔA est æqualis ipsi NA; ergo

Puisque la grandeur Γ est la plus petite, cette grandeur étant multipliée deviendra enfin plus grande que AB. Qu'elle devienne ZM. Partageons ZM en parties égales chacune à Γ; que ces parties soient MΘ, ΘΗ, ΗΖ; retranchons de AB une partie BE plus grande que sa moitié, de AE une partie EA plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre des divisions de AB soit égal au nombre des divisions de ZM. Que les divisions de AB soient BE, EA, ΔA; que chacune des droites de KA, AN, NE soit égale à ΔA, et que le nombre des divisions de KE soit égal au nombre des divisions de ZM.

Puisque BE est plus grand que la moitié de AB, la droite BE sera plus grande que ΔA, et à plus forte raison que ΔA. Mais ΔA est égal à EN; la droite BE est donc plus grande que NE. De plus, puisque la droite EA est plus grande que la moitié de EA, cette droite sera plus grande que ΔA. Mais

ΝΑΓ^ο τὸ ΕΔ ἄρα μείζον ἔστι τοῦ ΝΑ^ο ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μείζον ἔστι τοῦ ΕΛ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῇ ΑΚ^β. ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μείζον ἔστιν ὅλου τοῦ ΕΚ. Αλλὰ τοῦ ΒΑ μείζον ἔστι τὸ ΜΖ· πολλῶν ἄρα τὸ ΜΖ μείζον ἔστι τοῦ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ΕΝ, ΝΑ, ΑΚ ἴσα ἀλλήλοις ἔστιν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῇ ΜΖ τῇ πλείυι τῶν ἐν τῇ ΕΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΜ. Μείζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΕΚ· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΑΚ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῇ Γ, τὸ δὲ ΚΑ τῇ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μείζον ἔστι τοῦ ΑΔ. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

ΕΔ major est quam ΝΑ; tota igitur ΒΔ major est quam ΕΛ. Æquale autem ΔΑ ipsi ΑΚ; tota igitur ΒΑ major est quam tota ΕΚ. Sed quam ΒΑ major est ΜΖ; multo igitur ΜΖ major est quam ΕΚ. Et quoniam ΕΝ, ΝΑ, ΑΚ æquales inter se sunt, sunt autem et ipsæ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ æquales inter se, atque est æqualis multitudo ipsarum in ΜΖ multitudini ipsarum in ΕΚ; est igitur ut ΚΑ ad ΖΗ ita ΕΚ ad ΖΜ. Major autem ΖΜ quam ΕΚ; major igitur et ΖΗ quam ΑΚ. Atque est quidem ΖΗ æqualis ipsi Γ; ipsa autem ΚΑ ipsi ΑΔ; ergo Γ major est quam ΑΔ. Quod oportebat ostendere.

ΑΔ est égal à ΝΑ; la droite ΕΔ est donc plus grande que ΝΑ; la droite entière ΒΔ est donc plus grande que ΕΛ. Mais ΔΑ est égal à ΑΚ; la droite entière ΒΑ est donc plus grande que la droite entière ΕΚ. Mais ΜΖ est plus grand que ΒΑ; la droite ΜΖ est donc à plus forte raison plus grande que ΕΚ. Et puisque les droites ΕΝ, ΝΑ, ΑΚ sont égales entr'elles, que les droites ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ sont aussi égales entr'elles, et que le nombre des parties de ΜΖ est égal au nombre des parties de ΕΚ, la droite ΚΑ sera à ΖΗ comme ΕΚ est à ΖΜ (12. 5). Mais ΖΜ est plus grand que ΕΚ; la droite ΖΗ est donc plus grande que ΑΚ (14. 5). Mais ΖΗ est égal à Γ, et ΚΑ égal à ΑΔ; la droite Γ est donc plus grande que ΑΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἔστω δὲ τὸ Γ ἴλασσον, . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ ἴσα τῇ Γ, καὶ ἔστω . . .	Id.	τὰ ἴσα τῇ Γ
3. γιγνέσθω	γίνεσθω	concordat cum edit. Paris.
4. γιγνέσθω	γινέσθω	concordat cum edit. Paris.
5. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ ΔΑ ἴσον ἔστι τῇ ΕΝ· . . .	Id.	τῇ ΔΑ ἴσον ἔστι τὸ ΕΝ·
7. τὸ ΑΔ ἔστιν ἴσον τῇ ΝΑ· . . .	Id.	τῇ ΔΑ ἴσον ἔστι τὸ ΝΑ·
8. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῇ ΑΚ . . .	Id.	Αλλὰ καὶ τῇ ΔΑ ἴσον ἔστι τὸ ΑΚ·

PROPOSITIO II.

1. ὅτων	Id.	ἐκκειμένων

2. καὶ	<i>Id.</i>	καὶ ὅτος
3. τὸ	<i>Id.</i>	ὁ
4. ἰστὶν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO III.

1. μεγέθη σύμμετρα	<i>Id.</i>	σύμμετρα μεγέθη
2. μέγεθος ἥτοι	μέγεθος	ἥτοι
3. οὖν	<i>Id.</i>	οὖν τὸ AB τὸ ΓΔ
4. τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἰστί, καὶ φανερόν ὅτι καὶ μέγιστον	<i>Id.</i>	κοινὸν μέτρον ἰστί τῶν AB, ΓΔ. Καὶ φανερόν ὅτι μέτρον ἰστί μέγιστον
5. καὶ ἀνθυφαιρουμένου αἰ τοῦ ἐλάσσονος	<i>Id.</i>	ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάτ- τονος αἰ
6. ΕΔ	<i>Id.</i>	ΓΔ
7. ΑΖ δὲ	<i>Id.</i>	δὲ ΑΖ
8. τὸ ΑΖ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μετρεῖ	Hæc phrasis contrac- ta margini exarata est manu alienâ.	concordat cum edit. Paris.
9. Ἐστὼ	<i>Id.</i>	μετρεῖτω, καὶ
10. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. λοιπὸν	<i>Id.</i>	λοιπὸν ἄρα
12. AB, ΓΔ	<i>Id.</i>	AB, ΓΔ μεγέθη

PROPOSITIO IV.

1. δύο	<i>Id.</i>	deest.
2. οὐ	<i>Id.</i>	οὐ μετρεῖ
3. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A, B, τὸ Δ ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ	Hæc phrasis exarata est litteris mino- ribus in infimâ pa- ginâ.	concordat cum edit. Paris.
4. τὸ Δ ἄρα	τὸ δὲ ΑΔ	concordat cum edit. Paris.
5. A, B οὐ μετρεῖ	<i>Id.</i>	A, B, Γ οὐ μετρήσει. Εἰ γὰρ δυ- ατὸν, μετρεῖτω τὰ A, B, Γ μειζὸν τοῦ Δ μεγέθους, τὸ E.

a, c. Καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ,
καὶ τὰ Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ
τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον
μετρήσει τὸ Δ, τὸ μείζον τὸ
ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον. *d, f,*
g, h, l, m, n.

6. οὖν	<i>Id.</i>	deest.
7. μετρήσει	<i>Id.</i>	μετρεῖ
8. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ.	<i>Id.</i>	deest.
9. ἵστί μέτρον.	<i>Id.</i>	μέτρον ἵστί.
10. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
11. Α, Β	<i>Id.</i>	Α, Β ἄρα
12. Τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοι- νὸν μέτρον ἵστί τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ, ...	ἵστί δὲ τὸ Ε, τὸ Ζ ἄρα τὰ Ε μετρήσει, ...	concordat cum edit. Paris.
13. μεγέθη	deest.	concordat cum edit Paris.
14. ἴαν	ἴαν	concordat cum edit. Paris.
15. συμμετρων δοθέντων, . . .	<i>Id.</i>	δοθέντων συμμετρων,

COROLLARIUM.

16. μέτρον μετρήσει.	<i>Id.</i>	μετρήσει μέτρον.
17. προχωρήσει.	προχωρήσει. Οπερ ἴδει	concordat cum edit. Paris.
	διῆξαι.	

PROPOSITIO V.

1. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO VI.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἵσται
2. τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα . . .	<i>Id.</i>	πρὸς ἀλλήλα τὰ Α, Β
3. τὸ αὐτὸ	<i>Id.</i>	ταὐτὸ
4. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

450 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

linea 1 μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ
ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ
τὸ Α.

Legere est in infimā
paginā edit. Oxoniæ: *illa in uncis
inclusa desiderantur in utroque
codd. mss.*

concordat cum edit. Paris.

Illa non desiderantur
in codicibus *a, d,
e, f, g, h, l, m, n.*

5. τὸ Γ
6. ἀριθμόν·
7. τῷ Ζ
8. τὸν Ε.
9. ἔστι
10. τὸ Α
11. μετρεῖ

ὁ Γ
Id.
Id.
Id.
Id.
deest.
deest.

concordat cum edit. Paris.
deest.
τῷ Ζ μεγέθη
τὸν Ε ἀριθμόν.
deest.
concordat cum edit. Paris.
μὲν

A L I T E R*.

1. οὕτως
2. τὸ
3. οὕτως
4. οὕτως
5. τὸ
6. καὶ
7. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ
8. ὡς ἴδου διῆξαι

deest.
τὸν
deest.
* deest.
Id.
Id.
deest.
Id.

concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
τὸν
deest.
concordat cum edit. Paris.
deest.

C O R O L L A R I U M**.

1. ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν
οὕτως ἡ εὐθεία
2. εὐθείας.

Id.
τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν
οὕτως τὴν εὐθείαν
εὐθείας. ὡς ἴδου διῆξαι.

concordat cum edit. Paris.

* Deest in codd. *d, e*; reperitur autem in codd. *f, g, h, l, m, n*; atque est exaratum in summā
paginā codicis *a*.

** Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

PROPOSITIO VIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ἔστι	<i>Id.</i>	ἔσται
2. Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἔξει ὃν ἀριθ- μὸς πρὸς ἀριθμὸν.	<i>Id.</i>	Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὅνπερ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

PROPOSITIO IX.

1. ὃν	<i>Id.</i>	ὅνπερ
2. ὃν	<i>Id.</i>	ὅνπερ
3. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
4. ὃν	<i>Id.</i>	ὅνπερ
5. πρὸς τὸν Δ, ...	<i>Id.</i>	ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν,
6. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸν Δ	<i>Id.</i>	τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν
7. ἀριθμὸν	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον.	<i>Id.</i>	ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετρά- γωνον ἀριθμὸν. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.
10. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετράγωνον*	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
13. τοῦ Δ*	<i>Id.</i>	τοῦ Δ τετράγωνον*
14. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
15. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
16. τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
17. τετραγώνου	<i>Id.</i>	τετραγώνου ἀριθμοῦ
18. τοῦ Δ	<i>Id.</i>	τοῦ Δ ἀριθμοῦ
19. τετράγωνον	<i>Id.</i>	τετράγωνον ἀριθμὸν
20. τοῦ Γ	<i>Id.</i>	τοῦ Γ ἀριθμοῦ
21. λόγου*	<i>Id.</i>	ἀριθμοῦ λόγον
22. ὁ Γ	<i>Id.</i>	ὁ Γ ἀριθμὸς
23. τὸν Δ	<i>Id.</i>	τὸν Δ ἀριθμὸν*

452 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
24. μήκει.	<i>Id.</i>	μήκει. Οπερ ἴδει διῖξαι.
25. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
26. τῆς Β	<i>Id.</i>	τῆς Β τετράγωνον
27. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
29. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
30. δὴ	<i>Id.</i>	δὲ
31. τετράγωνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
33. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R.

In editionibus Basilicae et Oxoniae variae partes hujus ἄλλως insertae sunt in varias partes propositionis 9; in codicibus autem *a* et *d* hoc ἄλλως exaratum est in margine; in codicibus vero *a, d, e, f, g, h, l, m, n* sic ordo se habet: 1° prop. 9 corollarium; 2° lemma prop. 10; 3° ἄλλως prop. 9; 4° prop. 11; 5° prop. 10.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIAE.
1. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ δὲ Γ τὸν Δ	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Δ
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ὁ δὲ Δ τὸν Γ	<i>Id.</i>	τὸν δὲ Γ
linea 13 ἀριθμὸν.	<i>Id.</i>	ἀριθμὸν. Οπερ ἴδει διῖξαι.
5. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴσται	ἴσται	concordat cum edit. Paris.
7. Ως δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὴν Η,	Legere est in infima paginā editionis Oxoniae : desiderantur in codd. mss.	concordat cum edit. Paris.

Illa non desiderantur in codicibus *a, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

linea 12 ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν
Δ, etc. usque ad vocabu-
lum ὁπερ.

Legere quoque est in
infimâ paginâ : *illa*
uncis inclusa non
agnoscunt codd.
mss.

concordat cum edit. Paris.

Illa agnoscunt codi-
ces *a, e, f, g, h, l,*
m, n.

8. οὕτως
9. οὕτως
10. τὸν Ζ. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.

deest.
deest.
τὸν Ζ.

concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.

C O R O L L A R I U M*.

1. φανερόν
2. ἴσται
3. σύμμετροι
4. καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ
πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμε-
τροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι
πάντως καὶ μήκει.
5. γὰρ
6. εἰσὶ
7. οὖν
8. ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμε-
τρα μὲν ἴσται αὐτὰ τὰ τετρά-
γωνα δυνάμει, ...

Id.
Id.
deest.
deest. *a, d, e, f, g, h,*
l, m, n.
deest.
deest.
Id.
Id.

φανερόν ἴστω
deest.
concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
concordat cum edit. Paris.
deest.
ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἑτερόν
τινα ἀριθμὸν, σύμμετρά ἴσται
τὰ τετράγωνα, τουτίστιν αἱ
εὐθείαι ἀφ' ὧν ἀνεγράφησαν δυ-
νάμει,
αἱ μὲν μήκει σύμμετροι
αἱ
concordat cum edit. Paris.
δυνάμει ἀσύμμετροι.
Επειδήπερ
concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

15. ἀριθμὸν, ...	τιτράγωνον ἀριθμὸν, . .	concordat cum edit. Paris.
16. τῷ	<i>Id.</i>	deest.
17. μήκει δύνανται, ...	<i>Id.</i>	καὶ δύνανται μήκει,
18. μήκει	<i>Id.</i>	εἰσιν

PROPOSITIO X.

2. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται.
3. ἴσται.	<i>Id.</i>	ἴσται.
4. ἀριθμὸν	<i>Id.</i> <i>a, d, e, h, l.</i> .	ἀριθμὸν. Εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, καὶ ἴσται σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτερον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν <i>f, g, m, n.</i>

PROPOSITIO XI.

1. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
3. τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσυρῆνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὲ ἡ Ε.	<i>Id.</i> <i>a, e, h, l.</i> . .	τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῤητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷον τῇ Α, δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτίστι ῤητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγου γὰρ καθέλου καλεῖται καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσύμμετρος τῇ ῤητῇ. <i>d, f, g, m, n.</i>

PROPOSITIO XII.

1. Β τῷ Γ, ...	Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XIII.

Hæc propositio, quæ prorsus eadem est quæ subsequens, exarata est vocabulis contractis, et alienâ manu in summâ paginâ codicis *a*, in margine vero cod. *d*, et in textu codd. *e*, *f*, *g*, *h*, *l*, *m*, *n*.

PROPOSITIO XIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἄλλω	<i>Id.</i>	ἑτέρῳ
lin. 9 paginæ 147 τὸ Β τῷ Γ,	τὸ Γ τῷ Β	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.

LEMMA.

1. ὀρθὴ ἴστιν	<i>Id.</i>	ἴστιν ὀρθή
2. τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
3. εὐθειῶν δοθεῖσαι	<i>Id.</i>	δοθεῖσαι εὐθειῶν
4. κείσθωσαν	<i>Id.</i>	ἐκκείσθωσαν

PROPOSITIO XV.

1. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει
2. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει.
3. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει
4. ἑαυτῇ	<i>Id.</i>	ἑαυτῇ μήκει.
5. δὴ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
6. τῇ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XVI.

1. ἴστί σύμμετρον.	<i>Id.</i>	σύμμετρόν ἴστιν.
2. ΑΓ	<i>Id.</i>	καὶ τὸ ΑΓ

456 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

3. ΑΓ ἐνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴστω σύμ- AB, ΒΓ ἴστω σύμμετρον concordat cum edit. Paris.
μετρον, ἴστω δὲ τῷ ΑΒ· . . τῷ ΑΒ·

PROPOSITIO XVII.

1. Συγκείσθω *Id.* Συγκείσθωσαν
2. ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, με- ἀσύμμετρον τὸ ΓΑ, ΑΓ με- concordat cum edit. Paris.
τρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Με- τρήσει τι μέγεθος. Με-
τρίτω, καὶ ἴστω, εἰ δυνατόν, τρίτω, εἰ δυνατόν, καὶ
τὸ Δ· ἴστω τὸ Δ·
3. ἴσθιν ἀδύνατον· *Id.* ἀδύνατόν ἐστιν·
4. ἴστω, καὶ ἴστω δὲ concordat cum edit. Paris.
5. ἴσται *Id.* ἴσται
6. ὑπίκειντο *Id.* ὑπίκειντο
7. Ομοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἐν τῷ deest. *a, d, e, f, g.* concordat cum edit. Paris.
ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ
ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἴσται. .

LEMMA*.

1. παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, . *d.* τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον,
2. ΑΓ, ΓΔ, τουτίσθι τὸ ὑπὸ τῶν *Id.* ΑΓ, ΓΒ.
ΑΓ, ΓΒ.

PROPOSITIO XVIII.

1. παραλληλόγραμμον deest. concordat cum edit. Paris.
2. μήκει· *Id.* μήκη·
3. μήκει· deest. concordat cum edit. Paris.
4. δύνηται *Id.* δυνήσεται
5. μήκει, ... deest. concordat cum edit. Paris.
6. τετάρτῳ *Id.* τετάρτῳ μέρει
7. παραλληλόγραμμον deest. concordat cum edit. Paris.
8. μήκει· *Id.* μήκη.
9. παραλληλόγραμμον deest. concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codicibus *a, d, e, f, g, h, l, m, n.*

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

10. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τῇ	Id.	τῇ
12. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τετραπλασίου τοῦ . . .	Id.	τετράκις
14. τετραπλασίῳ τοῦ . . .	Id.	τετράκις
15. τετραπλασίῳ τοῦ . . .	Id.	τετράκις
16. ἡ ΖΔ	Id.	ΖΔ
17. τετραπλασίῳ τοῦ . . .	Id.	τετράκις
18. σύμμετρος ἴστι ταῖς ΒΖ, ΓΔ μήκει*	Id.	ταῖς ΒΖ, ΓΔ ἴστί σύμμετρος μήκει*
19. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
21. μίζον τῆς Α	deest.	τῆς Α μίζον
22. ἑαυτῇ*	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 paginæ 159 σύμμετρος ἴστι τῇ ΔΓ* ὥστι καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρος ἴστι μήκει* καὶ διελόντι	Id.	τῇ ΔΓ σύμμετρος ἴστι μήκει, ἴση γάρ ἴστι ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ* καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρος ἴστι μήκει τῇ ΔΓ* δηλονότι

PROPOSITIO XIX.

1. μήκει*	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δύνηται	Id.	δυνήσεται
3. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. πρότερον, ...	Id.	προτίρη
5. ὅτι καὶ	Id.	οὖν ὅτι
6. μήκει, ...	Id.	deest.
linea 13 paginæ 160 ἄρα . . .	Id.	deest.
linea 2 paginæ 161 ἑαυτῇ. . .	ἑαυτῆς.	concordat cum edit. Paris.
8. ἑαυτῇ*	ἑαυτῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἡ	Id.	καὶ ἡ

SCHOLIUM I*.

1. Ἐπεὶ	Id.	Ἐπεὶ δὲ

* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

II.

2. εἰςὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμεις	αἱ δὲ δυνάμεις σύμμετροι	concordat cum edit. Paris.
3. δὴ δύνανται μήκει	Id.	δηλαδὴ δύνανται καὶ μήκει
4. ἐπεὶ αἱ	Id.	αἱ γὰρ
5. αὐτῇ	Id.	deest.

ΣΧΟΛΙΟΝ β*.

SCHOLIUM II.

Ρητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἑκκειμένη ρητῇ ἥτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰςὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἑκκειμένη ρητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ρηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὅ ρηταὶ, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ρηταὶ μήκει σύμμετροι, ἱσακουσμένου καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰςὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως² ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οἱ δὲ αἱ ρηταὶ σύμμετροί εἰσιν,

Rationales enim vocat eas expositæ rationali vel longitudine et potentiâ commensurabiles, vel potentiâ solùm. Sunt autem et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt expositæ rationali, potentiâ vero solùm commensurabiles, et ob id rursus dicuntur rationales et commensurabiles inter se quatenus rationales, sed commensurabiles inter se, vel longitudine scilicet et potentiâ vel potentiâ solùm. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentiâ; si vero potentiâ solùm inter se sunt commensurabiles, dicuntur et ipsæ sic rationales potentiâ solùm commensurabiles. Quod et rationales commensurabiles sint, ex his manifestum est; quoniam

S C H O L I E I I.

Car il appelle rationnelles celles qui sont commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement avec la rationnelle exposée. Il est d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec la rationnelle exposée, lui sont commensurables en puissance seulement; et à cause de cela elles sont encore dites rationnelles et commensurables entr'elles en tant que rationnelles; mais commensurables entr'elles en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, elles sont dites rationnelles commensurables en longueur, afin que l'on entende qu'elles le sont aussi en puissance; mais si elles sont commensurables entr'elles en puissance seulement, elles sont dites rationnelles commensurables en puissance seulement. Or, il est évident que les rationnelles sont com-

* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταὶ εἰσιν αἱ τῇ ἐκ-
κειμένη ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῇ αὐτῇ σύμ-
μετρα καὶ ἀλλήλοις ἴστί σύμμετρα· αἱ ἄρα
ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν³.

enim rationales sunt quæ expositæ rationali
commensurabiles, quæ vero eidem commensu-
rabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ
igitur rationales commensurabiles sunt.

mesurables; car puisque les rationnelles sont commensurables avec la rationnelle
exposée, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur
sont commensurables entr'elles (12. 10), il s'ensuit que les rationnelles sont
commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ῤητάς γάρ	<i>Id.</i>	ῤητάς
2. οὕτως	<i>Id.</i>	deest.
3. εἰσιν.	<i>Id.</i>	εἰσιν. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι.

PROPOSITIO XX.

1. εἰρημένων	<i>Id.</i>	προειρημένων
2. σύμμετρος δὲ ἴστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ·	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXI.

1. προειρημένων	<i>Id.</i>	εἰρημένων
2. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ἴστί

LEMMA*.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται
2. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴστιν ἡ Α.	<i>Id.</i>	ἡ Α ἴστιν.
4. Ὅπῃ ἴδι διῆξαι.	hæc phrasis contrac- ta est.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXII.

1. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴσται

* Non deest in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

2. μίση.	μίση, διὰ τὸ τὴν ἴσον ἀνα- γράφουσιν τετράγωνον τῷ ΑΓ χωρίῳ ἢ καλεῖ μίσην, μίσην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>a, d.</i>	μίση, διὰ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετρά- γωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ μίσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν ΑΒ, ΒΓ. <i>e,</i> <i>f, g, h, l, m, n.</i>

Subsequens scholium nihil aliud est quam propositio 22 aliter demonstrata.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Μίση ἐστὶν ἄλογος ἢ δυναμένη χωρίον περιε-
χόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρων.

Υπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμετρων
εὐθεῶν τῶν Α, Β περιεχέσθω χωρίον. Δεικνύει
ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Media est irrationalis quæ potest spatium con-
tentum sub rationalibus potentiâ solùm com-
mensurabilibus.

Sub rationalibus enim potentiâ solùm com-
mensurabilibus rectis Α, Β contineatur spatium.
Ostendendum est irrationale esse hujusmodi
spatium.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β μίση ἀνάλογον ἢ Γ·
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ·
ἥτοι ἢ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἐστὶν ἄρα

Sumatur enim ipsarum Α, Β media propor-
tionalis Γ; rectangulum igitur sub Α, Β æquale
est quadrato ex Γ; quare Γ potest rectangulum

S C H O L I E.

La médiale qui peut une surface comprise sous des rationnelles commensurables en puissance seulement, est irrationnelle.

Qu'une surface soit comprise sous les droites rationnelles Α, Β commensurables en puissance seulement; il faut démontrer qu'une telle surface est irrationnelle.

Car prenons une droite Γ moyenne proportionnelle entre Α et Β; le rectangle sous Α, Β sera égal au carré de Γ (17. 6); la droite Γ peut donc le rectangle

* Deest in codd. *a, c, d, e, f, g, h, l, m, n*; reperitur vero in cod. *g*.

ὥς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ , ὥς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δίδικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιθ' τοῦ 5' στοιχείου. Ἀσύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς Γ . Ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A · ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν A, B · ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ . Μίση δὲ ἐκλήθη, ἵτι ἄλογος οὕσα μίσην δύο ρητῶν τῶν A, B ἀνάλογόν ἐστιν.

sub A, B ; est igitur ut A ad B ita ex A quadratum ad ipsum ex Γ , ut enim prima ad tertiam ita ex primâ quadratum ad ipsum ex secundâ, hoc enim demonstratum est in corollario propositionis 28 sexti Elementorum. Incommensurabilis autem A ipsi B longitudine; incommensurable igitur et ex A quadratum quadrato ex Γ . Rationale autem quadratum ex A ; irrationale igitur rectangulum sub A, B ; irrationalis igitur est Γ . Media autem vocatur, quod irrationalis existens media duarum rationalium A, B proportionalis est.

sous A, B ; la droite A est donc à B comme le carré de A est au carré de Γ ; car la première est à la troisième comme le carré de la première est au carré de la seconde, ainsi que cela est démontré dans le corollaire 28 du sixième livre des Éléments. Mais A est incommensurable en longueur avec B ; le carré de A est donc incommensurable avec le carré de Γ (10. 10). Mais le carré de A est rationel; le rectangle compris sous A, B est donc irrationel; la droite Γ est donc irrationelle; et on l'appelle médiale, parce qu'étant irrationelle, elle est moyenne proportionnelle entre les deux rationelles A, B .

L E M M A*.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἔστιν	<i>Id.</i>	ἔσται
2. Οπιρ ἴδι διῆξαι.	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO XXIII.

1. παραβαλλόμενον	<i>Id.</i>	παραβαλλόμενον
2. ὀρθογώνιον	<i>Id.</i>	deest.
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐστι	<i>Id.</i>	deest.
5. ἐστι	<i>Id.</i>	ἔστι
6. περιεχομένον	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Non deest in codd. $a, d, e, f, g, h, l, m, n$.

PROPOSITIO XXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Ἡ δὲ τὸ	Id.	τὸ δὲ
3. δυναμένη μίση ἴστί . . .	Id.	εὐθεῖον περιεχόμενον ἑρθογώνιον ἄ- λογόν ἴστί, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἴστί, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μίση*

COROLLARIUM*.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει.	Id.	μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι.

Subsequentia, quæ desunt in codd. *e, m, n*, reperiuntur in codd. *a, d, f, g, l*.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μίση, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μίσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μίση καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὼ μίσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἥτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μίσαι μήκει σύμμετροι, ἱπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροί, λέγονται καὶ οὕτως μίσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Οἱ δὲ

Sunt autem rursus et aliæ rectæ, quæ longitudine quidem incommensurabiles sunt mediæ, potentiâ vero solum commensurabiles, et dicuntur rursus mediæ, quoniam commensurabiles sunt potentiâ mediæ et commensurabiles inter se, nam mediæ aliæ commensurabiles inter se vel longitudine scilicet et potentiâ, vel potentiâ solum. Et si quidem longitudine, dicuntur et ipsæ mediæ longitudine commensurabiles, consequenter etiam et potentiâ. Si autem potentiâ solum sunt commensurabiles, dicuntur et sic mediæ potentiâ solum com-

Il est encore d'autres droites qui étant incommensurables en longueur avec une médiale, ne sont commensurables avec elle qu'en puissance; on les appelle encore médiales, parce qu'elles sont commensurables en puissance avec une médiale et commensurables entr'elles; car les autres médiales sont commensurables entr'elles, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement. Si elles le sont en longueur, on les appelle médiales commensurables en longueur, et par conséquent en puissance; et si elles ne sont commensurables qu'en puissance, on les appelle médiales commensurables en puissance seulement. On

* Non deest in codd. *a, d, e, f, g, h, l, m, n*.

αἱ μῖσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως² δικτίον. Ἐπεὶ αἱ μῖσαι μίση τινὲ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἴσθι σύμμετρα· αἱ ἄρα μῖσαι σύμμετροί εἰσιν.

mensurabiles. Quod vero mediæ commensurabiles sint, sic ostendendum est. Quoniam mediæ mediæ cuidam commensurabiles sunt, et quæ eidem commensurabiles et inter se sunt commensurabiles; ipsæ igitur mediæ commensurabiles sunt.

démontre ainsi que ces médiales sont commensurables. Puisque ces médiales sont commensurables avec une médiale, et que les grandeurs commensurables avec une même grandeur sont commensurables entr'elles, les médiales sont commensurables.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. μῖσαι	<i>Id.</i>	deest.
2. οὕτως	<i>Id.</i>	οὕτω

PROPOSITIO XXV.

1. κατὰ τινα τῶν εἰρημένων τρώ- πων	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσθι	<i>Id.</i>	ἴσθι καὶ

PROPOSITIO XXVI.

1. εὐθειῶν	<i>Id.</i>	deest.
2. περιχίσθω ὀρθογώνιον . . .	<i>Id.</i>	ὀρθογώνιον περιχίσθω
3. ἢ μίσην ἴσθιν.	<i>Id.</i>	ἴσθιν ἢ μίσην.
4. ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ἴσθι
5. Καὶ ἐπὶ	<i>Id.</i>	Ἐπὶ οὖν
6. Καὶ ἴσθιν	<i>Id.</i>	Ἐστὶν ἄρα καὶ
7. σύμμετρος ἴσθι	<i>Id.</i>	ἢ ΘΚ σύμμετρος ἴσθι τῇ ΘΝ, τι- τίσθι
8. ΘΜ	<i>Id.</i>	ΘΜ ἄρα
9. ἢ μίσην ἴσθιν.	<i>Id.</i>	ἴσθιν ἢ μίσην

PROPOSITIO XXVII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἴσιν ἴσον	<i>Id.</i>	ἴσον ἴστί.
2. παράκειται	<i>Id.</i>	παράκεινται.
4. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 21 paginæ 179 Μίσον	<i>Id.</i>	Οὐκ ἄρα μίσον μίσου,
ἄρα μίσου, ...		

PROPOSITIO XXVIII.

1. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
6. σύμμετροι. Ὅπρι ἴδου διῆξαι.	<i>Id.</i>	σύμμετροι, ῥατὸν περιέχουσαι. Ὅπρι ἴδου διῆξαι.

PROPOSITION XXIX.

1. τρεῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνά- μι μόνον εἰσί.	καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμι εἰσὶ σύμμετροι.	concordat cum edit. Paris.
5. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. μίσον περιέχουσαι. Ὅπρι ἴδου παῖναι.	καὶ τὰ ἑξῆς.	concordat cum edit. Paris.

L E M M A I*.

1. δὲ	<i>Id.</i>	δὴ
2. ἐκ	<i>Id.</i>	ἐπὶ

* Non deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

3. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
4. ὅπερ ἴδιαι διῆξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

C O R O L L A R I U M*.

1. τὸν	<i>Id.</i>	τὴν
2. ὧσιν ἐπίπιδαι.	<i>Id.</i>	ἐπίπιδαι ὧσιν.
3. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετράγωνος.	τετράγωνος. Ὁ ἄρα ὁ	concordat cum edit. Paris.

L E M M A I I**.

1. κατὰ τὸ Δ'	τῷ Δ	concordat cum edit. Paris.
2. ὁ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
4. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
5. Αφηρήσθω	Αφηρήσθω ὁμοίως	concordat cum edit. Paris.
6. AB, BΓ τετράγωνος	AB, BΓ	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστί	<i>Id.</i>	ἴσται
11. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
12. τοῦ ἀπὸ τοῦ BE, ...	<i>Id.</i>	deest.
13. μονάς.	<i>Id.</i>	μονάς, μήτε ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ἢ τῷ ἀπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ.
14. τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος δι- πλασίων ὁ HA.	τῆς ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς BE, καὶ ἴστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίος ὁ HA.	τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ BE, καὶ ἴστω διπλασίων ὁ HA τῆς ΔΕ μονάδος.
15. ὁ δὲ AH τοῦ ΔΕ ἴστί δι- πλασίων	<i>Id.</i>	ὧν ὁ AH ἴστί διπλασίων τοῦ ΔΕ
16. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

** Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

466 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
17. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
18. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ἐκ τῶν	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν
21. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
23. ὁ AB ἴσος τῷ HB, . . .	ἡ AB ἴση τῇ HB, . . .	concordat cum edit. Paris.
24. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
25. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
26. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
27. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
28. διπλασίων	<i>Id.</i>	διπλάσιος κείσθω
29. Καὶ	<i>Id.</i>	deest.
30. διπλασίων	<i>Id.</i>	διπλάσιος
31. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
32. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
33. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
34. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
35. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἵσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ,	<i>Id.</i>	συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ τῷ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΖ,
36. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
37. τῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
38. αὐτῷ	deest.	concordat cum edit. Paris.
39. τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ·	τῆς ΒΕ·	concordat cum edit. Paris.
40. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
41. τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἐπιδεικνύνειν, ἀρκείσ- θωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι,	τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύνειν, ἀρκείσ- θωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι,	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXX.

1. τὸν	τὴν	concordat cum edit. Paris.
2. τετράγωνον, ...	<i>Id.</i>	deest.

3. οὖν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἔστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 12 μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. μείζον	μείζονα	concordat cum edit. Paris.
7. ποιῆσαι.	Id.	δείξαι.

PROPOSITIO XXXI.

1. ἀριθμοὶ	Id.	deest.
2. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῷ	τῷ	concordat cum edit. Paris.

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

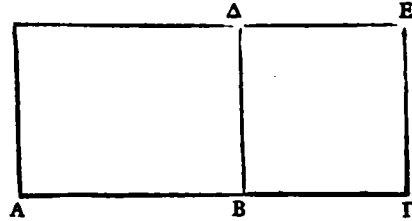
LEMMA.

Εὰν ᾗσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἴσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Si sint duæ rectæ in ratione aliqua, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub duabus rectis ad quadratum ex minori.

Εστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BG ἐν λόγῳ τινί· λίγῳ ὅτι ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως

Sint igitur duæ rectæ AB, BG in ratione aliqua; dico esse ut AB ad BG ita sub AB, BG



τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BG. Ανα-
γεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BG τετράγωνον τὸ

rectangulum ad quadratum ex BG. Describatur
enim ex BG quadratum BΔΕΓ, et compleatur

LEMMA.

Si l'on a deux droites dans une raison quelconque, l'une d'elles sera à l'autre comme le rectangle sous ces deux droites est au carré de la plus petite.

Soient les deux droites AB, BG dans une raison quelconque; je dis que AB est à BG comme le rectangle sous AB, BG est au carré de BG. Car décrivons sur BG

* Deest in codd. a, d, e, h, l, m, n; reperitur autem in cod. f.

468 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΒΔΕΓ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. Φανερὸν δὲ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

ΑΔ parallelogrammum. Manifestum est igitur esse ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ parallelogrammum ad ΒΕ parallelogrammum. Atque est ΑΔ quidem rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΒΔ, sed ΒΕ quadratum ex ΒΓ; ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum ad quadratum ex ΒΓ. Quod oportebat ostendere.

le carré ΒΔΕΓ, et achevons le parallélogramme ΑΔ. Il est évident que ΑΒ est à ΒΓ comme le parallélogramme ΑΔ est au parallélogramme ΒΕ (1.6). Mais le rectangle ΑΔ est compris sous ΑΒ, ΒΓ; car ΒΓ égale ΒΔ, et le parallélogramme ΒΕ est le carré de ΒΓ; donc ΑΒ est à ΒΓ comme le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est au carré de ΒΓ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. γάρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	Id.	τῇ
3. ἰστέ	Id.	deest.
4. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. συμμετρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
6. δύναται	Id.	δυνήσεται
7. συμμετρου	ἀσυμμέτρου	concordat cum edit. Paris.
8. συμμετρου ἑαυτῇ	ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ	συμμέτρου ἑαυτῇ
9. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Ὁμοίως δὲ διχθήσεται καὶ τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μείζον δύνῃται ἢ Α τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, e.	Id. a.	Ὁμοίως δὲ διχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α μείζον δυνήται τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. d, f.

Lemma subsequens Euclidis esse minime potest, eo quod propositionis 1 lib. 6 consequentia sit proxima.

ΛΗΜΜΑ*.

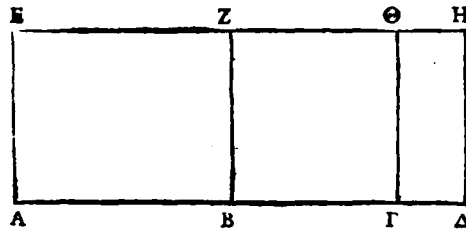
Εάν ὡς τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἴσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μίσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μίσης καὶ ἐλαχίστης.

Εστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ AB, BG, ΓΔ· λέγω ὅτι ἴσται ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BG, ΓΔ.

LEMMA.

Si sint tres rectæ in ratione aliquâ, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum sub primâ et mediâ ad ipsum sub mediâ et minimâ.

Sint tres rectæ AB, BG, ΓΔ in ratione aliquâ; dico esse ut AB ad ΓΔ ita sub AB, BG rectangulum ad ipsum sub BG, ΓΔ.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ κείσθω τῇ BG ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ E σημείου τῇ AD εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ EH, διὰ δὲ τῶν B, Γ, Δ σημείων τῇ AE παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ BZ, ΘΓ, ΗΔ. Καὶ ἵπται ἴσται ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BG οὕτως τὸ AZ

Ducatur enim a puncto A ipsi AB ad rectos angulos AE, et ponatur ipsi BF æqualis AE, et per punctum E ipsi AD recta parallela ducatur EH, sed per puncta B, Γ, Δ ipsi AE parallelæ ducantur BZ, ΘΓ, ΗΔ. Et quoniam est ut AB ad BG ita AZ parallelogrammum ad BΘ pa-

LEMMA.

Si l'on a trois droites dans une raison quelconque, la première sera à la troisième comme le rectangle sous la première et la moyenne est au rectangle sous la moyenne et la plus petite.

Soient les trois droites AB, BG, ΓΔ dans une raison quelconque; je dis que AB est à ΓΔ comme le rectangle sous AB, BG est au rectangle sous BG, ΓΔ.

Car du point A menons la droite AE perpendiculaire à AB; faisons AE égal à BG; par le point E menons la droite EH parallèle à AD, et par les points B, Γ, Δ menons BZ, ΘΓ, ΗΔ parallèles à AE. Puisque AB est à BG comme le parallé-

* Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. c, f, l.

παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παρλληλό-
 γραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ
 ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· διόσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν
 ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παρλληλόγραμμον πρὸς τὸ
 ΓΗ παρλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ
 τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ,
 τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ
 τῇ ΓΘ.

Εὰν ἄρα τρεῖς ᾖσι, καὶ τὰ ἐξῆς.

rallelogrammum, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita ΒΘ
 ad ΓΗ; ex æquo igitur ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΖ
 parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΗ.
 Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ,
 æqualis enim ΑΕ ipsi ΒΓ, rectangulum vero ΓΗ
 sub ΒΓ, ΓΔ, æqualis enim ΒΓ ipsi ΓΘ.

Si igitur tres sint, etc.

gramme ΑΖ est au parallélogramme ΒΘ, et que ΒΓ est à ΓΔ comme ΒΘ est à ΓΗ
 (1.6); par égalité, ΑΒ sera à ΓΔ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallé-
 logramme ΓΗ. Mais ΑΖ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ; car ΑΕ égale ΒΓ, et ΓΗ est le
 rectangle sous ΒΓ, ΓΔ; car ΒΓ égale ΓΘ. Donc, etc.

PROPOSITIO XXXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. δυνάμεις μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ.	Id.	αἱ Α, Β, Γ δυνάμεις μόνον σύμ- μετροι,
2. τῆς Δ.	Id.	τῆς Δ, μίσην δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β.
3. ἴσον	Id.	ἴσον ἰστί
4. Ὡς δὲ	Id.	Αλλ' ὡς
5. μόνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
8. τῇ	Id.	τὸ
9. τὸ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
10. αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνά- μεις μόνον σύμμετροι	Id.	deest.
11. τὴν μείζονα	Id.	deest.
12. Ὅπρι εἶδει ποιῆσαι	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Ε μείζον δύνηται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. . .	Id.	Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μείζον δύνηται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

ΛΗΜΜΑ*.

LEMMA.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω .	ὑπὸ Α γωνίαν, καὶ ἤχθω	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ ἔτι τὸ	<i>Id.</i>	τὸ δὲ
3. ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·	ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ·	ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ·
4. τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἔστι . . .	ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἔστι . . .	τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον
5. Καὶ ὅτι	Η καὶ ὅτι	concordat cum edit. Paris.
6. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Ὅπερ εἶδει δεῖξαι.	deest.	concordat cum edit. Paris.

ΛΗΜΜΑ β**.

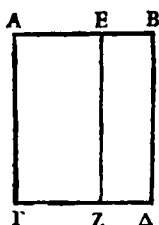
LEMMA II.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἴσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Si recta linea secetur in partes inæquales, erit ut recta ad rectam ita rectangulum sub totâ et maiori ad rectangulum sub totâ et minori.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Recta enim aliqua AB secetur in partes inæquales ad E; dico ut AE ad EB ita sub BA, AE rectangulum ad ipsum sub AB, BE.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὀποτίρα τῶν

Describatur enim ex AB quadratum ΑΓΔΒ, et per punctum E alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΒ

LEMMA II.

Si une ligne droite est partagée en deux parties inégales, une partie sera à une partie comme le rectangle compris sous la droite entière et la plus grande partie est au rectangle compris sous la droite entière et sous la plus petite.

Car qu'une droite AB soit coupée en deux parties inégales en E; je dis que AE est à EB comme le rectangle sous BA, AE est au rectangle sous AB, BE.

Car décrivons avec AB le carré ΑΓΔΒ, et par le point E menons la droite EZ

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

** Deest in codd. a, d, e, h, m, n; reperitur autem in codd. f, g, l.

ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἢ χθω ἢ ΕΖ. Φανερὸν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμα πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμα. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ. Οπιρ ἴδει διῆξαι.

ΛΗΜΜΑ γ'*

Εὰν ὡς δύο εὐθεῖαι ἀνισοί, τμηθῇ δὲ ἡ ἱλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισυῖας τῆς ἱλαχίστης.

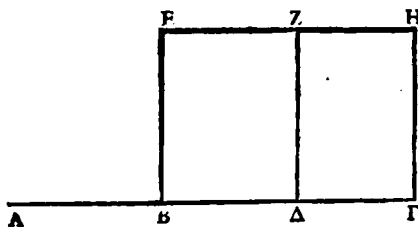
Εστωσαν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τιτμήσθω ἡ ΒΓ δίχως

parallela ducatur ΕΖ. Evidens est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΖΒ. Atque est quidem ΑΖ rectangulum sub ΒΑ, ΑΕ, æqualis enim ΑΓ ipsi ΑΒ, rectangulum vero ΖΒ sub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim ΔΒ ipsi ΑΒ; ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita sub ΒΑ, ΑΕ rectangulum ad ipsum sub ΑΒ, ΒΕ. Quod oportebat ostendere.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, secetur autem minima ipsarum in partes æquales; rectangulum sub duabus rectis duplum erit rectanguli sub majori et dimidiâ minimæ.

Sint duæ rectæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major sit ΑΒ, et secetur ΒΓ bifariam in Δ;



κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.

dico rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ duplum esse rectanguli sub ΑΒ, ΒΔ.

parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΑΓ, ΔΒ. Il est évident que ΑΕ sera à ΕΒ comme le parallélogramme ΑΖ est au parallélogramme ΖΒ (1. 6). Mais ΑΖ est le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ; car ΑΓ égale ΑΒ, et ΖΒ est le rectangle sous ΑΒ, ΒΕ, car ΔΒ est égal à ΑΒ; donc ΑΕ est à ΕΒ comme le rectangle sous ΒΑ, ΑΕ est au rectangle sous ΑΒ, ΒΕ. Ce qu'il fallait démontrer.

LEMMA III.

Si deux droites sont inégales, et si la plus petite est coupée en deux parties égales, le rectangle compris sous ces deux droites sera double du rectangle compris sous la plus grande et la moitié de la plus petite.

Soient les deux droites inégales ΑΒ, ΒΓ; que ΑΒ soit la plus grande; coupons ΒΓ en deux parties égales au point Δ; je dis que le rectangle sous ΑΒ, ΒΓ est double du rectangle sous ΑΒ, ΒΔ.

* Deest in codd. a, d, e, f, h, l, m, n; reperitur autem in codd. g, l.

Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγινεῖται τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. Καὶ ἴσιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίον· διπλασίον ἄρα ἴσιν καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. Καὶ ἴσιν τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. Ὅπρι ἴδι διίξαι.

Ducatur enim a puncto B ipsi BG ad rectos angulos ipsa BE, et ponatur ipsi BA æqualis BE, et describatur figura. Quoniam igitur est ut AB ad AG ita BZ ad AH, componendo igitur ut BG ad AG ita BH ad AH. Atque est BG ipsius AG dupla; duplum igitur est et BH ipsius AH. Atque est quidem BH rectangulum sub AB, BG, æqualis enim AB ipsi BE, rectangulum vero AH est ipsum sub AB, BA, æqualis enim quidem ipsi BA ipsa AG, ipsi vero AB ipsa AZ. Quod oportebat ostendere.

Lemma subsequens in codice 190 locum tenet lemmatis secundi edit. Oxoniæ.

Λ Η Μ Μ Α.

L E M M A.

Ἐὰν ᾖσι δύο εὐθεῖαι, ἴσιν ὡς ἡ μία πρὸς τὴν ἑτέραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρας καὶ τῆς ἑτέρας.

Si sint duæ rectæ, erit ut una ad alteram ita rectangulum sub utrâque et unâ ipsarum ad rectangulum sub utrâque et alterâ.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Sint duæ rectæ AB, BG; dico esse ut AB ad BG ita sub AG, AB rectangulum ad ipsum sub AG, GB.

Du point B menons BE à angles droits à BG; faisons BE égal à BA, et décrivons la figure. Puisque AB est à AG comme BZ est à AH (1. 6); par addition, BG sera à AG comme BH est à AH. Mais BG est double de AG; donc BH est double de AH. Mais BH est le rectangle sous AB, BG, car la droite AB est égale à BE; et AH est le rectangle sous AB, BA, car AG est égal à BA, et AZ à AB. Ce qu'il fallait démontrer.

L E M M E.

Si l'on a deux droites, la première sera à la seconde comme le rectangle compris sous leur somme et sous l'une de ces droites est au rectangle compris sous la somme de ces droites et sous l'autre droite.

Soient les deux droites AB, BG; je dis que AB est à BG comme le rectangle compris sous AG, AB est au rectangle compris sous AG, GB.

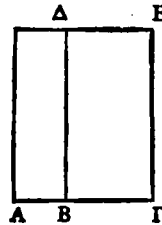
474 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

Ἡχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἴση τῇ ΑΓ ἡ ΒΔ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΔ τὸ

Ducatur enim a puncto B ad rectos angulos æqualis ipsi ΑΓ ipsa ΒΔ, et compleatur ΑΕ parallelogrammum.

Quoniam enim est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΓ; atque est quidem rectangulum ΑΔ ipsum sub ΒΔ,



ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΑΒ, τουτίσσι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ, ἴση γὰρ ὑπὸκειται ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΒ, τουτίσσι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΒ, hoc est rectangulum sub ΓΑ, ΑΒ, æqualis enim supponitur ΒΔ ipsi ΓΑ; est autem rectangulum ΑΓ ipsum sub ΒΔ, ΓΒ, hoc est rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; et ut igitur ΑΒ ad ΒΓ ita sub ΓΑ, ΑΒ rectangulum ad ipsum sub ΑΓ, ΓΒ. Quod oportebat ostendere.

Car du point B menons à angles droits la droite ΒΔ égale à ΑΓ, et achevons le parallélogramme ΑΕ.

Car puisque ΑΒ est à ΒΓ comme ΑΔ est à ΔΓ (1. 6), que ΑΔ est le rectangle sous ΒΔ, ΑΒ, c'est-à-dire sous ΓΑ, ΑΒ, car ΒΔ est supposé égal à ΓΑ, et que ΔΓ est le rectangle sous ΒΔ, ΓΒ, c'est-à-dire sous ΑΓ, ΓΒ; la droite ΑΒ sera à ΒΓ comme le rectangle sous ΓΑ, ΑΒ est au rectangle sous ΑΓ, ΓΒ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITIO XXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. τῆς	Id.	τῇ
2. ἀπὸ	Id.	ἀπὸ ἐλάσσονος
3. ἐπὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. σύμμετρον ἐστὶ τῷ	Id.	διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ

PROPOSITIO XXXV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τοῦ	<i>Id.</i>	τῆς
2. τῆς ΔΒ.	<i>Id.</i>	τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμεις εἰσὶν ἀσύμμετροι.
3. διπλῆ	<i>Id.</i>	διπλασίων
4. ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ.	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμ- μετρον.
5. τῶν ΑΒ, ΒΓ·	<i>Id.</i>	τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκειται γὰρ οὕτως·
6. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῇ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· . . .	τῇ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ·	concordat cum edit. Paris.
7. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVI.

1. τῆς	<i>Id.</i>	τῇ
2. τοῖς ἐπάνω ὁμοίως	<i>Id.</i>	ὁμοίως τοῖς ἐπάνω
3. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴσον ἐστὶ	<i>Id.</i>	ἴστιν ἴσον
6. ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ·	<i>Id.</i>	ἡ ΔΖ τῇ ΒΕ·
7. μείσον ἄρα	<i>Id.</i>	μείσον, μείσον
8. ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῇ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.
9. αἱ ΑΔ, ΔΒ	<i>Id.</i>	deest.
10. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVII.

1. καλείσθω	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ὅλη	<i>Id.</i>	deest.
3. αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμ- μετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ,	<i>Id.</i>	τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστὶ,

4. ἴστί	<i>Id.</i>	deest. <i>d, f, l.</i>
5. ὀνομάτων.	ὀνομάτων. Εκάλεσι δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισθαι, κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ ῥητόν. Οἷον. Οἷον. <i>a, e, g, h, m, n.</i>	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XXXVIII.

1. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ συνθίπτει	<i>Id.</i>	συνθίπτει ἄρα
3. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ὑπέκινται γὰρ αἱ AB, BΓ ῥητὸν περιέχουσιν.	<i>Id.</i>	ὑπέκινται δὲ ῥητὸν περιέχουσιν.
4. πρώτη.	πρώτη. Εκάλεσι δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μίσων πρώτην, διὰ τὸ ῥητὸν περιέχουν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν. Οἷον. Οἷον. <i>a, e, g, h, m, n.</i>	concordat cum edit. Paris. <i>d, f, l.</i>

PROPOSITIO XXXIX.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ παρὰ τὴν ΔΕ	<i>Id.</i>	παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ
3. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
4. παράκεινται	<i>Id.</i>	παράκεινται.
5. Επεὶ οὖν	<i>Id.</i>	καὶ ἐπεὶ
6. τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ	<i>Id.</i>	τῷ ἀπὸ τῆς AB τὸ
7. ἀσύμμετρος ἴστί μήκει. Εδίχθησαν δὲ ῥηταί.	ἴστί ἀσύμμετρος μήκει.	concordat cum edit. Paris.
8. χωρίον καὶ	deest.	χωρίον ὥστε καὶ
9. αὐτὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 40 adest in *b* subsequens scholium, quod Euclidis esse minime potest.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἀλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γὰρ ἐστὶ ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἀλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἀλογόν ἐστίν³.

Vocavit autem illam ex binis mediis secundam, quoniam medium et non rationale continetur sub ipsis, posterius est vero medium rationali. Quod autem sub rationali et irrationali continetur irrationale esse, manifestum est. Si enim sit rationale et applicetur ad rationalem, esset et alterum ipsius latus rationale. Sed et irrationale, quod absurdum; spatium igitur sub rationali et irrationali irrationale est.

SCHOLIE.

Il l'appèle seconde de deux médiales, parce que la surface comprise sous AB, BG est médiale et non rationelle, car la surface médiale est après la rationelle. Et il est évident que la surface comprise sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle; car si elle était rationelle, et qu'elle fût appliquée à une droite rationelle, l'autre côté serait rationel. Mais il est irrationel, ce qui est absurde; donc une surface sous une rationelle et une irrationelle est irrationelle.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. τὸ	<i>Id.</i>	τὸ τὸ
2. ἐστὶ	ἴσται	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστίν.	ἐστίν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XL.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. AB, BG*	<i>Id.</i>	AB, BG. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG.

* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

Post propositionem 40 adest in *b* scholium subsequens, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

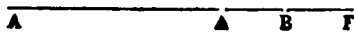
SCHOLIUM.

Εκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* μίσου¹, καὶ δεῖον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκείότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεισθαι. Οἷον καὶ² μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *AB*, *BF* τοῦ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*, οὕτως δικτιόν.

Φαίνεται μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ *AB*, *BF*. Εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

Vocavit autem ipsam majorem, quia quadrata ex *AB*, *BF* rationalia majora sunt rectangulo medio bis sub *AB*, *BF*, et oportet ex rationalium proprietate nomen imponere. At vero majora esse quadrata ex *AB*, *BF* rectangulo bis sub *AB*, *BF*, sic demonstrabimus.

Evidens est quidem inæquales esse *AB*, *BF*. Si enim sint æquales, æqualia erunt et quadrata



AB, *BF* τῷ δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BF*, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *AB*, *BF* ῥητὸν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσιν αἱ *AB*, *BF*. Υποκείσθω μείζων ἢ *AB*, καὶ κείσθω τῇ *BF* ἴση ἢ *BD*. Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *AB*, *BD* ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν *AB*, *BD* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς³ *AD*. Ἰση δὲ ἢ *AB* τῇ *BF*. Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *AB*, *BF*

ex *AB*, *BF* rectangulo bis sub *AB*, *BF*, et erit rectangulum sub *AB*, *BF* rationale, quod non supponitur; inæquales igitur sunt *AB*, *BF*. Supponatur major *AB*, et ponatur ipsi *BF* æqualis *BD*; quadrata igitur ex *AB*, *BD* æqualia sunt et rectangulo bis sub *AB*, *BD* et quadrato ex *AD*. Æqualis autem *AB* ipsi *BF*; qua-

S C H O L I E.

Il l'appèle majeure, parce que la somme des quarrés des rationnelles *AB*, *BF* est plus grande que le rectangle médial qui est le double rectangle sous *AB*, *BF*, et qu'il fallait choisir un nom d'après la propriété des rationnelles. Nous démontrons ainsi que la somme des quarrés de *AB* et de *BF* est plus grande que le double rectangle sous *AB*, *BF*.

Car il est évident que les droites *AB*, *BF* sont inégales. Car si elles étaient égales, la somme des quarrés de *AB* et de *BF* serait égale au double rectangle sous *AB*, *BF*, et le rectangle sous *AB*, *BF* serait rationel, ce qui n'est point supposé; donc les droites *AB*, *BF* sont inégales. Supposons que *AB* est la plus grande, et faisons *BD* égal à *BF*; la somme des quarrés de *AB* et de *BD* sera égale au double rectangle sous *AB*, *BD*, et au quarré de *AD* (7.2). Mais *AB* est égal à *BF*; donc

* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

ἴσα ἴστί τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB, BG καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AD· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG μείζονα ἴστί⁴ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τῷ ἀπὸ τῆς⁵ AD. Οὐκ ἔστι διῆξι.

drata igitur ex AB, BG æqualia sunt et rectangulo bis sub AB, BG et quadrato ex AD; quare quadrata ex AB, BG majora sunt quam rectangulum bis sub AB, BG quadrato ex AD. Quod oportebat ostendere.

la somme des quarrés de AB et de BG est égale au double rectangle sous AB, BG et au quarré de AD; donc la somme des quarrés de AB et de BG surpasse le double rectangle sous AB, BG du quarré de AD. Ce qu'il fallait démontrer.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. μίσου	μίσων	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	Id.	deest.
3. τῆς	Id.	deest.
4. ἴστί	ἴναι	concordat cum edit. Paris.
5. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLI.

1. καλίσθω	καλίσται	concordat cum edit. Paris.
2. συνθίντι	deest.	concordat cum edit. Paris.

Post propositionem 41 adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ῥητὸν δὲ καὶ μίσον δυναμίνην αὐτὴν ἐκά-
λισι¹, διὰ τὸ θυνάσθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῤητὸν,
τὸ δὲ μίσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῤητοῦ πρὸς παρξίν,
πρῶτον τὸ ῤητὸν³ ἐκάλισιν⁴.

Rationale autem et medium potentem ipsam
vocavit, quia potest bina spatia, unum quidem
rationale, alterum vero medium; et quoniam
ipsius rationalis prius mentionem fecit, primum
rationale vocavit.

SCHOLIE.

Il l'appèle celle dont la puissance est rationelle et médiale, parce que sa puissance renferme deux surfaces, l'une rationelle, et l'autre médiale; et à cause que la surface rationelle est avant la rationelle, il parle d'abord de la rationelle.

* Deest in codd. *d, f, l*; reperitur autem in codd. *a, e, g, h, m, n*.

480 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. αὐτὴν ἐκάλεισε, ...	καλεῖται αὐτὴ	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ ῥητὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἐκάλεισιν.	ἐκάλεισιν. Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLII.

1. τετραγώνων*	τετραγώνων*	concordat cum edit. Paris.
2. τὰ προκείμενα*	Id.	τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν AB, BΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῇ συγκείμενῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετραγώνων*
3. ἔστιν	Id.	deest.
4. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ	Id.	ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ
5. ἄρα	Id.	deest.

Post propositionem 42 adsunt in *b* duo scholia subsequencia, quæ quidem Euclidis non sunt.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α*.

SCHOLIUM I.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μίσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μίσα χωρία, τό, τε συγκείμενον¹ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ, καὶ τὸ² δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ³.

Vocat autem ipsam bina media potentem, quia potest bina media spatia, et compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis, et rectangulum bis sub AB, BΓ.

SCHOLIE I.

Il l'appèle celle dont la puissance est une double médiale, parce que sa puissance égale deux surfaces médiales; savoir, la somme des quarrés de AB et de BΓ, et le double rectangle sous AB, BΓ.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. τό, τε συγκείμενον	τά, τε συγκείμενα	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ	τοῦ	concordat cum edit. Paris.
3. AB, BΓ.	AB, BΓ. Ὅπερ ἴδιαι δείξαι.	concordat cum edit. Paris.

* Deest in cod. *d*; reperitur autem in codd. *a, e, f, g, h, m, n*.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β*.

SCHOLIUM II.

Οτι δὲ αἱ εἰρημίαι ἄλογοι μοναχῶς διαι-
ροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιου-
σῶν τὰ προκείμενα εἶδη, δείξομεν ἤδη, προεκ-
θίμενοι λημμάτων τοιοῦτον.

At vero dictas irrationales uno tantum modo
dividi in rectas ex quibus componuntur, et quæ
faciunt propositas species, mox ostendemus,
si prius exposuerimus quoddam lemma hujus-
modi.

SCHOLIE II.

Après avoir exposé le lemme suivant, nous démontrerons que les irratio-
nelles dont nous avons parlé ne peuvent se diviser que d'une seule manière dans
les droites qui les composent, et qui constituent les espèces proposées.

LEMMA*.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, καὶ ὑπο- κείσθω	deest.	ἑκατέρα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ.
2. καὶ	Id.	deest.
3. ἴσθιν	Id.	deest.
4. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ·	Id.	ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἴσθι τῇ ἀπὸ τῆς ΕΒ·
5. ΑΔ, ΔΒ. Ὅπερ εἶδει δείξαι.	Id.	ΑΔ, ΔΒ, εἴπερ συναμφοτέρα ἴσα ἴσθι τῇ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

PROPOSITIO XLIII.

1. ΑΓ	Id.	ΑΒ
2. τμήμα κατὰ τὸ Γ	Id.	τῇ κατὰ τὸ Δ
3. τῆς διχοτομίας	τοῦ διχοτόμου	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	Id.	τοῦ
5. ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· μίσον γάρ	Id.	ὄντα· μίσον δὲ

* Reperitur in codd. a, e, f, g, h, l, m, n; deest autem in cod. d.

** Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

PROPOSITIO XLIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. Ἐστω	<i>Id.</i>	Ἐστω δὴ

PROPOSITIO XLV.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ	τῆς διχοτομίας, ὅτι . .	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ	<i>Id.</i>	ΑΓ, ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν
τῶν ΑΓ, ΓΒ, ...		ΑΔ, ΔΒ,
5. Καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
8. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἐπειδήπερ	ὅτι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLVI.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερ- έχει ῥητῶ, ...	<i>Id.</i>	ῥητῶ ὑπερίχει τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ,
linea 9 μόνον διαιρείται. . .	deest.	ἄρα διαιρείται μόνον.

PROPOSITIO XLVII.

1. διαιρείται.	<i>Id.</i>	διαιρείται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. τὸ δὲ δις	<i>Id.</i>	τὸ δ'
3. τὸ δὲ δις	<i>Id.</i>	τὸ δ'
linea 12 τὰ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ὑπερίχει ῥητῶ, ...	<i>Id.</i>	ῥητῶ ὑπερίχουσι,

PROPOSITIO XLVIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. διαιρεῖται	<i>Id.</i>	διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.
2. δύο μίσα δυναμένη	<i>deest.</i>	concordat cum edit. Paris.
3. τῶν	<i>Id.</i>	<i>deest.</i>

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. ἰλάσσονος vocabulum ἰλάσσονος concordat cum edit. Paris.
contractum est, et
inter lineas manu
recenti exaratum.

Has post definitiones adest in *b* subsequens scholium, quod quidem Euclidis non est.

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ἐξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανόμενων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἰλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμεύτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμεύτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμεύτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἰκκιμένη

Sex igitur rectis existentibus ita sumptis, facit primas ordine tres, in quibus major quam minor plus potest quadrato ex rectâ sibi commensurabili; secundas autem ordine reliquas tres, in quibus potest quadrato ex rectâ sibi incommensurabili, propterea quod prius est commensurabile incommensurabili; et adhuc primam quidem, in quâ majus nomen

SCHOLIE.

Six droites étant prises ainsi, il (Euclide) fait une classe de trois droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite commensurable avec la plus grande; il fait ensuite une classe de trois autres droites, dont la puissance de la plus grande surpasse la puissance de la plus petite du quarré d'une droite incommensurable avec la plus grande, parce que le commensurable est avant l'incommensurable. La première classe est celle dont le plus grand nom est commensurable avec la rationnelle exposée; la seconde

* Reperitur in codd. *a, d, e, f, g, h, m, n*; *deest* autem in cod. *l*.

484 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ
 πάλιν προτερεῖν τὸ μείζον τοῦ ἐλάττονος τῷ
 ἐμπεριέχειν τὸ ἔλαττον· τρίτην δὲ, ἐφ' ᾧ μν-
 δέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ἔστι τῇ ἐκκει-
 μένῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τριῶν ὁμοίως,
 τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως
 τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην,
 καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

commensurable est expositæ rationali; secun-
 dam vero, in quâ minus, propterea quod
 rursus majus antecedit minus, cùm contineat
 minus; tertiam autem, in quâ neutrum nomi-
 num est commensurable expositæ rationali; et
 deinceps in tribus similiter, primam dictæ se-
 cundi ordinis quartam appellans, et secundam
 quintam, et tertiam sextam.

classe, est celle dont le plus petit nom est commensurable avec la rationelle ex-
 posée, parce que le plus grand précède le plus petit, puisque le plus grand
 contient le plus petit; la troisième classe enfin, est celle où aucun des noms
 n'est commensurable avec la rationelle exposée. Il fait de la même manière
 une classe des trois autres droites, appelant la première la quatrième de la
 seconde classe, la seconde la cinquième, et la troisième la sixième.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx IGO.

EDITIO OXONIE.

1. δύναται	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἔστι σύμμετρον	σύμμετρον ἔστι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XLIX.

1. μὴν	Id.	deest.
2. καὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO L.

1. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα καὶ	ἄρα τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμμετρον ἔστι . . .	concordat cum edit. Paris.
3. σύμμετρον ἔστι τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ	τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμ- μετρον ἔστι	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LI.

linea II τετράγωνος ἀριθμὸς .	Id.	ἀριθμὸς τετράγωνος
2. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἢ Ε'	Id.	ῥητὴ δὲ ἢ Ε'

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς *Id.* ἀσύμμετρος ἄρα
τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὅν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
τράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος
ἄρα ἐστὶν
4. ἐστὶν deest. concordat cum edit. Paris.
5. ἐστὶν *Id.* deest.

PROPOSITIO LII.

1. τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχιν μῆτι *Id.* ἰκάντερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχιν
μὴν πρὸς τὸν ΑΓ
2. καὶ *Id.* deest.
3. οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ *Id.* deest.
ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὅν τε-
τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
γωνον ἀριθμόν·
4. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς τὸ ἀπὸ concordat cum edit. Paris.
5. τετράγωνος ἀριθμὸς *Id.* ἀριθμὸς τετράγωνος
6. οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς *Id.* deest.
τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὅν
τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τε-
τράγωνον ἀριθμόν·
7. ἐστὶν *Id.* deest.

PROPOSITIO LIII.

1. ῥητὴ τις εὐθεῖα *Id.* τις εὐθεῖα ῥητὴ
2. μήκει deest. concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ *O δὲ* concordat cum edit. Paris.
ἐπεὶ ὁ
4. ἄρα *Id.* deest.
5. ἄρα deest. concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα vocabulum ἄρα, diffi-
cile lectu, inter li-
neas manu recenti
exaratum est.
7. τῆς *Id.* τῇ

PROPOSITIO LIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. μήτε	<i>Id.</i>	μήδε
2. σύμμετρον ἄρα ἰστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. . . .	<i>Id.</i>	σύμμετρος ἄρα ἰστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ δυνάμει.
3. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ῥη- τὸν ἄρα καὶ	ῥητὸν ἄρα καὶ . . .	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	<i>Id.</i>	deest.
linea 9 ΗΘ	<i>Id.</i>	κΘ
5. τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς . . .	ΖΘ τοῦ ἀπὸ ΗΘ . . .	concordat cum edit. Paris.
6. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. αὐτῶν	<i>Id.</i>	τῶν ΖΗ, ΗΘ

L E M M A*.

1. τῇ ΒΗ*	<i>Id.</i>	τῇ ΒΗ μήκει*
2. ΑΚ, ΘΓ ἰστὶν ἴση* . . .	ΑΘ, ΚΓ ἰστὶν ἴση* ἢ δὲ ΖΗ ἑκατέρω τῶν ΑΚ, ΘΓ ἰστὶν ἴση*	concordat cum edit. Paris.
3. ἰστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἰστὶν ἑκατέρα ἑκατέρω* . .	ἑκατέρα*	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΚΑ οὕτως ἢ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ*	ΚΑ οὕτως ἢ ΕΓ πρὸς ΓΕ*	concordat cum edit. Paris.
linea 16 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 17 τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LV.

1. ΑΒΓΔ	ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
2. ἐκ δύο ὀνομάτων ἰστὶ . .	<i>Id.</i>	ἰστὶν ἐκ δύο ὀνομάτων
3. δὲ	<i>Id.</i>	δὲ
4. τοῦ	<i>Id.</i>	τῶν
5. τοῦ	<i>Id.</i>	τῶν

* Reperitur in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
6. σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. . .	σύμμετρον αὐτὴν διαιρεῖ.	σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ.
7. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἀπὸ	<i>Id.</i>	διὰ
9. τῇ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως	τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΑ τὸ ΕΑ	concordat cum edit. Paris.
τὸ ΕΑ πρὸς τὴν ΚΗ . . .	πρὸς ΚΗ	
12. τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ,	<i>Id.</i>	τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ,
13. ΕΑ τῷ ΜΡ ὥστε καὶ τῷ ΟΞ.	<i>Id.</i>	ΜΡ τῷ ΕΑ. Αλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΑ τῷ ΓΖ ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ, ΟΞ.
14. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
16. τῇ ΕΖ	<i>Id.</i>	τῇ ΕΖ μήκει.
17. ἐστίν	<i>Id.</i>	deest.
18. οὕτως ἢ ΟΝ πρὸς ΝΡ . .	ἢ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ . .	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVI.

1. τὸ	<i>Id.</i>	τὸ μὲν
2. σύμμετρον	<i>Id.</i>	σύμμετρος
3. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν	<i>Id.</i>	τῷ
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπὶ . . .	ΑΒ. Καὶ	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἢ ΑΕ ῥητὴ ἄρα	ἀλλ' ἢ ΑΕ σύμμετρος τῇ	concordat cum edit. Paris.
καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. Καὶ	ΑΒ μήκει καὶ αἱ ΑΗ,	
ἐπὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἢ ΑΕ τῇ	ΗΕ ἄρα σύμμετροί εἰσι	
ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἢ ΑΕ ἑκα-	τῇ ΑΒ αἱ	
τέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ αἱ ΑΗ, ΗΕ		
ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ		
μήκει αἱ ΒΑ, ...		
8. ἐστίν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ	τῇ	concordat cum edit. Paris.

488 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
10. ὥστε δυνάμεις εἰςὶ σύμμετροι αἱ MN, ΝΞ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ΕΖ σύμμετρος.	Id.	ΕΖ.
12. ἴστι	Id.	deest.
13. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. ἄρα ΜΞ	Id.	ΜΞ ἄρα

PROPOSITIO LVII.

1. μᾶλλον ἴστω	τὸ μᾶλλον ἴστι	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ αἱ MN, ΝΞ μίσαι εἰςὶ δυνάμεις μόνον σύμμετροι ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μίσων ἴστί. . .	Id.	καὶ ὅτι αἱ MN, ΝΞ ἐκ δύο μίσων εἰσί.
4. ἀσύμμετρος	Id.	ἀσύμμετρον
5. ἴστι	Id.	deest.
6. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LVIII.

1. ἴστιν	Id.	deest.
2. δὴ	Id.	δὴ
3. Ἐπεὶ	Id.	Ἐπεὶ γὰρ
4. δυνάμεις	Id.	deest.
5. ἴστι	Id.	deest.
6. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τῇ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. συγκείμενον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. καὶ εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ MN, ΝΞ	Id.	καὶ ἴστιν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ ΝΞ

PROPOSITIO LIX.

1. ἄρα	Id.	deest.
2. τῆς	τῶν	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIE.

3. καὶ ἴστιν	καὶ	concordat cum edit. Paris.
4. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. Καὶ ῥητὴ	Id.	ῥητὴ δὲ
7. τῶν MN, NΞ	MNΞ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LX.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἀπὸ τῶν	Id.	deest.
4. ἄρα	Id.	deest.
5. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. Καὶ ἴστι μίσον ἑκάτερον αὐ- τῶν, καὶ αἱ MN, NΞ . . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

LEMMA*.

1. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τῆς	Id.	τῶν
4. ἴστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ . .	ἴστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ . .	τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXI.

1. ἑκατέρᾳ τῶν ΜΑ, ΗΞ . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	Id.	εἰσι
3. ΑΓ, ΓΒ.	Id.	ΑΓ, ΓΒ ῥητὸν ἄρα ἴστι τὸ συγ- κείμενον ἐκ τῶν ΑΓ, ΓΒ.
4. ἡ ΜΗ ἴστιν, ...	Id.	ἴστιν ἡ ΜΗ,
5. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. μήκει.	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μίρμ	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Reperitur in codicibus a, d, e, f, g, h, l, m, n.

9. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων	Id.	deest.
δύναται τῷ ἀπὸ σύμμετρου		
ἑαυτῇ.		

PROPOSITIO LXII.

1. τὰς μίσας	deest.	τὰ μίσα
2. παρὰ τὴν ΔΕ παραβέβλησθαι	Id.	παραβέβλησθαι παρὰ τὴν ΔΕ τῷ
τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τὸ . . .		ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον
3. τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν	ἰστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥη-	τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παρά-
ΔΕ παραβέβληται	τὴν ΔΕ παραβέβληται .	κείται
4. ἰστί	Id.	deest.
5. ἰστὶ	Id.	deest.

PROPOSITIO LXIII.

1. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἰστὶ διυτέρα	Id.	διυτέρα ἰστὶν
3. τὴν ΔΕ ῥητὴν	Id.	ῥητὴν τὴν ΔΕ
4. καὶ	Id.	deest.
5. καὶ	Id.	deest.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. πρότερος	Id.	πρότερον
8. ἰστὶν	Id.	deest.

PROPOSITIO LXIV.

linea 7 τις ἴστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. γὰρ	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 2 καὶ	ἰστὶ	concordat cum edit. Paris.
3. ἰστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΜΛ παράκειται . . .	ἰστὶ τὴν ΜΛ	concordat cum edit. Paris.
5. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. δείξομεν τοῖς πρότερον, . .	Id.	τοῖς πρότερον ἐπιλογισύμεθα,
8. ἰστὶ	Id.	deest.

9. ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ. Id. καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐστιν.
10. παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ Id. παραβληθῇ παρὰ τὴν μείζονα
11. μήκει deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXV.

1. γὰρ deest. concordat cum edit. Paris.
2. ἐστίν deest. concordat cum edit. Paris.
3. μήκει deest. concordat cum edit. Paris.
4. τῇ ΚΜ μήκει Id. μήκει τῇ ΚΜ
5. ῥηταὶ deest. concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXVI.

1. ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων Id. συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τε-
συγκείμενον τῷ ἐκ τῶν τραγώνων τῷ
2. ἐστὶ deest. concordat cum edit. Paris.
3. δὴ πάλιν Id. γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου

PROPOSITIO LXVII.

1. τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΓΖ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ· ἐναλ- concordat cum edit. Paris.
ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ λάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ
πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ
2. τὴν ΖΔ· ΓΖ πρὸς ΖΔ·
3. ἥτοι deest. concordat cum edit. Paris.
4. δύναται Id. δυνήσεται
5. ἴσται Id. ἴστί.
6. ἴσται Id. ἴστιν
7. δύναται Id. δυνήσεται
8. ἴστι Id. ἴσται

PROPOSITIO LXVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEx 190.	EDITIO OXONIENSIS.
1. καὶ αὐτὴ	<i>Id.</i>	deest.
2. διγρησθῶ	<i>Id.</i>	διγρημένη
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ	ΓΔ ἢ ΑΕ πρὸς ΓΖ . . .	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΓΔ	ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
5. ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΕ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· μίσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ	<i>Id.</i>	ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἢ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι μίσαι αἱ ΑΕ, ΕΒ
6. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ...	ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετροί εἰσι	<i>Id.</i>	εἰσὶ σύμμετροι
8. ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν.	ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι.
9. τὴν ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ	ΕΒ ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ . .	concordat cum edit. Paris.
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ διὰ τοῦτο ἔστιν ἐκ δύο μίσων πρώτη. Εἴτε μίσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μίσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Καὶ ἔστιν ἑκατέρα διυτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἢ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή. . .	εἴτε μίσον, μίσον καὶ ἴσ- τιν ἑκατέρα διυτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἢ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἢ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXIX.

1. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. Γεγονίτω γάρ	<i>Id.</i>	Καὶ γεγονίτω
3. τὴν ΓΔ οὕτως ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ . .	ΕΒ οὕτως ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ .	concordat cum edit. Paris.
4. τὴν ΖΔ, ...	ΖΔ	concordat cum edit. Paris.
5. τὴν ΕΒ	ΕΒ	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἔστιν	<i>Id.</i>	deest.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEx 190.

EDITIO OXONIAE.

8. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
9. ἀσύμμετροί εἰσι,	<i>Id.</i>	εἰσὶν ἀσύμμετροι,
10. ἄμα	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXX.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῶν ΑΕ, ΕΒ τῇ ὑπὸ τῶν	ΑΕ, ΕΒ τῇ ὑπὸ	concordat cum edit. Paris.
3. μὲν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXI.

1. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸ δὲ	ὥστε καὶ τὸ	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ ἄρα ΓΔ	<i>Id.</i>	ἡ ΓΔ ἄρα

PROPOSITIO LXXII.

1. τουτέστι τὴν ΘΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. τῇ ΕΗ·	<i>Id.</i>	τὸ ΕΗ.
3. ῥητὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ ΕΘ ἄρα ῥητὴ ἐστὶ	<i>Id.</i>	ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ
5. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. τῇ ΘΙ·	<i>Id.</i>	τὸ ΘΙ·
7. τουτέστι τὴν ΘΗ,	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἐστὶν ἡ	<i>Id.</i>	ἔστω
9. ἐστὶν ἡ	<i>Id.</i>	ἔστω
10. ἐστὶν ἡ	<i>Id.</i>	ἔστω
11. περιέχεται	περιέχεται	concordat cum edit. Paris.
12. χωρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ἐστὶν	<i>Id.</i>	ἔστω

PROPOSITIO LXXIII.

1. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.

3. Εστω	Εστω εἰ τύχοι	concordat cum edit. Paris.
4. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
5. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
6. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
linea 17 Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι, καὶ ἑλάττω ἢ τὸ AB τοῦ ΓΔ, ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων διυτέρα ἐστὶ, δύο ἢ μέσα δυναμένη	deest.	concordat cum edit. Paris.

Subsequens corollarium in textu adesse deberet.

ΠΟΡΙΣΜΑ*.

COROLLARIUM.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταὶ· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων διυτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων διυτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον

Quæ ex binis nominibus et irrationales quæ post ipsam neque mediæ neque inter se sunt eædem; quadratum enim ex mediâ ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem et longitudine incommensurabilem ipsi ad quam applicatur. Quadratum autem rectæ ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam. Quadratum autem primæ ex binis mediis ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam. Quadratum autem secundæ ex binis mediis ad rationalem appli-

COROLLAIRE.

La droite de deux noms et les irrationnelles qui la suivent ne sont les mêmes ni avec la médiale, ni entr'elles; en effet, le carré d'une médiale étant appliqué à une rationnelle fait une largeur rationnelle et incommensurable en longueur avec la droite à laquelle elle est appliquée (23. 10). Le carré d'une droite de deux noms étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une première de deux noms (61. 10). Le carré d'une première de deux médiales étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une seconde de deux noms (63. 10). Le carré d'une seconde de deux médiales étant appliqué à une rationnelle fait une largeur

* Reperitur in codicibus a, d, e, f, h, l, m, n.

πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μίσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Τὰ δὲ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητὴ ἐστίν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, ὥστε² καὶ αὐταὶ αἱ ἄλλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

catum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quadratum autem ex majori ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam. Quadratum autem ex rectâ rationale et medium potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam. Quadratum autem ex rectâ bina media potenti ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Ipsæ vero dictæ latitudines differunt et à primâ et inter se, à primâ quidem quod rationalis sit, inter se vero quod ordine non sint eadem, quare et ipsæ irrationales differunt inter se.

- qui est une troisième de deux noms (63. 10). Le carré d'une majeure étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une quatrième de deux noms (64. 10). Le carré d'une droite, qui peut une surface rationnelle et une surface médiale, étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une cinquième de deux noms (65. 10). Le carré d'une droite, qui peut deux surfaces médiales, étant appliqué à une rationnelle fait une largeur qui est une sixième de deux noms (66. 10). Or les largeurs dont nous venons de parler sont différentes de la première et différentes entr'elles; elles diffèrent de la première, parce qu'elle est rationnelle; et entr'elles, parce qu'elles ne sont pas du même ordre; ces irrationnelles sont donc différentes entr'elles.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. Τὰ δὲ	<i>Id.</i>	Επεὶ οὖν τὰ
2. ὥστε	<i>Id.</i>	δῆλον ὡς

ΣΧΟΛΙΟΝ*.

SCHOLIUM.

Ἐπτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρη-
μένων· ὧν ἡ μὲν πρώτη ἰδίῃ τὴν γένεσιν αὐ-
τῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν
μόνον σημεῖον διαιροῦνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ
δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρί-
της, τετάρτης, πέμπτης, ἑκτης, ἀφ' ἧς ἡ
τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπιδείκνυε τῶν ἀλό-
γων, πῇ διαφύρουσι· προσχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ
δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν
ἑξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἑκτὴν ἐξέθετο, δικ-
νύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς, τὰς
ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ
πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. Ἐν δὲ τῇ
ἑκτῇ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ἰσοιδεῖς
αὐταῖς εἰσὶ. Πάλιν, ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς δια-
φορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Septem sunt senarii usque ad ea de quibus hac-
tenus dictum est; quorum primus quidem ostendit
generationem ipsarum; secundus vero divisio-
nem, propterea quod ad unum duntaxat punc-
tum dividuntur; tertius autem ex binis nomi-
nibus inventionem primæ, secundæ, tertiæ,
quartæ, quintæ, sextæ, post quam quartus se-
narius ostendit differentiam irrationalium, quo-
modo illæ differant; usus enim eis quæ ex binis
nominibus ostendit differentiam sex irrationa-
lium. Quintum et sextum exposuit, ostendens
in quinto quidem applicationes quadratorum
ex irrationalibus, quales irrationales faciant la-
titudines applicatorum spatiorum. In sexto au-
tem, quomodo commensurabiles irrationalibus
eiusdem speciei sint. Rursus, in septimo evi-
denter differentiam ipsarum nobis ostendit.

S C H O L I E.

Il y a sept sixains dans ce qui a été dit jusqu'à présent. Le premier fait voir l'origine des irrationnelles (37, 38, 39, 40, 41, 42); le second leur division, parce qu'elles ne peuvent être divisées qu'en un seul point (43, 44, 45, 46, 47, 48); le troisième enseigne à trouver les droites de deux noms: la première de deux noms (49), la seconde (50), la troisième (51), la quatrième (52), la cinquième (53), et enfin la sixième (54); le quatrième sixain démontre la différence des irrationnelles, c'est-à-dire ce en quoi elles diffèrent; car faisant usage des droites de deux noms, il (Euclide) fait voir la différence des six irrationnelles (55, 56, 57, 58, 59, 60); il expose le cinquième et le sixième sixain; dans le cinquième, il démontre les applications des carrés des irrationnelles, c'est-à-dire qu'il démontre quelles sont les irrationnelles que produisent les largeurs des surfaces appliquées (61, 62, 63, 64, 65, 66); dans le sixième, il fait voir comment les droites commensurables avec les irrationnelles sont de la même espèce qu'elles (67, 68, 69, 70, 71); et enfin dans le septième, il nous démontre clairement leur différence (72, 73).

* Deest in codd. a, d, e, f, g, h, l, m, n.

Αναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μίση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἷα σδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδὴς ἐστὶν ὣν ἐστὶ μίση ἀνάλογον. Καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μισότης ἐν τούτοις ἐστὶ. Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι AB, καὶ διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερόν ὅτι ἡ AG τῆς GB ἐστὶ μείζων. Αφηρήσθω ἀπὸ

Apparet autem et in his irrationalibus arithmetica proportio; et media sumpta proportionalis portionum cujusque irrationalis secundum arithmetica proportionem, et ipsa ejusdem speciei est cum eis quarum est media proportionalis. Et primum arithmetica medietas in his est. Ponatur enim ex binis nominibus si contigerit AB, et dividatur in nomina ad Γ; evidens est AG quam GB esse majorem. Auferatur ex AG

A ——— Δ E Γ ——— B

• Z ——— H

τῆς AG τῇ GB ἴση ἡ AD, καὶ δίχα τιτμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε· φανερόν ὅτι ἡ AE τῇ EB ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ΖΗ· φανερόν δὲ ὅτι ὅς διαφέρει ἡ AG τῆς ΖΗ τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ EB τῆς ΓΒ, ἡ μὲν γὰρ AG τῆς ΖΗ τῇ ΕΓ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΓΒ, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ AB, τῇ γὰρ ἡμισία αὐτῆς ἐστὶν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ομοίως διχθῆσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

ipsi GB æqualis AD, et bifariam secetur ΓΔ in E; evidens est AE ipsi EB esse æqualem. Ponatur alterutri ipsarum æqualis ZH; manifestum est igitur quo differt AG ab ipsa ZH hoc differre et EB ab ipsa GB, etenim differt AG ab ipsa ZH ipsa ΕΓ, eadem vero magnitudine et ipsa ZH differt ab ipsa GB, quod est arithmetice proportionis. Perspicuum est autem ZH commensurabilem esse ipsi AB, dimidiæ enim ipsius est æqualis; quare ipsa ex binis nominibus est. Similiter demonstrabitur et in aliis.

Il y a évidemment dans les irrationnelles une proportion arithmétique; et la moyenne proportionnelle prise arithmétiquement entre les parties d'une irrationnelle quelconque est de la même espèce que les droites entre lesquelles elle est moyenne proportionnelle. Il y a d'abord une médiété arithmétique entre les parties d'une irrationnelle. Car, que AB soit une droite quelconque de deux noms, et que cette droite soit divisée en ses noms au point Γ; il est évident que AG est plus grand que GB. Retranchons de AG une droite AD égale à GB, et partageons ΓΔ en deux parties égales en E; il est évident que la droite AE sera égale à la droite EB. Que ZH soit égal à chacune de ces droites; il est évident que la différence de AG à ZH sera la même que la différence de EB à GB; car la différence de AG à ZH est ΕΓ, ainsi que la différence de ZH à GB, ce qui appartient à la proportion arithmétique. Mais il est évident que la droite ZH est commensurable avec AB, car elle en est la moitié; la droite ZH est donc une droite de deux noms (67. 10). Nous démontrerons la même chose pour les autres irrationnelles.

PROPOSITIO LXXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμ- μετρά ἴσιν τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG.	καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσα ἴσιν τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἴσα ἴσιν τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. . .	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXV.

1. καλεῖσθαι	καλεῖται	concordat cum edit. Paris.
2. ἴσιν	Id.	deest.
3. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴσιν	Id.	deest.
5. δι	δὴ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVI.

1. περιέχῃ	περιέχουσα	concordat cum edit. Paris.
2. τῆς	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴσιν	καὶ σύμμετρά ἴσιν . . .	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	Id.	deest.
5. ἀσύμμετρον ἄρα ἴσιν τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BG.	Id.	ἀσύμμετρα ἄρα ἴσιν τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG.
6. ἴσιν	Id.	deest.
7. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. μίσης	Id.	μίση

PROPOSITIO LXXVII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

1. μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ἅμα μέσον.	τὰ προκείμενα . . .	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ	ἡ καλουμένη	concordat cum edit. Paris.
3. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῶ ἀπὸ τῆς AG. . .	λοιπῇ τῇ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG τῇ ἀπὸ τῆς AG.	concordat cum edit. Paris.
4. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG ἄλογος ἄρα ἡ AG, ...	ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AG, ...	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXVIII.

1. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG ῥη- τόν	τὰ προκείμενα	concordat cum edit. Paris.
2. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ἡτοῦ μέ- σον τὸ ὅλον ποιούσα.	ἡ προειρημένη.	concordat cum edit. Paris.
3. AB, BG	Id.	AB, BG τετραγώνων
4. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXIX.

1. τὸ μὲν	τό, τε.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ δὲ	τό, τε	concordat cum edit. Paris.
3. τὰ προκείμενα	Id.	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BG μέ- σον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BG ἀσύμμετρα τῇ δις ὑπὸ τῶν AB, BG.

500 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἡ καλουμένη	<i>Id.</i>	καλείσθω δὲ
5. ῥητὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῷ ΔΘ.	τῷ ΔΘ.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστί καὶ
11. τὴν ΔΖ·	ΔΖ·	concordat cum edit. Paris.
12. ὀρθογώνιον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXX.

1. μόνον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τὰ	<i>Id.</i>	τὸ
5. ἀμφοτέρω	<i>Id.</i>	ἑκατέρω.

PROPOSITIO LXXXI.

1. μία μόνον	<i>Id.</i>	μόνον μία
2. ΑΓ, ΓΒ ἄρα	<i>Id.</i>	ἄρα ΑΓ, ΓΒ
3. αὐτῷ	<i>Id.</i>	αὐτῷ πάλιν

PROPOSITIO LXXXII.

1. μίση	μίσης	concordat cum edit. Paris.
2. οὔσα	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. μίση	μίσης	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
6. σύμμετροί εἰσιν, ...	<i>Id.</i>	εἰσὶ σύμμετροι,
7. ἴστί	<i>Id.</i>	καὶ
8. ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστί καὶ

PROPOSITIO LXXXIII.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

1. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
2. τὰ προειρημένα.	<i>Id.</i>	τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετρά- γωνα ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον.
3. τετραγώνων	<i>Id.</i>	deest.
4. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.

PROPOSITIO LXXXIV.

1. προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ. . .	καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζεται ἡ ΒΓ.	concordat cum edit. Paris.
2. τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἰτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζεται ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦ- σαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν.	τὰ προκείμενα.	concordat cum edit. Paris.
3. τοῖς	<i>Id.</i>	τῶν
3. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
4. τὰ προειρημένα· μία ἄρα μό- νον προσαρμόσει.	<i>Id.</i>	τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐ- τῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιού- σῃ μία μόνον προσαρμόσει.

PROPOSITIO LXXXV.

1. μόνον	μόνη	concordat cum edit. Paris.

502 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS,

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

2. τὰ προειρημένα	<i>Id.</i>	τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μίσον, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μί- σον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῇ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ
3. εὐθεῖα	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ποιοῦσα τὰ προειρημένα. . .	<i>Id.</i>	δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.
5. τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τε- τράγωνα	τό, τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων	concordat cum edit. Paris.
6. ἀσύμμετρα	ἀσύμμετρον	concordat cum edit. Paris.
7. ἀφηρήσθω	παρὰ τὴν ΕΖ παραβε- βλήσθω	concordat cum edit. Paris.
8. μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴστιν ἴσον τῇ	<i>Id.</i>	ἴσον τὸ
10. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. σύμμετρος	<i>Id.</i>	ἀσύμμετρος
12. τετράγωνα	τετράγωνον	concordat cum edit. Paris.
13. καὶ ἔτι	<i>Id.</i>	ἔτι τε

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. ἦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVI.

1. ἡ ΖΔ	ὁ ΔΖ	concordat cum edit. Paris.
2. ΗΓ τετράγωνον	<i>Id.</i>	ΗΓ
3. ΗΓ	<i>Id.</i>	ΘΓ
4. τῇ Α μήκει	μήκει τῇ Α	concordat cum edit. Paris.
5. ποιῆσαι.	εὐρεῖν.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVII.

1. καὶ	<i>Id.</i>	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. HB	HB τετράγωνον	concordat cum edit. Paris.
3. ΓΗ τετράγωνον	<i>Id.</i>	ΓΗ
4. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
5. ἀπὸ	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει	τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ σύμ- μετρος τῇ Α	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO LXXXVIII.

1. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετρά- γωνον	τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴστιν ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετρά- γωνον	concordat cum edit. Paris.
2. τετραγώνω	<i>Id.</i>	deest.
3. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
4. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
5. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
6. οὐδ'	<i>Id.</i>	οὐκ
7. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τῇ Α μήκει	<i>Id.</i>	μήκει τῇ Α.
9. τετράγωνον	<i>Id.</i>	deest.
10. ἀπὸ	<i>Id.</i>	ἀπὸ τῆς Κ· ἢ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ

PROPOSITIO LXXXIX.

1. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
3. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
4. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. μήκει. Καὶ ἴστιν ἡ	καὶ ἴστιν	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα ΒΓ	<i>Id.</i>	ΒΓ ἄρα
7. ΒΓ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XC.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. μήκει	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴσθιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. σύμμετρον ἄρα ἴσθι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ρη- τὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
linea 4 ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ῥητὴ	ῥητὸν	concordat cum edit. Paris.
5. οὐδ' ἄρα	οὐδὲ	concordat cum edit. Paris.
6. μείζον	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCI.

1. ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἔχεται ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθ- μὸν	<i>Id.</i>	deest.
3. οὐδετέρα ἄρα	<i>Id.</i>	καὶ οὐδετέρα ,

SCHOLIUM.

1. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. πρώτη ἴσθιν ἡ ΑΒ.	<i>Id.</i>	ἴσθιν ἡ ΑΓ πρώτη.

PROPOSITIO XCII.

1. πρώτης	<i>Id.</i>	deest.
2. παραλληλόγραμμον	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελιῖ	διαιρεῖ	concordat cum edit. Paris.
4. περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, . .	<i>Id.</i>	τῷ ὑπὸ τῆς ΕΗ,
5. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴσθι	<i>Id.</i>	deest.
7. μὴν	<i>Id.</i>	deest.

8. ἴσιν ἴσον, ...	<i>Id.</i>	ἴσον ἴσιν,
9. λοιπὸν	<i>Id.</i>	καὶ λοιπὸν
10. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
11. ἑκατέρων	ἑκατέρας.	concordat cum edit. Paris.
12. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCIII.

1. ὅλη ἡ ΑΗ	<i>Id.</i>	ΑΗ ὅλη
2. μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. διελιῖ	διαιριῖ	concordat cum edit. Paris.
4. τῷ	<i>Id.</i>	τὸ
5. Καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΑΚ. Καὶ ἐπὶ σύμμε- τρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ῥητὴ ἄρα ἴσιν καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει·	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν ὑπὸ ΑΟΜ·	τῷ ἀπὸ τῶν ΑΟΜ·	concordat cum edit. Paris.
8. καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Λέγω ὅτι καὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐπεὶ γὰρ	<i>Id.</i>	δυνάμει σύμμετροι. Καὶ ἐπὶ γὰρ
11. ἴσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἴσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τουτίσιν τῷ	τὸ δὲ ΤΣ ἴσιν τῷ	concordat cum edit. Paris.
14. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ	τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα	concordat cum edit. Paris.
15. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
16. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. μίσης	μίση	concordat cum edit. Paris.
18. τῷ ΜΝ, τουτίσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. ἴσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
20. ὡς δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ὡς ἄρα

PROPOSITIO XCIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν AZ, ZH ὥστε καὶ αἱ AZ, ZH ῥητὴ ἴστί καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει καὶ	ὥστε καὶ αἱ AZ, ZH .	concordat cum edit. Paris.
2. μήκει	Id.	deest.
3. ἀσύμμετρον ἄρα ἴστί τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί	Id.	deest.
5. τὸ ΖΚ	ZK	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστί	Id.	deest.
7. τῷ ΖΚ, ...	Id.	τῷ τῷ ΖΚ,
8. τῶν ΑΟ, ΟΝ	Id.	τῆς ΑΟ, ΟΝ.
9. ὥστε	Id.	ὥστε καὶ
10. χωρίον	Id.	deest.

PROPOSITIO XCV.

1. τῆς	Id.	deest.
2. δύναται	δυναμῖν	concordat cum edit. Paris.
3. μήκει ἢ AZ τῇ ZH	Id.	ἢ AZ τῇ ZH μήκει.
4. τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὅν τῷ ΑΜ, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ	περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ἀπὸ τῶν ΑΟΜ, τὴν ΝΞ.	concordat cum edit. Paris.
5. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί	Id.	deest.
8. τῷ	Id.	τὸ
9. τὸ	Id.	τῷ
10. δὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. τετραγώνῳ	Id.	deest.

PROPOSITIO XCVI.

1. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

2. περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ, τὸ ΝΞ·	τὸν ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΑΟΜ·	concordat cum edit. Paris.
3. χωρίον.	<i>Id.</i>	deest.
4. καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι.	καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι.	concordat cum edit. Paris.
5. λοιπὴ	ἡ λοιπὴ	concordat cum edit. Paris.
6. μίσον	<i>Id.</i>	deest.
7. ἄρα χωρίον	<i>Id.</i>	χωρίον

PROPOSITIO XCVII.

1. τῶν ΑΗ, ΗΔ	αὐτῶν	concordat cum edit. Paris.
2. παραβληθῇ	<i>Id.</i>	παραβάλλωμεν
3. τὸ Ε, ...	<i>Id.</i>	τὸ Ε σημειῶν,
4. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μίσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ὃν τῷ ΑΜ γωνίαν τὸ ΝΞ·	γωνίαν τὸ ΝΞ·	concordat cum edit. Paris.
6. ἡ	<i>Id.</i>	ὁ
7. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ΑΒ	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO XCVIII.

1. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἐστὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
4. τὸ	τὰ	concordat cum edit. Paris.
5. μίσον, ...	μίσα	concordat cum edit. Paris.
6. ἐστὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. δὴ	<i>Id.</i>	deest.
8. ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· τῇ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΑ·	<i>Id.</i>	ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΑ, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ·
9. ἐστὶν	<i>Id.</i>	deest.
10. ὥς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΝΜ·	deest.	concordat cum edit. Paris.

598 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIE.

11. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. τὸ	Id.	τῇ

PROPOSITIO XCIX.

1. μέσοις οὖσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα	Id.	ἄρα καὶ
3. ἴστί	Id.	deest.
4. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῇ . . .	τῇ δὲ ἀπὸ τῆς HB τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. καὶ ἐπὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῇ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῇ ΚΛ, τουτίστιν ἢ ΓΚ τῇ ΚΜ .	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. καὶ τῇ	Id.	τῇ δὲ
8. τὸ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
9. μήκει	Id.	deest.

PROPOSITIO C.

1. αὐμμετρόν ἐστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. ἀσύμμετρα ἄρα ἴστί τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῇ δις ὑπὸ τῶν AH, HB	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. καὶ	Id.	deest.
4. ὥς	Id.	καὶ ὥς
5. σύμμετρος ἐστι μήκει . . .	Id.	μήκει σύμμετρος ἐστι

PROPOSITIO CI.

1. ῥητὴν	Id.	deest.
2. ἴσον	Id.	ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβελήσθω
3. καὶ	Id.	deest.
4. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστί	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί ἢ ΓΜ	Id.	ἢ ΓΜ

8. τὸ ΝΑ	<i>Id.</i>	ἢ ΝΑ
9. ἄρα ἀπὸ	<i>Id.</i>	ἄρα ὑπὸ

PROPOSITIO CII.

1. διὰ	<i>Id.</i>	ἀπὸ
2. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. αὐτὴν διαιρεῖ	<i>Id.</i>	διαιρεῖ αὐτήν.

PROPOSITIO CIII.

1. ὅτι	<i>Id.</i>	ὅτι
2. ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν	καὶ ἀσύμμετρον τὸ ἀπὸ τῶν	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
5. ἀπὸ τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. τὸ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὸ	τὸ ἀπὸ τῆς	concordat cum edit. Paris.
9. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
10. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
11. ἀπὸ τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἴστι	<i>Id.</i>	deest.
13. ἴστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ	<i>Id.</i>	καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΑ μίσην ἀνά- λογόν ἴστι τὸ ΝΑ·
ΝΑ οὕτως τὸ ΝΑ πρὸς τὸ ΚΑ·		

PROPOSITIO CIV.

1. μήκει σύμμετρος ἴστω . . .	<i>Id.</i>	σύμμετρος ἴστω μήκει
2. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ΑΕ μὲν	<i>Id.</i>	μὲν ΑΒ
4. Καὶ αἱ	<i>Id.</i>	Αἱ δὲ
5. ἀποτομὴ ἄρα ἴστιν ἡ ΓΔ. Αἰ- γὼ δὲ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ	Ἐπεὶ οὖν	concordat cum edit. Paris.

510 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIAE.

6. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
7. δὲ	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. οὐδετέρα	οὐθίρα	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CV.

1. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AE τῇ ΓΖ, ἡ δὲ BE τῇ ΔΖ . . .	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μίσαι εἰςὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι . .	<i>Id.</i>	deest.
3. Λίγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ .	<i>Id.</i>	Δικτίον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB. Ἐπεὶ γάρ
4. τὴν ΖΔ	<i>Id.</i>	τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
5. ΓΖ, ΖΔ	<i>Id.</i>	ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.
6. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
7. ἴσται	<i>Id.</i>	ἴστι
8. ἴσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVI.

1. γὰρ	<i>Id.</i>	deest.
2. τῷ προτέρῳ	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν . . .	ἴσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῆς . .	ὡς τὸ ἀπὸ τῶν
4. ΖΔ	<i>Id.</i>	ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.
5. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ΓΖ, ΖΔ	<i>Id.</i>	ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.
7. τετραγώνῳ, ...	<i>Id.</i>	deest.
8. ἴσιν	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
2. ἴστω	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. Εκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ, . .	Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, . .	concordat cum edit. Paris.
4. τετάρτη	<i>Id.</i>	deest.
5. τῷ	τὸ	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστί	<i>Id.</i>	deest..
7. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
8. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
9. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
11. ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρ- της	ῥητῆς τῆς ΖΕ καὶ ἀπο- τομῆς τετάρτης τῆς ΖΘ.	concordat cum edit. Paris.
12. Εὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τε- τάρτης	<i>Id.</i>	deest.
13. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CVII.

1. καὶ αὐτὴ	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. αἱ	<i>Id.</i>	ἡ
4. ἴστί τὸ	<i>Id.</i>	τὸ μὲν

A L I T E R**.

2. Εστω	Εστω ἡ	concordat cum edit. Paris.
3. ῥητὴ	ῥητὸν	concordat cum edit. Paris.
4. ἄρα	ἄρα ἡ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post propositionem 116, et in capite habet ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσον ἴστιν; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 106.

** Hoc ἄλλως reperitur in codd. *a, e, l, m, n* post ἄλλως præcedens, et habet in capite ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μείον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μείον τὸ ὅλον ποιούσῃ ἴστιν; et in codd. *d, f, g, h* reperitur post propositionem 107.

PROPOSITIO CVIII.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
1. ἴστω	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. τε	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τετραγώνων	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CIX.

1. χαρίον	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. μὲν	<i>Id.</i>	deest.
3. ἄρα μὲν	μὲν ἄρα	ἄρα ἴστί
4. ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέ- τρου	ἢ οὐ.	concordat cum edit. Paris.
5. περιέχον	<i>Id.</i>	deest.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
7. ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΒΓ, δυναμένη ἐλάσσει ἴστί.	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITION CX.

1. αὐτῇ	ταύτῃ	concordat cum edit. Paris.
2. ἄρα ἴστί διυτέρα	διυτέρα ἴστί	concordat cum edit. Paris.
3. πρώτη ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστί πρώτη.
4. τῆς ΖΚ μῖζον	<i>Id.</i>	μῖζον τῆς ΖΚ
5. ἑαυτῇ, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXI.

1. τοῦ	<i>Id.</i>	deest.
2. ἴστί τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ...	τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἴσται ἀκο- λούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμ- μετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἴστί· ὑπόκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ,	concordat cum edit. Paris.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS. 513

EDITIO PARISIENSIS.

CODEX 190.

EDITIO OXONIÆ.

3. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. Εἰ μὲν δὴ	Id.	προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. Ἡτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΗ μίζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετρου ἰαυτῇ, ἡ τῷ ἀπὸ ἀσυμμετρου. Εἰ μὲν οὖν
5. τῇ ΖΗ μήκει.	Id.	μήκει τῇ ΖΗ.
6. ἴσθιν ἄρα τρίτη	τρίτη ἴσθιν	concordat cum edit. Paris.
7. μίσης ἀποτομή ἴστι δευτέρα.	μίσης ἀποτομή δευτέρα. ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτίστι τὸ ΕΓ δυναμένη μίσης ἀποτομή ἴστι δευτέρα.	ἀποτομή μίσης δευτέρα.
8. μήκει, καὶ οὐδετέρα	καὶ οὐδετέρα	concordat cum edit. Paris.
9. ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἴστιν ἄρα ἔκτη ἡ ΚΘ.	ἡ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἔκτη ἴστιν ἡ ΚΘ.	ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀπο- τομή ἴστιν ἄρα ἔκτη ἡ ΚΘ.
10. ἡ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, ...	Id.	ὥστε ἡ τὸ ΛΘ,

PROPOSITIO CXII.

linea 16 τῆς	Id.	τῇ
2. μήκει τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπὶ	Id.	τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν,
3. πρώτη ἴσθιν	Id.	ἴστι πρώτη
4. μήκει· καὶ	καὶ	μήκει·
5. τῇ	ἡ	concordat cum edit. Paris.
6. ἡ	τῇ	concordat cum edit. Paris.
7. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἴστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἴστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἴσθι καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἴστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ...	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί	deest.	concordat cum [edit. Paris.
9. εἴσι	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἴσθιν	Id.	deest.

COROLLARIUM*.

I. τοῦ τε	Id.	τό τε

* Hoc corollarium in omnibus adest codicibus.

II.

514 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. ἐπὶ τῇ	<i>Id.</i>	ὅτι
3. αἱ μὲν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῇ	<i>Id.</i>	deest.
5. μετὰ	κατὰ	concordat cum edit. Paris.
6. Μίσσης	<i>Id.</i>	Μίσσην
7. Μίσσης	<i>Id.</i>	Μίσσην

PROPOSITIO CXIII.

1. ἔξιν τάξιν	<i>Id.</i>	ἔχει
2. ὀνομάτων δὲ	<i>Id.</i>	δὲ ὀνομάτων
3. ἔξιν	<i>Id.</i>	ἔχει
4. τῇ Ἡ ἴση	<i>Id.</i>	ἴση τῇ Ἡ
5. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
6. τὴν KE, ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγου- μένων	KE ἐν ἡγούμενον . . .	concordat cum edit. Paris.
7. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
10. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
11. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
12. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
15. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
16. καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. ἴσιν	<i>Id.</i>	deest.
18. ἑαυτῇ	deest.	concordat cum edit. Paris.
19. οὐδέτερά	οὐδέτερά	concordat cum edit. Paris.
20. οὐδέτερά	οὐδέτερά	concordat cum edit. Paris.
21. καὶ ἡ ΖΚ τῆς KE μᾶλλον δυ- νήσεται τῇ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. οὐδέτερά	οὐδέτερά	concordat cum edit. Paris.
23. τὰ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. τάξιν ἔχει	<i>Id.</i>	ἔχει τάξιν

PROPOSITIO CXIV.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
1. ἴσται τοῖς	<i>Id.</i>	deest.
2. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
3. ἴτι ἡ	<i>Id.</i>	ὅτι ἡ
4. ἴστω	ἴστω καὶ	concordat cum edit. Paris.
5. παραβίβληται	<i>Id.</i>	παράκειται
6. ἴσον ἴστί	<i>Id.</i>	ἴστίιν ἴσον
7. τὴν Η.	in reliqua demonstra- tione vocabulum τὴν deest.	concordat cum edit. Paris.
8. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. εἰσὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. οὕτως	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης	τὸ ἀπὸ τῆς α	concordat cum edit. Paris.
14. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
15. ἴσται	deest.	concordat cum edit. Paris.
16. ἄρα	deest.	concordat cum edit. Paris.
17. ΓΔ τῇ ΖΘ	ΘΖ τῇ ΓΔ	concordat cum edit. Paris.
18. δι ΒΓ, ΓΔ	ΒΓ, ΓΔ δι	concordat cum edit. Paris.
19. ἄρα ὀνομάτων ἴστίιν	ὀνομάτων ἴστίιν ἄρα	concordat cum edit. Paris.
20. δυνήσεται	<i>Id.</i>	δύναται
21. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
22. δυνήσεται	<i>Id.</i>	δύναται
23. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
24. ἴσται	deest.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXV.

1. τί	<i>Id.</i>	deest.
2. τοῖς	<i>Id.</i>	τοῖς ἀπὸ
3. ἡ	<i>Id.</i>	deest.
4. τί	<i>Id.</i>	deest.
5. τὴν ΜΛ	ΜΛ	concordat cum edit. Paris.

516 EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEX 190.	EDITIO OXONIE.
6. τὴν KM.	KM.	concordat cum edit. Paris.
7. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
8. τὴν	deest.	concordat cum edit. Paris.
9. τῶν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἴστί τῷ	Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, AB ἴσον ἴστί τὸ	concordat cum edit. Paris.
11. καὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.

COROLLARIUM.

1. περιέχεται.	περιέχεται. Ὅπερ ἴδι διῆξαι.	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXVI.

1. οὐδμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
2. οὐδμία	deest.	concordat cum edit. Paris.
3. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. τῶν πρότερον ἴστιν	<i>Id.</i>	πρότερον ἴστιν
5. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. οὐδμία	deest.	concordat cum edit. Paris.

ALITER*.

2. γίνονται, ...	γίνονται, ...	concordat cum edit. Paris.
3. οὐδμία πρότερον ἴστιν ἢ αὐτή.	τῶν πρότερον ἢ αὐτή.	concordat cum edit. Paris.
4. ἴστί	<i>Id.</i>	deest.
5. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
6. Ἀπὸ τῆς	Ἀπὸ	concordat cum edit. Paris.

PROPOSITIO CXVII**.

2. ἴστι	deest.	concordat cum edit. Paris.)
3. τὸν	deest.	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

** In codicibus hæc *propositio* numero non signatur.

EDITIO PARISIENSIS.	CODEx 190.	EDITIO OXONIÆ.
4. ἔχει δὲ	<i>Id.</i>	καὶ ἔχει
5. μονὰς	deest.	concordat cum edit. Paris.
6. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
7. τῆς ΓΑ	τοῦ ΑΓ	concordat cum edit. Paris.
8. ἴστιν	<i>Id.</i>	deest.
9. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. ἀριθμοὶ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῖς	deest.	concordat cum edit. Paris.
12. ἴστιν	deest.	concordat cum edit. Paris.
13. ἀν	deest.	concordat cum edit. Paris.
14. διπλάσιον ἴστιν	διπλάσιος	concordat cum edit. Paris.
15. ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· . .	<i>Id.</i>	ἴστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ·
16. ἀσύμμετρος ἄρα.	deest.	concordat cum edit. Paris.

A L I T E R*.

1. deest.	deest.	Δεικτέον δὴ καὶ ἰτέρως, ὅτι ἀσύμ- μετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.
2. Ἐστω	<i>Id.</i>	Ἐστω γάρ
3. σύμμετρος· καὶ γιγνέτω . .	deest.	concordat cum edit. Paris.
4. οἱ ΕΖ, Η·	<i>Id.</i>	deest.
5. τὸ	ὁ	concordat cum edit. Paris.
6. τὸ	τὸν	concordat cum edit. Paris.
7. τοῦ	τῆς	concordat cum edit. Paris.
8. διπλάσιος	διπλάσιον	concordat cum edit. Paris.
9. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
10. τοῦ	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. αὐτοῦ	αὐτῇ	concordat cum edit. Paris.

* Hoc *aliter* in omnibus adest codicibus.

SCHOLIUM*.

EDITIO PARISIENSIS.	CODĒX 190.	EDITIO OXONIÆ.
2. εὐθείων	<i>Id.</i>	deest.
3. εἶδος	ἐπίπεδον	concordat cum edit. Paris.
4. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
5. πὰς	<i>Id.</i>	τοὺς
6. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
7. ἀσυμμέτρων χωρίων, . . .	<i>Id.</i>	χωρίων ἀσυμμέτρων,
8. τοῖς	<i>Id.</i>	deest.
9. καὶ	<i>Id.</i>	deest.
10. ὡς	deest.	concordat cum edit. Paris.
11. πρὸς ἀλλήλους	<i>Id.</i>	ἀλλήλοις
12. γίγονεν ἔτι οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἵστί συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, .	γίγονε διὸ οὐ μόνον ἐπὶ τε γραμμῶν καὶ ἐπιφα- νειῶν ἵστί συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, . .	γίγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἵστί συμμετρία καὶ ἀσυμμε- τρία,

* Hoc scholium, quod in omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex sequen-
tibus pendet,



FINIS TOMI SECUNDI.

ERRATA.

Pagina linea

xxxiv, 5, ea et, *lege* ea et fere.
 xxliv, alinea 3, in aliquot exemplaribus
 pro B, *lege* A.
 164*, 5, b. encore, *lege* déjà.
 166*, 4, b. irrationel, *lege* ra-
 tionel.
 171, littera r deest in figurâ.
 254*, 3, b. la droite AE, *lege* la
 puissance de AE.
 264*, littera B deest in figurâ.
 277*, 7, b. la somme, *lege* la som-
 me des.
 279, in figurâ littera B ponat-
 ur in loco litteræ E,
 et vice versâ.
 283*, 3, ΔB, *lege* AB.
 308*, 6, surface médiale, *lege*
 surface rationelle.
 316*, 5, commensurable, *lege*
 incommensurable.
 329* in secundâ lineâ figuræ
 littera B ponatur in
 loco litteræ E.
 251, 5, 18. 10, *lege* 19. 10.
 352, 3, AOM, *lege* ΔOM.
 358*, 1, quarré de AH, lisez
 quarré de EH.
 362*, 2, b. ἀπὸ, *lege* ὑπὸ.
 362*, 3, quadrato autem ex,
lege rectangulo au-
 tem sub.
 362*, 2, quarré de, *lege* rectan-
 gle sous.
 365*, 5, ἀσυμμετρος, *lege* σύμμε-
 τρος.
 365*, 6, incommensurabilis, *le-*
ge commensurabilis.

Pagina linea

365*, 4, incommensurable, *le-*
ge commensurable.
 365*, 10, b. rationelle et incommen-
 surable, *lege* ra-
 tionelle et commen-
 surable.
 366*, 6, la droite, *lege* le pa-
 rallélogramme.
 367*, 2, incommensurable, *le-*
ge commensurable.
 374*, 4, la droite, *lege* le pa-
 rallélogramme.
 394*, 4, ZH, *lege* ZK; et eadem
 correctio in linguâ
 græcâ et in linguâ
 latinâ.
 394*, 8, incommensurable, *le-*
ge commensurable.
 394*, 10, ἀσυμμέτρου, *lege* συμμέ-
 τρου.
 394*, 11, incommensurabili, *le-*
ge commensurabili.
 396*, 2, 21, 10, *lege* 32, 10.
 396, 3, 23, 10, *lege* 21, 10.
 405*, 1, b. ΘΚ, *lege* ΘΕ, et eadem
 correctio in linguâ
 græcâ et linguâ latinâ.
 405, 1, b. ΘΚ, ΒΔ, *lege* ΘΕ, ΒΔ.
 446*, 3, b. plus grande que ΔΑ,
lege plus grande que
 ΕΑ.
 446*, 1, b. ΔΑ, *lege* ΔΑ.
 479*, 1, b. avant la rationelle, *le-*
ge avant la médiale.