

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
E L E M E N T A

GRAECE ET LATINE.

COMMENTARIIS INSTRUCTA

EDIDERUNT

IOANNES GUILIELMUS CAMERER

ET

CAROLUS FRIDERIGUS HAUBER.

B E R O L I N I
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXIV.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM

LIBRI SEX PRIORES

GRAECE ET LATINE

**COMMENTARIO E SCRIPTIS VETERUM AC RECEN-
TIORUM MATHEMATICORUM ET PFLEIDERERI
MAXIME ILLUSTRATI.**

EDIDIT

IOANNES GUILIELMUS CAMERER

GYMNASII STUTTGARDIANI RECTOR.

TOM. I. COMPLECTENS LIBR. I—III.

CUM X. TABULIS.

BEROLINI
SUMTIBUS G. REIMERI
MDCCCXXIV.

(RECAP)

8169

.331

.114

v.1

c.2

Quum unanimi fere omnium, qui res mathematicas callent, iudicio Euclidis scripta solidissimum cognitionis geometricae fundamentum posuisse credantur, atque in his elementa potissimum rigorosis, quas exhibent, demonstrationibus maxime insignia sint et tironibus accuratioris in his rebus doctrinae cupidis nunquam satis commendari possint, factum tamen est, nescio quo fato, ut Euclidis operum atque in his etiam Elementorum textus graecus paucissimis adhuc editionibus publici iuris factus magno discipulorum numero vix parabilis esset. Itaque, quum amici nonnulli me hortarentur, ut librorum certe sex priorum, qui ad geometriam planam pertinent et maxime necessarii esse videbantur, novam editionem pararem, et quae ad eos illustrandos pertinent, ex praecipuis, qui in Euclidem commentati sunt, scriptoribus colligerem, timide quidem, at ob rei utilitatem haud invitus id negotium suscepi, et quomodo in eo versatus sim, paucis exponam.

Ante omnia, ut textus graecus, quantum fieri posset, emendatissime prodiret, curandum putavi. Hoc consilio tres, quae, si recte novi, solae exstant, integrorum Euclidis elementorum editiones graecae, Basileensem nempe apud Ioannem Hervagium 1533. opera Simonis Gry-

naei publici iuris factam, deinde Oxoniensem opera Davidis Gregorii 1703. cum versione latina in vulgus emissam, denique Parisiensem, quam cum versione latina ac gallica curavit F. Peyrardus 1814—1818., diligenter contuli, lectiones variantes, quarum magnam copiam Peyrardus potissimum editioni suae subiecit, expendi, atque eam, quae maxime apta videretur, selegi, nonnunquam etiam, at haud ita saepe, ubi nulla occurreret, quae rei conveniret, coniectando veriorem lectionem restituere conatus sum. Nulli tamen coniecturae in textu locum dedi, quam non ad marginem adnotarem, quo liberum maneret lectori de ea re iudicium. Caeterum, quamvis Peyrardus potissimum e codice nota 190. vel *a* ab ipso designato, quem e Vaticana bibliotheca Parisios delatum ipsi, etiam postquam redire ille ad dominum suum iussus erat, terere permissum fuit, et cui summum ille pretium tribuit, magnam lectionum variantium copiam collegerit, et subinde alios quoque codices manuscriptos excusserit, qui e bibliotheca gallica tum Imperiali tres et viginti numero ipsi commissi fuerant, quos autem plerumque fere omnes inter se consentire deprehendit, et longe minoris pretii esse indicat, quam praecipuum illum codicem *a*, haud tamen operae pretium esse putavi, omnem istam faraginem in hanc editionem transferre. Quamquam enim habet ille codex *a* lectiones non contemnendas, tamen longe maxima pars istarum variantium nihil fere, quod ullius momenti sit ad doctrinam Euclideam, continet, sed ineras vocum traiectiones v. c. ἴση ἐστὶν pro ἐστὶν ἴση, ἐκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν pro

ἔστιν ἑκατέρω τῶν ἴσων γωνιῶν; εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται pro γραμμὴ ἤκται εὐθεῖα; ἦτοι pro ἦ, τοίνυν pro ἄρα, et alia huius generis leviora, quibus librum operare et lectoris patientiam fatigare nolui. Quae enim huius generis lectionum discrimina in alia materia v. c. oratoria aut poëtica notari forte poterant, ea in mathematica curiosius expiscari otiosum fere videbatur. Quae autem levissimi etiam momenti ad rem melius intelligendam pertinere visa fuere, ea religiose semper ad marginem notavi. In seligendis autem lectionibus, quae textui insererentur, circa illa, quae diximus, levioris generis, Peyrardi plerumque lectionem retinuimus, nonnunquam tamen antiquiorem Oxoniensis et Basileensis lectionem revocavimus; in iis, quae paullo graviora videbantur, nostrum quidem iudicium secuti sumus, ita tamen, ut eiusmodi in locis variam lectionem ad marginem semper indicaremus. Et habet sane in mathematicis ars critica proprias, nec in aliud scribendi genus transferendas regulas, aut potius liberius hic quam in reliquis fere materiis versari potest ac debet, quod nempe apud mathematicos res ipsa nonnunquam imperiose hanc illamve lectionem postulat aut repudiat, nec codicum misere saepe depravatorum auctoritatem magnopere desiderat.

Quod ad versionem latinam attinet, Peyrardus sibi eam legem scripserat, ut cum textu Graeco exactissime, et quantum fieri posset, etiam circa singularum vocum ordinem consentiret. Hanc autem regulam ita presse sequendam putavit, ut vel ubi diversa utriusque linguae natura id non permittere videretur, ipsum quoque linguae genium isti legi postponendum.

putaret. Ita v. c. pro articulo Graecorum, quem Latini non habent, plerumque v. *ipse, ipsa* etc. usus est. Et negari quidem nequit, usum istius pronominis permittere nonnunquam breviorē paululum enunciationem, quam si quadratum, rectangulum, angulum, rectam etc. ad quae illud refertur, expresse nominare velimus; attamen etiam illud certum est, non solum minus latine ista dici, verum etiam saepius minus distincte, quum ad plures sensu diversas voces idem pronomen referri aut pro iis poni queat. Quamvis igitur brevitati etiam nos id dederimus, ut nonnunquam, ubi nihil interesse videbatur, eadem ratione pronomine *ipse* etc. uteremur, plerumque tamen, quo distinctius intelligeretur, de quo sermo sit, rem ipsam suo nomine appellare, vel etiam in commentario articulum graecum retinere maluimus. Ex eadem ratione textum quidem graecum fideliter semper exprimere, at non ita anxie ordinem singularum vocum retinere voluimus, ut a latino sermone prorsus alienum esset, quod efferretur. Ita v. c. in prop. I. 41., cuius initium Peyrardus ita habet: si parallelogrammum quam triangulum basin habeat eandem etc. nos mutato ordine dicere maluimus: si parallelogrammum eandem basin habeat, quam triangulum. Atque ita saepius a Peyrardo discessimus, et rem aliis verbis, saepe iisdem, quae sunt in versione Gregorii, expressimus. Notavimus etiam, quam propositione praecedente nitatur quodvis enunciatum, secuti in eo Gregorii, Rob. Simsoni et plerorumque geometrarum usum, quo tironum rebus maxime consulitur.

In commentario propositum nobis fuit, ut nihil, quod illustratione egere videretur, prorsus intactum relinqueremus, et potissimas observationes doctissimorum hominum colligere-mus, ita tamen, ut ea tantum, quae proxime ad rem pertinerent, aut ex quavis propositione sequerentur, et maximum usum promitterent, exhiberemus, seiunctis, ne in nimiam molem liber excresceret, iis omnibus, quae minus necessaria viderentur v. c. diversis eiusdem propositionis demonstrationibus, nisi concinnitate aut alia virtute admodum se commendarent, aliisque quae longius a scopo abducerent. Quam in re fatemur difficile esse certum aliquem limitem ponere, nec dubitamus fore, quibus nimii, alios contra, quibus non satis copiosi fuisse videamur. Fontes autem, e quibus observationes adiectas hausimus, fuere praeter Procli in libr. I. Elementorum Commentarium Graece satis vitiose editum simul cum Euclide Basil. 1535., correctius autem Latine Patavii 1560. a Francisco Barocio; Isaaci Monachi Scholia in Euclid. Elem. Geom. sex priores libros Argentor. 1579.; Pappi Collect. Mathem. Bonon. 1660.; ex antiquioribus potissimum Savilii Praelectiones tresdecim in Principium Elementorum Euclidis Oxon. 1621.; Isaaci Barrov. Lectiones mathematicae habitae Contrabrigiae 1664. 1665. 1666. Lond. 1684. 1685.; Wallisii Opp. Mathem. maxime Vol. II. Oxon. 1693.; Saccherii Euclides ab omni naevo vindicatus Mediolani 1723. Usi sumus praeterea editonibus Euclidis probatissimis, et ex egregiis, quas nonnullae earum continent, observationibus eas selegimus, quae ad rem nostram facere vide-

rentur. Inter illas potissimum nominandae sunt Euclidis Megarensis Geometric. Elem. Libri; Campani Galli transalpini in eosdem commentariorum libri; Theonis Alexandrini Bartholomaeo Zamberto Veneto interprete in tredecim priores commentariorum libri; Hypsiclis Alexandrini in duos posteriores, eodem Zamberto Veneto interprete commentariorum libri Paris. in officina Henr. Stephani 1516. fol.; eadem deinde typis repetita Basil. apud Hervag. 1537. fol.; Orontii Finei Delphinatis in sex priores libros geometricor. Elementor. Euclidis Megarensis Demonstrationes Paris. 1536. fol.; Euclide Megarense Philosopho, solo Introduttore delle scienze Mathematiche, diligentemente reassettato et alla integrità ridotto per Nicola Tartalea Brisciano Vinegia 1543. fol.; Euclidis Megarensis Elementa Geometrica restituta auctore Francisco Flussate Candalla Paris. 1566. fol.; The Elements of Geometrie of the most ancient Philosopher Euclide of Megara translated into the Englishe tong by H. Billingsley Citizen of London at London 1570 fol.; Euclidis Elementor. Libr. XV. una cum Scholiis antiquis a Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversi, commentariisque quibusdam illustrati Pisauri 1572. fol.; Euclide restituto da Vitale Giordano da Bitonto in Roma 1680. fol.; Euclidis Elementor. Libr. XV. perspicuis demonstrationibus, accuratisque scholiis illustrati auctore Christoph. Clavio Bamberg. Colon. 1591. fol.; Iacobi Peletarii in Euclid. Elem. Geometr. Demonstration. Libri sex Lugd. 1610. 4.; Euclidis Elementor. Libr. XV. breviter demonstrati opera Is. Barrov. Cantabrig.

1655. 8.; *Euclides restitutus, sive prisca Geometriae Elementa brevius et facilius contexta* ab Io. Alphonso Borellio Pisis 1658. 4.; *Les quinze Livres des Elem. Geometr. d'Euclide traduits et comment. par D. Henrion.* Paris. 1677. 8.; *Euclidis Elementor. sex libri priores demonstrati* ab Henr. Coëtsio. Lugd. Batavor. 1692. 12.; *The English Euclide being the first six Elements of Geometry translated out of the Greek with Annotations and usefull Supplements* by Edmund Scarburgh. Oxford. 1705. fol.; *Andreae Tacquet. Elementa Euclidea Geometriae etc. plurimis Corollariis, Notis etc. illustrata* à Guilielmo Whiston. Romae 1745. 8.; *Euclidis Elementor. Libri priores sex item undecimus et duodecimus ex Versione Latina Federici Commandini, sublatis iis, quibus olim Libri hi a Theone aliisque vitati sunt, et quibusdam Euclidis Demonstrationibus restitutis* a Robert. Simson. Glasgae 1756. 4.; *Elementi piani e solidi d'Euclide da Iacopo Maria Carlieri* in Firenze 1769. 8.; *Elementor. Euclidis Libri XV. ad Graeci contextus fidem recensiti etc.* (a Georg. Frid. Boermann.) Lips. 1769. 8.; *An Examination of the first six Books of Euclids Elements* by William Austin Oxford. 1781. 8.; *Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid* by Ioh. Playfair Edinburgh 1795. 8.; *The Elements of Euclid. etc.* by Robert Simson London 1804. 8. Praetereo alias nonnullas editiones ab Ambrosio Rhodio, Georg. Fournier. aliisque factas, pariter ac vernaculas, quae in omnium manibus versantur, a Lorenzo, Hauffioque curatas. Addi debet Matthias Auszug aus Rob. Simsons Latein. und Engl. Ueber-

setzung der ersten 6 Bücher und des 11. und 12. der Elemente des Euklides, Magdeb. 1799. 8. et, qui saepe Euclidem respiciunt, Thom. Simpson. in *Elements of Geometry* Lond. 1800. 8.; van Swinden Anfangsgründe der Messkunde übers. von Gaab, Iena 1797. 8.; Gilbert die Geometrie nach le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio und den Alten I. Th. 1798. 8.

Alios praeterea infra nominabimus, maxime, qui circa singularem aliquam ad Elementa pertinentem doctrinam laborarunt; vid. v. gr. *Excursus de Theoremate Pythagoraeo, de Parallelarum Theoria etc.*

Maximam autem commendationem editionem hanc habituram esse confido ab iis, quae opera et benevolentia viri de Mathesi dudum meritiissimi atque mei olim praeceptoris maxime colendi Christoph. Frider. de Pfleiderer., Professoris Tubingensis, ei accessere ornamenta. Is nempe non solum consilio suo me adiuvere, suppellectilem litterariam, quam potissimum in hoc studiorum genere possidet amplissimam et exquisitissimam, liberalissime mihi impertire eiusque usum concedere, verum etiam doctissimas dissertationes, quas in varios Euclidis libros conscripsit, nominatim Scholia in Libr. II. Elementor. Euclid. P. I. II. III. Tubing. 1797. 1798. 1799.; *Expositio et Dilucidatio Libri V. Element. Euclid. P. I.* Tubing. 1782., cui accedit *Dissertatio inserta Promptuario Mathematico Hindenburgi Fascicul. 7. et 8. p. 257. sqq. et 440. sqq.*; Scholia in Libr. VI. Element. Euclidis P. I. II. III. IV. Tub. 1800. 1801. 1802. 1805.; *Dissertatio I. II. de Dimensione*

Circuli Tubing. 1787. 1790., excerptandas et hic denuo cum hominibus doctis communicandas permisit; quin etiam continuationem Scholiorum in libr. VI. Elementorum, quam penitus elaboratam nondum typis exprimere potuit, mecum communicare, et eius quoque liberum usum concedere dignatus est, praeterea observationes etiam et varia passim in reliquos Euclidis libros notamina inspicienda nostrisque usibus adhibenda dedit, et omnem hunc laborem tanto studio adiuvit, ut, quidquid ex ea ad solidioris geometriae studiosos redundaturum esse speramus utilitatis, illi nobiscum huic potissimum viro acceptum referre debeant*). Gratus etiam fateor, multum me debere amicitiae viri in rebus mathematicis versatissimi, Carol. Frider. Hauber, Professoris Schönthaliensis, qui collectam a se historiam tentaminum circa theoriam parallelarum mecum communicare, eiusque usum concedere, et permittere etiam voluit, ut, quae ipse docuerat in Dissertatione publica Tubingae 1793. habita, „*Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes*“ hic denuo lectori offerrentur. His opibus instructo pauca erant, ubi meas qualescunque observationes addere possem, et id potius curandum videbatur, ne nimia copia lectori taedium crearetur. Ut vero omni, qua par est, diligentia opus typis exprimeretur, humanissime ac benevolentissime curandum suscepit vir doctissimus mihiq; amicissimus, G. A. Diesterweg, de

*) Ex quo haec scripseram, placide obiit v. Kal. Octobr. 1821. vir morum probitate pariter atque eximia eruditione insignis, cuius memoriam, qui eum norunt, omnes religiose colere nunquam desistent.

Mathesi, quam Bonnae publice proficitur, dudum meritissimus. Illud praeterea rogamus lectores, ut si qua forte utilis adhuc visa observatio nos effugerit, aut aliud quid minus perfectum esse videatur, atque huic operi et Euclidis manibus conveniat, id homini scholastico plurimis laboribus distento, qui non nisi subsecivas horas in hunc librum impendere poterat, aequi iudices ignoscere velint. In animo quidem fuit, reliquos etiam Elementorum libros, aut certe XI. ac XII. subiungere, at per mutatas muneris mei rationes, novis subinde accedentibus negotiis, facere id non licuit. Scripsi Stuttgartiae d. 5. Aug. 1820.

I. G. CAMERER Gymnasii Professor.

Quum iam conscriptae essent hae qualescunque in sex primos elementorum libros observationes, in lucem prodiit Chrestomathia Geometrica edita a viro doctissimo, quem modo nominavimus, Haubero. In qua quum praeter alia propositiones 1—26. libri I. e Proclo, Savilio, Pfeidereri schedis mscptis iisdem, quibus et nos usi sumus, et ipsius Hauberi observationibus copiosissime et longe uberius, quam nostrae rationes patiebantur, illustratae sint, multa tamen etiam ex hoc libro doctissimo excerptare, et in nostrum usum convertere adhuc licuit.

De Euclide Geometra notitia historica

collecta potissimum e Proclo, Savilio, Fabricio,
Scheibelio.

Euclidem Geometram haud raro, quod etiam primae operum eius editiones, quas supra iam notavimus, probant, eundem esse crediderunt, atque Euclidem illum Socraticum, Megaris natum, cuius vitam descripsit Laertius libro secundo, et iisdem fere verbis Suidas v. *Εὐκλείδης*. De Megarensi isto Euclide ita habet Diogenes Laertius L. II. Segm. 106. *Εὐκλείδης ἀπὸ Μεγάρων τῶν πρὸς Ἰσθμῶ, ἢ Γελῶος καὶ ἐνίου.* — *Πρὸς τοῦτον φησὶν ὁ Ἑρμόδωρος ἀφίκεσθαι Πλάτωνα καὶ τοὺς λοιποὺς φιλοσόφους μετὰ τὴν τοῦ Σωκράτους τελευτὴν κ.τ.λ.* Ad eundem etiam pertinent illa Tauri philosophi apud Gellium Noct. Att. L. VI. c. 10. „Decreto, inquit, suo Athenienses caverant, ut, qui Megaris civis esset, si intulisse Athenas pedem prehensus esset, ut ea res ei homini capitalis esset. Tanto Athenienses, inquit, odio flagrabant finitimorum hominum Megarensium. Tum Euclides, qui indidem Megaris erat, cum advesperasceret, Athenas ad Socratem commeabat“ etc. Atque huius ipsius decreti meminisse videtur Thucydides Histor. L. I. c. 139. sqq. ubi inter potissimas causas belli Peloponnesiaci hanc quoque fuisse refert. Itaque praeter reliqua v. c. morum diversitatem ipsa temporum ratio vetat Euclidem Geometram pro eodem sumere cum Socratico illo aut Megarensi Euclide. Proclus enim libr. II. Commentar. in libr. I. Elementor. refert:

Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν νεώτερος μὲν ἐστὶ τῶν περὶ Πλάτωνα, e quibus nominat maxime Eudoxum et Theaetetum, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους, quin, ut rem exactius definiret, addit: γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου, et notam illam historiam affert de Ptolomaeo compendiosorem ad geometriam viam desiderante, quam haud dari regiam (μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν — ut Savilius habet — nam in editione Procli graeca p. 20. verba truncata habent tantum Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτὸν, εἰ τίς ἐστὶ περὶ γεωμετρίαν, in editione latina plenius p. 39. verba conservata sunt) Euclides responderit. Unde, quum ab initio belli Peloponnesiaci ad initium regni Ptolemaeorum in Aegypto plus quam centum anni effluxerint, nequit profecto noster Euclides idem esse cum Megarensi illo, qui noctu ad Socratem ventitare solebat. Hinc etiam patet, errorem aliquem inesse illi Valerii Maximi loco libr. VIII. c. 12. 1., ubi narrat, Platonem conductores sacrae arae (quam nempe quum cubicae figurae esset, Philopono referente Delii duplicare iussi erant) de modo et forma eius secum sermonem conferre conatos ad Euclidem Geometram ire itis-
sisse. Quae relatio eo etiam nomine erroris convincitur, quod ipsum quidem Platonem de cubo duplicando laborasse constat, de Euclide autem nihil tale narratur. Atque ita quidem novimus, quis Euclides non fuerit, quis autem ille fuerit, qua patria ortus, haud liquet. Savilius ait, ex media certe Graecia natum existimo, qui tam presse, tam accurato verborum delectu scripserit, ut ab eius formulis phrasibusque

nemo posterorum et in mathematicis excellentium virorum unquam vel latum unguem accessisse videatur. De aliorum opinionibus, qui vel Alexandrinum, vel Tyrium, vel Siculum e civitate Gela oriundum eum esse, at nullis probabilibus argumentis volunt, videatur Fabric. Biblioth. Graeca curante Harless. Vol. II. p. 44. et in Not. a. p. 46. Id autem ex Proclo L. II. p. 19. Edit. Graec. et p. 38. Edit. Latin. scimus, floruisse eum tempore Ptolemaei Lagi, quo regnante Alexandriae primus omnium celebrem illam scholam mathematicam aperuisse dicitur, e qua postea tot tantique nominis geometrae prodierunt. Moribus eum, Pappus in prooemio in libr. VII. Collect. Mathem. p. 251. ait, fuisse mitissimis, benignum erga omnes, praesertim eos, qui mathematicas disciplinas aliqua ex parte augere et amplificare possent, ut par est, non contentiosum (*προσφρονετικόν*), sed accuratum, non arrogantem. Inter scripta, quae Euclidi tribuuntur, maximam famam obtinuerunt libri tredecim Elementorum, quibus plerumque subiuncti sunt duo, qui Hypsicii Alexandrino vulgo tribuuntur de quinque corporibus regularibus libri. Antequam de iis disserat, Proclus p. 19. Edit. Graec. aut apud Barocium l. II. c. 4. nominat eos, qui ante Euclidem vel generatim de Geometria bene meriti sunt, vel etiam scriptis elementis inclaruerunt, quos hic quoque referre liceat, nempe Thaletem, Ameristum Stesichori poetae fratrem, Pythagoram, Anaxagoram Clazomenium, Oenopiden Chium, Hippocratem Chiuni, qui lunulae quadraturam invenerit, et primus elementa con-

scripserit, Theodorum Cyrenaeum, Platonem, et qui eodem fere tempore vixerit, Leodamantem Thasium, Architam Tarentinum, et Theaetetum Atheniensem. Leodamante porro iuniorem fuisse ait Neoclidem, huiusque discipulum Leonem, qui etiam elementa composuerit, et diligentior sit copia et usu eorum, quae docuerit, atque ad problemata determinationem quoque adiecerit. Leone paullo iuniorem fuisse Eudoxum Cnidium, Amiclam Heracleensem, Platonis amicum, qui theorematum generaliorum numerum auxerit, et praeter alia sectionum quoque (conicarum, ut videtur) doctrinam a Platone inchoatam, adhibita in ea quoque analysi, uberiores reddiderit, Menaechmum, Eudoxi discipulum, pariter cum Platone versatum, eiusque fratrem Dinostratum, qui omnem geometriam ad maiorem perfectionis gradum evererint. Theudium porro Magnesium elementa conscripsisse, et multas propositiones particulares magis universales reddidisse, Cyzicinum etiam Atheniensem eodem tempore viguisse, et hos quidem familiaritate coniunctos in Academia vixisse, et varia alterum alteri problemata proposuisse. Hermotimum deinde Colophonium, quae ab Eudoxo et Theaeteto prius edita fuerint, auxisse, et multa eorum, quae in elementis sint, (*τῶν στοιχείων πολλὰ*) invenisse, Philippum denique Metaeum (aut, ut est in Ed. Latin. Mendaem) Platonis discipulum ab eo ad Mathesin adductum fuisse. Addit deinde, his non multo iuniorem esse Euclidem, qui elementa collegerit, et multa eorum in ordinem redegerit, quae ab Eudoxo, multa perfecit,

quae a Theaeteto reperta fuerint. Hinc vulgo Euclides Proclo aliisque ὁ στοιχειωτής audit. Haud pauca etiam eorum, quae ab antiquioribus geometris leviori calamo perstricta vel pinguius demonstrata fuerint, ab eo firmissimis et omni obiectione maioribus demonstrationibus fulcita fuisse. Atque hunc ipsum summum in demonstrando rigorem, lucidumque per omnia ordinem, ac prudentem eorum, quae ad rem facere videbantur, selectum semper in Euclide admirati sunt viri rerum mathematicarum peritissimi. Notum est, Newtonum, virum divinum, doluisse, quod Cartesii aliorumque, qui calculo tantum algebraico uti sueverunt, scriptis se totum dederit, antequam Euclidis doctrina satis innutritus fuisset. Et La Grangius, Peyrardo referente, dictitare solebat, geometriae studiosum, qui non ex Euclidis Elementis geometriam hauriat, perinde facere, ac qui graeca et latina ex recentiorum scriptis addiscere velit.

Disputatum autem est, an omnia, quae hodie Elementorum nomine habemus, sint ad Euclidem auctorem referenda. Nec vero illud quaeritur, an omnia, quae in Elementis reperiuntur, ab Euclide *primum* inventa sint. Hoc enim aliter se habere, et multa a geometris Euclidis aevo superioribus, a Thalete, Pythagora, Eudoxo, Theaeteto, aliisque, quos ex Proclo nominavimus, profecta esse, non est dubium. Ea, quae ab antiquioribus illis inventa erant, in perfectum ordinem redegissem, lacunas explevissem, solidas ubique demonstrationes adiecissem putandus est Euclides, atque ita satis magna ipsi restat gloria. Verum enim

vero fuere, qui nec hanc laudem ei integram relinquere vellent; alii contra, Euclidis famae timentes, si qua in Elementis manca videantur, quidquid minus forte perfectum deprehendunt, ab alio, nescio quo, adiecta aut mutilata esse pronuntiant. Atque eos quidem iure ridet Savilius, qui propositiones Elementorum tribuunt Euclidi, demonstrationes Theoni, qui duobus fere seculis post Proclum vixit. Quasi vero, ait, ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adiectis probationibus, quod nec philosophorum quisquam, nec medicorum, nedum mathematicorum fecit unquam. Neque autem, eodem iudice, verior est Petri Rami sententia, qui (Scholia Mathematicorum Libr. I. p. 37.) tam propositiones quam demonstrationes Euclidi abiudicat, universa, quae Euclidi vulgo tribuuntur, elementa geometrica Theoni attribuens, contra commune omnis antiquitatis testimonium. Agnoscit tamen Ramus aliqua sive Hippocraticae, sive Euclideae geometriae vestigia in Theone. Decepti fuisse, qui ita iudicant, videntur titulo, quem nonnullae Elementorum editiones v. c. Basileensis prae se ferunt: *ἐκ τῶν Θεωνοῦ συνουσιῶν*, ex Theonis Colloquiis, sive Congressibus. Observat autem Savilius, huius tituli in neutro eorum codicum, qui penes ipsum erant, ullum reperiri vestigium, nec a Gregorii aut Peyrardo quidquam de eo memoratur. Antiquissima autem Zamberti versio in fronte semper habet: ex Theone graeco commentatore, interprete Bartholomaeo Zamberto. Et ipse etiam Savilius refert, in uno suorum codicum ad oram marginis adscripta

esse ad decimum tertium librum haec verba: *Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναθροίσας, ἣν ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ Μακεδόνης. Θέων δὲ ὁ συντάξας αὐτὰ ἐπὶ Θεοδοσίου τοῦ βασιλέως,* ut itaque collectio elementorum Euclidi, ordinatio et dispositio Theoni tribui videatur. Addit autem: „magna certe Theonis laus, si inordinata et incomposita in ordinem redegit! Sed, ne huic incerto scholiastae fidem adiungamus, obstat, ut dixi, Procli et antiquiorum omnium auctoritas, obstat mirabilis et concinna propositionum series, ex quibus unam loco suo si eximas, tota corruat compages et structura necesse est.“ Rectius itaque Ioann. Buteo (de quadratura circuli libri duo, quibus adiectus est annotationum liber in errores Campani, Zamberti etc. Lugd. 1559. p. 209.) eas, quae in exemplaribus graecis sunt, demonstrationes Euclidis esse censet, non Theonis, ita tamen, ut nec ipse neget, aliquid subinde in demonstrationibus de suo additum fuisse a Theone. Nec multum ab eo discédunt Commandinus et Savilius. Commandinus quidem in prolegomenis in Elementa Euclidis verba illa: *ἐκ τῶν Θέωνος συννοσιῶν* ita intelligi posse putat, ut dicamus, Theonem conscripsisse quidem commentarios in Elementa, sed illos temporum iniuria periisse, quemadmodum et quae in eadem Pappus Alexandrinus scripserat, conservato tamen titulo, qui postea ipsi Euclidi negligenter adiectus sit. Postea autem in eam sententiam concedit, Euclidem quidem demonstrationibus suas propositiones stabilivisse, quod vel ex Procli testimonio ad I. 10. pateat, at Theonem excellentis

ingenii virum Euclidis demonstrationes fusius pleniusque explicatas in lucem protulisse, quod apud Proclum observari possit. Esse igitur demonstrationes quidem Euclidis, at eo modo conscriptas, quo olim Theon Euclidem secutus eas suis discipulis explicaverit. Savilius autem non se moveri ait illo *συνοψιῶν* titulo in vulgatis, neque scholio illo manuscripto incerti auctoris in suo codice, magis vero auctoritate ipsius Theonis in Commentar. in Almagest. p. 50. (vide infra ad VI. 33.) Ex eo nempe loco apparere, novam Elementorum editionem (*ἔκδοσιν*) adornasse Theonem, in qua nonnulla ab ipso adiecta sint. Quae itaque ibi de sectoribus dicantur, una cum demonstratione a verbis inde: *λέγω ὅτι καὶ* usque ad finem, Theonis esse videri. Idemque iudicium ferendum se existimare de multis in decimo libro lemmatibus et fortasse propositionibus nonnullis. Alexandrum certe Aphrodiseum aliquot ante Theonem seculis eam, quae quinta est decimi in nostris libris, citare pro quarta p. 87. commentariorum in priora Aristotelis, ut necesse sit aliquam ex praecedentibus, quartam sine dubio, qua sine magno incommodo sane carere potuissemus, eius tempore ab Elementorum libro abfuisse, vel saltem cum tertia coaluisse. Et quidem ultimam decimi non dubitare se assumendum esse vel Theonis, vel alterius potius antiquioris alicuius (apud Alexandrum enim exstare iisdem prope verbis), sed non ita perspicaci ingenio, utpote alieno loco positam, nullam cum praecedentibus continuationem habentem, ut sit a doctissimo Petro Montauero rectissime animad-

versum. Ex his omnibus se concludere, sibi videri, Theonis fuisse partes in Euclide paucissimis quidem in locis interpolando, explicando, augendo, ultra has nullas. Atque in eandem sententiam plurimi deinde, non quidem illi Euclidis obtrectatores, sed amici potius ac patroni lubentes abierunt, e quibus potissimum nominandus est Rob. Simson. ita tamen, ut ad Theonem non tam gloria inde, quam potius vituperium redundet, quod nempe, ut Rob. Simson. in praefatione suae Elementorum editionis ait, ille, aut quicumque editor fuerit graeci textus, quem nunc habemus, multo plura, ac Savilius aliique viri docti existiment, et quidem in peius mutaverit, addendo scilicet, demendo, aut sua miscendo, praesertim in libro quinto et undecimo, quos iste editor non leviter vitiaverit, e. g. substituendo breviorē at paralogisticā vice legitimae demonstrationis prop. V. 18., et ex hoc libro auferendo inter alia bonam Euclidis aut Eudoxi rationis compositae definitionem, cuius loco posuerit quintam sc. libri VI., qua neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem geometra usus fuerit, cuiusque apud illos nullum vestigium inveniat. Plura praeterea alia in L. XI. depravata esse monet. Ab his igitur naevis praecipuos Elementorum libros vindicare se tentasse, tollendo falsa minimeque accurata, quae pro veris et genuinis accuratissimi geometrae scriptis supposuerint imperiti editores, et Euclidi restituendo, a Theone aliisque ab eo surrepta, quae per multa secula hactenus sepulta iacuerint. Quidquid sit, ne forte iniusti

simus erga Theonem, ad quem forte non solum ista culpa pertinet, sufficiet dicere, textum graecum variis locis non ita ad nos pervenisse, ut ex manu accuratissimi geometrae eum perfectum esse credendum sit, plurima quidem in eo perfectissimae demonstrationis exempla esse, at haud pauca tamen temporis iniuria, aut editorum male sedulorum vitio mutilata aut luxata videri, quibus quanvis caute et circumspecte pedelam afferre oporteat. Quod ultimum scopum Elementorum attinet, Proclus L. II. c. 4. sub finem asserit, Euclidem utpote Platonicae scholae amicum figurarum, quas vocant, Platonicarum, vel quinque corporum regularium constitutionem potissimum in animo habuisse.

Caeterum Euclidi alia adhuc scripta tribuntur, e quibus geometrici argumenti sunt ea, quorum Pappus meminit Collect. Mathem. I. VII. *Data* (*Δεδομένα*) nempe ac *Porismata* (*Πορίσματα*). Et *Data* quidem ad nostram aetatem pervenerunt. *Porismata* autem, quae temporis iniuria periire, post varia aliorum minus prospera conamina Rob. Simson. denique felicissime restituere inchoavit, atque edita illa sunt in Robert. Simson. Oper. reliqu. Glasgae 1776. 4. p. 315—594. Proclus ei tribuit l. II. c. 9, adhuc librum *de Divisionibus* (*Περὶ Διαρρέσεων*), quem eundem esse nonnulli putant, quem Mahometi Bagdedino adscriptum I. Dee ex arabico latinum fecit, et Feder. Commandinus Pisauris 1570. edidit, posteaque Gregorii quoque operibus Euclidis adiunxit. Savilius tamen an is liber Euclidis sit, dubitat. Praeterea illi adhuc a quibusdam *Introductio har-*

monica (Εἰσαγωγή Ἀρμονική) et *Sectio Canonis* (Κατατομή Κανόνος), et *Phaenomena* (Φαινόμενα) vid. Papp. in Prooem. ad Libr. 6. Collect. Mathem. et Philopon. ad secundum Physicorum, porro *Optica* et *Catoptrica* (Ὀπτικά καὶ Κατοπτρικά) vid. Procl. Lib. II. c. 5. et a nonnullis adhuc fragmentum *De Levi et Ponderoso* tribuuntur, quae omnia adhuc habentur, at haud ita magni pretii sunt. Denique Pappus adhuc memorat L. VII. *Locorum ad superficiem* (Τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν) libros duos, qui periere pariter ac *Fallaciarum* liber (Τὸ Σύνγραμμα Πευδαρίων), quem, Proclo referente, scripsisse, et in quo falsarum argumentationum fontes ac genera descripsisse videtur.

Sed redeamus ad *Elementa*. Horum plures exstant codices mscpti. Simon Grynaeus duobus se in iis edendis usum esse codicibus dicit, quorum alterum Lazarus Bayfius Venetiis, alterum Ioannes Ruellius amicis suis suppeditavit. Savilius pariter de duobus, qui penes ipsum sint, codicibus loquitur p. 11. At neuter suos codices accuratius descripsit. Gregorii nihil prorsus de codicibus mscptis, quorum lectionem tamen passim in margine citat, in praefatione habet. Peyrardum supra iam diximus, usum fuisse codicibus mscptis quam plurimis, e quibus summam laudem tribuit codici 190 vel *a* designato, qui tum e bibliotheca Vaticana Parisios delatus, postea rerum commutatione in Gallia facta, redire quidem Romanam iussus est, ea tamen conditione, ut Peyrardo eum, dum suam editionem ad finem perduxisset, retinere liberum relinqueretur. Ad

huius libri manuscripti, (quem exeunte seculo nono exaratum putat) fidem/ plerumque textum Peyrardus conformavit, aut certe in quo discrepet ille liber a sua editione sub finem cuiusque tomi indicavit, ita, ut quidem ipse ait, ut harum lectionum variantium ope possit quis, si velit, habere mscpti 190. exemplar huic plane congruum. Reliquos codices mscptos, quos viginti tres e bibliotheca tum Imperiali conferre ipsi licuit, e quibus autem 10. *Data* tantum continent, quum ad secula multo recentiora referri debere, et quam plurimum inter se convenire videret, initio quidem operis saepius, postea autem haud ita multum comparasse videtur, duos, codices nempe 2373, 2762, non inter eos refert, quos comparaverit, Praeter hos libros mscptos commemorantur plures alii in variis bibliothecis obvii apud Fabricium *Biblioth. Graec.* curante Harless. Vol. IV. p. 48. sqq.

Renatis litteris prima operum Euclidis notitia ab Arabibus ad nos transivit. Illi enim, rerum mathematicarum inprimis studiosi eius *Elementa* in arabicum sermonem plus semel, ut videtur, transtulerunt, et ex una harum arabicarum interpretationum denuo latine ea vertisse Campanus vulgo dicitur. Fuisse autem plures a se diversas arabicas editiones, quae saepius ab exemplaribus graecis magis minus discederent, inde maxime patet, quod hodieque plures una a se invicem diversae passim citentur. Ita v. gr. in *Bibliotheca Bodleiana* Euclidis *Elementorum* exstant libri XIII. prio-

res arabicae per Isaac. Ibn Honein ex recensione Thebit Ibn Korae v. Fabric. Biblioth. Graec. Tom. IV. p. 51. Ibidem p. 51. in Bibl. Bodleiana citantur Euclidis Data arabice per Zin Eddin Abhari, et Elementor. libri XV. ex versione Adelardi de arabico, una cum commento magistri Campani, Novariensis. Et p. 52. in bibliotheca Collegii Universitat. Oxon.: Euclides de arte geometrica ex arabica lingua in latinam translatus per Adelardum Bathoniensem. Eadem pagina occurrit Euclides arabice per Shemseddin Mahommed Almuzi, ibidemque alii in Bibliotheca Leidensi et Escurialensi cf. ibid. p. 76. Notissima apud nos est ea, quae Arabi Nassireddino tribuitur, et Romae impressa fuit 1594. De hac editione videatur Kaestners Gesch. der Mathem. I. B. p. 367. sqq. et de Schnurrer, Biblioth. Arab. p. 458. sqq. Savilius p. 143. a Baptista Raimondo hanc editionem factam esse refert. Ex praefatione illius, quam habet de Schnurrer., patere videtur, non *Versionem* arabicam, sed *commentarium* versioni intextum esse Nassireddini opus. Caeterum plenius nomen huius Arabis aiunt esse Khevageh Nassireddin, Mohammed Ben Hassan, aut Ben Mohammed Al Tusi, i. e. ortum ex urbe Tus provinciae Chorasani, et floruisse seculo nostrae aerae decimo tertio. Cf. adhuc Clement. Biblioth. curieuse Tom. VIII. p. 158. Herbelot Biblioth. Orient. p. 46. et p. 665. Abulfed. Annal. Tom. V. p. 36. 37. Casiri, Bibl. Hisp. Arab. Escur. T. I. p. 187. et Kaestner. l. c. p. 373. Haec ipsa au-

tem arabica versio cum ea, quam Campanum ex arabico fecisse vulgo dicunt, non consentit, saltem in pluribus locis, ut observat Peyrardus in Praefat. Tom. II. ubi versionem Campani prop. I. 7. et eiusdem propositionis versionem gallicam ex arabico Nassireddini factam exhibet. Pariter in prop. I. 2. Nassireddinus varios, qui obtinere possunt, casus separatim habet, Campanus cum graeco consentit. Eodem modo circa parallelas Nassireddinus, ut infra videbimus, in commentario propositioni adiuncto propriam sibi demonstrationem habet, Campanus eam tantum, quae in graecis exemplaribus habetur. In theorematis etiam Pythagoraei demonstratione additae sunt in Nassireddini editione aliae a situ quadratorum ex cathetis variato petitae, ut vel e figuris adiectis patet. Pariter etiam differunt inter se in doctrina de rationibus compositis Campanus, qui definitionem, quae vulgo est VI. 5. non habet, et Nassireddinus, qui habet aliquam a vulgari illa haud multum discedentem (vid. Pflleiderer. Schol. in VI. Elem. Euclid. P. IV. p. 15.) Caeterum, quae primum typis expressa fuit Elementorum Euclidis editio latina, opera Eberhardi Radtoliti Venet. 1482. fol. cuius descriptionem dedit Kaestner. Lips. 1750. 4. continet eam, quam vulgo a Campano ex arabico factam esse dicunt, versionem latinam. Scheibelius tamen (Zwey mathem. Abhandl. Breslau 1807. p. 19.) refert, in suo exemplari editionis huius rarissimae, manu editioni, ut pateat, coeva, in margine notatum esse „liber Ele-

mentorū translatus ab Adhelardo Rothhatē-
 mensi ex ydiomate arabico in latinum sub
 Commento Campani Novarensis, ut itaque Cam-
 panus *commentarium* tantum in *versionem* Adhe-
 lardi scripsisse videatur. Consentire cum hac
 opinione videntur ea, quae supra e Fabricii
 Bibliothec. Graec. de versionibus arabicis, vel
 ex arabico factis attulimus, ubi pariter de Abe-
 lardo illo sermo est. E graeco textu autem
 primum latine versa prodire Euclidis opera,
 edita a Barth. Zamberto Venet. 1505. fol. (Li-
 bri XIV. Elementorum latinam interpretationem
 a Georg. Valla factam ad 1498. habet Scheibel.
 Einleit. zur mathem. Bücherkenntn. 1. St. p. 2.)
 Ab hoc inde tempore saepius, ut et supra di-
 ximus, et quidem junctim primum 1516., non-
 nunquam etiam separatim, prodiit utraque Ele-
 mentorum versio, Campani (ita eam vocare li-
 ceat) et Zamberti, quae saepius haud leviter in-
 ter se differunt. Quam plurimas operum Eu-
 clidis et Elementorum potissimum editiones me-
 morat Scheibel. l. c. I. St. p. 1. sqq. 5. St. p.
 473. sqq. et p. 521. sqq. 9. St. p. 264. In-
 signem inter antiquiores locum habent editiones
 Feder. Commandini et Christoph. Clavii, qua-
 rum utraque etiam scholiis et commentariis il-
 lustrata ac saepius prelo repetita fuit, inter re-
 centiores potissimum Rob. Simsonis editiones
 latina et anglica memorandae sunt. Reliquas
 omnes, quae nobis innotuerunt, aut apud alios
 memorantur, hic percensere longum et ab hoc
 loco alienum videtur. Praecipuas earum iam
 supra nominavimus. De reliquis praeter Schei-

belium l. c. vide in Bossii Dissertat., qua contenta Elementorum enunciat et simul de variis editionibus post Fabricium nonnulla disserit Lips. 1737. 4. et potissimum ipsum Fabricium Biblioth. Graec. ed. Harles. Vol. IV. p. 53. sqq. In bibliothecis, ut ibidem memoratur, extat hebraica adeo Elementorum versio.

E U C L I D I S
E L E M E N T O R U M

LIBRI SEX PRIORES.

ΕΡΚΛΕΙΟΤ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΟΡΟΙ.

α. Σημείον ἐστίν, οὐ μέρος οὐθέν.

D E F I N. I.

Omnis, quae a ratione suscipitur de aliqua re institutio, debet a definitione proficisci, ut intelligatur, quid sit id, de quo disputetur.
Cic. de Offic. I. 2.

Primam L. I. definitionem dudum fuere, qui reprehenderent, quod quid punctum non sit, dicat potius, quam quid sit. Vid. Rami Schol. Mathem. L. VI. Francof. 1599. p. 141. et Savillii Praelectiones in Principium Elem. Euclidis Oxon. 1620. p. 51. Nec negaverim, esse in hac observatione aliquid veri. Atque ipse etiam Proclus fatetur Euclidem διὰ ἀποφάσεως i. e. negative explicare punctum, addens: καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λόγοι προσηκουσι ταῖς ἀρχαῖς. Vid. Procli Commentar. in Libr. I. Euclidis Basil. 1533. p. 26., in qua excusatione Savilius quoque acquiescit. Cf. etiam Edm. Scarburgh. the English Euclide Oxford 1705., qui p. 1. ita habet: The definition of a Point is plainly negative, and no otherwise informs us, what a Point is, than by telling us, what 'tis not. Yet in many things, that are in nature most simple, these kinds of negative Definitions are sufficiently instructive; though not to the Essence of the Thing defined, yet very well to the Use, that is to be made thereof. So here a Point is defined by a Negation of parts. Which Definition in respect of Magnitude, that was next to be con-

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R P R I M U S.

D E F I N I T I O N E S.

1. **P**unctum est, cuius pars nulla.

sidered as divisible into parts, is instructive or preparatory to the right understanding of the Doctrine of Magnitudes, and lays down, what conception of a Point is hereafter used, or usefull in Geomet'y; namely *to have no parts*. Which is sufficient for the present to an Geometrician. In multis, ait, rebus simplicissimis eiusmodi definitiones negativas sufficere non quidem ad rem ipsam declarandam, attamen quo facilius usui, in quem adhibeantur, inservire possint. Ita hanc definitionem negativam puncti referri ad comparationem quantitatum, quae ex partibus compositae sint, praeparare itaque animum ad melius intelligendam doctrinam de quantitibus, et docere, quo sensu, vel quem in usum Geometrae voce *punctum* utantur, nempe pro eo, quod non habeat partes. Quod quidem in praesentia sufficiat Geometrae.—Praeterea id quoque in Euclidis definitione vituperarunt nonnulli, quod non sit convertibilis, vel, ut aliis verbis rem enunciem, quod eadem definitio in alia plura, praeter punctum, quadret; unitatem nempe in numeris vel tempore consideratam pariter nullas partes habere. Quod etiam Proclus concedit, ac non solum punctum ait esse *ἀμερὲς*, sed tamen *ὡς πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ὕλην*, unde Geometrae haec definitio sufficere possit. Vid. Procl. l. c. p. 26. et Savil. l. c. p. 53. Atque haec, quae inter unitatem ac punctum intercedit

β. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατὺς.

analogia, caussa fuisse videtur, cur Proclo teste l. c. Pythagoraei punctum dicerent *μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν*, unitatem situm adsumentem. Cf. Savil. p. 60. sq. Playfair. Elements of Geometry containing the first six Books of Euclid. Edinburgh 1795. p. 347. pariter monet, haud convertibilem esse hanc definitionem, quod tamen ad naturam definitionis rite formatae pertineat; non enim ea omnia, in quibus nullae sint partes, vel quae non habeant magnitudinem, illico puncta esse. Ipse igitur definitionem hanc affert, punctum esse, quidquid positionem habeat, at non magnitudinem. Optime hac de re iudicare videtur Robertus Simsonus, qui in Anglica Elementorum versione London. 1804. p. 269. sqq. observat, definitiones 1. 2. 3. 5. 6. magis perspicuas fore, si a consideratione vel definitione corporis initio facto, ad superficiem, in qua nulla sit crassities, adeoque longitudo saltem ac latitudo considerandae veniant; a superficie ad lineam, omnis etiam latitudinis expertem, et a linea denique ad punctum descendas, quod quum nec longitudinem habeat, saltem ut terminus sive extremum lineae cogitari possit. Cf. etiam Clavii Elementa Euclidis Libr. XV. Colón. 1591. p. 1. et Borellii Euclides restitutus, Pisis 1658. p. 3. sq. Atque hac ratione evitari poterunt, quas ex Ramo, aliisque notavimus, obiectiones. Punctum nempe erit, ut in defin. 3. dicitur, *πέρας τῆς γραμμῆς*. Itaque definitio tertia supplet defectum primae. At hanc ipsam tertiam definitionem Savilius l. c. p. 60. reprehendit, quod sit a posteriori; pariterque p. 64. similem lineae definitionem ex eadem ratione absurdam esse dicit. Recte ille quidem, si quis, haud ante explicata linea, punctum, aut, superficie haud explicata, lineam ita explicare velit. At, si Roberti Simsoni more a definitione corporis fiat initium, atque inde ad superficiem, a superficie ad lineam, a linea denique ad punctum descendas, i. e. ab eo, quod magis compositum est, ad simplicius, pariter id licebit, atque a simplicioribus ad magis composita ascendere. Hinc etiam plures Geometrae acutissimi, v. c. e nostratibus Kaestnerus, Karstenius, Lorenzius,

2. Linea autem longitudo non lata.

Matthias; aliique eundem, quem Rob. Simsonus, in his explicationibus ordinem secuti sunt. Caeterum notat Savilius, quod apud Platonem, Aristotelem, aliosque veteres *στιγμή* vocetur, id apud Euclidem ac Mathematicos esse *σημείον*. Denique patet, atramento aut alio quocunque modo perfectam puncti imaginem exhiberi nunquam posse.

D E F I N. I I.

Hanc quoque definitionem reprehendit Aristoteles Topic. VI., quod per negationem dividat genus. Recte tamen Savilius l. c. p. 64. monet, id saepius fieri, nec reprehendi posse, qui v. c. brutum definire velit *ζῷον ἄλογον*. Neque etiam, monente pariter Savilio, sola negatione constat haec definitio, ut superior puncti, quum genus habeat positivum, *longitudo*. Vel, ut Proclus ait p. 29. *Τὸ μὲν σημείον, ὡς πάντων ἀρχὴν τῶν μεγεθῶν διὰ μόνης τῆς ἀποφάσεως ἐδίδαξε· τὴν δὲ γραμμὴν τῇ μὲν καταφατικῶς, τῇ δὲ ἀποφατικῶς ἐστὶ μὲν γὰρ μήκος, καὶ τούτῳ τῆς τοῦ σημείου πλεονάζει ἀμελείας· ἀπλατὴς δὲ ὡς τῶν ἄλλων καθαρῶς διαστάσεων. πᾶν γὰρ δὴ τὸ ἀπλατὲς καὶ ἀβαθὲς ἐστίν.* Et vulgo etiam, ut Apollonius apud Proclum monet, lineae notionem habemus, quum itinerum longitudes metiri volumus. Tum enim neque de latitudine neque de altitudine vel profunditate viae quaeritur, sed de locorum tantum distantia. Notiones nempe puncti, lineae, superficiei non nisi abstractione, ut aiunt, formantur. Caeterum alii, eodem Proclo referente, lineam dixere esse *ῥύσιν σημείον*, fluxum puncti, alii *μέγεθος ὑφ' ἐν διάστατον*, quantitatem unicam habentem dimensionem, Savilio iudice, vere utique, sed ad naturam lineae explicandam non tam accommodate et Euclideae definitione minus perspicue. In definitione sexta, quae pariter pro complemento secundae haberi potest, ut defin. tertia pro complemento primae, *γραμμαὶ πέρατα τῆς ἐπιφανείας* esse dicuntur, et Rob. Simson. addit, dici etiam posse, lineam esse terminum communem duarum superficierum continue posidarum, vel lineam dividere unam eandemque superficiem in duas partes continuas. Caeterum, ut Scarburgh. monet (the

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεία.

δ'. Εὐθεία γραμμὴ ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις κείται.

Engl. Euclide p. 3. sqq.) linea, quamvis fluxus puncti dicatur, haud tamen consistit e punctis iuxta se positis. Quum enim singula puncta omni careant magnitudine, decem etiam millia punctorum iuxta se positorum nullam efficere possunt longitudinem; puncta itaque punctis addita nunquam lineam efficiunt, nec ulla pars lineae est punctum, sed punctorum fluxus imaginem saltem lineae continuae exhibet. Cf. Peletar. in Euclid. Elem. Geom. Demonstr. Libr. VI. 1610. p. 3.

DEFIN. III.

De hac definitione supra ad defin. 1. dictum est, esse eam quasi complementum primae. Caeterum Proclus p. 28. et ex eo Savilius p. 66. mouent, esse lineas, quarum terminos exhibere non possis, v. s. lineam ex una parte finitam, ex altera infinitam, i. e. cui ex hac parte nulli fines assignentur, vel etiam lineas in se ipsas redeuntes. „Sic nimirum solet Euclides, (verba sunt Savilii) quam recte docti viderint, posita semel definitione alicuius generis, sine ulla divisione transire ad definitionem alicuius ex praecipuis speciebus, quod reliquae fortasse proposito suo minus inservirent, aut elementari institutioni non essent accommodatae. Sic hoc loco, cum posita definitione lineae consequens esset, ut lineam divideret in finitam et infinitam, omissa infinita, finitam solummodo in hac tertia definitione attingit.“ Mihi quidem videtur Euclides, omissis, quae ad rem proxime non pertinerent, dicere voluisse: si qua linea finita est, termini eius puncta appellantur. Cf. Clavius ad h. l.

DEFIN. IV.

Primum de sensu verborum: ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις κείται, disputatur. Proclus putat, Euclidem his verbis innuere, μόνην τὴν εὐθεϊάν ἴσον κατέχειν διάστημα τὸ

3. Lineae vero extrema, sunt puncta.

4. Recta linea est, quae ex aequo punctis in ea sitis ponitur.

(legendum τῷ) μεταξὺ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων i. e. rectam tum ex aequo punctis in ipsa sumtis iacere, quando spatium, seu distantia inter duo eius puncta extrema aequale sit ipsi lineae. At recte monet Borellius, Euclid. restitut. p. 4., ignorari, quidnam ipsa distantia sit, neque id ab Euclide expositum esse. Clavius p. 2. lineam aequaliter inter sua puncta extendi dicit, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum, vel huc atque illuc deflectendo subsultet, in qua denique nihil fluxuosum reperiatur. Verum etiam haec expositio obscura videtur Borellio l. c. quod omnia illa vocabula supponant, lineam rectam iam esse cognitam, illud enim esse flexuosum, quod non sit rectum. Klügelius (Mathem. Wörterbuch Th. III. p. 447.) Euclidis verba id sibi velle putat, rectam lineam eam esse, cuius singulae partes similem formam, eundem erga se situm, habeant, in qua explicatione notio eiusdem situs nonnullis fortasse obscura videbitur. Alii aliter Euclidis verba explicavere. Atque haec ipsa interpretationum diversitas satis indicat, non sibi causa Savilium p. 77. dicere „hanc definitionem mihi liceat bona cum venia omnium interpretum tam veterum quam recentiorum non intelligere.“ Atque in eundem sensum Pflaidererus Thes. inaug. Tub. 1782. ait: „Definitio lineae rectae Elem. Eucl. L. I. Def. 4. nullius est usus, ac re explicanda obscurior.“ Adeo, ut Savilius ait, rem maxime perspicuam perspicue definire aliquando difficile est. Quum nempe definitionis negotium in eo versetur, ut rem minus aut imperfecte cognitam per characteres eius distinctivos explicemus, notasque, quibus illa ab omnibus reliquis discerni possit, afferamus, patet res omnium simplicissimas, quamvis omnium oculis obversantes satisque notas, vix per characteres adhuc simpliciores exprimi atque explicari posse. Omnes novimus, quid sit atrum, quid album; at quis alteri id se explicare posse, sibi persuadebit? An linea recta huc referenda

ε. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ς. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ. Ἐπίπεδος ἐπιφανεία ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' αὐτῆς εὐθείαις κεῖται.

sit, equidem non dixerim. Illud tamen certum est, id ipsum, quod rectum sit, adeo simplex esse, ut difficile certe sit, uotionibus simplicioribus id efferre. Unde etiam tam variae lineae rectae definitiones ortae esse videntur. Alii enim (atque ita fere etiam definitio nostra quarta est apud Campanum) dixere, lineam rectam eam esse, quae minima sit inter eosdem terminos, quod ipsum etiam Archimedes non quidem ut definitionem lineae rectae, at ut *λαμβάνόμενον* ponit in Praefat. ad Libros de Sphaera et Cylindro; alii v. c., Proclo referente, Plato: cuius puncta extrema obumbrent media; alii: cuius omnes partes omnibus congruant; alii: quae una ratione inter duo puncta duci possit; alii aliter eius naturam explicare studuerunt. Maxime nobis arridet ea, quam Kraftius Geom. Sublim. p. 2. a F. C. Maiero sibi traditam exhibet, lineae rectae definitio, qua ea esse dicitur, quae circa utrumque extremum (vel etiam circa duo puncta quaecunque in ipsa sumpta) tanquam polos circumvoluta situm suum non mutet, quo sensu etiam interpretari possis eam, quam Proclo referente veterum nonnulli dedere, definitionem: *ἥτις τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένει*. Atque eodem fere sensu Austinus (An Examination of the first Books of Euclids Elements Oxford 1781. p. 2.) Euclidis definitionem intelligi debere contendit. Cf. etiam Playfair. Elem. of Geometry p. 1., 351., sq. cuius definitio eodem fere redit. Et Saccherius (Euclides ab omni naeyo vindicatus Mediol. 1733. p. 71.) rectam lineam, quae ex aequo sua interiaceat puncta, ait necessario talem esse, ut circa duo illa immota extrema sua puncta non possit ipsa in alteram partem converti, v. c. a laeva parte in dextram. Ex hac definitione consequitur, per duo puncta non nisi unam rectam transire, adeoque duas rectas spatium non

5. Superficies autem est, quod longitudinem et latitudinem tantum habet.

6. Superficiei vero extrema, sunt lineae.

7. Plana superficies est, quae ex aequo rectis in ea sitis ponitur.

comprehendere, nec segmentum commune habere. Ex hac ipsa definitione etiam facile normae aut regulae, ad quam duci solent lineae rectae, examen institui poterit. Norma nempe circa se ipsam circumvoluta eidem lineae congruere debet.

DEFIN. V.

Superficies, ut Proclus monet, dici etiam potest, terminus corporis, vel, ut Rob. Simson. addit, terminus communis duorum corporum continue positorum. Neque igitur pars corporis erit superficies, vel, ut aliter dicamus, superficies superficiei imposita nunquam corpus efficiet. Cf. dicta ad def. 2.

DEFIN. VI.

Hanc quoque definitionem ita efferre possumus: si qua superficies finita est, fines eius sunt lineae. Itaque lineae nunquam partem superficiei constituent, nec plures iuxta se positae lineae superficiem efficient.

DEFIN. VII.

In hac definitione verba ἐξ ἑαυτῶν parem atque in definitione quarta obscuritatem habent. Proclus quidem simili ratione haec verba explicat atque in definitione lineae rectae; superficiem nempe planam aequalem esse dicit intervallo suarum rectarum, quod Savilio iudice est non quidem obscurum per obscurius, sed planum et perspicuum per meras tenebras explicare. Clavius aliquanto clarius; ita ut mediae partes ab extremis sursum deorsumve subsultando non recedant, vel ita, ut superficies nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum. Eadem tamen, quae Borellius circa similem lineae rectae explicationem monuit, hic quoque valent. Neque reliquorum explicationes difficultatibus carent. Unde etiam alii alias superficiei planae definitiones dederunt, similes fere

ή. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀποτομένων ἀλλήλων, καὶ γῆ ἐπ' εὐθείαις κεκλιμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

δ'. "Όταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν εἰρημένην ¹⁾ γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

1) εἰρημένην habet Ed. Paris. ex Cod. 190. Reliquae editiones et Mss. omittunt hanc vocem, quam certe nemo desideraverit.

iis, quibus ad def. 4. rectam quoque lineam explicatam esse diximus. E quibus reliquis praeferenda videtur ea, quam Proclo teste iam e veteribus quidam exhibuerunt, superficiem planam eam esse, cuius omnibus partibus recta applicari possit (ἥς πᾶσι τοῖς μέρεσιν εὐθεῖα ἐφαρμόζει), vel, ut paullo distinctius habet Rob. Simson., in qua, sumtis utcunque duobus punctis, recta linea inter illa tota sita est in ista superficie. Id ipsum etiam Euclidis definitionem dicere, contendit Austinus l. c. p. 3. et Hero Nomin. Geometr. edit. a Cour. Dasypodiō, in Editione Euclidis ab ipso curata, qui ἐξ ἴσων κείται interpretatur: παντοίως ἐφαρμόζει. Atque hanc determinationem in Elementis Euclidis, ac nominatim L. XI. Prop. 1. 2. 3. supponi, monent Simson. et Pflidererus l. c. p. 2. Campanus habet: Superficies plana est ab una linea ad aliam brevissima extensio, in extremitates suas eas precipiens. Caeterum notandum adhuc est, quod etiam Proclus monet, apud Platonem et Aristotelem ἐπίπεδον saepius pro ἐπιφάνεια in genere sumi, Euclidi contra superficiem planam saltem voce ἐπίπεδον notari. Addimus denique, omnia, quae in Element. libr. I—IV. et deinde L. VI. dicuntur, ad delineationes saltem in superficie plana factas referri debere, etiam ubi haec restrictio non expresse adiciatur.

DEFIN. VIII.

Rob. Simson. monet, auctori huius definitionis id consilium fuisse videri, ut angulum sensu generaliore sumtum explicaret, non cum saltem, qui a duabus rectis, verum etiam eum, qui, ut nonnulli voluit, a recta et curva, vel a duabus curvis effi-

8. Planus autem angulus est in plano duarum linearum sese tangentium, et non in directum positarum, alterius ad alteram inclinatio.

9. Quando vero lineae dictum angulum continentes rectae sunt, rectilineus appellatur angulus.

citur. (Hinc etiam in defin. 9. separatim de angulo rectilineo sermo est). At verba ἐν εὐθείᾳ, quae satis perspicua sunt, si de duabus rectis sermo sit, vix habere sensum, quum de recta et curva aut de duabus curvis adhibeantur. Videri igitur hanc definitionem pariter ac definitionem anguli segmenti, ut et ea, quae de angulo semicirculi et segmentorum angulis habeantur lib. III. Prop. 16. et 31. additamenta esse editoris minus periti. Et iam Vivianius vocem ἐντετός expungendam, et omnia ad angulos rectilineos restringenda esse putaverat. Vid. infra Excurs. ad L. III. 16. Proclus autem ad h. l. multa de variis angulorum generibus disserit, qui vel a variis curvis, vel maxime a diversis circulis, vel etiam a recta et circulo continentur. Sed ad elementa certe angulos non rectilineos haud pertinere iure pronunciat Playfair.

Caeterum ad hanc definitionem monendi fuerint tirones, magnitudinem anguli, quod et ipsa definitio innuit, non a magnitudine rectarum angulum comprehendentium (*crura* vocant), sed a mutua earum positione pendere. Punctum, in quo crura anguli concurrunt, *verticem* vocant.

DEFIN. IX.

De hac definitione ac praecedente iure sentit Pfeidererus (Thes. inaugur. Tub. 1784. p. 1. 2.) „Definitiones hae propriae tantum, ad quid notio anguli spectet, innuere, non notionem ipsam declarare censendae sunt: alias idem per idem, obscurum per aequè obscurum explicare iure reprehenderentur. Hinc etiam nullus earum deprehenditur usus ad propositiones de aequalitate, inaequalitate, et generatim ratione mutua ac magnitudine angulorum stabiliendas.“ Atque hoc sufficere videtur ad defendendum in hac re Euclidem contra accusationes recentiorum

ι. Ὄταν δὲ εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶ καὶ ἡ ἐφεσσηκύια εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστίν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ. Ὄξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ. Ὄρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

ιδ. Σχήμά ἐστι, τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὁρῶν περιεχόμενον.

ιε. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἢ καλεῖται περιφέρεια πρὸς ἣν, ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ²⁾ ἴσαι ἀλλήλαις εἶσιν.

2) Ed. Paris. Cod. 190. vel *a*, et alii plures Codd. addunt: πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, quae verba tamen, consentientibus etiam de Lambre et Prony in relatione ad Institut. Franc. facta, pro mero coque inutili glossemate habenda videntur, et recte in reliquis Edd. variisque Codicibus desunt.

quorundam v. c. Ohmii (Kritische Beleuchtung der Mathem. überhaupt, und der Euklid. Geom. insbesondere).

DEFIN. X. XI. XII.

Angulos deincepspositos τὰς ἐφεξῆς γωνίας Euclides appellat illos duos angulos, qui ab una linea in alteram incidente fiunt ex utraque parte lineae incidentis. Caeterum vox *κλίσις* in Defin. 8. mōnente Savilio ad angulum rectum et obtusum applicata sensu generaliore sumenda est.

DEFIN. XIII.

Distinguendum esse docet Savilius inter ὅρον terminum, et perimetrum sive ambitum figurae. In triangulo v. g. quodlibet latus per se sumtum ὅρος est, sed omnia latera simul sumta perimenter. Caeterum Savilius verba haec: ὅρος ἐστὶν etc. nullam ait habere definitionis faciem, sed vocabuli potius per

10. Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus est uterque aequalium angulorum: et insistens recta, perpendicularis vocatur ad eam, super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui maior recto.

12. Acutus autem, qui minor recto.

13. Terminus est, quod alicuius est extremum.

14. Figura est, quod ab aliquo vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana ab una linea contenta, quae vocatur circumferentia; ad quam ab uno puncto eorum, quae intra figuram posita sunt, cadentes omnes rectae aequales inter se sunt.

suam synonymum explicationem esse, consentiente Scarburghio, qui haec verba glossema esse putat margini primum adscriptum. Et sane, si desint, nemo ea desideraverit. Rob. Simson. hanc definitionem asterisco notavit.

DEFIN. XI V.

Notandum vocem *σῆμα figura* ab Euclide non de figuris tantum planis, aut in superficie aliqua positis, sed, ut definitio haec innuit, de corporibus quoque adhiberi. Patet id e definitionibus quoque prismatum, pyramidum, conorum, aliorumque corporum, quae ad initium libri XI. habentur.

DEFIN. X V.

Facile patet, e mera rei alicuius definitione, quae tantum asserit, si quid in rerum natura sit ita comparatum, ut in definitione dictum erat; id hoc illove nomine designandum esse, (quas definitiones veteres logici *nominales* vocarunt) haud consequi, dari aut possibilem certe esse eiusmodi rem. Fieri enim potest, ut, re haud satis pensitata, *ἀόριστα* quoque in definitione coniungantur, v. c. si quis circuli, quadrati, aut trianguli circulo non inscriptibilis definitionem dare velit. Reapse igitur esse tales figuras etc., quales in aliqua eius generis definitione describuntur, nisi res per se pateat, tum demum scire

ιβ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

poterimus, quum ostensum fuerit, qua ratione eius generis figurae fieri possint. Quod etiam ab Euclide plerumque factum esse videmus. Quodsi possibilitas rei per se pateat, tum etiam definitio ita strui poterit, ut rationem, qua res fieri possit, indicet. Eius generis definitiones logici *geneticas*, veteres etiam *reales*, recentiores *syntheticas* vocant. Euclidis circuli definitio quum nominalis tantum sit, possibilitas rei non inde derivari poterat, verum in postulatis sumebatur. Neque verò eapropter Euclides reprehendendus est, ut pluribus ostendit Scarburgh. ad h. l. Poterat vero etiam definitio exhiberi *genetica* vel *synthetica* ita fere: Quodsi recta quaecunque circa alterum punctum extremum in eodem plano gyretur, dum in pristinum situm redeat, spatium, quod illa recta percurrit, circulus et linea ab altero extremo rectae revolutae descripta circumferentia vocabitur, ubi facile patet, nihil in definitione sumi, quod non facile effici queat. Unde etiam consequitur, quodvis circumferentiae punctum a puncto illo, circa quod recta circumferebatur, aequè distare, atque illud punctum, quod centrum vocant, intra circulum situm esse. Ac fateor, me non videre, quo iure Scarburghius tam acerbè perstringat Borellium aliosque, qui *genetica* hac definitione uti maluerint. Caeterum rectae, quae ex centro ad punctum aliquod circumferentiae ducuntur, hodie plerumque apud geometras radii, apud Euclidem simpliciter rectae ex centro, αἱ ἐκ τοῦ κέντρου, libr. III. Def. 1. et Prop. 26. vocantur. Ubi de circulis describendis agitur, vox *διάστημα* adhibetur, quae minus

16. Hoc autem punctum centrum circuli vocatur.

17. Diameter vero circuli est recta quaedam per centrum ducta, et terminata ex utraque parte a circuli circumferentia; quae et bifariam secat circulum.

18. Semicirculus vero est figura contenta a diametro, et ea circuli circumferentia, quae a diametro intercipitur.

accurata videri potest, quum rectam lineam brevissimam esse inter duo puncta supponat, cuius rei in Elementis nulla occurrit mentio, et casus tantum singularis L. I. 20. demonstratur. Nonnunquam circuli nomine circumferentiam quoque vel peripheriam denotant. Rectius tamen illae nomine etiam distinguuntur. Pariter partes circumferentiae, quas vulgo, verosimiliter secundum Arabes (cf. Campani III. Def. 7.) arcus vocamus, Euclides semper peripherias vocat. Vid. Pflaiderer. in Hauberi Chrestom. Geometr. p. 284.

DEFIN. XVII. XVIII.

Verba: *ἡ γὰρ καὶ διὰ τέμνει τὸν κύκλον*, quae praevie tantum definitionis 18. gratia adiuncta esse censi debent, haud esse partem definitionis, sed ex definitione consequi monet Rob. Simson. Et Scarburghius quidem glossema Elementis assutum esse putat. Quidquid sit, hanc definitionis consequentiam, tam quoad circumferentiam, quam quoad superficiem circuli demonstrari oportebat, quod Thaletem fecisse Proclus refert, superiore circuli parte inferiori superposita. Cf. infra Obs. ad III. Def. 1. Idem etiam probari posse e libri tertii propositionibus 31. 23. 24. monent Simson. et Pflaiderer. (Thes. inaugur. Tub. 1784. p. 4.), qui addit, ita demum a subreptionis vitio liberari sequentem definitionem 18. Pariter ostendi poterit, valere etiam conversam, nempe rectam, quae circulum bifariam dividat, per centrum transire, adeoque reliquas, quae circulum secant, nec per centrum transeant, rectas eum in inaequalia segmenta dividere, et vice versa. In Procli commen-

ιβ'. Τμήμα κύκλου ¹⁾ ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας [ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου].

κ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κα'. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ'. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ'. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσοπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κε'. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

1) Definitionem hanc segmenti circuli habent quidem libri mss. et editiones Graecae omnes, unde nec nos eam delere volumus. At, quum eadem ut L. III. Def. 6. recurrat, ex Buteonis, Savilii et Scarburghii sententia eam pro spuria habendam putamus. Semicirculi mentio in definitione antecedente facta huic additamento ortum dedisse videtur. Procli Commentarius eam non habet, nisi quod in Commentario ad definitionem praecedentem eiusmodi aliquid ab initio adiicit. Verba sub finem addita, quae uncis inclusimus, eo magis suspecta sunt, quod non tantum in editionibus Basil. et Oxon. et Codice Peyrardi *ε*, sed etiam L. III. Def. 6. desunt. Et L. III. Prop. 23. 24. 25. 33. 34. *τμήμα* semicirculum quoque comprehendit. Baermannus hanc definitionem omisit: hinc eae, quae sequuntur, apud eum numero minore designantur. Rob. Simson, quoque asterisco eam notavit.

tario definitioni 18. additur; *κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν*, semicirculi centrum idem est, quod et circuli. Ad quae verba iure monet Scarburghius, magis proprie dici posse, semicircumferentiae idem centrum esse, quod circuli. Semicirculo enim centrum proprie tribui nequit. Caeterum haec verba, quum in libris mss. Elementorum, ut et Savilius observat, haud legantur, spuria sine dubio esse, aut forte observationem saltem a Proclo factam continere Scarburghius putat.

19. Segmentum circuli est figura contenta recta et circuli circumferentia [vel maiore vel minore semicirculo].

20. Figurae rectilineae sunt, quae a rectis continentur.

21. Trilaterae quidem, quae a tribus.

22. Quadrilaterae autem, quae a quatuor.

23. Multilaterae vero, quae a pluribus quam quatuor rectis continentur.

24. Trilaterarum autem figurarum aequilaterum quidem triangulum est, quod tria aequalia habet latera.

25. Isosceles (aequicrurum) vero, quod duo solum aequalia habet latera.

DEFIN. XX. XXI. XXII. XXIII.

Addi potest, rectas, quae figuras istas continent, latera figurae vocari, et omnes simul ambitum vel perimetrum figurae constituere, spatium autem ab iis comprehensum aream appellari. Quae in figuris plurium quam trium laterum vertices duorum angulorum eidem lateri non adiacentium coniungunt, Diagonales vel Diametri figurae audiunt. Figurae, quae omnia latera aequalia, et omnes etiam angulos aequales habent, regulares, reliquae irregulares vocantur. Sin autem latera tantum sint aut considerentur ut aequalia, figura aequilatera; si anguli tantum, figura aequiangula audiet. Vid. Pflaiderer. in Hauberi Chrest. Geometr. p. 284. sq.

DEFIN. XXV.

Addi potest, in triangulo isosceli aequalia latera crura, reliquum basin vocari. In aliis etiam triangulis tertium latus, quando a reliquis distinguitur, basis vocatur. Generatim trianguli ac cuiusvis figurae rectilineae basis vocatur illud latus, super quo figura constituta concipitur. Vide Pflaiderer. in Hauberi Chrest. Geometr. p. 285.

B

κς'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κς'. Ἐτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθήν γωνίαν.

κή. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλείαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον.

λά. Ἐτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

DEFIN. XXVI.

Σκαληνὸν, quod Hesychius interpretatur: *σκολιὸν*, *tortuosum*, melius a *σκάω*, *claudico*, derivatur, quod, ut Proclus ait p. 47. triangulum scalenum *πανταχόθεν χωλεύει*. Caeterum addi potest, in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, Hypotenusam, reliqua autem latera, quae angulum rectum comprehendunt, Cathetos appellari.

DEFIN. XXX. XXXI. XXXII. XXXIII.

Has definitiones Pfeidererus observat l. c. Th. 2. quamvis superabundantes, vitiosas non esse. Superabundantes nempe sunt. Continent quippe plures notas, quam quae ad rem discernendam sufficiant. Ita v. c. satis erat dicere, quadratum esse figuram quadrilateram aequilateram, in qua unum saltem angulum rectum esse constet. Omnes enim rectos esse, facile inde probari poterat. Pa iter de rhomboïde monet Simson., satis fuisse dicere, esse figuram quadrilateram, quae habeat

26. Scalenum autem, quod tria inaequalia habet latera.

27. Insuper trilaterarum figurarum rectangulum quidem triangulum est, quod habet angulum rectum.

28. Obtusangulum autem, quod habet angulum obtusum.

29. Acutangulum vero, quod habet tres angulos acutos.

30. Quadrilaterarum autem figurarum quadratum quidem est, quod et aequilaterum est et rectangulum.

31. Oblongum autem, quod rectangulum quidem, non vero aequilaterum.

32. Rhombus vero, quod aequilaterum quidem, non vero rectangulum.

33. Rhomboïdes autem, quod et opposita latera et angulos aequalia inter se habet, quod neque aequilaterum est, nec rectangulum.

latera opposita aequalia, quod nempe angulorum oppositorum aequalitas inde sponte fluat, et vice versa. Nihil tamen falsi continent hae propositiones, quamvis plus ac necessarium erat, efferant. Denique liceat observare, in his et nonnullis praecedentibus definitionibus idem valere, quod de definitione circuli monuimus, possibilitatem rei ex sola definitione nequaquam inferri posse. Omnes etiam has figuras in eodem plano positas intelligi, diximus ad defin. 7. Proclus monet, *τετράγωνον*, quod proprie omnes figuras quadrilateras comprehendat, tamen de sola figura quadrilatera aequilatera et rectangula dici. Vocem *ῥόμβος* Proclus a verbo *ῥομβέω*, in circulum torqueo, derivat, quod sit quadratum quasi distortum, nisi forte verius *ῥομβέω* a *ῥόμβος* derivandum est. Est nempe *ῥόμβος* (rhombus solidus) proprie conus rectus duplex, ex utraque parte eiusdem basis, eadem utrimque altitudine constitutus, quem tanquam turbinem vel trochum in circulum

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.

λε'. Παράλληλοι εἰσιν εὐθεῖαι, αἱ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπέπτουσιν ἀλλήλαις.

agere possis. Tale deinde corpus si a plano per coní vertices transeunte secetur, existet in plano a turbine secto figura, quem rhombum (rhombum planum) vocant mathematici. Savilius contra a rhombo plano rhombum solidum denominationem accepisse putat. Oblongum, sive rectangulum, cuius unum latus est recta A, alterum ei contiguum recta B, hac nota: $A \times B$ designare solent, cuius rei ratio infra patebit.

DEFIN. XXXIV.

Figurarum, quas Euclides trapezia vocat, tres species facit Proclus. Vel enim duo saltem latera habent parallela, et rectas haec latera iungentes aequales — atque haec quidem Proclus trapezia aequicrura vocat — vel duo quidem latera parallela habent, at rectas ea iungentes inaequales, quae trapezia scalena vocat Proclus; vel nullum latus alteri parallelum habent, et tum Proclo trapezoidea audiunt.

DEFIN. XXXV.

Circa hanc definitionem nonnulli recentiores Mathematici (v. c. Hauff., Hoffmann., Lüdicke., aliique) id potissimum desiderarunt, quod negative tantum expressa sit, vel concursum rectarum parallelarum neget. At recte contra monuit Müller. (ausführl. und evidente Theorie der Parallellinien, Nürnberg. 1819. p. 22.) facile idem prorsus ita exprimi posse: rectae parallelae dicuntur, quae in eodem plano ita sitae sunt, ut quousque continuentur semper omnia unius puncta sint ex eadem parte alterius. Proclus ad hanc definitionem refert, Posidonium rectas parallelas dixisse eas esse, quae, quum in eodem sint plano, neque convergant, neque divergant, sed ita positae sint, ut omnes ex una earum in alteram demissae perpendiculares sint inter se aequales. Quae ipsa definitio aliis quoque placuit. Involvere tamen ea videtur, rectarum eam

34. Reliqua autem quadrilatera trapezia vocentur.

35. Parallelae rectae sunt, quae in eodem plano positae, et productae in infinitum ad utramque partem, in neutram sibi coincidunt.

naturam esse, ut situm habere possint, in quo perpendiculares ab una in alteram demissae aequales sint, quod ipsum ante demonstrari debere videtur, vel, ut aliter dicamus, involvit, lineam, e qua omnes in rectam aliquam demissae perpendiculares aequales sint, etiam ipsam rectam esse. Alii ita: si in duas in eodem plano sitas rectas alia recta incidat, quae angulum externum aequalem faciat interno ad easdem partes posito, duae istae rectae parallelae erunt, ubi probandum erit, rectas, quae ab una recta hac ratione secantur, etiam ab aliis, a quibus secantur, rectis eodem modo sécari. Conf. Klügel. Mathem. Wörterbuch ad vocem: *Parallelen*.

Praeter 35., quas Euclides habet, definitiones, duas addendas putat Clavius (quas etiam Henrion. et Barrov. in sua Elementorum editione subiunxerunt) unam nempe 36. (quam iam Candalla habet) qua figuras quadrilateras, quarum bina opposita latera sunt inter se parallela, parallelogramma vocari doceatur, alteram 37. qua indicetur, quid sint parallelogrammorum complementa circa diametrum, de quibus prop. 43. 44. sermo est. Et definitionem parallelogrammorum quidem haud cum Scarburghio ad I. 53. et 54. pro superflua habere possumus. Quamvis enim parallelogrammum non sit nova figurae species, sed, ut infra videbimus, tantum figurae def. 30—33. explicatas comprehendat, iuvat tamen exponere, quid generali hoc nomine intelligi velimus, nec definitio inuit semper, novum aliquid, de quo ante plane non sermo fuerit, indicari. Parallelogrammorum complementa autem quid sint, melius intelligetur, postquam de rectis parallelis actum fuerit. Confer itaque dicta ad I. 43. Quin aliquot etiam Euclideanarum definitionum, ut Savilius monet, exiguum usum esse fatendum est, ut in magna domo multa supellex, quae non utitur, ut loquitur ille cascus (Naevius), emitur tamen.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α. Ἡγήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.

P O S T U L A T A.

Postulata et Axiomata illud, ut Proclus l. III. p. 50. ait, commune habent, ut nulla egeant demonstratione, per se fidem faciant, et consequentium fiant principia. In eo vero ex Gemini sententia, quem postea fere omnes secuti sunt, differunt, quod postulata quidem aliquid efficere iubeant, quod habeat facilem et cuius obviā constructionem, axiomata contra aliquid verum esse asserant, de quo nemo, qui verborum sensum probe intellexit, dubitare potest. Mathematici autem postulata pariter atque axiomata volunt esse quam paucissima, ne quid forte ut effectu facile immisceatur, quod quomodo fieri possit, non omnibus pateat, aut pro certo aliquid sumatur, quod dubium adhuc esse possit. Aut, ut Barrov ait (*Lect. Mathem.* 1664. *Lect.* IV. p. 66.) „Axiomata praemittunt Mathematici paucissima; paucissime quidvis petunt, adsumunt aut praesupponunt. Est enim tenerrimae frontis et stomachi robustissimi, prudentissimum genus hominum et taedii patientissimum. Quenivis concoquere malunt laborem in dictis suis demonstrandis, quam assensum gratuitum emendicare, vel nimiam auditorum liberalitatem experiri. Proprii ratiocinii virtuti, non alienae facilitati, deberi volunt conclusionum suarum evidentiam et firmitatem. Per longas ambages morosius ac prolixius aliquas propositiones, alioquin facillimas, deducere satagunt, eo quod a multiplicando postulatorum et axiomatum numero vehementer abhorreant.“ Ad-
dit deinde Barrov. sine ratione Ramum (cum quo etiam recentiores nonnulli faciunt) Euclidem acriter reprehendisse,

P O S T U L A T A.

1. Postuletur, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere.
2. Et finitam rectam in directum continuo producere.
3. Et omni centro et intervallo circulum describere.

quod is plurimas propositiones susceperit demonstrandas, quas ex Rami sententia satius fuisset, ceu sua luce claras arripere, indemonstratas anticipare, in axiomaticum censum referre: in quo omnes harum rerum intelligentes consentientes habebit Barrov.

Ad postulatum primum monet Scarburgh., mente tantum ductam concipi rectam ab uno puncto ad alterum, et generatim ea omnia, quae sive in postulatis, sive in problematibus fieri iubeant mathematici, imaginatione saltem ita effecta concipienda esse, neque manualement litterarum ductum, qui semper imperfectus sit, ad veritatem mathematicam intelligendam requiri, figuras tamen manu factas imaginationi succurrere, unde semper regulae et circini usum hactenus permissum sibi putarint geometrae.

Quodsi postulata eo sensu sumantur, quo, Proclo teste, Geminus ea sumenda putavit, manifestum est, quod et Proclus asserit, id, quod pro quarto postulato quidam habuere (Campano est postulatum tertium, quod nempe duo prima in unum contrahit), nempe omnes angulos rectos inter se aequales esse, pariter atque id, quod quintum esse voluerunt, nempe rectas, in quas incidens alia recta faciat angulos internos minores duobus rectis, si opus sit, productas concurrere, neutiquam ad postulata referri debere (cf. Müller a. a. o. p. 4. sqq.), nec magis illud, duas rectas spatium non comprehendere, huc pertinere. Quum tamen Proclus testetur, sua iam aetate plures has propositiones inter postulata retulisse, et codices etiam mss., quos Pey-

δ. Καὶ πάσας ¹⁾ τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

ε. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθείᾳ τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς (καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης ²⁾ τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἐφ' ᾗ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ς. Καὶ δύο εὐθείας ³⁾ χωρίον μὴ περιέχειν.

1. πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. Ita in axiom. legunt edir. Basil. et Oxon.

2. ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσύνται ἀλλήλαις. Ita in axiom. legunt ed. Basil. et Oxon.

3. δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. Ita in axiom. habent codd. Peyrardi d. f. h. k. l. m. n. et editiones Basil. et Oxon. Caeterum, ut Peyrardus observat, in quibusdam codd. haec propositio tam in postulatis, quam in axiomatibus habetur.

rardus contulit, omnes postulatum quartum et quintum, nonnulli etiam sextum habeant (editiones tamen Basil. et Oxon. ea inter axiomata referunt); quum in primis ex Arabico aut Graeco factis versionibus Latinis Elementorum Campani (ut vulgo volunt), Zamberti, Commandini quinque postulata habeantur; quum in alijs etiam antiquis scriptoribus, qui Euclidis postulata retulere, v. g. Censorino, Martiano Capella, Boëthio pariter quinque illa postulata enumerentur (conf. *Zwey mathematische Abhandlungen von Scheibel, Breslau 1807. p. 17. sqq.*), necesse est, postulata ab illis alio sensu sumpta fuisse. Ac reapse Proclus ait, hypotheses, postulata, axiomata alios alio sensu dixisse, et nominatim nonnullos omnia, quae ad Geometriam speciatim pertinerent, inter postulata, reliqua, quae omnibus disciplinis mathematicis communia essent (cf. Schwab. Commentat. in Euclid. Lib. I. §. 31.) inter axiomata retulisse, quo tamen axiomata octavum non quadrat. Atque hi quidem decepti fuisse videntur titulo: *κοινὰ ἔννοια*, quem ita interpretabantur, ut notiones pluribus

4. (Aliis: Axioma 10.) Et omnes angulos rectos aequales inter se esse.

5. (Aliis: Axioma 11.) Et si in duas rectas recta quaedam incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, productas illas duas rectas in infinitum sibi coincidere, ad quas partes sunt anguli duobus rectis minores.

6. (Aliis: Axioma 12.) Et duas rectas spatium non continere,

mathematicis disciplinis communes intelligerent, quem sensum etiam Scheibel. l. c. tuetur. Wallisius etiam (Oper. Mathem. T. II. p. 667. sq.) cum hac opinione facit. Nos locum quidem, quem in misstis habent, mutare noluimus, at, consentientibus viris doctissimis, Barrov., Rob. Simson., aliisque plurimis, rectius ea axiomatibus, et ne his quidem omnia accenseri putamus. Nempe postulatum quartum, aut, ut alii volunt, axioma decimum, omnes angulos rectos aequales esse, demonstratione egere, nec pro axiomate, multo minus pro postulato sumi posse, dudum monuere viri docti; nominatim Pfeiderer. Thes. inaug. Tub. 1784. Thes. 4. Demonstrationem propositionis satis facilem, uno nempe angulo recto alteri superposito, exhibet Proclus p. 53. (Cf. Schwab. in Euclid. lib. I. §. 35.). Unde consequitur, constantis esse magnitudinis angulum rectum, adeoque pro mensura reliquorum sumi posse. Vid. Pfeiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 306.

De postulato quinto, aliis axiomate undecimo, ad El. I. 29. et in Excursa ad eam propositionem fusius dicetur. Unum monemus Peletarium in Elem. Geom. satis perverse hoc axioma adeo inter definitiones referre voluisse; esse enim ait definitionem linearum non parallelarum. Postulatum 6. vel, ut aliis est, Axioma 12. quod nempe duae rectae spatium non comprehendant, ex notione lineae rectae a Maiero explicata consequi diximus ad definitionem quartam. Et recte

K O I N A I E N N O I A I.

α. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλει-
πόμενα ἐστὶν ἴσα.

Playfair. observat, hoc axioma supplere apud Euclidem defectum definitionis rectae, quae certe haud perspicua sit, nec usquam adhibeatur, quum hoc potius axiomate demonstrationes, quae huc pertineant, nitantur,

A X I O ' M A T A.

Axiomata, quae et κοινὰ ἔννοιαι, *communes notiones*, vocantur, quod, ut Savilius ait, omnium mentibus quasi insita et innata sit eorum notitia, nulla egere demonstratione diximus, vel ita perspicua esse debere, ut nemo, qui verborum sensum intellexerit, de veritate asserti dubitare possit. Neque tamen propterea, monente Barrowio Lect. Mathem. Lect. VII. p. 115. putandum est, ea simpliciter ἀναπό-
δεικτα esse, omninoque demonstrari non posse. „Sic enim, Barroy. addit, paucissima vel nulla cujuslibet particularis scientiae pronunciata possent haberi vel appellari principia, Eo enim propendeo, ut existimem, praeter unicum illud omnis ratiocinii fundamentum: *contradictoriae propositiones nequeunt esse simul verae vel simul falsae*, nullum aliud dari simpliciter indemonstrabile axioma. Saltem particularium scientiarum principia nedum possunt, at etiam debent, si poscat discipulus, a magistro demonstrari. Tenetur enim, sua munia si probe exequi velit, et nomen suum implere, scientiae praemonstrator omnem a studioso rationabilem (ita cum barbaris loqui liceat) scrupulum eximere; ergo sua, quae adsumit, principia, si obscura sint, exemplis illustrare, si dubia,

NOTIONES COMMUNES, SEU AXIOMATA.

1. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia.
2. Et si aequalibus aequalia addantur, tota sunt aequalia.
3. Et si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt aequalia.

confirmare debet (ut res fere et subiecta materia patietur) ex aliis notioribus et magis indubitatis principiis ad ipsa usque omnium prima principia, si opus sit, idque petet studiosus, discursum promovendo. Sin nulla compareant talia, veritatem axiomatum geometricorum ostendet per definitiones terminorum; ut si quis ambigat de eo, an totum sua parte sit maius; si nullum reperiat in metaphysicis theorema vel axioma certius, evidentius, simplicius illo, per quod ostendatur, recurrendum est ad definitiones totius et partis, maioris ac minoris, e quibus recte positae haud difficile fuerit illud axioma demonstrare. Pariterque se res habet in reliquis.“

Quamvis igitur Euclidis axiomata, quae omnia defectui definitionum accuratarum, notionum simplicium aequalitatis, inaequalitatis, lineae rectae etc. supplendo destinatae esse censendae sunt (conf. Wolf. de methodo mathem. brevis commentatio Elem. Mathem. Tom. 1. p. 7.) eam evidentiam habere videantur, ut in iis acquiescere possimus, nec ulteriorem demonstrationem requiramus, reprehendendi tamen non sunt, qui subtilius omnia rimati ad simpliciora adhuc principia progredi tentarunt, quin probandi, si reapse simpliciora atque evidentiora sint principia, quibus suas demonstrationes superstruunt. Ita Proclus refert, Apollonium primum Euclidis axioma: *Quae eidem aequalia sunt, aequalia sunt inter se*, demonstrare conatum esse, sumto 1) ea, quae eundem locum occupent, inter se aequalia esse, 2) quae eundem locum occupent, et aliquid tertium, inter se eundem locum occupare. Haec ipsa tamen supposita Euclideis haud certiora, forte etiam

δ. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἔστιν ἄνισα.

ε. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἔστιν ἄνισα.

obscuriora esse, nec in omnes omnis generis quantitates quadrare monuerunt Proclus et Savilius. Sano tamen sensu Apollonii enunciatum sumi, atque ita reliqua fere omnia Euclidis axiomata ex axioma δ. derivari posse, iure existimat Austin. p. 8. et Hauber. Chrest. Geometr. p. 130. Generatim etiam certum est, axiomata, quae Euclides habet, alia ab aliis pendere, ita ut, sumto uno, legitima demonstratione inde deduci possit alterum, v. c. sextum e primo (cf. Schwab. Commentat. in prim. Elem. Euclidis librum §. 32. et alibi, et Pfeiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 289. sqq. Garz. allgemeine Größenlehre Halle 1820. p. 13. sqq.) ac 7. prima axiomata aliquanto generalius ac brevius ita effferri posse: *Aequalia si aequales variationes subeant, aequalia erunt, quae inde nascentur. Aequalia autem si inaequales, aut inaequalia si aequales variationes subeant, inaequalia inde nascentur.* Distinctius autem et scopo Euclidis accommodatius erat, singulas, quae in censum veniunt, variationes nominatim ac a reliquis separatim recensere. Axiomati 5. addi poterat, ut Clavius monet, aliud ei simile axioma: *Si ab aequalibus auferantur inaequalia, reliqua sunt inaequalia.* Pari ratione axiomatici 4. aliud simile addere nihil attinet. Facile enim patet, si quis dixerit: *si aequalibus inaequalia addantur, tota esse inaequalia*, idem illum dicere, quod in axioma 4. enunciat. Sextum etiam et septimum axioma generalius admittunt enunciatum in hunc fere modum: *Quorum aequae multipla aut aequae submultipla aequalia sunt, sunt inter se aequalia.* At Euclidis scopo sufficebant dupla et dimidia. Ad axioma 8. monet Savilius, distinxisse Geometras inter *ἐφαρμόζειν* et *ἐφαρμόζεσθαι*. Illud nempe dici de superpositis, quae perfecte congruant, hoc de superpositis, quae quoque modo coaptentur, id quod ex demonstratione Lib. I. prop. 4. patere arbitratur. Ipse tamen fatetur,

4. Et si inaequalibus aequalia addantur, tota sunt inaequalia.

5. Et si ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

in Lib. I. prop. 8. id discrimen haud ita accurate observari, nisi forte incuria librariorum *ἐφαρμοζομένης* positum sit pro *ἐφαρμοσμένης*. Caeterum huius axiomatis ad sequentia applicationes supponunt, tanquam ex communi notione superficiei planae notum, planum ita posse plano applicari, ut secundum omnem suam extensionem cum illo coincidat. (Pfleiderer. in Hauberi Chrest. Geom. p. 293.) Conversam quoque huius axiomatis veram esse, ait Clavius, in quo tamen Savilio monente errat. Vera nempe est conversa, si de lineis rectis et angulis rectilineis sermo sit, at non de aliis quibuscunque quantitibus, nisi forte etiam hic distinguere velis inter *ἐφαρμόζειν* et *ἐφαρμόζεσθαι*. Tum dicere possis: Quae inter se aequalia sunt, sibi quoquo modo coaptari possunt (*ἐφαρμόζονται*) at non semper perfecte congruunt (*ἐφαρμόζονται*). Verum etiam ita propositio erit non perfecte conversa axiomatis 8. Rectas autem omnes inter se aequales etiam sibi mutuo congruere, idemque de angulis rectilineis valere, in sequentibus, praesertim 4. et 8. libri I. supponitur, et demonstrari etiam potest, dummodo postulatum 6. in nostra editione, nempe duas rectas spatium non includere pro axioma sumas, atque ita demonstravit Savilius p. 152.

In axiom. 9. addi potest monente Savilio: *Totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis*. Apud Barrovium et Clavius (qui etiam nonnullis praecedentibus axiomatibus aliqua consectoria per se perspicua addit) post axioma 9. inseruntur duo alia huius sententiae:

10. a. *Duae rectae segmentum commune non habent*. Hoc axioma certe in l. XI. prop. 1. supponi videtur. Rob. Simson quidem monet, ex l. I. prop. 11. illud derivari posse. At, si id quoque concedatur, de quo tamen ambigi posse videtur, idem tamen axioma, quod caeterum ex Maieri definitione

- ε'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
 ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
 η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα, ἴσα ἀλλήλοις
 ἐστίν.

θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἐστίν.

lineae rectae consequi supra diximus, iam in accuratiore demonstratione I. I. prop. 1. supponitur (vid. Proclus p. 59. et Savil. ad prop. 1. p. 175.), pariterque in demonstratione I. 4. et I. 8. monente Pffeiderero Thes. inaugur. 1787. Thes. 4. unde rectius hoc assertum pro axiomate sumseris.

11. a. *Duae rectae in uno puncto concurrentes, si producantur ambae, necessario se mutuo in eo puncto secabunt.* Quo vix opus esse videtur. Nostra deinde postul. 4. 5. 6. vel axiom. 10. 11. 12. sunt apud Clavium 12. 13. 14. Alia quaedam axiomata Clavius, Henrion., Barrov., Baermann. alique addidere, quibus tamen nos facile carituros putem. At forte non inepte addi possunt ea, quae sequuntur:

Ax. 13. *Recta, cuius pars intra spatium limitibus undequaque circumscriptum i. e. intra figuram aliquam sita est (vel quae in plano figurae per punctum aliquod intra figuram ducitur) ex utraque parte producta figuram istam in duobus minimum punctis secabit.*

Ax. 14. *Duae figurae, in eodem plano descriptae, quarum una punctum aliquod intra alteram, aliud autem punctum extra eam situm habet, necessario se invicem secabunt.*

Ax. 15. *Si a puncto ex una parte rectae alicuius infinitae sito ad punctum ex altera parte situm ducatur recta aliqua, duae hae rectae necessario se in puncto aliquo secabunt.*

(Pffeiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 295. sq. et Lorenz. erster Coursus der reinen Mathem. Geometr. §.

6. Et quae eiusdem duplicia, aequalia inter se sunt.

7. Et quae eiusdem dimidia, aequalia inter se sunt.

8. Et quae congruunt inter se, aequalia inter se sunt.

9. Et totum parte maius est.

24. sqq.) Caeterum ut supra iam monuimus, fuerunt a Rami inde temporibus, qui plura alia, quae in sequentibus demonstrantur, adeo clara et facilia esse putarent, ut in axiomatum et postulorum numerum referri possint. At methodus mathematica, ut Barrov. monet l. c. p. 66. strictissimam principiorum paucitatem affectat, vel potius efflictim deperit. Neque tamen negandum est, „multo plura esse, ut Savilius ait p. 156. (et iam ante eum Campanus monuit ad finem axiomatum) quibus passim et Euclides ipse et alii Geometrae inter demonstrandum utantur, quae tamen omnia a praemissis principiis, vel a logica naturali fere originem habent, qualia sunt: contradicentium perpetuo unum esse verum, aliud falsum, ex quo et illud oritur, duas magnitudines homogeneas, itemque angulos aut esse inter se aequales, aut inaequales, et, si inaequales, alteram esse maiorem, alteram minorem. Item principium illud logicum, illud esse falsum, ex quo per necessariam consequentiam falsum sequatur, quum ex veris nil nisi verum, ex quo pendet tota vis *ἀπαγωγή*, hoc est, demonstrationis per impossibile. Et eiusmodi quidem axiomatum et aliorum generum plura sunt exempla, quorum numerum inire difficile, quae inter demonstrandum non animadvertentibus etiam occurrunt, quae seorsim adnotare studiosis inter legendum commodum foret.“ Leges tamen rigorosae methodi an id permittant, dubitari possit, monente Pfeiderero in Hauberi Chrestom. Geometr. p. 288.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσοπλευρον συστήσασθαι.

Ἐκθεσις. Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ¹⁾ πεπερασμένη ἡ *AB*.

Προσδιορισμός. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς *AB* εὐθείας πεπερασμένης ²⁾ τρίγωνον ἰσοπλευρον συστήσασθαι.

1. εὐθεῖα omitt. edd. Basil. et Oxon.

2. πεπερασμένης omitt. edd. Bas. et Oxon.

PROPOSITIO I.

Observ. Problema continet haec propositio. Differunt autem problemata ac theoremata inter se eodem modo atque ex Gemini sententia postulata et axiomata. Caeterum Euclides utrumque communi nomine *πρότασις* comprehendit, et potest sane, quod et Savilius ex parte monet, facile unum genus in aliud converti. Sub finem tamen Euclides semper ea distinguit solemnibus verbis: ὅπερ εἶδει ποιῆσαι, vel ὅπερ εἶδει δεῖξαι. Problemata pariter ac theoremata plures partes habent. Et veteres quidem in illis, si omni numero absoluta sint, inesse dixerunt *πρότασιν*, *ἐκθεσιν*, *διορισμὸν*, *κατασκευὴν*, *ἀπόδειξιν*, *συμπέρασμα*. *Πρότασις* est ipsa propositio, quae in problemate datum et quaesitum, in theoremate pariter datum aut suppositum, et id, quod demonstrari oportet, complectitur. Ita nostrum problema postulat, super datam rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere. *Ἐκθεσις* id, quod universaliter datum esse dictum erat, ad singulares schematum lineas applicat, et nonnunquam explanat v. c. hic: Sit data linea *AB*. *Διορισμός* simili ratione quaesitum in certo aliquo exemplo ad oculos ponit. *Κατασκευὴ* ea, quae facienda proponebantur, efficere docet, cui subiungunt nonnulli alterum *διορισμὸν*, quo enunciatur, ea, quae fieri debeant, in proposito exemplo facta esse. *Ἀπόδειξις* id demonstrat, ac *συμπέρασμα* inde concludit, quae in problemate fieri iussa erant, iam reapse facta esse. Et similiter fere res se habet in theo-

PROPOSITIO I. (Fig. 1.)

Super datam rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

Expositio. Sit data recta terminata *AB*.

Determinatio. Oportet igitur super *AB* rectam terminatam triangulum aequilaterum constituere.

rematibus. Non tamen omnes hae partes expresse enunciantur. In pluribus Mss. etiam in hac propositione hae voces desunt. Quin VV. DD. de Lambre et Prony in Praefatione, Euclidi a Peyrardo edito praeposita, istas denominationes meras commentatoris nugas esse (une pédanterie de commentateur) pronuntiaverunt. Aliter tamen de ea re iudicat Savilius, qui has propositionis partes fusius explanat. Vide Hauberi Chrestom. Geom. p. 168. sqq. Nobis sufficiat eas semel exempli causa protulisse. Propositio, Demonstratio ac Conclusio nunquam deesse possunt. Cf. Savilius. Ad propositionis enunciatum quod attinet, *Datum* quid sit, alii aliter exposuere, ut videre est in iis, quae Procli Scholiis subiuncta sunt in Editione Basileensi 1533. Hic sufficet intelligere rectam, quae reapse exhibita et ob oculos nobis posita est. Caeterum Euclides, quum in Elementis id tantum propositum sibi haberet, ut doceret tirones, qua ratione obtineri possit problematum propositorum solutio, contentus fuit, more didactico solutionem proponere, eiusque demonstrationem exhibere, i. e. *Synthesi* tantum usus est; at, qui primus problemata illa sibi proponebat, sive Euclides ille fuerit, sive alius quis, *Analysi* aliquam, sive methodum heuristicam adhibere necesse habebat. Et sane longum fuerit et saepe perdifficile, tirones nulla ante scientia mathematica imbutos semper ope Analyseos ad prima artis principia reducere (sed ad haec usque in *Analyse* recedendum foret, quoad nihil adhuc cognitum aut aliunde demonstratum sumere liceret): sufficere videtur docere, quid, et qua quid ratione effici possit: itaque *Synthesis* Euclidis

Κατασκευή. Κέντρῳ μὲν τῷ A , διαστήματι δὲ τῷ AB , κύκλος γεγράφθω ὁ $BΓΔ$ · καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ B , διαστήματι δὲ τῷ BA , κύκλος γεγράφθω ὁ $ΑΓΕ$ · καὶ ἀπὸ τοῦ $Γ$ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΓΑ, ΓΒ$.

Ἀπόδειξις. Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $BΓΔ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ AB · πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΓΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΓ$ τῇ BA . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ΓΑ$ τῇ AB ἴση· ἐκατέρα ἄρα τῶν $ΓΑ, ΓΒ$ τῇ AB ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ $ΓΑ$ ἄρα τῇ $ΓΒ$ ἴση ἐστὶν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΓΑ, AB, ΒΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

scopo sufficere putanda est. Conf. Scarburgh. p. 49. Vide tamen Analysin Pflaidereri in Hauberi Chrestom. Geom. p. 299.) At in ipsa tamen compositione nostri huius problematis atque eius demonstratione id forte quis desideraverit, quod Euclides non docuerit, circulos, quos describi iubet, se invicem secare, [adeoque in potestate semper esse problematis solutionem. Van Swinden. (Anfangsgr. der Messkunde. Jena 1797. 4p. 22.) id pro axiomate sumit. In usum vocatis iis axiomatibus, quae reliquis addi posse supra vidimus, hac ratione demonstrari id omnino poterit. Quum (Fig. 1.) circulus, quem A vocabimus, centro A , radio AB descriptus sit, patet, punctum A esse intra circulum A , punctum B autem in ipsa circumferentia circuli A positum. Hinc, quae in recta AB ultra B producta sumuntur puncta, v. c. E , necessario extra circulum A sita erunt. Si enim neges, puncta ut E vel in circumferentia circuli A , vel intra circulum A sita sint, necesse est. Priore casu foret $AE=AB$, posteriore $AE<AB$. At, quum E in AB ultra B producta esse su-

Constructio. Centro quidem A , intervallo autem AB , circulus describatur $B\Gamma A$ (Post. 3.); et rursus, centro quidem B , intervallo autem BA , circulus describatur $A\Gamma E$ (Post. 3.); et a puncto Γ , in quo sese secant circuli, ad puncta A , B adiungantur rectae ΓA , ΓB (Post. 1.).

Demonstratio. Et quoniam A punctum centrum est $B\Gamma A$ circuli, aequalis est $A\Gamma$ rectae AB (Def. 15.); rursus, quoniam B punctum centrum est $A\Gamma E$ circuli, aequalis est $B\Gamma$ rectae BA (Def. 15.). Ostensa est autem et ΓA rectae AB aequalis; utraque igitur ipsarum ΓA , ΓB rectae AB aequalis est. Quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); et ΓA igitur rectae ΓB est aequalis; tres igitur ΓA , AB , $B\Gamma$ aequales inter se sunt.

mat, erit etiam utroque casu $AE > AB$, quod est absurdum. Ergo puncta E in AB producta sumta erunt extra circulum A . Descriptus deinde alter circulus, quem B vocabimus, ex centro B , radio AB , ex una parte puncti B rectam AB secabit in puncto A , atque ex altera parte in puncto aliquo E sito in AB ultra B producta, i. e. extra circulum A . Quum igitur circuli B punctum aliquod A intra circulum A , aliud autem eiusdem circuli B punctum E extra circulum A situm sit, duo hi circuli necessario se invicem secabunt (Ax. 14.) in puncto aliquo F . Cf. Volf. Elem. Geometr. §. 197. Caeterum quum non tantum figurae $A\Gamma B$, $A\Gamma E$, verum etiam $A\gamma B$, $A\gamma E$ sint limitibus undequaque circumscriptae, patet, duos hos circulos tam supra quam infra AB in punctis F et γ se invicem secare, adeoque duplicem dari problematis solutionem, dum tam triangulum $A\gamma B$, quam $A\Gamma B$ quaesiti trianguli locum habere possit. An forte plures adhuc solutiones locum habere possint, hic nondum definiri poterit, dum ostensum fuerit, circulos in pluribus quam duobus punctis se non secare. Cf.

Συμπέρασμα. Ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον, καὶ συνίσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς AB . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $BΓ$ δεῖ δὴ πρὸς τῷ A σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $BΓ$ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεξενήθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ AB , καὶ συνεστήτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ $ΔAB$, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς $ΔA$, $ΔB$ εὐθεῖαι αἱ $ΔE$, BZ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B , διαστήματι δὲ τῷ $BΓ$, κύκλος γεγράφθω ὁ $ΓΗΘ$ καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ $Δ$, καὶ διαστήματι τῷ $ΔH$, κύκλος γεγράφθω ὁ $ΗΚΛ$.

infra Prop. VII. Cor. 2. Ramus monet, esse manifestam hysterologiam in Euclide, quod hoc speciale problema praemittat, nec statim generale illud, quod I. 22. habetur, tractet. Quasi vero eae, quae I. 22. praecedunt, propositiones, quae et ad stabiliendam I. 22. faciunt, hanc ipsam I. 1. non supponant, aut sine ea rite demonstrari possint! Caeterum, quod Proclō p. 59. referente, Zeno Sidonius monuit, in demonstratione tacite sumitur, rectas $ΔΓ$, $BΓ$ ad punctum $Γ$, in quo conveniunt, segmentum commune non habere, unde apparet necessitas id pro axioma sumendi. Cf. notata ad Defin. 4. et ad Ax. 10. a.

PROPOSITIO II.

Obs. Facile patet, varios esse huius problematis casus, prout punctum A vel in recta $BΓ$ ipsa aut producta, aut extra eam situm sit, quos plenius enumerat Proclōs. Quum

Conclusio. Aequilaterum igitur est ABF triangulum (Def. 24.), et constitutum est super datam rectam terminatam AB . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO II. (Fig. 2.)

Ad datum punctum, datae rectae aequalem rectam ponere.

Sit quidem datum punctum A , data autem recta BF ; oportet igitur ad A punctum, datae rectae BF aequalem rectam ponere.

Adiungatur ab A puncto ad B punctum recta AB (Post. 1.), et constituatur super eam triangulum aequilaterum AAB (Prop. 1.), et producantur in directum ipsis AA , AB rectae AE , BZ (Post. 2.), et centro quidem B , intervallo vero BF , circulus describatur $\Gamma H\Theta$ (Post. 3.); et rursus centro A , et intervallo AH circulus describatur HKA (Post. 3.).

autem exposito casu, qui in nostra figura est, reliqui nihil habeant difficultatis, supersedere liceat eorum expositione. Forte autem miretur aliquis, et reapse mirati sunt tum veteres, quos Proclus ait simpliciore problematis constructionem adfectasse, tum Ramus alique, Euclidem his ambagibus uti, ut ad punctum datum A rectam aliquam AA ponat, datae rectae BF aequalem. Poterat enim brevius dicere: Ducatur ex A recta quaecunque AE , ac descripto (Post. 3.) centro A , intervallo BF , circulo, abscindatur AA , quae proinde aequalis erit rectae BF . Poterat sine dubio Euclides ita rem omnem absolvere. At, ut Proclus ait, hoc nihil aliud foret, quam mera petitio principii. Nam qui petit, ut ad A describatur circulus intervallo BF , petit ut ad A ponatur linea rectae BF aequalis, quod fuit demonstrandum nec petendum. Nec postulatum tertium ita intelligendum est, quasi liceret alibi centrum, alibi intervallum circuli accipere, ut ad Post. 3.

Ἐπεὶ οὖν τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Gamma H \Theta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ BH . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $H K A$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AA τῇ AH , ὥν ἡ AA τῇ AB ἴση ἐστὶν λοιπὴ ἄρα ἡ AA λοιπῇ τῇ BH ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ BH ἴση· ἐκατέρα ἄρα τῶν AA , $B\Gamma$ τῇ BH ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ AA ἄρα τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ A , τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $B\Gamma$ ἴση εὐθεῖα κείται ἡ AA . "Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθείαν ἀφελεῖν.

monet Savilius. Praeterea, hac constructione sumta, ad demonstrandam rectarum AA , $B\Gamma$ aequalitatem, utraque dicenda erat aequalis esse intervallo, quo puncta extrema crurum circini, cuius ope circulus centro A descriptus fuit, inter se distabant. Hoc circini crurum intervallum quum in figura haud ob oculos positum sit, exactissimo geometrae sine dubio minus aptum visum fuit ad rem per se simplicissimam demonstrandam. Malebat ostendere, rectam AA pariter ac $B\Gamma$ rectae BH ob oculos positae aequalem, adeoque duas AA , $B\Gamma$ inter se esse aequales. Reapse, etiam apertura circini, dum a puncto B ad A transfertur, variationibus obnoxia est haud detegendis, nisi descriptis, quos Euclides describere iubet, integris circulis. Nec instrumentorum fide niti debet demonstratio. Monenda haec duxi, quo certius sub initium statim operis tirones ἀκριβειαν summi viri observent. His addo, quae Savilius de hac re habet p. 179. „Observent

Quoniam igitur punctum B centrum est circuli IHO , aequalis est BF rectae BH (Def. 15.). Rursus, quoniam punctum A centrum est circuli HKA , aequalis est AA rectae AH (Def. 15.), quarum AA rectae AB aequalis est; reliqua igitur AA reliquae BH est aequalis (Ax. 3.). Ostensa est autem et BF rectae BH aequalis; utraque igitur ipsarum AA , BF rectae BH est aequalis. Quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); et AA igitur rectae BF est aequalis.

Ad datum igitur punctum A , datae rectae BF aequalis recta ponitur AA . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO III. (Fig. 3.)

Duobus datis rectis inaequalibus, a maiore rectam minori aequalem auferre.

studiosi, si placet, differentiam magnam in hac parte inter problema et theorema. In problemate, ubi quasi manualis operatio requiritur (quamvis etiam ipsa Euclidis et geonetrarum problemata a mechanica structura et fabrica abesse longissime, et non tam manus quam mentis opera absolvi ex Platonis sententia dixisset idem Savilius p. 162.), traiectione linearum ad alium atque alium situm et positionem admitti non potest: potest in theoremate, ubi nullum opus exigitur, per imaginationem traieci linea aut figura a suo loco et superponi alteri lineae vel figurae, ut in quarta propositione fit. Nam, quia in theoremate nihil aliud quaeritur, quam verum et falsum neque quicquam est falsum in illa traiectione, quae per solam imaginationem ad ostendendam conclusionis veritatem fit, et non quasi per fabricam manualement, aut ministerium aliquod problematicum, recepta est iure merito in theoremate traiectione illa imaginaria, quae in problemate esset vitiosissima."

"Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνίστοι αἱ AB , Γ , ὧν μείζων ἔστω ἡ AB . δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω ¹⁾ πρὸς τῷ A σημείῳ τῇ Γ εὐθεῖα ἴση ἡ AA' καὶ κέντρῳ μὲν τῷ A , διαστήματι δὲ τῷ AA' , κύκλος γεγράφθω ὁ ΔEZ .

Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔEZ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ AA' ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ AA' ἐστὶν ἴση. Ἐκατέρα ἄρα τῶν AE , Γ τῇ AA' ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ AE τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίστων τῶν AB , Γ , ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφίηται ἡ AE . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

"Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

1) Peyrardus ex Cod. 190. vel a. addit γὰρ, quod edd. Basil. et Oxon. recte omittere videntur, nisi vocem γὰρ eo sensu sumere velis, quem etiam nonnunquam habet, ut significet *nempe, scilicet*. Cf. Prop. 9—12. huius libri cum I. 10., I. 11. Constructio problematis I. 2. tamen pariter ab initio habet γὰρ, pariterque II. 11. Haec talia utrum ponere an omittere velis, haud sane multum refert.

PROPOSITIO III.

Obs. Duo potissimum casus distingui possunt, prout duae rectae idem punctum extremum habeant, aut non. Reliquis

Sint datae duae rectae inaequales AB , Γ , quarum maior sit AB ; oportet igitur a maiore AB rectam minori Γ aequalem auferre.

Ponatur ad punctum A rectae Γ aequalis AA (Prop. 2.); et centro quidem A , intervallo vero AA , circulus describatur AEZ (Post. 3.).

Et quoniam A punctum centrum est circuli AEZ , aequalis est AE rectae AA (Def. 15.); sed et Γ eidem AA est aequalis; utraque igitur ipsarum AE , Γ rectae AA est aequalis; quare et AE est aequalis rectae Γ (Ax. 1.).

Duabus igitur datis rectis inaequalibus AB , Γ , a maiore AB minori Γ aequalis ablata est AE . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO IV. (Fig. 4.)

Si duo triângula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrúmq; utrique, et angulum angulo aequalem habeant, ab aequalibus rectis contentum; et basin basi aequalem habebunt, et triángulum triángulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt.

casibus similibus iis, quos ad Prop. 2. diximus, immorari nihil attinet.

PROPOSITIO IV.

Obs. Haec propositio prima est, in qua principium congruentiae sive Ax. 8., eiusque conversa, quatenus conversam habet, adhibetur. Non quidem defuere, qui hoc demonstrationis genus repudiarent, quod minus geometricum sit; et mechanici aliquid sapiat, triángulumque assumat cum motu et ad aliam

*Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς $ΔE$, $ΔZ$ ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ $ΔE$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔZ$, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ $BAΓ$ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $EΔZ$ ἴσην· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ $BΓ$ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τριγώνῳ ἴσον ἐσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται, ἐκατέρα ἐκατέρα, ὅφ' αἷ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔEZ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΓB$ τῇ ὑπὸ $ΔZE$.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ἐπὶ τὸ $ΔEZ$ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ $Δ$ σημεῖον, τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $ΔE$, ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ E , διὰ τὸ ἴσην

positionem translatum. Et iam Proclus ait p. 66. hanc ἐφαρμογὴν sensibili inniti notioni, τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ἔχεισθαι ὑπολήψεις. Pariter congruentiae illud principium reiecere Flussas Candalla, Peletarius, Thomas Simpson., qui superpositionem unius figurae super alteram mere mechanicam (a mechanical consideration) esse dicit (Elem. of Geometry, London 1800. p. 255.), aliique. At iure his dudum regessere Clavius, Savilius, Scarburgh., Playfair., aliique, non manu sed mente tantum fieri illas figurarum superpositiones, nec nisi a notione aequalitatis pendere. Cf. quae e Savilio ad Prop. 2. attulimus. Scite Wallisius ait (Oper. Mathem. T. II. p. 668. : „Si ita sint comparati circulus arcticus et antarcticus, ut si centrum centro accommodari intelligatur, et planum plano, reliqua congruerent puncta: erunt illi (per ἐφαρμογὴν) aequales, utut alter alteri non admoveatur, sed toto coslo distent.“ Playfair. tamen iniustis his cavillationibus eo usque concedit, ut novum axioma sumi posse dicat, huius sententiae: Si duae sint rectae lineae, atque super una earum constituta sit figura quaecunque, super alteram semper constitui

Sint duo triângula $AB\Gamma$, ΔEZ , duo latera AB , $A\Gamma$ duobus lateribus ΔE , ΔZ aequalia habentia, utrumque utrique, nempe latus AB lateri ΔE , latus $A\Gamma$ vero lateri ΔZ , et angulum $B A \Gamma$ angulo $E \Delta Z$ aequalem; dico et basin $B\Gamma$ basi EZ aequalem esse, et triângulum $AB\Gamma$ triângulo ΔEZ aequale fore, et reliquos angulos reliquis angulis aequales fore, alterum alteri, quos aequalia latera subtendunt, angulum nempe $AB\Gamma$ angulo ΔEZ , angulum $A\Gamma B$ vero angulo ΔZE .

Congruente enim triângulo $AB\Gamma$ triângulo ΔEZ , et posito quidem puncto A super punctum Δ , AB vero recta super ΔE ; congruet et punctum B ipsi E , quia est aequalis AB ipsi ΔE ; congruente autem AB

posse figuram alteri aequalem, e quo deinde omnia derivari possint, quae vulgo per superpositionem demonstrantur. At dubito, an hac nimia erga obstrictatores liberalitate status controversiae multum mutatus sit. Alteram enim illam in axioma sumtam priori aequalem figuram clamabunt illi, nihil aliud esse, quam pariter figurae in alium locum translationem. Rectius tamen ille ac Thom. Simpson., qui ne superpositione opus haberet, mavult propositionem hanc quartam inter Axiomata referre. In theorematibus itaque intacta maneat illa linearum et figurarum mente tantum concepta translatio, sine qua simplicissimarum propositionum vix tolerabilis dari posset demonstratio. Caeterum omnes huius propositionis partes diligentissime explicavit Savilius, cuius observationes legere possis etiam in Hauberi Chrest. geometr. p. 181. Huic propositioni sequens addi potest corollarium: Si duo triângula unum quidem angulum utrimque aequalem habeant, et e rectis etiam hunc angulum comprehendentibus una prioris triânguli aequalis sit uni posterioris, altera autem prioris triânguli maior sit altera posterioris, erunt etiam triângula ista inaequalia, et prius qui-

εἶναι τὴν AB τῇ AE ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς AB ἐπὶ τὴν AE , ἐφαρμόσει καὶ ἡ AF εὐθεία ἐπὶ τὴν AZ , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ BAF γωνίαν τῇ ὑπὸ EAZ ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν AF τῇ AZ . Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόκει, ὥστε βάσις ἡ BF ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τοῦ μὲν B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Z , ἡ BF βάσις ἐπὶ τὴν EZ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ BF βάσις ἐπὶ τὴν EZ , καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται ὥστε καὶ ὅλον τὸ ABF τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ AEZ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ABF (τῇ ὑπὸ AEZ , ἡ δὲ ὑπὸ AFB τῇ ὑπὸ AZE .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν πε-

dem maius erit. Cf. Pfeiderer, in Haub. Chrest. p. 301. Et multo magis, si utrumque crus angulum illum comprehendens in uno triangulo maius sit, quam in altero, illud etiam triangulum maius erit, quam hoc. — Hac occasione de Corollariis universim notari potest, Euclidem ipsum paucissima, aut, ut Austin. putat p. 16., forte ne ullum quidem addidisse, quod nempe brevitati consuleret, nec nisi iis, quae maxime ad scopum suum facerent, immorari vellet. Commentatores autem, ut qui alium scopum haberent, plura subinde addiderunt, e quibus si potissima seligeremus, lectoribus haud ingratum fore putavimus. Graeci ea *πορίσματα* vocabant, quam vocem tamen diversa nonnunquam significatione adhibere solebant. Erat nempe Porisma, quod et Proclus innuit (τὸ πόρισμα λέγεται

ipsi AE , congruet et AF recta ipsi AZ , quia aequalis est angulus BAF ipsi EAZ ; quare et punctum F puncto Z congruet, quia aequalis rursus est AF ipsi AZ . At etiam punctum B puncto E congruebat; quare basis BF basi EZ congruet; si enim, puncto quidem B ipsi E congruente, puncto autem F ipsi Z , basis BF ipsi EZ non congruat, duae rectae spatium continebunt, quod fieri nequit (Post. 6. vel Ax. 12.). Congruet igitur basis BF basi EZ , et aequalis ei erit; quare et totum triangulum ABF toti AEZ triangulo congruet, et aequale ei erit, et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et aequales eis erunt, angulus nempe ABF angulo AEZ , angulus autem AFB angulo AZE .

Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, et angulum angulo aequalem habeant, ab aequalibus lateribus contentum; et basin basi aequalem habebunt, et triangu-

καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πορίσματα) singulare aliquod problematum genus, vel, ut Pappus in Collect. Mathem. Libr. VII. Praef. ait, mediae quasi naturae inter theoremata ac problemata, quod idem etiam Proclus asserit ad I. 15., atque porismata hoc sensu sumta tribus libris exposuerat Euclides, quos temporum iniuria deperditos restituere conatus est Rob. Simson. Alio autem sensu porisma in elementis sumitur, ubi plerumque significat propositiones, quaecum in ipso demonstrationis cursu se ultro offerrent, (ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναφανῇ θεώρημα, μὴ προθεσμένων ἡμῶν, Proclus ait p. 59.) absoluta demonstratione separatim enunciantur, unde etiam Proclo auctore l. c. porisma nomen accepit, ὥσπερ τι κέρδος ὃν τῆς ἐπιστημονικῆςδείξεως πάρεργον.

ριχομένην καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. "Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

"Εστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ABΓ$, ἴσην ἔχον τὴν AB πλευρὰν τῇ $ΑΓ$ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλησθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς AB , $ΑΓ$ εὐθεῖαι αἱ $ΒΔ$, $ΓΕ$. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΒΔ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΕ$.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς $ΒΔ$ τυχὸν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἀφ' ἡγήσθω ἀπὸ τῆς μειζονος τῆς $ΑΕ$ τῇ ἐλάσσονι τῇ AZ ἴση ἡ AH , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ZΓ$, HB εὐθεῖαι.

"Επεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν AZ τῇ AH , ἡ δὲ AB τῇ $ΑΓ$, δύο δὴ αἱ ZA , $ΑΓ$ δυεὶ ταῖς HA , AB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ZAH . βάσις ἄρα ἡ $ZΓ$ βάσει τῇ HB ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $AZΓ$ τρίγωνον τῷ AHB τρι-

Cf. p. 80. Nos sensu paulo generaliore omnia, quae e demonstratione sponte sine longis demonstrationum ambagibus fluunt, Corollaria aut Consectaria dicere solemus, nonnunquam etiam generalius haec atque alia similia Observationes vocabimus.

PROPOSITIO V.

Obs. 1. Savilius observat, ἰσοσκελῶν τριγώνων non de pluribus triangulis aequicruris intelligendum esse, sed idem

lum triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO V. (Fig. 5.)

Isoscelium triangulorum anguli ad basin aequales inter se sunt; et productis aequalibus rectis, anguli sub basi aequales inter se erunt.

Sit triangulum isosceles $AB\Gamma$, habens latus AB aequale lateri $A\Gamma$, et producantur rectae BA , ΓE in directum rectis AB , $A\Gamma$ (Post. 2.); dico angulum $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ aequalem esse, ΓBA vero ipsi $B\Gamma E$.

Sumatur enim in BA quodlibet punctum Z , et auferatur a maiore AE minori AZ aequalis recta AH (Prop. 3.), et iungantur $Z\Gamma$, HB rectae.

Quoniam igitur AZ aequalis est rectae AH , AB vero rectae $A\Gamma$, duae igitur ZA , $A\Gamma$ duabus HA , AB aequales sunt, utraque utrique, et angulum communem continent ZAH ; basis igitur $Z\Gamma$ basi HB aequalis est, et triangulum $AZ\Gamma$ triangulo AHB

esse ac *ἐκάστων τριγώνων ἰσοσκελῶν*. Aliam huius propositionis demonstrationem Proclo referente Pappus dedit in hunc fere modum: Quod si hoc unum triangulum aequicrurum $AB\Gamma$ (Fig. 5.) bis positum, adeoque in $\alpha\beta\gamma$ repetitum animo concipiamus, erit non tantum $AB = \alpha\beta$, $A\Gamma = \alpha\gamma$; verum etiam, ob $\alpha\beta = \alpha\gamma$, habebimus quoque (Ax. 1.) $AB = \alpha\gamma$, $A\Gamma = \alpha\beta$. Poterit itaque triangulum $\alpha\beta\gamma$ triangulo $AB\Gamma$ superponi, ita, ut puncta A et

γωνίᾳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκάτερα ἑκάτερα, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἢ μὲν ὑπὸ $ΑΓΖ$ τῇ ὑπὸ $ΑΒΗ$, ἢ δὲ ὑπὸ $ΑΖΓ$ τῇ ὑπὸ $ΑΗΒ$. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ $ΑΖ$ ὅλη τῇ $ΑΗ$ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΑΓ$ ἐστὶν ἴση,, λοιπὴ ἄρα ἡ $ΒΖ$ λοιπῇ τῇ $ΓΗ$ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ΖΓ$ τῇ $ΗΒ$ ἴση· δύο δὴ αἱ $ΒΖ$, $ΖΓ$ δυσὶ ταῖς $ΓΗ$, $ΗΒ$ ἴσαι εἰσιν, ἑκάτερον ἑκάτερον, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΖΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΗΒ$ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ $ΒΓ$ καὶ τὸ $ΒΖΓ$ ἄρα τρίγωνον τῷ $ΓΗΒ$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκάτερα ἑκάτερον, ὅφ' ὥς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΖΒΓ$ τῇ ὑπὸ $ΗΓΒ$, ἢ δὲ ὑπὸ $ΒΓΖ$ τῇ ὑπὸ $ΓΒΗ$. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ $ΑΒΗ$ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ $ΑΓΖ$ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ $ΓΒΗ$ τῇ ὑπὸ $ΒΓΖ$ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΒΓ$ τῇ ὑπὸ $ΗΓΒ$ ἴση, καὶ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἄμφω ἰσοσκελῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

α , anguli $ΒΑΓ$, $\gamma\beta$; rectae $ΑΒ$, $\alpha\gamma$; $ΑΓ$, $\alpha\beta$, adeoque puncta $Β$, γ ; et $Γ$, β coincidunt; aequalis igitur erit angulus $Β$ angulo γ . At quum angulus γ idem prorsus sit, ac angulus $Γ$ ex hypothesis, erunt (Ax. 1.) anguli $Β$, $Γ$ aequales. Alii alias dedere demonstrationes, quae tamen omnes, quamvis simplices, Euclidiae cedere videntur.

Coroll. Triangula aequilatera sunt etiam aequiangula.

Schol. A Thaletē Milesio hoc theorema inventum esse Proclus refert.

Obs. 2. Scarburgh. p. 61. posteriorem huius propositionis partem, qua anguli sub basi aequales esse dicuntur, non

aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt, $\angle ATZ$ quidem angulo $\angle ABH$, $\angle AZT$ vero angulo $\angle AHB$ (Prop. 4.). Et quoniam tota AZ toti AH est aequalis, quarum AB rectae AT est aequalis, reliqua igitur BZ reliquae ΓH est aequalis (Ax. 3.). Ostensa est autem et ZT rectae HB aequalis: duae igitur BZ , ZT duabus ΓH , HB aequales sunt, utraque utrique, et angulus BZT angulo ΓHB aequalis, et basis eorum communis BT ; et BZT igitur triangulum ΓHB triangulo aequale erit, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est angulus ZBT angulo HTB , angulus autem BTZ angulo ΓBH . Quoniam igitur totus angulus ABH toti angulo $\angle ATZ$ ostensus est aequalis, quorum ΓBH angulo BTZ aequalis; reliquus igitur $\angle ABT$ reliquo $\angle ATB$ est aequalis (Ax. 3.), et est ad basin trianguli ABT ; ostensus est autem et angulus ZBT angulo HTB aequalis, et sunt sub basi; isoscelium igitur triangulorum etc.

esse ab Euclide profectam putat, sed assutam ab aliquo, qui animadverterit, demonstrare Euclidem triangulorum istorum sub basi constitutorum aequalitatem. Neque enim unquam hac angulorum sub basi aequalitate uti Euclidem in sequentibus propositionibus. Cui quidem argumento opponere liceat, ad plenam certe Prop. 7. demonstrationem opus esse hac posteriore parte Propositionis 5., ut Rob. Simson. et Peyrard. in Praefatione p. XVIII. monent. Coëtsius (Euclid. Elem. Lugd. Bat. 1692. p. 46.) hanc propositionem ex I. 9. et I. 4. demonstrat. At, quum I. 9. pendeat etiam apud Coëtsium ab I. 8. haec a I. 7. et haec denique a I. 5., in circulum incidere videtur,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ $ABΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ AB πλευρᾷ τῇ $ΑΓ$ ¹⁾ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΑΓ$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ AB , καὶ ἀφηρόσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάσσονι τῇ $ΑΓ$ ἴση ἡ $ΔB$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΓ$.

1) Hic et in linea sequente edit. Oxon. primo loco ponit rectam $ΑΓ$, secundo rectam AB : et quamvis nihil prorsus intersit, quo ordine hae rectae aequales nominentur, veri tamen simile fuerit, Euclidem, qui primo nominasset angulum $ABΓ$, primo etiam loco posuisse rectam hunc angulum subtendentem i. e. rectam $ΑΓ$. Cum Peyrardo tamen consent. Cod. a. et ed. Basil.

quamvis in Praefat. contrarium asserat, et excusare istam licentiam aliqui tentarint. Cf. Hauber. Chrest. Geom. p. 204. Eadem demonstratione utitur Van Swinden. Anfangsgr. der Messkunde, p. 37. et Angel. de Marchettis p. 15.

PROPOSITIO VI.

Obs. Propositio sexta conversa est quintae. Propositiones nempe primariae, earumque conversae ita ad se invicem se habent, ut suppositio prioris fiat conclusio posterioris, et vice versa, vel, si plures illa habeat suppositiones, una suppositionum illius fiat huius conclusio. Ita v. g. hic in Prop. 5. sumebatur, triangulum esse aequicrurum, et inde concludebatur aequalitas angulorum ad basin, in Prop. 6. contra sumitur haec ipsa angulorum aequalitas, et inde concluditur aequalitas laterum his angulis oppositorum. Quamvis enim Prop. 5. pariter ac 6. categorice expressae sint, facile tamen utraque etiam hypothetice exprimi potest. Vide Haub. Chrest. Geom. p. 196. sq.

PROPOSITIO VI. (Fig. 6.)

Si trianguli duo anguli aequales inter se sunt, et aequales angulos subtendentia latera aequalia inter se erunt.

Si triangulum $AB\Gamma$ aequalem habens angulum $AB\Gamma$ angulo ATB ; dico et latus AB lateri AT esse aequale.

Si enim inaequalé est latus AB lateri AT , unum eorum maius est. Sit maius AB , et auferatur a maiore AB minori AT aequalis AB (Prop. 3.), et iungatur AT .

Plura adhuc conversionum ($\alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\omicron\phi\eta\varsigma$) genera recensent Proclus et Savilius. Quum vero non, ut Peletarius vult p. 30., conversae propositionum in universum sint verae, nova illas semper demonstratione egere patet. Ea plerumque, atque in hac etiam Prop. 6., ita instituitur, ut doceatur, contrarium si quis asserere velit, absurdas consequentias elabi non posse. Hoc demonstrationis genus *indirectum* vel *apagogicum* vocare solent ($\alpha\pi\alpha\gamma\omega\gamma\eta\ \epsilon\iota\varsigma\ \alpha\delta\upsilon\nu\alpha\tau\omicron\nu$), quod, quamvis nonnulli subdubitare videantur, non minus certum est ac demonstratio directa; ex veris enim falsa iusta ratiocinatione consequi nunquam possunt. Nec sine causa dixere aliqui, esse apagogicam demonstrationem quoddam analyseos theoreticae genus. Cf. Kliigel. (Wörterb. ad vocem *Analysis* P. I. p. 90.). Et Scarburgh. hanc deductionem ad absurdum *Analysin destructivam* vocat p. 62., quod nempe illa per certa ratiocinia falsam suppositionem, quae initio sumta erat, destruat. Cf. Borellius p. 1. et Hauber. Chrest. Geom. p. 210. sq. Conversas, etiam ubi locum habent, non omnes affert Euclides, sed eas saltem, quas in propositionibus sequentibus usui fore viderat; nos tamen, quantum fieri potest, reliquas etiam, quae alicuius momenti sunt, notabimus, quod iam a Clavio factum videmus. Neque tamen necesse est, conversam semper, nulla alia interposita, ordine

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ AG , κοινὴ δὲ ἡ $BΓ$, δύο δὲ αἱ AB , $BΓ$ δυοὶ ταῖς AG , $ΓB$ ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ AGB ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ AG βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ AGB τριγώνῳ ἴσον ἐστί, τὸ ἐλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ AB τῇ AG ἴση ἄρα. Ἐὰν ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα οὐ συσταθή-

excipere eam, cuius sit conversa. Sic v. g. lib. I. 8. et 26. conversae sunt Prop. 4. Saepe quippe ad demonstrandam conversam alias adhuc propositiones ante demonstrari necesse est. Caeterum, quum duae partes sint in conclusione Prop. 5., nempe 1.) in triangulo aequicruro angulos ad basin, 2.) in eodem triangulo etiam angulos sub basi aequales esse, de utriusque conversione cogitari potest. Ac prioris quidem conversam exhibet Prop. 6. Euclidis. Posterior conversa ita habebit: Si trianguli $ABΓ$ (Fig. 7.), anguli $ΓBA$, $ΓΓE$ sub basi aequales fuerint, erunt etiam latera AB , AG aequalia. Sumantur enim $BZ = ΓH$, ducanturque rectae BH , $ZΓ$, eruntque in triangulis $ZBΓ$, $HΓB$ rectae ZB , $ΓH$ aequales ex constructione, et quum recta $BΓ$ communis sit utrique triangulo, et angulus $ΓBA$ (vel $ΓBZ$) ex hypothesis aequalis sit angulo $ΓΓE$ (vel $ΓΓH$) erit ex Prop. 4. $ZΓ = BH$, et angulus $BZΓ = BHΓ$, et triangulum $BZΓ = BHΓ$. Iam dico, rectas AZ , AH esse aequales. Quodsi enim inaequales sint, erit alterutra v. c. ZA maior. Sumatur $ZΘ = AH$, ductaque $ΘΓ$, erunt in triangulis $ΘZΓ$, BHA , ex demonstratis $ZΓ = BH$; $ZΘ = AH$ ex hypoth. et angulus $ΘZΓ = BHA$ ex demonstrat. Hinc ex Prop. 4. erit triangulum $ZΘΓ = HAB$. Unde, ablatis

Quoniam igitur aequalis est AB ipsi AT , communis autem BT , duae igitur AB , BT duabus AT , TB aequales sunt, utraque utrique, et angulus ABT angulo ATB est aequalis; basis igitur AT basi AB aequalis est, et ABT triangulum ATB triangulo aequale erit (Prop. 4.), minus minori, quod est absurdum (Ax. 9.); non igitur inaequalis est recta AB rectae AT ; ergo aequalis. Si igitur trianguli etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 8.)

Super eadem recta, duabus iisdem rectis aliae duae rectae aequales utraque utrique non constituentur, ad

aequalibus triangulis BZT , BHT erunt (Ax. 3.) reliqua, triangulum nempe $BT\theta = ABT$ i. e. pars aequalis erit toti, quod fieri nequit (Ax. 9.). Aequales igitur sint AZ , AH necesse est. A quibus si auferantur BZ , TH , quae ex hypothesi aequales sunt, reliqua aequalia erunt (Ax. 3.), nempe recta $AB = AT$. Aliam directam demonstrationem habet Proclus, dunt, ducta ZH , ostendit, angulos AZH , AHZ esse aequales, unde res ex I. 6. patet. Non ut conversam, sed ut primariam propositionem 6. demonstrat Coësius l. c. p. 50. et Van Swinden. l. c. p. 36. ex I. 9. et I. 26., ubi, quum hae propositiones non pendeant a I. 6., non idem monendum est, quod in propositione praecedente. Caeterum, quod monet Hauber. Chrest. Geom. p. 219. et Pflaiderer. ibid. p. 303. etiam Prop. 6. simili ratione, ac in Prop. 5. a nonnullis factum est, ex ipso principio congruentiae, si nempe idem triangulum bis positum sumatur, demonstrari potest.

Cor. Triangula aequiangula sunt etiam aequilatera.

PROPOSITIO VII.

Obs. Recte Savilius monet, propositionem hanc aliquanto obscurius expressam esse, unde paulo aliter Rob. Simsoni fere modo efferri poterit ita: Super eadem basi, atque ad easdem eius partes nequeunt duo triangula constitui, ita ut

σονται, πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB , δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς AF , GB ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ AA , AB ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρα συνεστώσαν, πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ τῷ τε F καὶ A , ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ F , A , τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ A , B ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν FA τῇ AA , τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσιν ἀντὶ τὸ A , τὴν δὲ GB τῇ AB , τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσιν ἀντὶ τὸ B καὶ ἐπεξεύχθω ἡ FA ¹⁾.

1) Peyrard. addit: καὶ αἱ BF , BA ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ E , Z . Duas etiam figuras describit, quas ad Commentarium dedimus, et in ipsa etiam demonstratione pro nonnullis litteris substituit alias. Nos autem sine codd. auctoritate nihil hic mutare volumus. Caeterum vide Commentarium.

latera ad eosdem baseos terminos vergentia aequalia sint. Caeterum conferatur Hauber. in Chrest. Geom. p. 222. sqq. Si enim fieri potest, sint (Fig. 8. 9.) triangula ABF , ABA ita comparata, ut $AF=AA$, et $BF=BA$, eritque vel vertex neutrius trianguli intra reliquum triangulum, vel vertex alterius intra alterum triangulum, vel vertex unius in latere alterius ipso aut producto in loco ab altero vertice diverso. Praeter eum casum, quo vertex neutrius trianguli est intra reliquum triangulum, qui solus in Graecis, quos habemus, Euclidis codicibus demonstratus est, etiam reliquos casus demonstrandos esse iam Proclus innuit, et eius casus, quo vertex unius trianguli est intra alterum, demonstrationem dedit, quam pariter habent Campanus, Savilius, Clavius et Robertus Simson. In ea nempe (Fig. 9.) aequalitas angulorum AAF , AGA , atque exinde inaequalitas angulorum ZAF , EFA infertur, qui tamen ex parte posteriore Prop. 5. aequales esse debebant. Hunc

aliud et aliud punctum ad easdem partes, ita ut eodem terminos habeant, quos primae rectae.

Si enim fieri potest, super eadem recta AB duabus iisdem rectis AF , FB , aliae duae rectae AA , AB aequales utraque utrique constituentur ad aliud et aliud punctum Γ et Δ , ad easdem partes Γ , Δ , et eosdem terminos habentes A , B ; ita ut aequalis sit quidem ΓA ipsi AA , eundem terminum habens, quem illa, punctum A , FB vero ipsi AB , eundem terminum habens, quem illa, punctum B ; et iungatur ΓA .

tamen casum ab Euclide non omissum, nec Euclidem ipsum mutilatum, sed librariorum tantum culpa alteram figuram omissam esse asserit Peyrard. Tom. I. Praefat. p. XVIII. et, hac figura restituta, et rectis duabus productis, ne ulla quidem voce mutata, perfectam demonstrationem se restituisse ait. Iubet nempe (Fig. 10.) rectas BI , BA producere, ubi deinde demonstratio, paucis tantum litteris mutatis, ad utrumque casum applicari potest, nominatim itaque ad eum quoque, quo vertex Γ unius trianguli est intra alterum triangulum ABB . Ita nempe procedit, postquam ostensus fuerat angulus $\Gamma A A = \angle A A \Gamma$: „Quare angulus $\angle A A \Gamma$ maior est angulo $\angle A \Gamma E$, multo igitur $\angle A A Z$ maior est ipso $\angle A \Gamma E$. Rursus, quoniam aequalis est FB ipsi AB , aequalis est angulus $\angle A A Z$ angulo $\angle A \Gamma E$, quod fieri nequit.“ Et haec quidem satis ingeniose. Utrum tamen Euclides ipse rem ita absolverit, dubitari poterit, quod, ut VV. DD. de Lambre et Prony monent p. XXXVII., vix credi potest, librariorum non integram tantum figuram omisisse, sed lineas etiam, quas productas invenerint, non produxisse, et verba, quae in ipso textu eas produci iuberent, omisisse. Accedit, quod in versione Arabica, tam ea, ex qua Campanus transtulisse creditur, quam in Nassireddini typis impressa, et cuius quoad hunc locum versionem Gallicam, a Sedillot. Profess. Biblioth. Reg.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΔ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ τῇ ὑπὸ $ΑΔΓ$. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ τῆς ὑπὸ $ΔΓΒ$. πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΔΒ$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΔΓΒ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΒ$ τῇ $ΔΒ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΔΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΓΒ$. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς $ΑΒ$, $ΑΓ$ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς $ΔΕ$, $ΔΖ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν $ΑΒ$ τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$. ἐγέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴσην λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἐστὶν ἴση.

Paris. factam, Peyrardus in Praefat. Tom. II. p. XLII. exhibet, quamvis caeterum non consentiant, casus secundus nominatim demonstratus est.

Is denique casus, quo quis sumere possit, verticem unius trianguli esse in latere aliquo alterius ipso vel producto facilitam habet demonstrationem ex eo, quod totum non aequale esse potest parti. Caeterum Pappus, et ex eo Savilius alique observant, hanc propositionem, quod raro fiat, in propositionibus geometricis, negative effeiri, nec esse nisi lemma ad I. 8. Atque huic ipsi usui, nempe ut prope lemmatibus inserviant aliis propositionibus, saepius inservire propositiones negative expressas, v. c. III. 23. coll. III. 24., observat Hauber. Chrest. p. 230.

Quoniam igitur aequalis est AF ipsi AA , aequalis est et angulus ATA ipsi AAF (Prop. 5.); maior igitur AAF ipso ATB ; multo igitur TAB maior est ipso ATB . Rursus, quoniam aequalis est TB ipsi AB , aequalis est et angulus TAB angulo ATB . Ostensus est autem ipso et multo maior, quod fieri nequit. Non igitur super etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 11.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, habeant autem et basin basi aequalem; et angulum angulo aequalem habebunt, ab aequalibus rectis contentum.

Sint duo triangula ABT , AET duo latera AB , AT duobus lateribus AE , AT aequalia habentia, utrumque utrique, AB quidem ipsi AE , AT vero ipsi AT ; habeat autem et basin BT basi ET aequalem; dico et angulum BAT angulo EAT esse aequalem.

Cor. 1. Duo circuli e duobus punctis descripti, ex eadem parte rectae, quae centra eorum coniungit, non nisi in unico puncto se invicem secare possunt. — Savilius ex hoc corollario pro axioma sumto vicissim propositionem hanc I. 7. derivavit.

Cor. 2. Non itaque nisi unum triangulum aequilaterum ex eadem parte rectae alioquin datae describi potest.

Haec duo corollaria sunt ex schedis Pfeidereri manuscriptis, e quibus saepius hausimus, et quae iam impressae etiam leguntur in Hauberi Chrest. p. 304.

PROPOSITIO VIII.

Obs. Est haec propositio una e conversis quartae. Caeterum non anguli tantum aequalibus lateribus comprehensi,

Ἐφαρμοζομένου γάρ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου ἐπὶ τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν B σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον, τῆς δὲ $ΒΓ$ εὐθείας ἐπὶ τὴν EZ , ἐφαρμόσει καὶ τὸ $Γ$ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z , διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν $ΒΓ$ τῇ EZ · ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς $ΒΓ$ ἐπὶ τὴν EZ , ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ $ΒΑ$, $ΓΑ$ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ $ΒΓ$ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ $ΒΑ$, $ΑΓ$ πλευραὶ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὥς αἱ $ΕΗ$, $ΗΖ$, συσταθήδονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυοὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρα, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δὲ οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς $ΒΓ$ βάσεως ἐπὶ τὴν EZ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ $ΒΑ$, $ΑΓ$ πλευραὶ ἐπὶ τὰς $ΕΔ$, $ΔΖ$. Ἐφαρμόσουσιν ἄρα ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

sed reliqua etiam omnia, nominatim ipsa triangula utrimque erunt aequalia, quod vel ex congruentia, vel ex Prop. 4. patet. Euclides id brevitatis studio omisit, ut Savilius observat. Notandum tamen videtur, ne, si similis casus obvenierit, a Prop. 8. semper denuo ad quartam recurrendum vel aliter res expedienda sit. Aliam huius propositionis demonstrationem, ut Proclus refert, Philo Byzantinus dedit, quae eo redit, ut duo triangula, quorum aequalitas demonstranda est, ad diversas eiusdem basis partes constituentur, et vertices eorum recta iungantur, quae tum bina triangula aequicrura efficiet, quorum anguli ad basin

Congruente enim $AB\Gamma$ triangulo ipsi ΔEZ triangulo, et posito puncto B super punctum E , recta vero $B\Gamma$ super EZ , congruet et punctum Γ ipsi Z , quia aequalis est $B\Gamma$ ipsi EZ ; congruente igitur $B\Gamma$ ipsi EZ , congruent et BA , ΓA ipsis EA , AZ . Si enim basis quidem $B\Gamma$ basi EZ congruat, latera vero BA , $A\Gamma$ ipsis EA , AZ non congruant, sed situm mutant ut EH , HZ , constituentur super eadem recta duabus rectis aliae duae rectae aequales, utraque utrique, ad aliud et aliud punctum, ad easdem partes, eosdem terminos habentes. Non autem constituuntur (Prop. 7.). Congruente igitur basi $B\Gamma$ basi EZ , non possunt non congruere etiam latera BA $A\Gamma$ lateribus EA , AZ . Congruent igitur; quare et angulus $B\Gamma A$ angulo EAZ congruet, et aequalis ei erit. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 12.)

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

aequales erunt, et qui vel ipsi, vel quorum aequalis summa aut differentia efficiet id, quod propositum erat. Eam ipsam demonstrationem habent etiam Borellius p. 25. sqq. Kaestnerus Anfangsgr. der Arithm. u. Geom. P. I. Prop. 4. Karsten. Mathes. Theor. Univers. §. 75. Thom. Simpson. Elem. of. Geom. B. I. Th. XIV. aliique. Epicrisin illius a Pfeiderero et Haubero factam vide in Hauberi Chrest. p. 505. et 235. sqq.

PROPOSITIO IX.

Obs. Proclus monet, demonstrandum etiam esse, verticem trianguli aequilateri intra datum angulum $B\Gamma A$ situm

"Εστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ¹⁾ ἐπὶ τῆς $ΑΒ$ τυχὸν σημεῖον τὸ $Δ$, καὶ ἀφηρόσθω ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῇ $ΑΔ$ ἴση ἡ $ΑΕ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΕ$, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς $ΔΕ$ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $ΔΕΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΖ$. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς $ΑΖ$ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΑΕ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΑΖ$, δύο δὴ αἱ $ΔΑ$, $ΑΖ$ δυοὶ ταῖς $ΕΑ$, $ΑΖ$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ $ΔΖ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴση ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΑΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΑΖ$ ἴση ἐστὶν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς $ΑΖ$ εὐθείας. "Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

"Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ $ΑΒ$. δεῖ δὴ τὴν $ΑΒ$ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

1) Peyrard. ex cod. a: addit γὰρ, quod omittunt edd. Basil. et Oxon.

esse. Quod ita demonstrabitur. Quodai (Fig. 13.) vertex trianguli aequilateri super $ΔΕ$ constructi non sit intra angulum $ΒΑΓ$, erit vel in uno crurum anguli, vel extra angulum. Sit, si fieri potest, punctum $Η$ in alterutro crurum v. c. in $ΑΓ$ vertex trianguli aequilateri super $ΔΕ$ constituti, eritque angulus $ΕΔΗ=ΔΕΗ$ (Prop. 5.), adeoque angulus $ΒΔΕ>ΔΕΓ$. At, quum ex construct. sit $ΔΔ=ΔΕ$, erit etiam $ΒΔΕ=ΔΕΓ$ (I. 5.), quod fieri nequit. Et similis erit demonstratio verticem trianguli nec in puncto aliquo $Θ$ extra angulum $ΒΑΓ$ esse posse.

Sit datus angulus rectilineus BAT ; oportet ipsum bifariam secare.

Sumatur in AB quodlibet punctum A , et auferatur ab AT ipsi AA aequalis AE , et iungatur AE , et constituatur super AE triangulum aequilaterum $A EZ$ (Prop. 1.), et iungatur AZ ; dico angulum BAT bifariam secari a recta AZ .

Quoniam enim aequalis est AA ipsi AE , communis autem AZ , duae AA , AZ duabus EA , AZ aequales sunt, utraque utrique, et basis AZ basi EZ aequalis est; angulus igitur AAZ angulo EAZ aequalis est (Prop. 4.).

Datus igitur angulus rectilineus BAT bifariam secatur a recta AZ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO X. (Fig. 14.)

Datam rectam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata AB ; oportet rectam terminatam AB bifariam secare.

Cor. Manifestum est, angulum ita bisectum denuo bisecari, adeoque angulum primo propositum in quatuor, octo, sedecim etc. partes aequales, nempe in omnes eas partes aequales dividi posse, quarum numerus exprimi potest numero 2 ad dignitatem quamcunque n evecto i. e. numero 2^n .

PROPOSITIO X.

Obs. Proclus refert, Apollonium Pergaeum datam rectam terminatam bisecare, ducta recta per puncta intersectionum duorum circulorum, qui e punctis datae rectae extremis, intervallo isti rectae aequali descripti sunt; quae ratio quoad rem ipsam haud multum differt ab Euclideae, quam tamen

Συνεστιάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $ABΓ$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία δίχα τῇ $ΓΔ$ εὐθείᾳ· λέγω, ὅτι ἡ AB εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΔ$, δύο δὲ αἱ $ΑΓ$, $ΓΔ$ δυοὶ ταῖς $ΒΓ$, $ΓΔ$ ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ $ΑΔ$ βάσει τῇ $ΒΔ$ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB δίχα τέτμηται κατὰ τὸ $Δ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιά.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ $Γ$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ $Γ$ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

longe praeferat Proclus. Cf. Hauber. Chrest. p. 241. Patet etiam, rectam $ΓΔ$ (Fig. 14.), quae ex constructione rectam AB bisecat, ei ad angulos rectos insistere. Caeterum idem de divisione rectae notandum est, quod in Cor. praecedentis de divisione anguli notavimus. Quod reliquum est, infra ad VI. 10., quin iam I. 34. Cor. 23. ostendetur, rectam in quolibet partes aequales ope geometriae elementaris dividi posse, quod in angulo fieri nequit.

Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο XI.

Oba. Pro eo casu huius propositionis, quo punctum, e quo perpendicularis ad rectam datam erigi debet, est extremum huius rectae, Proclus solutionem habet satis facilem, quae etiam est apud Clavius, pluresque aliae dantur, partim

Constituatur super ipsa triangulum aequilaterum $AB\Gamma$ (Prop. 1.), et secetur angulus ATB bifariam a recta ΓA (Prop. 9.); dico rectam AB bifariam secari in puncto A .

Quoniam enim aequalis est AT ipsi ΓB , communis autem ΓA , duae AT , ΓA duabus BT , ΓA aequales sunt, utraque utrique, et angulus $AT A$ angulo $BT A$ aequalis est; basis igitur AA basi BA aequalis est (Prop. 4.).

Ergo data recta terminata AB bifariam secatur in puncto A . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XI. (Fig. 15.)

Datae rectae, a puncto in ea dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit quidem data recta AB , datum vero punctum in ea Γ ; oportet a puncto Γ rectae AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.

e propositionibus, quae subsequuntur, demum demonstrandae. Vid. infra I. 32. Cor. 11.

Cor. 1. Ex hac propositione Rob. Simson. monet, facile consequi, duas rectas segmentum commune non habere. Quodsi enim fieri posset, ut (Fig. 16.) rectae $AT\Theta$, ATE segmentum AT commune habere possent, erigatur (I. 11.) in Γ ad AT perpendicularis ΓZ , et ostendetur, ut in nostra propositione, tam $ZTA = ZTE$, quam $ZTA = ZT\Theta$, foret itaque $ZTE = ZT\Theta$ pars toti, q. e. a. (Ax. 9.) Notandum tamen, hoc ipsum corollarium potius axiomatis loco sumendum esse, quum iam in I. Prop. 1. tacite sumatur, unde illud ut Ax. 10. a supra posuimus.

Cor. 2. Datae rectae AE (Fig. 17.) ad datum in ea punctum Γ non nisi una recta ΓZ ad rectos angulos duci potest. Sit enim, si fieri potest, praeter ΓZ etiam ΓH rectae AE ad

Ειλήφθω ἐπὶ τῆς $ΑΓ$ τυχὸν σημεῖον τὸ $Δ$, καὶ κείσθω τῇ $ΓΔ$ ἴση ἡ $ΓΕ$, καὶ συνεστιάτω ἐπὶ τῆς $ΔΕ$ τρίγωνον ἰσοσκελερον τὸ $ΖΔΕ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΖΓ$. λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $ΑΒ$, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ $Γ$, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦται ἡ $ΖΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΓΕ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓΖ$, δύο δὴ αἱ $ΔΓ$, $ΓΖ$ δυοὶ ταῖς $ΕΓ$, $ΓΖ$ ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ $ΔΖ$ βάσει τῇ $ΖΕ$ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΓΖ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΓΖ$ ἴση ἐστὶ, καὶ εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΔΓΖ$, $ΖΓΕ$.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $ΑΒ$, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ $Γ$, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦται ἡ $ΖΓ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐπὶ τὴν δοθείσαν εὐθείαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

rectos angulos, eritque $ΔΓΗ=ΗΓΕ$ (Def. 10.), adeoque $ΔΓΗ<ΖΓΕ$ (Ax. 9.), et multo magis $ΔΓΖ<ΖΓΕ$. At quum etiam $ΖΓ$ ad angulos rectos sit rectae $ΔΕ$ (ex hypoth.), erit etiam $ΔΓΖ=ΖΓΕ$ (Def. 10.), quod est absurdum.

PROPOSITIO XII.

Obs. Demonstrandum erat ante omnia circulum centro $Γ$, intervallo $ΓΔ$, descriptum secare rectam $ΑΒ$ in duobus punctis $Η$ et $Ε$. Quod ita fiet. Quum puncta $Γ$ et $Δ$

Sumatur in AF quodlibet punctum A , et ponatur ipsi FA aequalis FE (Prop. 3.), et constituatur super AE triangulum aequilaterum ZAE (Prop. 1.) et iungatur ZF ; dico datae rectae AB a dato in ea puncto F , ad rectos angulos rectam lineam ductam esse ZF .

Quoniam enim aequalis est FA ipsi FE , communis vero FZ , duae AF , FZ duabus EF , FZ aequales sunt, utraque utrique, et basis AZ basi ZE aequalis est (Prop. 8.), et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est (Def. 10.); rectus igitur est uterque ipsorum AFZ , ZFE .

Ergo datae rectae AB a dato in ea puncto F , ad rectos angulos recta linea ducta est FZ . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XII. (Fig. 18. a.)

Super datam rectam infinitam, a dato puncto, quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

ex constructione sint e diversis rectae AB partibus, ducta FA secabit rectam AB in puncto aliquo K (Ax. 15.). Et quum punctum K in recta FA , adeoque intra circulum centro F intervallo FA descriptum positum sit, recta AKB , quae per hoc punctum K i. e. intra circulum transit, necessario secabit circulum in duobus minimum punctis H et E (Ax. 13.). At nec in pluribus quam duobus punctis rectam AB et circulum descriptum se invicem secare Proclus demonstrare tentat in hunc fere modum. Secet (Fig. 18. b. et

E

"Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεία ἄπειρος ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ · δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν ἄπειρον τὴν AB , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ , διαστήματι δὲ τῷ $\Gamma\Delta$, κύκλος γεγράφθω ὁ EZH , καὶ τετμήσθω ἡ EH εὐθεῖα διχα κατὰ τὸ Θ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΓH$, $\Gamma\Theta$, ΓE εὐθεῖαι· λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν ἄπειρον τὴν AB , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἔσται ἡ $\Gamma\Theta$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ ΘE , κοινὴ δὲ ἡ $\Theta\Gamma$, δύο δὴ αἱ ΘH , $\Theta\Gamma$ δυοὶ ταῖς $E\Theta$, $\Theta\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρῃ, καὶ βάσει ἡ ΓH βάσει τῇ ΓE ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Gamma\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Theta\Gamma$ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. "Όταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν· καὶ ἡ ἐφεσθηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

18. c.) si fieri potest, circulus centro Γ radio $\Gamma\Delta$ descriptus rectam AB non tantum, ut in praecedente schemate, in punctis H et B , sed praeterea in alio quodam puncto Δ sito-v. c. inter H et punctum Θ , quod rectam HE bisecat. Circulus itaque sicut ex Δ ad punctum E transeat, rectam $\Gamma\Theta$ ipsam aut productam in puncto aliquo M secabit (Ax. 15.), et ob $\Gamma H = \Gamma E$, erit angulus $\Gamma H\Delta = \Gamma E\Delta$ (I. 5.). Pariter autem, ob $\Gamma H = \Gamma\Delta$, erit $\Gamma H\Delta = \Gamma\Delta H$, et ob $\Gamma E = \Gamma\Delta$, erit $\Gamma E\Delta = \Gamma\Delta E$; itaque $\Gamma\Delta H = \Gamma\Delta E$, adeoque uterque rectus erit (Def. 10.). Ostensus est autem etiam $\Gamma\Theta\Delta$ rectus esse, itaque $\Gamma\Delta\Theta = \Gamma\Theta\Delta$

Sit quidem data recta infinita AB , datum vero punctum Γ , quod non est in ea; oportet super datam rectam infinitam AB , a dato puncto Γ , quod non est in ea, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur ad alteram partem AB rectae quodlibet punctum A , et centro quidem Γ , intervallo autem ΓA , circulus describatur EZH (Post. 3.), et secetur EH recta bifariam in Θ (Prop. 10.), et iungantur ΓH , $\Gamma \Theta$, ΓE rectae (Post. 1.); dico super datam rectam infinitam AB , a dato puncto Γ , quod non est in ea, perpendicularem ductam esse $\Gamma \Theta$.

Quoniam enim aequalis est recta $H\Theta$ rectae ΘE , communis autem $\Theta \Gamma$, duae utique ΘH , $\Theta \Gamma$ duabus $E\Theta$, $\Theta \Gamma$ aequales sunt, utraque utrique, et basis ΓH basi ΓE est aequalis (Def. 15.); angulus igitur $\Gamma \Theta H$ angulo $E \Theta \Gamma$ est aequalis (Prop. 8.); et sunt deinceps. Quando autem recta in rectam insistens, angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est; et recta insistens perpendicularis appellatur ad eam, in quam insistit (Def. 10.).

(Ax. 10.); erit igitur $\Gamma A = \Gamma \Theta$ (I. 6.). At est etiam $\Gamma A = \Gamma M$ (Def. 15.), itaque $\Gamma M = \Gamma \Theta$, pars toti, quod est absurdum (Ax. 9.). Recta igitur AB circulum in tertio aliquo puncto inter H et Θ posito secare nequit. Simili deinde ratione demonstrare conatur, rectam AB nec in puncto Θ rectam HE bisecante circulum secare posse, ac deinde, nec in quatuor punctis rectam AB et circulum se invicem secare etc. Quod quamvis satis ingeniosum sit, facilius tamen demonstratio procedet demum post I. 16. vel I. 17. Cf. Pfeiderer. in Hauberi Chrest. p. 307.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθείαν ἄπειρον τὴν AB , ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ῥηταὶ ἡ $\Gamma\Theta$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ἦτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἐπ' εὐθείαν τὴν $\Gamma\Delta$ σταθεῖσα γωνίας ποιεῖτω τὰς ὑπὸ $\Gamma B A$, $A B \Delta$ λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ $\Gamma B A$, $A B \Delta$ γωνίαι, ἦτοι δύο ὀρθαὶ εἰσιν, ἢ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Gamma B A$ τῇ ὑπὸ $A B \Delta$, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου τῇ $\Gamma\Delta$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ BE · αἱ ἄρα ὑπὸ $\Gamma B E$, $E B \Delta$ δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma B E$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $\Gamma B A$, $A B E$ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $E B \Delta$ αἱ ἄρα ὑπὸ $\Gamma B E$, $E B \Delta$ τρισοὶ ταῖς ὑπὸ $\Gamma B A$, $A B E$, $E B \Delta$ ἴσαι εἰσιν. Ἡλὺν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ $\Delta B A$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $\Delta B E$, $E B A$ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $A B \Gamma$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $\Delta B A$, $A B \Gamma$ τρισοὶ ταῖς ὑπὸ $\Delta B E$, $E B A$, $A B \Gamma$ ἴσαι εἰσιν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $\Gamma B E$, $E B \Delta$ τρισοὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι τὰ δὲ τῶν αὐτῶν ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ $\Gamma B E$, $E B \Delta$ ἄρα ταῖς ὑπὸ $\Delta B A$, $A B \Gamma$ ἴσαι

Schol. Huius problematis Oenopiden primum inventorem esse Proclus refert.

PROPOSITIO XIII.

Cor. 1. Hinc, si angulorum deinceps positorum unus rectus sit, alter pariter erit rectus; si unus acutus, alter obtusus, et contra.

Super datam igitur rectam infinitam AB a dato puncto Γ , quod non est in ea, perpendicularis ducta est $\Gamma\Theta$. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 19.)

Si recta, in rectam insistens angulos faciat, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales faciet.

Recta enim quaedam AB in rectam ΓA insistens angulos faciat ΓBA , ABA ; dico ΓBA , ABA angulos vel duos rectos esse vel duobus rectis aequales.

Si quidem igitur aequalis est ΓBA ipsi ABA duo recti sunt (Def. 10.). Si vero non, ducatur a puncto B rectae ΓA ad rectos angulos recta BE (Prop. 11.); ergo ΓBE , $EB A$ duo recti sunt. Et quoniam ΓBE duobus ΓBA , ABE aequalis est, communis addatur $EB A$; ergo ΓBE , $EB A$ tribus ΓBA , ABE , $EB A$ aequales sunt (Ax. 2.). Rursus, quoniam ABA duobus ABE , $EB A$ aequalis est, communis addatur $AB \Gamma$; ergo ABA , $AB \Gamma$ tribus ABE , $EB A$, $AB \Gamma$ aequales sunt (Ax. 2.). Ostensi sunt autem et ΓBE , $EB A$ tribus eisdem aequales; quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia (Ax. 1.); ergo et ΓBE , $EB A$ ipsis ABA , $AB \Gamma$ aequales sunt; sed ΓBE , $EB A$

Cor. 2. Si plures rectae, quam una ad idem punctum eidem rectae ad easdem eius partes insistant, anguli omnes simul fient duobus rectis aequales.

Cor. 3. Quotcunque rectis se mutuo secantibus, anguli ad punctum sectionis quatuor rectis aequales erunt, et generalius: omnes anguli circa idem punctum constituti quatuor rectos efficient. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 307.

είσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓBE , $EB\Delta$ δύο ὀρθαὶ εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔBA , $AB\Gamma$ ἄρα δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Ἐὰν πρὸς τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι ¹⁾, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B , δύο εὐθεῖαι αἱ $B\Gamma$, $B\Delta$, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, $AB\Delta$ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἔστι τῇ ΓB ἢ $B\Delta$.

Εἰ γὰρ μὴ ἔστι τῇ $B\Gamma$ ἐπ' εὐθείας ἢ $B\Delta$, ἔστω τῇ ΓB ἐπ' εὐθείας ἢ BE .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ AB ἐπ' εὐθείαν τὴν ΓBE ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$, ABE γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $AB\Delta$ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓBA , ABE ταῖς ὑπὸ ΓBA , $AB\Delta$ ἴσαι εἰσίν. Κοινὴ ἀγροῦσθω ἢ ὑπὸ ΓBA · λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ ABE λοιπὴ τῇ ὑπὸ $AB\Delta$ ἔστιν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἔστιν ἢ BE τῇ $B\Gamma$. Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς $B\Delta$ ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστιν ἢ ΓB τῇ $B\Delta$. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Proclus legit: δύο εὐθεῖαι ἐξῆς.

PROPOSITIO XIV.

Obs. Est haec conversa praecedentis, pariterque paulo generalius conversa Cor. 2. praecedentis demonstrari poterit.

duo recti sunt; ergo et $\angle B\Gamma A$, $\angle AB\Gamma$ duobus rectis aequales sunt. Si igitur etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 20.)

Si ad aliquam rectam, et ad punctum in ea, duae rectae, non ad easdem partes positae, angulos deinceps duobus rectis aequales faciant, in directum erunt sibi invicem rectae.

Ad aliquam enim rectam AB , et ad punctum in ea B , duae rectae $B\Gamma$, BA , non ad easdem partes positae, angulos deinceps $\angle AB\Gamma$, $\angle B\Gamma A$ duobus rectis aequales faciant; dico in directum esse rectae ΓB rectam BA .

Si enim non est rectae $B\Gamma$ in directum BA , sit rectae ΓB in directum BE (Post. 2.).

Quoniam igitur recta AB super rectam ΓBE insistit, anguli $\angle AB\Gamma$, $\angle ABE$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); sunt autem et $\angle AB\Gamma$, $\angle B\Gamma A$ duobus rectis aequales; ergo $\angle \Gamma BA$, $\angle ABE$ ipsis $\angle \Gamma BA$, $\angle B\Gamma A$ aequales sunt. Communis auferatur $\angle \Gamma BA$; reliquus igitur $\angle ABE$ reliquo $\angle B\Gamma A$ est aequalis (Ax. 3.), minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur in directum est BE rectae $B\Gamma$. Similiter, autem ostendemus, neque esse aliam quandam praeter BA ; in directum igitur est ΓB rectae BA . Si igitur etc.

Alia praecedentis conversa erit haec: Si duo anguli duobus rectis aequales sint, atque in vertice communi ita iungantur, ut unum crurū unius cum uno crure alterius sit in directum, reliqua quoque angulorum crura in eandem rectam coincident, quod facile ostendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἰσὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $ΓΔ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημείον· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΒ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΕΒ$ τῇ ὑπὸ $ΑΕΔ$.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ $ΑΕ$ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $ΓΔ$ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $ΔΕ$ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $ΑΒ$ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $ΑΕΔ$, $ΔΕΒ$ αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΕΔ$, $ΔΕΒ$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΓΕΑ$, $ΑΕΔ$ ταῖς ὑπὸ $ΑΕΔ$, $ΔΕΒ$ ἴσαι εἰσὶν. Κοινὴ ἀφηρέσθω ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΕΑ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΒΕΔ$ ἴση ἐστὶν. Ὀμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $ΓΕΒ$, $ΔΕΑ$ ἴσαι εἰσὶν. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς. ¹⁾

1) Πρόρημα. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ ὅσαι δὴ ποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέττασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν. Hoc Corollarium addunt edd. Oxon. et Cod. Peyrardi m. In margine vel inter lineas illud habent Codd. d. e. f. et, ut Peyrardus in Praefat. dicit, etiam Coila, ita tamen, ut non prae se ferat signum, quo in hoc manuscripto ea, quae ad marginem sunt, ad textum pertinere indicantur. Idem tamen in lect. variant. id in Cod. a. deesse asserit. Pariter edit. Basil. ex alio, ut dicit, exemplari illud in margine addit. Quum tamen etiam in Codd. h. i. k. n. desit, nec omnino huc, sed ad I. 13. (ubi apud nos Cor. 3. est) pertineat, textui inserere nolimus. Caeterum Proclus etiam ad hanc propositionem simile fere corollarium habet, eo tantum ab hoc diversum, quod ei de duabus tantum rectis sermo est.

PROPOSITIO XV.

Schol. Thaletem hanc Prop. primum invenisse, Euclidem

PROPOSITIO XV. (Fig. 21.)

Si duae rectae sese secant, angulos ad verticem aequales inter se facient.

Duae enim rectae AB , ΓA sese secant in puncto E ; dico aequalem esse angulum quidem $AE\Gamma$ angulo AEB , angulum autem ΓEB angulo AEA .

Quoniam enim recta AE in rectam ΓA insistit angulos faciens ΓEA , AEA ; anguli ΓEA , AEA duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.). Rursus, quoniam recta AE in rectam AB insistit, angulos faciens AEA , AEB ; anguli AEA , AEB duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.). Ostensi sunt autem et ΓEA , AEA duobus rectis aequales; ergo anguli ΓEA , AEA angulis AEA , AEB aequales sunt. Communis auferatur AEA , reliquus igitur ΓEA reliquo BEA aequalis est (Ax. 3.). Similiter autem ostendemus et angulos ΓEB , AEA esse aequales. Si igitur duo etc.

autem primum demonstratione dignam habuisse, Proclus refert.

Obs. Prop. 15. duae sunt conversae. Alteram Proclus habet huius sententiae: Si (Fig. 21.) ad punctum E rectae alicuius AB duae rectae EA , ΓE ducantur non ad easdem partes, ac faciant angulos ad verticem aequales EA et ΓB in directum erunt. Nam, quum $AEA + AEB = 2$ rectis (I. 13.) et $AEB = AEF$ ex hypoth. erunt etiam $AEA + AEF = 2$ rectis, adeoque EA et ΓE in directum sitae erunt (I. 14.). Alteram conversam exhibet Peletarius huius sententiae: Si quatuor rectae AB , ΓE , BE , AE ex uno puncto E exeuntes binos angulos oppositos inter se aequales fecerint, erunt quaelibet duae lineae adversae in directum sibi oppositae, Nempe omnes quatuor anguli circa punctum E duobus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 15.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεβλήθη-
θείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπε-
ναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$, καὶ προσεβεβλήσθω
αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ $ΒΓ$ ἐπὶ τὸ $Δ$ · λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς
γωνία, ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$, μείζων ἐστίν ἑκατέρας τῶν
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ $ΓΒΑ$, $ΒΑΓ$ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ $ΑΓ$ διχα κατὰ τὸ $Ε$, καὶ ἐπιξευ-
χθεῖσα ἡ $ΒΕ$ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ $Ζ$,
καὶ κείσθω τῇ $ΒΕ$ ἴση ἡ $ΕΖ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΖΓ$,
καὶ διήχθω ἡ $ΑΓ$ ἐπὶ τὸ $Η$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν $ΑΕ$ τῇ $ΕΓ$, ἡ δὲ $ΒΕ$
τῇ $ΕΖ$, δύο δὴ αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$ δυοὶ ταῖς $ΓΕ$, $ΕΖ$
ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$
γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΕΓ$ ἴση ἐστὶ, κατὰ κορυφὴν γάρ· βά-
σις ἄρα ἡ $ΑΒ$ βάσει τῇ $ΖΓ$ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $ΑΒΕ$
τρίγωνον τῷ $ΖΕΓ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκα-
τέρα, ὅγ' ὅς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα
ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ τῇ ὑπὸ $ΕΓΖ$. Μείζων δὲ ἐστίν

rectis aequales sunt (Prop. 13. Cor. 3.). Atqui ex hypoth.
tam $ΑΕΔ=ΒΕΓ$, quam $ΑΕΓ=ΒΕΔ$, unde $ΑΒΔ+ΑΒΓ=$
 $ΒΕΓ+ΒΒΔ=2$ rectis, adeoque $ΑΕ$ et $ΓΕ$ in directum erunt
(I. 14.). Pariter, quum $ΑΕΓ+ΒΕΓ=ΑΕΓ+ΒΕΓ=2$ rectis,
 $ΑΒ$ et $ΒΕ$ in directum erunt.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Ramus, ut solet, hystorologiae accusat Euclidem,
quod hanc propositionem, quae facile consequatur ex I. 32.,
separatim demonstraret. At demonstratio I. 32. in Euclidis sy-
stemate ex I. 27., huius vero ex I. 16. dependet, neque igitur,

PROPOSITIO XVI. (Fig. 22.)

Omnis trianguli uno laterum producto, exterior angulus utroque interiorum et oppositorum angulorum maior est.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et producat^{ur} ipsius unum latus $B\Gamma$ ad Δ ; dico angulum exterior^{em} $\Delta\Gamma A$ maiorem esse utroque interiorum et oppositorum angulorum $\Gamma B A$, $B A \Gamma$.

Secetur $A\Gamma$ bifariam in E (Prop. 10.), et iuncta BE producat^{ur} in directum ad Z , et ponatur rectae BE aequalis EZ (Prop. 3.), et iungantur $Z\Gamma$, et producat^{ur} $A\Gamma$ ad H .

Quoniam igitur aequalis est AE rectae $E\Gamma$, BE vero ipsi EZ , duae AE , EB duabus ΓE , EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus AEB angulo $Z E \Gamma$ aequalis est, ad verticem enim est (Prop. 15.); basis igitur AB basi $Z\Gamma$ aequalis est, et triangulum ABE triangulo $Z E \Gamma$ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est BAE ipsi $E\Gamma Z$. Maior autem est angulus $E\Gamma A$

circulum in demonstrando si evitare volebat, denique I. 16. ex I. 32. deducere poterat. Laudandus potius est Euclides, qui pedetentim ad magis ardua progressus facilioribus difficiliora tam apto superstruere norat.

Cor. (Procli). Ex uno puncto extra aliquam rectam posito ad eam haud plures quam duae rectae aequales duci possunt, ut ex I. 5. et I. 16. facile consequitur, vel aliter: Circulus rectam in pluribus quam duobus punctis secare nequit. Cf. III. 2. Cor. 1. Praeterea Proclus monet, etiam I. 27. non nisi consecrarium esse huius I. 16.

ἡ ὑπὸ EFA τῆς ὑπὸ ETZ · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ AGA τῆς ὑπὸ BAE . Ὀμοίως δὲ, τῆς $BΓ$ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ $BΓH$, τουτέστιν ἡ ὑπὸ AGA , μείζων καὶ τῆς ὑπὸ $ABΓ$. Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$ λέγω, ὅτι τοῦ $ABΓ$ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐμβεβλήσθω γὰρ ἡ $BΓ$ ἐπὶ τὸ A .

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ABΓ$ ἐκτὸς ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ AGA , μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ $ABΓ$. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ AGB αἱ ἄρα ὑπὸ AGA , AGB τῶν ὑπὸ $ABΓ$, $BΓA$ μείζονες εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ AGA , AGB δυσὶ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ $ABΓ$, $BΓA$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ BAG , AGB δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ GAB , $ABΓ$. Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

PROPOSITIO XVII.

Obs. Aliam adhuc huius propositionis demonstrationem habet Proclus, in qua recta $BΓ$ non producitur, at ab A ad punctum quodcunque rectae $BΓ$ recta ducitur.

Cor. 1. In omni triangulo, cuius unus angulus rectus est aut obtusus, reliqui acuti sunt. Cf. Clavius. Hinc patet ratio, cur Def. 27. 28. 29. ita, ut factum est, expressae fuerint. Cf. Pfleiderer. in Hauberi Chrestom. Geom. p. 309.

Cor. 2. Omnes anguli trianguli aequilateri, et duo an-

angulo EFZ (Ax. 9.); maior est igitur $AF\Delta$ ipso BAE . Similiter autem, BF secta bifariam, ostendetur et $B\Gamma H$, hoc est $AF\Delta$ (Prop. 15.), maior et ipso $AB\Gamma$. Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 23.)

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum $AB\Gamma$; dico trianguli $AB\Gamma$ duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse.

Producatur enim BF ad Δ (Post. 2.).

Et quoniam trianguli $AB\Gamma$ exterior est angulus $AF\Delta$, maior est interiore et opposito $AB\Gamma$ (Prop. 16.). Communis addatur AFB ; ergo $AF\Delta$, AFB angulis $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ maiores sunt (Ax. 4.). Sed $AF\Delta$, AFB duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); ergo $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ duobus rectis minores sunt. Similiter autem ostendemus et $BA\Gamma$, AFB duobus rectis minores esse, et adhuc ipsos ΓAB , $AB\Gamma$. Omnis igitur etc.

guli ad basin trianguli aequicruri sunt acuti, anguli externi autem, qui iis adjacent, obtusi. Cf. Clavius.

Cor. 3. In triangulo, in quo duo anguli inaequales sunt, minor eorum est acutus.

Cor. 4. (Procli). A puncto quocunque extra rectam posito non nisi unum perpendicularum ad eam demitti potest.

Cor. 5. Si e puncto aliquo rectae, quae oblique instet alteri rectae, adeoque ex altera sui parte cum ea acutum, ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ $ABΓ$, μείζονα ἔχον τὴν $ΑΓ$ πλευρὰν τῆς AB · λέγω, ὅτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ABΓ$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $BΓΑ$.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς AB , κείσθω τῇ AB ἴση ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΒΔ$.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $BΓΔ$ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΔΒ$, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ $ΔΓΒ$ · ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $ΑΔΒ$ τῇ ὑπὸ $ΑΒΔ$, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AB τῇ $ΑΔ$ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ τῆς ὑπὸ $ΑΓΒ$ · πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΑΓΒ$. Παντὸς, ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

altera obtusum angulum efficiat, ad hanc alteram demittatur perpendicularum, cadet id ad partes anguli acuti. Cf. Pflaiderer. l. c.

Cor. 6. Quod e vertice trianguli in basin demittitur perpendicularum, incidet in ipsam basin, aut in terminum eius extremum, aut in basin productam, prout angulorum ad basin vel uterque acutus, vel alter rectus, vel denique alter obtusus erit. Cf. Pflaiderer. l. c.

PROPOSITIO XVIII.

Obs. Aliam e Porphyrio demonstrationem addit Proclus, in qua (Fig. 25.) sumta $ΓΑ=AB$, producitur BA ultra B ad punctum aliquod E , ita ut BE aequalis fiat rectae AA , ac deinde iungitur $ΕΓ$, ubi facile patet, esse $ΑΕΙ=ΑΙΕ$ (l. 5.),

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 24.)

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit enim triangulum $AB\Gamma$, maius habens latus AT latere AB ; dico et angulum $AB\Gamma$ maiorem esse angulo $B\Gamma A$.

Quoniam enim recta AT maior est recta AB , ponatur rectae AB aequalis AA (Prop. 3.), et iungatur BA .

Et quoniam trianguli $B\Gamma A$ exterior est angulus AAB , maior est interiore et opposito ATB (Prop. 16.). Aequalis autem angulus AAB angulo ABA , quia et latus AB lateri AA est aequale; maior igitur et ABA ipso ATB ; multo igitur $AB\Gamma$ maior est ipso ATB . Omnis igitur trianguli etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 26.)

Omnis trianguli maiorem angulum maius latus subtendit.

adeoque $AB\Gamma$ [$> AEF$ (I. 16.)] $> AFE > ATB$. Caeterum notetur huius et 19. cum 5. et 6. Analogia, quam etiam Proclus innuit.

Cor. 1. In triangulo scaleno omnes etiam anguli inaequales erunt, maiores nempe, qui maioribus lateribus opponuntur; et in quovis triangulo non aequilatero ii, qui minoribus lateribus opponuntur anguli, acuti erunt. Cf. Clavius et Pfeiderer. l. c. p. 310.

Cor. 2. Trianguli aequicruri angulus ad verticem maior aut minor erit quolibet angulo ad basin, prout basis maior aut minor est quovis crure. Cf. Pfeiderer. l. c.

Cor. 3. In quovis triangulo perpendicularum demissum e vertice opposito in latus, quod non minus est utrovis reliquo,

*Εστω τρίγωνον τὸ $ABΓ$ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ $ABΓ$ γωνίαν τῆς ὑπὸ $BΓA$ · λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ $ΑΓ$ πλευρᾶς τῆς AB μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστίν ἡ $ΑΓ$ τῇ AB , ἡ ἐλάσσων· ἴση μενοῦν οὐκ ἐστίν ἡ $ΑΓ$ τῇ AB · ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓB$ · οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστίν ἡ $ΑΓ$ τῇ AB . Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστίν ἡ $ΑΓ$ τῇ AB · ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ABΓ$ τῆς ὑπὸ $ΑΓB$. Οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστίν ἡ $ΑΓ$ τῆς AB . Ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν· μείζων ἄρα ἐστίν ἡ $ΑΓ$ τῆς AB . Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

intra triangulum cadit. Tum nempe anguli ad basin acuti erunt (Cor. 1.), unde ex Cor. 6. praecedentis res consequitur. Cf. Pflaiderer. l. c.

PROPOSITIO XIX.

Obs. Aliam directam, at operosiozem huius propositionis, quae conversa est praecedentis, demonstrationem habet Proclus, quam etiam Clavius affert, deductam ex praemisso lemmate, quo docetur: Si in triangulo angulus bisecetur, et recta bisecans secet basin in partes inaequales, latera etiam angulum ad verticem comprehendentia inaequalia fore, et maius quidem id, quod maiori basis segmento adiacet. Quod ipsum lemma etiam converti potest. Cf. Clavius. Campano nostra 18. est 19., et contra, unde et alias habet demonstrationes.

Cor. 1. In triangulo, cuius omnes anguli sunt inaequales, latera etiam sunt inaequalia, maius nempe, quod maiori

Sit triangulum $AB\Gamma$, maiorem habens angulum $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma A$; dico et latus $A\Gamma$ latere AB maius esse.

Si enim non; vel aequalis est $A\Gamma$ rectae AB , vel minor; aequalis quidem non est $A\Gamma$ rectae AB , aequalis enim esset et angulus $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ (Prop. 5.). Non est autem; non igitur aequalis est $A\Gamma$ rectae AB . Neque tamen minor est $A\Gamma$ recta AB ; minor enim esset et angulus $AB\Gamma$ angulo $A\Gamma B$ (Prop. 18.); non est autem; non igitur minor est $A\Gamma$ recta AB . Ostensum est autem neque aequalem esse; maior igitur est $A\Gamma$ recta AB . Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XX. (Fig. 27.)

Omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt, quomodocunque sumpta.

angulo opponitur. Cf. Pfeiderer l. c. qui etiam reliqua corollaria habet.

Cor. 2. Trianguli aequicruri basis maior aut minor erit quovis crure, prout angulus ad verticem maior aut minor est quolibet angulo ad basin.

Cor. 3. In triangulo rectangulo aut obtusangulo latus angulo recto aut obtuso oppositum maius est quovis reliquo.

Cor. 4. Si e puncto aliquo ad rectam ducantur duae rectae, quarum sit una ad eam perpendicularis, ea erit minor altera. Vel: Omnium rectarum, quae a puncto aliquo in rectam extra id punctum transeuntem duci possunt, minima est ea, quae isti rectae est perpendicularis, quae ipsa etiam distantia, minima nempe, istius puncti a linea dicitur. Cf. Clavius.

Cor. 5. Si e puncto aliquo ad rectam ducantur perpendicularis et ex eadem perpendiculari parte duae aliae rectae,

"Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ $ABΓ$. λέγω, ὅτι τοῦ $ABΓ$ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν BA , $ΑΓ$ τῆς $ΒΓ$, αἱ δὲ AB , $ΒΓ$ τῆς $ΑΓ$, αἱ δὲ $ΒΓ$, $ΓΑ$ τῆς AB .

Διήχθω γὰρ ἡ BA ἐπὶ τὸ A σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ $ΓΑ$ ἴση ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΓ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΑΓ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΔ$ ¹⁾· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ τῆς

1) ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΑΓΔ$ μείζων ἐστίν. Haec verba, quae hic habent edd. Basil. et Oxon. consentiente Cod. a. omittit Peyrard. Nec sane sunt necessaria.

harum quae perpendicularo propior est, minor est altera: et e diversis perpendiculari partibus duae tantum aequales rectae duci possunt.

PROPOSITIO XX.

Obs. Proclus refert, Epicuræos Geometras irrisisse, et hanc propositionem asinis quoque notam esse dixisse, qui recta pergant, ubi foenum sit. Quod ludibrium quam ineptum sit, ubi non de eo agatur, quid sensibus videatur (κατὰ τὴν αἴσθησιν), sed de scientia philosophica, quam ἐπιστημονικὸν λόγον vocat Proclus, omnes vident. Nec axiomatum numerus, ut monet Rob. Simson., sine necessitate augendus est. Plures adhuc alias huius propositionis demonstrationes affert Proclus, e quibus e schola Philonis et Porphyrii hanc satis simplicem: In triangulo quocunque $ABΓ$ (Fig. 28.) si bisecetur angulus $BAΓ$ recta $ΑΔ$, quae basin secet in A , erit angulus $BAA > AAG$ (I. 16.). At $ANG = AAB$ ex constr. Itaque $BAA > AAB$, quare $BA > BA$ (I. 19.). Eodem modo monstratur, esse $AG > AG$, quare $BA + AG > BA + AG$ i. e. $> BG$. Alii, ut Ambrosius Rhodius, e definitione rectae Archimedeae immediate hoc assertum deducunt, quod non Ramo solum, sed etiam Tacqueto, Coëtsio, aliisque simplicissimum visum fuit. At an Euclidis adsensum obtinere potuisset, du-

Sit enim triangulum $AB\Gamma$; dico $AB\Gamma$ trianguli duo latera reliquo maiora esse, quomocunque sumpta; nempe BA , $A\Gamma$ latere $B\Gamma$, et AB , $B\Gamma$ latere $A\Gamma$, et $B\Gamma$, ΓA latere AB .

Producatur enim BA ad punctum Δ , et ponatur rectae ΓA aequalis ΔA (Prop. 3.), et iungatur $A\Gamma$.

Quoniam igitur aequalis est ΔA rectae $A\Gamma$, aequalis est et angulus $\Delta A\Gamma$ angulo $A\Gamma A$ (Prop. 5.), ma-

bitandum omnino videtur. Et ipsi Archimedi proprie id non definitio est, sed λαμβανόμενον τε, ut ad Def. 4. diximus.

Cor. 1. Trianguli aequicruri unumquodque aequalium crurum maius est dimidia basi. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 312.

Cor. 2. In triangulo non aequicruro differentia duorum inaequalium laterum minor est tertio latere. Nempe quum (Fig. 27.) $BA + A\Gamma > B\Gamma$, erit dempta utrimque recta $A\Gamma$, $BA > B\Gamma - A\Gamma$, vel $B\Gamma - A\Gamma < BA$, atque ita pariter circa reliqua latera.

Cor. 3. In quovis triangulo summa omnium laterum simul sumptorum maior est, quam duplum cuiuscunque lateris. Nam, quum $BA + A\Gamma > B\Gamma$, erit, utrimque addito $B\Gamma$, $BA + A\Gamma + B\Gamma > 2B\Gamma$.

Cor. 4. In quovis triangulo omnia latera simul sumpta minora sunt duplo duorum quorumcunque laterum. Quum enim $B\Gamma < BA + A\Gamma$ erit, utrimque additis $BA + A\Gamma$, $B\Gamma + BA + A\Gamma < 2BA + 2A\Gamma$. Haec tria proxime praecedentia collataria sunt e Borellio. Cf. Pfeiderer. l. c.

Cor. 5. In quavis figura recuilinea quodvis latus est minus summareliquorum. Cf. Pfeiderer. l. c. Verbi causa in Figura quadrilatera $AB\Gamma A$ (Fig. 29.) ducta diametro $B\Gamma$, erit $A\Gamma + B\Gamma > AB$. At $\Gamma A + BA > B\Gamma$, unde eo magis $A\Gamma + \Gamma A + BA > AB$, atque eodem modo in figuris, quae plura latera habent, etiam, si angulos habent introrsum vergentes, res demonstrabitur. Conversam huius propositionis, nempe, si rectae quotcunque v. c. n datae sint, quarum quaevis minor

ὑπὸ $\Delta\Lambda\Gamma$ · καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ $\Delta\Gamma B$, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ $B\Gamma A$ γωνίαν τῆς ὑπὸ $B\Delta\Gamma$, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἢ ΔB ἄρα τῆς $B\Gamma$ ἐστὶ μείζων. Ἰση δὲ ἢ ΔB ταῖς AB , $\Lambda\Gamma$ · μείζονες ἄρα αἱ BA , $\Lambda\Gamma$ τῆς $B\Gamma$. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν AB , $B\Gamma$ τῆς ΓA μείζονες εἰσιν· αἱ δὲ $B\Gamma$, ΓA τῆς AB . Παντὸς ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων ²⁾ δύο εὐθείαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς $B\Gamma$, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν B , Γ , δύο εὐθείαι

1) Peyrard. habet lectionem Cod. a: ἴση δὲ ἢ ΔA τῇ $\Lambda\Gamma$: nos praetulinus lectionem edd. Basil. et Oxon. ut consequentibus magis aptam.

2) Proclus habet: ἀπὸ τῶν περάτων ἀρξάμεναι.

est summa reliquarum, construi inde posse figuram tot laterum (n), quot rectae datae sunt, demonstrat Develey Elem. de Géom. Livr. II. Ch. II. §. 41.

Cor. 6. Pari ratione ostenditur, quamvis ab uno puncto ad alterum ductam rectam minorem esse quavis in eodem plano inter haec puncta ducta linea fracta i. e. composita e pluribus rectis sub angulis quibuscunque inter se iunctis. Cf. Pfeiderer. l. c.

Cor. 7. In quavis figura rectilinea summa omnium laterum maior est duplo uniuscuiusque lateris figurae. Sit enim hoc latus A , summa omnium laterum $=\Sigma$, erit summa reliquorum laterum $=\Sigma - A$, et ex Cor. 5. $\Sigma - A > A$, unde, si A utrimque addatur, $\Sigma > 2 A$, vel $\frac{\Sigma}{2} > A$. Cf. Pfeiderer. l. c.

ior igitur est $B\Gamma A$ angulo $A\Gamma F$ (Ax. 9.); et quoniam triangulum est $\triangle FGB$, maiorem habens angulum $B\Gamma A$ angulo $B\Gamma F$, maiorem autem angulum maius latus subtendit; $\triangle B$ igitur recta $B\Gamma$ maior est (Prop. 19.); aequalis autem $\triangle B$ rectis AB , AF ; maiores igitur BA , AF recta $B\Gamma$. Similiter autem ostendemus et AB , $B\Gamma$ recta ΓA maiores esse; et $B\Gamma$, ΓA recta AB . Omnis igitur etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 30.)

Si a terminis unius lateris trianguli duae rectae intus constituentur, hae reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim $AB\Gamma$ super uno latere $B\Gamma$, a terminis B , Γ , duae rectae intus constituentur BA ,

Cor. 8. In quavis figura rectilinea summa omnium laterum minor est duplo summae omnium laterum praeter unum. Sit hoc unum latus A , et summa omnium laterum, ut in praecedente Cor. $=Z$, eritque $Z-A > A$, unde, si utrimque addatur $Z-A$, erit $2(Z-A) > Z$, vel $Z < 2(Z-A)$, vel $\frac{Z}{2} < Z-A$.

PROPOSITIO XXI.

Obs. Addi potest, valere etiam propositionem, si punctum, quod hic intra triangulum positum sumebatur, sit in alterutro trianguli latere v. c. si punctum A (Fig. 30.) cum puncto E coincidat. Aliam adhuc demonstrationem habet Coëtsius (Euclid. Elem. VI. libr. prior. Lugd. Batav. 1692. p. 82.), quae tamen non generaliter valet. Ostendere nempe vult, esse tam $AB > BA$, quam $AF > \Gamma A$, quod neutiquam necesse est. Probe autem notandum est, ut vera sit propo-

ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ $ΒΔ$, $ΔΓ$. λέγω, ὅτι αἱ $ΒΔ$, $ΔΓ$ πλευραὶ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ $ΒΔΓ$ τῆς ὑπὸ $ΒΑΓ$.

Διήχθω γὰρ ἡ $ΒΔ$ ἐπὶ τὸ $Ε$.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι, τοῦ $ΑΒΕ$ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ $ΑΒ$, $ΑΕ$ τῆς $ΒΕ$ μείζονες εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ $ΕΓ$ αἱ ἄρα $ΒΑ$, $ΑΓ$ τῶν $ΒΕ$, $ΕΓ$ μείζονες εἰσιν. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ $ΓΕΔ$ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ $ΓΕ$, $ΕΔ$ τῆς $ΓΔ$ μείζονες εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ $ΔΒ$ αἱ $ΓΕ$, $ΕΒ$ ἄρα τῶν $ΓΔ$, $ΔΒ$ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν $ΒΕ$, $ΕΓ$ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ $ΒΑ$, $ΑΓ$ · πολλῶ ἄρα αἱ $ΒΑ$, $ΑΓ$ τῶν $ΒΔ$, $ΔΓ$ μείζονες εἰσιν.

sitio, a terminis extremis basis ducendas esse rectas intra triangulum constituendas. Proclus enim demonstrat, hac conditione ommissa, multa esse triangula, quibus alia inscribi possint, quorum duo latera simul sumpta maiora sint lateribus trianguli ambientis, aut etiam, quae angulum comprehendant minorem eo, quem latera trianguli ambientis comprehendunt. Cf. Isaaci Monachi Scholia in Euclid. Elem. libr. VI. prior. Argentor. 1589. Sit nempe (Fig. 31.) triangulum $ΑΒΓ$, cuius angulus $ΑΒΓ$ vel rectus sit, vel obtusus. Ducatur ad punctum baseos quodcunque $Δ$ recta $ΑΔ$, eritque in triangulo $ΑΒΔ$ recta $ΑΔ > ΑΒ$ (Prop. 19. Cor. 3.). Sumatur $ΔΕ = ΑΒ$, rectaque $ΑΕ$ bisecetur in puncto $Ζ$ (Prop. 10), iungaturque $ΖΓ$, eritque $ΑΖ + ΖΓ > ΑΓ$ (Prop. 20.) i. e. $ΖΕ + ΖΓ > ΑΓ$, ideoque, additis utrimque aequalibus $ΔΕ$, $ΑΒ$, erit $ΖΕ + ΔΕ + ΖΓ > ΑΓ + ΑΒ$ i. e. $ΖΔ + ΖΓ > ΑΓ + ΑΒ$. Quin Pappus (Collect. Mathem. III. 3.) ut Rob. Simson. monet, demonstrat, latera trianguli alteri inclusi non solum maiora esse posse lateribus trianguli ambientis, sed quamvis etiam ad ea

AF ; dico BA , AF latera reliquis trianguli duobus lateribus BA , AF minora quidem esse, maiorem vero angulum continere, angulum nempe BAF angulo BAF .

Producatur enim BA ad E .

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt (Prop. 20.), trianguli ABE duo latera AB , AE latere BE maiora sunt. Communis addatur EF ; ergo BA , AF rectis BE , EF maiores sunt (Ax. 4.). Rursus, quoniam FEA trianguli duo latera FE , EA latere FA maiora sunt (Prop. 20.); communis addatur AB ; ergo FE , EB rectis FA , AB maiores sunt (Ax. 4.). Sed ipsis BE , EF maiores ostensae sunt BA , AF ; multo igitur BA , AF rectis BA , AF maiores sunt.

rationem habere, dummodo minor sit dupla. Unde Clairaultio in Praef. ad Geometr. Paris. 1741. non adeo superflua videri debebat Euclidis demonstratio. Pariter, quod ad angulum attinet, ita Proclus pergit. Sit (Fig. 32.) triangulum ABF (Proclus quidem dicit triangulum aequicrurum, ut nempe $AB=AF$, quod tamen haud necessarium esse videtur), cuius maximum latus BF , a quo abscindatur $BA=BA$, et in ducta AA sumatur punctum quodcumque E , et iungatur EF . Erit itaque angulus $BAA=BAA$ (I. 5.). At $EAA > AEF$ (I. 16.). Itaque et $BAA > AEF$, et multo magis $BAF > AEF$. Unde patet, et quoad angulum necessariam esse illam conditionem, ut a punctis extremis baseos ductae sint rectae ad punctum intra triangulum.

Cor. 1. In figura quadrilatera $ABFA$ (Fig. 33.) in qua unus angulus A inuorsum vergit (ita nempe constructus, ut rectae eum comprehendentes, si producantur, intra figuram cadant) summa laterum $BA+FA$ hunc angulum comprehendentium minor est summa reliquorum laterum $BA+AF$, quod,

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν· τοῦ $\Gamma\Delta\epsilon$ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $\beta\Delta\Gamma$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\Gamma\epsilon\Delta$. Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ¹⁾ καὶ τοῦ $\alpha\beta\epsilon$ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $\Gamma\epsilon\beta$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\beta\Delta\Gamma$. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ $\Gamma\epsilon\beta$ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ $\beta\Delta\Gamma$ πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ $\beta\Delta\Gamma$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\beta\Delta\Gamma$. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένης ²⁾.

1) Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα. Ita cum edd. Basil. et Oxon. posuimus. Peyrard. secutus Cod. a. habet: διὰ ταῦτα τοίνυν,

2) Peyrard. addit e Cod. a: διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένης. Nos haec verba cum edd. Basil. et Oxon. omisimus, quod glossam sapere viderentur, et alibi quoque, ubi problemata occurrunt, quae determinatione aliqua vel limitatione opus habent, in ipso problematis enunciato huius limitationis ratio reddi haud solet v. c. in VI. 28.

ducta recta $\beta\Gamma$, statim apparet. Eius generis figuram Proclus ad I. Def. 24. satis insulse τρίγωνον τετράπλευρον, triangulum quadrilaterum, nominat, angulum nempe ad Δ haud pro vero angulo reputans. Rectius, ut ibidem refert, Zenodorus κοιλογώνιον (σχῆμα) vocabat.

COR. 2. Quadrilaterum aequilaterum angulum introrsum vergentem habere nequit, summa potius rectarum, quae angulum introrsum vergentem comprehendunt, minor est summa duorum reliquorum quadrilateri laterum.

COR. 3. Si super $\beta\Gamma$ (Fig. 34.) alia figura rectilinea quaecunque, quae non habeat angulos introrsum vergentes, intra triangulum $\alpha\beta\Gamma$ constituta sit, v. c. quadrilatera figura

Rursus, quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito maior est (Prop. 16.), $\angle A E$ trianguli exterior angulus $B A \Gamma$ maior est angulo $\Gamma E A$. Eadem ex ratione et $\angle A B E$ trianguli exterior angulus $\Gamma E B$ maior est angulo $B A \Gamma$. Sed angulo $\Gamma E B$ maior ostensus est $B A \Gamma$; multo igitur $B A \Gamma$ maior est angulo $B A \Gamma$. Si igitur etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 35.)

Ex tribus rectis, quae sunt aequales tribus datis rectis, triangulum constituere; oportet autem duas reliqua maiores esse, utcumque sumptas.

$B A E \Gamma$, summa laterum $A B + A \Gamma$ semper maior erit summa laterum istius figurae $B A + A E + E \Gamma$. Ducta enim $A E$, producat $B A$, dum rectae $A E$ occurrat in Z , tum iungantur $Z \Gamma$, $A \Gamma$, eritque ex nostra propositione, $Z A + Z \Gamma > A E + E \Gamma$, unde, addita utrimque $A B$, erit $A B + Z A + Z \Gamma$ i. e. $Z B + Z \Gamma > B A + A E + E \Gamma$. At ex nostra propositione $A B + A \Gamma > Z B + Z \Gamma$, unde tanto magis $A B + A \Gamma > B A + A E + E \Gamma$. Et similis erit demonstratio in figuris plurium laterum.

Cor. 4. Pariter, si super eadem basi, ad easdem eius partes, duae figurae rectilineae, quae angulos introrsum vergentes non habeant, constituentur una intra alteram, perimenter exterioris maior est perimetron interioris. Idemque valet, si utriusque perimetrum intelligas, demta utrimque basi communi, quin etiam, si interior atque exterior figura unum alterumve latus praeter basin commune habeant. Haec corollaria sunt ex schedis Pflöidereri. Vid. Hayberi Chrest. p. 153. sqq.

PROPOSITIO XXII.

Obs. 1. Ostendendum erat, quod et Proclus facere tentavit, circulos centre H , intervallo $H O = I'$, et centro Z , intervallo $Z A = A$ descriptos, si problematis condiciones serven-

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ , ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, αἱ μὲν A, B τῆς Γ , αἱ δὲ A, Γ τῆς B , καὶ ἔτι αἱ B, Γ τῆς A . δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔE , πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ , ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ E . καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔZ , τῇ δὲ B ἴση ἡ ZH , τῇ δὲ Γ ἴση ἡ $H\Theta$ καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ τῷ $Z\Delta$, κύκλος γεγράφθω ὁ $\Delta K A$ καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ τῷ $H\Theta$, κύκλος γεγράφθω ὁ $K A \Theta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KZ, KH . λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ , τρίγωνον συνέσταται τὸ KZH .

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Delta K A$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $Z\Delta$ τῇ ZK . ἀλλὰ ἡ $Z\Delta$ τῇ A ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ A ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Delta K \Theta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ HK . ἀλλὰ ἡ $H\Theta$ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ KH ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ

tur, se invicem secare. Quod ita fere demonstrari poterit. Si isti circuli se invicem non secant, vel circulus centro H descriptus (circulum H vocabimus) complectetur totum circulum centro Z descriptum, quem circulum Z vocabimus; vel circulus Z complectetur circulum H ; vel uterque extra alterum positus erit. Casu primo ΘH aequalis aut maior esse deberet, quam $HZ + ZA$ i. e. $\overline{F} > B + A$, contra hypothesis. Secundo casu foret $Z\Delta > HZ + H\Theta$ i. e. $\overline{A} > B + \Gamma$, pariter contra hypothesis. Tertio foret $HZ > H\Theta + Z\Delta$ i. e. $B > \Gamma + A$, pariter

Sint datae tres rectae A, B, Γ , quarum duae reliqua maiores sint, utcunque sumptae, nempe A, B maiores, quam Γ ; A, Γ autem maiores, quam B ; denique B, Γ maiores, quam A ; oportet igitur ex rectis aequalibus ipsis A, B, Γ triangulum consituere.

Exponatur aliqua recta ΔE , terminata quidem ad Δ , infinita vero versus E ; et ponatur rectae A aequalis ΔZ , rectae vero B aequalis ZH , et rectae Γ aequalis $H\Theta$ (Prop. 3.); et centro quidem Z , intervallo vero $Z\Delta$, circulus describatur $\Delta K\Delta$ (Post. 3.); et rursus, centro quidem H , intervallo vero $H\Theta$, circulus describatur $K\Lambda\Theta$ (Post. 3.) et iungantur KZ , KH ; dico ex tribus rectis, aequalibus ipsis A, B, Γ , triangulum constitutum esse KZH .

Quoniam igitur Z punctum centrum est $\Delta K\Delta$ circuli, aequalis est $Z\Delta$ ipsi ZK (Def. 15.); sed $Z\Delta$ ipsi A est aequalis; et KZ igitur ipsi A est aequalis (Ax. 1.). Rursus, quoniam punctum H centrum est circuli $K\Lambda\Theta$, aequalis est $H\Theta$ ipsi HK (Def. 15.); sed $H\Theta$ ipsi Γ est aequalis; et KH igitur ipsi Γ est aequalis (Ax. 1.). Est autem et ZH ipsi B ae-

contra hypothesin. Itaque circuli se invicem secabunt, et quidem, ut facile patet, tam supra rectam HZ in puncto aliquo K , quam infra illam in puncto aliquo Λ , unde duo triangu-
gula HKZ , $H\Lambda Z$, quae vero positione tantum differunt, hac ratione construi poterunt, nec vero plura, ut patet ex I. Cor. 7.

Obs. 2. Quum Proclus Euclidis verba proferat, quae paullo differunt ab iis, quae nunc in textu Graeco leguntur, Commandinus inde concludit, Euclidis demonstrationes aliquibus in locis a Theone immutatas fuisse. Id autem ex levi ista variatione, quam permittere sibi omnino poterat Proclus, qui sensum Euclidis, non minutissima quaevis vocabula, spectaret, haud sequi videtur.

ἡ ZH τῇ B ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ KZ , ZH , HK , τρισὶ ταῖς A , B , Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν KZ , ZH , HK , αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς A , B , Γ , τρίγωνον συνίσταται τὸ KZH . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημείον τὸ A , ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ $\Delta Γ Ε$. δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ $\Delta Γ Ε$ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν $\Gamma Δ$, $\Gamma Ε$ τυχόντα σημεία τὰ Δ , E , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\Delta Ε$. καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς $\Gamma Δ$, $\Delta Ε$, $\Gamma Ε$, τρίγωνον συνεστήσω τὸ AZH , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $\Gamma Δ$ τῇ AZ , τὴν δὲ $\Gamma Ε$ τῇ AH , καὶ ἔτι τὴν $\Delta Ε$ τῇ ZH .

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ $\Delta Γ$, $\Gamma Ε$ δυοὶ ταῖς ZA , AH ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ $\Delta Ε$, βάσει τῇ ZH ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta Γ Ε$ γωνία τῇ ὑπὸ ZAH ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυ-

Cor. Triangulum aequicrurum, cuius latus et basis aequant duas rectas datas, similiter construi poterit, dummodo recta, cui latus aequale fieri debet, maior sit dimidia basi (I. 20. Cor. 1.). Cf. Pfleiderer. l. c. p. 315.

qualis; tres igitur rectae KZ , ZH , HK tribus A , B , Γ aequales sunt.

Ex tribus igitur rectis KZ , ZH , HK , quae sunt aequales datis rectis A , B , Γ , triangulum constitutum est KZH . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 36.)

Ad datam rectam, et ad punctum in ea, dato angulo rectilineo angulum rectilineum aequalem constituere.

Sit quidem data recta AB , in ea vero punctum A , et datus angulus rectilineus $\angle TE$; oportet igitur ad datam rectam AB , et ad punctum in ea A , dato angulo rectilineo $\angle TE$ aequalem angulum rectilineum constituere.

Sumantur in utraque ipsarum ΓA , ΓE quaelibet puncta Δ , E , et iungatur ΔE ; et ex tribus rectis, quae sunt aequales tribus ΓA , ΔE , ΓE , triangulum constituatur AZH (Prop. 22.), ita ut aequalis sit ΓA quidem rectae AZ , recta vero ΓE rectae AH , et denique ΔE rectae ZH .

Quoniam igitur duae $\Delta \Gamma$, ΓE duabus ZA , AH aequales sunt, utraque utrique, et basis ΔE basi ZH aequalis, angulus $\angle TE$ angulo $\angle ZAH$ est aequalis (Prop. 8.).

Ad datam igitur rectam AB , et ad punctum in ea A , dato angulo rectilineo $\angle TE$, aequalis angulus

PROPOSITIO XXIII.

Paullo simplicior fit constructio, si sumatur $\Gamma A = \Gamma E$, adeoque $AZ = AH$. Caeterum hoc problema ab Oenopide inventum esse, Proclus refert. Pari ratione datis duobus lateri-

γράμμω τῇ ὑπὸ $\Delta Γ Ε$ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἢ ὑπὸ $Ζ Α Η$. "Οπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κδ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

"Εστω δύο τρίγωνα τὰ $Α Β Γ$, $Δ Ε Ζ$, τὰς δύο πλευρὰς τὰς $Α Β$, $Α Γ$ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς $Δ Ε$, $Δ Ζ$ ἴσους ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν $Α Β$ τῇ $Δ Ε$, τὴν δὲ $Α Γ$ τῇ $Δ Ζ$, γωνία δὲ ἢ ὑπὸ $Β Α Γ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $Ε Δ Ζ$ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἢ $Β Γ$ βάσεως τῆς $Ε Ζ$ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἢ ὑπὸ $Β Α Γ$ γωνία τῆς ὑπὸ $Ε Δ Ζ$ γωνίας, συνεστιάτω πρὸς τῇ $Δ Ε$ εὐθεῖα,

bus trianguli et angulo, quem comprehendunt, aliud ei aequale triangulum constituetur.

Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο ΧΧΙ V.

Praeter eum casum, qui in textu Graeco habetur, duos adhuc alios esse, Proclus monet, eosque habent etiam Campanus, Commandinus, Clavius, Orontius Finneus, Billingsley aliique. Nempe punctum H non tantum, ut est in Graecis exemplaribus, supra EZ , verum etiam (Fig. 38. a.) in ipsam EZ , vel infra eam (Fig. 38. b.) cadere potest. At etiam his casibus facilis est demonstratio. Cadat enim (Fig. 38. a.) punctum H in rectam EZ , eritque, ob angulum $Ε Α Η > Ε Δ Ζ$, necessario punctum H in recta EZ ultra Z producta, i. e. erit $Ε Η$ vel $Β Γ > Ε Ζ$. Sin autem punctum H (Fig. 38. b.) cadet infra rectam EZ , erit triangulum $Ε Ζ Α$ intra triangulum $Ε Η Α$, adeoque $Δ Ζ + Ε Ζ < Α Η + Ε Η$ (I. 21.) adeoque, quum ex hyp.

rectilineus constitutus est ZAH . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 37.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, angulum autem angulo maiorem habeant, qui ab aequalibus lateribus continentur; et basin basi maiorem habebunt.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ , duo latera AB , $A\Gamma$ duobus lateribus ΔE , ΔZ aequalia habentia, utrumque utrique, latus nempe AB lateri ΔE , latus vero $A\Gamma$ lateri ΔZ , angulus autem BAG angulo $E\Delta Z$ maior sit; dico et basin $B\Gamma$ basi EZ maiorem esse.

Quoniam enim maior est BAG angulus $E\Delta Z$ angulo, constituatur ad ΔE rectam, et ad punctum in

sit $\Delta Z = A\Gamma$ i. e. ex constr. $= AH$, erit $EZ < EH$ (Ax. 5.). Ceterum potest etiam res brevius absolvi eo fere modo, quo Rob. Simson. utitur, quem exactioris demonstrationis causa paulo tantum immutatum sistimus. Sit nempe (Fig. 39.) $BA = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$, et angulus $BAG = E\Delta Z$, et ad BA , eam rectarum BA , $A\Gamma$, quae non maior est altera, constituatur angulus $BAA = E\Delta Z$ (I. 23.), et fiat $AA = \Delta Z$, et iungantur BA , $A\Gamma$, eritque (I. 4.) $BA = EZ$. Quum igitur angulus $BAA = E\Delta Z$ sit ex hypoth. minor angulo BAG , recta AA intra angulum BAG cadet, adeoque recta AA , si opus sit, producta, secabit rectam $B\Gamma$. Secet eam in M , eritque $AM\Gamma > AB\Gamma$ (I. 16.). At ob $AB = A\Gamma$ ex hypoth. erit $AB\Gamma > A\Gamma B$ (I. 5. et I. 19.) unde semper $AM\Gamma > A\Gamma B$, adeoque $AM < A\Gamma$ (I. 19.) adeoque, quum $AA = A\Gamma$, punctum A infra $B\Gamma$ cadet. Et quum $AA = A\Gamma$, erit $AA\Gamma = A\Gamma A$ (I. 5.), adeoque $BAG > B\Gamma A$ et $B\Gamma$

καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ , τῇ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ EAH . καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν AG , AZ ἴση ἢ ΔH , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EH , ZH .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ AE , ἡ δὲ AG τῇ ΔH , δύο δὲ αἱ BA , AG δυοὶ ταῖς EA , ΔH ἴσαι εἶναι, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ EAH ἴση ἐστὶν βάσει ἄρα ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EH ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ΔH , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ AZH γωνία τῇ ὑπὸ ΔHZ . μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ AZH , τῆς ὑπὸ EHZ , πολλῶν ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZH τῆς ὑπὸ EHZ . Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ EZH , μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ EZH γωνίαν τῆς ὑπὸ EHZ . ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ EH τῆς EZ . Ἰση δὲ ἡ EH τῇ $B\Gamma$. μείζων ἄρα καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς EZ . Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν δὲ βάσιν τῆς βασιως μείζονα ἔχῃ καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

> BA (I. 19.) i. e. $B\Gamma > EZ$. Atque hac Pfeidereri demonstratione (vid. Hauberi Chrestom. p. 315. sqq.) satisfactum est iis, quae in Rob. Simsoni demonstratione adhuc desideraverat Thomas Simpson. (Elem. of Geometry London 1800. p. 262.), ostenso, punctum A necessario infra $B\Gamma$ cadere. Caeterum, ut Proclus observat, conditiones problematis non definiunt, utrum et quo casu triangula $AB\Gamma$, ΔEZ inter se

ea Δ , $B\Gamma$ angulo aequalis $E\Delta H$ (Prop. 23.); et ponatur alterutri ipsarum $\Delta\Gamma$, ΔZ aequalis ΔH (Prop. 3.), et iungantur EH , ZH .

Quoniam igitur aequalis est AB quidem rectae ΔE , $\Delta\Gamma$ vero rectae ΔH , duae BA , $\Delta\Gamma$ duabus $E\Delta$, ΔH aequales sunt, utraque utrique, et angulus $B\Gamma\Delta$ angulo $E\Delta H$ aequalis est; basis igitur $B\Gamma$ basi EH est aequalis (Prop. 4.). Rursus, quoniam aequalis est ΔZ rectae ΔH , aequalis est et angulus ΔZH angulo ΔHZ (Prop. 5.); maior igitur ΔZH angulo EZH ; multo igitur maior est EZH angulo EHZ . Et quoniam triangulum est EZH , maiorem habens angulum EZH angulo EHZ ; maiorem autem angulum maius latus subtendit (Prop. 19.); maius igitur et latus EH latere EZ . Aequale autem EH lateri $B\Gamma$; maius igitur et $B\Gamma$ latere EZ . Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 40.)

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, utrumque utrique, basin autem basi maiorem habeant; et angulum angulo maiorem habebunt, qui ab aequalibus rectis continetur.

aequalia, aut utrum maius sit altero, quod demum ope I. 38. determinari poterit. Alias adhuc observationes et consectaria Pfeidereri vid. l. c.

PROPOSITIO XXV.

Obs. Alias huius propositionis, quae conversa est prioris, demonstrationes, easque directas, at prolixiores, ex Menelao et Herone affert Proclus, quas etiam videre est apud Clavius, in quibus autem varii casus, qui locum habere possunt, notari

"Εστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς δύο πλευράς τὰς AB , $ΑΓ$ ταῖς δυοὶ πλευραῖς ταῖς $ΔΕ$, $ΔΖ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ $ΔΕ$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$. βάσις δὲ ἡ $ΒΓ$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἡ ἐλάσσων· ἴση μενδὺν οὐκ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$, ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ EZ · οὐκ ἐστὶ δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$. Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$. ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ $ΒΓ$ βάσεως τῆς EZ · οὐκ ἐστὶ δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΖ$. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

Η Π Ο Τ Α Σ Ι Σ κς'.

'Εὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾶ

debebant, observante Haubero Chrestom. p. 270. sqq. Cf. Pfeidereri observationes et consecutaria ibid. p. 319. sq.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. 1. Prima huius propositionis pars, quum nempe unum latus cum angulis ei adiacentibus unius trianguli aequale est uni lateri atque angulis adiacentibus in altero triangulo facile per superpositionem directe demonstratur: Ob analogiam autem casus posterioris sine dubio Euclides similiter ac partem posteriorem demonstrare spuluit. Caeterum Thaleti hoc theorema tribuere Eudemum in historiis geometricis, Proclus refert. Latus autem si in uno triangulo id sumatur, quod uni aequalium angulorum oppositum est, in altero triangulo pariter illud

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΔEZ , duo latera AB $\Delta\Gamma$ duobus lateribus ΔE , ΔZ aequalia habentia, utrumque utrique, AB quidem lateri ΔE , $\Delta\Gamma$ vero lateri ΔZ , basis autem $B\Gamma$ basi EZ maior sit; dico et angulum $B\Delta\Gamma$ angulo $E\Delta Z$ maiorem esse.

Si enim non, vel aequalis est ei; vel minor; aequalis autem non est $B\Delta\Gamma$ ipsi $E\Delta Z$, aequalis enim esset et basis $B\Gamma$ basi EZ (Prop. 4.); non est autem; non igitur aequalis est angulus $B\Delta\Gamma$ ipsi $E\Delta Z$. At neque minor est $B\Delta\Gamma$ ipso $E\Delta Z$, minor enim esset et basis $B\Gamma$ basi EZ (Prop. 24.); non est autem; non igitur minor est $B\Delta\Gamma$ angulus ipso $E\Delta Z$. Ostensum est autem neque aequalem esse; maior igitur est $B\Delta\Gamma$ ipso $E\Delta Z$. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO XXVI. (Fig. 41.)

Si duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, utrumque utrique, et unum latus uni lateri

sumendum erit, et contra. Caeterum etiam hic valet, quod in Prop. 8. diximus, triangula etiam ipsa esse aequalia.

Obs. 2. Quatuor hactenus casibus duo triangula inter se aequalia esse vidimus, nempe

1) si unum latus et duo anguli adiacentes,

2) si unum latus, et unus angulus ei lateri adiacens, atque angulus ei oppositus in utroque angulo sint aequalia. Atque haec quidem in nostra propositione.

3) Si duo latera cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sint utrimque (I. 4.)

4) Si omnia tria latera utrimque aequalia sint (I. 8.). Restat adhuc casus 5., quo duo triangula inter se aequalia esse possunt, nempe, si duo latera cum angulo uni eorum opposito

ἴσην, ἥτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑπο-
τείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς
πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας εἴξει, ἑκατέραν
ἑκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔEZ$, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ $ABΓ$, $BΓA$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $ΔEZ$, $EZΔ$ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ $ABΓ$ τῇ ὑπὸ $ΔEZ$ τὴν δὲ ὑπὸ $BΓA$ τῇ ὑπὸ $EZΔ$ · ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $BΓ$ τῇ EZ · λέγω, οτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας εἴξει, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ $ΔE$, τὴν δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΔZ$, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ $BAΓ$ τῇ ὑπὸ EAZ .

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΔE$, μίᾳ αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων ἡ AB , καὶ κείσθω τῇ $ΔE$ ἴση ἡ BH , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $HΓ$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν BH τῇ $ΔE$, ἡ δὲ $BΓ$ τῇ EZ , δύο δὴ αἱ BH , $BΓ$ δυοὶ ταῖς $ΔE$, EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $HΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔEZ$ ἴση ἐστί· βάσεις ἄρα ἡ $HΓ$ βάσει τῇ $ΔZ$ ἴση ἐστί, καὶ τὸ $HΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔEZ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς

utrimque aequalia sint. Hoc tamen casu, si nulla alia determinatio accedat, aequalitatem triangulorum generatim asserere non licebit, quod etiam Proclus observat p. 91. Sit enim (Fig. 42.) triangulum aequicrurum $ABΓ$, et producaturs basis $BΓ$ ad punctum aliquod $Δ$, ducaturque $ΑΔ$. Iam duo triangula $ΑΓΔ$, $ABΔ$ habent latus quidem $ΑΔ$ commune, deinde $ΑΓ = AB$ ex hypoth. et angulum etiam $Δ$ communem, qui lateribus $ΑΓ$, AB opponitur, et manifestum tamen est, triangula ipsa non esse aequalia, quoniam unum $ABΔ$ sit tantum pars alterius $ΑΓΔ$. Aequalia tamen inter se esse duo triangula demonstrabitur.

aequale, vel quod est ad aequales angulos, vel quod subtendit unum aequalium angulorum; et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo.

Sint duo triacula $AB\Gamma$, ΔEZ , duos angulos $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ duobus ΔEZ , EZA aequales habentia, utrumque utrique, $AB\Gamma$ quidem angulo ΔEZ , $B\Gamma A$ vero angulo EZA , habeant autem et unum latus uni lateri aequale; primum, quod est ad aequales angulos, latus $B\Gamma$ lateri EZ ; dico et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habitura esse, utrumque utrique, AB quidem lateri ΔE , $A\Gamma$ vero lateri ΔZ , et reliquum angulum reliquo angulo, $B\Gamma A$ angulo $E\Delta Z$.

Si enim inaequalis est AB rectae ΔE , una earum maior est. Sit maior AB , et ponatur rectae ΔE aequalis BH , et iungatur $H\Gamma$.

Quoniam igitur aequalis est BH quidem rectae ΔE , $B\Gamma$ vero rectae EZ , duae BH , $B\Gamma$ duabus ΔE , EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus HBT angulo ΔEZ aequalis est; basis igitur $H\Gamma$ basi ΔZ aequalis est, et HBT triangulum ΔEZ triangulo aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales

Si utrimque unum angulum uni aequalem habeant, circa alios autem angulos latera aequalia, reliquorum vero angulorum utrumque simul minorem aut non minorem recto; et ostendetur angulos etiam aequales esse, circa quos aequalia sunt latera, et tertium latus tertio lateri fore aequale. Sit nempe (Fig. 43.) angulus $A=A$, et $AB=\Delta E$, $B\Gamma=EZ$, et 1) anguli I , Z acuti; eritque $AB\Gamma=\Delta EZ$, et $A\Gamma=\Delta Z$, et duo triacula aequalia. Si enim non sit angulus $AB\Gamma=\Delta EZ$, erit alteruter maior altero. Sit, si fieri potest, $AB\Gamma$ maior angulo ΔEZ , et fiat $ABH=\Delta EZ$, eritque in triangulis ABH , ΔEZ , $AB=\Delta E$

γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὡς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ HGB γωνία τῇ ὑπὸ ΔZE . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔZE τῇ ὑπὸ BGA ὑπόμεται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BGH ἄρα τῇ ὑπὸ BGA ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔE ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ BG τῇ EZ ἴση, δύο δὲ αἱ AB , BG δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABG γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστίν ἴση· βάσις ἄρα ἡ AG βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ AB τῇ ΔE · λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν AG τῇ ΔZ , ἡ δὲ BG τῇ EZ , καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση ἐστίν.

(hypoth.), angulus $A = \Delta$ pariter ex hypoth. et $ABH = \Delta EZ$ (hypoth.): itaque $AHB = \Delta ZE$ (I. 25.), et $BH = EZ$ i. e. ex hypoth. = BG . Quum autem ex hypoth. sit angulus Z acutus, acutus erit AHB , unde BHG obtusus (I. 14.). At BGH triangulum, ut ostendimus, aequicrurum est, unde BHG etiam acutus erit (I. 17. Cor. 2.) q. e. a. Sint autem 2) anguli I , Z non minores recto, atque ostendetur ut ante, esse triangulum BHG aequicrurum, adeoque angulum I acutum vel minorem recto (I. 17. Cor. 2.), quem tamen non minorem esse recto posuimus, q. e. a. Caeterum, si angulus A et Δ rectus vel obtusus sit, necessario acutus erit angulus I et Z (I. 17.), unde tum nova circa hos angulos determinatione non opus est. Pari-
ter, si sit $AB < BG$, adeoque $\Delta E < EZ$, erit angulorum I et Z uterque acutus (I. 18. Cor. 1.), unde etiam tum res nova demonstratione haud eget. Quum vero demonstratum fuerit, esse angulum $ABG = \Delta EZ$, erunt tum ex I. 4. etiam ipsa tri-
angula,

erunt, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur HIB angulus angulo AZE . Sed AZE angulo BFA ponitur aequalis; igitur et BFH angulo BFA aequalis est, minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur inaequalis est AB rectae AE ; aequalis igitur est. Est autem et BF rectae EZ aequalis, duae igitur AB , BF duabus AE , EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus ABF angulo AEZ est aequalis; basis igitur AF basi AZ aequalis est, et reliquus angulus BAT reliquo angulo EAZ aequalis est (Prop. 4.).

Sed et rursus, sint latera aequales angulos subtendentia aequalia, ut AB lateri AE ; dico rursus et reliqua latera reliquis lateribus aequalia futura esse, AT quidem lateri AZ , BT vero lateri EZ , et adhuc reliquum angulum BAT reliquo angulo EAZ aequalan esse.

et omnes eorum partes inter se aequalia. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 321. sq. Hic ex Clavio vel Tacqueto vel Whistono (Andr. Tacquet. Elem. Euclid. Geometriae illustrata a Guil. Whiston. Romae 1745. p. 23.) addi possunt sequentia corollaria, quorum pars iam ad praecedentes propositiones pertinet, at ob nexum cum reliquis hic adiicitur. Cf. Pfeiderer. l. c. p. 323.

Cor. 1. In triangulo aequicruro recta angulum ad verticem bisecans ad basin perpendicularis est, et basin aequae ac triangulum bisecat (I. 4.).

Cor. 2. In triangulo aequicruro recta, quae e vertice ducta basin bisecat, bisecat etiam angulum ad verticem, et triangulum, et perpendicularis est ad basin (I. 8.). Cf. dicta ad I. 10.

Cor. 3. In triangulo aequicruro recta, quae a vertice perpendicularis ducitur ad basin, basin vel angulum ad verticem et triangulum bisecat (I. 5. et I. 26.).

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἡ BF τῇ EZ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἐστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ BF τῆς EZ , καὶ κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ $B\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Theta$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $B\Theta$ τῇ EZ , ἡ δὲ AB τῇ AE , δύο δὴ αἱ AB , $B\Theta$ δυσὶ ταῖς AE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι βάσεις ἄρα ἡ $A\Theta$ βάσει τῇ AZ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον τῷ AEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' αἷ αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ γωνία τῇ ὑπὸ EZA . Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ EZA τῇ ὑπὸ BGA ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ ἄρα τῇ ὑπὸ BGA ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὲ τοῦ $A\Theta\Gamma$ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $B\Theta A$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ BGA , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἡ BF τῇ EZ , ἴση ἄρα. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AB τῇ AE ἴση· δύο δὴ αἱ AB , BF δυσὶ ταῖς AE , EZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι βάσεις ἄρα ἡ AF βάσει τῇ AZ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ABF τρίγωνον τῷ AEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAG τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EAZ ἴση. Ἐὰν ἄρα δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

Cor. 4. Quod e media basi ad eam erigitur perpendicularum in triangulo aequicruro, transit per trianguli verticem, et angulum ad verticem bisecat. Quodsi enim non per verticem transcat, ducatur per verticem alia recta ad mediam basin, erit etiam haec ad basin perpendicularis in eodem puncto, quo prius illud perpendicularum, quod fieri nequit (I. 11. Cor. 2.).

Cor. 5. Rectae a quovis talis perpendiculari puncto ad puncta baseos extrema ductae efficiunt triangulum aequicrurum (I. 4.).

Si enim inaequalis est BF rectae EZ una earum maior est. Sit maior, si fieri potest, BF recta EZ , et ponatur rectae EZ aequalis $B\Theta$, et iungatur $A\Theta$.

Et quoniam aequalis est $B\Theta$ quidem rectae EZ , AB vero rectae AE , duae AB , $B\Theta$ duabus AE , EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulos aequales continent; basis igitur $A\Theta$ basi AZ aequalis est, et triangulum $AB\Theta$ triangulo AEZ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis igitur est angulus $B\Theta A$ angulo EZA . Sed EZA angulo BFA est aequalis; et $B\Theta A$ igitur angulo BFA est aequalis; trianguli igitur $A\Theta\Gamma$ exterior angulus $B\Theta A$ aequalis est interiori et opposito BFA , quod fieri nequit (Prop. 16.). Non igitur inaequalis est BF rectae EZ ; aequalis igitur. Est autem et AB ipsi AE aequalis; duae igitur AB , BF duabus AE , EZ aequales sunt, utraque utrique, et angulos aequales continent; basis igitur $A\Gamma$ basi AZ aequalis est, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo AEZ aequale, et reliquus angulus $B\Gamma A$ reliquo angulo EZZ aequalis (Prop. 4.). Si igitur duo etc.

Cor. 6. Quae contra a puncto extra illud perpendicularum sito ad extrema basis ducuntur rectae, inaequales sunt, vel triangulum scalerum efficiunt. Nam quae a tali puncto ad mediam basin ducitur recta, illi oblique insistit (I. 11., Cor. 2.) vel ad alteram sui partem acutum, ad alterum obtusum angulum efficit, unde latera his angulis opposita inaequalia erunt (I. 24.). Itaque vertices omnium triangulorum acquicrurorum, super eadem basi constitutorum, sunt in perpendicularo e media basi erecto, vel illud perpendicularum est locus geometricus, in

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , $ΓΔ$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ $ΕΖ$, τὰς ἐναλλὰς γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΕΖ$, $ΕΖΔ$ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΔ$.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB , $ΓΔ$ συμπεσοῦνται, ἦτοι ἐπὶ τὰ $ΒΔ$ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ $ΑΓ$. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ $ΒΔ$ μέρη κατὰ τὸ H .

Τριγώνου δὴ τοῦ $ΕΗΖ$ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΕΖ$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $ΕΖΗ$ ¹⁾, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB , $ΓΔ$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ $ΒΔ$ μέρη. Ὀμοίως

1) Μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ $ΕΖΗ$ · ἀλλὰ καὶ ἴση. Ita edd. Basil. et Oxon. Peyrard. e Cod. a, cum quo consentit exemplar a Basil. ad marginem citatum, habet breviorē lectionem, quam in textu dedimus.

quo siti sunt vertices omnium triangulorum aequicrutorum, quae super hac basi constitui possunt,

COR. 7. Si recta angulum trianguli alicuius bisecans oppositae basi est perpendicularis, triangulum illud erit aequicrurum (I, 26.).

Hanc primam huius libri partem antequam relinquamus, monendi videntur lectores, quam plurimas adhuc ad eas, quas hactenus tractavimus, propositiones pertinentes observationes utilissimas reperiri in Append. 2. eius, quam saepius citavimus, Chrestom. Geom. Hauberi, quas attente perlegere neminem harum rerum studiosum poenitebit,

PROPOSITIO XXVII.

Ob s. Anguli alteri (αἱ ἐναλλὰς γωνίαι) in hac proposi-

PROPOSITIO XXV. (Fig. 44.)

Si in duas rectas recta incidens alternos angulos aequales inter se faciat, parallela erunt inter se rectae.

In duas enim rectas AB , ΓA recta incidens EZ , alternos angulos AEZ , EZA aequales inter se faciat; dico parallelam esse AB rectae ΓA .

Si enim non, productae AB , ΓA , convenient vel ad BA partes, vel ad $A\Gamma$; producantur, et conveniant ad BA partes in H ,

Trianguli igitur EHZ exterior angulus AEZ aequalis est interiori et opposito EZH , quod fieri nequit (Prop. 16.); non igitur AB , ΓA productae convenient ad BA partes. Similiter autem ostendetur

tione primum occurrunt. Sunt autem illi anguli, qui, si recta aliqua duas rectas secet, e diversis rectae secantis partibus, alter ad unam duarum, quae ab ea secantur, alter ad alteram constituuntur. Et quidem anguli alterni interni vocantur, si uterque est ad partem interiorem duarum rectarum, quae ab alia secantur, ut hic anguli AEZ , AZE , vel BEZ , IZB , et de his solis apud Euclidem sermo est. Sin autem, reliquis conditionibus manentibus, sit uterque ad partem externam rectarum, quae secantur, tum anguli alterni externi audiunt v. c. AEA , MZA , vel AEB , IZM . Caeterum etiam si anguli alterni externi fuerint aequales, aut (Prop. 28.) duo externi ad eadem partes secantis aequales fuerint duobus rectis, consequetur parallelismus rectarum, quae ita secantur, quod post Proclum notat Isaac. Monachus in Schol. ad Euclid. libr. VI. priores, Proclus adhuc observat, supponere Euclidem rectas in eodem plano positas. Cf. dicta ad Defin. 7.

Cor. 1. Si in figura quadrilatera $AB\Gamma A$ (Fig. 45.) latera

δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ $ΑΓ$. αἱ δὲ ἐπὶ μη-
δέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι πα-
ράλληλος, ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$. Ἐὰν ἄρα εἰς
δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεία ἐμπίπτουσα τὴν
ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ
αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ
μέρη δυσὶν ὁρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται
ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς $ΑΒ$, $ΓΔ$ εὐθεία ἐμ-
πίπτουσα ἡ $ΕΖ$ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ $ΕΗΒ$
τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη 1)
γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΘΔ$ ἴσην ποιεῖτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ
ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ $ΒΗΘ$, $ΗΘΔ$ δυσὶν ὁρ-
θαῖς ἴσας· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΕΗΒ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΔ$,
ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $ΕΗΒ$ τῇ ὑπὸ $ΑΗΘ$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ
ὑπὸ $ΑΗΘ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΗΘΔ$ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσὶν
ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $ΒΗΘ$, $ΗΘΔ$ δυσὶν ὁρθαῖς
ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $ΑΗΘ$, $ΒΗΘ$ δυσὶν

1) Verba καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, quae Peyrard. secutus
Codicem a expunxerat, et quae in edit. quoque Basil. de-
sunt, ex edit. Oxon. restituiimus. Eadem verba in ipso enun-
ciato propos. sequentis desunt in cod. a, ubi tamen etiam
Peyrard. ea retinuit.

opposita aequalia sint, nempe $ΑΒ=ΓΔ$, $ΑΓ=ΒΔ$, erunt eadem
etiam parallelae ex I. 8. et I. 27.

Cor. 2. Pariter, si $ΑΒ=ΓΔ$, et $ΓΒΑ=ΒΓΔ$, erit, ob
 $ΒΓ$ communem, ex I. 4. etiam $ΑΓ=ΒΔ$, et tam $ΑΒ$, $ΓΔ$,
quam $ΑΓ$, $ΒΔ$ parallelae (I. 27.).

neque ad AI ; quae autem in neutras partes conveniunt, parallelae sunt (Def. 35.); parallela igitur est AB rectae IA . Si igitur in duas etc.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 46.)

Si in duas rectas recta incidens exteriorem angulum interiori et opposito et ad easdem partes aequalem faciat, vel interiores et ad easdem partes duobus rectis aequales faciat; parallelae erunt inter se rectae.

In duas enim rectas AB , IA recta incidens EZ exteriorem angulum EHB interiori et opposito et ad easdem partes posito angulo $H\Theta A$ aequalem faciat, vel interiores et ad easdem partes ipsos $BH\Theta$, $H\Theta A$ duobus rectis aequales; dico parallelam esse AB rectae IA .

Quoniam enim aequalis est EHB angulo $H\Theta A$, sed EHB angulo $AH\Theta$ est aequalis (Prop. 15.), et $AH\Theta$ igitur ipsi $H\Theta A$ est aequalis (Ax. 1.); et sunt alterni; parallela igitur est AB ipsi IA (Prop. 27.).

Rursus, quoniam anguli $BH\Theta$, $H\Theta A$ duobus rectis aequales sunt, sunt autem anguli $AH\Theta$, $BH\Theta$

Cor. 3. Denique, si $ABI = BIA$, et $AIB = IBA$, erit ex I. 26. $AB = IA$, et $AI = BA$, et tam AB , IA , quam AI , BA parallelae (I. 27.).

PROPOSITIO XXVIII.

Obs. Duae conditiones, e quibus hic rectas parallelas esse concluditur, reducuntur ad conditionem propositionis praecedentis. Generatim nempe tres hae conditiones, ut facile patet, ita a se invicem pendent, ut nulla earum sine re-

ὀρθαῖς ἴσαι αἱ ἄρα ὑπὸ $A\Theta$, $B\Theta$ ταῖς ὑπὸ $B\Theta$, $H\Theta$ ἴσαι εἰσίν. Κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ $B\Theta$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $A\Theta$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $H\Theta$ ἐστὶν ἴση καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παραλλήλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. Ἐὰν ἄρα εἰς δύο καὶ τὰ ἐξῆς.

Π. Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπιπτούσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύοιν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ EZ · λέγω, ὅτι τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ $A\Theta$, $H\Theta$ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ $H\Theta$ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ $B\Theta$, $H\Theta$ δύοιν ὀρθαῖς ἴσας.

liquis locum habere possit. Caeterum poterat etiam Prop. 28. immediate demonstrari, similiter ac Prop. 27.

Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο ΧΧΙΧ.

Obs. In hac propositione, quae conversâ est duarum praecedentium, primum adhibetur notum illud axioma undecimum, vel, ut alii volunt, postulatum quintum. Quod quidem, quamvis verissimum, haud tamen aequè perspicuum esse ac reliqua Euclidis axiomata, ita ut omnibus, quibus innotescat, statim, etiam sine ulla illustratione, assensum quasi extorqueat, plerique omnes fateantur. Iam Proclus circa postulatum illud quintum monet: „esse potius theorema multis dubiis obnoxium, unde et Ptolemaeus illud libro singulari demonstrare tentaverit, et pluribus definitionibus ac theo-

duobus rectis aequales; ergo $AH\theta$, $BH\theta$ ipsis $BH\theta$, $H\theta A$ aequales sunt (Ax. 1.). Communis auferatur $BH\theta$; reliquus igitur $AH\theta$ reliquo $H\theta A$ est aequalis (Ax. 3.); et sunt alterni; parallela igitur est AB rectae ΓA (Prop. 27.). Si igitur in duas etc.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 46.)

In parallelas rectas recta incidens, et alternos angulos aequales inter se facit, et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes aequalem, et interiores et ad easdem partes duobus rectis aequales.

In parallelas enim rectas AB , ΓA recta incidat EZ ; dico eam alternos angulos $AH\theta$, $H\theta A$ aequales facere, et exteriorem angulum $EH\theta$ interiori et opposito et ad easdem partes $H\theta A$ aequalem, et interiores ad easdem partes $BH\theta$, $H\theta A$ duobus rectis aequales:

tematibus ad eius demonstrationem opus esse, et propositionem conversam (I. 17.) Euclidem demonstravisse. Forte quosdam eo deceptos hanc propositionem postulatis annuere, quod, si anguli fiant duobus rectis minores, rectarum erga se inclinatio et concursus per se patere videatur. At recte contra hos Geminum monere, peritissimos geometriae magistros praecipere, probabiles opiniones abesse debere ab huius scientiae ratiociniis. Et Aristotelem dicere, aeque absurdum esse, ab oratore demonstrationem petere, et a geometra persuaderi sibi pati. Et Symmiam apud Platonem ita habere: qui e verisimilibus demonstrationem petunt, eos vanos ingenio esse scio. Atque rectas, si anguli sint duobus rectis minores, erga se invicem inclinari, verum quidem esse ac necessarium. Lineas autem magis magisque ad se inclina-

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. "Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῆς ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ¹⁾. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $BH\Theta$. αἱ ἄρα ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ τῶν ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ μείζονες εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ δυσὶν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δύο ὁρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἡ δύο ὁρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα AB , $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτάς ὑποκείσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$. ἴση ἄρα.

1) Edd. Basil. et Oxon. habent: ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ $AH\Theta$. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστίν ἡ ὑπὸ $AH\Theta$. Nos cum Peyrardo secuti sumus lectionem breviorē cod. a.

tas, si producantur, alicubi concurrere, verum quidem esse, at non necessarium, nisi quis rationibus demonstret, in rectis id verum esse. Esse enim quasdam lineas in infinitum quidem propius ad se accedentes, nec tamen concurrentes; id, quamvis incredibile videatur, verum tamen esse, et in aliis lineis ita observatum. Unde dubium oriri, nonne et in rectis verum esse possit, quod verum sit in aliis lineis. Quod antequam per demonstrationes refutatum sit, menti molestiae quid afferre. Quum praeterea dubia, quae circa concursum earum rectarum prolata sint, satis sint speciosa, praestare sane, ista saltem probabilia, nec rationibus innixa, his libris excludere. Patere itaque, demonstrationem quaeri oportere." Similes aliorum querelas hic omitto. Nec tamen defuere, qui Euclidem haud absurde defendi posse, aut eius praecepta modo aliqua illustratione opus habere putarent, e quibus eminet Wallisius (Opp. Mathem. T. II. p. 668. sqq.), de quo infra in Excursu ad hunc locum. Quidquid sit, orta sunt quam plurima tentamina hanc quasi lacunam explendi, de quorum

Si enim inaequalis est $AH\theta$ angulo $H\theta A$, unus eorum maior est; sit maior $AH\theta$ angulo $H\theta A$. Communis addatur $BH\theta$; ergo $AH\theta$, $BH\theta$ angulis $BH\theta$, $H\theta A$ maiores sunt. Sed $AH\theta$, $BH\theta$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et igitur $BH\theta$, $H\theta A$ duobus minores rectis sunt. Rectae autem a minoribus quam duobus rectis productae in infinitum concurrunt (Post. 5. vel Ax. 11.). Ipsae igitur AB , ΓA productae in infinitum concurrent; non autem concurrunt, quia parallelae ponuntur; non igitur inaequalis est $AH\theta$ angulo $H\theta A$; aequalis igitur.

praecipuis ad finem huius libri dissetemus. Hic sufficiat monere, omnes, quae nostram hanc praecedunt, propositiones et pariter I. 31., sine illo axiomate demonstrari, et nonnullas etiam alias e sequentibus, at quam plurimam reliquarum partem inde derivari, unde, quam late res pateat, facile perspicitur.

Cor. 1. Quodsi in figura parallelogramma unus angulus rectus sit, erunt omnes recti. Aliter ita: Si recta secans duas parallelas perpendicularis sit ad unam earum, erit etiam ad alteram perpendicularis. (E Pfeidereri schedis, unde et multa in sequentibus, vel ubi non semper expressè monuerimus, desumpta sunt.)

Cor. 2. In omni parallelogrammo anguli eidem lateri adiacentes simul sumti aequales sunt duobus rectis.

Cor. 3. Recta AB (Fig. 47.) quae unam duarum parallelarum BI , AE , cum quibus in eodem plano est, secat, etiam alteram secat. Ducatur enim ex puncto quocunque Z rectae AE recta ZB , erique (I. 29.) $EZB + ZBI = 2$ rectis, hinc $EZB + ZBA < 2$ rectis, adeoque BA , AE concurrent (Ax. 11. vel Post. 5.).

Cor. 4. (Poletarii) Si duae rectae, quae duas parallelas secant, ad unum inter ipsas punctum coierint, duosque

Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $EH\B$ ἴσιν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ $EH\B$ ἄρα τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἴσιν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $BH\Theta$ αἱ ἄρα ὑπὸ $EH\B$, $BH\Theta$ ταῖς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $EH\B$, $BH\Theta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἑκατέρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῇ EZ παράλληλος λέγω, ὅτι καὶ ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ ἴσιν παράλληλος.

Ἐμπίπτειτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ HK .

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς AB , EZ εὐθεῖα ἐμπίπτωνκεν ἡ HK , ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Theta Z$. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς EZ , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτωνκεν ἡ HK , ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ $H\Theta Z$ τῇ ὑπὸ $HK\Delta$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AHK τῇ ὑπὸ $H\Theta Z$ ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ AHK

angulos alternos aequales fecerint, aut angulum externum aequalem interno opposito ad easdem partes, aut duos internos ex alterutra parte aequales: erunt istae duae rectae in directum, vel in unam lineam coincident. Haec propositio, quae est conversâ I. Prop. 29. sumto contrario facile apagogice demonstratur.

Cor. 5. Si e duabus rectis AB , BF (Fig. 48.), quae in puncto B conveniunt, una quidem AB alii $\alpha\delta$, altera autem BF alii $\gamma\epsilon$ parallelae sint, sint autem $\alpha\delta$, $\gamma\epsilon$ in eodem plano, in quo et AB , BF sunt, convenient etiam $\alpha\delta$, $\gamma\epsilon$ sub angulo aequali angulo ABF . Quum enim BF , $\gamma\epsilon$ parallelae sint, recta AB , quae ex hyp. unam earum BF secât, secabit etiam

Sed $AH\theta$ angulo EHB est aequalis (Prop. 15.); et EHB igitur angulo $H\theta A$ est aequalis.

Communis addatur $BH\theta$; ergo EHB , $BH\theta$ angulis $BH\theta$, $H\theta A$ aequales sunt. Sed EHB , $BH\theta$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et $BH\theta$, $H\theta A$ igitur duobus rectis aequales sunt. Ergo in parallelas etc.

PROPOSITIO XXX. (Fig. 49.)

Quae eidem rectae parallelae sunt, et inter se sunt parallelae.

Sit utraque rectarum AB , ΓA rectae EZ parallela; dico et AB rectae ΓA esse parallelam.

Incidat enim in ipsas recta HK .

Et quoniam in parallelas rectas AB , EZ recta incidit HK , aequalis est $AH\theta$ angulo $H\theta Z$ (Prop. 29.). Rursus quoniam in parallelas rectas EZ , ΓA recta incidit HK , aequalis est $H\theta Z$ angulo HKA (Prop. 28.). Ostensus est autem et AHK angulo $H\theta Z$ aequalis; AHK igitur angulo HKA est aequa-

alteram $\gamma\epsilon$ in puncto aliquo ζ (I. 29. Cor. 3.), eritque $B\zeta\gamma = AB\Gamma$ (I. 29.). Pariter, quum AB , $\alpha\delta$ parallelae sint, recta $\gamma\epsilon$, quae, ut ostendimus, rectam AB secat, secabit etiam $\alpha\delta$ in puncto aliquo β (I. 29. Cor. 3.), eritque angulus $\alpha\beta\gamma = B\zeta\gamma = AB\Gamma$ (I. 29.). Eodem modo ostenditur, $\alpha\beta$ et $B\Gamma$ productas se invicem secare, unde patet, dari figuras parallelogrammas (Def. 36.). Praeterea ex hoc Cor. et I. 27. Cor. 1. manifestum est, quadratum, rectangulum, rhombum et rhomboiden esse parallelogramma (Def. 30–33.).

PROPOSITIO XXX.

Obs. Proclus notat, rem eodem modo demonstrari posse,

ἄρα τῇ ὑπὸ $ΗΚΔ$ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$. Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ¹⁾, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ $Α$, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ $ΒΓ$. δεῖ δὴ, διὰ τοῦ $Α$ σημείου, τῇ $ΒΓ$ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $ΒΓ$ τυχόν σημεῖον τὸ $Δ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΔ$ καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $ΔΔ$ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Α$, τῇ ὑπὸ $ΑΔΓ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΔΑΕ$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς $ΕΑ$ εὐθεῖα ἡ $ΑΖ$.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς $ΒΓ$, $ΕΖ$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ $ΑΔ$ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ $ΕΑΔ$, $ΑΔΓ$ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΕΖ$ τῇ $ΒΓ$.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ $Α$, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ $ΒΓ$ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ᾗται ἡ $ΕΑΖ$ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Cod. a. addit: ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ αὐτῆς.

quamvis recta EZ , quae duabus reliquis parallela ponitur, haud intermedia inter illas, sed extra utramque posita fuerit.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ XXXI.

Obs. 1. Punctum datum ita situm esse debet, ut recta data etiam producta non cum eo conveniat, quod notant Proclus et Clavius.

Obs. 2. Alia ratio problema hoc solvendi patet ex I. 27. Cor. 1., ubi, si (Fig. 45.) per A ducenda sit parallela

lis; et sunt alterni. Parallela igitur est AB ipsi ΓA (Prop. 27.). Quae igitur eidem rectae etc.

PROPOSITIO XXXI. (Fig. 50.)

Per datum punctum, datae rectae parallelam rectam lineam ducere.

Sit quidem datum punctum A , data vero recta BF ; oportet igitur, per A punctum, rectae BF parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BF quodlibet punctum Δ , et iungatur AA ; et constituatur ad AA rectam, et ad punctum in ea A , angulo $AA\Gamma$ aequalis angulus AAE (Prop. 23.), et producat in directum ipsi EA recta AZ .

Et quoniam in duas rectas BF , EZ recta incidens AA alternos angulos EAA , $AA\Gamma$ aequales inter se facit, parallela est EZ rectae BF (Prop. 27.).

Per datum igitur punctum A , datae rectae BF parallela recta linea ducta est EAZ . Quod oportebat facere.

rectae ΓA , sumto in ΓA puncto quocunque Γ , descriptisque ex A , Γ , radio eodem quocunque circulis, posterior rectam ΓA secabit in puncto aliquo Δ , e quo deinde circulis radio AF descriptus intersecabit circulum ex A descriptum in puncto B , ita ut ducta recta AB parallela sit rectae ΓA .

Cor. Non plures una recta per idem punctum eidem rectae parallelae duci possunt. Ducantur enim, si fieri potest, duae uni eidemque rectae parallelae; erunt itaque (I. 30.) et ipsae inter se parallelae, quod, cum se in puncto aliquo secent, fieri nequit (Def. 35.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ.

Παντὸς τριγώνου μιᾷ τῶν πλευρῶν προσεβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ὅσοι ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι ὅσων ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

PROPOSITIO XXXII.

Obs. Proclus refert, Eudemum Peripateticum ad Pythagoraeos huius theorematism inventionem referre. Alias etiam demonstrationes exhibet Proclus, quibus primum propositionis pars posterior adstruitur, et exinde pars prior derivatur. Demonstrationem immediatam, non adhibita parallelarum theoria, exhibere tentavit Thibaut., de qua infra in Exc. I. Est autem haec propositio consequentiarum longe fertilissima, quarum praecipuae ex Proclo, Clavio, Tacqueto, Pflaiderero maxime, aliisque desumtae hae fere fuerint.

Cor. 1. Conversa quoque valet. Nampe, si (Fig. 51.) angulus aliquis exterior AGA ad triangulum aliquod aequalis sit duobus trianguli angulis internis oppositis BAT , ABT simul sumptis, erit recta TA rectae BT in directum. Erunt enim anguli $ATB + AGA$ aequales tribus angulis trianguli ABT i. e. ex hac propos. duobus rectis, unde BT , TA in directum erunt (I. 14.).

Cor. 2. Omnia triangula eandem angulorum summam habent.

Cor. 3. Quodsi duo anguli unius trianguli singuli aut simul sumti aequales sint duobus angulis alterius trianguli singulis aut simul sumtis, tertius etiam angulus prioris trianguli aequalis est tertio angulo posterioris trianguli: et contra, si duo triangula unum angulum aequalem habeant, aequalis etiam erit reliquorum summa.

Cor. 4. Si in triangulo aliquo dati sint duo anguli singulatim, aut simul sumti, datus est etiam tertius: et, si unus datus est, data est reliquorum summa.

Cor. 5. Prout unus angulus trianguli rectus, aut obtusus, aut acutus fuerit, summa reliquorum aequalis, aut mi-

PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis aequalis est; et interiores trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt.

nor, aut maior recto erit, et vice versa. Et unusquisque trianguli alicuius angulus rectus, aut obtusus, aut acutus erit, prout duo reliqui simul ipsi aequales, aut minores, aut maiores eo fuerint, et vice versa.

Cor. 6. Trianguli aequicruri dato uno angulo dantur etiam reliqui. Quum enim (I. 5.) anguli ad basin aequales sint, erit, dato uno angulorum ad basin, alter ei aequalis, et tertius ad verticem angulus datus erit (Cor. 4.), si vero primum datus fuerit angulus ad verticem, data erit reliquorum summa (Cor. 4.), unde, quum sint aequales (I. 5.) pariter singuli dati erunt.

Cor. 7. Prout angulus ad verticem trianguli aequicruri fuerit rectus, aut obtusus, aut acutus, quisque reliquorum vel aequalis erit dimidio recto, vel minor, vel maior dimidio recto.

Cor. 8. In quovis triangulo aequicruro utervis angulus ad basin erit dimidius anguli externi ad verticem.

Cor. 9. Trianguli aequilateri quisque angulus efficit tertiam partem duorum rectorum, vel duas tertias recti.

Cor. 10. Si in triangulo aequilatero ex vertice demittatur perpendicularum ab basin, duo orientur triangula rectangula, quorum anguli, praeter rectum, alter tertiam partem recti, alter duas tertias recti efficit. Hinc patet ratio, angulum rectum in tres partes aequales, et deinde bisecando (I. 9.) in sex, duodecim etc. partes aequales dividendi.

Cor. 11. Si in triangulo aequicruro ABF (Fig. 52.) alterum crus AB ultra verticem producat, usquedum AA fiat $=AB$, et iungatur AF , erit angulus AFB rectus. Omnes enim anguli trianguli $BFA=2$ rectis, at, ob $ABF=AFB$,

"Εστὼ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἢ $B\Gamma$ ἐπὶ τὸ Δ λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ $AF\Delta$ ἴση ἐστὶ ταῖς δυοῖ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ FAB , $AB\Gamma$. καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, $\Gamma A B$ δυοῖν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

"Ηχθω γάρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ AB εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓE .

et $\angle A\Gamma F = \angle F\Gamma A$ (I. 5.), erit $\angle F\Gamma B + \angle F\Gamma A$ i. e. $\angle F\Gamma B$ haec summa dimidia, adeoque aequalis recto. Hinc facile patet ratio, ad rectam BF in puncto ipsius F extremo perpendicularem erigendi, descripto nempe super BF triangulo aequalitero $AB\Gamma$, factaque $AA = AB$, et ducta AF .

Cor. 12. In quavis figura rectilinea (Fig. 53.) cuius anguli omnes extra figuram vergunt (angles saillans), ut itaque versus partes interiores figurae concavi sint, omnes anguli simul efficiunt bis tot rectos angulos, demtis quatuor, quot figura habet latera vel angulos, vel, si figura habeat n latera, omnes anguli simul efficient $(2n-4)$ angulos rectos, vel $(n-2) \times 2R$, si R rectum denotat. Nempe in omni tali figura v. c. $AB\Gamma\Delta EZ$ ab uno angulo quocunque A ad reliquos angulos omnes, exceptis duobus ipsi proximis, duci possunt rectae diversae a lateribus figurae, quae figuram in totidem triangula dividunt: itaque, si figura habet n angulos, provenient $n-2$ triangula, et, quum summa angulorum cuiusque trianguli sit $= 2R$ erit summa omnium istorum angulorum $= (n-2) \times 2R$. Ita v. c. in quovis quadrangulo summa angulorum erit $= 4R$; in quovis pentagono $= 6R$; in quovis hexagono $= 8R$ etc. Est haec propositio iam apud Proclum. Conversam quoque, nempe, si anguli quocunque, quorum numerus $= n$, dati sint, sitque eorum summa $= (n-2) \times 2R$, constitui posse figuram rectilineam n laterum, cuius anguli aequales sint datis istis angulis, demonstrat Develey, Elem. de Géom. Append. ad Livr. II. §. 45.

Sit triangulum $AB\Gamma$, et producaturs ipsius unum latus $B\Gamma$ in Δ ; dico exteriorem angulum $\Delta\Gamma A$ aequalem esse duobus interioribus et oppositis ΓAB , $AB\Gamma$, et interiores trianguli tres angulos $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB duobus rectis aequales esse.

Ducatur enim, per Γ punctum, rectae AB parallela ΓE (Prop. 31.).

Cor. 13. Quodsi igitur in quadrangulo tres anguli recti fuerint, vel saltem summam trium rectorum effecerint, etiam quartus rectus erit, et contra: si unus rectus sit, summam trium reliquorum simul tres rectos efficiet: et, si in quadrangulo duo anguli simul duos rectos faciant, facient etiam reliqui duo simul duos rectos.

Cor. 14. Quodsi vero (Fig. 54.) nonnulli figurae anguli intorsum vergant (angles rentrans), ita tamen, ut nullum figurae latus plura duobus e reliquis lateribus secant, etiam talis figura resolvi poterit in tot triangula, demtis duobus, quot figura latera habet, e. g. si figura n latera habeat, in $n-2$ triangula, et summa angulorum horum triangulorum pariter efficiet $(n-2) \times 2R$. At observandum est, horum triangulorum summam intrare angulos illos gibbos s. intorsum vergentes, siquidem angulos eos dicere velis. Sensu enim magis solito angulus vocatur inclinatio duarum rectarum ex ea parte, qua minor est duobus rectis. Quidquid sit, si angulos hos gibbos numerare velis, erit adhuc summa angulorum interno- rum figurae, $= (n-2) \times 2R$. Quodsi figura habeat N angulos gibbos A, B, C etc. adeoque praeter eos $n-N$ angulos consueto sensu sumtos, vel concavos, quisque angulorum gibborum habebit alium ipsi contiguum, extrorsum vergentem, solito sensu sumtum, A v. c. habebit angulum contiguum a , B angulum b , etc. ita ut $A=4R-a$, $B=4R-b$ etc. adeoque $A+B+C \dots$ (quorum numerus N) $= 4N.R - (a+b+c \dots)$. Iam, si summa angulorum concavorum figurae ae-

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστίν ἡ AB τῇ GE , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωνεν ἡ AF , αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ BAF , AGE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστίν ἡ AB τῇ GE , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωνεν εὐθεΐα ἡ BD ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ EGD ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ABG . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AGE τῇ ὑπὸ BAF ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ AGD ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ BAF , ABG .

qualis sit angulo S , erit $S + A + B + C \dots = (n-2) \times 2R$, adeoque $S + 4N.R - (a + b + c \dots) = 2nR - 4R$, vel $S - (a + b + c \dots) = 2nR - (N+1)4R$, i. e. summa angulorum concavorum figurae superabit summam angulorum gibbis contiguum, duobus rectis tot vicibus sumtis, quot figura latera habet, demtis quatuor rectis una vice plus sumtis, quam anguli gibbi adsunt. Hinc consequitur, si fuerit $n = 2(N+1)$ fore $S = a + b + c \dots$ ut, si figura aliqua quatuor latera habuerit, adeoque $n = 4$ fuerit, et unus in ea angulus gibbus sit, (plures enim tum gibbi esse nequeunt) erit $S = a$, quod etiam ex figura facile patet. Quodsi unum latus plura duobus e reliquis intersecet, figura implicatior vix dicere permittit, qui anguli interni aut externi vocari debeant, neque res tanti est, ut ei iam immorari liceat.

Cor. 15. Si in figura rectilinea, quae angulos gibbos non habet (Fig. 55.) singula latera figurae producantur ordinatim versus easdem partes, omnes anguli externi aequales erunt quatuor rectis, quicumque sit numerus laterum figurae. Nam quilibet externus cum ipsi contiguo interno aequalis est duobus rectis. Omnes igitur externi cum omnibus internis bis tot rectis aequales sunt, quot figura latera habet. At interni soli (Cor. 12.) bis tot rectis, quot figura latera habet, demtis quatuor rectis. Ergo anguli externi simul aequantur quatuor rectis. (Est etiam haec propositio Procli.)

Et quoniam parallela est AB rectae FE , et in ipsas incidit AT , alterni anguli BAT , ATE aequales inter se sunt (Prop. 29). Rursus, quoniam parallela est AB rectae FE , et in ipsas incidit recta BA , exterior angulus ETA aequalis est interiori et opposito ABT (Prop. 29.). Ostensus autem est et ATE angulo BAT aequalis; totus igitur ATA exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis BAT , ABT .

Cor. 16. Si figurae rectilineae angulos gibbos habent (Fig. 56.), hi quidem proprie loquendo non habent angulum externum simili ratione, ac in reliquis, formatum. Unum enim latus anguli gibbi productum intra figuram cadit. Quodsi vero ad analogiam reliquorum eos angulos, quos unum latus productum cum latere sibi contiguo facit, improprie pro angulis externis sumere velis, erit excessus angulorum externorum proprie dictorum super hos externos improprie dictos aequalis duobus rectis. Quodsi enim omnes litterae idem significent, ac in Cor. 14., sit summa angulorum proprie dictorum externorum, qui ad $(n-N)$ angulos concavos formantur, $=$ angulo Z , eritque $Z = (n-N).2R - S = n.2R - N.2R - S$. Deinde, si anguli illi improprie dicti externi, qui ad angulos gibbos proveniunt uno latere producto, vocentur $\alpha, \beta, \gamma \dots$ erunt $\alpha + \beta + \gamma \dots = A + B + C \dots - 2N.R$, adeoque $Z - (\alpha + \beta + \gamma \dots) = n.2R - S - (A + B + C \dots)$. At ex Cor. 14. $S + A + B + C \dots = (n-2).2R = n.2R - 4R$, hinc $Z - (\alpha + \beta + \gamma \dots) = 4R$. Etiam hic figuras tantum consideramus, in quibus nullum latus pluribus quam duobus e reliquis occurrit.

Cor. 17. Si figura aliqua rectilinea (Fig. 57.) ita comparata sit, ut duo quaecunque latera, quae unum latus inter se interpositum habent, extra figuram ab ea lateris interpositi parte, e qua non est figura rectilinea, concurrant, anguli, quos haec latera efficiunt, simul sumti bis tot rectos efficiunt,

Κοινή προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΓΔ$, $ΑΓΒ$ τριῶν ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΓΑ$, $ΓΑΒ$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $ΑΒΔ$, $ΑΓΒ$ δυὸν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $ΑΓΒ$, $ΓΒΑ$, $ΓΑΒ$ ἄρα δυὸν ὁρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Παντὸς ἄρα τριγώνου καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

Ἐστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ · λέγω, ὅτι καὶ αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $ΒΓ$.

quot figura habet latera, demtis octo rectis, v. c. in pentagono duos, in hexagono quatuor, in figura n laterum $2nR - 8R$. Formantur enim n triangula, quorum anguli efficiunt $2nR$, a quibus si subtrahantur anguli figurae externi bis sumti, erunt anguli illi nunc demum formati simul $= 2nR - 8R$. In triangulis et quadrilateris occurrit ille ita, ut diximus, locum habere nequit. De pentagono rem primum demonstravit Campanus. Idem adhuc valet, etiamsi duo latera, quae unum inter se interpositum habent, parallela sint.

Cor. 18. In figuris rectilineis, quarum omnes anguli aequales sunt, e numero laterum vel angulorum facile quantitas uniuscuiusque anguli determinatur. Quum enim ex Cor. 12. omnes anguli simul in figura, quae n latera habet, sint $(n-2) \cdot 2R$, erit unusquisque angulorum $= \frac{(n-2) \cdot 2R}{n} = 2R - \frac{4R}{n}$.

Cor. 19. Quum omnes anguli circa aliquod punctum constituti simul efficiant quatuor rectos (I. 13. Cor. 3.) spatium circa aliquod punctum figuris aequiangulis eundem om-

Communis addatur ATB ; ergo ATA , ATB tribus ABT , BTA , TAB aequales sunt. Sed ATA , ATB duobus rectis aequales sunt (Prop. 13.); et ATB , TBA , TAB igitur duobus rectis aequales sunt. Omnis igitur trianguli etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 58.)

Quae et aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectae, et ipsae aequales et parallelae sunt.

Sint et aequales et parallelae AB , TA , et coniungant ipsas ad easdem partes rectae AT , BA ; dico et AT , BA et aequales et parallelas esse.

Iungatur enim BT .

nibus angulum ad hoc punctum comprehendentibus tum saltem expleri poterit, si unus istorum angulorum pars aliquota quatuor rectorum fuerit, vel, si numerus n laterum talis figurae ita sit comparatus, ut $4R : \frac{(n-2) \cdot 2R}{n}$, vel $\frac{2n}{n-2}$ sit numerus integer. Id vero non fiet, nisi sit vel $n=3$ (ubi sex anguli trianguli aequianguli i. e. aequilateri spatium explebunt), vel $n=4$ (ubi quatuor anguli quadrilateri aequianguli i. e. rectorum idem efficient) vel $n=6$ (ubi tres anguli hexagoni aequianguli rem praestabunt). Pythagoricum hoc theorema esse ad I. 15. Cor. observat Proclus.

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. Hac ratione pariter ac in I. 29. Cor. 5. orientur parallelogramma, et quidem hic ea addita conditione, ut unum parallelogrammi latus, cui aequale est alterum ipsi oppositum, magnitudine datum esse possit.

Cor. 1. Recta, cuius duo puncta ab alia recta aequo distant, i. e. cuius duobus punctis in alteram demissa per-

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΔ$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν ἡ $ΒΓ$, αἱ ἐναλλαῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΒΓΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστιν ἡ AB τῇ $ΓΔ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΒΓ$, δύο δὴ αἱ AB , $ΒΓ$, ὁσοὶ ταῖς $ΓΔ$, $ΒΓ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἴση ἐστίν. Βάσις ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΒΔ$ ἐστίν ἴση, καὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΒΓΔ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΒΔ$. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς $ΑΓ$, $ΒΔ$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ $ΒΓ$ τὰς ἐναλλαῖς γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΓΒ$, $ΓΒΔ$ ἴσας ἀλλήλαις πεποιήκε· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. Αἱ ἄρα τὰς ἴσας καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ διχα τέμνει.

pendicula aequalia sunt, huic alteri parallela est. Hinc nova constat ratio per datum punctum rectam alteri datae parallelam ducendi.

Cor. 2. Quodsi vero duo puncta A , B (Fig. 59.) rectae alicuius ab alia recta $ΓΔ$ inaequaliter distent, ita nempe, ut perpendicularorum ex iis in alteram rectam demissorum unum v. c. $ΒΔ$ maius sit altero $ΑΓ$, rectae AB , $ΓΔ$ productae concurrent. Sumta enim $AB=ΑΓ$, erit ducta AB parallela rectae $ΓΔ$, hinc AB ei parallela esse nequit (I. 31. Cor.).

PROPOSITIO XXXIV.

Obs. Circa hanc propositionem multa adhuc, quae vel ex ea ipsa, vel ex natura parallelogrammorum consequuntur,

Et quoniam parallela est AB rectae ΓA , et in ipsas incidit $B\Gamma$, alterni anguli $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ aequales inter se sunt (Prop. 29.). Et quoniam aequalis est AB rectae ΓA , communis autem $B\Gamma$; duae igitur AB , $B\Gamma$ duabus ΓA , $B\Gamma$ aequales sunt, et angulus $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma A$ aequalis. Basis igitur $A\Gamma$ basi BA est aequalis, et triangulum $AB\Gamma$ triangulo $B\Gamma A$ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, uterque utrique, quos aequalia latera subtendunt (Prop. 4.); aequalis est igitur angulus $A\Gamma B$ angulo $\Gamma B A$. Et quoniam in duas rectas $A\Gamma$, BA recta incidens $B\Gamma$, alternos angulos $A\Gamma B$, $\Gamma B A$ aequales inter se facit, parallela est $A\Gamma$ rectae BA (Prop. 27.). Ostensa est autem ipsi et aequalis; quae igitur aequalis etc.

PROPOSITIO XXXIV. (Fig. 58.)

Parallelogrammorum spatiorum et opposita latera et anguli aequalia inter se sunt, et diameter ea bifariam secat.

observari possunt, quae e Proclo, Thom. Simpson., Clavio, Pfeidereri schedis huc conferemus. Et in ipsa quidem theorematum enunciatione notari potest, diametrum spatia parallelogramma non tantum bifariam, sed praecise in triangula perfecte congruentia dividere, ut etiam e demonstratione patet.

Cor. 1. Duae parallelogrammi diametri $B\Gamma$, AA (Fig. 60.) se invicem in puncto E bifariam secant ex I. 26. ob $AB = A\Gamma$ (I. 34.) $BAE = EAT$ (I. 29.) $ABE = B\Gamma A$ (I. 29.). Simul patet, esse triangula opposita ABE , AET , pariterque AET , AEB aequalia.

Cor. 2. Si per punctum E in media diametro positum (Fig. 61.) ducatur recta quaecunque $Z\Theta$, dividit illa parallelogrammum in duo quadrilatera inter se congruentia $BZAE$,

Ἐστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ $ΑΓΔΒ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $ΒΓ$. λέγω, ὅτι τοῦ $ΑΓΔΒ$ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ $ΒΓ$ διάμετρος αὐτὸ διχοτείνει.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλός ἐστιν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΓΔ$, καὶ εἰς αὐτάς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ $ΒΓ$, αἱ ἐναλλάξ γω-

$ΠΘΖΑ$, ob aequalia triangula $ΑΒΔ$, $ΔΓΑ$, pariterque aequalia $ΑΕΖ$, $ΔΕΘ$. Punctum E centrum figurae vocare solent.

Cor. 3. Rectae $ΑΒ$, quae alteri $ΓΔ$ parallelā est, omnia puncta aequaliter ab hac distant, vel omnia perpendiculara a recta aliqua in aliam ipsi parallelam demissa sunt inter se aequalia.

Cor. 4. Si e pluribus punctis rectae alicuius plura aequalia perpendiculara in eodem plano erigantur, una eademque recta, priori parallelā, omnia perpendicularorum extrema iungit.

Cor. 5. Quadrilaterum, cuius bini oppositi anguli aequales sunt, est parallelogrammum. Quum enim omnes quadrilateri cuiuscunque anguli aequales sint quatuor rectis (I. 32. Cor. 12.) et bini oppositi aequales esse ponantur, anguli eidem lateri cuiuscunque adiacentes dimidium omnium angulorum quadranguli i. e. duos rectos efficient, adeoque duo quaevis latera opposita aequalia erunt. Nominatim itaque quodvis quadrangulum, cuius omnes anguli recti sunt, est parallelogrammum. Pariter, si duo quaevis opposita latera aequalia sint, figuram parallelogrammam esse, iam I. 27. Cor. 1. vidimus. Cf. Isaac. Monachus l. c.

Cor. 6. Non sufficit ad constituendam figuram parallelogrammam, ut duo quidem quadrilateri latera opposita parallelā, reliqua duo autem aequalia sint, id quod ostendit Proclus ope trianguli aequicruri, a cuius cruribus si utrimque ex vertice partes aequales abscindantur, et puncta harum par-

Sit parallelogrammum spatium $AFAB$, diameter autem ipsius BF ; dico $AFAB$ parallelogrammi opposita et latera et angulos aequalia inter se esse, et BF diametrum illud bifariam secare.

Quoniam enim parallela est AB rectae FA , et in ipsas incidit recta BF , alterni anguli ABF , BFA ,

tium extrema recta iungantur, existet figura quadrilatera, in qua duo quidem latera opposita parallela, reliqua autem opposita latera aequalia sunt, quae tamen manifesto non est parallelogramma.

Cor. 7. Pariter non sufficit ad probandum, figuram aliquam esse parallelogrammum, si ostendatur, diametrum dividere quadrilaterum in triangula perfecte congruentia, nisi ea simul ita posita sint, ut latera aequalia sibi invicem opponantur. Minus igitur accuratum est, quod Isaac. Monachus de hac re habet.

Cor. 8. At, si duae diametri BF , AD altera alteram bifariam secet (Fig. 60.), tum quadrilaterum $ABFA$ parallelogrammum erit. Erunt enim ex I. 4. anguli BAB , FAB aequales, adeoque AB rectae FA parallela, pariterque ob $EAF = EAB$, erit AB parallela rectae BA .

Cor. 9. Dato uno parallelogrammi angulo dantur omnes.

Cor. 10. Nominatim, si unus rectus fuerit, recti erunt etiam reliqui; si unus obliquus, etiam reliqui obliqui erunt. Unde parallelogramma rectangula vel obliquangula.

Cor. 11. Quodvis quadrangulum aequiangulum est parallelogrammum rectangulum.

Cor. 12. Datis duobus parallelogrammi lateribus adiacentibus dantur etiam reliqua.

Cor. 13. Si duo latera adiacentia parallelogrammi aequalia sint, omnia latera erunt aequalia; si duo adiacentia inaequalia, reliqua etiam erunt inter se inaequalia. Hinc parallelogramma aequilatera et scalena.

νίαι αὶ ὑπὸ $ABΓ$, $BΓΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἠάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπεπτωκεν ἡ $ΒΓ$, αἱ ἐναλλαξ γωνίαι αὶ ὑπὸ $ΑΓΒ$,

Cor. 14. Quodvis quadrangulum aequilaterum est parallelogrammum aequilaterum.

Cor. 15. Aequilatera parallelogramma esse possunt vel rectangula (quadratum) vel obliquangula (rhombus), pariter scalena parallelogramma erunt vel rectangula (oblongum vel rectangulum proprie dictum) vel obliquangula (rhomboides). Cf. Def. 30—33.

Cor. 16. Describentur haec facile ex I. 31. dato in aequilateris uno latere et angulo adiacente, in scalenis duobus lateribus contiguis cum angulo ab iis intercepto.

Cor. 17. Parallelogrammi rectanguli diametri sunt aequales, obtusanguli inaequales, ita ut illa maior sit, quae maiori angulo opponitur.

Cor. 18. Vicissim, si parallelogrammi duae diametri aequales sint, erit illud rectangulum; sin inaequales, erit obtusangulum, ita ut maior angulus maiori diametro opponatur.

Cor. 19. In parallelogrammo aequilatero quaecvis diameter bifariam secat angulos, per quos transit; in scaleno autem angulos inaequaliter dividit, ita quidem, ut maior angulus minori parallelogrammi lateri adiaceat, minor maiori, et vicissim.

Cor. 20. In parallelogrammo aequilatero duae diametri sibi invicem ad angulos rectos insistunt, in scaleno obtusos angulos efficiunt, quorum acutus minori, obtusus maiori parallelogrammi lateri obvertitur, et vicissim. Priore casu parallelogrammum in quatuor triangula congruentia dividitur, posteriore tantum duo triangula sibi opposita congruunt.

Cor. 21. Duo parallelogramma, in quibus duo latera contigua unius cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sunt duobus lateribus alterius cum angulo, quem comprehendunt, aequalia sunt. Nominatim itaque, si latus unius quadrati aequale sit lateri alterius, aequalia erunt, pariterque in

aequales inter se sunt (Prop. 29.). Rursus, quoniam parallela est AF rectae BA , et in ipsas incidit BF , alterni anguli AFB , FBA aequales inter se sunt

reliquis. Contra vero, si unum quidem latus cum angulo adiacente utrimque aequale sit, alterum autem latus in uno parallelogrammo maius ac in altero, erit etiam prius parallelogrammum maius altero.

COR. 22. Vicissim: latera duorum aequalium quadratorum sunt aequalia: aequalia rectangula, quae eandem basin habent, eandem etiam habent altitudinem (perpendicularum e latere opposito in basin demissum); aequales et equianguli rhombi aequalia habent latera; si in aequalibus et equiangulis rhomboïdibus unum prioris latus aequale sit uni posterioris, erit etiam alterum prioris latus aequale alteri posterioris.

COR. 23. Si in uno anguli alicuius crure AB (Fig. 62.) sint partes quotcunque AE , EZ etc. aequales, et per puncta earum extrema ducantur rectae inter se parallelae, quae alteri cruri AF in punctis H , I , K occurrunt, erunt partes HI , IK etc. pariter aequales. Ducatur enim per I recta IA rectae AZ parallela (I. 31.) quae rectam AH in Θ , rectam ZK in A secet (I. 29. Cor. 3.), exitque ob $I\Theta = AE$ (I. 34.) et $IA = EZ$ (I. 34.), quum ex hypoth. sit $AE = EZ$, etiam $I\Theta = IA$, adeoque, quum praeterea angulus $H\Theta I = IAK$ (I. 29.), et $\Theta IH = AIK$ (I. 15.), $HI = IK$. Idem valet, si inde a puncto A partes aequales abscindantur (Fig. 63.). Hinc facile est rectam datam in partes quotcunque aequales dividere. Contra vero, si AE , EZ etc. pariterque HI , IK etc. aequales sint, sintque duae rectarum AH , AI , ZK etc. inter se parallelae, parallelae erunt etiam reliquae; vel, si partes e puncto A sumptae AE , EZ etc. aequales sint, pariterque AI , IK etc. erunt etiam ductae EI , ZK parallelae, quod facile patet, si contrarium sumatur.

COR. 24. Si latera quadrilateri cuiuscunque $ABFA$ (Fig. 64.) bisecentur in E , Z , Θ , H , et iungantur EZ , $Z\Theta$, ΘH , HE , erunt in figura $EZ\Theta H$ bina quaevis opposita latera pa-

$\Gamma Β Δ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $ΑΒΓ$, $ΒΓΔ$ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΓΔ$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $ΒΓΔ$, $ΓΒΔ$ ἴσας ἔχοντα, ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν $ΒΓ$. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει, ἐκατέραν ἐκατέρα, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴση ἄρα ἡ μὲν $ΑΒ$ πλευρὰ τῇ $ΓΔ$, ἡ δὲ $ΑΓ$ τῇ $ΒΔ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΔΓ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΓΔ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΒΔ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΒ$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $ΑΓΔ$ ἐστὶν ἴση· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΔΒ$ ἴση.

rallela. Nam ex praec. Cor. tam EH , quam $Z\theta$ parallela est rectae BF , adeoque EH , $Z\theta$ (I. 29. Cor. 3.) inter se parallelae erunt, eodemque modo ostendetur, EZ , $H\theta$ parallelas esse; est itaque $EZ\theta H$ parallelogrammum. Habet hoc theorema Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. p. 27.

Cor. 25. Caeterum esse, praeter parallelogramma vulgo dicta, multas adhuc figuras, quarum latera opposita parallela sint, Proclus et post eum Clavius monent. Latera opposita nempe sunt, quae ex utraque sui parte parem laterum numerum in figura habent. Nempe in figura quacunque aequiangula, quae parem numerum laterum habent (aequilatera etiam esse, quod Proclus et Clavius volunt, nihil attinet) latera opposita erunt parallela. Quodsi enim numerus laterum sit $=2n$, erit numerus laterum ex utraque parte laterum oppositorum AE , AE (Fig. 65.) $=n-1$. Ducta deinde AA , habebit figura ex altera rectae AA parte v. c. dextra n latera, recta AA pariter cum reliquis computata, ex altera (sinistra parte) recta AA pariter cum reliquis computata, $(n+2)$ latera, itaque omnes anguli figurae a dextra parte efficiunt ex I. 32. Cor. 12. $(n-2)2R$, vel $2nR-4R$: omnes autem anguli figurae a

(Prop. 29.). Duo igitur triangula sunt $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, duos angulos $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ duobus angulis $B\Gamma A$, $\Gamma B A$ aequales habentia, utrumque utrique, et unum latus uni lateri aequale, quod est ad aequales angulos, commune utrique $B\Gamma$; et reliqua igitur reliquis lateribus aequalia habebunt, utrumque utrique, et reliquum angulum reliquo angulo (Prop. 26.); aequale igitur est AB quidem latus lateri ΓA , $A\Gamma$ vero lateri $B A$, et angulus $B A \Gamma$ angulo $B A \Gamma$. Et quoniam aequalis est quidem angulus $AB\Gamma$ angulo $B\Gamma A$, et $\Gamma B A$ angulo $A\Gamma B$; totus igitur ABA toti $A\Gamma A$ est aequalis (Ax. 2.); ostensus est autem et $B A \Gamma$ angulo $\Gamma A B$ aequalis.

sinistra parte rectae $AA = n \cdot 2R = 2nR$. At figura a sinistra parte habet, praeter duos angulos rectae AA adjacentes, n angulos ad figuram aequiangulam primitus datam pertinentes, quorum quisque ex I. 33. Cor. 18.
$$= \frac{(2n-2) \cdot 2R}{2n} = \frac{(2n-2)R}{n}$$

$= 2R - \frac{2R}{n}$. Itaque figura a sinistra parte, praeter duos illos rectae adjacentes, habebit $2nR - 2R$. At vidimus, continere eam, si omnes anguli in calculum veniant, $2nR$. Duo itaque illi rectae AA adjacentes erunt aequales duobus rectis, adeoque rectae $A\theta$, AE erunt parallelae (I. 29.).

Appendicis loco addi possunt de Trapeziis, sive figuris quadrilateris, in quibus duo saltem latera opposita parallela, reliqua duo non parallela sunt (ita nempe Proclus definit trapezia) sequentia:

1) Anguli adjacentes uni laterum non parallelorum simul sumpti duobus rectis aequales sunt (I. 29.).

2) Anguli oppositi semper inaequales sunt. Sit enim (Fig. 66.) trapezium $AB\Gamma A$, et ducatur AE rectae $A\Gamma$ parallela,

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓA , κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὲ αἱ AB , $B\Gamma$ δυοὶ ταῖς $\Delta\Gamma$, ΓB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση ἐστὶ καὶ βάσις ἄρα ἡ $A\Gamma$ βάσει τῇ $B\Delta$ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ $AB\Gamma$ ἄρα τρίγωνον τῷ $B\Delta\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα $B\Gamma$ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ $A\Gamma\Delta B$ παραλληλόγραμμον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ λε.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

eritque (I. 34.) $\text{angulus } E = \Gamma$, at $AB\Delta > E$ (I. 16.) adeoque $AB\Delta > \Gamma$.

3) Latera opposita parallela AB , ΓA sunt inaequalia. In constructione nempe antecedente erit $AE = \Gamma A$ (I. 34.). At $AB < AE$, adeoque $AB < \Gamma A$.

4) E triangulis, in quae diagonales trapezium (Fig. 67. 68.) dispescunt, duo illa, quorum bases sunt latera parallela, aequiangula sunt (I. 29.) reliqua duo in trapeziis tantum aequicruris (i. e. quorum ea latera aequalia sunt, quae non sunt parallela, et quae etiam, ut ducta per terminum unius recta alteri parallela facile patet, aequaliter inclinata sunt ad unum-quodvis reliquorum laterum) inter se congruunt (I. 26.).

5) Neutra diagonalis bifariam secat alteram, sed utriusque diagonalis pars maior adiacet maiori duarum parallelarum, minor minori: in trapezio aequicruro tamen integrae diagonales pariterque partes unicuique parallelarum adiacentes aequales sunt.

Ergo parallelogrammorum spatiorum opposita et latera et anguli aequalia inter se sunt.

Dico et diametrum ipsa bifariam secare. Quoniam enim aequalis est AB rectae ΓA , communis autem BF , duae igitur AB , BF duabus AF , ΓB aequales sunt, utraque utrique, et angulus ABF angulo $B\Gamma A$ aequalis est; et basis igitur AF basi BA aequalis est (Prop. 4.); et igitur triangulum ABF triangulo $B\Gamma F$ aequale est.

Ergo BF diameter bifariam secat $AFAB$ parallelogrammum. Quod oportebat ostendere.

PROPOSITIO XXXV. (Fig. 70.)

Parallelogramma, super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

6) Si in trapezio aliquo (Fig. 69.) una diagonalis AA bisecetur in puncto H , et per H recta ΘHI ducatur parallela lateribus trapezii parallelis inter se, bisecabit illa reliqua trapezii laeva pariter ac alteram diagonalem. Ducatur enim HK parallela $\tau\eta BA$, eruntque triangula AHK , HAI aequalia (I. 26.) ob $AH=HA$ ex hyp., ang. $HAK=\angle HI$ (I. 29.) et $AHK=\angle HAI$ (I. 29.) hinc $AK=HI$ et $KH=IA$: at etiam $KH=BI$ (I. 54.) itaque $IA=BI$. Eadem ratione ostenditur, ducta HA parallela $\tau\eta AF$ esse $\angle \Theta=\angle \Gamma$. Denique ob $IA=BI$, erit etiam (I. 34. Cor. 23.) $BZ=IZ$.

7) Iisdem manentibus, erit $\Theta Z=\frac{AB}{2}$, et $ZI=\frac{\Gamma A}{2}$. Nam ob $AK=HI$ (nr. 6.) $=KB$ (I. 54.), et $BZ=IZ$ (nr. 6.) erit ducta KZ parallela rectae $\angle \Theta$ (I. 34. Cor. 23.), adeoque $\Theta Z=AK=\frac{AB}{2}$. Similiter, quum sit $\Gamma A=AA$ (I. 34. Cor. 23.) et

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ $ABΓΔ$, $EBΓΖ$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΑΖ$, $ΒΓ$ λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$ τῷ $EBΓΖ$.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ABΓΔ$, ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΓ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ΕΖ$ τῇ $ΒΓ$ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΕΖ$ ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ $ΔΕ$ ὅλη ἄρα ἡ $ΑΕ$ ὅλη τῇ $ΑΖ$ ἐστὶν ἴση. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΔΓ$ ἴση· δύο δὴ αἱ $ΕΑ$, $ΑΒ$ ὁσοὶ ταῖς $ΖΔ$, $ΔΓ$ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΖΔΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΑΒ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς· βάσεις ἄρα ἡ $ΕΒ$ βάσει τῇ $ΖΓ$ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ $ΕΑΒ$ τρίγωνον τῷ $ΔΓΖ$ τριγώνῳ ἴσον $BZ = ΓΖ$, erit duota $ΖΑ$ parallela rectae $ΒΔ$, adeoque $ZI = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$.

8) Iisdem manentibus erit linea $ΘΙ$ aequalis dimidiaio summae rectarum $ΑΒ$, $ΓΔ$ et ZH aequalis dimidio excessui τῆς $ΓΔ$ super $ΑΒ$. Est enim ex praeced. $ΘΖ = ΑΚ = ΚΒ = \frac{ΑΒ}{2}$ pariterque $ZI = ΓΑ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$, adeoque $ΘΙ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$. Et, quum etiam $||HI = \frac{ΑΒ}{2}$, erit $ZH = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

PROPOSITIO XXXV.

Obs. 1. Debebant quidem, si omnia exacte persequi velis, tres casus distingui, prout vel puncta $Δ$, $Ε$ coincidunt; vel recta $ΕΖ$ tota, (ut est in nostra Fig. 70.) extra $ΑΔ$ cadit, vel punctum $Ε$ inter $Α$ et $Δ$ situm est. Et in versione Campani omnes hi casus enumerantur, pariterque eos habent Proclus, Commandinus, Clavius, alique. Quum autem levi tantum mutatione eadem demonstratio in omnes quadret, non opus visum fuit, ut reliquos casus adderemus. Rob. Simson.

Sint parallelogramma $AB\Gamma\Delta$, $EB\Gamma Z$ super eadem basi $B\Gamma$ constituta et in eisdem parallelis AZ , $B\Gamma$; dico aequale esse parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammo $EB\Gamma Z$.

Quoniam enim parallelogrammum est $AB\Gamma\Delta$, aequalis est AA rectae $B\Gamma$ (Prop. 34.). Ex eadem ratione et EZ rectae $B\Gamma$ est aequalis (Prop. 34.). Quare et AA rectae EZ est aequalis (Ax. 1.); et communis AE ; tota igitur AE toti AZ est aequalis (Ax. 2.). Est autem et AB rectae $\Delta\Gamma$ aequalis (Prop. 34.); duae igitur EA , AB duabus ZA , $\Delta\Gamma$ aequales sunt, utraque utrique, et angulus ZAF angulo EAB est aequalis (Prop. 29.); exterior interiori; basis igitur EB

in sua editione demonstrationem paulo immutavit, ut eadem prorsus fieret pro duobus postremis casibus. Paulo aliter adhuc ex I. 26. vel etiam ex I. 8. deduci poterat demonstratio. Ceterum in iisdem parallelis esse idem dicit, ac, quod alii dicunt, eandem altitudinem habere, quum altitudo parallelarum nihil aliud sit, quam distantia basis a parallela ipsi opposita. Cf. VI. Def. 4. Proclus addit, hoc aliaque ipsi similia theoremata appellari posse $\tau\omicron\pi\iota\kappa\acute{\alpha}$, quòd nempe recta AA utrimque quantumlibet producta locus ($\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$) est, in quem recta EZ semper incidere debet. Quodsi AA ita locum rectae EZ vocare velis, erit ille $\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$ $\delta\iota\epsilon\chi\omicron\delta\iota\kappa\acute{o}\varsigma$, ut itaque pateat, etiam locum lineae in linea, non tantum in superficie, ut Pappus ait in Praefat. ad libr. VII. Collect. Mathem. esse posse $\tau\acute{o}\pi\omicron\nu$ $\delta\iota\epsilon\chi\omicron\delta\iota\kappa\acute{o}\nu$ i. e. locum subinde ulterius quasi procedentem. Et quidem erit is locus ad rectam, locus planus ($\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$ $\epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\omicron\varsigma$). Idem valet de iis, quae proxime sequuntur, propositionibus 36. 37. 38. 41. Conf. Apollonii loca plana I, 3. et Isaac. Monach. in Schol. ad h. 1.

Cor. 1. Speciatim quodvis parallelogrammum aequale est rectangulo super eadem basi in iisdem parallelis constituto.

ἔσται. Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ $\Delta Η Ε$. λοιπὸν ἄρα τὸ $Α Β Η Δ$ τραπέζιον λοιπῷ τῷ $Ε Η Γ Ζ$ τραπεζίῳ ἔστιν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $Η Β Γ$ τρίγωνον ὅλον ἄρα τὸ $Α Β Γ Δ$ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ $Ε Β Γ Ζ$ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ λς.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ $Α Β Γ Δ$, $Ε Ζ Η Θ$ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν $Β Γ$, $Ζ Η$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $Α Θ$, $Β Η$. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $Α Β Γ Δ$ παραλληλόγραμμον τῷ $Ε Ζ Η Θ$.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $Β Ε$, $Γ Θ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $Β Γ$ τῇ $Ζ Η$, ἀλλὰ ἡ $Ζ Η$ τῇ $Ε Θ$ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ $Β Γ$ ἄρα τῇ $Ε Θ$ ἐστὶν ἴση. Εἴσι δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ $Β Ε$, $Γ Θ$, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσι καὶ αἱ $Ε Β$, $Γ Θ$ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλλη-

COR. 2. Quodsi vero caeteris manentibus, basis unius parallelogrammi maior sit, basi alterius, erit etiam prius parallelogrammum maius, quam hoc posterius. Et quam multiplex est basis unius talium parallelogrammorum basis alterius, tam multiplex est etiam illud parallelogrammum huius.

COR. 3. Quae hic de parallelogrammis demonstrata sunt, valent eodem modo de duobus trapeziis, quorum unum latera inter se parallela in iisdem parallelis constituta atque eiusdem magnitudinis habet ac alterum.

basi $Z\Gamma$ aequalis est, et EAB triangulum ipsi $\Delta\Gamma Z$ triangulo aequale erit (Prop. 4.). Commune auferatur ΔHE ; reliquum igitur $ABHA$ trapezium reliquo $EHTZ$ trapezio est aequale (Ax. 3.). Commune addatur $HB\Gamma$ triangulum; totum igitur $AB\Gamma A$ parallelogrammum toti $EB\Gamma Z$ parallelogrammo aequale est (Ax. 2.). Ergo parallelogramma e .

PROPOSITIO XXXVI. (Fig. 71.)

Parallelogramma, super aequalibus basibus constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint parallelogramma $AB\Gamma A$, $EZH\Theta$ super aequalibus basibus constituta $B\Gamma$, ZH , et in eisdem parallelis $A\Theta$, BH ; dico aequale esse parallelogrammum $AB\Gamma A$ parallelogrammo $EZH\Theta$.

Iungantur enim BE , $\Gamma\Theta$.

Et quoniam aequalis est $B\Gamma$ rectae ZH , et ZH rectae $E\Theta$ est aequalis (Prop. 34.); et $B\Gamma$ igitur, rectae $E\Theta$ est, aequalis (Ax. 1.). Sunt autem et parallelae, et iungunt ipsas rectae BE , $\Gamma\Theta$, quae autem aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt, aequales et parallelae sunt (Prop. 33.); et EB , $\Gamma\Theta$

Obs. 2. Caeterum, ut Clavius monet, ac facile demonstrari potest, conversa quoque locum habet: nempe parallelogramma aequalia super basibus aequalibus ad easdem partes constituta sunt in iisdem parallelis. Et alia adhuc conversa valet: Si duo parallelogramma aequalia in iisdem parallelis ita constituta sint, ut bases ex una parte in eodem puncto terminentur, sintque bases ad easdem partes huius puncti positae, etiam ex altera parte in eodem puncto terminabuntur, adeoque congruent. Similiter converti potest etiam Cor. 3.

λοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $EBΓΘ$, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ABΓΔ$ βάσειν τε γὰρ αὐτῶ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν $ΒΓ$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῶ, ταῖς $ΒΓ$, $ΑΘ$. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $EZHΘ$ τῷ αὐτῷ τῷ $EBΓΘ$ ἐστὶν ἴσον ὥστε καὶ τὸ $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμον τῷ $EZHΘ$ ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΞ.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

*Εστω τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΒΓ$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΑΔ$, $ΒΓ$ · λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τριγώνου τῷ $ΔΒΓ$ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ $ΑΔ$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ E , Z , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ $ΓΑ$ παράλληλος ἤχθω ἡ BE , διὰ δὲ τοῦ $Γ$ τῇ $ΒΔ$ παράλληλος ἤχθω ἡ FZ .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $EBΓΑ$, $ΔΒΓΖ$ · καὶ εἰσιν ἴσα· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΓ$, EZ · καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $EBΓΑ$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ διχα τέμνει· τοῦ δὲ $ΔΒΓΖ$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $ΔΒΓ$ τρίγωνον, ἡ γὰρ $ΔΓ$ διάμετρος αὐτὸ

PROPOSITIO XXXVI.

Obs. Parallelogramma nempe intelliguntur, quae, si bases in eadem recta vel ipsa, vel producta, vel partim in ipsa basi, partim in basi producta, constituentur, latera his basibus opposita et parallela pariter habeant in eadem recta posita.

igitur et aequales sunt et parallelae. Parallelogrammum igitur est $EB\Gamma\Theta$, et est aequale parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ (Prop. 35.); basin enim eandem habet $B\Gamma$ quam ipsum, et in eisdem parallelis est $B\Gamma, \sim A\Theta$. Ex eadem ratione, et $EZH\Theta$ eidem $EB\Gamma\Theta$ est aequale; quare et parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammo $EZH\Theta$ est aequale (Ax. 1.). Ergo parallelogramma etc.

PROPOSITIO XXXVII. (Fig. 72.)

Triangula super eadem basi constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint triangula $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ super eadem basi constituta $B\Gamma$ et in eisdem parallelis AA , $B\Gamma$; dico aequale esse $AB\Gamma$ triangulum $\Delta B\Gamma$ triangulo.

Producatur AA ex utraque parte in E , Z , et per B quidem rectae ΓA parallela ducatur BE (Prop. 31.), per Γ vero rectae $B\Delta$ parallela ducatur ΓZ (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$; et aequalia sunt (Prop. 35.); nam super eadem basi sunt $B\Gamma$ et in eisdem parallelis $B\Gamma$, EZ ; et est parallelogrammi quidem $EB\Gamma A$ dimidium triangulum $AB\Gamma$; nam AB diameter ipsum bifariam secat (Prop. 34.); parallelogrammi autem $\Delta B\Gamma Z$ dimidium triangulum $\Delta B\Gamma$, nam $\Delta\Gamma$ diameter ipsum

Caeterum patet, similes et plures etiam ac in praecedente Prop. casus distinguere posse, et generatim ea omnia, quae ad praecedentem propositionem notata sunt, corollaria et conversas etiam hic valere, unde non opus videtur, ea nominatim afferre. Parallelogramma haec quamvis inter se aequalia perimetros

δίχα τέμνει· τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν $B\Gamma$, EZ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ , AD · λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ AD ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ H , Θ , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῇ GA παράλληλος ἦχθω ἡ BH , διὰ δὲ τοῦ Z τῇ AE παράλληλος ἦχθω ἡ $Z\Theta$.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $HBGA$, $\Delta EZ\Theta$ · καὶ ἴσον τὸ $HBGA$ τῷ $\Delta EZ\Theta$, ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $B\Gamma$, EZ , καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ , $H\Theta$ · καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $HBGA$

tamen diversissimas habere possunt, quod idem etiam valet de figuris, de quibus in Prop. 35. 37. 38. sermo est. Ad Prop. 37. Proclus, cuius textus hic mancus est, idem observat.

PROPOSITIO XXXVIII.

Obs. Casus iidem distingui possunt in hac et praecedente propositione ac in Prop. 35. et 36. et corollaria etiam similia et similes conversae locum habent.

Cor. 1. (Ex Peletario) Si basis trianguli bifariam secatur recta a vertice ducta, ipsum etiam triangulum eadem recta bifariam secabitur. Et universim duo triangula super aequalibus basibus in recta eadem vel producta constituta, quae eundem verticem habent, sunt aequalia: et triangulorum aequo

bifariam secatur (Prop. 34.); aequalium autem dimidia aequalia inter se sunt (Ax. 7.); aequale igitur est triangulum ABF triangulo ABF . Ergo triangula etc.

PROPOSITIO XXXVIII. (Fig. 73)

Triangula super aequalibus basibus constituta et in eisdem parallelis, aequalia inter se sunt.

Sint triangula ABF , AEZ super aequalibus basibus constituta BF , EZ , et in eisdem parallelis BZ , AA ; dico aequale esse triangulum ABF triangulo AEZ .

Producatur enim AA ex utraque parte in H , Θ , et per B quidem rectae TA parallela ducatur BH (Prop. 31.), per Z verò rectae AE parallela ducatur $Z\Theta$ (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $HBTA$, $AEZ\Theta$; et aequale $HBTA$ parallelogrammo $AEZ\Theta$ (Prop. 36.); in aequalibus enim et basibus sunt BF , EZ , et in eisdem parallelis BZ , $H\Theta$; est altorum quam multiplex est basis unius trianguli basis alterius, tam multiplex erit prius triangulum trianguli posterioris.

Cor. 2. Per punctum A in latere trianguli ABF (Fig. 74.) datum, at non in medio BF situm, si bisecandum sit triangulum, bisecetur BF in E (I. 10.) et iungatur AE , tum ducta AA , et per E ei parallela EZ (I. 31.) ducatur AZ , eritque (Cor. praeced.) ABF dimidia pars $\triangle ABF$: at, quum $AEZ = \triangle EZ$ (I. 37.), erit etiam (I. Ax. 2.) triangulum $ZAF = \triangle AEF =$ dimidio triangulo ABF (Peletarius).

Cor. 3. Duae diametri quodvis parallelogrammum dividunt in quatuor triangula aequalia.

Cor. 4. Summa aut differentia duorum parallelogrammorum (aut triangulorum) in iisdem parallelis constitutorum

παραλληλογραμμου ἡμῖς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον, ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ $ΔΕΖΘ$ παραλληλογραμμου ἡμῖς τὸ $ΖΕΔ$ τρίγωνον, ἡ γὰρ $ΔΖ$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἰσῶν ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΕΖ$ τριγώνῳ. Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΒΓ$, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς $ΒΓ$, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΓ$.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ $Α$ σημείου τῇ $ΒΓ$ εὐθεῖα παράλληλος ἡ $ΑΕ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΕΓ$.

Ἰσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $EBΓ$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΓ$, $ΑΕ$. Ἀλλὰ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΒΓ$ ἐστὶν ἴσον καὶ τὸ $ΔΒΓ$ ἄρα τρίγωνον τῷ $EBΓ$ ἴσον ἐστίν, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πα-

aequalis est parallelogrammo (aut triangulo) in iisdem parallelis constituto, cuius basis aequalis est summae aut differentiae basium illorum parallelogrammorum (aut triangulorum).

PROPOSITIO XXXIX.

Cor. 1. (e Campano) Recta AB (Fig. 77.) secans bifariam in $Δ$, E latera AB , $ΑΓ$ trianguli $ABΓ$ erit reliquo lateri $ΒΓ$

autem parallelogrammi $HBFA$ dimidium triangulum ABF (Prop. 34.), AB enim diameter ipsum bifariam secat; parallelogrammi vero $\Delta EZ\Theta$ dimidium triangulum $ZE\Delta$ (Prop. 34.), nam' ΔZ diameter ipsum bifariam secat. Aequalium autem dimidia aequalia inter se sunt (Ax. 7.); aequale igitur est triangulum ABF triangulo ΔEZ . Ergo triacula etc.

PROPOSITIO XXXIX. (Fig. 75.)

Aequalia triacula, super eadem basi constituta et ad easdem partes, in iisdem parallelis sunt.

Sint aequalia triacula ABF , ΔBF , super eadem basi BF et ad easdem partes; dico et in eisdem parallelis esse. Iungatur enim AF ; dico parallelam esse AF rectae BF .

Si enim non, ducatur per A punctum rectae BF parallela AE (Prop. 31.); et iungatur EF .

Aequale igitur est triangulum ABF triangulo EBF (Prop. 37.); super eadem enim basi est BF super qua ipsum BET , et in eisdem parallelis BF , AE ; sed triangulum ABF triangulo ΔBF est aequale; ergo et triangulum ΔBF triangulo EBF aequale est (Ax. 1.), maius minori, quod fieri nequit (Ax. 9.). Non igitur

parallela. Est enim $\Delta AAE = \Delta AEB$ (I. 38. Cor. 1.) et eodem modo $\Delta AAE = \Delta AEF$, unde $\Delta AEB = \Delta AEF$ (I. Ax. 1.) adeoque AE parallela rectae BF (I. 39.) Cf. I. 34. Cor. 23.

Cor. 2. (E Clavio) Omne quadrilaterum $ABFA$ (Fig. 60.) quod ab utraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est. Quum enim sit (hyp.) $\Delta BAF =$ dimidio quadrilatero $ABFA$, pariterque etiam $\Delta AAF =$ eidem dimidio quadrilatero

ράλληλός ἐστιν ἡ AE τῇ BF . Ὅμοιως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς AD ἡ AD ἄρα τῇ BF ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

$ABΓΔ$, erit $\triangle BΔΓ = \triangle ADΓ$, adeoque (I. 39.) AB rectae $ΔΓ$ parallela. Eodemque modo ostenditur esse rectas $ΔΓ$, $ΒΔ$ parallelas.

Cor. 3. Quadrilaterum, quod ab utraque diametro ita dividitur in quatuor triangula, ut bina quaecunque ad verticem opposita inter se aequalia sint, est parallelogrammum. Redit enim res ad praeced. Cor. 2.

Cor. 4. Quadrilaterum, quod ab utraque diametro in quatuor triangula aequalia dividitur, est parallelogrammum. Pariter redit ad Cor. 2.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ XL.

Obs. 1. Notandum est, quod Baermannus monet, bases intelligi in eadem recta positas. Bases autem contiguas esse, ut in figura, nihil attinet.

Obs. 2. Alia conversa propositionum 37. 38. similis ei, quam ad 35. 36. notavimus, locum habet, nempe triangula aequalia in iisdem parallelis constituta etiam eandem vel aequalem basin habent.

Obs. 3. In parallelogrammis quoque idem valet, nempe parallelogramma aequalia, super basibus aequalibus et in eadem recta constitutis, ad easdem basium partes posita in iisdem parallelis erunt, vel, ut alii efferunt, eandem altitudinem habebunt; et vice versa, si caeteris manentibus, eandem altitudinem habeant, vel in iisdem parallelis constituta sint, eandem vel aequalem

parallela est AE rectae BF . Similiter autem ostendimus neque aliam quampiam esse praeter AA ; AA igitur rectae BF est parallela. Ergo aequalia etc.

PROPOSITIO XL. (Fig. 76.)

Aequalia triangula, super aequalibus basibus constituta et ad easdem partes, in iisdem parallelis sunt.

basin habebunt. Eadem conversae denique etiam de iis trapeziis valent, de quibus in I. 35. Cor. 3. diximus.

PROPOSITIO XLI.

Obs. 1. Facile patet, 1) idem valere, si, caeteris manentibus, triangulum et parallelogrammum non eandem, at aequalem basin habeant. Conf. Peletarius. 2) Si parallelogrammum et triangulum in iisdem parallelis fuerit, sit autem basis trianguli dupla basis parallelogrammi, utramque figuram fore aequalem.

Obs. 2. Proclus notat, converti posse propositionem duplici ratione. Nempe a) si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, habeant autem eandem vel aequalem basin super eadem recta constitutam, et sit utraque figura ad easdem huius rectae partes; erunt duae figurae in iisdem parallelis. b) Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, sit autem utraque figura in iisdem parallelis, erunt etiam vel in eadem vel in aequali basi. Et simili ratione convertetur Prop. 2., quam modo attulimus.

Cor. 1. (E Proclo) Si triangulum et trapezium super eadem (vel aequali) basi, et in iisdem parallelis fuerint, maior autem linea parallela sit basis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli. Si vero minor linea trapezii sit basis trianguli: erit trapezium maius duplo trianguli. Quod facile patet, constructo super eadem basi et in iisdem parallelis parallelogrammo.

"Εστω ἴσα τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΓΕ$, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν $ΒΓ$, $ΓΕ$ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $ΑΔ$ · λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΒΕ$.

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω διὰ τοῦ $Α$ τῇ $ΒΕ$ παράλληλος ἡ $ΑΖ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΕΖ$.

"Ισὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΖΓΕ$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $ΒΓ$, $ΓΕ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΕ$, $ΑΖ$. Ἀλλὰ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $ΔΓΕ$ τριγώνῳ· καὶ τὸ $ΔΓΕ$ τριγώνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ $ΖΓΕ$ τριγώνῳ, τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΖ$ τῇ $ΒΕ$. Ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς $ΑΔ$ ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῇ $ΒΕ$ ἐστὶ παράλληλος. Τὰ ἄρα ἴσα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾗ, διπλασίον ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Cor. 2. (E Proclo) Trapezium $ABΓΔ$ (Fig. 79.) habens duo latera $ΑΓ$, $ΒΔ$ parallela, duplum est trianguli ABE , quod basin habet AB unum latus trapezii coniungens duas parallelas, verticem vero punctum E medium lateris oppositi. Producat-ur enim unum latus trianguli AE , donec conveniat cum recta $ΒΔ$ producta in Z , eritque, ob parallelas $ΑΓ$, BZ , ang. $ΑΓΕ = ΖΔΕ$ (I. 29.) et quum praeterea sit ang. $ΑΕΓ = ΔΕΖ$ (I. 15.) et ex hypoth. $ΓΕ = ΕΔ$; erit (I. 26.) triangulum $ΑΓΕ = ΖΕΔ$ et $ΑΕ = ΖΕ$, adeoque triangulum $ΖΕΒ = ΓΕΑ + ΒΕΔ$. At, ob $ΑΕ = ΖΕ$, est etiam (I. 38. Cor. 1.) triang. $ΖΕΒ = ΑΕΒ$. Itaque triangulum $ΑΕΒ = ΓΕΑ + ΒΕΔ$ i. e. triangulum $ΑΕΒ$ est pars dimidia trapezii $ABΓΔ$, vel trapezium duplum trianguli.

Sint aequalia triangula $AB\Gamma$, ΔFE , super aequalibus basibus constituta $B\Gamma$, FE et ad easdem partes; dico et in iisdem parallelis esse. Iungatur enim AA ; dico parallelam esse AA rectae BE .

Si enim non, ducatur per A rectae BE parallela AZ (Prop. 31.), et iungatur EZ .

Aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo ZFE (Prop. 38.); in aequalibus enim basibus sunt $B\Gamma$, FE et in eisdem parallelis BE , AZ . Sed triangulum $AB\Gamma$ aequale est triangulo ΔFE ; et triangulum ΔFE igitur aequale est triangulo ZFE (Ax. 1.), maius minori, quod fieri nequit (Ax. 9.); non igitur parallela est AZ rectae BE . Similiter autem ostendemus neque aliam quampiam esse praeter AA ; AA igitur rectae BE est parallela. Ergo aequalia etc.

PROPOSITIO XLI. (Fig. 78.)

Si parallelogrammum eandem habeat basin quam triangulum, et in eisdem parallelis sit, duplum est parallelogrammum trianguli.

COR. 3. Si, iisdem manentibus ut in Cor. praecedente, ducta Fig. 80, per punctum E recta HZ $\tau\eta$ AB parallela, compleatur parallelogrammum $ABHZ$, erit hoc parallelogrammum, aequale trapezio $ABIA$. Et, quum ducta per E recta EO parallela $\tau\eta$ AF , sit $EO = AH$ (I. 54.); at ex Append. ad I.

34. 8. $EO = \frac{AF + BA}{2}$, erit trapezium $ABIA$, cuius latera AF BA parallela sunt, aequale parallelogrammo $ABHZ$ inter easdem parallelas posito, cuius utrumque reliquum latus AH vel BZ aequale est dimidiaee summae eorum trapezii laterum, quae inter se parallela sunt, vel erit aequale parallelogrammo, quod eandem cum trapezio altitudinem habet, basin autem aequa-

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ $ABΓΔ$ τριγώνῳ τῷ $EBΓ$ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν τὴν $ΒΓ$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς $ΒΓ$, $ΑΕ$. λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $EBΓ$ τριγώνου.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $ΑΓ$.

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $EBΓ$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $ΒΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΓ$, $ΑΕ$. Ἀλλὰ τὸ $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ $ABΓ$ τριγώνου· ἡ γὰρ $ΑΓ$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ $EBΓ$ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον καὶ τὰ ἐξῆς.

lem dimidiaae summae parallelorum trapezii laterum. Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book II. Theor. IV.

Cor. 4. Quodsi fuerint duo triangula rectangula $ABΓ$, $αβγ$ (Fig. 80. a.), in quibus praeter angulos rectos $Γ$, $γ$ aequales etiam sint anguli $BAΓ$, $βαγ$, adeoque (I. 32. Cor. 3.) etiam angulus $ABΓ = αβγ$, erit (si latera in triangulis aequiangulis opposita angulis aequalibus latera homologa appellemus) rectangulum, cuius unum latus est hypotenusa unius trianguli, alterum autem alteruter cathetus alterius trianguli, aequale rectangulo, cuius unum latus est hypotenusa alterius trianguli, alterum autem cathetus homologus prioris trianguli v. c. rectang. $AB \times βγ =$ rectang. $αβ \times BΓ$. Posita enim recta $αγ$ super AB in AE , et ang. $βαγ$ super $BAΓ$, ob aequalitatem horum angulorum erit $αβ$ in $ΑΓ$ ita, ut v. c. punctum $β$ iaceat in $Α$, sitque $ΑΔ = αβ$, unde ducta $ΕΔ$, erit (I. 4.) triangulum $ΑΔΕ = αβγ$ et angulus $ΑΕΔ$ rectus. Compleatur iam rectangulum $ΑΓΒΘ$, ducaturque $ΑΖ$ parallela rectae $ΒΓ$ i. e. (I. 29.) ad rectos angulos rectae $ΑΔ$, eritque $ΑΖΘ$

Parallelogrammum enim $AB\Gamma\Delta$ eandem habeat basin $B\Gamma$, quam triangulum $EB\Gamma$, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AE sit; dico parallelogrammum $AB\Gamma\Delta$ duplum esse trianguli $EB\Gamma$.

Iungatur enim AF .

Aequale igitur est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $EB\Gamma$ (Prop. 37.); nam super eadem basi est $B\Gamma$ super qua et $EB\Gamma$, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AE . Sed $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum duplum est trianguli $AB\Gamma$, nam AF diameter ipsum bifariam secat (Prop. 34.); quare $AB\Gamma\Delta$ parallelogrammum et trianguli $EB\Gamma$ duplum est. Si igitur parallelogrammum etc.

rectangulum $AA \times AZ$, vel, ob $AA = a\beta$ (Demonstr.) et $AZ = B\Gamma$ (I. 54.) erit $AAZ\Theta$ rectangulum $a\beta \times B\Gamma$. Per punctum A deinde ducta recta $HA\Gamma$ parallela rectae AB , compleatur rectangulum $AHIB$, ductis nempe per A et B rectis AH , BI rectae AB ad rectos angulos, unde erit $AH = BI = AE$ (I. 54.) $= \beta\gamma$ (I. 4.), et rectangulum $AHIB$ erit rectangulum $AB \times AE$ vel $AB \times \beta\gamma$. Quodsi iam ducatur recta BA , erit triangulum AAB dimidium rectanguli $AAZ\Theta$ i. e. rectg. $a\beta \times B\Gamma$ (I. 43.). Idem vero triangulum AAB est quoque (I. 43.) dimidium rectanguli $AHIB$ i. e. rectg. $AB \times \beta\gamma$: itaque rectangulum $AB \times \beta\gamma = a\beta \times B\Gamma$ (I. Ax. 6.). Ita hanc propositionem, quae vulgo demum e doctrina triangulorum similium libr. VI. derivatur, at ante iam utilis esse potest, non in auxilium vocata doctrina de rationibus et proportionibus demonstrat Gruson. Abhandl. der Berlin. Acad. der Wissensch. für 1814–1815. pag. 45. 46. (Neue höchswichtige und unerwartete Vereinfachung der Euklid. Geometrie §§. 9. 10.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ββ.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθέν τριγώνον τὸ $ABΓ$, ἡ δὲ δοθείσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ $Δ$. δεῖ δὴ τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ $Δ$ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.

Τετμησθῶ ἡ $ΒΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Ε$, καὶ ἐπεξέυχθω ἡ $ΑΕ$, καὶ συνεχίστατω πρὸς τῇ $ΕΓ$ εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Ε$ τῇ $Δ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΓΕΖ$, καὶ διὰ μὲν τοῦ $Α$ τῇ $ΕΓ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $ΑΗ$, διὰ δὲ τοῦ $Γ$ τῇ $ΕΖ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $ΓΗ$. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΖΕΓΗ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΕΓ$, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ABE τριγώνον τῷ $ΑΕΓ$ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $ΒΕ$, $ΕΓ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $ΒΓ$, $ΑΗ$ διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τριγώνον τοῦ $ΑΕΓ$ τριγώνου. Ἔστι δὲ καὶ τὸ $ΖΕΓΗ$ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ $ΑΕΓ$ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν

Cor. 5. Quodsi in Cor. praecedente fuerit $αβ=ΒΓ'$, erit $AB \times βγ = αβγ = ΒΓγ$ (I. 34. Cor. 21.) Nominatim itaque, si (Fig. 80. tb.) in triangulo $ABΓ$ ad $Γ$ rectangulo demittatur ex $Γ$ ad AB perpendicularis $ΓΑ$, erit rectangulum inter hypotenusam AB et segmentum $ΒΑ$ aequale quadrato ex $ΒΓ$. Nam trianguia $ABΓ$, $ΓΒΑ$, ob angulum rectum $Α=Γ$, et angulum $Β$ communem erunt aequiangula, adeoque $AB \times ΒΑ = ΒΓ \times ΒΓ = ΒΓ^2$. Eodemque modo, quum etiam trianguia rectangula $ABΓ$, $ΑΓΑ$ sint aequiangula, erit $ΒΑ \times ΑΑ = ΑΓ^2$. Hae quoque propositiones, quas vulgo ex V. 8. et 17. deducunt, hac ratione demonstrat Gruson l. c. §. 16. Quodsi Theor. I. 47. non ut in Cor. sq. hinc, sed independenter ab

PROPOSITIO XLII. (Fig. 81.)

Dato triangulo aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit quidem datum triangulum $AB\Gamma$, datus vero angulus rectilineus A ; oportet igitur triangulo $AB\Gamma$ aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi A aequale.

Secetur $B\Gamma$ bifariam in E (Prop. 10.), et iungatur AE , et constituatur ad $E\Gamma$ rectam et ad punctum in ea E angulus FEZ ipsi A aequalis (Prop. 23.), et per A quidem rectae $E\Gamma$ parallela ducatur AH (Prop. 31.); per Γ vero rectae EZ parallela ducatur ΓH (Prop. 31.); parallelogrammum igitur est $ZEFH$.

Et quoniam aequalis est BE rectae $E\Gamma$, aequale est et triangulum ABE triangulo AET (Prop. 38.); nam super aequalibus basibus BE , $E\Gamma$ sunt, et in eisdem parallelis $B\Gamma$, AH ; duplum igitur est triangulum $AB\Gamma$ trianguli AET . Est autem et parallelogrammum $ZEFH$ duplum trianguli AET (Prop. 41.); basin enim eandem habet quam AET , et in eisdem

hac propositione demonstretur, poterit vicissim hoc Cor. ex I. 47. derivari.

Cor. 6. Quodsi in eadem figura super AB constituatur quadratum $ABAE$, et perpendicularis ΓA producat, dum cum recta AE conveniat in Z , erit BAZ rectangulum $AB \times BA$, et $AAZE$ rectangulum $BA \times AA$, unde, quum duo haec rectangula simul sumpta efficiant quadratum ex AB , statim prodit celebre illud theorema Pythagoraeum, quod infra I. 47. habebitur. Cf. Gruson. l. c. p. 50.

Cor. 7. Porro, si comparentur triangula rectangula aequiangula ATB , AAT , erit rectangulum $AB \times \Gamma A = AT \times \Gamma B$,

ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZEGH$ παραλληλόγραμμον τῷ $ABΓ$ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ FEZ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ .

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ $ABΓ$ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ $ZEGH$, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ FEZ , ἣτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

nempe rectangulum sub hypotenusa et perpendiculari FA aequale rectangulo sub cathetis.

PROPOSITIO XLII.

Obs. Problema conversum, quod Peletarius habet; dato parallelogrammo aequale triangulum constituere in angulo dato, nihil difficultatis habet.

PROPOSITIO XLIII.

Obs. In quovis parallelogrammo per punctum quodcunque diametri duci possunt (I. 31.) duae rectae, quarum una uni, adeoque etiam (I. 50.) alteri duorum laterum oppositorum parallelogrammi, altera autem reliquis duobus parallelogrammi lateribus parallela sit, quo facto nova duo parallelogramma existent, per quorum angulos oppositos diameter transit, et alia duo, per quae illa non transit. Haec duo posteriore loco nominata Complementa dicuntur duorum illorum, quae antea diximus.

Cor. 1. Patet, quatuor haec parallelogramma aequiangula esse cum primario parallelogrammo $ABΓΔ$ (I. 29.). Praeterea, prout in hoc duo latera adiacentia aequalia aut inaequalia fuerint, erunt etiam in iis, quae circa diametrum sunt, parallelogrammum latera aequalia vel inaequalia. Nempe si sit

est parallelis, in quibus triangulum AET ; aequale igitur est $ZETH$ parallelogrammum triangulo ABT , et habet TEZ angulum aequalem dato A .

Dato igitur triangulo ABT aequale parallelogrammum constitutum est $ZETH$ in angulo TEZ , qui est aequalis angulo A . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLIII. (Fig. 82.)

In omni parallelogrammo complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum inter se sunt aequalia.

$AA > = < \begin{smallmatrix} AB \\ AT \end{smallmatrix}$, erit etiam (I. 5. et I. 18.) $ATA > = < TAA$, adeoque, quum $AK\theta = ATA$, etiam $AK\theta > = < \begin{smallmatrix} TAA \\ KAG \end{smallmatrix}$, ac proinde $A\theta > = < \begin{smallmatrix} K\theta \\ AE \end{smallmatrix}$ (I. 6. et I. 19.). Eademque ratione ostenditur, fore iisdem casibus etiam $KZ > = < KH$.

Cor. 2. Nominatim itaque, si $ABTA$ fuerit quadratum, etiam ea, quae circa diametrum sunt, parallelogramma $AEK\theta$, $KHTZ$ quadrata erunt.

Cor. 3. Complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum semper quidem aequiangula sunt inter se et cum parallelogrammo primario, duo autem latera unius aequalia erunt duobus lateribus alterius tum tantum, si parallelogrammum primarium fuerit aequilaterum, vel etiam, si punctum K , per quod ductae sunt duae rectae lateribus parallelogrammi parallelae, sumtum fuerit in media diametro: reliquis casibus latera unius complementi non erunt aequalia lateribus alterius.

Cor. 4. Quodsi fuerint duo triangula rectangula (Fig. 82. a.) $AA\Gamma$, $a\delta\gamma$, in quibus praeter angulos rectos A , δ aequales etiam sint anguli TAA , $\gamma a\delta$ adeoque (I. 32. Cor. 3.) etiam anguli ATA , $a\gamma\delta$, erit, si latera homologa nominemus eodem sensu ac in I. 41. Cor. 4. rectangulum, cuius unum

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ $ABΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $ΑΓ$, περὶ δὲ τὴν $ΑΓ$ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ $ΕΘ$, $ΖΗ$, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ $ΒΚ$, $ΚΔ$ λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΒΚ$ παραπλήρωμα τῷ $ΚΔ$ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $ABΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $ΑΓ$, ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΓΔ$ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $ΕΚΘΑ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ $ΑΚ$, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΕΚ$ τρίγωνον τῷ $ΑΘΚ$ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΚΖΓ$ τρίγωνον τῷ $ΚΗΓ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν $ΑΕΚ$ τρίγωνον τῷ $ΑΘΚ$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ $ΚΖΓ$ τῷ $ΚΗΓ$, τὸ $ΑΕΚ$ τρίγωνον μετὰ τοῦ $ΚΗΓ$ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΑΘΚ$ τριγώνῳ μετὰ τοῦ $ΚΖΓ$ τριγώνου· ἐστὶ δὲ καὶ ὅλον τὸ $ABΓ$ τρίγωνον ὅλῳ τῷ $ΑΔΓ$ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ $ΒΚ$ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ $ΚΔ$ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον. Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου καὶ τὰ ἐξῆς.

latus est cathetus unius, alterum autem cathetus non homologus alterius trianguli, aequale rectangulo, cuius unum latus est reliquus cathetus prioris, alterum reliquus cathetus posterioris trianguli, nempe rectang. $ΑΔ \times \gamma δ =$ rectangulo $ΓΔ \times α δ$. Ponatur enim $α γ$ super $ΑΓ$ in $ΑΚ$, et angulus $γ α δ$ super angulo $Γ Α Δ$, erit, ob aequalitatem horum angulorum $α δ$ in $Α Δ$, ita, ut v. gr. punctum $δ$ iaceat in $Θ$, unde, ducta $ΚΘ$, erit (I. 4.) triangulum $ΑΘΚ = α δ γ$, et angulus $ΑΘΚ$ rectus, adeoque (I. 28.) recta $ΘΚ$ parallela rectae $Γ Δ$. Compleatur rectangulum $ABΓΔ$, et producaturs $ΘΚ$, dum conveniat cum recta $ΒΓ$ in $Η$, ducaturque per $Κ$ recta $ΕΚΖ$ parallela rectae $Α Δ$, eritque, ob $AB = Γ Δ$ (I. 34.), rectangulum $ΑΘΒΗ =$ rectangulo $AB \times ΑΘ = ΑΓ \times ΑΘ = ΑΓ \times α δ$, et rectangulum $ΑΕΖΔ =$

Sit parallelogrammum $AB\Gamma A$, diameter autem ipsius $A\Gamma$, et circa $A\Gamma$ parallelogramma quidem sint $E\Theta$, ZH , quae vero dicuntur complementa, BK , KA ; dico aequale esse complementum BK complemento KA .

Quoniam enim parallelogrammum est $AB\Gamma A$, diameter autem ipsius $A\Gamma$, aequale est triangulum $AB\Gamma$ triangulo $A\Gamma A$ (Prop. 34.). Rursus quoniam parallelogrammum est $EK\Theta A$, diameter autem ipsius est AK , aequale est triangulum AEK triangulo $A\Theta K$ (Prop. 34.). Ex eadem ratione et triangulum $KZ\Gamma$ triangulo $KH\Gamma$ est aequale (Prop. 34.). Quoniam igitur triangulum quidem AEK triangulo $A\Theta K$ est aequale; $KZ\Gamma$ vero triangulo $KH\Gamma$, triangulum AEK cum triangulo $KH\Gamma$ est aequale triangulo $A\Theta K$ cum triangulo $KZ\Gamma$ (Ax. 2.); est autem et totum triangulum $AB\Gamma$ toti $A\Gamma A$ aequale. Reliquum igitur BK complementum reliquo KA complemento est aequale (Ax. 3.). Omnis igitur parallelogrammi etc.

rectangulo $AA \times AZ = AA \times \Theta K = AA \times \gamma\delta$. At ex I. 43. est rectang. $BEKH = K\Theta ZA$, hinc, addito communi $AEK\Theta$, erit $A\Theta BH =$ rectangulo $AEZA$, i. e. $A\Gamma \times a\delta = AA \times \gamma\delta$. Propositio haec, de qua eadem observanda sunt, quae de I. 41. Cor. 4. cum quo arcte cohaeret, hac ratione demonstrata fuit a Gruson. J. c. §. 9.

Cor. 5. Quodsi in Cor. praecedente cathetus unius trianguli v. c. AA aequalis fuerit catheto non homologo alterius $\gamma\delta$, erit $A\Gamma \times a\delta = \gamma\delta q = AAq$. Nominatim itaque, si (Fig. 80. b.) in triangulo $AB\Gamma$ ad Γ rectangulo ex Γ demittatur ad AB perpendicularis ΓA , erit rectangulum segmentorum AA , BA aequale quadrato ex ΓA . Nempe, quum sit triangulum $AB\Gamma$ aequiangulum triangulo ΓBA , ut vidimus in I. 41. Cor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ.

Παρά τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμον.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ . δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB , τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστήτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $BEZH$, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EBH , ἡ ἔστιν ἴση τῇ Δ καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν BE τῇ BA , καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ , καὶ διὰ τοῦ A ὁποῦτα τῶν BH , EZ παράλληλος ἤχθω ἡ $A\Theta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΘB . Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς $A\Theta$, EZ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘZ , αἱ ὑπὸ $A\Theta Z$, ΘZE ἄρα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ $B\Theta H$, $\angle ZE$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἡ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι

5., erit nominatim angulus $A =$ angulo BFA , adeoque, quum in triangulis $AA\Gamma$, ΓAB sint praeterea etiam anguli ad A recti (hyp.), erunt etiam haec triangula aequiangula (I. 32. Cor. 3.) adeoque ex Cor. 4. $AA \times AB = \Gamma A^2$. Cf. Gruson. l. c. §. 16.

Cor. 6. Alia ratione si comparentur triangula rectangula aequiangula $AA\Gamma$, ΓAB , erit rectangulum $A\Gamma \times \Gamma A = B\Gamma \times AA$.

Cor. 7. Proclo, cuius commentarius ad hanc propositionem ab initio mancus est, observante, etiam, si non ex uno, sed e duobus punctis diametri ducantur rectae lateribus parallelogrammi parallelae (Fig. 83. 84.) spatia, quae ex utraque parte diametri supersunt, demtis istis circa diametrum parallelogrammis (sive illa se invicem non contingant, sive partem

PROPOSITIO XLIV. (Fig. 85.)

Ad datam rectam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit quidem data recta AB , datum vero triangulum Γ , et datus angulus rectilineus Δ ; oportet igitur ad datam rectam AB , dato triangulo Γ aequale parallelogrammum applicare in angulo aequali ipsi Δ .

Constituatur parallelogrammum $BEZH$ aequale triangulo Γ , in angulo EBH qui est aequalis, angulo Δ (Prop. 42.); et ponatur in directum BE rectae BA , et producat ZH ad Θ , et per A alterutri ipsarum BH , EZ parallela ducatur $A\Theta$ (Prop. 31.), et iungatur ΘB . Et quoniam in parallelas $A\Theta$, EZ recta incidit ΘZ , anguli $A\Theta Z$, ΘZE duobus rectis sunt aequales (Prop. 29.); ergo $R\Theta H$, HZE duobus rectis minores sunt; rectae autem a minoribus quam duobus rectis in infinitum productae concurrunt (Post. 5. vel

aliquam communem habeant) inter se aequalia erunt, quod eodem modo demonstratur. Addi poterat idem verum fore, si vel plura duobus parallelogramma circa diametrum constituentur. Conversum quoque huius theorematism, quod Peletarius habet, facile probari potest. Nempe, si parallelogrammum divisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita, ut ex illis duo adversa aequalia sint, consistent reliqua duo circa diametrum.

PROPOSITIO XLIV.

Obs. 1. Proclus monet, hanc parallelogrammi dato triangulo aequalis ad datam rectam applicationem (*παραβολήν*) prima quasi stamina continere doctrinae de Parabola, Hyper-

συμπίπτουσιν αἱ ΘB , ZE ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ K , καὶ διὰ τοῦ K σημείου ὁποτέρᾳ τῶν EA , $Z\Theta$ παράλληλος ἦχθῃ ἢ KL , καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘA , HB ἐπὶ τὰ A , M σημεία.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘAKZ , διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘK , περὶ δὲ τὴν ΘK παραλληλόγραμμα μὲν τὰ AH , ME , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ AB , BZ ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ BZ . Ἀλλὰ καὶ ¹⁾ τὸ BZ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ τὸ AB ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM , ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ A ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ ABM ἄρα τῇ A γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθείσαν ἄρα εὐθείαν τὴν AB , τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ AB , ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM , ἣ ἐστὶν ἴση τῇ A . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

1) Καὶ legunt Edd. Basil. et Ox.; omittit Paris. cum Cod. a.

bola et Ellipsi, et esse antiquum Pythagoræorum Musæ inventum.

Obs. 2. Caeterum alia ratione problema ita adhuc construi potest. Facto, ut ante (Fig. 96.), parallelogrammo $BEZH$ æquali triangulo Γ in angulo $EBH = A$, ponatur BE in directum rectæ BA . Ducatur deinde recta AH , cui per E parallela ducatur EM , quæ cum producta HB conveniet in M

Ax. 11.); ΘB , ZE igitur productae concurrent. Producantur et concurrant in K , et per K punctum alterutri ipsarum EA , $Z\Theta$ parallela ducatur KA (Prop. 31.), et producantur ΘA , HB ad A , M puncta.

Parallelogrammum igitur est ΘAKZ , diameter autem ipsius ΘK , et circa ΘK parallelogramma quidem AH , ME ; quae vero dicuntur complementa AB , BZ ; aequale igitur est AB ipsi BZ (Prop. 43.); sed et BZ triangulo Γ est aequale; et AB igitur triangulo Γ est aequale. Et quoniam aequalis est angulus HBE angulo ABM , sed HBE angulo A est aequalis; et ABM igitur angulo A est aequalis.

Ad datam igitur rectam AB , dato triangulo Γ aequale parallelogrammum applicatum est AB , in angulo ABM , qui est aequalis angulo A . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLV. (Fig. 87.)

Dato rectilineo, aequale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

I. 29. Cor, 3.), et per M ducatur recta MA parallela rectae AB , pariterque per A recta AA parallela rectae BM , cum qua MA conveniet in puncto aliquo A (I. 29. Cor. 5.) eritque parallelogrammum $ABAM = BEZH$. Ducantur enim rectae EH , AM , eritque ob parallelas AH , EM , triangulum $ABH = AMH$ (I. 37.) adeoque, dempto communi ABH , erit $HBE = ABM$ (I. Ax. 5.). At HBE est pars dimidia parallelogrammi $BEZH$ (I. 34.), pariterque ABM pars dimidia parallelogrammi $ABAM$. Itaque $ABAM = BEZH$ (I. Ax. 6.). Similis erit constructio, si recta BE in ipsa BA ponatur. L

"Εστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ $ABΓΔ$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ $Ε$. δεῖ δὴ τῷ $ABΓΔ$ εὐθυγράμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ $Ε$.

Ἐπεξεύχθω γάρ ἡ $ΔΒ$, καὶ συνεστάτω τῷ $ABΔ$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ZΘ$, ἐν τῇ ὑπὸ $ΘΚΖ$ γωνίᾳ, ἣ ἴση ἐστὶ τῇ $Ε$ καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν $ΘΗ$ εὐθείαν τῷ $ΔΒΓ$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ΗΜ$, ἐν τῇ ὑπὸ $ΗΘΜ$ γωνίᾳ, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ $Ε$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ $Ε$ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ $ΘΚΖ$, $ΗΘΜ$ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ $ΘΚΖ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΗΘΜ$ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΚΘΗ$. αἱ ἄρα ὑπὸ $ΖΚΘ$, $ΚΘΗ$ ταῖς ὑπὸ $ΚΘΗ$, $ΗΘΜ$ ἴσαι εἰσὶν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ $ΖΚΘ$, $ΚΘΗ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν καὶ αἱ ὑπὸ $ΚΘΗ$, $ΗΘΜ$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ $ΗΘ$, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Θ$, δύο εὐθεῖαι αἱ $ΘΚ$, $ΘΜ$, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $ΚΘ$ τῇ $ΘΜ$. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς $ΚΜ$, $ΖΗ$ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ $ΘΗ$, αἱ ἐναλλαξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΜΘΗ$, $ΘΗΖ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. Κοινὴ προσ-

Obs. 3. Simile est Peletarii problema conversum: ad datam rectam dato parallelogrammo constituere aequale triangulum in angulo dato.

PROPOSITIO XLV.

Obs. Iure monet Rob. Simson., rectorum KM , ZA parallelismum ex ipsa constructione immediate consequi, postquam ostensum fuerit, ZH , HA pariter ac $KΘ$, $ΘΜ$ in directum esse, nec opus esse, eum inde deducere, quod KZ ,

Sit quidem datum rectilineum $AB\Gamma A$, datus vero angulus rectilineus E ; oportet igitur rectilineo $AB\Gamma A$ aequale parallelogrammum constituere, in dato angulo E .

Iungatur enim AB , et constituatur triangulo ABA aequale parallelogrammum $Z\Theta$ (Prop. 42.), in angulo ΘKZ , qui aequalis est angulo E ; et applicetur ad ΘH rectam parallelogrammum HM aequale triangulo $AB\Gamma$, in angulo $H\Theta M$, qui est aequalis angulo E (Prop. 44.).

Et quoniam E angulus utrique ipsorum ΘKZ , $H\Theta M$ est aequalis; et ΘKZ igitur angulo $H\Theta M$ est aequalis (Ax. 1.). Communis addatur $K\Theta H$; ergo $ZK\Theta$, $K\Theta H$, ipsis $K\Theta H$, $H\Theta M$ aequales sunt (Ax. 2.). Sed $ZK\Theta$, $K\Theta H$ duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.); [et $K\Theta H$, $H\Theta M$ igitur duobus rectis aequales sunt (Ax. 1.). Ad aliquam igitur rectam $H\Theta$, et ad punctum in ea Θ , duae rectae ΘK , ΘM , non ad easdem partes positae, angulos deinceps duobus rectis aequales faciunt; in [directum igitur est $K\Theta$ rectae ΘM (Prop. 14.). Et quoniam in parallelas KM , ZH recta incidit ΘH , anguli alterni $M\Theta H$, ΘHZ aequales inter se sunt (Prop. 29.). Commu-

MA sint aequales et parallelae i. e. ex I. 33. Caeterum Pfeiderer. iure pariter monet, applicationem huius problematis ad VI. 25. exigere, ut parallelogrammum non solum datum angulum habeat, sed etiam ad datam rectam applicetur, pariter ac in I. 44. iussum fuerat. Nova autem hac conditione addita problema simili reductione absolvetur ac I. 44. ut Commandinus et Rob. Simson. observant in Cor. ad hanc propositionem. Aliter figuram rectilineam quamcunque v. c. $AB\Gamma A E$ (Fig. 88.) primum quidem in triangulum ipsi aequale, deinde

κείσθω ἡ ὑπὸ $\Theta Η Α$ · αἱ ἄρα ὑπὸ $Μ Θ Η$, $\Theta Η Α$ ταῖς ὑπὸ $\Theta Η Ζ$, $\Theta Η Α$ ἴσαι εἰσίν· Ἄλλ' αἱ ὑπὸ $Μ Θ Η$, $\Theta Η Α$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· καὶ αἱ ὑπὸ $\Theta Η Ζ$, $\Theta Η Α$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $Ζ Η$ τῇ $Η Α$. Καὶ ἐπεὶ ἡ $Κ Ζ$ τῇ $\Theta Η$ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ $\Theta Η$ τῇ $Μ Α$ · καὶ ἡ $Κ Ζ$ ἄρα τῇ $Μ Α$ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ $Κ Μ$, $Ζ Α$, καὶ αἱ $Κ Μ$, $Ζ Α$ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $Κ Ζ Α Μ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $Α Β Δ$ τρίγωνον τῷ $Ζ Θ$ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ $Α Β Γ$ τῷ $Η Μ$ ὅλον ἄρα τὸ $Α Β Γ Δ$ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ $Κ Ζ Α Μ$ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ $Α Β Γ Δ$ ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ $Κ Ζ Α Μ$, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $Ζ Κ Μ$, ἣ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ $Ε$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ δοθείσα εὐθεῖα ἡ $Α Β$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς $Α Β$ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

hoc triangulum ope I. 44. in parallelogrammum, quod datum angulum ac datum latus habeat, convertere docent in hunc fere modum. Ducantur ex aliquo angulo figurae B diagonales $Β Δ$, $Β Ε$ etc. Ducta deinde recta FZ parallela rectae $Β Δ$ producat, donec (I. 29. Cor. 3.) cum producta $Β Δ$ conveniat in Z , eritque, ducta BZ , triangulum $Β Γ Δ = BZ Δ$ (I. 37.), adeoque figura $Β Α Γ Δ Ε$ iam transformata est in aliam ipsi aequalem $Β Α Γ Ζ$, cuius laterum numerus unitate minor est numero laterum, quae figura primaria habebat. Pariter deinde nova hac figura transformata in aliam, quae laterum numerum

nis addatur ΘHA ; ergo $M\Theta H$, ΘHA angulis ΘHZ , ΘHA aequales sunt (Ax. 2.). Sed $M\Theta H$, ΘHA duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.); et ΘHZ , ΘHA igitur duobus rectis aequales sunt (Ax. 1.); in directum igitur est ZH rectae HA (Prop. 14.). Et quoniam KZ rectae ΘH aequalis et parallela est, sed ΘH rectae MA ; et KZ igitur rectae MA aequalis et parallela est (Ax. 1. et Prop. 30.); et iungunt ipsas rectae KM , ZA , itaque et KM , ZA aequales et parallelae sunt (Prop. 33.); parallelogrammum igitur est $KZAM$. Et quoniam aequale est quidem ABA triangulum parallelogrammo $Z\Theta$; ABF vero parallelogrammo HM ; totum igitur $ABFA$ rectilineum toti $KZAM$ parallelogrammo est aequale.

Ergo dato rectilineo $ABFA$ aequale parallelogrammum constitutum est $KZAM$ in angulo ZKM , qui est aequalis dato E . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLVI. (Fig. 89.)

Ex data recta quadratum describere.

Sit data recta AB ; oportet igitur ex AB recta quadratum describere.

denuo unitate minorem habeat, et re ulterius continuata, pervenietur tandem ad triangulum datae figurae aequale. Ita in nostra figura ducta $Z\Theta$ parallela rectae BE conveniet (I. 29. Cor. 3.) cum producta AB in puncto aliquo Θ , eritque ducta ΘE , triangulum $BB\Theta = BEZ$ (I. 37.) adeoque figura $ABEZ =$ triangulo $A\Theta E$, unde res deducta est ad I. 44. Haec paucis tantum attingere visum est. Qui plura cupit, adeat Klügel. (Mathem. Wörterb. sub voce: Figuren und ihre Verwandl. Th. II. p. 214. sqq.) et eos, qui ab eo citantur, auctores. Caeterum haec figurarum transformatio in parallelogramma et

Ἡχθω τῇ AB εὐθεία, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A , πρὸς ὀρθὰς ἡ AG · καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ AD · καὶ διὰ μὲν τοῦ D σημείου τῇ AB παράλληλος ἡχθω ἡ DE · διὰ δὲ τοῦ B σημείου τῇ AD παράλληλος ἡχθω ἡ BE .

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$ · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ DE , ἡ δὲ AD τῇ BE . Ἀλλὰ καὶ ὅτι ἡ AB τῇ AD ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ BA , AD , DE , EB ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$ παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παράλληλους τὰς AB , DE εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ AD · αἱ ἄρα ὑπὸ BAD , ADE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BAD · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ADE . Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ABE , BEA γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ADEB$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς AB εὐθείας ἀναγεγραμμένον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Vocem καὶ habent edit. Basil. et Oxon., omittit Paris. cum Cod. a.

nominatim in rectangula potissimum dimetiendis figuris inservit. Quum enim ad dimetiendas figuras quadrata adhibere soleant, haec autem rectangulis tantum applicari possint, non autem figuris, quarum anguli sunt obliqui, patet, ita demum eandem quadratorum mensuram dimetiendae figurae cuicunque adhiberi posse. Eodem etiam pertinet, quod Peletarius et Clavius habent, problema: datis duabus figuris rectilineis inaequalibus, excessum maioris super minorem exhibere, quod infra v. c. VI. 28. ut notum supponitur.

Ducatur rectae AB , a puncto in ea A , recta AF ad rectos angulos (Prop. 11.) et ponatur rectae AB aequalis AA (Prop. 3.); et per punctum quidem A rectae AB parallela ducatur AE (Prop. 31.); per punctum vero B ipsi AA parallela ducatur BE (Prop. 31.).

Parallelogrammum igitur est AEB ; aequalis igitur est AB quidem rectae AE , AA vero rectae BE (Prop. 44.). Sed et AB rectae AA est aequalis; quatuor igitur BA , AA , AE , EB aequales inter se sunt; aequilaterum igitur est AEB parallelogrammum. Dico etiam esse rectangulum. Quoniam enim in parallelas AB , AE recta incidit AA ; ergo anguli BAA , AAE duobus rectis aequales sunt (Prop. 29.). Rectus autem est BAA ; rectus igitur et AAE . Parallelogrammorum autem spatiorum opposita latera et anguli aequalia inter se sunt (Prop. 44.); rectus igitur et uterque oppositorum ABE , BEA angulorum; rectangulum igitur est AEB . Ostensum autem est et aequilaterum; quadratum igitur est (Def. 30.), et est ex AB recta descriptum. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XLVI.

Cor. Facile demonstrari potest, quod Proclus observat, si latera duorum quadratorum sint aequalia, ipsa etiam quadrata esse aequalia, et contra, si quadrata sint aequalia, latera etiam eorum esse aequalia (I. 34. Cor. 21. 22.). Atque id ipsum sumitur in demonstratione I. 48. Contra, si duorum laterum alterum altero maius est, erit etiam quadratum prioris maius quadrato posterioris et vice versa.

Obs. Austinus monet, si rectangulum definiatur esse parallelogrammum, cuius omnes anguli recti sint, et quadratum esse rectangulum, cuius omnia latera sint aequalia, propositione 46. I. non admodum opus esse post I. 42. I. 44. et 45. Et

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $ABΓ$, ὀρθὴν ἔχον τῆν ὑπὸ $BAΓ$ γωνίαν· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , $ΑΓ$ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς $BΓ$ τετραγώνον τὸ $ΒΔΕΓ$ · ἀπὸ δὲ τῶν BA , $ΑΓ$ τὰ HB , $ΘΓ$ καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν BA , $ΓΕ$ παράλληλος ᾗθω ἡ $ΑΔ$ · καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$, $ΖΓ$.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $BAΓ$, BAH γωνιῶν· πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ BA , καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΓ$, $ΑΗ$, μὴ

potuisse eam abesse, nemo negaverit; ob multiplicem tamen usum sine dubio adiecta fuit.

PROPOSITIO XLVII.

Obs. Hoc quoque theorema Pythagorae esse dicunt, qui eo invento solemne boum sacrificium fecerit (βοῦθητεῖν λέγουσι Proclus ait), unde Pythagoricum valgo nominatur. Quae circa hanc rem de Pythagora narrant, diligenter collegit Scherz. (Dissert. de Theor. Pythagor. Argent. 1745.) et ex eo Müller. (System. Zusammenstell. der wichtigern bisher bekannten Beweise des Pythagor. Lehrsatzes mit einer ausführlichen Theorie der Zahlendreiecke. Nürnberg. 1819.) et huc fere redeunt. Plutarchus in Dialog.: ὅτι οὐδὲ ζῆν ἐστὶν ἡδέως κατ' Ἐπίκουρον, Sect. II. p. 100. T. XIV. Edit. Hutt. ita habet:

Καὶ Πυθαγόρας ἐπὶ τῷ διαγράμματι βούν ἔθυσεν, ὡς φησὶν Ἀπολλόδοτος (Wytttenbach. suspicatur: Ἀπολλόδωρος)

Ἦναια Πυθαγόρης τὸ περικλεῆς εὖρετο γράμμα

Καῖνο, ἐφ' ᾧ λαμπρὴν ᾗγετο βουθυοῖην.

PROPOSITIO XLVII. (Fig. 90.)

In rectangulis triangulis, quadratum ex latere rectum angulum subtendente aequale est quadratis ex lateribus rectum angulum continentibus.

Sit triangulum rectangulum $AB\Gamma$, rectum habens angulum $B\Lambda\Gamma$; dico quadratum ex $B\Gamma$ aequale esse quadratis ex BA , $A\Gamma$.

Describatur enim ex $B\Gamma$ quidem quadratum $B\Delta E\Gamma$; ex BA , $A\Gamma$ vero quadrata HB , $\Theta\Gamma$ (Prop. 46.); et per A alterutri ipsarum $B\Delta$, ΓE parallela ducatur AA (Prop. 31.); et iungantur AA , $Z\Gamma$.

Et quoniam rectus est uterque angulorum $B\Lambda\Gamma$, BAH (Def. 30.), ad aliquam igitur rectam BA , et ad punctum in ea A , duae rectae $A\Gamma$, AH , non ad

εἴτε περὶ τῆς ὑποτείνουσας, ὡς ἴσον δύναται — Dicunt nempe Geometrae: ἡ γραμμὴ δύναται τὸ χωρίον, ut expriment quadratum lineae aequale esse spatio — ταῖς περιχούσαις τὴν ὀρθὴν, εἴτε πρόβλημα περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς. Hic itaque Plutarchus dubius est, an ob hanc propositionem I. 47. an ob aliam aliquam, quae, ut nonnulli locum hunc explicant, ad theoriā parabolae pertinet, rectius autem secundum alios pro I. 44. sumenda fuerit, sacrificium fecerit Pythagoras. Alio loco *συμποσιακῶν προβλημάτων* libr. VIII. cap. IV. p. 349. T. XI. Edit. Hutt. Plutarchus ait: Ἔστι γὰρ ἐν τοῖς γεωμετρικωτάτοις θεωρήμασι, μᾶλλον δὲ προβλήμασι, τὸ, διεῖν εἰδῶν ἐοθέντων ἄλλο τρίτον παραβάλλειν, τῷ μὲν ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον ἐφ' ᾧ καὶ φασιν ἐξευρεθῆντι θῆσαι τὸν Πυθαγόραν· πολὺ γὰρ ἀμέλει γλαφυρότερον τοῦτο καὶ μουσικώτερον τοῦ θεωρήματος, ὃ τὴν ὑποτείνουσαν ἀπέδειξε ταῖς περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσον δυναμένην. Hic itaque propositionem VI. 25. eam fuisse perhibet, ob quam inventam sacra fecerit Pythagoras, quae omnia confirmare videntur, haud satis certam esse famam, ob quodnam inventum

ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας θύσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma'A$ τῇ AH . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ BA τῇ $A\Theta$ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ZBA , ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBA ὅλη τῇ ὑπὸ $ZB\Gamma$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔB τῇ $B\Gamma$, ἡ δὲ ZB τῇ BA δύο δὴ ¹⁾ αἱ ΔB , BA θύσιν ταῖς ΓB ,

1) Verba: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔB τῇ $B\Gamma$, ἡ δὲ ZB τῇ BA , omittunt edit. Bas. et Oxon. et habent tantum: καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔB , BA etc. Editio autem Paris. ea ex Cod. a. recte addere videtur.

illud Pythagorae sacrificium factum sit, nisi forte illud ob plura inventa plus semel repetitum esse, dicere velis. Diogenes Laertius in vita Pythagorae VIII. segm. 12. ita habet: Φησὶ δὲ Ἀπολλόδορος, ὁ λογιστικὸς ἐκατόμβην θῦσαι αὐτὸν εὐχόμενα, ὅτι τοῦ τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις, καὶ ἐστὶν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον

Ἦνικα Πυθαγόρης τὸ περικλεῖς εὐρετο γράμμα

Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυίην.

Eadem fere refert Athenaeus Deipnosoph. L. X. p. 165. Ed. Ald. 1514. vel p. 418. Ed. Dalechamp. Lugd. 1712. In vita autem Thaletis l. I. Diogenes Laert. ait: Παρά τε Αἰγυπτίων γεωμετερεῖν μαθόντα (Thaletem sc.) φησὶ Παμφίλη, πρῶτον κατὰγράψαι ἐπὶ ἡμικυκλίου τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ θῦσαι βούν· οἱ δὲ Πυθαγόραν φασὶν, ὃν ἐστὶν Ἀπολλόδορος ὁ λογιστικὸς. Diogenes igitur Laertius priore loco Prop. I. 47. ad Pythagoram inventorem perspicue refert, ita tamen, ut etiam ipse Apollodori auctoritate potissimum niti videatur, cuius Epigramma tamen de sacrificio quidem Pythagorae refert, at qua occasione id factum sit, haud satis clare exponit. Porphyrius seu Malchus in vita Pythagorae c. 36. refert: Ἐβουθυίης δὲ ποτε σταίτινον, ὅς φασι, βούν, οἱ ἀκριβέστεροι,

easdem partes positae, angulos deinceps duobus rectis aequales faciunt; in directum igitur est ΓA rectae AH (Prop. 14.). Ex eadem ratione et BA rectae AO est indirectum. Et quoniam aequalis est $\angle B\Gamma$ angulus angulo ZBA (Ax. 1.), rectus enim uterque, communis addatur $AB\Gamma$; totus igitur $\angle BAA$ toti $ZB\Gamma$ est aequalis (Ax. 2.). Et quoniam aequalis est quidem AB rectae $B\Gamma$, ZB vero rectae BA ; duae utique

ἐξευρών τοῦ ὀρθογωνίου τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον δυναμένην ταῖς περιγενομέναις. Hic itaque, quamvis de sacrificii genere subdubitare videatur, inventum tamen I. 47. clare ad Pythagoram refert. Caeterum hi testes omnes recentiores sunt, nec ad certam aliquam veterum auctoritatem lectorem remittunt. Haud certiora sunt, quae Romani scriptores habent. Apud Ciceronem de Natura Deorum l. III. c. 36. legitur: „Pythagoras, cum in Geometria quiddam novi invenisset, Musis bovem immolasse dicitur, sed id quidem non credo, quoniam ille ne Apollini quidem Delio hostiam immolare voluit, ne aram sanguine adspiceret.“ Vitruvius Architect. l. IX. c. II. inventum Pythagoricum plenius quam reliqui describit his verbis: „Item Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inventam ostendit, et quam magno labore fabri normam facientes vix ad verum perducere possunt. Id rationibus et methodis emendatum ex eius praeceptis explicatur. Namque si sumantur regulae tres, e quibus una sit pedes tres, altera quatuor, tertia pedes quinque haeque regulae inter se compositae tangant alia aliam suis cacuminibus extremis, schema habentes trigoni, deformabunt normam emendatam. Ad eas autem regularum singularum longitudes si singula quadrata paribus lateribus describantur, quod erit pedum trium latus, areae habebit pedes novem, quod erit quatuor, sexdecim; quod quinque, erit viginti quinque. Ita quantum areae pedum numerum duo quadrata ex tribus pedibus longitudinis laterum et quatuor efficiunt, aequo

BZ ἴσαι εἶσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ *ΔΒΑ* γωνία τῇ ὑπὸ *ZBΓ* ἴση· βάσεις ἄρα ἡ *ΑΔ* βάσει τῇ *ZΓ* ἴση, καὶ τὸ *ΑΒΔ* τρίγωνον τῷ *ZBΓ* τριγώνῳ ἔστιν ἴσον. Καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν *ΑΒΔ* τριγώνου διπλάσιον τὸ *ΒΑ* παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν *ΒΔ* καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς *ΒΔ*, *ΑΑ*· τοῦ δὲ *ZBΓ* τριγώνου διπλάσιον τὸ *ΒΗ* τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν *ZB* καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς *ZB*, *ΗΓ*· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *ΒΑ* παραλληλόγραμμον τῷ *ΗΒ* τετραγώνῳ. Ὀμοίως δὲ, ἐπιζευγνύμενων τῶν *ΑΕ*, *ΒΚ*, δειχθήσεται καὶ τὸ *ΓΑ* παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ *ΘΓ* τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ *ΒΔΕΓ* τετράγωνον δυοῖ τοῖς *ΗΒ*, *ΘΓ* τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν *ΒΔΕΓ* τετράγωνον ἀπὸ τῆς *ΒΓ* ἀναγραφέν, τὰ δὲ *ΗΒ*, *ΘΓ* ἀπὸ τῶν *ΒΑ*,

tantum numerum reddit unum ex quinque descriptum. Id Pythagoras cum invenisset, non dubitans a Musis se in ea inventione monitum, maximas gratias agens, hostias dicitur iis immolavisse.“

E quibus omnibus constare videtur, haud quidem testimoniis ad summam antiquitatem pertinentibus, at fama certe satis constante ad Pythagoram inventum propositionis I. 47. referri, de sacrificio autem, quod fecisse ob id ipsum vel ob aliud inventum Musis dicitur, utrum hecatombe, an minor fuerit victimarum numerus, quin etiam an omnino fuerit sacrificium eruentum, quod Pythagoraeorum disciplina respuere nonnullis visa est, an itaque forte bovem saltem e farina confectum immolaverit, quod alias etiam a Pythagoraeis factum legimus, nihil certi habere veteres. Caeterum, quod veteres *theorema Pythagoricum*, id media aetate magistrum mathe-

AB , BA duabus GB , BZ aequales sunt, utraque utrique, et angulus ABA angulo ZBT aequalis; basis igitur (Prop. 4.) AA basi ZT aequalis, et triangulum ABA triangulo ZBT est aequale. Et est quidem ipsius trianguli ABA duplum BA parallelogrammum (Prop. 41.), basin enim eandem habent BA et in eisdem sunt parallelis BA , AA ; ipsius vero trianguli ZBT duplum quadratum BH (Prop. 41.), et enim rursus basin eandem habent et in eisdem sunt parallelis ZB , HT ; aequalium autem dupla aequalia inter se sunt (Ax. 6.); aequale igitur est et parallelogrammum BA quadrato HB . Similiter autem iunctis AE , BK ostendetur et parallelogrammum GA aequale quadrato OT . Totum igitur $BAET$ quadratum duobus HB , OT quadratis aequale est, et est quidem $BAET$ quadratum ex BT descriptum, quadrata vero HB , OT ex BA , AT ; ergo quadratum ex BT latere aequale

reos vocare solebant. De variis eius demonstrationibus vide Excursum II. et supra I. 41. Cor. 6.

Cor. 1. Quadratum super diametro alicuius quadrati duplum est huius quadrati.

Cor. 2. In quovis triangulo rectangulo quadratum unius catheti aequale est excessui, quo quadratum hypotenusae superat quadratum alterius catheti.

Cor. 3. Si e vertice trianguli rectanguli in hypotenusam demittatur perpendicularum, quadrata segmentorum hypotenusae eandem habebunt differentiam, quam quadrata cathetorum.

Cor. 4. Si e puncto quocunque T rectae AB (Fig. 91. 92.) erigatur ad eam perpendicularis TA , et e punctis huius rectae quibuscunque E , Z ducantur ad AB rectae EA , ZB , pariterque ZA , ZB etc. Quadrata earum, quae ex uno puncto E ductae sunt, eandem inter se differentiam habebunt, ac qua-

$ΑΓ$ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ πλευρῶν τετραγώνοις. Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις καὶ τὰ ἐξῆς.

ΗΡΟΤΑΣΙΣ μή.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾗ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ $ΑΒΓ$ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς $ΒΓ$ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ $Α$ σημείου τῇ $ΑΓ$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΑΔ$, καὶ κείσθω τῇ $ΒΑ$ ἴση ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΓ$.

drata earum, quas e quovis alio puncto rectae $ΔΓ$ ad $Α$ et $Β$ duci possunt, i. e. erit $ΒΒ^2 - ΕΔ^2 = ΖΒ^2 - ΖΑ^2 = ΓΒ^2 - ΓΑ^2$. Cf. Pappi Collect. Mathem. l. VII. Prop. 120. Apollonii loca plana l. II. Prop. 1. et Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book II. Theor. IX.

Cor. 5. In triangulo aequicruro $ΑΒΓ$ (Fig. 93. 94.) si ex uno aliquo angulorum ad basin in latus oppositum demittatur perpendicularum $ΑΔ$, erit summa quadratorum omnium trianguli laterum $= ΓΔ^2 + 2ΑΔ^2 + 3ΒΔ^2$. Est enim $ΒΓ^2 = ΓΔ^2 + ΒΔ^2$, et $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2$. Itaque $ΒΓ^2 + ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = ΓΔ^2 + 2ΑΔ^2 + 3ΒΔ^2$. Est haec propositio Gregorii a St. Vincent. I. 23. 24.

Cor. 6. Si duo triangula rectangula habeant summam quadratorum cathetorum aequalem, aequales etiam erunt hypotenusae, et vice versa.

Cor. 7. Facile etiam patet ratio describendi quadrati, quod aequale sit summae duorum, trium, quatuor et generatim n

est quadratis ex BA , AF lateribus; ergo in rectangulis etc.

PROPOSITIO XLVIII. (Fig. 95.)

Si quadratum ex uno laterum trianguli aequale est quadratis ex reliquis duobus trianguli lateribus; angulus a reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus est.

Sit enim quadratum ex uno latere BT trianguli ABT aequale quadratis ex lateribus BA , AT ; dico angulum BAT rectum esse.

Ducatur enim ab A puncto rectae AT ad rectos AA (Prop. 11.), et ponatur rectae BA aequalis AA , et iungatur AT .

aliorum quadratorum, quorum latera data sunt, dum nempe duo primum latera data sub angulo recto iunguntur, ductaeque hypotenussae ad terminum eius extremum tertium pariter sub angulo recto iungitur, et nova hypotenusa ducitur, atque ita pergitur, dum adhuc data latera supersunt.

Cor. 8. Pariter, datis duabus lineis inaequalibus, patet ratio inveniendi id, quo plus potest maior, quam minor, vel ut aliter dicamus, datur ratio inveniendi quadratum, quod aequale sit differentiae duorum datorum quadratorum. Erigatur nempe ad punctum extremum lineae datae minoris perpendicularium, et ex altero eiusdem minoris lineae termino describatur circulus radio, qui aequalis sit lineae datae maiori, abscindet ille e perpendiculari lineam, cuius quadratum aequale est excessui quadrati lineae maioris super quadratum lineae minoris.

PROPOSITIO XLVIII.

Obs. 1. Propositionis huius, quae conversa est praeced-

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AB , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔA τετραγώνου τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔA , AG τετραγώνων ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AG τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔA , AG ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG , ὁρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔAG γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BA , AG ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BG , ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BG τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ AG τῇ BG ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AD τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ AG , δύο δὴ αἱ AD , AG δυοὶ ταῖς BA , AG ἴσαι εἶσι, καὶ βάσις ἡ AG βάσει τῇ BG ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔAG γωνία τῇ ὑπὸ BAG ἴση. Ὅρθὴ δὲ ἡ

dentis, aliam demonstrationem habet Proclus, dum nempe ostendit, si angulus BAG non foret rectus, ex-eadem rectae AG parte, ex qua est B , construi posse aliud triangulum rectangulum, cuius singula latera aequalia forent lateribus trianguli ABG , quod vero fieri nequit ex I. 7. Alium modum hanc propositionem demonstrandi vide infra II. 13. Obs. 5.

Obs. 2. Quum, ut ad I. 45. diximus, ad dimetiendas figuras quascunque, adeoque etiam ad dimetienda quadrata alia quadrata mensurae loco adhibere soleant, v. c. quadratum, cuius singula latera pedem longa sunt, et quod propterea pedem quadratum appellant, invenietur, ut facile demonstrari potest, area quadrati cuiuscunque, si exploretur, quoties latus eius quadrati, quod pro mensura sumitur, contineatur in latere quadrati propositi. Is enim numerus in se ipsum ductus indicabit numerum quadratorum pro mensura sumtorum, qui in proposito quadrato continetur. V. c. si latus quadrati alicuius sit septem pedum, continebit illud septies septem, i. e.

Et quoniam aequalis est AA rectae AB , aequale est etiam quadratum ex AA quadrato ex AB . Commune addatur quadratum ex AF ; quadrata igitur ex AA , AF aequalia sunt quadratis ex BA , AF (Ax. 2.). Sed quadratis ex AA , AF aequale est quadratum ex AF (Prop. 47.), rectus enim est angulus AAF ; quadratis vero ex BA , AF aequale est quadratum ex BF , id enim sumitur; quadratum igitur ex AF aequale est quadrato ex BF ; quare et latus AF lateri BF est aequale; et quoniam aequalis est AA rectae AB , communis autem AF , duae utique AA , AF duabus BA , AF aequales sunt, et basis AF basi BF est aequalis; angulus igitur (Prop. 8.) AAF angulo

quadragesima novem pedes quadratos. Hinc etiam factum est, ut numeri in se ipsos ducti numeri quadrati vocarentur. Iam veteres et Pythagoraei maxime multi in eo fuerunt, ut numeros tres integros eius indolis invenirent, ut summa quadratorum duorum aequalis esset quadrato tertii numeri. Ita nempe ex nostra propositione latera trianguli, quorum hi numeri longitudinem metiuntur, efficiunt triangulum rectangulum. Tales numeri sunt verbi causa 3. 4. 5. Est enim $3.3+4.4=5.5$. Generatim autem inveniendis numeris eius generis variae excogitatae sunt regulae, quarum aliquas ita, ut hodie solent, expressas hic subiungemus. Unam Proclus ad Pythagoram refert, quae huc redit. Sumatur pro uno catheto numerus impar quicumque $(2n+1)$, pro altero catheto numerus, qui prodit, si a prioris numeri quadrato unitatem demas, et, quod reliquum est, bifariam divides $\frac{(4n^2+4n+1-1)}{2}$ vel $2n^2+2n$, et pro hypotenusa denique numerus, qui prodit, si numeri

ὑπὸ $\Delta A \Gamma$ ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $B A \Gamma$. Ἐὰν ἄρα
 τρίγωνον καὶ τὰ ἐξῆς.

primo sumti quadrato unitatem addas, et quod prodit bifa-
 riam divides $\frac{(4n^2+4n+1+1)}{2}=2n^2+2n+1$. Alia regula,
 quam ad Platonem refert Proclus, a numero pari initium fa-
 cit. Sumatur numerus par quicunque ($2n$) pro uno catheto
 et pro altero quadratum dimidii eius numeri unitate mul-
 ctatum (n^2-1), pro hypotenusa autem quadratum dimidii nu-
 meri unitate auctum (n^2+1). Alia regula ita habet: Suman-

BAF est aequalis. Rectus autem $\angle A\Gamma$; rectus igitur et $BA\Gamma$. Si igitur trianguli etc.

ex duo numeri inaequales quicumque (a, b) et sumatur pro uno catheto differentia quadratorum eorum ($b^2 - a^2$), pro altero duplum eius, quod prodit uno in alterum ducto ($2ab$), denique pro hypotenusa summa quadratorum numerorum istorum ($b^2 + a^2$). Aliam regulam generaliore habet Euclides in Lemm. 1. ante X. 30. Quae omnia hic verbo indicasse sufficiat. Conf. etiam Excurs. II. ad I. 47.

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Τ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Δ Ε Τ Τ Ε Ρ Ο Ν.

Ο Ρ Ο Ι.

α. *Π*άν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεται
λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τῆν ὀρθήν γωνίαν περιεχουσῶν
εὐθειῶν.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ
τῆν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἐν ὁποίον
οὖν σὺν τοῖς δυοῖ παραπληρώμασι γνώμων καλεῖσθω.

D E F I N. I.

Quoniam, ut ad I. 45. diximus, ad exprimendam aream figurarum adhibere soleant quadrata, nominatim ad inveniendam aream parallelogrammorum rectangulorum (quae brevius rectangula nominabimus): quaerendum erit, quoties id quadratum, quod mensurae loco sumitur, ipsum aut aliqua eius pars in basi rectanguli poni possit, i. e. quoties latus huius quadrati ipsum aut eius pars in basi rectanguli contineatur, et deinde quoties series eiusmodi quadratorum ipsa aut eius pars determinata in rectangulo una super alteram poni possit, i. e. quoties idem latus quadrati ipsum aut eius pars determinata in altitudine rectanguli contineatur, qui duo numeri in se ducti ostendet numerum eiusmodi quadratorum aut partium quadrati in rectangulo contentorum. Hinc etiam factum est, ut eadem, quam pro signo multiplicationis adhibere soleant, nota, nempe $\times$ utantur etiam ad designan-

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E C U N D U S.

D E F I N I T I O N E S.

1. **O**mne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis angulum continentibus rectis.

2. In omni parallelogrammo unumquodque eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum cum duobus complementis gnomon vocetur.

dum rectangulum, quod sub duabus rectis continetur. Ita v. g. rectangulum, quod sub rectis A, B continetur, indicatur per $A \times B$, ut iam ad I. Def. 30. diximus. Aliter etiam parallelogramma litteris, quibus puncta extrema diametri notantur, designare solent. Praeterea monet Scarburgh., Geometras dicere, rectam *posse* aliquam figuram, quum quadratum rectae aequale sit ei figurae (ut ad I. 47. diximus) et pariter duas rectas *posse* aliquam figuram, quum rectangulum sub istis rectis aequale sit figurae.

D E F I N. II.

Gnomon primum dictus est pro indice horologii solaris, deinde etiam ob figurae similitudinem, pro norma vel duabus regulis sub angulo recto iunctis, denique pariter ob figurae similitudinem, uti hic, de ea parallelogrammi parte, quae, demto uno eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogram-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Εάν ὡς δύο εὐθείαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δημιουργοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ὑπὸ τῆς ἀμμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἐστωσαν δύο εὐθείαι αἱ A, BG , καὶ τετμηθῶ ἡ BG ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, E σημεία· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, BG περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν A, BA περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A, AE , καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν A, EG .

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ BG πρὸς ὀρθὰς ἡ BZ , καὶ κείσθω τῇ A ἴση ἡ BH , καὶ διὰ μὲν τοῦ H τῇ BG παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$, διὰ δὲ τῶν Δ, E, Γ τῇ BH παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $\Delta K, EA, G\Theta$.

Ἰσον δὲ ἐστὶ τὸ $B\Theta$ τοῖς $BK, \Delta A, E\Theta$. Καὶ ἴσιν τὸ μὲν $B\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν A, BG , περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν HB, BG , ἴση δὲ ἡ BH τῇ A · τὸ δὲ

num superest. Caeterum, quamvis verum sit, plerasque libri secundi propositiones Arithmeticae, Algebrae et Geometriae communes esse (unde etiam apud Barlaamum monachum, Graecum Arithmeticum, decem primae huius libri propositiones arithmetice demonstratae leguntur, quas etiam videre est in Elem. of Geom. of Euclide by Billingsley London 1570. similesque etiam ad Arithmeticam vel Algebraem harum propositionum applicationes habent Clavius ad IX. 14. Element., Tacquet. in sua Elem. editione, et Christ. Sturm. in des unvergleichlichen Archimedis Kunstbüchern, Nürnberg. 1670. p. 47. sq.) et,] quatenus ad Algebraem aut Arithmeticam pertinent, algebraice vel arithmetice facillime demonstrari posse, nec ad eam rem, uti Clavius, Tacquetus, alique putasse videntur (Cf. die Geometrie nach le Gendre u. s. w. von Gilbert

PROPOSITIO I. (Fig. 135.)

Si sint duae rectae, secta fuerit autem altera ipsarum in quocunque segmenta; rectangulum contentum sub duabus rectis aequale est eis rectangulis, quae sub linea non secta et unoquoque segmentorum continentur.

Sint duae rectae A , BF , et secta sit BF utcumque in A , E punctis; dico rectangulum contentum sub A , BF aequale esse rectangulo sub A , BA contento, et rectangulo sub A , AE , et rectangulo sub A , EF contento.

Ducatur enim a B rectae BF ad rectos BZ (I. 11.), et ponatur rectae A aequalis BH (I. 3.), et per H quidem rectae BF parallela ducatur $H\Theta$ (I. 31.); per A , E , F vero rectae BH parallelae ducantur AK , EA , $F\Theta$ (I. 31.).

Aequale igitur est $B\Theta$ rectangulis BK , AA , $E\Theta$; et est quidem $B\Theta$ rectangulum sub A , BF , conti-

p. 280.). Geometriae ope nos indigere, et quamvis etiam illud negari laud possit, numerum eiusmodi propositionum admodum, si cui volupe sit, augeri posse, id tamen nequaquam eo valere debet, ut omnes huius generis propositiones tanquam minus necessarias e Geometria excludamus. Sunt enim aliquae earum et fore omnes eae, quae hoc libro continentur, per se insignis per omnem Geometriam utilitatis, et reliquis propositionibus quam plurimis brevius demonstrandis et veterum Geometrarum libris intelligendis inserviunt, unde dolendum est, eas a plurimis recentiorum mathematicorum libris praetermitti.

PROPOSITIO I.

Obs. Est haec propositio casus specialis eius, quam habuimus I. 38. Cor. 4.

BK τὸ ὑπὸ τῶν A, BD , περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν HB, BD , ἴση δὲ ἡ BH τῇ A · τὸ δὲ AD τὸ ὑπὸ τῶν A, DE , ἴση γὰρ ἡ AK , τοῦτ' ἐστὶν ἡ BH , τῇ A · καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ $EΘ$ τὸ ὑπὸ τῶν A, EF · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, BG ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ A, BD , καὶ τῷ ὑπὸ A, DE , καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ A, EF . Ἐὰν ἔρα ὥσι καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τριηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὀλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AG περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ.

Cor. 1. (Quod est apud Commandinum, Clavius, Boer-
mannum, Pfeleiderer. in Scholiis ad librum II. Element. Eu-
clidis Tübingae 1797. 98. 99. §. 2., e quibus fere omnia, be-
nevole [permittente eorum auctore, vel ipsis auctoris verbis
vel brevius aliquantum deprompta sunt, quae ad hunc librum
notavimus.) Si fuerint duae rectae lineae, quae secantur in
partes quotcunque, rectangulum duabus illis rectis contentum
aequale erit rectangulis simul, quae unaquaque parte unius
ad unamquamque partem alterius applicata continentur.

Cor. 2. Si basis $HΘ$ sit multiplex quaecunque rectae
 HK v. c. $=m \times HK$, m notante numerum integrum, paralle-
logrammum rectangulum sub BH et $HΘ$ aequemultiplex est
rectanguli sub BH et HK , i. e. erit $BH \times HΘ = m. BH \times HK$,

netur enim sub HB , BF , aequalis autem BH rectae A ; BK vero rectangulum sub A , BA , continetur enim sub HB , BA , aequalis autem BH rectae A ; AA vero rectangulum sub A , AE , aequalis enim AK , hoc est (I. 34.) BH , rectae A ; et similiter etiam rectangulum $E\Theta$ sub A , EF ; ergo rectangulum sub A , BF aequale est rectangulo sub A , BA , et rectangulo sub A , AE , et rectangulo sub A , EF . Si igitur sint etc.

PROPOSITIO II. (Fig. 136.)

Si recta linea secetur utcunque, rectangula sub tota et utroque segmentorum contenta aequalia sunt quadrato totius.

Recta enim AB secetur utcunque in Γ puncto; dico rectangulum sub AB , BF contentum, cum rectangulo sub BA , AF contento, aequale esse quadrato rectae AB .

quod vel ex ipsa II. Prop. 1. vel inde patet, quod I. Prop. 35. Cor. 2. etiam locum habet in I. 38., uti ad eam propositionem diximus. Cf. Pfeiderer. §. 3.

Cor. 3. Quodsi eodem modo altitudo BH sit multiplex quaecunque alterius rectae HZ , v. c. $=n \times HZ$, rursus n denotante numerum integrum, erit rectangulum sub BH , $H\Theta$ $=m \cdot n \cdot HK \times HZ$. Cf. Pfeiderer. §. 4.

Cor. 4. Quodsi porro fuerit $HK=HZ$, adeoque $HK \times HZ=HK^2$, erit rectangulum $BH \times H\Theta=m \cdot n \cdot HK^2$. Cf. Pfeiderer. §. 5.

Cor. 5. Denique, si $m=n$ erit $BH \times H\Theta=m^2 \cdot HK^2$. Cf. Pfeiderer. §. 6.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ADEB$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποῦτέρα τῶν AD , BE παράλληλος ἡ ΓZ .

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ AE τοῖς AZ , ΓE · καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AE τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον· τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν BA , AG περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν DA , AG , ἴση δὲ ἡ AD τῇ AB · τὸ δὲ EE τὸ ὑπὸ AB , $B\Gamma$, ἴση γὰρ ἡ BE τῇ AB · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA , AG , μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ, Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

PROPOSITIO II.

Obs. Haec propositio sistit praecedentis casum specialem, quo scilicet recta proposita in duas tantum partes secatur, eademque alterum sit latus rectangulorum ad totam et ad ipsius segmenta applicatorum. Quod etiam altera, quam exponunt, demonstratione innuunt Campanus, Peletarius, vel sola, quam tradunt, Scheubelius, Tasquet., Barrov. Applicationem propositi iam exhibet 1. 47. Cf. Pfeleiderer. §. 7.

Cor. 1. Si bifariam secetur AE in Z , erit, ob rectang. $AG=ZB$ (I. 35.), rectang. $AB=2AG=2EA \times AZ$. Cf. Pfeleiderer. §. 8.

Cor. 2. Pariter, si recta AE secetur in quocunque partes, rectangula sub tota et sub singulis eius segmentis simul aequalia sunt quadrato totius AE . Cf. Clavius, Scheubelius,

Describatur enim ex AB quadratum $ADEB$ (I. 46.), et ducatur per F alterutri ipsarum AD , BE parallela FZ (I. 31.).

Aequale itaque est AE rectangulis AZ , FE ; et est quidem quadratum AE ex AB , AZ vero rectangulum sub BA , AF contentum, continetur etenim sub AD , AF , aequalis autem AD rectae AB (I. Def. 30.); FE vero rectangulum sub AB , BF , aequalis enim BE rectae AB ; rectangulum igitur sub BA , AF , cum rectangulo sub AB , BF , aequale est quadrato ex AB : Si igitur recta etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 137.)

Si recta linea secetur utcumque, rectangulum sub tota et uno segmentorum contentum aequale est rectangulo sub segmentis contento, et quadrato ex praedicto segmento.

alii. Quidam ipsam Prop. 2. ita enunciant, Campanus, Peletarius, alii. Cf. Pfeiderer. §. 9.

Cor. 3. Si recta secetur in partes quocumque, quadratum totius aequale est rectangulis simul, quae sub singulis partibus ad singulas applicatis continentur. Cf. Commandinus, Clavius, Pfeiderer. §. 10.

PROPOSITIO III.

Obs. 1. Haec quoque propositio specialem exhibet II. Prop. 1. casum, quo nempe proposita recta in duas tantum partes secatur, parallelogrammorumque rectangulorum, ad totam et ad eius segmenta applicatorum, latus alterum est unum horum segmentorum. Eodem redeunt altera demonstratio

Εὐθεία γὰρ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ . λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνου.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς GB τετραγώνον τὸ ΓAEB , καὶ διήχθω ἡ EA ἐπὶ τὸ Z , καὶ διὰ τοῦ A ὁποῦτα τῶν GA , BE παράλληλος ἦχθω ἡ AZ .

Ἰσον δὴ ἐστὶ τὸ AE τοῖς AA , GE · καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AE τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν AB , BE , ἴση δὲ ἡ BE τῇ $B\Gamma$ · τὸ δὲ AA τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB ἴση γὰρ ἡ AG τῇ GB · τὸ δὲ AB τὸ ἀπὸ τῆς GB τετραγώνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς GB τετραγώνου, Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ,

Campani, Peletarii, Clavii; prior Scheubelii; sola Tacqueti, Barrovii. Cf. Pfeiderer. §. 11.

Obs. 2. Caeterum propositiones 2. 3. quamvis prima iam comprehensae, nominatim sine dubio enunciatae fuerunt, ut immediate essent ad usus occurrentes paratae, nec, quod Austin., qui in ea re Ramum (Schol. Mathem. Francf. 1599. l. X. p. 89.) praecessorem habet, asserit (Examinat. of the first six Books of Euclids Elements Oxf. 1783. p. 36.) vitiosae quadrati ab rectangulo distinctioni aut, quod Ramus ait, in-

Recta enim AB secetur utcumque in Γ ; dico rectangulum sub AB , $B\Gamma$ contentum aequale esse rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB contento, cum quadrato ex $B\Gamma$.

Describatur enim ex ΓB quadratum ΓAEB (I. 46.), et producat EA in Z , et per A alterutri ipsarum ΓA , BE parallela ducatur AZ (I. 31.).

Aequale igitur est rectangulum AE ipsis AA , FE ; et est quidem rectangulum AE sub AB , $B\Gamma$ contentum, continetur etenim sub AB , BE , aequalis autem BE rectae $B\Gamma$ (I. Def. 30.); AA vero rectangulum sub $A\Gamma$, ΓB , aequalis enim $A\Gamma$ rectae ΓB ; AB autem est quadratum ex ΓB ; rectangulum igitur sub AB , $B\Gamma$ contentum aequale est rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB contento, cum quadrato ex ΓB . Si igitur recta etc.

PROPOSITIO IV. (Fig. 138.)

Si recta linea secetur utcumque, quadratum totius aequale est quadratis segmentorum et rectangulo bis sub segmentis contento.

scitiae logicae originem debent. Vid. I. Def. 30. I. 31. II. 1. Cf. Pfeiderer. §. 12.

PROPOSITIO IV.

Obs. 1. Ex aliis huius propositionis demonstrationibus sequens maxime notari meretur, quam habent Campanus, Petletarius, Clavius, Tacquet, Barrov., Scheubel., in qua tertia bis repetitur. Nempe $ABq = AZ + FE$ (II. 2.) et tam $AZ =$

Ευθεία γὰρ γραμμὴ ἡ AB τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ · λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG , GB τετραγώνοις καὶ τῷ ὀς ὑπὸ τῶν AG , GB περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Ἀναγεγράφθω γάρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον το $ADEB$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BA , καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν AD , EB παράλληλος ἦχθω ἡ GHZ , διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρᾳ τῶν AB , AE παράλληλος ἦχθω ἡ OK .

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ GZ τῇ AD , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ BA , ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ GHB ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ AAB . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ AAB τῇ ὑπὸ ABA ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ BA τῇ AA ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ GHB ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ HBF ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ BF πλευρᾷ τῇ GH ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ μὲν GB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ GH τῇ BK · καὶ ἡ HK ἄρα τῇ KB ἐστὶν ἴση· ἰσοπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $GHBK$. Αἶγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ GH τῇ BK , καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ GB : αἱ ἄρα ὑπὸ KBF , BGH γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ KBF ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BGH .

Ὡστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ GHK , HKB ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $GHBK$. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσοπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς GB . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ OK τετράγωνον ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς OK , τοῦτ' ἐστὶν ἀπὸ τῆς AG · τὰ ἄρα OK , OK τετράγωνα ἀπὸ τῶν AG ,

$AG \times GB + AG^2$ (II. 3.) quam $GE = AG \times GB + GB^2$ (II. 3.);
unde $AB^2 = AG^2 + 2AG \times GB + GB^2$. Cf. Pfleiderer. §. 17:

Obs. 2. Corollarium apud Euclidem huic propositioni

Recta enim linea AB secetur utcunque in Γ ; dico quadratum ex AB aequale esse quadratis ex AT , TB et rectangulo bis sub AT , TB contento.

Describatur enim ex AB quadratum $AAEB$ (I. 46.), et iungatur BA , et per Γ quidem alterutri ipsarum AA , EB parallela ducatur ΓHZ (I. 31.); per H vero alterutri ipsarum AB , AE parallela ducatur ΘK (I. 31.).

Et quoniam parallela est ΓZ rectae AA , et in ipsas incidit BA exterior angulus ΓHB aequalis est interiori et opposito AAB (I. 29.). Sed AAB angulo ABA est aequalis (I. 5.), quoniam et latus BA lateri AA est aequale; et angulus ΓHB igitur angulo HBT est aequalis (I. Ax. 1.); quare et latus BT lateri ΓH est aequale (I. 6.). Sed TB quidem rectae HK est aequalis (I. 34.); ΓH vero rectae BK (I. 34.) et HK igitur ipsi KB est aequalis (I. Ax. 1.); aequilaterum igitur est ΓHKB . Dico etiam et rectangulum. Quoniam enim parallela est ΓH rectae BK , et in ipsas incidit TB ; anguli igitur KBT , BTH duobus rectis sunt aequales (I. 29.). Rectus autem est KBT ; rectus igitur et BTH . Quare et oppositi ΓHK , HKB recti sunt (I. 34.); rectangulum igitur est ΓHKB . Ostensum autem est et aequilaterum; quadratum igitur est (I. Def. 30.), et est ex TB . Ex eadem ratione et ΘZ quadratum est; et est ex ΘH , hoc est ex AT (I. 34.); ipsa igitur

adiunctum ex interpolatione ortum putat Austin. p. 37. Illud tamen ob frequentem in demonstrationibus sequentibus applicationem (in sequente statim adhibetur) ab ipso elementorum

ΓΒ εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ *ΑΗ* τῷ *ΗΕ*, καὶ ἐστὶ τὸ *ΑΗ* τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, ἴση γὰρ ἡ *ΗΓ* τῇ *ΓΒ*· καὶ τὸ *ΗΕ* ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· τὰ ἄρα *ΑΗ*, *ΗΖ* ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*. Ἔστι δὲ καὶ τὰ *ΘΖ*, *ΓΚ* τετράγωνα ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ *ΘΖ*, *ΓΚ*, *ΑΗ*, *ΗΕ* ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα *ΘΖ*, *ΓΚ*, *ΑΗ*, *ΗΕ* ὅλον ἐστὶ τὸ *ΑΔΕΒ*, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

Κ Α Ι Α Λ Λ Ω Σ ¹⁾.

Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

1) Editio Basil. et Oxon. pariter ac Parisiensis habent hanc alteram demonstrationem, quam ἄλλως vel ἐτέρα δείξει inscribunt. Eadem etiam adiecta est in versionibus Zamberti, Orontii, Finei, Commandini, Boermannii, aliorumque, eamque solam, priore omissa, habent Clavius et Bartov. Peyrardus observat, hanc alteram demonstrationem exaratam esse (in codice a, ut videtur) in charta paginae contigua. Caeterum, quum a priore eo tantum discrepet, quod aequalitatem angulorum *ΓΗΒ*, *ΗΒΓ* inde infert, quia trianguli aequilateri et ad *A* rectanguli *ΒΑΑ* angulus ad basin semissis est recti (I. 32. et I. 5.) ideoque trianguli ad *F* rectanguli *ΒΓΗ*, tertius angulus *ΓΗΒ* pariter semissis est recti, in quo ad analogiam II. 9. et 10. composita est, jure eam pro spuria habere videtur Pleidererus l. c. Diss. I. p. 6. §. 16. Ne quid tamen deesse videatur, nolimus eam loco suo movere.

auctore notatum fuisse censeri potest, iudice Pleiderer. §. 18. qui addit, haud generatim, quod Austin. asserat, corollaria et

θZ , ΓK quadrata ex AF , FB sunt. Et quoniam aequale est AH rectangulo HE , et est rectangulum AH sub AF , FB , aequalis enim $H\Gamma$ rectae FB ; et HE igitur aequale rectangulo sub AF , FB ; rectangula igitur AH , HE aequalia sunt rectangulo sub AF , FB bis sumto. Sunt autem et θZ , ΓK quadrata ex AF , FB ; ergo quatuor θZ , ΓK , AH , HE aequalia sunt quadratis ex AF , FB et rectangulo bis contento sub AF , FB . Sed quatuor θZ , ΓK , AH , HE totum sunt $A\Delta EB$, quod est quadratum ex AB ; ergo quadratum ex AB aequale est quadratis ex AF , FB et rectangulo bis contento sub AF , FB . Si igitur recta etc.

E T A L I T E R.

Dico quadratum ex AB aequale esse quadratis ex AF , FB et rectangulo contento bis sub AF , FB .

duplices propositionum demonstrationes connecti in elementis. Caeterum Clavius addit, omnia parallelogramma circa diametrum quadrati, etiam extra quadratum productam, quamvis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, quadrata esse, dummodo latera eorum lateribus quadrati sint parallela. Praeter illud corollarium addi possunt sequentia.

COR. 2. Si AB in Γ bifariam secetur, rectangulum $AF \times FB$ transibit in quadratum dimidiaae lineae AB . Erit itaque $AEq = 4AFq$, vel quadratum cuiuscunque rectae aequale est quadrato eius dimidiaae quater sumto (Clavius, Barrov., Baermannus), vel etiam bis rectangulo sub quadrati latere, et lateris dimidio et vice versa. Cf. Whiston. apud Tacquet. Pfeiderer. §. 13.

COR. 3. Summa quadratorum duarum rectarum AF , FB

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BA τῇ AD , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABD τῇ ὑπὸ ADB · καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, τοῦ ABD ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ABD , ADB , BAD , δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BAD , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ABD , ADB μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ· καὶ εἰσιν ἴσαι ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ABD , ADB ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BGH , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ A · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ GHB ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ GHB γωνία τῇ ὑπὸ GBH · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ BG τῇ GH ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν GB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ GH τῇ BK · ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ GK . Ἐχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ GBK γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ GK , καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς GB . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘZ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AG · τὰ ἄρα GK , ΘZ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν AG , GB . Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE , καὶ ἐστὶ τὸ AH τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB , ἴση ἐστὶ γὰρ ἡ GH τῇ GB , καὶ τὸ EH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AG , GB · τὰ ἄρα AH , HE ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . Ἔστι δὲ καὶ τὰ GK , ΘZ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν AG , GB . τὰ ἄρα GK , ΘZ , AH , HE ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG , GB καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . Ἀλλὰ

semper minor est quadrato summae earundem rectorum, duplo rectangulo sub ipsis comprehenso. Cf. Pfeiderer. §. 19.

Cor. 4. Quum etiam sit $AB^2 = \Theta B + AK + ZK = AG^2 + AB \times BG + AG \times BG = AG^2 + (AB + AG) \times BG$ (II.1.) erit itaque quadratum totius AB , atcunque in G divisae, aequale quadrato unius partis AG , et rectangulo simul, quod sub altero

Quoniam enim in eadem figura aequalis est BA rectae AA , aequalis est et angulus ABA angulo AAB (I. 5.); et quoniam omnis trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt (I. 32.), ergo tria anguli ABA tres anguli ABA , AAB , BAA duobus rectis aequales sunt. Rectus autem BAA ; reliqui igitur ABA , AAB uni recto aequales sunt; et sunt aequales (I. 5.); uterque igitur ipsorum ABA , AAB dimidius est recti. Rectus est autem $B\Gamma H$, aequalis enim est interiori et opposito angulo ad A ; reliquus igitur ΓHB dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur est ΓHB angulus ipsi ΓBH ; quare et latus $B\Gamma$ ipsi ΓH est aequale (I. 6.). Sed ΓB quidem rectae HK est aequalis, ΓH vero rectae BK (I. 34.); aequilaterum igitur est ΓK . Habet autem et rectum angulum ΓBK ; quadratum igitur est ΓK (I. 29. et I. Def. 30.), et est ex ΓB . Ex eadem ratione et ΘZ quadratum est, et est aequale quadrato ex $A\Gamma$; ergo ΓK , ΘZ quadrata sunt; et sunt aequalia quadratis ex $A\Gamma$, ΓB . Et quoniam rectangulum AH aequale est rectangulo HE (I. 43.); et est rectangulum AH sub $A\Gamma$, ΓB ; aequalis est enim ΓH rectae ΓB ; erit et EH aequale rectangulo sub $A\Gamma$, ΓB ; ergo AH , HE aequalia sunt ei, quod bis continetur sub $A\Gamma$, ΓB . Sunt autem et ΓK , ΘZ aequalia quadratis ex $A\Gamma$, ΓB ; ergo ΓK , ΘZ , AH , HE aequalia sunt quadratis ex $A\Gamma$, ΓB et

segmento ΓB et sub totius AB ac prioris $A\Gamma$ aggregato continetur, vel (notante Peletario): si duae rectae inaequales fuerint, quadratum maioris AB simul aequale est quadrato minoris $A\Gamma$, et rectangulo sub ipsarum summa ($AB + A\Gamma$) ac differentia ($\Gamma B = AB - A\Gamma$); vel duorum quadratorum inaequalium differentia aequalis est rectangulo sub summa et differentia

τὰ $ΓΚ$, $ΘΖ$ καὶ τὰ $ΑΗ$, $ΗΕ$ ὅλον ἐστὶ τὸ $ΑΕ$, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἐστίν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

laterum ipsorum. Cf. Pfeiderer. §§. 20. 21. Immediate hoc corollarium demonstrat, et vicissim ex eo Propositiones IV—VIII. deducit Angelus de Marchettis Euclid. reform. Liburni 1709. Cf. Pfeiderer. §. 22.

Cor. 5. Haec propositio, ut Scheubelius indicat, valet etiam de pluribus segmentis. Nempe, recta AB divisa in quolibet segmenta, erit quadratum rectae AB aequale summae quadratorum omnium segmentorum, additis duplis rectangulis inter duo quaecunque segmenta comprehensis. Cf. Pfeiderer. §. 24.

Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο V.

Obs. 1. Quum sit $AA \times AB + GA^2 = GB^2$, vel $AA \times AB = GB^2 - GA^2$, sit autem $AA = AG + GA = BG + GA$ et $AB = BG - GA$ etiam ex hac propositione idem consequitur, quod II. 4. Cor. 4 habuimus. Hinc vicissim Prop. 5. ex Prop. 4. Cor. 4. enun-

rectangulo bis contento sub AF , FB . Sed FK , ΘZ et AH , HE sunt totum AE , quod est quadratum ex AB ; ergo quadratum ex AB aequale est quadratis ex AF , FB et rectangulo bis sub AF , FB contento. Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM.

Ex his evidens est, in quadratis spatiis, parallelogramma circa diametrum quadrata esse.

PROPOSITIO V. (Fig. 139.)

Si recta linea secetur in aequalia et inaequalia, rectangulum sub inaequalibus totius segmentis contentum cum quadrato rectae inter puncta sectionum aequale est quadrato ex dimidia.

ciatis consequitur. Cf. Pflaiderer. §§. 26. 27. Gilbert. l. c. Aliam porro huius propositionis demonstrationem ope II. 4. et II. 3. I. 36. et II. 1. habent Maurolycus, Tacquet., Barrov. Cf. Pflaiderer. §. 28. et aliam adhuc ope II. 1., vel etiam II. 4. Cor. 5. et II. 3. Gregor. a St. Vincent. (Opus Geometr. quadratur. circuli et sectionum Coni Antverp. 1647. p. 37.) Cf. Pflaiderer. §§. 42—44.

Obs. 2. Si AA consideretur ut recta secta utcumque in F , ob $FB=AF$, et $AB=FB-FA=AF-FA$, l. II. Prop. 5. etiam ita enuntiari poterit: Si recta linea secetur utcumque rectangulum sub tota et sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris, aequale est quadrato partis maioris. (Marin. Ghetaldi de resolutione et compositione mathematic. libr. V. Romae 1630. p. 2. sq.) Cf. Pflaiderer. §. 29.

Cor. 1. Si recat AB in aequalia AF , FB , et inaequalia AA , AB secetur, rectangulum sub segmentis inaequalibus minus est qua-

Εὐθεία γὰρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ . εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AA , AB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου τὸ ΓEZB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE . καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποῦντα τῶν ΓE , BZ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔH , διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποῦντα τῶν AB , EZ παράλληλος ἦχθω KM , καὶ πάλιν διὰ τοῦ A ὁποῦντα τῶν ΓA , BM παράλληλος ἦχθω ἡ AK .

drato dimidia rectae (Whiston, II. 5. Cor. 1. in Tacquet. Elem. Euclid. Geom. Rom. 1745.), vel, ut Pappus rem exprimit (Lem. XIII. ad libr. Apollonii de sectione rationis et spatii Oxon. 1796. p. XLIX.) rectangulum $AF \times FB$ (id ipsum enim est quadratum dimidia BF) maius est quovis alio, segmentis quibuslibet aliis eiusdem rectae contento. Cf. de Maxim. et Minim. geom. divinatio in quint. Conicor. Apollonii auct. Vincent. Viviani. Florent. 1659. p. 103. sq. Thom. Simpson. Essai sur les Max. et Min. Theor. I. Elem. de Géom. Paris. 1755. p. 173. sq. Cf. Pflaiderer. §. 33.

Cor. 2. Quum tam quadrati ex BF , quam rectanguli $AF \times AB$ perimeter sit $= 2AB$, Prop. 5. simul evincitur, parallelogrammum rectangulorum isoperimetrorum maximum esse quadratum (Thom. Simpson. l. c. p. 174. l'Huilier de relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum Varsov. 1782. p. 28. Pflaiderer. §. 34. Gilbert. l. c. p. 281.)

Cor. 3. Et, cum ob altitudinem maiorem (I. 19.) parallelogrammum rectangulum maius sit quocunque parallelogrammo obliquangulo isoperimetro super eadem basi; isoperimetrorum parallelogrammorum quorumlibet maximum erit quadratum (De locis solidis secunda divinatio geometr. in 5. libros Aristaei, auct. Vinc. Viviani Florent. 1701. p. 57 sq. l'Huilier l. c. p. 6. Pflaiderer. §. 35.).

Recta enim aliqua AB secta sit in aequalia quidem ad Γ , in inaequalia vero ad Δ ; dico rectangulum sub AA , AB contentum cum quadrato ex $\Gamma\Delta$ aequale esse quadrato ex ΓB .

Describatur enim ex ΓB quadratum ΓEZB (I. 46.), et iungatur BE ; et per Δ quidem alterutri ipsarum ΓE , BZ parallela ducatur ΔH (I. 31.), per Θ vero alterutri ipsarum AB , EZ parallela ducatur KM (I. 31.), et rursus per A alterutri ipsarum ΓA , BM parallela ducatur AK (I. 31.).

COR. 4. Ac quidem, cum sit $\Gamma\Delta = AA - \Gamma\Gamma = AA - B\Gamma = B\Gamma - BA$, excessus, quo parallelogrammum rectangulum aequalium laterum $\Gamma\Gamma$, ΓB superat rectangulum quorumvis segmentorum inaequalium AA , AB eiusdem rectae AB (Cor. 1.); seu, quo quadratum superat quodcunque rectangulum isoperimetrum non aequilaterum (Cor. 2.), aequalis est quadrato, cuius latus $\Gamma\Delta$ est differentia laterum singulorum quadrati et rectanguli h. e. excessus longitudinis rectanguli super latus quadrati, vel lateris quadrati super latitudinem rectanguli. Et, quum si (Fig. 140.) ex puncto A abscindatur $AI = BA$, sit recta AI in Γ bifariam secta, adeoque $\Gamma\Delta = \frac{AA - BA}{2}$, erit etiam $B\Gamma q - AA \times AB = \Gamma\Delta q$ i. e. = quadrato, cuius latus est semidifferentia laterum contiguorum rectanguli. Cf. l'Huilier l. c. Pflaiderer. §. 36.)

COR. 5. Secatur AB (Fig. 41. a et b) in alia inaequalia AI , BI in puncto I remotiore a puncto bisectionis, quam est Δ , ita ut sit $\Gamma I > \Gamma\Delta$: erit $AI \times IB + \Gamma I q = B\Gamma q = AA \times AB + \Gamma\Delta q$ (II. 5.). At $\Gamma I q > \Gamma\Delta q$ (I. Cor. 46.), itaque rectangulum $AI \times IB < AA \times AB$, quod est Pappi l. c. Lemm. XIV. Idem tradunt Barrov., Viviani (l. c. Cor. 1.) Whiston., Baermann., Pflaiderer. §§. 37. 38.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΔ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστίν ἴση καὶ τὸ ΑΔ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΞΟ γνώμονι¹⁾ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΗ, ὃ ἐστίν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΑΗ ὅλον

1) Ita edd. Paris. ex cod. a. Editiones Basil. et Oxon. habent: ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΔΖ καὶ ΑΔ ἴσον ἐστὶ, et infra post ἴση, γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ addunt: τὸ δὲ ΖΔ, ΔΑ, ἵ ἐστίν ὁ ΝΞΟ γνώμων, quod eodem redit.

COR. 6. Et quum etiam perimenter rectanguli $ΑΠΧΠΒ$ maneat $=2AB$, patet, isoperimetrorum parallelogrammorum rectorum non aequilaterorum illud maius esse, cuius latera contigua, seu longitudo et latitudo minus a se invicem differant. Cf. Pfeiderer, §. 40.

COR. 7. Quum, abscissa $AP=BΠ$, sit $PΠ$ differentia segmentorum $ΑΠ$, $BΠ$, semidifferentia $ΓΠ=ΓΡ$, adeoque etiam recta $PΠ$ secta sit in aequalia in $Γ$, et inaequalia in $Δ$, erit $ΠΠ^2=PA \times ΑΠ+ΓΔ^2$ (II. 5.). Hinc (Cor. 5.) $ΑΠ \times ΠΒ+PA \times ΑΠ+ΓΔ^2=AA \times AB+ΓΔ^2$ i. e. $ΑΠ \times ΠΒ+PA \times ΑΠ=AA \times AB$. At (Fig. 141. a.) $PA=PF+ΓΔ=\frac{ΑΠ-ΠΒ}{2}+\frac{AA-BΔ}{2}$ et (Fig. 141. b.) $PA=PF-ΓΔ=\frac{ΑΠ-ΠΒ}{2}-\left(\frac{AA-BΔ}{2}\right)$ pariterque (Fig. 141. a.) $ΔΠ=ΓΠ-ΓΔ=\frac{ΑΠ-ΠΒ}{2}-\left(\frac{AA-BΔ}{2}\right)$

Et quoniam aequale est complementum $\Gamma\Theta$ complemento ΘZ (I. 43.), commune addatur ΔM ; totum igitur ΓM toti ΔZ aequale est. Sed ΓM ipsi ΔA aequale est, quia et $\Delta \Gamma$ ipsi ΓB est aequalis (I. 36.); et ΔA igitur ipsi ΔZ aequale est. Commune addatur $\Gamma\Theta$; totum igitur $A\Theta$ ipsi $N\Xi O$ gnomoni aequale est. Sed $A\Theta$ quidem est rectangulum sub ΔA , ΔB , aequalis enim $\Delta\Theta$ ipsi ΔB , et $N\Xi O$ igitur gnomon aequalis est rectangulo sub ΔA , ΔB . Commune addatur ΔH , quod est aequale quadrato ex ΓA (II. Cor. 4.); ergo $N\Xi O$ gnomon et ΔH aequalia sunt rectangulo sub ΔA , ΔB contento et quadrato ex ΓA . Sed $N\Xi O$ gnomon et ΔH sunt totum qua-

$$\text{et (Fig. 141. b) } \Delta H = \Gamma P + \Gamma I = H + A = \frac{AH - HB}{2} + \frac{AA + BA}{2}.$$

Semper itaque spatium, quo rectangulum sub segmentis AA , BA , in quae recta AB dividitur puncto A propiore puncto bisectionis Γ , excedit rectangulum sub segmentis AH , BH , in quae eadem recta AB dividitur puncto H remotiore a puncto bisectionis (Cor. 6.), seu, quo rectangulum $AA \times AB$, cuius latera minus inter se differunt, excedit alterum isoperimetrum $AH \times HB$, cuius laterum differentia maior est, aequatur rectangulo $PA \times AH$ sub summa ac differentia semidifferentiarum laterum contiguorum utriusque rectanguli. Cf. Pfeiderer. §. 41.

Cor. 8. Et quum (II. 4. Cor. 3.) quadratum summae duarum rectarum semper maius sit summa quadratorum earum, ita ut differentia aequalis sit duplo rectangulo inter istas rectas comprehenso, fiet haec differentia tanto minor i. e. summa quadratorum duarum rectarum eo propius accedet ad quadratum summae earum, adeoque eo $\begin{pmatrix} \text{minor} \\ \text{maior} \end{pmatrix}$ fiet, quo $\begin{pmatrix} \text{maius} \\ \text{minus} \end{pmatrix}$ est rectangulum inter istas rectas comprehensum. Itaque summa

ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓΒ·
τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον
μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ
τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἐάν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ διχα, προστεθῇ δὲ
τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπὶ εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν
τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον
ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου
ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμι-
σεῖας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγρα-
φέντι τετραγώνῳ.

duorum quadratorum eandem datam laterum summam habentium minima erit, si latera ipsorum fuerint mutuo aequalia (Cor. 1.) Whiston l. c. p. 51. De eadem hac propositione, quae est Euclidis Lemm. post X. 42. adhuc infra ad II. 9. Cor. 1. sermo erit. Cf. Gilbert l. c. p. 281.

Cor. 9. Si duae rectae aequales ita dividantur in partes inaequales, ut rectangulum sub partibus unius aequale sit rectangulo sub partibus alterius, erunt unius partes partibus alterius respective aequales, maior maiori, et minor minori. Cf. Whiston. et Gilbert. l. c.

Cor. 10. Quum non tantum; ut Cor. 5. vidimus, sit $ΓΔ = \frac{ΑΔ - ΒΔ}{2}$, verum etiam $ΒΓ = \frac{ΑΔ + ΒΔ}{2}$; II. 5. etiam ita

exprimi potest: $\left(\frac{ΑΔ + ΒΔ}{2}\right)^2 = ΑΔ \times ΔΒ + \left(\frac{ΑΔ - ΒΔ}{2}\right)^2$ i. e. quadratum semisummae duarum inaequalium rectarum aequale est rectangulo sub ipsis his rectis, una cum quadrato simidifferentiae earum; vel: excessus quadrati semisummae duarum inaequalium rectarum super quadratum semidifferentiae earum aequalis est rectangulo sub ipsis his rectis. Cf. Pfleiderer.

dratum $FEZB$, quod est quadratum ex FB ; rectangulum igitur sub AA , AB contentum cum quadrato ex FA aequale est quadrato ex FB . Si igitur recta etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 142.)

Si recta linea secetur bifariam, adiciatur autem aliqua ipsi recta in directum; rectangulum sub tota cum adiecta, et sub adiecta contentum cum quadrato ex dimidia aequale est quadrato compositae ex dimidia et adiecta tanquam una linea.

§§. 31. 32. Simul patet, ut hoc obiter dicamus, duarum rectarum inaequalium AA , BA maiorem AA aequalem esse $AF + FA$ vel $BF + FB$ i. e. semisummae earum simul cum semidifferentia, minorem BA contra $BF - FA$ h. e. excessui semisummae super semidifferentiam. Cf. Pfeiderer. §. 30.

PROPOSITIO VI.

Obs. Alias propositionis huius demonstrationes habent Angelus de Marchettis, Clavius, Barrov. et Tacquet. e II. 4. Cor. 4. vel e II. 4. et II. 3. vel e II. 5. vel e II. 1. et II. 2. petitas. Cf. Pfeiderer. §§. 46. 48. 49. 57. 58. Ea maxime, qua, Clavio referente, Mauritius Brescius, regius mathem. disciplin. in Academ. Parisiensi professor, utebatur, simplicitate sua se commendat. Ita nimirum ille: Sumatur (Tab. VI. fig. 143.) $AI = BA$, erit $BI = AA$ (I. Ax. 2.), adeoque $IB \times BA = AA \times AB$, et ob $FA = FB$, etiam $II = FA$, unde (II. 5.) $IB \times BA + BFq = FAq$, adeoque $AA \times AB + BFq = FAq$. Cf. Pfeiderer. §. 49. Caeterum, si recta AA ut in punto F utcumque secta spectetur, ob $FB = AF$, et $BA = FA - FB = FA - AF$, pariter emergit propositio, quam ad II. 5. Obs. 2. vidimus: Si

Εὐθεία γάρ τις ἡ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημειῶν, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπὶ εὐθείας ἡ BA · λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AA , AB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς GB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς GA τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς GA τετράγωνον τὸ $GEZA$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE , καὶ διὰ μὲν τοῦ B σημείου ὁποτέρᾳ τῶν GE , AZ παράλληλος ἤχθω ἡ BH · διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν AA , EZ παράλληλος ἤχθω ἡ KM · καὶ ἔτι διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν GA , AM παράλληλος ἤχθω ἡ AK .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ AA τῷ $G\Theta$. Ἀλλὰ καὶ τὸ $G\Theta$ τῷ ΘZ ἴσον ἐστὶ· καὶ τὸ AA ἄρα τῷ ΘZ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ GM · ὅλον ἄρα τὸ AM τῷ $N\Theta$ γνῶμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ AM ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AA , AB , ἴση γάρ ἐστιν ἡ AM τῇ AB · καὶ ὁ $N\Theta$ ἄρα γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AA , AB περι-

recta linea secetur utcumque, rectangulum sub tota et sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris aequale est quadrato partis maioris. Cf. Ghetaldus, Herigonius in cursu Mathem. T. I. Paris. 1644. p. 78. sqq. Pfeiderer. §. 50.

Cor. 1. Quum sit $AA=GA+AG=GA+BG$, $BA=GA-BG$, etiam ex hac propositione idem prodit, quod ad II. 5. Obs. 1. et II. 4. Cor. 4. dictum fuit, nempe $GAq-FBq=(GA+GB)\times(GA-FB)$. Cf. Pfeiderer. §. 51.

Cor. 2. Quum sit differentia rectarum AA , $GA=AG$ vel BG , pariterque differentia rectarum GA , $BA=BG$, vel, ut aliter idem dicamus, quum rectae AA , GA , BA sint continue arithmetice proportionales, II. Prop. 6., haec quoque continetur (ut Isaacus Monachus: Schol. in Euclid. Elem. geom. sex priores libros Argentor. 1579. in Schol. ad II. 6., quod et apud Commandinum (fol. 31. b.) exstat, pariterque

Recta enim aliqua AB secetur bifariam ad punctum Γ , adiciatur autem ipsi aliqua recta BA in directum; dico rectangulum sub AA , AB contentum cum quadrato ex ΓB aequale esse quadrato ex ΓA .

Describatur enim ex ΓA quadratum ΓEZA (I. 46.), et iungatur AE , et per punctum quidem B alterutri ipsarum ΓE , AZ parallela ducatur BH (I. 31.); per Θ vero punctum alterutri ipsarum AA , EZ parallela ducatur KM (I. 31.); et adhuc per A alterutri ipsarum ΓA , AM parallela ducatur AK (I. 31.).

Quoniam igitur aequalis est $A\Gamma$ rectae ΓB , aequale est et AA ipsi $\Gamma\Theta$ (I. 36.). Sed $\Gamma\Theta$ ipsi ΘZ aequale est (I. 43.); et AA igitur ipsi ΘZ est aequale. Commune addatur ΓM ; totum igitur AM ipsi $N\Theta O$ gnomoni est aequale. Sed AM est rectangulum sub AA , AB , aequalis enim est AM ipsi AB (II. Cor. 4.); et igitur gnomon $N\Theta O$ aequalis est rectangulo sub

Clavius et alii observant): Si tres rectae sint continue arithmetice proportionales, quadratum mediae aequale est rectangulo sub extremis, cum quadrato differentiae utriusque extremarum ac mediae. Quod idem etiam ex II. 5. consequitur, in qua (vid. Fig. ad II. 5.) AA , $BI = \Gamma A$, et BA pariter sunt continue arithmetice proportionales. Cf. Pfleiderer. §§. 52. 53.

Cor. 3. Quum sit $\Gamma A = \frac{AA + AI}{2} = \frac{AA + BA}{2}$, et $\Gamma B = \frac{AA - BA}{2}$, etiam ex hac propositione idem consequetur, quod

II. 5. Cor. 10. nempe esse $AA \times AB + \left(\frac{AA - BA}{2}\right)^2 = \left(\frac{AA + BA}{2}\right)^2$, quae propositio terminis tantum differt ab ea, quam Cor. praecedente habuimus. Cf. Pfleiderer. §. 55. 56.

χομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛH , ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Lambda\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογωνίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΞO γνώμονι καὶ τῷ ΛH . Ἀλλὰ ὁ $\text{N}\Xi\text{O}$ γνόμων καὶ τὸ ΛH ὅλον ἐστὶ τὸ $\Gamma\text{E}\text{Z}\Delta$ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Lambda\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογωνίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὥς ἐτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ σφαιροειδέα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Cor. 4. Caeterum facile patet nexus propositionum 5. et 6. I. II., quae eo tantum differunt, quod in Prop. 5. punctum Δ in ipsa AB , in Prop. 6. autem in ea producta sumitur, unde etiam uno enunciato comprehendi possunt. Cf. Pfeiderer. §. 59.

Cor. 5. Si punctum Π sumatur (Fig. 144.) remotius à Γ , quam Δ , in rectangulis $\text{AH} \times \text{PB}$, $\text{AD} \times \text{AB}$ duo latera contigua eandem inter se differentiam $= \text{AB}$ habebunt, eritque $\text{AH} \times \text{PB} > \text{AD} \times \text{AB}$, sumtòque $\text{AP} = \text{B}\Pi$, erit $\text{AD} \times \text{AB} + \text{PA} \times \text{AH} = \text{AH} \times \text{PB}$, quod simili ratione ostenditur et evolvitur ac II. 5. Cor. 7. (Pfeiderer. §. 166.) cf. II. 10. Cor. 1.

Cor. 6. Conversae propositionum 5. et 6., quae sunt Pappi in librum III. conicor. Apollonii Lemmata 9. 11. 10. (Collect. Mathem. fol. 274. b. sqq.) vel 8. 7. 9. Apollonii conicor. libr. octo opera Edm. Halleyi Oxon. 1710. P. I. p. 155. pariter valent. Nempe 1) si (Fig. 140.) punctum Δ in

AA , AB contento. Commune addatur AH ; quod est aequale quadrato ex FB ; rectangulum igitur sub AA , AB contentum cum quadrato ex FB aequale est gnomoni NEO et ipsi AH . Sed gnomon NEO et AH sunt totum quadratum $FEZA$, quod quidem fit ex FA ; ergo rectangulum sub AA , AB contentum cum quadrato ex FB aequale est quadrato ex FA . Si igitur recta etc.

PROPOSITIO VII. (Fig. 143.)

Si recta linea secetur utcumque, quadrata totius et unius e segmentis simul sumpta aequalia sunt rectangulo bis sub tota et dicto segmento contento, et quadrato reliqui segmenti.

recta AB situm sit, sumtunque sit aliud punctum inter A et B , sitque a) $AA \times AB + FA^2 = FB^2$, erit $AF = FB$: Nam, quum ex hypoth. sit $FA^2 = AA \times AB + FA^2$, erit $FA^2 > FB^2$, adeoque (I. Cor. 46.) $FA > FB$. Unde ex FA abscindi poterit (I. 3.) $FI = FB$, eritque (II. 6.) $AA \times AI + IF^2 = FA^2$, vel $AA \times AI + FA^2 = FA^2 = AA \times AB + FA^2$, adeoque $AA \times AI = AA \times AB$, et, ob altitudinem communem AA (I. Conv. 36.) $AI = AB$, adeoque ob $FI = FB$ (hyp.) $AI + FI = AB + FB$ i. e. $AF = FB$. Pariter, si sit b) $AA \times AB + FA^2 = FB^2$, quo casu sumere non licet, esse $AF > FB$, erit $FB^2 = FA^2 + (FB + FA) \times AB$ (II. 4. Cor. 4.) adeoque $AA \times AB + FA^2 = FA^2 + (FB + FA) \times AB$, vel $AA \times AB = (FB + FA) \times AB$, adeoque ob altitudinem communem AB (I. Conv. 36.) $AA = FB + FA$, vel, demta communem FA , erit $AF = FB$. Eadem ratione, si 2) (Fig. 143.) punctum A in recta AB producta situm sit, sitque a) $AA \times AB + FA^2 = FB^2$, erit $FA < FB$, unde, sumta ex parte puncti A , $FI = FB$, erit A in ipsa

Εὐδεία γὰρ τις ἡ AB τεμνέσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετραγῶνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνον τὸ $A\Delta EB$ καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $A\Delta$ τῷ HE , κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓZ ὅλον ἄρα τὸ AZ ὅλῳ τῷ GE ἴσον ἐστὶ· τὰ ἄρα AZ , GE διπλάσιά ἐστι τοῦ $A\Delta$. Ἀλλὰ τὰ AZ , GE ὁ KAM ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓZ τετραγώνον· ὁ KAM ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓZ διπλάσιά ἐστι τοῦ $A\Delta$. Ἔστι δὲ τοῦ AZ διπλάσιον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, ἴση γὰρ ἡ BZ τῇ

recta ΓI , adeoque ex II. 5. $AA \times AI + \Gamma A^2 = \Gamma I^2 = \Gamma A^2 = AA \times AB + \Gamma A^2$, unde $AA \times AI = AA \times AB$, et ob altitudinem communem AA (I. Conv. 36.) $AI = AB$, adeoque $\Gamma I = AI = \Gamma A - AB$ i. e. $\Gamma I = \Gamma B$. Pariter, si b) sit $AA \times AB + \Gamma B^2 = \Gamma A^2$, quo casu sumere non licet, esse $\Gamma A < \Gamma B$, erit $\Gamma A^2 = \Gamma B^2 + (\Gamma A + \Gamma B) \times AB$ (II. 4. Cor. 4.), adeoque $AA \times AB + \Gamma B^2 = \Gamma B^2 + (\Gamma A + \Gamma B) \times AB$, vel $AA \times AB = (\Gamma A + \Gamma B) \times AB$, vel, ob altitudinem AB communem, $AA = \Gamma A + \Gamma B$ (I. Conv. 36.), vel, demta communi ΓA , $AI = \Gamma B$. Cf. Pfeiderer. I. c. §. 60. et §. 191. Conf. quae infra II. ad 10. Obs. 8. dicuntur.

PROPOSITIO VII.

Obs. Huius propositionis haud inelegans est sequens demonstratio, quam Peletarius Euclidean subiungit, ope figurae, in qua omnes propositionis particulae apparent. Eandem demonstrationem etiam tradunt Fournier. (Euclid. Elem. Libri VI. Paris. 1654. Coëtsius (Euclid. Elem. L. VI. Amst. 1705.) Whiston. Pfeiderer §. 81. Caeteris nempe, ut in Euclidean constructione factis, describatur (Fig. 146.) super

Recta enim aliqua AB secta sit utcumque in puncto Γ ; dico quadrata ex AB , BF aequalia, esse rectangulo bis sub AB , BF contento et quadrato ex ΓA .

Describatur enim ex AB quadratum $ADEB$ (I. 46.); et construaturs figura.

Quoniam igitur aequale est AH ipsi HE (I. 43.), commune addatur ΓZ ; totum igitur AZ toti ΓE aequale est (Ax. 2.); ergo AZ , ΓE dupla sunt ipsius AZ . Sed AZ , ΓE sunt gnomon KAM et quadratum ΓZ ; KAM igitur gnomon et ΓZ dupla sunt ipsius AZ . Est autem ipsius AZ duplum et rectangulum bis contentum sub AB , BF , aequalis enim

EN quadratum $ENOH$ (I. 46.). Erunt itaque $AB^2 + BF^2 = AE + EH = AZ + ZH + NO$. Sed ob $AH = HE$ (I. 43.) et $BH = EH$, est $AZ = ZH$: ergo $AB^2 + BF^2 = 2AZ + NO = 2$ rectang. $AB \times BF + \Gamma A^2$. Aliam adhuc demonstrationem habent Scheubelius, Clavius, Tacquet., Barrov., Viviani. (de locis solidis L. II. Prop. 65. p. 29. sq.) Pflaiderer. §. 82. ex II. propositionibus 3. et 4. deductam. Ex Obs. 1. ad II. 5. nostram propositionem infert Angelus de Marchettis, Pflaiderer §. 83. Caeterum haec propositio aliter adhuc efferripotit. Nempe, quum sit $\Gamma A^2 + 2AB \times BF = AB^2 + BF^2$, vel $\Gamma A^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \times BF$, et $\Gamma A = AB - BF$, erit $(AB - BF)^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \times BF$ i. e. quadratum differentiae duarum rectarum inaequalium aequale est summae quadratorum ipsorum, demto duplo rectangulo sub ipsis contento. Cf. Pflaiderer. §. 86. et qui ab ipso citantur, Barrov. Whiston., Baermann. alique. Vel, si recta AB producaturs, donec sit $BX = BF$, erit recta AX in duas partes inaequales AB , BX secta, quarum differentia partium $= AB - BX = AB - BF$, adeoque, si recta linea in duas partes inaequales secetur; quadratum differentiae partium aequale est quadratis

$B\Gamma$. ὁ ἄρα KAM γνῶμων καὶ τὸ ΓZ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. Κοινὸν προσ-
κείσθαι τὸ ΘN , ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον·
ὁ ἄρα KAM γνῶμων καὶ τὰ ΓZ , ΘN τετράγωνα
ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχομένῳ
ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ
ὁ KAM γνῶμων καὶ τὰ ΓZ , ΘN τετράγωνα ὅλον
ἐστὶ τὸ $A\Delta E B$ καὶ τὸ ΓZ , ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν AB ,
 $B\Gamma$ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετράγωνα
ἴσα ἐστὶ, τῷ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχομένῳ ὀρ-
θογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραγώνου. Ἐὰν
ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἐνυς, τὸ τε-
τράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιε-
χόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμή-
ματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ
τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι
τετραγώνῳ.

partium, demto duplo sub partibus rectangulo: vel quadrata
partium simul aequalia sunt quadrato differentiae partium,
ana cum duplo sub partibus rectangulo. Cf. Pfeiderer. §§.
87. 88.

Cor. Hinc deducitur: recta aliqua in partes inaequales
divisa, quadrata partium simul maiora sunt rectangulo, quod
bis sub iisdem continetur, vel generalius: summa quadratorum
duarum inaequalium rectorum maior est duplo rectangulo sub
ipsis, illa quippe hanc excedit quadrato differentiae duarum
rectarum. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 84. 85.

PROPOSITIO VIII.

Ob's. Varias alias huius propositionis demonstrationes

BZ ipsi BF (II. 4. Cor.); ergo gnomon KAM et quadratum FZ aequalia sunt rectangulo bis contento sub AB , BF . Commune addatur ON , quod est quadratum ex AF ; ergo gnomon KAM et quadrata FZ , ON aequalia sunt rectangulo bis sub AB , BF contento et quadrato ex AF . Sed gnomon KAM et quadrata FZ , ON sunt totum $ADEB$ et FZ , quae sunt quadrata ex AB , BF ; ergo quadrata ex AB , BF aequalia sunt rectangulo bis sub AB , BF contento cum quadrato ex AF . Si igitur recta etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 147.)

Si recta linea secetur utcunque, rectangulum quater sub tota et uno segmentorum contentum cum quadrato ex reliquo segmento aequale est quadrato ex tota et dicto segmento tanquam ex una linea descripto.

exhibent Pfeiderer §§. 91–97. 105. et, qui ab eo citantur, Claudi. Richardus, Peletarius, Clavius, Tacquet., Barrov., Angel. de Marchettis et Coëtsius, e quibus eam, quam Clavius, Tacquet. et Barrov. habent (vid. Pfeiderer. §. 95.) simplicitate sua se maxime commendantem hic subiungere liceat. Ita nempe illi: est

$$AA^2 = AB^2 + BA^2 + 2AB \times BA \text{ (II. 4.)}$$

$$= AB^2 + BF^2 + 2AB \times BF \text{ (ob } BA = BF \text{) ex construct.}$$

Sed $AB^2 + BF^2 = 2AB \times BF + AF^2$ (II. 7.), ergo

$$AA^2 = 4AB \times BF + AF^2.$$

Caeterum aliter adhuc efferrī potest propositio. Nempe 1) ob $BA = BF$ dici poterit: Si recta aliqua AB secetur utcunque in F ; eique adiciatur alia recta BA uni segmentorum BF ae-

Εὐθεία γὰρ τις ἡ AB τεμνέσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB , $B\Gamma$ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐκ' εὐθείας τῇ AB εὐθεία ἡ BA , καὶ κείσθω ἴση τῇ ΓB ἡ BA , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AA τετραγώνον τὸ $A\epsilon Z\Delta$, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ BA , ἀλλὰ ἡ μὲν ΓB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BA τῇ KN , καὶ ἡ HK ἄρα τῇ KN ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ HP τῇ PO ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓB τῇ BA , ἡ δὲ HK τῇ KN · ἴσον ἄρα ἐστὶ 1) τὸ μὲν ΓK τῷ BN , τὸ δὲ HP τῷ KO . Ἀλλὰ τὸ ΓK τῷ PN ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓO παραλληλογράμμου καὶ τὸ BN ἄρα τῷ HP ἴσον ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΓK , $K\Delta$, HP , PN ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓK . Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BA , ἀλλὰ ἡ μὲν BA τῇ BK , τοῦτ' ἐστὶ τῇ GH ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓB τῇ

1) Cod. a habet: ἐστὶ καὶ τὸ ΓK , edd. Oxon. et Basil. omisso καὶ habent ἐστὶ τὸ μὲν ΓK , Peyrardus utrumque καὶ et μὲν recipit.

qualis, quadratum totius lineae compositae aequale est rectangulo quater comprehenso sub data et adiecta, una cum quadrato alterius segmenti. Atque ita propositionem hanc efferunt Clavius, Peletarius, Campanus, Pfeiderer. §. 98. 2) Vel, cum in puncto B bifariam secetur recta GA , cui in directum adiicitur PA , observante Clavio, consequitur propositionis enunciatum: Si recta GA bifariam secetur in B , et illi recta quaecunque PA in directum adiiciatur; quadratum totius AA

Recta enim aliqua AB secta sit utcumque in puncto Γ ; dico et rectangulum quater sub AB , $B\Gamma$ contentum cum quadrato ex $A\Gamma$ aequale esse quadrato ex ipsa AB , $B\Gamma$ tanquam ex una linea descripto.

Producatur enim in directum ipsi AB recta BA , et ipsi ΓB ponatur aequalis BA , et describatur ex AA quadratum $AEZA$ (I. 46.), et construatur dupla figura.

Quoniam igitur aequalis est $B\Gamma$ rectae BA , sed ΓB quidem ipsi HK est aequalis (I. 34.), et BA ipsi KN (I. 34.); et HK igitur ipsi KN est aequalis. Ex eadem ratione et HP ipsi PO est aequalis. Et quoniam aequalis est ΓB quidem ipsi BA , et HK ipsi KN ; aequale igitur est (I. 36.) rectangulum quidem FK rectangulo BN , et rectangulum HP rectangulo KO . Sed ΓK ipsi PN est aequale (I. 43.), complementa enim sunt parallelogrammi FO , et BN igitur ipsi HP aequale est; quatuor igitur ΓK , KA , HP , PN aequalia inter se sunt; quatuor igitur quadrupla sunt ipsius ΓK . Rursus, quoniam aequalis

compositae ex data ΓA et adiecta ΓA aequale est quadruplo rectangulo sub dimidia datae ΓA , et sub AB composita ex eadem dimidia $B\Gamma$ et adiecta ΓA , una cum quadrato adiectae ΓA . Vide Tacquet., Pfeiderer. §. 99. 3) Vel: recta ΓA bifariam in B secta, et in ea producta sumto quocunque puncto A (pariter atque in hypothesis II. Prop. 6.) differentia quadratorum rectarum AA , $A\Gamma$, puncto arbitrario A , et extremis Γ , A rectae propositae ΓA terminatarum, aequatur quadruplo rectangulo sub rectis BA et $B\Gamma$ sen BA , quae hinc puncto bisectionis B , inde puncto arbitrario A , et alteri rectae propositae ΓA extremo Γ vel A interiacent. Cf. Pfeiderer §. 100.

HK , τοῦτ' ἐστὶ τῇ HI ἴσιν ἴση καὶ ἡ GH ἄρα τῇ HI ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν GH τῇ HI , ἡ δὲ HP τῇ PO ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν AH τῷ MI , τὸ δὲ IA τῷ PZ . Ἀλλὰ τὸ MI τῷ IA ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ MA παραλληλογράμμου καὶ τὸ AH ἄρα τῷ PZ ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ AH , MI , IA , PZ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ AH τετραπλάσιά ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ IK , KA , HP , PN τοῦ GK τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὅκτω ἃ περιέχει τὸν $ΣΤΥ$ γνῶμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ AK . Καὶ ἐπεὶ τὸ AK τὸ ὑπὸ τῶν AB , BA ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ KB τῇ BA · τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BA τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ AK . Ἐδείχθη δὲ τοῦ AK τετραπλάσιος καὶ ὁ $ΣΤΥ$ γνῶμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BA ἴσον ἐστὶ τῷ $ΣΤΥ$ γνῶμονι. Κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΞΘ$, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ $ΣΤΥ$ γνῶμονι καὶ τῷ $ΞΘ$. Ἀλλὰ ὁ $ΣΤΥ$ γνῶμων καὶ τὸ $ΞΘ$ ὅλον ἐστὶ τὸ $AEZΔ$ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ὑπὸ τῆς AD · τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AD τετραγώνῳ¹⁾ τοῦτ'

1) Cod. a et ex eo ed. Paris. addunt: ἴση δὲ ἡ BA τῇ BF · τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB , BF περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ (τῆς) AG τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ (τῆς) AD , quod ut superfluum onusimum, consentientibus etiam de Lambre et Prony in relatione ad Institut. Franc. facta.

4) Quodsi recta AD tanquam in puncto B utcunque secta consideretur: ob $BF=BA$, sistit $AG=ABF-A$ differentiam partium AB , BA , et eme git propositio: Si recta in partes inaequales utcunque secatur: quadratum totius, dempto quadrato

est ΓB ipsi BA , sed BA quidem ipsi BK (II. 4. Cor.), hoc est (I. 34.), ipsi ΓH est aequalis, FB vero ipsi HK (I. 34.), hoc est, ipsi HII (I. 34.) est aequalis; et ΓH igitur ipsi HII aequalis est. Et quoniam aequalis est ΓH quidem ipsi HII , et $II P$ ipsi PO ; aequale est rectangulum quidem AH rectangulo MII , et rectangulum IIA rectangulo PZ . Sed MII ipsi IIA est aequale (I. 43.); complementa enim sunt parallelogrammi MA , et AH igitur ipsi PZ aequale est; quatuor igitur AH , MII , IIA , PZ aequalia inter se sunt; quatuor igitur ipsius AH quadrupla sunt. Ostensa sunt autem et quatuor ΓK , KA , HP , PN ipsius ΓK quadrupla; ergo octo quae continet gnomon ΣTT quadrupla sunt ipsius AK . Et quoniam AK est rectangulum sub AB , BA , aequalis enim est KB ipsi BA (II. 4. Cor.); erit contentum quater sub AB , BA quadruplum ipsius AK . Ostensa est autem et gnomon ΣTT ipsius AK quadruplus. Quod igitur quater continetur sub AB , BA aequale est gnomoni ΣTT . Commune addatur $\Xi\Theta$, quod aequale est quadrato ex AF ; rectangulum igitur quater sub AB , BA contentum cum quadrato ex AF aequale est gnomoni ΣTT et quadrato $\Xi\Theta$. Sed gnomon ΣTT et $\Xi\Theta$ sunt totum $AEZA$, quod est quadratum ex

differentiae partium, aequale est quadruplo sub partibus rectangulo; seu quadruplum rectangulum sub partibus, cum quadrato differentiae partium, aequale est totius lineae quadrato. Cf. Ghetaldus, Herigonus Pfeiderer, §. 101. 5) Porro AA , AF sunt rectae inaequales, quarum differentia est ΓA , semidifferentia BF seu BA , et minor earum erit semisummae imminutae semidifferentia aequalis maior autem semisummae auctae semidifferentia (II. 5. Cor. 10.). Propositio itaque eo

ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς AB καὶ BF ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγο-
φέντι τετραγώνῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ, θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ
ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα δι-
πλασία ἔστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ
τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

redit: Differentia quadratorum duarum inaequalium rectarum
aequalis est rectangulo sub ipsarum semisumma ac semidiffe-
rentia quater sumta. Cf. Pfeiderer §. 102. 6) Vel, quum $AA =$
 $AB + \left\{ \frac{BA}{BF} \right\}$ sistat summam, $AI = AB - BF$ differentiam dua-
rum inaequalium rectarum: excessus quadrati summae duarum
rectarum super quadratum differentiae ipsarum aequalis est
quadruplo rectangulo sub rectis. Cf. Pfeiderer. §. 103.

PROPOSITIO IX.

Obs. 1. Plures adhuc alias huius propositionis demon-
strationes habent Claud. Richardus, Coëtsius, Clavius, Bar-
rov., Angelus de Marchettis, Commandinus, Ghetaldus, Gil-
bert., Pfeiderer. (Scholia in libr. II. Elem. Euclid. Pars II.
p. 1. sqq. §§. 109—114.) Poterit etiam haec propositio aliter
efferi. Nempe 1) dum AA consideratur tanquam in puncto
 F in partes utcumque inaequales divisa: erunt, quum sit BA
 $= BF - FA = AF - FA$, quadratum totius AA , una cum qua-
drato differentiae partium BA vel $(AF - FA)$, dupla qua-
dratorum partium AF , FA quod observant Ghetaldus, et
Pfeiderer, l. c. §. 116. 2) vel, quum sit $AA = AF + FA$, erit
 $(AF + FA)^2 + (AF - FA)^2 = 2AF^2 + 2FA^2$ i. e. aggregatum qua-
dratorum ex summa et differentia duarum inaequalium recta-
rum aequatur duplo quadratorum ex ipsis (Boermannus, Gil-

AA ; rectangulum igitur quater sub AB , BA contentum cum quadrato ex AF aequale est quadrato ex AA , hoc est, quadrato ex ipsa AB et BF tanquam ex una linea descripto. Si igitur recta etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 148.)

Si recta linea secetur in aequalia et inaequalia, quadrata segmentorum inaequalium dupla sunt quadrati ex dimidia et quadrati ex recta inter puncta sectionum.

bert., Pfeiderer. §. 115.) quod etiam ex II. 4. et II. 7. inter se iunctis sponte fluit. Hinc, ut hoc obiter notemus, se-

$$\text{quitur } AF^2 + FA^2 = \frac{(AF + FA)^2 + (AF - FA)^2}{2} \quad \text{h. e. summa}$$

quadratorum duarum inaequalium rectarum aequalis est dimidiae summae duorum quadratorum, quorum latera sunt ipsarum aggregatum et differentia. Cf. Pfeiderer. §. 117.

Cor. 1. Quum $AF = FB$ (hyp.), adeoque $AF^2 + FB^2 = 2AF^2$, at ex nostra propositione $AA^2 + AB^2 = 2AF^2 + 2FA^2$; patet, esse $AF^2 + FB^2 < AA^2 + AB^2$, vel duorum quadratorum eandem datam laterum summam habentium aggregatum esse omnium minimum, quando ipsorum latera mutuo aequalia sint. Cf. l'Huilier de relatione mutua p. 55. Pfeiderer. §. 118. Et quidem erit $(AA^2 + AB^2) - (AF^2 + FB^2) = 2FA^2$ i. e. recta AB in F in aequalia, in A autem in inaequalia segmenta divisa, summa duorum quadratorum ab aequalibus rectae segmentis descriptorum a summa duorum quadratorum ab inaequalibus eiusdem rectae segmentis factorum deficit duplo quadrato rectae inter puncta sectionum interceptae i. e. (cf. II. 5. Cor. 4.) duplo quadrato semidifferentiae segmentorum inaequalium. Cf. Pfeiderer. §. 120.

Cor. 2. Aliter itaque res se habet in his quadratis, ac in rectangulis eandem laterum contiguum summam habentibus. In his nempe vidimus (II. 5. Cor. 4.) rectangulum

Εὐθεία γὰρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AA , AB τετράγωνα διπλάσια ἔστι τῶν ἀπὸ τῶν AG , GA τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ GE , καὶ κείσθω ἴση ἐκατέρᾳ τῶν AF , GB , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AE , EB , καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ EF παράλληλος ἦχθω ἡ AZ , διὰ δὲ τοῦ Z τῇ AB παράλληλος ἦχθω ἡ ZH , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AZ .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GE , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ EAG γωνία τῇ ὑπὸ AEG . Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Γ , λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ EAG , AEG μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσιν ἴσαι ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἐκατέρᾳ τῶν ὑπὸ GEA , FAE . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκατέρᾳ τῶν ὑπὸ GEB , EBG ἡμίσεια

laterum aequalium $AG \times BG$ i. e. AG^2 superare quadratum inaequalium laterum $AA \times AB$ quadrato lateris GA , vel esse $\frac{AG \times BG}{AG^2} = AA \times AB = GA^2$, adeoque horum maximum esse

$AG \times BG$ vel AG^2 , quum contra $AG + BG^2$ minima summa sit quadratorum, quorum latera eandem summam AB habeant.

Et, quum in istis rectangulis differentia $\left(\frac{AG \times BG}{AG^2} - AA \times BA \right) = GA^2$ esset, iam est respondens differentia $(AA^2 + BA^2) - (AG^2 + BG^2) = 2GA^2 =$ duplo prioris. Cf. Pfeiderer. §§. 119. 121. Nempe, quum summa quadratorum AA , BA , quorum summa laterum $= AB$, sit $= AB^2 - 2AA \times BA$ (II. 4.), erit ista summa eo minor, quo maior est rectangulum $AA \times BD$, minima itaque, si hoc rectangulum maximum fuerit e. si sit $AA = BA$. Cf. Pfeiderer. §. 122.

Cor. 3. Quodsi AB accetur (Fig. 149) in alia inaequalia AI , BI in duncto I remotiore quam A a puncto bisectionis Γ : erit summa $AI^2 + BI^2 > AA^2 + BA^2$, quum huius

Recta enim aliqua AB secta sit in aequalia quidem ad Γ , in inaequalia vero ad A ; dico quadrata ex AA , AB dupla esse quadratorum ex AF , ΓA .

Ducatur enim a Γ ipsi AB ad rectas ΓE (I. 11.), et ponatur aequalis alterutri ipsarum AF , ΓB , et iungantur AE , EB , et per A quidem ipsi EF parallela ducatur AZ (I. 31.), per Z vero ipsi AB parallela ducatur ZH (I. 31.), et iungatur AZ .

Et quoniam aequalis est AF rectae ΓE , aequalis est et angulus EAF angulo AEG (I. 5.) Et quoniam rectus est ad Γ ; reliqui igitur EAF , AEG uni recto aequales sunt (I. 32.), et sunt aequales (I. 6.); dimidius igitur recti est uterque ΓEA , ΓAE . Ex eadem ratione et uterque ΓEB , EBF dimidius est recti;

7 summae excessus super $2AF^2$ sit $=2\Gamma A^2$, illius $2FH^2$, sitque $2FH^2 > 2\Gamma A^2$ (Lemma ante X. 43. Barrov., Gilbert, alique. Pflaiderer. §. 123.). Et quidem $(AH^2 + BH^2) - AA^2 + BA^2 = 2FH^2 - 2(FH^2 - \Gamma A^2) = 2(\Gamma H + \Gamma A) \times \Gamma H - \Gamma A$ (II. 5. Obs. 1.), hoc est, facto $AP = BH$, erit $(AH^2 + BH^2) - (AA^2 + BA^2) = 2PA \times AH$, quod est duplum rectangulum sub summa et differentia semidifferentiarum AH , HB , et AA , BA . Cf. II. 5. Cor. 7, Pflaiderer. §. 125.

COR. 4. Ex his, collatis iis, quae II. 5. Cor. 2, et 6. observata sunt, coniunctis cum I. 47, consequitur, inter parallelogramma rectangula isoperimetra, quadrati aream maximam, diagonales minimas esse; caeterorum areas eo minores, diagonales eo maiores esse, quo magis latera ipsorum contigua invicem differant: pariterque inter triangula rectangula, quorum latera circa angulum rectum eandem summam conficiunt, aequicruri aream maximam, hypotenusam minimam esse; caeterorum scalenorum aream eo minorem, hypotenusam eo ma-

ἔστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ AEB ὀρθὴ ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ HEZ ἡμίσειά ἐστίν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EHZ , ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EGB . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EZH ἡμίσειά ἐστίν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ EZH . ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EH πλευρᾷ τῇ HZ ἐστίν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ B γωνία ἡμίσειά ἐστίν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ZAB , ἴση γάρ ἐστι πάλιν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EGB . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ B γωνία τῇ ὑπὸ AZB . ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ZA πλευρᾷ τῇ AB ἐστίν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ AF τῇ GE , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AF τῷ ἀπὸ τῆς GE · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AF , GE τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG . Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AF , GE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τετράγωνον, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ AGE γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AE διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AG . Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ EH τῇ HZ , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HE τῷ ἀπὸ τῆς HZ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EH , HZ τετράγωνα διπλάσιά

ioretem esse, quo magis catheti eorum invicem differant. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 125.

Obs. 2. Quum recta AB (Fig. 150.) bifariam in Γ secta, et ad Γ constituto perpendiculo $GE=AF=BF$, iunctisque rectis AE , BE , fiat, ut in demonstratione II. 9. ostensum fuit, angulus AEB rectus, et, quae ex quibuslibet rectae GB punctis, A , Π rectae GE parallelae i. e. I. 29. ad BF perpendiculares aguntur, vel ex punctis quibusvis Z , Σ rectae BE normales in BF demittuntur, fiant rectae AB segmentis AB , ΠB aequales, ideoque sint $AA+AZ=AP+\Pi Z=AF+GE=AB$: completis parallelogrammis rectangulis $AFET$, $AAZY$, $APZF$, triangulisque rectangulis AFE , AZ ,

totus igitur AEB rectus est. Et quoniam HEZ dimidius est recti, rectus autem EHZ , aequalis enim est interiori et opposito ETB (I. 29.); reliquus igitur EZH dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur est angulus HEZ angulo EZH ; quare et latus EH lateri HZ est aequale (I. 6.). Rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem ZAB , aequalis enim est rursus interiori et opposito ETB (I. 29.); reliquus igitur AZB dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur angulus ad B angulo AZB ; quare et latus ZA lateri AB est aequale (I. 6.). Et quoniam aequalis est AF rectae FE , aequale est et quadratum ex AF quadrato ex FE ; ergo quadrata ex AF , FE dupla sunt quadrati ex AF . Quadratis autem ex AF , FE aequale est quadratum ex AE (I. 47.), rectus enim est angulus AFE ; quadratum igitur ex AE duplum est quadrati ex AF . Rursus quoniam aequalis est EH rectae HZ , aequale est etiam quadratum ex EH quadrato ex HZ ; ergo quadrata ex EH , HZ dupla sunt quadrati ex HZ . Quadratis autem ex EH ,

ANZ , quae Cor. 4. de diagonalibus rectangulorum et hypotenusis triangulorum traduntur, etiam liquent ex I. 19. Cor. 4. et 5. Cf. Pfeleiderer. I. c. §. 126.

Obs. 3. Esse rectam $AZ=AB$, $ZN=NB$ etc. inde pendet, quod angulus ABE ostensus fuit esse semirectus. Quacunque igitur ratione ducatur BE ad AB ita, ut angulus ABE fiat semirectus, idem valebit non solum de rectis NS , AZ , sed etiam producta BE , de rectis $X\psi$, $A\Omega$, nempe erit $X\psi=XB$, $A\Omega=AB$. Et, quum, ut facile patet, nonnisi ea puncta, quae in recta $B\Omega$, nempe basi trianguli aequilateri $AB\Omega$ posita sunt, ita comparata sint, ut demissa ex iis ad AB perpendiculara intercipient inter se et punctum B segmenta

ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς HZ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν EH , HZ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς HZ . Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς HZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EZ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE , EZ τετραγώνων διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE , EZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τετραγώνου, ὁρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ AEZ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς AZ τετραγώνου διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, AZ , ὁρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ $Δ$ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, AZ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. Ἰση δὲ ἡ AZ τῇ $ΔΒ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τετραγώνων διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ipsis his perpendicularis aequalia, recta BE locus erit, quem in rectangulis isoperimetris circa communem angulum A constitutis attingunt ipsorum anguli, communi angulo A oppositi, vel quem in triangulis rectangulis AXP , AGE , AZE etc., quorum bina latera circa angulum rectum simul aequant rectam AB , vertices horum triangulorum contingunt. Et facile patet, idem adhuc valere (Fig. 151.), etiam si parallelogramma non rectangula at aequiangula sint, et in triangulis angulus, quem inter se aequalem habent, non sit rectus, dum deinde recta BE ita ducatur, ut angulum $AB\eta$ isti communi angulo aequalem bisecet. Viviani de locis solidis lib. III. Prop. 8. p. 57. Pfeiderer l. c. §§. 127—131. Et quae de diagonalibus et hypotenusis dicta sunt Obs. 2., valent etiam in parallelogrammis et triangulis obliquangulis, quum etiam ubi de iis quaestio est, angulus AEB maneat rectus, adeoque f. 19.

HZ aequale est quadratum ex EZ (I. 47.), ergo quadratum ex EZ duplum est quadrati ex HZ . Sed aequale est quadratum HZ quadrato ex ΓA ; quadratum igitur ex EZ duplum est quadrati ex ΓA . Est autem quadratum ex EA duplum quadrati ex AF (I. 47.); ergo quadrata ex AE , EZ dupla sunt quadratorum ex AF , ΓA ; ipsis vero ex AE , EZ aequale est quadratum ex EZ (I. 47.), rectus enim est AEZ angulus; ergo AZ quadratum duplum est quadratorum ex AF , ΓA . Quadrato vero ex AZ aequalia sunt quadrata ex AA , AZ (I. 47.), rectus enim est angulus ad A ; quadrata igitur ex AA , AZ dupla sunt quadratorum ex AF , ΓA . Aequalis autem AZ rectae AB ; ergo quadrata ex AA , AB dupla sunt quadratorum ex AF , ΓA . Si igitur recta etc.

Cor. 4. et 5. etiam hic applicari queat. Quae vero de areis parallelogrammorum et triangulorum rectangulorum Cor. 4. dicta sunt, demum ope VI. 23. ad obliquangula extendi, vel immediate per VI. 27. de illis inferri possunt. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 135.

Obs. 4. Per praecedentia facile determinatur ac solvitur problema: construere triangulum rectangulum, cuius datur hypotenusa et summa cathetorum, vel: describere parallelogrammum rectangulum, cuius datur diagonalis et summa duorum laterum contiguum, vel generalius: sub dato angulo quocunque describere triangulum, vel parallelogrammum, cuius latera circa hunc angulum simul sunt datae rectae aequalia, et cuius basis vel diagonalis opposita angulo dato est datae rectae aequalis. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 136—146. et qui plerique ab eo citantur Ghetaldus p. 337. Thom. Simpson.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι.

Ἐάν εὐθεία γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης συν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεία γάρ τις ἡ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεία ἐπ' εὐθείας ἡ BD . λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AD , DB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AG , GD τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθαῖς ἡ GE , καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν AG , GB , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA , EB . καὶ διὰ μὲν τοῦ E τῇ AD παράλληλος ἦχθω ἡ EZ . διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ GE παράλληλος ἦχθω ἡ ZA . Καὶ ἐπεὶ εἰς παράλληλους εὐθείας τὰς EF , ZA εὐθεία τις ἐνέπεσεν ἡ EZ , αἱ ὑπὸ GEZ , EZA ἄρα ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ZEB , EZA δύο ὀρθῶν ἔλασ-

1) Edit. Paris. cum Codice a addit: πάλιν.

Treatise of Algebra Lond. 1745. p. 287. sq. Schwab. Euclid's Data p. 174. sqq. Schulz Taschenbuch II. Heft. Berlin 1783. p. 400. sq. Billy Diophant. geometra Paris 1660. p. 53. sq. Van Swinden Anfangsgr. der Mathematik 1797. p. 485. sq. Meier Hirsch Samml. geom. Aufg. I. Th. 1805. p. 107. sq. l'Huilier Elémens d'Analyse Géom. et d'Analyse Algébrique Paris. 1809. p. 212. sq.

Cor. 5. Ex II. 5. et II. 9. coniunctis sequitur, recta AB bifariam in Γ , et in inaequalia in Δ utcumque secta, quadrata inaequalium partium simul aequari quadrato ex totius

PROPOSITIO X. (Fig. 152.)

Si recta linea secetur bifariam, adiciatur autem aliqua ipsi recta in directum, quadratum compositae ex tota cum adiecta et quadratum ex adiecta simul sumpta dupla sunt quadrati ex dimidia et quadrati compositae ex dimidia et adiecta tanquam una linea.

Recta enim aliqua AB secta sit bifariam in Γ , adiciatur autem aliqua ei recta in directum BA ; dico quadrata ex AA , AB dupla esse quadratorum ex AG , GA .

Ducatur enim a puncto Γ rectae AB ad rectos ΓE (I. 11.), et ponatur aequalis alterutri ipsorum AG , ΓB , et iungantur EA , EB ; et per E quidem ipsi AA parallela ducatur EZ (I. 31.) per A vero ipsi ΓE parallela ducatur ZA (I. 31.). Et quoniam in parallelas rectas $E\Gamma$, ZA recta aliqua incidit EZ , anguli ΓEZ , EZA duobus rectis aequales sunt (I. 29.); ergo ZEB , EZA duobus rectis minores sunt. Rectae

dimidio, una cum triplo quadrato ex interposito segmento et cum rectangulo earundem partium inaequalium.

Est enim $AG^2 = \Gamma A^2 + AA \times AB$ (II. 5.)

hinc $2AG^2 + 2\Gamma A^2 = AG^2 + 3\Gamma A^2 + AA \times AB$

adeoque (II. 9.) $AA^2 + AB^2 = AG^2 + 3\Gamma A^2 + AA \times AB$. Viviani de locis solidis L. II. Prop. 68. p. 46. Pfeiderer. §. 147.

PROPOSITIO X.

Obs. 1. Huius etiam propositionis plures alias demonstrationes habent iidem, quos ad Prop. IX. citavimus, auctores; v. Pfeiderer. §§. 151–160. et nominatim eam aliqui similiratione ex II. 9. deducunt; ac II. 6. ex II. 5. deduci posse

συνέεισιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπέπτουσιν· αἱ ἄρα EB , ZA ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ BA μέρη συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπεπτέωσαν κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GE , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AEG τῇ ὑπὸ EAG , καὶ ὀρθή ἡ πρὸς τὸ Γ ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ EAG , AEG . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ GEB , EBG ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν

vidimus. Potest etiam illa eodem modo aliter efferri ac II. Prop. 9. iisdem verbis, ac ad eam Obs. 1. nr. 1. 2. monitum fuit. Ex priorem quidem modum „si recta linea secta fuerit in partes inaequales, quadratum totius, una cum quadrato excessus, quo maius segmentum excedit minus, duplum erit quadratorum ab ipsis segmentis descriptorum“ iam indicavit Isaac. Monachus in Schol. ad II. 10.

Cor. 1. Recta AB bifariam in Γ secta, et adiuncta ei quacunq̃ue BA : ipsa AB differentia est rectarum AA , BA ; ΓA autem earum semisumma, vel quod eodem redit (cf. II. 6. Cor. 2.) erunt AA , ΓA , BA tres continue arithmetice proportionales. Atque his observationibus nituntur aliae propositionis X. (pariter ac Prop. IX.) enunciationes. Cf. Pfleiderer. l. c. §§. 182. 183. Nempe: Duarum inaequalium rectarum quadrata simul dupla sunt quadratorum ex ipsarum semisumma et semidifferentia vel si tres rectae sint continue arithmetice proportionales, quadrata extremorum simul aequantur duplo aggregato ex quadrato mediae, ac differentiae utriusvis extremarum et mediae composito. Sumta deinde (Fig. 153.) $\Gamma H > \Gamma A$, manente eadem differentia AB , ambae AH , BH crescunt eodem, quo ΓH , incremento, eritque $AH^2 + BH^2 > AA^2 + BA^2$ pariter ac (coll. II. 6. Cor. 5.) $AH \times HB > AA \times AB$. Sumatur $\Gamma P = \Gamma H$, unde $\Gamma P^2 = \Gamma A^2 + PA \times AH$ (II. 5.), eritque $AH^2 + BH^2 = 2\Gamma H^2 + 2\Gamma B^2$ (II. 10.) =

autem a minoribus quam duobus rectis productae conveniunt (Post. 5. vel Ax. 11.); ergo EB , ZA productae ad partes BA convenient. Producantur, et convenient in H , et iungatur AH .

Et quoniam aequalis est AF rectae FE , aequalis est et angulus AEG angulo EAF (I. 6.); atque rectus est ad F ; dimidius igitur recti est uterque ipsorum EAF , AEG (I. 32.). Ex eadem ratione et uterque ipsorum TEB , EBG dimidius est recti; rectus igitur

$$= 2\Gamma Aq + 2\Gamma Bq + 2PA \times A\Pi \text{ (II. 6.)}$$

$$= AAq + BAq + 2PA \times A\Pi \text{ (II. 10.)}$$

Contra (cf. II. 6. Cor. 5.), est $A\Pi \times \Pi B - AA \times AB = PA \times A\Pi$.

$$\text{Est autem } PA = PF + FA = \Gamma\Pi + \Gamma A = \frac{A\Pi + B\Pi}{2} + \frac{AA \times BA}{2}$$

$$A\Pi = \Gamma\Pi - \Gamma A = \frac{A\Pi + B\Pi}{2} - \frac{AA + BA}{2}.$$

Dum igitur aequè differunt $A\Pi$ et $B\Pi$, AA et BA : rectangulum sub prioribus, quorum summa est, maior, excedit rectangulum sub posterioribus rectangulo sub summa et sub differentia semisummarum laterum $A\Pi$ et $B\Pi$, AA et BA ; duplo autem hoc rectangulo summa quadratorum ex prioribus summam quadratorum ex posterioribus excedit. Cf. Pfleiderer. l. c. §. 166.

Cor. 2. Hinc inter parallelogramma rectangula, quorum latera contigua aequè invicem differunt, eius, cuius perimenter maior est, area et diagonales sunt maiores: pariterque inter triangula rectangula, quorum latera circa angulum rectum aequè invicem differunt, illius area et hypotenusa maiores sunt, cuius summa cathetorum est maior. Cf. Pfleiderer. §. 167.

Obs. 2. Recta AB (Fig. 154. 155.) bifariam secta in puncto F , et per hoc ducta sub angulo quocunque $FE = FB = FA$; tum ultra punctum B versus β , δ continuatis rectis EB , AB : quae his rectis $B\delta$, $B\beta$ terminantur, rectae FE parallelas quascunque AZ , ΠZ esse segmentis adiacentibus BA , $B\Pi$ rectae

ἡ ὑπὸ AEB . Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ $EBΓ$, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ABH . Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BAH ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ AGE , ἐναλλάξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AHB ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ¹⁾ AHB τῇ ὑπὸ ABH ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ, πλευρὰ ἡ BA πλευρὰ τῇ AH ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ EHZ ἡμί-

1) Verba: ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ omitt. Ed. Paris. et Cod. a. Nos ex edd. Oxon. et Basil. ad analogiam sequentium et demonstrationis II. 9. restituimus.

$B\delta$ aequales, proinde $AZ - AZ = AS - PS = AB$, simili ratione, qua in demonstratione II. 10. per I. 6. generatim inferitur: quia angulus $ΓEB = ΓBE$ (I. 5.) $\frac{(AZB)}{(PSB)} = ΓEB$ (I. 29.) et $\beta B\delta = ΓBE$ (I. 15.). Contra, quae hinc rectae $B\delta$, inde puncto quocunque extra rectam $B\beta$, ad easdem cum ipsa partes rectae $B\delta$ sito, terminantur rectae, ipsi $ΓE$ parallelae, segmento adiacenti rectae $B\delta$ aequales non sunt, nec proinde differentia earum et rectarum ad idem punctum ex A ductarum rectae AB aequalis est. Porro etiam ultra A , E puncta versus ϵ , γ productis BA , BE rectis: quae a punctis X ipsius $A\epsilon$ eidem $ΓE$ parallelae aguntur $X\psi$ ad occursum usque rectae $B\gamma$, ob angulos $B\psi X = BE\Gamma$ (I. 29.), ideoque $= \psi BX$ (I. 5.) sunt segmentis adiacentibus BX rectae $B\epsilon$ aequales (I. 6.), proinde $X\psi - XA = BX - XA = AB$: idque pariter exclusive. Cf. Pflaiderer: l. c. §. 168.

Obs. 3. Per punctum B ducta rectae $ΓE$ parallela $B\zeta$ ad partes rectae $A\delta$, ad quas est $B\beta$: ob angulos $\beta B\zeta = BE\Gamma$ (I. 29.) $\beta B\delta = ΓBE$ (I. 15.) bifariam angulum $\zeta B\delta$ secat recta $EB\beta$. Vicissim, si recta $B\beta$ bifariam secat angulum $\zeta B\delta$, quem recta $B\zeta$ utcumque per B ducta cum continuata AB comprehendit: quaelibet cruri eius $B\zeta$ parallela ab altero crure $B\delta$ abscindit segmentum ipsius parallelae segmento rectis $B\beta$, $B\delta$ interiacenti aequale, et quae per punctum bisectionis Γ rectae

est AEB . Et quoniam dimidius recti est EBF , dimidius igitur recti est et ABH (I. 15.). Est autem et BAH rectus; aequalis enim est ipsi AFE alterno (I. 29.). Reliquus igitur AHB dimidius recti est (I. 32.): angulus itaque AHB angulo ABH est aequalis; quare et latus BA lateri AH est aequale (I. 6.). Rursum, quoniam EHZ dimidius est recti, rectus autem

AB , parallela cruri $B\zeta$ ducitur FE ad occursum usque continuatae βB in E , pariter fit $=FB=FA$. Ob angulos enim AZB , $\Pi\beta B$, BEF singulos $=\zeta B\beta$ (I. 29.) ideoque $=\delta B\beta$ (constr.) $=FBE$ (I. 15.) sunt (I. 6.) $BA=AZ$, $BH=\Pi\beta$, $BF=FE$. Unde caetera quoque Obs. 2. proposita tum subsistunt. Cf. Pfleiderer. I, c. §. 169.

Obs. 4. Eandem $\beta B\gamma$, sive iuxta Obs. 2. sive iuxta Obs. 3. ducatur, bifariam dividere angulum $AB\eta$, quem producta ζB cum data AB comprehendit, vel ex I. 29. I. 5. vel ex I. 15. consequitur. Quare, dum aequales utrimque sint anguli $AB\eta$, haec $\beta B\gamma$ in directum iacet cum recta $B\Omega$ supra Obs. 3. ad II. 9. determinata. Per rectae igitur magnitudine ac positione datae AB alterum extremum B ducta quacunque recta $B\zeta$: quae angulum $\zeta B\delta$, hac $B\zeta$ et continuata AB comprehensum bifariam secat recta utrimque continuata $\beta B\gamma$, quatenus hinc ultra B versus β , inde ultra Ω , ubi rectae $A\Omega$ ipsi $B\zeta$ per A parallela occurrit, versus γ extenditur (de eius parte $B\Omega$ vide Obs. 3. ad II. 9.). Locus est, ad quem sunt 1) vertices Z , Σ , Ψ communi A oppositi, parallelogrammorum $ABZT$, $A\Pi\Sigma\Phi$, $AX\Psi\alpha$; quae, ducta per alterum recta AB extremum A rectae $B\zeta$ parallela $A\Omega$, pariterque ultra A continuata BA , in angulis ΦAX etc. angulo ζBA aequalibus (I. 29.) fieri possunt, sic, ut contigua ipsorum latera invicem differant data AB : 2) vertices tertii Z , Σ , Ψ triangulorum AZA , $A\Sigma\Pi$, $A\Psi X$, circa communem verticem A constitutorum, quorum anguli ad secundos vertices A , Π , X rectae AB in directum iacentes, sunt dato $AB\zeta$ aequales (I. 29.) et

σειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Z , ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZEH ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ EHZ γωνία τῇ ὑπὸ ZEH · ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ HZ πλευρᾷ τῇ ZE ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΓ$ τῇ ΓA , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΕΓ$, ΓA τε-

quorum crura circa hos angulos data AB invicem differunt. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 170. 171.

Obs. 5. Ambos locos (Obs. 3. ad II. 9. et Obs. 4. ad II. 10.) una propositione sic licet complecti: Si a puncto ad rectam positione datam ducatur recta in dato angulo; dataque sit summa vel differentia rectae huius et segmenti dato puncto adjacentis, quod ea ex recta positione data abscindit, tangit punctum rectam positione datam. Cf. Pfeiderer. §. 172.

Obs. 6. Bifariam in Γ secta AB , et per B ducta rectae $B\zeta$ parallela TE ad occursum usque rectae $\beta\gamma$ angulum $\zeta B\delta$ bifariam secantis, in E : fit $TE = TB = \Gamma A$ (Obs. 3.) ideoque angulus AEB rectus (I. 6. et I. 32.) et hinc $AS > AZ$ (I. 19. Cor. 5.) dum $\Gamma H > \Gamma A$ proinde (II. 10. Cor. 1.) $AS + AH > AZ + AD$. Parallelogrammum vero $AH\Xi\Phi > AAZT$, et triangulum $AS\Xi > AZA$ per I. Ax. 9. Generatim igitur inter parallelogramma aequiangula, quorum latera contigua aequae invicem differunt, eius, cuius perimenter maior est, area et diagonales homologae, seu quae vertices angulorum respective aequalium iungunt, maiores sunt: pariterque inter triacula, quorum unus angulus aequalis, et quorum crura (latera circa hos angulos aequales) aequae invicem differunt, illius area et basis maiores sunt, cuius summa crurum est maior. Cf. Pfeiderer. §. 173.

Obs. 7. Basin seu tertium latus AZ cuiuslibet trianguli non aequicruri AZA maiorem esse differentia AB crurum eius AA , AB ; proinde et diagonalem utramque parallelogrammi cuiusvis non aequilateri esse differentia laterum eius conti-

est qui ad Z , aequalis enim est opposito qui ad Γ (I. 29.); reliquus igitur ZEH dimidius est recti (I. 32.); aequalis igitur EHZ angulus ipsi ZEH ; quare et latus HZ lateri ZE est aequale (I. 6.). Et quoniam aequalis est EF rectae ΓA , aequale est et quadratum ex EF quadrato ex ΓA . Ergo quadrata ex EF , ΓA dupla sunt quadrati ex ΓA . Quadratis au-

guorum maiorem, reducitur ad I. 19. Cor. 3.: quod trianguli obtusanguli latus oppositum angulo obtuso sit utroque eius reliquo latere maius; cum a maiore crure AA abscissa $AB = AZ$, trianguli aequicruri BZA angulus ZBA ab basin sit acutus I. 5. I. 17. et igitur deinceps positus ABZ obtusus (I. 13.). Cf. Pfeiderer. §. 174.

Obs. 8. Per praecedentia facile solvitur problema: sub dato angulo quocunque describere triangulum, vel parallelogrammum, cuius latera circa hunc angulum differant recta data, et cuius basis, vel diagonalis opposita angulo dato sit alii rectae datae, maiori quam differentia data, aequalis. Vid. Pfeiderer. §§. 175–181. Ghetaldus, Thom. Simpson., van Swinden., l'Huilier. l. c. p. 218.

Cor. 3. Ex II. 6. et II. 10. coniunctis sequitur: Si recta AB bifariam secta fuerit in F , eique addita in directum quaedam BA , quadratum ex AA , data et addita cum quadrato additae BA aequale est quadrato ex ΓA dimidio datae et addita, cum tribus quadratis ex AF , eodem datae dimidio, et cum rectangulo $AA \times AB$ sub data cum addita in additam. Est enim $\Gamma A^2 = FB^2 + AA \times AB = AF^2 + AA \times AB$ (II. 6.)

itaque $2\Gamma A^2 + AF^2 = \Gamma A^2 + 3AF^2 + AA \times AB$
i.e. (II. 10.) $AA^2 + BA^2 = \Gamma A^2 + 3AF^2 + AA \times AB$.

Cf. Pfeiderer. §. 161.

Cor. 4. Nexus propositionum II. 9. et II. 10. idem est, ac propositionum II. 5. et II. 6., unde etiam hae duae propositiones uno eodemque enunciato comprehendi possunt. Cf. Cor. 1. Nempe punctum A , quod in II. Prop. 9. in ipsa

τράγωνα διπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν EF , GA ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EA τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AF τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ZH τῇ ZE , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ZE τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν HZ , ZE διπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . Τοῖς

AB sumtum fuit, in II. Prop. 10, in AB producta sumitur. Cf. Pfeiderer. §. 184.

Obs. 9. Recta AB (Fig. 156.) in inaequalia utcumque in puncto A divisa, a maiori segmento AA abscindatur $AA =$ minori AB , et residua AA bifariam in Γ secetur, erit $AA + AAq = 2A\Gamma q + 2\Gamma Aq$ (II. 10.), adeoque ob $AA = AB$, $AAq + ABq = 2A\Gamma q + 2\Gamma Aq$ pariter ac in figura altera (Fig. 157.), in qua AB in Γ bisecta, atque in ea ipsa punctum quodcumque A sumtum fuit, ubi ex (II. 9.) erit $AAq + ABq = 2A\Gamma q + 2\Gamma Aq$, quamvis priore figura recta AB in puncto Γ haud bifariam secetur. $A\Gamma$ priore figura $= \frac{AA}{2} = \frac{AA - AA}{2} = \frac{AA - AB}{2}$

(constr.) sistit semidifferentiam segmentorum inaequalium AA , AB , quam in figura posteriore exhibet ΓA (II. 5. Cor. 4.):

et ΓA priore figura $= \Gamma A + AA = \frac{AA}{2} + \frac{BA - AB}{2}$ sistit segmentorum AA , AB semisummam, quae in figura posteriore est $A\Gamma$. Quare assertum $AAq + ABq = 2A\Gamma q + 2\Gamma Aq$ figura priore quoque conforme etiam est communi propositionum 9. et 10. enunciato, quod Cor. 1. dedimus. Pariter rectae AB (Fig. 158.) in directum adiiciatur quaecumque BA , et denovo rectae AA recta $AA = BA$, ac bifariam in Γ secetur tota AA . Erit $AAq + AAq = 2A\Gamma q + 2\Gamma Aq$ (II. 9.), ideoque, ob $AA = AB$, etiam $AAq + ABq = 2A\Gamma q + 2\Gamma Aq$, pariter ac (II. 10.) in figura posteriore (Fig. 159.), in qua, AB in Γ bifariam divisa, atque in ea producta punctum quodcumque A sumtum

tem ex EF , FA aequale est quadratum ex AE (I. 47.); ergo quadratum ex EA duplum est quadrati ex AF . Rursus, quoniam aequalis est ZH rectae ZE , aequale est et quadratum ex HZ quadrato ex ZE . Quadrata igitur ex HZ , ZE dupla sunt quadrati ex EZ . Quadratis autem ex HZ , ZE aequale est quadratum ex EH (I. 47.). Quadratum igitur ex EH

fuit, quamvis rursus casu prioris figurae AB in puncto F non bifariam secetur. Permutatis etiam AF , FA utrumque $AA^2 + BA^2 = 2AF^2 + 2FA^2$ utraque figura exhibitum continetur proposito Cor. 1.: quippe AF prioris figura $= \frac{AA}{2} = \frac{AA + AA}{2} = \frac{AA + AB}{2}$ (constr.) sistit semisummam rectarum BA , AA adiectae scilicet, et compositae ex data AB et adiecta, quam in fig. posteriore exhibet FA (II. 6. Cor. 3.) et FA prioris figura $= \frac{AA - AA}{2}$ (II. 5. Cor. 4.) $= \frac{AA - BA}{2}$ sistit rectarum AA , BA semidifferentiam, quae in fig. posteriore est AF . Cf. Pfeifferer. I. c. §§. 185, 186.

Obs. 10. Conversae quoque Prop. 9. 10. valent. Nempe, rectam AB (Fig. 157. 159.) bifariam secat punctum F sic in ea situm, ut duplum aggregatum quadratorum ex rectis FB vel FA et FA factorum, quorum una FB vel FA inter ipsum punctum F atque alterum rectae AB extremum, altera FA inter idem punctum F atque punctum A alibi in recta AB ipsa vel producta sumtum interiacent, aequale sit quadratis rectarum AA , BA , quae hinc puncto A , inde extremis A , B rectae AB terminantur: dum, uti in ipsis propositionibus 9. 10. recta FA est rectis FB , FA minor, quando punctum A iacet in ipsa AB ; sed FA maior quam FB , FA , si punctum A est in producta AB . Sit enim 1) $AA^2 + BA^2 = 2FB^2 + 2FA^2$, puncto A iacente ad eas puncti F partes, ad quas est punctum B : quo casu per se est $FA < FB$, dum punctum A est in ipsa AB

δὲ ἀπὸ τῶν HZ , ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς EH τετραγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . Ἴση δὲ EZ τῇ $ΓΔ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH τετραγώνου διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EA διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AE , EH τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE , EH τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετραγώνου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΗ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΗ$ τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἡ $ΔΗ$ τῇ $ΔΒ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ τετραγώνων διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

fig. prior, sed $ΓΔ > ΓΒ$, quando punctum A sumitur in producta AB fig. poster. Ob $ΓΒ q + ΓΔ q = AB q + 2ΓΒ \times ΓΔ$ (II. 7.) erit $ΑΔ q + ΒΔ q = 2(ΓΒ q + ΓΔ q)$ (hyp.) $= ΓΒ q + ΓΔ q + AB q + 2ΓΒ \times ΓΔ$, adeoque $ΑΔ q = ΓΒ q + ΓΔ q + 2ΓΒ \times ΓΔ = (ΓΒ + ΓΔ) q$ (II. 4.) adeoque $ΑΔ = ΓΒ + ΓΔ$ (I. 46. Cor.) et, demta communi $ΓΒ$, $ΑΓ = ΓΒ$. 2) Sit $ΑΔ q + ΒΔ q = 2ΓΑ q + 2ΓΔ q$, punctis A et B iacentibus ad partes oppositas puncti $Γ$: sitque $ΓΔ < ΓΑ$, quando punctum A in ipsa AB iacet (Fig. prior.); sed $ΓΔ > ΓΑ$, si A est in producta AB (Fig. poster.). Ob $ΑΔ =$

duplum est quadrati ex EZ . Aequalis autem EZ rectae ΓA ; ergo quadratum ex EH duplum est quadrati ex ΓA . Demonstratum est autem et quadratum ex EA duplum quadrati ex AF ; ergo quadrata ex AE , EH dupla sunt quadratorum ex AF , ΓA . Quadratis autem ex AE , EH aequale est quadratum ex AH (I. 47.); quadratum igitur ex AH duplum est ipsorum AF , ΓA . Quadrato autem ex AH aequalia sunt quadrata ex AA , AH ; quadrata igitur ex AA , AH dupla sunt quadratorum ex AF , ΓA . Aequalis autem est AH rectae AB ; ergo quadrata ex AA , AB dupla sunt quadratorum ex AF , ΓA . Si igitur recta etc.

PROPOSITIO XI. (Fig. 160.)

Datam rectam secare, ita ut rectangulum contentum sub tota et altero segmentorum aequale sit quadrato ex reliquo segmento.

$AF^2 + \Gamma A^2 + 2\Gamma A \times \Gamma A$ (II. 4.) erit $\Gamma A^2 + \Gamma A^2 + 2\Gamma A \times AA + BA^2 = AA^2 + BA^2 = 2(\Gamma A^2 + \Gamma A^2)$ (hyp.) adeoque $2\Gamma A \times AA + BA^2 = \Gamma A^2 + \Gamma A^2$ vel $BA^2 = \Gamma A^2 + \Gamma A^2 - 2\Gamma A \times AA$. Hinc fig. priore ubi $\Gamma A < \Gamma A$ (hyp.) $BA^2 = (\Gamma A - \Gamma A)^2$ (II. 7. Obs.) et $BA = \Gamma A - \Gamma A$, et addita communi ΓA , $AF = BF$. Et fig. posteriore, ubi $\Gamma A > \Gamma A$ (hyp.) $BA^2 = (\Gamma A - \Gamma A)^2$ (II. 7. Obs.) et $BA = \Gamma A - \Gamma A$, et addita communi ΓA , $\Gamma A + BA = \Gamma A$, et demta communi BA , $AF = BF$. Cf. Pfeiderer. §. 187. Caeterum collatis iis, quae II. 6. Cor. 6. de simi-

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB . δεῖ δὲ τὴν AB τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσιν εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνον τὸ $AB\Delta\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ AG δίχα κατὰ τὸ E σημείον, καὶ ὑπεξεύχθω ἡ BE , καὶ διήχθω ἡ GA ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AZ τετραγώνον τὸ $Z\Theta$, καὶ διήχθω ἡ $H\Theta$ ἐπὶ τὸ K . λέγω ὅτι ἡ AB τέτμηται κατὰ τὸ Θ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι ¹⁾ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AG τέτμηται δίχα κατὰ τὸ E , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ AZ . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ EZ τῇ EB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετρα-

1) Peyrard. cum Cod. a. ponit ἴσον ποιεῖν. Nos ex ed. Oxon. restitimus lectionem εἶναι, ut in Proasi et Ecthesi legitur. Ed. Basil habet: ὥστε — ἴσον ἐστὶ.

libus propositionum II. 5. et II. 6. conversis dicta sunt, observari potest, determinationem, quae hic in enunciato Obs. 10. adiecta fuit, ibi haud allatam fuisse. Neque ea etiam in particulari conditionum expositione erat necessaria: si quis tamen generali propositione utramque conversam indeterminata differentiae quadratorum ex ΓA et ΔA vel ΔB mentione complecti velit, eadem determinatione opus erit. Nempe etiam in figura prior., quam Obs. 9. habuimus, est $\Delta A \times \Delta B = \Gamma A^2 - \Gamma A^2$, neque tamen $\Delta \Gamma = \Gamma B$. Cf. Pfeiderer. §. 192.

PROPOSITIO XI.

Obs. 1. Huic problemati sequens praemitti potest ana-

Sit data recta AB ; oportet igitur ipsam AB secare, ita ut rectangulum contentum sub tota et altero segmentorum aequale sit quadrato ex reliquo segmento.

Describatur ex AB quadratum $AB\Gamma$ (I. 46.), et secetur $\Gamma\Gamma$ bifariam in puncto E (I. 10.), et iungatur BE , et producat ΓA in Z , et ponatur rectae BE aequalis EZ (I. 3.), et describatur ex AZ quadratum $Z\Theta$, et producat $H\Theta$ ad K ; dico AB sectam esse in Θ , ita ut rectangulum sub AB , $B\Theta$ contentum aequale sit quadrato ex $A\Theta$.

Quoniam enim recta $\Gamma\Gamma$ secatur bifariam in E , adicitur autem ei recta AZ ; rectangulum sub ΓZ , ZA contentum cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EZ (II. 6.). Aequalis autem EZ rectae EB ; ergo rectangulum sub ΓZ , ZA contentum cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EB . Sed qua-

lysis. Quum quadratum dimidia AB sit quadrans quadrati totius AB (II. 4. Cor. 2.), rectangulum autem sub dimidia ac tota AB sit quadrati ipsius AB semissis (II. 1. Cor. 2.): sectio rectae datae AB nostra propositione imperata in inaequalia fieri, ac segmentum, cuius quadratum rectangulo sub tota AB et sub altero segmento aequetur, duorum inaequalium maius esse debet. Facta supponatur sectio desiderata in Θ . Tum super maiori segmento $A\Theta$ descripto quadrato $A\Theta HZ$, et ad minus segmentum $B\Theta$ applicato rectangulo $B\Theta KA$, cuius alterum latus $BA=AB$, requiritur, ut sit $A\Theta HZ=B\Theta KA$. Cum neutrum horum spatiorum, nec nisi rectanguli $B\Theta AK$ alterum latus $BA=AB$ detur; ansa hinc non suppetit problema immediate solvendi. Eam vero suppeditat rectorum AK , ZA ad occursum usque in puncto Γ continuatio: qua facta, ut sit $A\Theta HZ=B\Theta KA$, addito utrimque rectangulo $A\Theta K\Gamma$, debet

γώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς EB ἴσου ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA , AE , ὁρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν FZ , ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AE . Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν FZ , ZA περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν FZ , ZA τὸ ZK , ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZH · τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ AD · τὸ ἄρα ZK ἴσον ἐστὶ τῷ AD . Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ AK · λοιπὸν ἄρα τὸ $Z\Theta$ τῷ ΘA ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΘA τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$, ἴση γὰρ ἡ AB τῇ BA · τὸ δὲ $Z\Theta$ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ ¹⁾· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὁρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘA τετραγώνῳ.

1) Hanc lectionem ex edd. Oxon. et Basil. restituimus. Peyrardus et Cod. a. omittunt verba ἴση γὰρ ἡ AB τῇ BA .

esse rectangulum $HZKF =$ quadrato $ABAF$ rectae datae AB . Cum rectanguli $HZKF$ latus HZ sit $= AZ$ (constr.); rectangulum $HZKF$ idem est cum rectangulo sub FZ et AZ . Itaque problematis solutio huc redit: ut rectae FA positione ac magnitudine datae (quippe quae datae rectae AB perpendicularis est et aequalis) in directum adiiciatur AZ talis, ut rectangulum sub adiecta AZ et sub composita FZ ex data FA et adiecta AZ aequale sit quadrato rectae datae AB . Atqui bifariam in puncto E divisa FA , est $EZ q = FZ \times ZA + EA q$ (II. 6.). Quare, ut sit $FZ \times ZA = AB q$, debet esse $EZ q = AB q + EA q$. Sed ob angulum EAB rectum (constr.) est $EB q = AB q + EA q$ (I. 47.). Proinde oportet sit $EZ q = EB q$, et hinc $EZ = EB$ (I. 46. Cor.). Constructio problematis, quod et Clavius notat, non requirit, nisi ut datae rectae AB in altero eius extremo A perpendicularis excitetur AF ipsi AB aequalis, eaque bifariam in E secetur, seu ut tantum semissi ipsius AB aequalis AE ad angulos rectos

drato ex EB aequalia sunt quadrata ex BA , AE (I. 47.), rectus enim est angulus ad A ; rectangulum igitur sub ΓZ , ZA cum quadrato ex AE aequale est quadratis ex BA , AE . Commune auferatur quadratum ex AE ; reliquum igitur rectangulum sub ΓZ , ZA contentum aequale est quadrato ex AB . Et est rectangulum quidem sub ΓZ , ZA ipsum ZK , aequalis enim est AZ rectae ZH , quadratum vero ex AB ipsum AA ; rectangulum igitur ZK aequale est quadrato AA . Commune auferatur AK ; reliquum igitur $Z\Theta$ ipsi ΘA aequale est. Et est quidem ΘA rectangulum sub AB , $B\Theta$ contentum; recta enim AB aequalis est rectae BA , et $Z\Theta$ est quadratum ex $A\Theta$; rectangulum igitur sub AB , $B\Theta$ contentum aequale est quadrato ex ΘA .

datae AB in angulo A constituatur, tum recta EA continuetur, donec sit $EZ =$ rectae EB iungenti puncta data E , B , denique a data AB abscindatur $A\Theta$ aequalis rectae per haecenus facta datae AZ . Quae quidem semper erit data AB minor cum sit EB , itaque EZ seu $EA + AZ < EA + AB$ (I. 20.): eademque maior dimidia AB seu EA , cum sit EB seu $EA + AZ > AB$ (I. 19.) seu $2EA$. Demonstratio etiam absque reliquo figurae apparatu sic peragi potest:

$$EZ^2 = EB^2 = AB^2 + EA^2 \text{ (constr. et I. 47.)}$$

$$\text{Atqui } EZ^2 = AZ^2 + EA^2 + 2EA \times AZ \text{ (II. 4.)}$$

$$\text{Igitur } AZ^2 + EA^2 + 2EA \times AZ = AB^2 + EA^2$$

$$\text{vel } AZ^2 + 2EA \times AZ = AB^2$$

$$\text{h. e. } A\Theta^2 + BA \times A\Theta = AB^2 \text{ ob } AZ = A\Theta; AB = 2EA \text{ (constr.)}$$

$$= AB \times B\Theta + BA \times A\Theta \text{ (II. 2.)}$$

$$\text{ergo } A\Theta^2 = AB \times B\Theta. \text{ Cf. Pfeiderer. §§. 62. 65.}$$

Obs. 2. Propositio haec aliis verbis docet rectangulum $BAK\Theta$ construere, cuius latus maius BA est datae rectae AB

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεία ἡ AB τέμνεται κατὰ τὸ Θ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι ¹⁾ τῷ ὑπὸ τῆς ΘA τετραγώνῳ. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1) Verbum εἶναι pro ποιεῖν, quod Peyrard. habet, pariter ex edd. Oxon. et Basil. restituimus.

aequale, et cuius area aequalis est quadrato differentiae $A\Theta$ laterum contiguorum AB , $B\Theta$ rectanguli. Cf. Pfeiderer. §. 64.

Obs. 3. Quum rectanguli $HZKF$ latus HZ sit $=ZA$ (constr.): est $FZ - HZ = FA = AB$. Praeter aream $HZKG = AB^2$ (Obs. 1.) datur itaque differentia laterum eius contiguorum $= AB$. Problemata igitur propositione 11. II. enunciata per analysin Obs. 1. reducitur ad hoc; ut construatur parallelogrammum rectangulum, cuius differentia laterum contiguorum sit datae rectae AB aequalis, et cuius area aequalis sit quadrato eiusdem rectae datae AB . Quod porro per bisectionem differentiae datae FA laterum FZ et ZA rectanguli describendi reducitur (II. 5. Cor. 10.) ad determinationem semisummae EZ eorundem laterum, quae absolvitur ope propositionis (II. 6. et I. 47.) Cf. Pfeiderer. §. 65.

Obs. 4. Eodem modo solvitur problema generalius: construere rectangulum (Fig. 161.) cuius differentia laterum contiguorum sit datae rectae AF , area autem quadrato alius cuiuscunque rectae datae I aequalis. Sumto enim FZ esse latus maius rectanguli construendi: cum latus minus ab eo differre debeat longitudine AF : oportet illud sit $=AZ$. Rursus igitur eo redigitur problema, ut datae rectae FA in directum adiaciatur AZ talis, ut rectangulum sub adiecta AZ et sub composita FZ ex data FA et adiecta AZ aequale sit quadrato rectae datae I . Quod bifariam in E secundo datam laterum quaesitorum rectanguli differentiam AF denuo ad illorum semisummam EZ (II. 5. Cor. 10.) investigandam deducitur. Atqui $EZ^2 = FZ \times ZA + EA^2$ (II. 6.). Ut igitur sit rectangulum $FZ \times ZA = I^2$; debet esse $EZ = I^2 + EA^2$; proinde (I. 48.) EZ

Ergo data recta AB secta est in Θ , ita ut rectangulum sub AB , $B\Theta$ contentum aequale sit quadrato ex ΘA . Quod oportebat facere.

aequalis esse debet hypotenusae trianguli rectanguli, cuius latera circa angulum rectum sint, unum quidem datae rectae I , alterum datae EA aequalia. Hinc sequens enascitur constructio: datae laterum trianguli differentiae AT , bifariam in puncto E divisae perpendicularis in altero eius extremo A constituatur $AB =$ datae rectae I ; tum centro E intervallo EB describatur circulus; qui ob $EB > EA$ (I. 19.) ideoque $et > EF$ rectam TA utrimque productam secabit. Sint puncta Z , A hae sectiones. Erit rectangulum sub FZ et ZA vel sub AA et TA , quod requiritur. Nempe 1) tam $FZ - ZA$, quam $AA - TA = AT$. 2) Rectangulus $FZ \times ZA + EA^2 = EZ^2$, et rectang. $AA \times AT + EF^2 = EA^2$ (II. 6.). Quare, cum sint $EF = EA$, et $EZ = EA = EB$ (constr.) sit tam rectang. $FZ \times ZA + EA^2$, quam $AA \times AT + EA^2 = EB^2 = AB^2 + EA^2$ (I. 47.) et hinc tam rectang. $FZ \times ZA$, quam rectang. $AA \times AT = AB^2 = I^2$. Caeterum, ut facile patet, latera duorum rectangulorum situ solo, non magnitudine differunt. Eandem problematis, enunciato tantum a praecedente diversi: „ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato“ constructionem tradit Rob. Simson. (Euclid. Element. Glasguae 1756. in nota ad 28. et 29. VI. sq. p. 381. sq.). Cf. Halley in scholio ad Prop. VIII. 18. Conic. Apollonii P. II. p. 153. Pflleiderer. I. c. §. 66. cf. infra ad VI. 29. Obs. 5. Quodsi in figura 160. data esse sumatur recta $A\Theta$, at invenienda denique recta AB , ita ut $A\Theta^2 = AB \times B\Theta$ (quod problema conversum erit problematis II. 11.), facile patet, etiam hoc problema esse idem, ad quod etiam II. 11. redire vidimus, nempe ut rectae datae $A\Theta$ adiiciatur alia ΘB in directum, ita ut rectangulum sub adiecta ΘB et sub AB composita ex data et adiecta aequale sit datae $A\Theta$ quadrato, vel ut describatur re-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Ἐν τοῖς ἀμβλύγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἢ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλεῖᾳ γωνίᾳ.

ctangulum $B\theta AK$, cuius laterum BA , $B\theta$ differentia sit data $A\theta$, et cuius area aequalis sit eiusdem rectae $A\theta$ quadrato: Solvetur itaque problema eodem modo ac II. 11. Cf. Pfeiderer. I. c. §§. 67. 68.

Obs. 6. Iubeatur nunc (quod est alterum problematis II. 11. conversum) datae $B\theta$ (Fig. 162.) alia θA in directum ita adiaci, ut rectangulum sub data $B\theta$ et sub composita BA ex data et adiecta sit quadrato adiectae θA aequale; seu iubeatur rectangulum construi, cuius latus minus sit datae rectae $B\theta$ aequale, et cuius area aequalis sit quadrato differentiae $A\theta$ laterum BA , $B\theta$ rectanguli. [facta] supponatur continuatio desiderata rectae datae $B\theta$ ad punctum A usque. Cum sit rectang. $AB \times B\theta = B\theta q +$ rectang. $A\theta \times \theta B$ (II. 3.) $> B\theta q$, ut possit esse $A\theta q =$ rectang. $AB \times B\theta$; debet esse $A\theta q > B\theta q$, $A\theta > B\theta$. Construat super $A\theta$ quadratum $A\theta ZH$, et super AB rectangulum $ABN\Pi$, cuius latus $B\Pi = B\theta$. Recta $N\Pi$, quae ex opposito basis AB rectangulum $ABN\Pi$ terminat, latera AZ , θH , utpote ipsi $A\theta$ aequalia, ac proinde maiora quam $B\Pi = B\theta$ in punctis N et O ita secabit, ut sint $AN = \theta O = B\Pi$ [(I. 34.)] $= B\theta$ (constr.); adeoque $ZN = HO = A\theta \times B\theta$, atque ut rectangulum $NZHO$ sit rectang. sub θA et HO . Porro, ut sit $A\theta q =$ rectang. $AB \times B\theta$ h. e. constr. $A\theta ZH = ABN\Pi$, ablato communi spatio $A\theta ON$, debet esse $NZHO = B\theta O\Pi$ h. e. rectang. $\theta\Pi \times HO = B\theta q = \theta O q$ (constr. et demonstr.). Etiam hoc problema itaque eodem redit, quo

PROPOSITIO XII. (Fig. 163.)

In triangulis obtusangulis quadratum lateris obtusum angulum subtendentis maius est quam quadrata ex lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno laterum circa obtusum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta intercepta extra a perpendiculari ad angulum obtusum.

II. 11., nempe ut datae θO in directum adiciatur alia OH , ita ut rectangulum sub adiecta OH , et sub θH composita ex data et adiecta aequale sit datae θO quadrato, vel ut describatur rectangulum $NZHO$, cuius laterum NO , OH differentia θO sit data $B\theta$, et cuius area aequalis sit eiusdem rectae $B\theta$ quadrato. Unde etiam hic sequitur similis constructio. Cf. Pfliderer. I. c. §. 69. et §. 90.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. Austin p. 39. sq. tres ultimas libri secundi propositiones partem constituere ait ab caeteris seiunctam, pariter ac tres ultimas primi libri, sed non aequae ac has in elementis necessariam; nec omnino, praesertim quod ad II. 12. et II. 13. attineat, valde utilem: ideoque eas successorum Euclidis imprudenti gloriosove elementa suis theoriis augendi studio tribuendas esse censet. Contra quae Pfliderer. I. c. Pars III. §. 193. quoad II. 12. et II. 13. monet, praeter nexum argumenti harum propositionum cum I. 47. pronamque ipsarum ex hac et II. 4. II. 7. consequentiam, et ad plures applicationes insignem usum (quarum exempla et ipse subiungit) re ipsa XII. propositionis 17. demonstrationem priorem supponere, et Datorum propositiones 64. et 65. (in textu graeco Claudii Hardy Paris. 1625. et Dav. Gregorii) vel 74. 75. in versionibus Rob. Simson. et Schwab. illis niti.

"Εστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ $ABΓ$ ἀμβλεῖον ἔχον τὴν ὑπὸ $BAΓ$ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὴν $ΓΑ$ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἢ $ΒΔ$. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τετραγώνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ $ΓΔ$ τέμνεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ A σημεῖον τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΓΔ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΑΔ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσέισθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΒ$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΔΒ$ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΑΔ$, $ΔΒ$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΑΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΓΑ$, $ΔΒ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ $Δ$ γωνία τοῖς δὲ ἀπὸ

Obs. 2. Perpendicularum BA cadere, ut in enunciato propositionis sumitur ad partes anguli BAA , qui deinceps est angulo obtuso $BAΓ$, patet ex I. 17. Cor. 5. Cf. Pfeiderer. l. c. §. 191.

Obs. 3. Caeterum quodcunque laterum angulum obtusum comprehendentium producat, ut in illud perpendicularum ex opposito trianguli vertice demittatur, sive illud (Fig. 164.) BA , sive $ΓΑ$ fuerit, rectangulum inter illud latus, et rectam interceptam extra ad perpendicularum usque, utrimque eiusdem magnitudinis erit, nempe $ΓΑ \times ΑΔ = ΒΑ \times ΑΕ$, quod vel ex ipsa propositione II. 12. patet (Gilbert. l. c. p. 192.) Pfeiderer. §. 198. vel ex l. 41. Cor. 4. consequitur, vel immediate sic adstruetur. Est $ΒΔ^2 + ΓΔ^2 = ΒΕ^2 + ΓΕ^2$, quia utraque summa $= ΒΓ^2$ (I. 47.).

Proinde ob $ΓΔ^2 = ΓΑ^2 + ΑΔ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ$ (II. 4.)

et $ΒΕ^2 = ΒΑ^2 + ΑΕ^2 + 2ΒΑ \times ΑΕ$ (II. 4.)

est $ΒΔ^2 + ΓΑ^2 + ΑΔ^2 + 2ΓΑ \times ΑΔ$

$= ΓΕ^2 + ΒΑ^2 + ΑΕ^2 + 2ΒΑ \times ΑΕ.$

Sit triangulum obtusangulum $AB\Gamma$ habens angulum $B\Lambda\Gamma$ obtusum, et ducatur a B puncto ad ΓA productam perpendicularis BA (I. 12.); dico quadratum ex $B\Gamma$ maius esse quam quadrata ex BA , $A\Gamma$, rectangulo bis sub ΓA , AA contento,

Quoniam enim recta ΓA secatur utcumque in puncto A ; quadratum ex ΓA aequale est quadratis ex ΓA , AA , et rectangulo bis sub ΓA , AA contento (II. 4.). Commune addatur quadratum ex AB ; quadrata igitur ex ΓA , AB aequalia sunt quadratis ex ΓA , AA , AB et rectangulo bis sub ΓA , AA contento. Sed quadratis ex ΓA , AB aequale est quadratum ex ΓB (I. 47.), rectus enim est ad A angulus; quadratis vero ex AA , AB aequale est quadratum ex AB (I. 47.);

Atqui $BA^2 + AA^2 = B\Gamma^2$, et $\Gamma E^2 + AE^2 = \Gamma A^2$ (I. 47.) demtis igitur utrimque aequalibus, manet $2\Gamma A \times AA = 2BA \times AE$, et $\Gamma A \times AA = BA \times AE$. Cf. Pflaiderer. l. c. §. 199.

Obs. 4. Alii alias propositionis II. 12. demonstrationes dederunt, quo pertinet Coësius; vid. Pflaiderer. §§. 195. 196. Ea, quam Gregorius a St. Vincentio habet (Pflaiderer. l. c. §. 200. Gilbert. p. 296.) praemissa ea propositione, quam Obs. 3. habuimus, quam vero ille a propositionibus 31. 35. 36. libri III. repetit, rem eodem fere modo, eademque delineatione demonstrat, quae apud Euclidem in I. 47. adhibetur, nisi quod duo latera opposita quadratorum circa angulum obtusum producantur, usquedum convenient cum perpendicularo ex opposito trianguli vertice in ea demisso, et sane concinna est atque elegans. Simplicitate tamen superari videtur ab ea, quam dedit Ambrosius Rhodius Euclid. Elem. libri XIII. ed. 1661. p. 51. sq. et quam etiam habent Claud. Richardus Guarinus (Euclides adauctus et methodicus Aug. Taurin. 1671. p. 60. sq.) Euclidis Elementa Lond. 1678. p. 95. sq. et Coët-

τῶν AA , AB ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς AB · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΓB$ τετραγώνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $ΓA$, AB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓA$, AA περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς $ΓB$ τετραγώνον τῶν ἀπὸ τῶν $ΓA$, AB τετραγώνων μείζον ἐστὶ, τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓA$, AA περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυνγωνίοις καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῇν ὀξείαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετραγώνον ἐλατ-

sus, quae huq redit: In trianguli ad A obtusanguli (Fig. 165.) BAF latus alterutrum GA ex vertice opposito B demisso perpendiculo BA , quod (Obs. 2.) in latus GA productum ad partes anguli $BA\theta$ deinceps positi obtuso BAF cadit), tum rectarum BA , GA descriptis, quadratis $B\theta$, GH , atque hoc eodem modo, quo in Prop. II. 4. divisio, est $B\Gamma^2 = BA^2 + GA^2$ (I. 47.) $= BA^2 + MZ + AN + GA + AH = BA^2 + GA^2 + AA^2 + 2GA \times AA$ (II. 4.).

Atqui $BA^2 + AA^2 = BA^2$ (I. 47.)

itaque $B\Gamma^2 = BA^2 + GA^2 + 2GA \times AA$. Cf. Pfeiderer. §. 197,

PROPOSITIO XIII.

Obs. 1. Propositio haec valet non tantum de triangulis acutangulis i. e. Def. I. 29. de iis, quae tres angulos acutos habent, sed de omnibus omnis generis triangulis. Quod dudum observant Isaacus Monachus in scholio ad hanc propositionem, Campanus, Commandinus, Peletarius, Clavius, Whiston., Robert. Simson., Austin., Pfeiderer. l. c. aliique, Nempe a) non tantum in triangulis rectangulis, et obtusangulis, quorum itaque duo reliqui anguli ad basin sunt acuti (I. 17. Cor. 1.), si e vertice anguli recti vel obtusi in oppositam basin demittatur perpendiculum, eadem prorsus demon-

ergo quadratum ex GB aequale est quadratis ex GA , AB et rectangulo bis sub GA , AA contento; quare quadratum ex GB maius est quam quadrata ex GA , AB rectangulo bis sub GA , AA contento. In obtus-angulis igitur etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 166.)

In triangulis acutangulis quadratum lateris acutum angulum subtendentis minus est quam quadrata ex late-

stratio obtinebit, quae est apud Euclidem: verum b) quod pariter dudum monuerunt viri docti, propositio haec etiam tum locum habet, si unus angulorum ad basin rectus vel obtusus fuerit. Nempe priore casu (Fig. 167. a.) in triangulo $AB\Gamma$ ad Γ rectangulo perpendicularum ex A ad $B\Gamma$ demissum cum ipso latere AI' : adeoque punctum A cum puncto Γ coïncidit, et propositio II. 13., ex qua esse dicitur $AI^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2GB \times BA$ in hanc transit: $AI^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2GB \times$, vel ut aliter dicamus in hanc: $AI^2 = AB^2 - GB^2$ quod quidem patet ex I. 47. Cor. 2. Cf. Pfeiderer. §. 204. Posteriore casu (Fig. 167. b.) in triangulo $AB\Gamma$, quod angulum AGB obtusum habet, perpendicularum ex A in basin $B\Gamma$ demissum cadit (I. 17. Cor. 5.) ad partes anguli acuti AGD , qui obtuso AGB deinceps est, eritque $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (I. 47.), adeoque $AB^2 + B\Gamma^2 = AD^2 + BD^2 + B\Gamma^2$. At $BD^2 + B\Gamma^2 = GD^2 + 2DB \times B\Gamma$ (II. 7.). Itaque $AB^2 + B\Gamma^2 = AD^2 + GD^2 + 2DB \times B\Gamma = AI^2 + 2DB \times B\Gamma$ (I. 47.). Whiston. Demonstr. 2. Austin. p. 38. Gilbert. p. 288. sq. Idem etiam adplicatis ad hunc casum reliquis reliquorum casuum demonstrationibus consequitur. Cf. Pfeiderer. §§. 205–207.

Obs. 2. Ex iis, quae Obs. 1. dicta sunt, patet, arctioribus, quam res iubet, limitibus enunciatum propositionis

τόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξεῖα γωνία.

Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετος ἡ AD . λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς AF τετραγώνον ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν GB , BA τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν GB , BA περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

II. 13. apud Euclidem circumscriptum esse. Simul patet ex duobus postremo loco positis casibus, rectam inter alterum basis terminum, et perpendiculum interceptum nequaquam semper ἐντὸς intercipi, saltim si hanc vocem ad ipsum triangulum, de quo sermo est, referre velis. Suspicio itaque nascitur, non genuinum esse textum graecum propositionis II. 13., qualem nunc quidem habemus. Nec medelam illi affert, quem summis laudibus Peyrardus extollit, Codex 190., ab ipso signo a notatus. Quin vetustissimum iam esse erratum, quamvis ad ipsum elementorum auctorem haud referendum esse videatur, inde patet, quod iam Isaacus Monachus id notaverit, qui rem ita interpretatur l. c. ut statuat, hoc loco Euclidem omnia triangula, secus ac in Def. I. 29, appellare oxygonia, quia omnia habeant angulos acutos, etsi non omnes, tamen ad minimum duos, quae tamen sententia Pfeiderero l. c. §. 210 iure parum probabilis videtur. Suspicionem textus hoc loco corrupti, eodem monente, etiam illud auget, quod in expositione eius verba: ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν notante Austin. p. 37. mera fere sunt tautologia, vel potius absonam prae se ferunt determinationem (a quo tamen vitio ea liberare forte possis, si ita interpretari velis: sit triangulum acutangulum, ita nempe, ut nominativum angulus B sit acutus). Praeterea autem, ut Pfei-

teribus acutum angulum continentibus rectangulo bis contento sub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, et recta intus intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.

Sit triangulum acutangulum $AB\Gamma$, habens angulum ad B acutum, et ducatur ab A puncto ad $B\Gamma$ perpendicularis AA (I. 12.); dico quadratum ex AF minus esse quam quadrata ex ΓB , BA , rectangulo bis sub ΓB , BA contento.

derer. I. c. monet, accedit, quod in propositionis 65. (75.) datorum enunciato generatim sumitur: *Ἐὰν τρίγωνον ὀξείαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην*. Expositio quidem eius adiunctam rursus habet ad triangulum acutangulum restrictionem. Sed eadem, quin magis adhuc otiosa laborat vocis ὀξείαν adiectione (nisi etiam hic interpretando mitigare velimus), qua propositionis II. 13. expositio, unde contra ipsius propositi tenorem translata videri potest (quamvis etiam hic codex a nullam medellam afferat). Scopus enim, quo propositiones 64. 65. (74. 75.) datorum tendunt, haud permittit, ut posterior ad triangula acutangula restringatur. Is quippe, ut problematibus, quibus inserviunt (cuiusmodi est in Apollonii locor. plan. vers. German. p. 439. 443.) propositiones illae reipsa sufficient, arctior constitui nequit, quam ut trianguli cuiuslibet dato angulo obliquo, rationem trianguli ad differentiam quadrati lateris angulo dato oppositi et summae quadratorum laterum eundem angulum comprehendentium dari ostendant. Hoc autem posito, Prop. II. 13. Elementorum, qua datorum 65. (75.) nititur, pariter ad omnis generis triangula pertinere debet. Praeterea etiam aliae propositionis II. 13. applicationes, quarum in excursu ad II. 13. adhuc nonnullas habebimus, universum eius, omnes in Obs. 1. memoratos casus complectentem, ambitum requirunt. Cf. Pfeiderer. §§. 212. 213. Quae cum ita sint,

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεία ἡ $ΓΒ$ τέμνεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ $Δ$ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΔ$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$ τετραγώνῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΑ$ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΔ$, $ΔΑ$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ τετραγώνοις. Ἄλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΒΔ$, $ΔΑ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ $Δ$ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ ἴσον

variis modis viri docti propositionem hanc II. 13. generatim enunciare ac demonstrare studuerunt. Et alii quidem omisssa tantum trianguli *acutanguli* mentione, reliqui propositionis 13. enunciati atque expositionis versionem ita concinnarunt, ut eo, qui Obs. 1. a. indicatur respectu in triangula rectangula et obtusangula quadrent, quo pertinent Peletarius p. 105. sq. De Chales. *Cursus Mathem.* Tom. I. Lugd. 1674. p. 23. Ximenes (I sei primi Elementi della geometria piana. In Venezia 1752. p. 126.). Lorenz (Euklids Elemente 3te Ausg. Halle 1809. p. 40.). Alii etiam vocem *ἔντος* expungendam et expressionem: *ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει* latius sumendam, neque ad casum intra lateris huius terminos restringendam putaverunt, ita ut etiam casum Obs. 1. b. indicatum propositio haec complecteretur. Hac ratione Tacquet. p. 67. sq. rem exprimit, qui tamen vulgarem tantum demonstrationem exhibet. Clavius, Commandinus, Rob. Simson, Austin. rem, uti Obs. 1. b. diximus, aut aliter demonstrant. Cf. Pfeleiderer. §§. 211. 214., qui idem §. 216. indicat, sufficere posse, si verba tantum τοῖς ὀξυγωνίοις, ὀξυγωνίον expungantur, dummodo demonstrationis initium (additis, quae uncis inclusa sistuntur) ad figuram textus et figuram posteriorem ad Obs. 1. a. exhibitam ita referatur: Ἐπὶ γὰρ (ἤτοι) εὐθεία ἡ $ΓΒ$ τέμνεται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ $Δ$ (ἡ εὐθεία ἡ $ΑΒ$ κατὰ τὸ $Γ$), et verba ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, τῆς ἀπολαμβανομένης ἔντος πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ, iisque opposita

Quoniam enim recta FB secta est utcumque in A ; quadrata ex FB , BA aequalia sunt rectangulo bis sub FB , BA contento et quadrato ex AF (II. 7.). Commune addatur quadratum ex AA ; ergo quadrata ex FB , BA , AA aequalia sunt rectangulo bis sub FB , BA contento et quadratis ex AA , AF . Sed ipsis quidem ex BA , AA aequale est quadratum ex AB (I. 47.), rectus enim est ad A angulus; quadratis vero ex AA , AF aequale est quadratum ex AF ; quadrata igitur ex FB , BA aequalia sunt quadrato ex AF , et

propositionis 12.: *ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντος πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ*, situm perpendiculi ac segmenti per illud abscissi diversum relate ad angulum ipsiusque verticem, non ad triangulum indicare censeantur.

Obs. 3. Caeterum etiam hic pariter ac II. 12. Obs. 3. de triangulis obtusangulis dictum fuit, notari potest, in quodcumque laterum angulum acutum comprehendentium ex opposito vertice demittatur perpendiculum (Fig. 168. 169.) sive illud AB sive BF fuerit, fore semper rectangulum inter illud latus et rectam ab angulo acuto B inde usque ad demissum perpendiculum interceptum utrimque eiusdem magnitudinis, nempe $FB \times BA = AB \times BB$, quod pariter vel ex ipsa propositione 13. ita ut Obs. 2. diximus, amplificata patet, vel ex I. 41. Cor. 4. consequitur, vel similiter ac in II. 12. ita adstruetur: Est $AA^2 + AF^2 = FE^2 + AE^2$, quia utraque summa $= AF^2$ (I. 47.) Proinde ob $FA^2 = BF^2 + BA^2 - 2FB \times BA$, et $AB^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \times BE$ (II. 7.)

$$\text{erit } AA^2 + BF^2 + BA^2 - 2FB \times BA \\ = FE^2 + AB^2 + BE^2 - 2AB \times BE.$$

Atqui $AA^2 + BA^2 = AB^2$, et $FE^2 + BE^2 = BF^2$, itaque

$2FB \times BA = 2AB \times BE$ et $FB \times BA = AB \times BE$. Cf. Pfeiderer. §. 199.

Obs. 4. Similes etiam huic propositioni demonstrandas rationes adhiberi possunt, et reapse adhibitae fuerunt, ac iu

ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΑ$ ἴσα ἔστι τῷ τε ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΔ$ ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΑΒ$ τετραγώνων, τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΓΒ$, $ΒΔ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ.

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ $Α$ · δεῖ δὴ τῷ $Α$ εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

II. 12. Obs. 4. vidimus, e quibus pariter eam, quam praeter alios Ambrosius Rhodius dedit, simplicitate sua maxime commendabilem huc referemus. Nempe (Fig. 170.) in trianguli ad B acutanguli $ΑΒΓ$ latus $ΒΓ$, quod non minus sit utroque reliquo, demisso perpendiculo $ΑΔ$ (quod tum necessario intra triangulum $ΑΒΓ$ cadet (I. 18. Cor. 3.) tum rectarum $ΑΔ$, $ΒΓ$ descriptis quadratis, atque hoc rursus, ut in Prop. 4. diviso, denique super recta $ZH=BA$ (I. 34.) constructo quadrato ZO , quod igitur $=BA^2=BM$ (II. 4. Dem.) erit $AB^2=AD^2+BD^2$ (I. 47.) $=AI+ZO$. $BC^2=NH+GA+AH$, itaque $AB^2+BC^2=NH+AI+GA+AH+ZO=NH+AI+2. GA$, quia $AH=GM$ (I. 34.) et $ZO=AD$ (Dem.). Sed $AC^2=NH+AI$ (I. 47.) ob $NH=AC^2$ (II. 4. Dem.), ergo $AB^2+BC^2=AC^2+2GA=AC^2+2. \text{rectang. } GB \times BA$, ob $BA=BM$ (II. 4. Dem.). Cf. Pfeiderer. §. 197.

Obs. 5. Conversae quoque propositionum II. 12. et II. 13. valent, pariter ac I. 48. conversa propositionis II. 47. demonstrata fuit. Quin haec ipsa I. 48. etiam hoc loco iunctim cum reliquis inferri poterit. Nempe 1) si in triangulo aliquo quadratum unius lateris aequale fuerit summae quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus illi primum nominato lateri

rectangulo, bis sub FB , BA contento; quare solum quadratum ex AF minus est quam quadrata ex FB , BA , rectangulo bis sub FB , BA contento. Ergo in acutangulis etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 171.)

Dato rectilineo aequale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A ; oportet igitur ipsi A rectilineo aequale quadratum constituere.

oppositus rectus erit. Nam si obtusus fuerit, quadratum lateris illi oppositi maius (II. 12.) si acutus fuerit, quadratum eiusdem lateris minus (II. 13.) foret summa quadratorum duorum reliquorum laterum. 2) Si quadratum lateris alicuius maius fuerit summa quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus ei oppositus obtusus erit. Nequit enim rectus (I. 47.) aut acutus (II. 13.) esse. Denique 3) si quadratum lateris alicuius minus fuerit summa quadratorum duorum reliquorum laterum, angulus ei oppositus acutus erit. Nequit enim rectus (I. 47.) aut obtusus (II. 12.) esse. Caeterum duo casus ultimo loca allati poterant etiam simili ratione demonstrari ac in propositione I. 48. factum est ab Euclide, quas demonstrationes dedit Clavius, et quod ultimum casum attinet, iam indicavit Isaacus Monachus Schol. ad II. 13. Cf. Pfeiderer. l. c. §§. 217. 218.

Obs. 6. Triangulum scalenum igitur erit rectangulum — obtusangulum — acutangulum, prout quadratum maximi eius lateris quadratis simul reliquorum duorum laterum est aequale — aut maius — aut minus: ultimo scilicet casu maximus trianguli angulus (I. 18.) acutus erit, tantoque magis caeteri. Et triangulum aequicrurum, cuius basis utroque crurum maior est (quodsi enim singula crura basi maiora sunt, non potest

Συνστάτω γὰρ τῷ A εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλλήλογράμμον ὀρθογώνιον τὸ BA · εἰ μὲν οὖν ἴση ἔστιν ἡ BE τῇ EA , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. Συνίσταται γὰρ τῷ A εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ BA · εἰ δὲ οὐ, μία τῶν BE , EA μείζων ἔστιν. Ἐστω μείζων ἡ BE ¹⁾, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z ,

1) Iure hic Rob. Simson observat, legendum esse saltem: εἰ δὲ οὐ, ἐκβεβλήσθω ἡ BE ἐπὶ τὸ Z , quum nihil prorsus intersit, utrum maior an minor rectorum BE , EA producatur. Nolumus tamen sine Mss. consensu aliquid mutare.

non esse acutangulum per I. 5., I. 17., I. 18., erit rectangulum — obtusangulum — acutangulum, prout quadratum basis duplo quadrato unitus cruris est aequale — aut eo maius — aut minus. Sic comparando invicem quadrata laterum trianguli, cuius speciei sit ratione habita angulorum, erui potest: quod comparatio ipsorum laterum non praestat, nisi vel omnia aequalia sint, vel duo aequalia ac singula maiora tertio. Cf. Pflaiderer. l. c. §. 219. Alias adhuc observationes et adplicationes Prop. II. 12. II. 13. vid. in excursu ad finem huius libri.

PROPOSITIO XIV.

Obs. 1. Huic quoque problemati, pariter ac Prop. II. 11. praemitti potest Analysis. Nempe alterutro dati parallelogrammi rectanguli non aequilateri $BΓAB$ latere BE producto, donec $EZ=EA$, ideoque rectangulum $BA=BE \times EZ$; cum recta BZ puncto E secetur in inaequalia (hyp.); applicandae propositionis II. 5. gratia, quae de rectangulo segmentorum inaequalium datae rectae praecipit, eandem BZ secare etiam oportet in aequalia: quo facto in puncto H , est rectang. $BE \times EZ + EH^2 = HZ^2$. Quum igitur invenienda sit ex conditione problematis recta aliqua A , cuius quadratum sit $= BE \times EZ$; debet esse $A^2 + BH^2 = HZ^2$, vel $A^2 = HZ^2 - BH^2$. Invenietur autem recta A (ex I. 47. Cor. 10.), si rectae HE in puncto B ad rectos angulos constituatur recta $BΘ$, vel,

Constitnatur ipsi A rectilineo aequale parallelogrammum rectangulum BA (I. 45.) Si igitur aequalis est BE rectae EA , factum erit propositum; constitutum est enim ipsi A rectilineo aequale quadratum BA (I. Def. 30.); si autem non, una ipsarum BE , EA maior est. Sit maior BE , et producatnr ad Z ,

quod eodem redit (I. 13. Cor. 1.) si recta AE producatnr, atque ab ea abscindatur ope circuli centro H , radio HZ descripti, segmentum EH ; eique aequalis ponatur recta A . Cf. Pflleiderer. §. 70.

Obs. 2. Pariter (Fig. 172.) proposito cuicunque parallelogrammo obliquangulo $BEIK$, utpote aequali rectangulo $BEAT$ super eadem basi et inter easdem parallelas BE , IT (I. 35.) aequale quadratum efficitur, lateri cuilibet BE parallelogrammi in directum addiciendo rectam EZ aequalem distantiae EA lateris huius BE ab opposito KI , et reliqua peragendo ut in constructione problematis XIV. Cf. Pflleiderer. §. 71.

Obs. 3. Quum sit $EH < HZ$ (I. 19.) seu (constr.) $< HZ$: fit $4EH < 4HZ$ seu $< 2BZ$ seu $< 2(BE + EA)$; tantoque magis $< 2(BE + EI)$, ob $EA < EI$ (I. 19.): h. e. perimenter quadrati ab EH minor est perimetro rectanguli $BEAT$; tantoque magis minor perimetro parallelogrammi obliquanguli $BEKT$. Aequalem igitur aream quadratum sub minore perimetro quam parallelogrammum rectangulum non aequilaterum, vel parallelogrammum obliquangulum comprehendit, quod et ex II. 5. Cor. 2. facile deducitur. Cf. Pflleiderer. §§. 72. 73.

Obs. 4. Quodsi vicissim recta data BZ ita proponitur secunda, ut rectangulum sub segmentis eius aequale sit quadrato rectae datae A , seu si parallelogrammum rectangulum construi iubeatur aequale quadrato rectae datae A , et cuius summa laterum contiguorum sit datae rectae BZ aequalis, proinde perimenter $= 2BZ$; ut, quod requiritur, fieri possit, recta data non maior esse debet semisse

καὶ κείσθω τῇ EA ἴση ἢ EZ , καὶ τετμήσθω ἢ BZ
 δίχα κατὰ τὸ H , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ H , διαστήματι
 δὲ ἐνὶ τῶν HB , HZ ἡμικύκλιον γεγράφω τὸ BOZ ,
 καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ AE ἐπὶ τὸ Θ , καὶ ἐπεξεύχθω ἢ
 $H\Theta$.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία ἢ BZ τετμηται εἰς μὲν ἴσα
 κατὰ τὸ H , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ E · τὸ ἄρα ὑπὸ
 τῶν BE , EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ

HZ rectae secundae, seu datae laterum contiguorum rectanguli
 describendi summae BZ : quia rectangulo sub segmentis aequa-
 libus BH , HZ , seu quadrato semissis rectae secundae BZ ,
 maius spatium segmentis datae BZ , seu parallelogrammo re-
 ctangulo, cuius perimeter $= 2BZ$, comprehendi nequit (II.
 5. Cor. 1.). Tum vero, si $A = \frac{1}{2}BZ$, rectam BZ bifariam in
 H secando, factum erit, quod iubetur: erit enim rectangul.
 $BH \times HZ = HZ^2 = A^2$ (I. 46. Cor.) cum sit $HZ = A$ (hyp.).
 Sed si $A < HZ$, ideoque $A^2 < HZ^2$ (I. 46. Cor.) seu $<$ rect.
 $BH \times HZ$; ponatur in puncto E facta rectae BZ sectio, qua
 obtineatur $A^2 = \text{rectang. } BE \times EZ$. Cum sit rectang. $BE \times$
 $EZ + HE^2 = HZ^2$ (II. 5.): debet esse $A^2 + HE^2 = HZ^2$,
 proinde (I. 47.) distantia HE puncti sectionis B quaesiti ab
 puncto bisectionis H rectae datae BZ seu (II. 5. Cor. 4.) se-
 midifferentia laterum BE , EZ rectanguli construendi, aequa-
 bitur lateri circa angulum rectum trianguli rectanguli,
 cuius hypotenusa datae HZ atque alterum latus circa an-
 gulum rectum datae A est aequale. Cf. Pfleiderer. §. 74.
 Efficietur autem illud (Fig. 173. 174.), rectae datae BZ ,
 bifariam in puncto H sectae, in eodem puncto H con-
 stituendo / normalem $H\Sigma =$ datae rectae A : tum vel 1)
 (Fig. 173.) perpendiculum ΣO , ad rectam $H\Sigma$ in puncto Σ
 ductum, seu per punctum Σ actam rectae BZ parallelam ΠO ,
 circulo centro H , intervallo HZ descripto, in puncto Θ se-
 cando: quo facto erit $H\Sigma\Theta$ triangulum rectangulum, cuius
 hypotenusa $H\Theta = HZ$, atque cathetus $H\Sigma = A$: denique ab

et ponatur ipsi EA aequalis EZ (I. 3.), et secetur BZ bifariam in H (I. 10.), et centro quidem H , intervallo vero una ipsarum HB , HZ semicirculus describatur $B\Theta Z$, et producat AE in Θ , et iungatur $H\Theta$.

Quoniam igitur BZ secta est in aequalia quidem in H , in inaequalia vero in E ; ergo rectangulum sub BE , EZ contentum cum quadrato ex HE aequale

recta BZ abscindendo $HE = \Sigma\Theta$ per rectam ΘE ex puncto Θ ad BZ demissam perpendicularem (I. 34.). Vel 2) (Fig. 174.) centro Σ intervallo $\Sigma P = HZ$ describendo circulum, qui datam BZ in puncto E secet; quo immediate fit HE cathetus trianguli ΣHE , cuius hypotenusa $\Sigma E = HZ$, atque alter cathetus $\Sigma H = A$. Priore casu, ob $H\Sigma = A < HZ$ vel HT (supp. et constr.) punctum Σ cadit intra circulum centro H , intervallo HZ , seu circa diametram BZ descriptum, ideoque ΠO rectae BZ parallela circulum hunc in duobus punctis Θ , Π ad easdem rectae BZ partes secat; ex quibus in hanc BZ demissa perpendiculara, seu ductae rectae $H\Sigma$ parallelae ΘE , ΠQ datam rectam BZ in punctis E , Q ita secant, ut sint rectangula $BE \times EZ = BQ \times QZ = A^2$. Nempe tam $BE \times EZ + HE^2 = HZ^2$, quam $BQ \times QZ + HQ^2 = HB^2$ (II. 5.). Unde porro, ob $HZ^2 = H\Theta^2 = HE^2 + E\Theta^2$, et $HB^2 = H\Pi^2 = HQ^2 + \Pi Q^2$ (constr. et I. 47.) sequitur: $BE \times EZ + HE^2 = HE^2 + E\Theta^2$, et $BQ \times QZ + HQ^2 = HQ^2 + \Pi Q^2$ et hinc $BE \times EZ = E\Theta^2$, $BQ \times QZ = \Pi Q^2$. Cum itaque sit $\Theta E = \Pi Q = H\Sigma$ (I. 34.) $= A$; fiunt rectangula $BE \times EZ$, $BQ \times QZ = A^2$. Altero casu (Fig. 174.) ob $\Sigma H = A < HZ$ seu ΣP (supp. et constr.), punctum H rectae BZ iacet intra circulum centro Σ intervallo ΣP descriptum; quem igitur in duobus punctis E , Q secat haec recta BZ , idque, ob $HE < \Sigma E$ seu HZ , $HQ < \Sigma Q$ sive HB (I. 19. et constr.) sic, ut puncta E , Q inter puncta H , Z ; et H , B cadant. Atque ita rursus eodem modo, quo ante probatur, esse $BE \times EZ = BQ \times QZ = A^2$. Caeterum $HE =$

ἀπὸ τῆς HE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς HZ τετραγώνῳ. Ἰση δὲ ἡ HZ τῇ $H\Theta$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Theta E, EH$ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\Theta E, EH$. Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ ἀπὸ τῆς HE τετράγωνον· λοι-

$H\Omega$ in triangulis rectangulis $HE\Theta$, $H\Omega\Pi$ (Fig. 173.) $HE\Sigma$, $H\Omega\Xi$ (Fig. 174.) quorum hypotenusae et catheti alteri aequales sunt, atque $HB=HZ$ (constr.): quare etiam sunt tam $HB+HB=HZ+H\Omega$, quam $HB-H\Omega=HZ-HE$ h. e. tam $BE=Z\Omega$, quam $B\Omega=ZE$, itaque rectangula $BE\times EZ$, $B\Omega\times Z\Omega$ situ tantum, non longitudine laterum differunt. Posteriorem constructionem solvendo problemati aequipollenti: applicare datum quadratum ad rectam datam, difficiens quadrato; seu ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato, adhibent Halley (Schol. in Con. Apollon. P. II. p. 153. Robert. Simson. p. 380 sq. Cf. infra ad VI. 28. Prior constructio haud necessario requirit, ut normalis $=A$ rectae BZ in puncto bisectionis H constituatur, ideoque applicatu saepe commodior est altera quamvis concinniore, dum problema seorsim spectatur. Cf. Pflaiderer. §. 75. Prior constructio, pariterque solutio problematis ipsius Prop. XIV. exhibent theorema: quadratum perpendicularis, a quolibet circumferentiae circuli puncto in diametrum ductae, aequatur rectangulo sub segmentis diametri, quae ab ipsa perpendiculari sunt. Quod Herigonius p. 76. propositioni II. 5. statim subiungit, et deinde ad propositiones 6—10. ipsas, easdemve aliter enunciatas, alio modo demonstrandas adhibet. Cf. Pflaiderer. §. 76.

Obs. 5. Cum, ducta per verticem I (Fig. 175. 176.) trianguli IBE , IKE parallela lateri ipsius BE , KE , atque huic in altero extremo erecta, et ad occursum parallelae illius continuata normali EA , EB ; tum vel perpendicularulo EA , vel

est quadrato ex HZ (II. 5.). Aequalis autem HZ rectae $H\Theta$ (I. Def. 15.); rectangulum igitur sub BE , EZ contentum cum quadrato ex HE aequale est quadrato ex $H\Theta$. Quadrato autem ex $H\Theta$ aequalia sunt quadrata ex ΘE , EH (I. 47.); rectangulum igitur sub BE , EZ cum quadrato ex HE aequale est quadratis ex ΘE , EH . Commune auferatur quadratum

laterè KE in puncto A bifariam secto, triangulum aequale sit parallelogrammo rectangulo $BF\Delta E$ (I. 41. sq.) quodsi hoc aequilaterum non est; construatur quadratum aequale triangulo proposito, vel (Fig. 175.) latus BE continuando, donec sit $EZ=BA=1/2EA$; vel (Fig. 176.) perpendicularum BE producendo, donec sit $EZ=EA=1/2KB$, et tum (utraque Fig.) latus EH quadrati rectangulo $BE \times EZ$ aequalis iuxta Obs. 1. determinando (Campanus, Clavius). Cf. Pfeiderer. §. 77.

Obs. 6. Hinc iam etiam patet, qua ratione solvi possit problema: propositae figurae rectilineae aequale quadratum efficere. Nempe 1) triangulum rectilineo dato aequale construendo methodis variis, quibus id iuxta I. 37. fieri potest: tum huic triangulo aequale quadratum describendo iuxta Obs. 4. 2) vel singulis triangulis, in quae figura proposita per diagonales dividitur, aequalia quadrata iuxta Obs. 4. determinando; tum per I. 47. iteratamque, si figura multilatera est, eius applicationem, quadratum datis illis quadratis simul aequale construendo. Atque hanc posteriorem methodum indicant Campanus, Clavius, Peletarius, Tacquet. et priorè expeditiorem esse iudicant. Cf. Pfeiderer. §. 78.

Obs. 7. Atstin. p. 39. sq. propositionem II. 14. nusquam in primis sex elementorum libris citari, et planam esse per VI. 13. et VI. 17. praeterea ab obiecto libri II. secedere, et in expositione constructionis vitio ab Rob. Simson. notato (vid. quae ad textum prop. huius notavimus) laborare observat, ideoque interpolatam censet. Quibus Pfeiderer. §. 79. subiungit: suspectam quoque pari iure ac X. 117. (vid. Sa-

πὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BE , EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $EΘ$ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BE , EZ τὸ ὑπὸ τῶν BE , EA ἐστίν, ἴση γὰρ ZE τῇ EA . τὸ ἄρα BA παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΘΕ$ τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ BA τῷ A εὐθυγράμμῳ· τὸ A ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $EΘ$ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ A ἴσον τετραγώνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς $EΘ$ ἀναγραφησόμενον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

villii Praelect. Oxon. 1621. p. 13.) reddere posset locus, quo ponitur, tum ad calcem libri II. tum seiunctim ab Prop. 11., cuius ad Prop. 6. similis ratio est, ac 14. ad quintam: nisi alia turbati propositionum ordinis exempla exstarent in elementis, v. gr. III. 25. III. 31. VI. 23. VI. 25. VI. 31. VI. 32. Pariter rationes duae posteriores Austini contra plures elementorum propositiones sine dubio genuinas valiturae esset; ipsemetque priorem earum instantia trium ultimarum libri I. propositionum (quas nempe pariter ab argumento reliquarum libr. I. contentarum recedere, et prorsus necessarias esse dicit) infringit. Propositio 14. argumentum propositionibus I. 42. 44. 45. coeptum complere censi potest; pariter ac propositiones II. 12. 13. id quod in I. 47. sq. fuit inchoatum. Porro, quod ad reliquas duas Austini animadversiones attinet, problematis I. 44. ideoque etiam sequentis I. 45. (quae, exclusa elementis propositione II. 14. nullibi in illis ante VI. 25. supponuntur) solutio non modo aequae plana est per VI. 14. VI. 12. ac problematis II. 14. per VI. 17. VI. 13., sed magis etiam expedita ea, quae in I. 44. traditur. Problema VI. 30. expresse solvitur, quamvis eius effectio ex

ex HE ; reliquum igitur rectangulum sub BE , EZ contentum aequale est quadrato ex $E\Theta$. Sed rectangulum sub BE , EZ est rectangulum sub BE , EA , aequalis enim est EZ rectae EA ; ergo BA parallelogrammum aequale est quadrato ex ΘE . Aequale autem est BA rectilineo A ; rectilineum igitur A aequale est quadrato ex $E\Theta$ descripto.

Ergo dato rectilineo A aequale quadratum ex ΘE descriptum constituitur. Quod oportebat facere.

propositionibus II. 11. VI. 17. aequè ultro consequatur, ac propositio VI. 14. per eandem VI. 17. ad VI. 13. reducitur: quod et in primis quinque libri XIII. propositionibus supponitur; ipsaque propositionis VI. 30. solutione altera, ac prioris demonstratione docetur. Propositionum 28. 29. 32. 33. libri X. constructiones, concinnitatis demonstrationum gratia, immediate per VI. 13. VI. 12. in duabus prioribus et per II. 14. I. 45. in posterioribus peragi iubentur. Caeterum problema II. 14. sub generaliiori VI. 25. tanquam casus particularis comprehenditur: pariter atque eius conversum Obs. 3. sub problemate VI. 28., quod enuntiatio eius ex Halleyo et Rob. Simson. ad finem Obs. 3. allata, et Lemma praemissum propositioni X. 18. indicant. Eodemque modo ad VI. 29. se habet problema ad Obs. 5. II. 11., cuius casum specialem aistit II. 11. prouti etiam ex problematis VI. 30. solutione priori adparet. Denique observat Pflaiderer. l. c. §. 80. Claudium Richardum (Euclid. Elementor. libr. XIII. Antwerp. 1645.) incongrue tprorsus demonstrationes propositionum II. 11. II. 14. in apagogicas transformare.

Ε Τ Κ Α Ε Ι Δ Ο Τ
Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Ω Ν
Β Ι Β Λ Ι Ο Ν Τ Ρ Ι Τ Ο Ν.

Ο Ρ Ο Ι.

α. *Ἰσοὶ κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διαμέτροι ἴσαι εἰσὶν.
ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.*

DEFIN. I.

F. Ea, quae hic enunciantur, non præ definitione habenda, aut certe, si quo sens: definitionis loco haberi possint, antequam applicentur, demonstranda esse, passim monuerunt viri docti. Et Tartalea quidem (Euclide tradotto fol. 37. a.) suppositum per se satis manifestum, seu postulatum potius quam definitionem esse pronunciat: Borelli (Euclid restit. p. 63.) Angel, de Marchettis (Euclid. reform. p. 10.) König (Elem. d'Euclide p. 98.) Playfair (Elem. of Geom. p. 374.) ex definitionum serie plane hanc propositionem expungunt, atque inter axiomata simpliciter, vel adiuncta qualicunque declaratione aut demonstratione referunt: aiii v. c. Billingsley (the Elem. of Euclide fol. 10. b.) Giordano da Bitonto (Euclide restituito Rom. 1680. p. 101.) Candalla (Euclid. Elem. fol. 19. b.) Clavius ad h. l. inter definitiones quidem retinent, at e generatione circuli veritatem enunciati aliquatenus demonstrare tentant: Rob. Simson. (Elem. of Eucl. 2. Ed. p. 95) omnino hanc definitionem non esse, sed theorema indicat, in quo consentientem habet Pflaiderer. (Thes. inaug. 1782. Th. 3.) qui Thes. inaug. 1789. Th. 1—3) rem ita accuratius diiudicandam cen-

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

1. **A**equales circuli sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris aequales sunt.

set, demonstrandum quidem esse, circulorum areas et peripherias aequales esse, quorum radii aut diametri aequales sint, quod etiam facile fieri possit, re ad Ax. 8. libri I. demonstratione directa vel indirecta, priore simili ei, quae in I. 4. posteriore analogia iis, quae in III. 5. III. 6. adhibentur, reducta, erronee itaque hanc propositionem ut theorema omissam esse in elementis, eam ipsam autem iam demonstratam in nostra definitione, certe antequam ipsa applicetur, supponi, ac tum definitionem breviorē tantum denominationem, loco expressionis: *circuli, quarum diametri, vel quorum, quae ex centris, aequales sunt*, suppeditare, (quo sensu etiam circuli aequales sumantur III. 26-29, et VI. 33.) atque ita demum absque vitio subreptionis demonstrationibus alias metuendo adhiberi posse. Atque est quidem haec demonstratio facillima. Nempe, si fig. 204. circulum centro F radio FA , et centro Z radio ZA descriptorum diametri AB , AE , adeoque etiam semidiametri AF , AZ aequales fuerint, applicato centro unius F super centrum alterius Z , recta FA ponatur super recta ZA , puncta quoque A , A , pariterque B , E coincident (Obs. ad I. 8. Ax.). Iam, si sumatur punctum quodcunque H in

β. *Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον*¹⁾.

γ. *Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἳ τινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.*

1) Cod. a. et ex eo Peyrard. addunt: *ἐπὶ μηδέτερον μέρος*, quod quum nec necessarium, nec satis aptum, et in definitione quoque β. non additum sit, nec in edit. Oxoniensi aut Basil. legatur, omisimus. Recipienda tamen haec verba putant De Lambre et Prony.

peripheria unius circuli, ducaturque recta $ΓΗ$, et fiat (I. 23.) angulus $EZΘ = BΓΗ$, hi quoque anguli aequales, et rectae aequales $ΓΗ$, $ZΘ$ coincident (Obs. ad I. 8. Ax.), adeoque puncta H , $Θ$ coincident. Omnia igitur puncta utriusque peripheriae, adeoque totae peripheriae, et areae circulorum congruunt, ac proinde (I. 8. Ax.) aequales sunt. Cf. Pfeiderer. de dimens. circul. P. II. Tub. 1790. p. 4. Aliter ita: si positis iisdem ac ante, circulisque sibi eodem modo aptatis, sumere velis, punctum H non congruere cum puncto $Θ$ in peripheria, cadet igitur vel extra vel intra circulum, centro Z radio $ZΑ = ΓΑ$ descriptum, adeoque erit vel $ΓΗ > ZΘ$, vel $ΓΗ < ZΘ$, quod utrumque fieri nequit, quum etiam ponatur $ΓΗ = ZΘ$. Cf. Pfeiderer. l. c. Caeterum Campanus in ipsa definitione addit: maiores circuli sunt, quorum diametri sunt maiores, minores, quorum diametri minores. Quod ipsum definitioni etiam subiungunt Clavius, Orontius Trineus, Billingsley, Borellius. Atque id quidem simili ratione probari poterit. Ex contraria quoque huius propositionis valet: nempe circuli aequales diametros quoque et semidiametros invicem habent aequales; et prout quis circulus maior, minor sit altero, illius etiam diameter maior, minor erit diametro alterius, quod facile per indirectum demonstrabitur, et notatum est a Borellio, et, quoad circulos aequales, a Giordano da Bitonto.

2. Recta circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta circulum non secat.

3. Circuli contingere sese dicuntur, qui se tangentes sese non secant.

DEFIN. H.

Robert. Simson. ad definitiones libri quarti notat, quod iam hic observari meretur, Euclidem non promiscue uti vocibus *ἀπτεσθαι* et *ἐφάπτεσθαι*. Nempe, quando punctum aliquod positum est in recta, aut alia quavis linea, tum punctum illud apud geometras graecos *ἀπτεσθαι* tangere dicitur eam lineam: et quando recta, aut circulus circulo quoque modo occurrit, alter alterum *ἀπτεσθαι* dicitur. Quando vero recta et circulus occurrit circulo ita, ut ipsum non secet, dicitur *ἐφάπτεσθαι*, contingere circulum. Paucis tantum locis, nempe in Delia. IV. 5. et in III. 18. et III. 19. in textu graeco verbum simplex mutandum esse in compositum monet Rob. Simson. Quod ipsum etiam fieri debet in expositione propositionum III. 11. III. 12. Et reapse in Prop: III. 11. III. 12. et III. 18. Codex a Peyrardi habet verbum compositum, quo ipso confirmatur Simsonis observatio. Caeterum recta circulum, quod praemittendum erat, in puncto aliquo *secare* dicitur, si recta et circulus illud quidem punctum commune habeant, at puncta rectae, quae huic puncto communi adiacent, ex una parte puncti istius communis intra -- ex altera extra circulum posita sint. Et recta circulum *contingere* dicitur, quae circulo in aliquo puncto occurrens eum *in hoc puncto* non secet: *nasquam* enim secare, demum III. 18. coll. III. 16. probatur.

DEFIN. III.

Similiter iis, quae sub finem definitionis praecedentis diximus, addi potest: a) Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae isti puncto communi proxima sunt, ex una puncti communis parte extra

δ. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτάς κείθεται ἀγόμεναι ἴσαι ᾧσιν.

ε. Μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κείθεται πίπτει.

ς. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιχόμενον σῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σῆμελον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπεζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθειῶν εὐθειῶν.

θ. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

alterum circulum, ex altera vero eius parte intra alterum circulum posita sint: tum duo isti circuli in puncto hoc communi se invicem secare dicuntur. b) Et duo circuli se in puncto aliquo contingere dicuntur, si punctum illud commune habeant, neque in eo se secant. i. e. si ea puncta unius circuli, quae ex utraque parte isti puncto proxima sunt, vel ex utraque parte extra alterum circulum, vel ex utraque parte intra alterum circulum posita sint: (nusquam enim secare, quod hic Euclides sumit, probandum demum erit). c) Et quidem duo circuli extra se in puncto aliquo contingere dicuntur, si illud quidem punctum commune habent, ea vero puncta utriusvis circuli, quae illi puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum circulum. d) Duo contra circuli intra se in puncto aliquo contingere dicuntur, si illud punctum commune habeant, ea vero puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte po-

4. In circulo aequaliter distare a centro rectae dicuntur, quando perpendiculares ex centro ad ipsas ductae aequales sunt.

5. Magis autem distare dicitur ea in quam maior perpendicularis incidit.

6. Segmentum circuli est figura contenta recta et circuli circumferentia.

7. Angulus autem segmenti est, qui continetur recta et circuli circumferentia.

8. Angulus autem in segmento est, quando in circumferentia segmenti sumitur aliquod punctum, et ab ipso ad terminos rectae, quae est basis segmenti, coniunguntur rectae, angulus ab iunctis rectis contentus.

9. Quando autem rectae angulum continentes abscindunt aliquam circumferentiam, illi dicitur insistere angulus.

sita sint *intra* alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint *extra* alterum circulum). Cf. Apollonii de Taction. quae supersunt. Gothae 1795. p. 34. 35.

DEFIN. IV.

Quas hic et in sequentibus Euclides rectas in circulo vocat, alii etiam rectas circulo inscriptas, vel chordas circuli appellare solent.

DEFIN. VI.

Conferantur, quae diximus ad Def. I. 19.

DEFIN. VII.

Hanc definitionem pariter ac propositionum III. 16. et III. 31. additamenta ad angulos semicirculi et segmentorum

ι. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ια. "Ομοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἣ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

"Εστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $ABΓ$. δεῖ δὴ τοῦ $ABΓ$ κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔνυχεν εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ $Δ$ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ $Δ$ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $ΓΔ$, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ E , καὶ τετμήσθω ἡ $ΓE$ δίχα κατὰ τὸ Z . λέγω ὅτι τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ H , καὶ ἐπέ-
ξενύθωσαν αἱ HA , HA , HB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

spectantia, adulterina esse, non temere quem suspicari, iam Vieta pronunciavit (Opp. p. 386.) Pfeiderer. Thes. inaug. Tub. 1783. Th. 7. Et expungi omnino poterant ex Elementis, quod etiam fecit Playfair (Elem. of Geom. contain. the first 6. [Books of Euclid. 1795. p. 574.]), nisi variae, quibus ortum dedere, disputationes historicam eorum notitiam necessariam redderent. Plura vide in excursu ad finem huius libri.

DEFIN. XI.

Haec definitio demum post III. 21. plenius intelligetur, ubi ostensum fuerit, angulos in eodem circuli segmento esse inter se aequales.

PROPOSITIO I.

Obs. Rob. Simson. ad hanc propositionem monet, esse, qui contra demonstrationes apagogicas, seu indirectas nimis

10. Sector circuli est, quando ad centrum circuli positus est angulus, figura cōnēta rectis angulum continentibus et circumferentia ab ipsis intercepta.

11. Similia segmenta circuli sunt, quae capiunt aequales angulos; vel in quibus anguli aequales inter se sunt.

PROPOSITIO I. (Fig. 205.)

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus $AB\Gamma$; oportet igitur $AB\Gamma$ circuli centrum invenire.

Ducatur in ipso utcunque recta aliqua AB , et secetur bifariam in puncto Δ (I. 10.), et a Δ rectae AB ad rectos ducatur $\Gamma\Delta$ (I. 11.), et producat in E , et secetur ΓE bifariam in Z (I. 10.); dico Z centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Non enim, sed, si fieri potest, sit H , et iungantur HA , HA , HB . Et quoniam aequalis est AA

severe, et quidem imperite disputent (Rarum potissimum innuere videtur), non animadvertentes, quaedam nulla alia ratione demonstrari posse. Cuius rei exemplum esse putat hanc propositionem, cuius directa demonstratio afferri nequeat. Nempe praeter circuli definitionem nullum esse principium de circulo, ex quo demonstrationem directam sive indirectam conficere liceat. Ex hac itaque definitione et propositionibus ante demonstratis necesse esse demonstrationem derivare. Quum igitur non liceat assumere, punctum in constructione inventum esse centrum (hoc quippe demonstrandum demum esse) manifestum esse, punctum aliud tanquam centrum assumendum esse, et, si ex hoc assumpto absurdum aliquod sequatur, tum assumptum utcunque punctum non esse centrum: Atque ita patere necessitatem demonstrationis indirectae. At, quamvis in eo Rob. Simsoni facile consentiamus, nihil in

ἡ AA τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ AH , δύο δὲ αἱ AA , AH δυοὶ ταῖς HA , AB ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ HA βάσει τῇ HB ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ H γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AAH γωνία τῇ ὑπὸ HAB ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεία ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ HAB . Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZAB ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ HAB , ἡ μείζων τῇ ἐλάττω, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ H κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Z .

Τὸ Z ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις εὐθείαν-τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

demonstratione indirecta reprehendi posse, quae potius directam eo adhuc superare videtur, quod directa plerumque tantum evincat, rem aliquam ita esse, indirecta etiam rem aliter esse non posse, et quamvis etiam in hac propositione demonstrationem indirectam maxime convenire largiamur, (quippe eius pars prior est fere negativa, nempe: centrum circuli non esse potest nisi in recta e media basi ad angulos rectos basi erecta), id tamen Rob. Simson. non evicisse videtur, nullam esse posse directam huius propositionis demonstrationem. Quin collatis iis, quae I. 26. Cor. 5. et 6. dicta sunt, omnino directa nostrae propositionis demonstratio exhiberi posse videtur. Ducta nempe in circulo recta quacunque AB , quum rectae e centro ad A et B ductae aequales sint I. Def. 15. et 16.

rectae AB , communis autem AH , duae utique AA , AH duabus HA , AB aequales sunt, utraque utrique, et basis HA basi HB est aequalis (I. Def. 15. et 16.), sunt enim ex centro H ; angulus igitur AAH angulo HAB aequalis est (I. 8.). Quando autem recta in rectam insistens deinceps angulos aequales inter se facit, rectus uterque aequalium est (I. Def. 10.); rectus igitur est HAB . Est autem et ZAB rectus; aequalis igitur est ZAB angulo HAB , maior minori, quod fieri non potest (I. Ax. 9.). Igitur H non est centrum circuli ABF . Similiter autem ostendemus, neque aliud quoddam praeter Z .

Ergo punctum Z est centrum ABF circuli. Quod oportebat facere.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc evidens est, si in circulo recta quaedam rectam quandam bifariam et ad rectos secet, in secante esse centrum circuli.

triangulum his rectis et basi AB contentum aequicrurum, adeoque eius vertex i. e. centrum circuli necessario erit in recta EAF , quae e media basi ad angulos rectos basi erigitur (I. 26. Cor. 6.). Quae cum circulo necessario occurrere debeat in duobus saltem punctis (I. Ax. 13.) occurrat ei in punctis E , F : et quum centrum circuli ab his punctis aequaliter abesse debeat (I. Def. 15. et 16.) situm illud erit necessario in media EF . (Hoc ipsum, nempe centrum circuli (postquam demonstratum fuit esse illud in recta EF) esse debere in media EF , in demonstratione textus graeci supponitur magis quam ostenditur. Expresse tamen id addidit Campanus, Coëtsius, Boermannus, aliique.) Si tamen quis acrius insistere, et contendere velit, ita rō indirectum demonstrationis reiectum tan-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐάν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A , B · λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ AEB , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔA , ΔB , καὶ διήχθω ἡ ΔZE .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ ΔB , ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE · καὶ ἐπεὶ τριγώνων τοῦ ΔAE μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ AEB , μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB γωνία τῆς ὑπὸ ΔAE . Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE · μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB τῆς ὑπὸ ABE . Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔB τῆς ΔE . Ἰση δὲ ἡ ΔB τῇ ΔZ · μείζων ἄρα ἡ ΔZ τῆς

tum esse ad I. 26. Cor. 6. nolim equidem pertinacius disputare, quamvis certum sit, *immediatam* certe nostrae propositionis demonstrationem esse directam. Poterat etiam res sine I. 26. Cor. 6. ita absolvi. Quum triangula, quae efficiuntur, si e centro circuli ducantur rectae ad duo quaecunque puncta A , B in circulo, et ad punctum Δ , quod ductam AB bisecat, sint aequalia, et nominatim angulos ad Δ habeant aequales (I. 8.), uterque angulorum ad Δ , i. e. angulorum, quem recta ex centro ad Δ ducta cum AB efficit, rectus erit (I. 13.), vel centrum circuli necessario positum erit, in recta per Δ perpendiculariter ad AB ducta: unde reliqua ut supra consequentur. Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. III.

PROPOSITIO II. (Fig. 206.)

Si in circuli circumferentia sumantur duo quaelibet puncta, recta haec puncta coniungens cadet intra circumulum.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in circumferentia ipsius sumantur duo quaelibet puncta A , B ; dico rectam a puncto A ad B ductam cadere intra circumulum.

Non enim, sed si fieri potest, cadat extra ut AEB , et sumatur (III. 1.) centrum circuli $AB\Gamma$, et sit Δ , iunganturque ΔA , ΔB , et ducatur ΔZE .

Et quoniam ΔA aequalis est ΔB , aequalis igitur et angulus ΔAE angulo ΔBE (I. 5.); et quoniam trianguli ΔAE unum latus ΔBE producit, maior igitur est angulus ΔEB angulo ΔAE (I. 16.). Aequalis autem ΔAE angulo ΔBE ; maior igitur [est ΔEB angulo ΔBE . Maiorem autem angulum maius latus subtendit (I. 18.); maior igitur est ΔB recta ΔE . Aequalis autem ΔB rectae ΔZ (I. Def. 15.);

Prop. 2. Cor. Siquis autem dicat, hanc demonstrationem analyticam potius esse, quam syntheticam, contra monuerim, quum centrum in quovis circulo esse debere, ex ipsa circuli definitione pateat, et analysis iam ostenderit, illud nusquam esse posse, quam in perpendiculo ex Δ ad AB erecto, synthesis, quae ex hac analysi immediate fluit, et nihil sumit, quod non ante probatum fuerit fieri posse, hoc casu nova ulteriore demonstratione haud egere.

Praeter Cor. 1. in ipsis elementis exhibitum, addi adhuc potest hoc Cor. 2. In circulo non nisi unum centrum esse potest. Si enim praeter centrum Z fuerit aliud H , erit HA pariter ac ZA ad AB perpendicularis, quod fieri nequit I. 11.

$ΔΕ$, η ἐλάττω των τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ὑπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεία ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὀμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας ἐντὸς ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $ΓΔ$ εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΒ$ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Z σημεῖον. λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΕΑ$, $ΕΒ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , κοινὴ δὲ ἡ ZE , δύο δὴ δυοῖν ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἡ $ΕΑ$ βύσει τῇ $ΕΒ$ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ EZB ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ AZE , BZE . Ἡ $ΓΔ$ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὕσα τὴν $ΑΒ$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Cox. 2. sin autem in ipsa EF praeter Z aliud punctum centrum esse posse statueris, recta EF in duobus punctis bisecabitur, quod fieri nequit I. Ax. 7. et 9.

PROPOSITIO II.

Obs. Generalius haec propositio ita exprimi et directio

maior igitur est AZ recta AE , minor maiore, quod fieri nequit. Itaque recta ab A ad B ducta non cadet extra circumulum. Similiter ostendemus, neque in ipsam circumferentiam cadere; intus igitur cadet. Si igitur circuli etc.

PROPOSITIO III. (Fig. 208.)

Si in circulo recta aliqua per centrum ducta rectam aliquam non per centrum ductam bifariam secet, et ad angulos rectos ipsam secat; et si eam ad angulos rectos secet, et bifariam ipsam secat.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in ipso recta aliqua ΓA per centrum ducta, rectam aliquam AB non per centrum ductam bifariam secet in puncto Z ; dico et ad angulos rectos ipsam secare.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma$, et sit E , et iungantur EA , EB .

Et quoniam AZ aequalis est ZB , communis autem ZE , duae utique duabus aequales sunt, et basis EA basi EB aequalis; angulus igitur AZE angulo EZB aequalis est (I. 8.). Quando autem recta super rectam insistens angulos deinceps aequales inter se facit, rectus uterque aequalium angulorum est (I. Def. 10.); rectus igitur est uterque angulorum AZE , BZE . Ergo ΓA per centrum ducta rectam AB non per centrum ductam bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secat.

demonstrari poterit: si recta aliqua per duo puncta A , B fig. 207. in circuli circumferentia posita transeat, omnia huius rectae puncta inter A et B posita intra circumulum: omnia autem puncta in recta producta sumta extra circumulum erunt. Sit enim E punctum huius rectae quodcumque inter A et B , et

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἐστίν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAZ τῇ ὑπὸ EBZ . Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AZE ὀρθὴ τῇ ὑπὸ BZE ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ EAZ , EZB τὰς δύο γωνίας δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευράν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν EZ , ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει· ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ ZB . Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν AE τῇ EF , τὴν δὲ BE τῇ ED .

occurrat AE circulo in puncto H , ductisque e centro A rectis AA , AB , AE erunt AA , AB aequales (I. Def. 15.) adeoque $\angle AAB = \angle ABA$ (I. 5.). At $\angle EAB > \angle ABA$ (I. 16.). Itaque etiam $\angle EAB > \angle AAB$, adeoque $\angle A > \angle E$ (I. 18.). Et quum $AA = AH$ (I. Def. 15.), erit etiam $\angle AH > \angle E$, adeoque E intra circum-lum. Eodem modo si sumatur in recta AB producta punctum quodcunque Z , et ducatur recta AZ , quae circulo occurrat in Θ , erit ang. $\angle ZB < \angle ABA$ (I. 16.) i. e. $< \angle AAZ$, adeoque (I.

Quodsi autem ΓA rectam AB ad angulos rectos secet; dico et bifariam ipsam secare, hoc est, aequalem esse AZ rectae ZB .

Iisdem enim constructis, quoniam aequalis est EA rectae EB (I. Def. 15.), aequalis est et angulus EAZ angulo EBZ (I. 5.). Est autem et angulus rectus AZE recto BZE aequalis; duo igitur triangula sunt EAZ , EZB duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latús uni lateri aequale, commune ipsis EZ , subtendens unum aequalium angulorum; et reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt (I. 26.); aequalis igitur est AZ ipsi ZB . Si igitur in circulo etc,

PROPOSITIO IV. (Fig. 210.)

Si in circulo duae rectae sese secant, non per centrum ductae, sese non secabunt bifariam,

Sit circulus $AB\Gamma A$, et in ipso duae rectae $A\Gamma$, BA sese secant in E puncto, non per centrum ductae, dico eas sese non secare bifariam.

Si enim fieri potest, sese secant bifariam, ita ut AE quidem aequalis sit $E\Gamma$, et BE rectae EA ; et

18.) $AA < AZ$, vel $AB < AZ$, ac proinde punctum Z extra circulum. Cf. Clavius ad h. I. Quodsi recta per centrum transeat, res per se patet,

Cor. 1. Recta circulum in pluribus quam duobus punctis secare, vel generalius plura quam duo puncta cum circulo communia habere nequit; per tria itaque puncta in eadem recta posita circulus non potest transire, aut describi. Cf. I. 16. Cor.

καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma A$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZE .

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρον ἡ ZE εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρον τὴν $ΑΓ$ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZEΑ$. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ZE εὐθεῖαν τινα τὴν $ΒΔ$ μὴ διὰ τοῦ κέντρον δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZEB . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ZEΑ$ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ZEΑ$ τῇ ὑπὸ ZEB , ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ΑΒΓ$, $ΓΔΗ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ $Β$, $Γ$ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ $Ε$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΕΓ$, καὶ διήχθω ἡ $ΕΖΗ$ ὡς ἔτυχεν.

Cor. 2. Circuli circumferentia est linea curva, i. e. ne minima quidem eius pars recta est.

Cor. 3. Recta, quae per punctum aliquod intra circum-
lum ducitur, si opus est producta, circum-
lum necessario in duobus punctis (I. Ax. 13.) nec pluribus secabit, (Haec quoque Corollaria e schedis Pfeidereri.)

PROPOSITIO III.

Obs. Haec propositio est conversa III. 1. Cor. 1. idemque pronunciat, quod I. 26. Cor. 1. et 2.

Cor. Si duo circuli (Fig. 209.) ex eodem centro A de-

sumatur centrum $AB\Gamma A$ circuli (III. 1.), et sit Z , et iungatur ZE .

Quoniam igitur recta aliqua ZE per centrum rectam aliquam $A\Gamma$ non per centrum ductam bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit (III. 3.); rectus igitur est ZEA . Rursus, quoniam recta aliqua ZE rectam aliquam BA non per centrum ductam bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secat (III. 3.); rectus igitur est ZEB . Ostensus est autem et ZEA rectus; aequalis igitur ZEA angulo ZEB , minor maiori, quod fieri nequit. $A\Gamma$, BA igitur sese non secant bifariam. Si igitur in circulo etc.

PROPOSITIO V. (Fig. 211.)

Si duo circuli sese secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, ΓAH sese secant in punctis B , Γ ; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim fieri potest, sit E , et iungatur $E\Gamma$, et ducatur EZH utcumque.

scripti sint, et recta aliqua BF interiorem circulum in punctis $B\Gamma$, adeoque (III. 2. Cor. 3.) producta etiam exteriorem circulum in duobus punctis A , E secet, erunt eius segmenta BA , FE inter utrumque circulum intercepta aequalia. Quodsi AE per centrum utriusque circuli transeat, adeoque AE diameter unius, BF alterius circuli sit, patet, ob $AA=AE$, et $BA=AF$ (I. Def. 15.), esse etiam $AA-BA=AE-AF$ (I. Ax. 3.) i. e. $AB=FE$. Sin autem AE non per centrum transeat, demittatur ex centro A in BF perpendicularum AZ (I. 12.), eritque ex nostra propositione $AZ=EZ$, et $BZ=FZ$, adeoque $AZ-BZ=EZ-FZ$ (I. Ax. 3.) i. e. $AB=BF$. Clavius ad h. l. Gilbert. p. 115.

Καὶ ἐπεὶ τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΓ$ τῇ EZ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΗ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΕ$ τῇ $ΕΗ$. Ἐδείχθη δὲ ἡ $ΕΓ$ καὶ τῇ EZ ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ $ΕΗ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν $ABΓ$, $ΓΔΗ$ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 5.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Ὅο γὰρ κύκλοι οἱ $ABΓ$, $ΓΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ZΓ$, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ $ZΕΒ$.

Ἐπεὶ αὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ZΓ$ τῇ BZ . Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΓΔΕ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν $ZΓ$ τῇ ZE . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ZΓ$ τῇ ZB ἴση· καὶ ἡ ZE ἄρα τῇ ZB ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν $ABΓ$, $ΓΔΕ$ κύκλων. Ἐὰν ἄρα δύο, καὶ τὰ ἐξῆς.

PROPOSITIO IV.

Obs. Haec propositio ita intelligenda est: si non utraque per centrum transeat, nec utraque ab altera bisecabitur. Cf. Pfeiderer.

PROPOSITIO VI.

Obs. Demonstratio huius propositionis tacite sumere vi-

Et quoniam punctum E centrum est circuli $AB\Gamma$, EF aequalis est EZ (I. Def. 15.). Rursus quoniam punctum E centrum est circuli $\Gamma\Delta H$, ΓE aequalis est EH (I. Def. 15.). Ostensa est autem et EF aequalis EZ ; et ZE igitur aequalis est EH , minor maiori, quod fieri nequit. Punctum igitur E non est centrum circulorum $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta H$. Si igitur duo etc.

PROPOSITIO VI. (Fig. 212.)

Si duo circuli sese intra contingant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ se contingant in puncto Γ ; dico non esse ipsorum idem centrum.

Si enim fieri potest, sit Z , et iungatur $Z\Gamma$, et ducatur utcumque ZEB .

Quoniam igitur punctum Z centrum est circuli $AB\Gamma$, aequalis est $Z\Gamma$ rectae BZ , (I. Def. 15.). Rursus, quoniam punctum Z centrum est circuli $\Gamma\Delta E$, aequalis est $Z\Gamma$ rectae ZE (I. Def. 15.). Ostensa est autem et $Z\Gamma$ ipsi ZB aequalis; et ZE igitur rectae ZB est aequalis, minor maiori, quod fieri nequit. Punctum igitur Z non est centrum circulorum $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$. Si igitur duo etc.

detur, puncta E et B non posse coincidere, vel circulos se invicem in Γ intus contingentes in nullo alio puncto convenire posse. Quod quamvis verissimum sit, tamen ab Euclide infra demum III. 13. demonstratum est. Utraque autem propositio III. 5. et III. 6. iunctim et generalius ita demonstrari posse videntur: si duo circuli ex eodem centro descripti sunt, nullum punctum inter se commune habebunt. Quod si enim punctum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ¹⁾ ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτῶσιν εὐθεαί τινες· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρον τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστί· δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ $ΑΔ$, καὶ ἐπὶ τῆς $ΑΔ$ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ $Ζ$, ὃ μὴ ἔστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ $Ε$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον προσπιπτέωσαν εὐθεαί τινες αἱ $ΖΒ$, $ΖΓ$, $ΖΗ$. λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἔστιν ἡ $ΖΑ$, ἐλαχίστη δὲ ἡ $ΖΔ$ · τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν $ΖΒ$ τῆς $ΖΓ$ μείζων, ἡ δὲ $ΖΓ$ τῆς $ΖΗ$.

Ἐπεξεύχθωσαν γάρ αἱ $ΒΕ$, $ΓΕ$, $ΗΕ$.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, αἱ $ΕΒ$, $ΕΖ$, ἄρα τῆς $ΒΖ$ μείζονες εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΒΕ$, αἱ ἄρα $ΒΕ$, $ΕΖ$ ἴσαι εἰσὶ τῇ $ΑΖ$ · μείζων ἄρα ἡ $ΑΖ$ τῆς $ΒΖ$. Ἡάλιν, ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΓΕ$, κοινὴ δὲ $ΖΕ$, δύο δὴ αἱ $ΒΕ$, $ΕΖ$ δυοὶ ταῖς $ΓΕ$, $ΕΖ$ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΕΖ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΓΕΖ$

1) Verba: ἐπὶ τῆς διαμέτρου, nisi otiosa iudicare velis, nihil aliud significare possunt, quam ἐντὸς τοῦ κύκλου. Quodvis nempe punctum, quod in ipsa diametro haud saltem in puncto eius extremo situm est, est etiam intra circulum et vice versa.

aliquod ipsis commune sit, punctum istud in utroque circulo a centro communi aequaliter distabit. At vero omnia puncta

PROPOSITIO VII. (Fig. 213.)

Si in diametro circuli sumatur aliquod punctum, quod non sit centrum circuli, atque ab eo in circulum cadant rectae quaedam, maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; reliquarum autem, semper propinquior ei, quae per centrum remotiore maior est; binaeque tantum aequales ab eodem puncto cadent in circulum ex utraque parte minimae.

Sit circulus $AB\Gamma A$, diameter autem ipsius sit AA , et in ipsa AA sumatur aliquod punctum Z , quod non sit centrum circuli, centrum autem circuli sit E , et a Z in $AB\Gamma A$ circulum cadant rectae quaedam ZB , $Z\Gamma$, ZH ; dico maximam quidem esse ZA , minimam verò ZA ; reliquarum autem ZB quidem maiorem quam $Z\Gamma$; et $Z\Gamma$ quam ZH .

Iungantur enim BE , ΓE , HE .

Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt (I. 20.) erunt EB , EZ maiores, quam BZ . Est autem AE aequalis BE (I. Def. 15.); ergo BE , EZ aequales sunt ipsi AZ ; maior igitur est AZ quam BZ . Rursus, quoniam BE aequalis est ΓE , communis autem ZE , duae BE ; EZ duabus ΓE , EZ aequales sunt. Sed et angulus BEZ angulo ΓEZ

utriusque circuli a centro aequaliter distant ac punctum illud commune (I. Def. 15.). Quare omnia puncta communia erunt utrique circulo, neque iam duo, sed unus circulus descriptus erit, quod est contra hypothesin. Hinc consequitur, si duo circuli se invicem secant, vel contingant, vel, ut generalius enunciemus, punctum aliquod commune habeant, ipsorum idem centrum non esse. (Apollonii de Taction. quae super-

μείζων βάσις ἄρα ἡ BZ βάσεως τῆς FZ μείζων ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ FZ τῆς HZ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ HZ , ZE τῆς EH μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ EH τῇ EA · αἱ ἄρα HZ , ZE τῆς EA μείζονες εἰσιν. Κοινὴ ἀφηρησθῶ ἡ EZ · λοιπὴ ἄρα ἡ HZ λοιπῆς τῆς ZA μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ZA , ἐλαχίστη δὲ ἡ ZA · μείζων δὲ ἡ μὲν ZB τῆς $ZΓ$, ἡ δὲ $ZΓ$ τῆς ZH .

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπessοῦνται πρὸς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς ZA ἐλαχίστης. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ E , τῇ ὑπὸ HEZ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ZEΘ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ZΘ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ HE τῇ $EΘ$, κοινὴ δὲ ἡ EZ , δὴ δὴ αἱ HE , EZ θυσὶ ταῖς $ΘE$, EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ $ΘEZ$ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ZH βάσει τῇ $ZΘ$ ἴση ἐστίν. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ZH ἄλλη ἴση οὐ προσπessεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Z σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ZK . Καὶ ἐπεὶ ἡ ZK τῇ ZH ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ $ZΘ$ τῇ ZH · καὶ ἡ ZK ἄρα τῇ $ΘZ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἡ καὶ οὕτως. Ἐπεξεύχθω ἡ EK . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ HE τῇ EK , κοινὴ δὲ ἡ EZ , καὶ βάσεις ἡ

sunt. Gothae 1795. Lemm. A. p. 39.) Austin. observat, propositionem III. 6. manifesto etiam locum habere, quum duo circuli se extra contingant, neque itaque restringendam fuisse ad eum casum, quo se intus contingant, et deinde Prop. 5. et 6. una demonstratione comprehendit. Quod tamen observationem illam attinet, iam Clavius monuit, Euclidem proposuisse

maior; basis igitur BZ basi FZ maior est (l. 24.).
Ex eadem ratione et FZ maior est quam HZ .

Rursus quoniam HZ , ZE maiores sunt quam EH , aequalis autem EH ipsi EA ; erunt HZ , ZE maiores quam EA . Communis auferatur EZ ; reliqua igitur HZ reliqua ZA maior est. Maxima igitur ZA , minima vero ZA ; maior autem ZB quam ZF , et ZF quam ZH .

Dico et a puncto Z duas tantum aequales cadere in circulum $AB\Gamma A$, ex utraque parte minimae ZA . Constituatur enim (l. 23.) ad rectam EZ , et ad punctum in ea E , angulo HEZ aequalis $ZE\Theta$, et iungatur $Z\Theta$. Quoniam igitur HE aequalis est $E\Theta$, communis autem EZ , duae HE , EZ duabus ΘE , EZ aequales sunt; et angulus HEZ angulo ΘEZ aequalis; basis igitur ZH basi $Z\Theta$ aequalis est (l. 4.). Dico autem ipsi ZH aliam aequalem non cadere in circulum a puncto Z . Si enim fieri potest, cadat ZK . Et quoniam ZK aequalis est ZH , sed et $Z\Theta$ ipsi ZH ; et ZK igitur ipsi ΘZ est aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum remotiori, quod fieri nequit.

Vel et hoc modo. Iungatur EK . Et quoniam HE aequalis est EK , communis autem EZ , et basis ZH

hoc theorema de circulis duntaxat intus se contingentibus, quoniam circulorum extra se contingentium idem centrum esse non posse manifestum sit.

PROPOSITIO VII.

Obs. Duas, ex utraque parte minimae, aequales esse, Euclides ait, eas nempe, quae aequales angulos efficiunt cum

ZH βάσει τῇ ZK ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ KEZ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ HEZ τῇ ὑπὸ $ZEΘ$ ἐστίν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ $ZEΘ$ ἄρα τῇ ὑπὸ KEZ ἐστίν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἰδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἑτέρα τις προσπτεύεται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ HZ · μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἡ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεαί τι-
νες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς
ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσ-
πιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ
κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ
κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ· τῶν δὲ πρὸς τὴν
κυρτήν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη
μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέ-
τρου· τῶν δὲ ἄλλων, αἰ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς
ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ
σημείου προσπτεοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρᾳ
τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ τοῦ $ABΓ$ εἰληφθῶ τι
σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ , (καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐ-
θεαί τινες πρὸς τὸν κύκλον ¹⁾) αἱ ΔA , ΔE , ΔZ , $\Delta Γ$,
ἔστω δὲ ἡ ΔA διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τῶν μὲν

1) Verba: πρὸς τὸν κύκλον, quas Peyrard. cum Cod. a. omittit, ex edd. Oxon. et Basil. restituiimus.

minima. Nempe in $\triangle \Delta EZΘ$, EZH est (I. 14.) angulus $EZH = EZH$, adeoque et $\Delta ZΘ = \Delta ZH$ (I. 13.). Caeterum ex hac etiam propositione consequitur, quod iam III. 1. Cor. 2. deduximus, circulum non nisi unum centrum habere.

basi ZK aequalis; angulus igitur HEZ angulo KEZ aequalis est (I. 8.). Sed HEZ angulo $ZE\theta$ est aequalis; et $ZE\theta$ igitur angulo KEZ est aequalis, minor maiori, quod fieri non potest. Quare a puncto Z non cadet alia recta in circulum aequalis ipsi HZ ; una igitur sola. Si igitur circuli etc.

PROPOSITIO VIII. (Fig. 214_b)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ab ipso [autem puncto ad circulum ducantur rectae quaedam, quarum una per centrum, reliquae autem utcunque; earum quidem, quae ad concavam circumferentiam cadunt, rectarum maxima est quae per centrum; reliquarum autem, semper propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit; earum vero, quae in in convexam circumferentiam cadunt, rectarum, minima est quae inter punctum et diametrum; reliquarum autem, semper propinquior minimae remotiore est minor. Binae autem tantum aequales a puncto cadent in circulum, ex utraque parte minimae.

Sit circulus $AB\Gamma$, et extra ipsum sumatur punctum aliquod Δ , et ab eo ducantur ad circulum rectae quaedam ΔA , ΔE , ΔZ , $\Delta \Gamma$, sit autem ΔA per centrum; dico earum quidem, quae in $AEZ\Gamma$ conca-

Cor. Nullum itaque intra circulum punctum est, praeter centrum, a quo plures, quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

PROPOSITIO VIII.

Obs. 1. Quenam circumferentiae pars concava, quanam convexa sit, hic ut vulgo notum supponitur, et desinitur

πρὸς τὴν AEZΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν
 εὐθειῶν μέγιστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ AA .
 αἰ δὲ ἡ ἑγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον
 μείζων ἐστὶ, ἡ μὲν AE τῆς AZ , ἡ δὲ AZ τῆς AG .
 τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘAKH κυρτὴν περιφέρειαν προσ-
 πιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ AH , ἡ μεταξὺ
 τοῦ σημείου A καὶ τῆς διαμέτρου AH . αἰ δὲ ἡ
 ἑγγιον τῆς AH ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον,
 ἡ μὲν AK τῆς AA , ἡ δὲ AA τῆς AO .

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου, καὶ
 ἔστω τὸ M . καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ME , MZ , MG ,
 MK , MA , MO .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AM τῇ EM , κοινὴ προσ-
 κείσθω ἡ MA . ἡ ἄρα AA ἴση ἐστὶ ταῖς EM , MA .
 Αἱ δὲ EM , MA τῆς EA μείζονες εἰσι καὶ ἡ AA
 ἄρα τῆς EA μείζων ἐστίν. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ
 EM τῇ ZM , κοινὴ προσκείσθω ἡ MZ , αἱ EM , MZ
 ἄρα ταῖς ZM , MZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EMA
 γωνίας τῆς ὑπὸ ZMA μείζων ἐστίν. Βάσις ἄρα ἡ
 EA βάσεως τῆς ZA μείζων ἐστίν. Ὅμοίως δὲ δεῖ-
 ζομεν, ὅτι καὶ ἡ ZA τῆς GA μείζων ἐστὶ μέγιστη
 μὲν ἄρα ἡ AA , μείζων δὲ ἡ μὲν AE τῆς AZ , ἡ δὲ
 AZ τῆς AG .

Καὶ ἐπεὶ αἱ MK , KA τῆς MA μείζονες εἰσιν,
 ἴση δὲ ἡ MH τῇ MK , λοιπὴ ἄρα ἡ KA λοιπῆς τῆς
 HA μείζων ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ AH τῆς AK ἐλάσσων
 ἐστίν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ
 MAA ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευρῶν τῆς MA , δύο εὐθεῖαι
 ἐντὸς συνεστήθησαν, αἱ MK , KA , αἱ ἄρα MK ,

utriusque terminas demum post III. 17. exhiberi potest. Cae-
 terum omnis mentio concavae aut convexae circumferentiae
 partis evitari poterat in hunc fere modum: Si e puncto aliquo

vam circumferentiam cadunt, rectorum maximam esse AA , quae per centrum; semper autem propinquior ei quae per centrum remotiore maior erit, nempe AE maior quam AZ , et AZ quam AF ; earum autem, quae in ΘAKH convexam circumferentiam cadunt, rectorum, minima quidem AH , quae inter punctum A et diametrum AH ; semper autem propinquior ipsi AH minimae minor est remotiore, AK quidem minor quam AA , et AA quam $A\Theta$.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et sit M ; et iungantur ME , MZ , MF , MK , MA , $M\Theta$.

Et quoniam aequalis est AM ipsi EM (I. Def. 15.), communis addatur MA ; ergo AA aequalis est ipsis EM , MA . Sed EM , MA ipsa EA maiores sunt (I. 20.); et AA igitur ipsa EA maior est. Rursus, quoniam aequalis est EM ipsi ZM , communis addatur MA ; ergo EM , MA ipsis ZM , MA aequales sunt, et angulus EMA angulo ZMA maior est. Basis igitur EA basi ZA maior est (I. 24.). Similiter autem ostendemus, et ZA ipsa FA maiorem esse; maxima igitur est AA , maior vero AE quam AZ , et AZ quam AF .

Et quoniam MK , KA maiores sunt quam MA (I. 20.), et MH aequalis MK , reliqua igitur KA reliqua HA maior est; quare et AH minor est quam AK ; minima igitur est. Et quoniam super trianguli MAA uno latere MA , duae rectae intus constituuntur; MK , KA igitur ipsis MA , AA minores sunt (I.

A extra circulum posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una MA per centrum; ea, quae per centrum producta est, usquedum iterum cum circulo conveniat, nempe

$K\Delta^1)$ τῶν MA , AA ἐλάττωτες εἰσιν ἴση δὲ ἡ MK τῇ MA . λοιπὴ ἄρα ἡ AK λοιπῆς τῆς AA ἐλάττων ἐστίν. Ὀμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ AA τῆς AO ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ AH , ἐλάττων δὲ ἡ μὲν AK τῆς AA , ἡ δὲ AA τῆς AO .

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ A σημείου ἡροπεσοῦνται²⁾ πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκατέρα τῆς AH ἐλαχίστης. Συνεστάτω πρὸς τῇ MA εὐθεία, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ M , τῇ ὑπὸ KMA γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ AMB , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ MK τῇ MB , κοινὴ δὲ ἡ MA , δύο δὲ αἱ KM , MA , δυοὶ ταῖς BM , MA ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KMA γωνία τῇ ὑπὸ BMA ἴση· βάσις ἄρα ἡ AK βάσει τῇ AB ἴση ἐστίν. Λέγω δὲ ὅτι τῇ AK εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπιπτει πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ A σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ AN . Ἐπεὶ οὖν ἡ AK τῇ AN ἐστίν ἴση, ἀλλ' ἡ AK τῇ AB

1) Pro: αἱ ἄρα MK , $K\Delta$ Peyrard. e Cod. a habet tantum ἄρα. Nos ea verba ex edd. Oxon. et Basil. restituimus, ut etiam Peyrard. in versione latina et gallica habet.

2) Lectio haec *προσπεσοῦνται*, quam e Cod. a. habet Peyrardus, praeferenda omnino videtur alteri *συμπεσοῦνται*, quam habent edd. Oxon. et Basil.

AA , erit omnium maxima, ea autem eius pars AH , quae ad punctum H inter A et centrum intermedium ducitur, omnium minima; reliquarum autem semper ea maior erit, ad cuius intersectionem cum circulo recta e centro M ducta angulum cum recta MA maiorem efficit, quam ea, ad cuius intersectionis punctum recta e centro ducta minorem cum MA angulum efficit, et ad utrasque rectae MA partes binae tantum aequales erunt.

Cor. Neque extra circulum igitur ullum punctum est,

21.); aequalis autem MK ipsi MA ; reliqua igitur AK reliqua, AA minor est. Similiter autem ostendemus et AA minorem esse quam $A\theta$; minima igitur est AH , minor vero AK quam AA , et AA quam $A\theta$.

Dico et duas tantum aequales a puncto A cadere in circulum, ex utraque parte ipsius AH minimae. Constituaturs ad MA rectam, et ad punctum in ea M , ipsi KMA angulo aequalis angulus AMB (I. 23.), et iungatur AB . Et quoniam aequalis est MK ipsi MB , communis autem MA , duae KM , MA duabus BM , MA aequales sunt, utraque utrique, et angulus KMA angulo BMA aequalis; basis igitur AK basi AB aequalis est (I. 4.). Dico autem ipsi AK rectae aliam aequalem non cadere in circulum a puncto A . Si enim fieri potest, cadat, et sit AN . Quoniam igitur AK ipsi AN est aequalis, sed AK ipsi AB est aequalis; et AB igitur ipsi AN , propinquior minimae AH

a quo plures quam binae rectae aequales ad circumferentiam circuli duci possunt.

Obs. 2. Consideratis hac ratione in Prop. 7. 8. punctis, quae vel extra vel intra circulum posita sunt, necessario occurrunt etiam puncta, quae in ipsa circumferentia sita sunt. In his idem fere obtinet, quod in Prop. 8. et 7. Nempe, si e puncto aliquo in ipsa circuli circumferentia posito plures rectae in circulum ducantur, quarum una per centrum transeat, haec quidem omnium maxima erit; reliquarum autem ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro maiorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est, maior semper erit, quam ea, ad cuius intersectionem cum circulo ducta recta e centro minorem angulum efficit cum ea, quae a dato puncto ad centrum ducta est. Et e duabus puncti dati partibus binae tantum rectae aequales ad circulum duci possunt.

ἔστιν ἴση καὶ ἡ $ΔΒ$ ἄρα τῇ $ΔΝ$ ἔστιν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς $ΔΗ$ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερόν ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον εἰδείχθη.

Ἡ καὶ ἄλλως. Ἐπεξεύχθω ἡ MN . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ KM τῇ MN , κοινὴ δὲ ἡ MA , καὶ βάσεις ἡ $ΔK$ βάσει τῇ $ΔΝ$ ἴση γωνία ἄρα ἡ ἀπὸ KMA γωνία τῇ ὑπὸ NMA ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ KMA τῇ ὑπὸ BMA ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ BMA ἄρα τῇ ὑπὸ NMA ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττω τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου ἐφ' ἑκατέρᾳ τῆς $ΔΗ$ ἐλαχίστης προσπесοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Quod eodem modo demonstratur ac III. 8. Hanc propositionem septimae huius libri subiungit Commandinus, qui eam quoque demonstravit in commentario in propositionem octavam libri Archimedis de spirilibus, pariterque eam affert van Swinden Anfangsgründe der Messkunde.

Cor. Nec in ipsa igitur circumferentia, adeoque generatim nusquam in eo plano, in quo circulus descriptus est, praeter centrum, datur punctum, e quo plures, quam binae rectae aequales ad circulum duci possunt. Binas autem in omnibus his propositionibus dicere maluimus, quam duas, quod ut Candalla monuit, sensus enunciati ita iustius exprimitur. Caeterum, quod modo de puncto in ipsa circuli circumferentia posito diximus, ad idem fere redit, quod infra

remotiore est aequalis, quod fieri non posse ostensum est.

Vel et aliter. Iungatur MN . Quoniam aequalis est KM ipsi MN , communis autem MA , et basis AK basi AN aequalis; angulus igitur KMA angulo NMA aequalis est (I. 8.). Sed KMA ipsi BMA est aequalis; et BMA igitur ipsi NMA est aequalis, minor maiori, quod fieri nequit. Non igitur plures quam duae aequales in circulum ABT a puncto A ex utraque parte minimae AH cadent. Si igitur extra circulum etc.

PROPOSITIO IX. (Fig. 215.)

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, ab eo autem puncto in circulum cadant plures quam duae rectae aequales, sumptum punctum centrum est circuli.

III. 15. dicetur, nisi quod in III. 15. non de rectis tantum sermo est, quae ex eodem omnes puncto exeunt. Omnes tres propositiones, nempe III. 7. III. 8. eamque, quam Obs. 2. subiunximus, uno enunciato complectitur (quod facile fieri posse perspicuum est). Thom. Simpson. Elem. of Geometry Lond. 1800. p. 45. et Gilbert. p. 153. Quae porro Austin. de his propositionibus monet, dicemus ad Prop. 9.

Obs. 3. Facile patet, conversam quoque propositionum 7. 8. eiusque, quam Obs. 2. habuimus, locum habere. Nempe, si e puncto aliquo in circuli plano posito, quod non sit centrum, ducantur plures rectae ad circulum, sitque una omnium maxima, erit in hac circuli centrum: ea vero, quae omnium minima est, erit, si punctum illud intra circulum fuerit, in

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν $ABΓ$ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔA , ΔB , $\Delta Γ$. λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ AB , $BΓ$, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ E , Z σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ EA , $ZΔ$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ K , H , Λ , Θ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ἴση ἡ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ ἡ EA . δύο δὴ αἱ AE , EA δυοὶ ταῖς BE , EA ἴσαι εἰσὶ καὶ βάσις ἡ ΔA βάσει τῇ ΔB ἴση γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AEA γωνία τῇ ὑπὸ BEA ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AEA , BEA γωνιῶν ἡ HK ἄρα τὴν AB δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθειάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἐστὶ τὸ κέν-

directum ei, quae per centrum transit, ex parte puncti opposita; si vero punctum extra circulum fuerit, ea, quae omnium minima est, erit pars eius, quae per centrum transit, extra circulum sita (si punctum in ipsa circuli circumferentia fuerit, nulla flabitur omnium minima): omnibus porro casibus ea, quae maior est altera, circulum ita secabit, ut recta e centro ad punctum intersectionis maioris illius rectae et circuli ducta maiorem efficiat angulum cum recta e puncto ad centrum ducta, quam ea, quae e centro ad punctum intersectionis minoris cum circulo ducitur, efficit cum recta e puncto ad centrum ducta; denique binae rectae aequales e puncto ad circulum ductae puncta intersectionis cum circulo ita posita habebunt, ut rectae ad haec puncta e centro ductae aequales utrimque angulos efficiant cum ea, quae a puncto ad centrum ducitur. Quod facile sumto contrario evincitur. Conversam hanc, quatenus respicit III. 7., habet Clavius.

Sit circulus $AB\Gamma$, intra autem ipsum punctum A , et a A in circulum $AB\Gamma$ cadant plures quam duae rectae aequales AA , AB , $A\Gamma$; dico punctum A centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Iungantur enim AB , $B\Gamma$, et secentur bifariam in punctis E , Z (I. 10.), et iunctae EA , ZA producantur ad K , H , A , Θ puncta.

Quoniam igitur AE est aequalis EB , communis autem EA , duae AE , EA duabus BE , EA aequales sunt; et basis AA basi AB aequalis; angulus igitur AEA angulo BEA aequalis est (I. 8.); rectus igitur uterque angulorum AEA , BEA (I. Def. 10.). HK igitur AB bifariam secans et ad angulos rectos ipsam secat. Et quoniam, si in circulo aliqua recta rectam aliquam bifariam et ad rectos angulos secet, centrum circuli est in secante (III. 1. Cor.); erit in HK cen-

PROPOSITIO IX.

Obs. Haec propositio facillime consequitur ex III. 7. Cor. vel generalius etiam, nulla positionis puncti intra circulum mentione facta, ope III. 8. Obs. 2. Cor. ita, ut nulla alia demonstratione opus foret. Atque ita Borellius rem expedit (Euclid. restitut. 1658. p. 72.). Caeterum debebat in demonstratione priore hic allata, si omnia iusto rigore persequi velis, distingui is casus, quo rectarum AB , BI' (Fig. 215.) alterutra per punctum A transit. Et, quum praeterea in hac demonstratione sumatur, quod apud Euclidem neque inter axiomata deprehendimus, nec alias demonstratum videmus (quo tamen etiam utitur in demonstratione priore Prop. 10.) duas rectas nonnisi unum punctum commune habere, suspicari forte liceat, spuriam esse, quae primo loco habetur, demonstrationem. Editorum nonnulli priorem, nonnulli posteriorem demonstrationem omittunt. Priorem omittunt Tacquet,

τρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘA ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ HK , ΘA εὐθεῖαι, ἥ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \ A \ A \ \Omega \ \Sigma$

Κύκλου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ , ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον προσπιπτέ-
ωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔA , ΔB , $\Delta \Gamma$.
λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ
 $AB\Gamma$ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ E , καὶ ἐπι-
ζευχθεῖσα ἡ ΔE διήχθω ἐπὶ τὰ Z , H σημεία, ἡ
 ZH ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ἐπεὶ
οὖν κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐπὶ τῆς ZH διαμέτρου εἰλη-
πταί τι σημεῖον τὸ Δ , ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου,
μεγίστη μὲν ἐστὶ ἡ ΔH , μείζων δὲ ἡ μὲν $\Delta \Gamma$
τῆς ΔB , ἡ δὲ ΔB τῆς ΔA . Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ E κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$

Rob. Simson., Playfair., posteriorem Campanus, Ambros. Rhodius, Ontius Fineus, Candalla, Giordano da Bitonto, Fournier, Hauff in Vers. German. Austin. monet, propositionem 9. adeo facile deduci e septima, ut credi vix possit, Euclidem id non animadvertisse. Recentiores quosdam geometras reapse in posteriore 9. demonstratione, quae priori omnino praeferenda videatur, usos esse 7. At quum Euclides pse, ad quem nempe priorem demonstrationem 9. referendam putat, 7. neque hic, neque alibi unquam utatur, nec 8. ullus usus sit apud Euclidem, quum praeterea theoria circuli etiam sine 7. et 8. perfectus esse videatur, quoad rectas ad circulum ductas propositionibus III. 14. III. 15. III. 35. et III. 36.

trum circuli $AB\Gamma$. Ex eadem ratione et in ΘA est centrum circuli $AB\Gamma$. Et nullum aliud commune habent rectae HK , ΘA quam punctum Δ ; circuli $AB\Gamma$ punctum igitur Δ centrum est. Si igitur circuli etc.

A L I T E R. (Fig. 216.)

Intra enim circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum Δ , a Δ autem in $AB\Gamma$ circulum cadant plures quam duae rectae aequales, ΔA , ΔB , $\Delta \Gamma$; dico sumptum punctum Δ centrum esse circuli $AB\Gamma$.

Non enim, sed si fieri possit, sit E , et iuncta ΔE producat in puncta Z , H ; ergo ZH diameter est circuli $AB\Gamma$. Quoniam igitur in diametro ZH circuli $AB\Gamma$ sumptum est aliquod punctum Δ , quod non est centrum circuli, maxima quidem erit ΔH , maior vero $\Delta \Gamma$ quam ΔB , et ΔB quam ΔA (III. 7.). Sed et aequalis, quod fieri nequit; non est igitur E centrum circuli $AB\Gamma$. Similiter autem ostendemus,

7. et 8. serius saltim inventum eius auctoris videri, qui propositionis 9. demonstrationem posteriorem addiderit. Obiici quidem posse, in Theodosii Sphaericis adhiberi has propositiones, et similia nonnulla de sphaeris demonstrari, at quum Theodosium tribus fere seculis post Euclidem vixisse perhibeant, ab illo quippe ab auctoris elementorum aevo nimis alieno non addisci posse, quatenus ab initio huius operis forma fuerit. Quae quamvis satis speciose dicta sint, pro certis tamen et indubitatis sumi posse non videntur, quum nondum evictum sit, posteriorem Prop. 9. demonstrationem non esse Euclidis, et propositiones 7. et 8., si non ad demonstrandas propositiones sequentes, certe tamen ad plenioram

κύκλου, Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ A τὸ A ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $AB\Gamma$ κύκλον τὸν ΔEZ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ B, H, Θ ¹⁾ καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $B\Theta, BH$ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ K, Λ σημεία καὶ ἀπὸ τῶν K, Λ ταῖς $B\Theta, BH$ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ $K\Gamma, \Lambda M$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ A, E σημεία.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ $AB\Gamma$ εὐθεῖά τις ἢ AG εὐθεῖάν τινα τὴν $B\Theta$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς AG ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ $AB\Gamma$ εὐθεῖά τις ἢ $N\Xi$ εὐθεῖάν τινα τὴν BH δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $N\Xi$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς AG , καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ $AG, N\Xi$ εὐθεῖαι ἀλλήλαις

1) Editio Parisiensis, nulla exhibita Cod. auctoritate, ad exemplum tamen ed. Basil. ponit B, H, Z, Θ . At, quum ostendendum sit, ne tria quidem puncta duobus circulis posse esse communia, restituendam omnino putavimus lectionem ed. Oxon.

accuratioremque circuli theoriam omnino pertinere videantur, cuius rei exempla etiam infra ad Prop. 11. videbimus.

PROPOSITIO X.

Huius quoque propositionis, quae generalius adhuc ita exprimi, et eadem ratione demonstrari poterat: circulus cum alio circulo non plures quam duo puncta communia habere

neque aliud praeter A ; ergo punctum A centrum est circuli $AB\Gamma$.

PROPOSITIO X. (Fig. 217.)

Circulus circulum non secatur in pluribus punctis quam duobus.

Si enim fieri potest, circulus $AB\Gamma$ circulum AEZ secet in pluribus punctis quam duobus, B , H , Θ , et iunctae $B\Theta$, BH bifariam secantur in punctis K , A (I. 10.); et ab ipsis K , A ipsis $B\Theta$, BH ad rectos angulos ductae $K\Gamma$, AM (I. 11.) producantur in puncta A , E .

Quoniam igitur in circulo $AB\Gamma$ recta aliqua $A\Gamma$ rectam aliquam $B\Theta$ bifariam et ad rectos secatur, in $A\Gamma$ erit centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1. Cor. 1.). Rursum, quoniam in eodem circulo $AB\Gamma$ recta aliqua $N\Xi$ rectam aliquam BH bifariam et ad rectos secatur, in $N\Xi$ centrum est circuli $AB\Gamma$ (III. 1. Cor. 1.). Ostensum autem ipsum esse et in $A\Gamma$, et in nullo puncto conveniunt rectae $A\Gamma$, $N\Xi$ inter se praeterquam in

potest (in quo enunciato illud etiam continetur, circulos se invicem contingentes certe non plura quam duo puncta communia habere) in textu graeco duae sunt demonstrationes. In priore illud desiderari possit, quod non satis accurate demonstratum sit, rectas, quae in punctis bisectionis rectis ex hyp. utrique circulo inscriptis ad angulos rectos ducantur, sibi invicem in puncto aliquo et quidem unico occurrere, qui defectus tamen facile expleri potest ope I. Ax. 11. et I. Ax. 10. a et I. Ax. 12. Demonstratio posterior sumit sine ratione, punctum, quod pro centro unius circuli sumtum fuit, esse intra alterum circulum. Neque tamen necesse est hoc sumere,

ἡ κατὰ τὸ O τὸ O ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὅμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ O · δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν $ABΓ$, $ΔΕΖ$, τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ O , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

Α Α Α Ω Σ.

Κύκλος γάρ πάλιν ὁ $ABΓ$ κύκλον τὸν $ΔΕΖ$ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ B , H , Z , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου τὸ K , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KB , KH , KZ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ΔΕΖ$ εἰληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ K , καὶ ἀπὸ τοῦ K πρὸς τὸν $ΔΕΖ$ κύκλον προσπεπτώκασι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ KB , KZ , KH · τὸ K ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΔΕΖ$ κύκλου. Ἔστι δὲ καὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου κέντρον τὸ K · δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ K , ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἐξῆς.

si praemissis propositionibus III. 7. III. 8. et ea, quae Obs. 2. ad III. 8. continetur, propositionem III. 9. generalius exprimas de puncto quocunque etiam non intra circulum posito. Atque ita propositiones III. 7. III. 8. et III. 8. Obs. 2. necessariae forent ad demonstrationem posteriorem III. propositionis 10. perficiendam. Etiam hic alii editores omittunt demonstrationem priorem v. c. Orontius Fineus, Borellius, Tacquet, Coëtsius, Giordano da Bitonto, Fournier, Rob. Simson., Playfair., alii posteriorem, v. c. Campanus, Candalla, Tartalea, Ambros. Rhodius, Hauff deutsche Uebersetz., Lorenz deutsche Uebersetz. 3te Ausg. 1809. Caeterum sequentia adhuc ex hac propositione et maxime ex demonstratione priore perficienda ante ut diximus, corollaria derivari possunt:

O ; ergo O punctum centrum est circuli ABF . Similiter autem ostendemus, et circuli ΔEZ centrum esse O ; duorum igitur circulorum sese secantium ABF , ΔEZ , idem erit centrum O , quod fieri nequit (III. 5.). Circulus igitur non etc.

ALITER. (Fig. 218.)

Circulus enim rursus ABF circulum ΔEZ secet in pluribus punctis quam duobus, B , H , Z , et sumatur centrum circuli ABF , K , et iungantur KB , KH , KZ .

Quoniam igitur intra circulum ΔEZ sumptum est aliquod punctum K , et a K in circulum ΔEZ incidunt plures quam duae rectae aequales, KB , KZ , KH ; ergo punctum K centrum est circuli ΔEZ (III. 9.). Est autem K et circuli ABF centrum; duorum igitur circulorum sese secantium idem centrum est K , quod fieri nequit (III. 5.). Non igitur circulus etc.

Cor. 1. Per tria puncta non in eadem recta posita circulus describi potest, invento nempe illius centro eadem, quae prior demonstratio utitur, ratione, et tribus itaque punctis datis omnimode determinatur circulus, qui per ea transit.

Cor. 2. Recta, quae duo puncta, quibus duo circuli se secant, iungit, non per utriusque circuli centrum transit, vel non est utriusque circuli diameter. Quodsi enim esset diameter utriusque circuli, vel idem centrum esset utrique circulo, quod fieri nequit (III. 5.) vel recta haec in duobus punctis bisecaretur, quod pariter fieri non potest (I. Ax. 9.) Cf. Pfleiderer.

Cor. 3. Quae rectam puncta intersectionis circulorum se secantium iungentem, sive haec per centrum unius circuli

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεία ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν, πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $A\Delta E$ ἐφαπτόσθωσαν ¹⁾ ἀλλήλων ἐντός κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $AB\Gamma$ κύκλου κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $A\Delta E$ τὸ H . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεία ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ A σημεῖον πεσεῖται.

1) ἐφαπτόσθωσαν e Cod. a. ponit Peyrardus pro simplici ἀπτόσθωσαν, quod est in edd. Oxon. et Basil. Cf. quae diximus ad Def. 2. huius libri.

transeat, sive non, bifariam secatur recta, eique ad angulos rectos insistit, per centra duorum circulorum transit, et vice versa. Cf. Pfeiderer.

COR. 4. Distantia centrorum duorum circulorum, qui se intersecant, minor est summa radiorum eorum (I. 20.); et quod pariter ex I. 20. consequitur, si radii inaequales sint, distantia centrorum maior est differentia radiorum eorum; et is radius, qui altero maior est, minor est summa alterius radii et distantiae centrorum. Semper nempe triangulum effici debet inter utrumque centrum et punctum sectionis circulorum. Cf. Pfeiderer.

ΠΡΟΠΟΣΙΤΙΟ XI.

Obs. 1. In huius propositionis enunciatione distinctius dicendum erat, quo sensu vox ἐκβαλλομένη sumpta sit. Illud nempe volebat auctor, ut e demonstratione utraque patet, rectam, quae centra utriusque circuli coniungit, productam ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris, in contactum, vel potius in illud ipsum punctum cadere, in quo duo circuli se contingere sumebantur. Hac demum ratione, accu-

PROPOSITIO XI. (Fig. 219.)

Si duo circuli sese intus contingant, et sumantur eorum centra, recta centra eorum coniungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ sese contingant intus in puncto A , et sumatur circuli quidem $AB\Gamma$ centrum Z , circuli autem $A\Delta E$ centrum H ; dico rectam ab H ad Z ductam, si producat in punctum A cadere.

ratius sensu enunciati determinato, patet, cur in figura punctum H centrum nempe circuli minoris vel interioris sumtum sit ex ea parte puncti Z centri circuli maioris, vel alterum comprehendentis, e qua sunt puncta A , Θ , in quibus recta ZH circulos in demonstratione secare sumitur. Dixi, unum circulorum necessario alterum comprehendere, adeoque maiorem esse altero. Quamvis enim in iis, quae ad III. 3. Def. observata sunt, duos circulos intus se in puncto aliquo contingere dixerimus, si ea saltem puncta unius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint intra alterum circulum (adeoque ea puncta alterius circuli, quae isti puncto proxima sunt, ex utraque parte posita sint extra alterum) ex iis tamen, quae hactenus demonstrata sunt, colligere iam licebit, unum eorum circulorum necessario integrum intra alterum positum esse. Quodsi enim imaginari velis, duos circulos intus se in puncto aliquo contingentes, quorum tamen neuter intra alterum comprehendatur, necessario is, cuius puncta puncto A proxima intra alterum posita sint, extra hunc exire, et deinde per aliud eius punctum, vel per idem punctum iterum intra circulum redire deberet. At, si sumere velis, posse esse (Fig. 220.) circulum $AB\Gamma$, qui alterum $AB\Gamma E$ intus contingat, et in B extra hunc exeat versus A , in E vero intra eum redeat, duo hi circuli plura

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ $ZH\Theta$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , AH .

Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HZ τῆς ZA τοῦτ' ἔστι τῆς $Z\Theta$, (ἴση γὰρ ἡ ZA τῇ $Z\Theta$, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω ¹⁾) μείζονες εἰσι, κοινὴ ἀφηγήσθω ἡ ZH λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς $H\Theta$ μείζων ἐστίν. Ἰση δὲ ἡ AH τῇ AH καὶ ἡ HA ἄρα τῆς $H\Theta$ μείζων ἐστίν, ἡ ἐλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ A συναφῆς πεσεῖται ἐπ' αὐτὴν ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \ A \ A \ \Omega \ \Sigma$.

Ἀλλὰ δὲ πιπτέτω ὡς ἡ $HZ\Gamma$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ $HZ\Gamma$ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AH , AZ .

1) Verba uncis inclusa, quae Peyrardus cum Cod. a. omittit, ex edd. Basil. et Oxon. restituimus.)

quam duo puncta communia habebunt, quod fieri nequit, ut in Obs. ad III. 10. monuimus. Sin autem imaginari velis circulum $AB\Delta BA$ (Fig. 221.), qui alterum ABE intus contingat, et tamen extra eum in puncto B egrediatur, per idem punctum B autem intra illum regrediatur, necessario ille Σ -no-
diformis erit, et e duabus figuris vel gyris, una AB , altera $B\Delta$ undequaque clausis, et in puncto B cohaerentibus constabit, in quarum altera v. g. in AB centrum circuli Γ positum erit. Ex centro F ducatur ad punctum aliquod Z alterius gyri recta FZ , quae, quum necessario e gyro AB exire debeat, hunc secabit in puncto aliquo Θ (I. Ax. 13.), eruntque tam $F\Theta$ quam FZ radij circuli, adeoque $F\Theta = FZ$ (Def. I. 15.) pars itaque aequalis toti, quod est absurdum. Quum igitur circulus, qui alterum intus contingit, et cuius itaque

Non enim, sed si fieri potest, cadat ut $ZH\Theta$, et iungantur AZ , AH .

Quoniam igitur AH , HZ recta ZA (I. 20.), hoc est recta $Z\Theta$ maiores sunt (est enim ZA aequalis $Z\Theta$, ambae quippe ex eodem centro), communis auferatur ZH ; reliqua igitur AH reliqua $H\Theta$ maior est. Est autem AH aequalis AH ; HA igitur ipsa $H\Theta$ maior est, minor maiore, quod fieri nequit. Non igitur a Z ad H ducta recta extr. contactum A cadet. Ergo in contactum cadet. Si igitur duo circuli etc.

A L I T E R.

Sed cadat ut $HZ\Gamma$, et producat in directum HTZ ad punctum Θ , et iungantur AH , AZ .

puncta contactui proxima intra hunc continentur, nulla sui parte extra hunc egredi vel eum secare possit, consequitur, illum circulum prorsus ab hoc comprehendere, vel integrum intra eum situm esse, adeoque minorem esse circulo comprehendente. Unde et radius circuli comprehensi minor erit radio circuli comprehendentis. (Vid. Obs. ad III. 1. Def. sub finem.) Et illum quidem, qui e duobus se invicem contingentibus circulis radium minorem habet, intra *contingere*, alterum, qui radium maiorem habet, *contingi* dicimus. His praemissis, quae ad omnes scrupulos penitus eximendos necessaria visa sunt, reliqua etiam plenius et accuratius ita expedientur. Si duo circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ (Fig. 222.) se intus contingant in puncto A (adeoque ex III. 6. centra eorum diversa sint), recta, quae centra utriusque circuli coniungit producta ad eam partem, ad quam est centrum circuli interioris, in illud ipsum punctum A cadet, in quo duo illi circuli se contingunt. Sit enim H centrum circuli interioris

Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HZ μείζους εἰσὶ τῆς AZ , ἀλλὰ ἡ ZA ἴση ἐστὶ τῇ $ZΓ$, τοῦτ' ἔστι τῇ $ZΘ$, κοινὴ ἀφαιρήσθω ἡ ZH . λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν, τοῦτ' ἔστιν ἡ HA τῆς $HΘ$, ἡ ἐλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὀμοίως, καὶ ἐκτὸς ἡ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἀτοπον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ¹⁾ ἀλλήλων ἐκτὸς, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

1) ἐφάπτονται c Cod. a. ponit Peyrardus pro simplici ἄπτονται., quod est in edd. Oxon. et Basil. Cf. III. 11. Prop.

(minoris), Z centrum circuli exterioris vel maioris. Iam, si punctum contactus A non sit in recta ZH ultra H producta, erit aut in recta ZH ultra Z producta, aut extra rectam ZH . Sit 1) si fieri potest, punctum A in recta ZH ultra centrum circuli maioris Z producta, eritque $HA = HZ + ZA$, adeoque $HA > ZA$. At ex hypoth. Z est centrum circuli maioris, vel (vid. Obs. ad III. 1. Def.) est $ZA > HA$. Absurdum igitur est, esse simul $HA > ZA$. Sit 2) punctum A extra rectam ZH positum. Recta ZH ultra H producta necessario cum utroque circulo conveniet (I. Ax. 13.). Conveniet autem cum utroque circulo vel in puncto utrique communi, vel in duobus diversis punctis. Conveniat a) si fieri potest (Fig. 223.) in puncto Θ utrique circulo communi, ductisque ad punctum contactus A rectis HA , ZA , constituetur triangulum HAZ , in quo $AH + HZ > ZA$ (I. 20.) i. e. $> Z\Theta$ (I. Def. 15.), adeoque, demta communi ZH , $AH > H\Theta$. At etiam $AH = H\Theta$ (I. Def. 15.), quod est absurdum. Conveniat b) recta ZH cum circulo exteriori in puncto Θ (Fig. 219.) cum circulo interiori in puncto

Quoniam igitur AH , HZ maiores sunt ipsa AZ (I. 20.), sed ZA aequalis est $Z\Gamma$, hoc est ipsi $Z\Theta$, communis auferatur ZH ; reliqua igitur AH reliqua $H\Theta$ maior est, hoc est HA ipsa $H\Theta$, minor maiore, quod fieri nequit. Similiter, et si extra circulum parvum sit centrum maioris circuli, ostendemus idem absurdum sequi.

PROPOSITIO XII. (Fig. 225.)

Si duo circuli sese extra contingant, recta centra ipsorum coniungens per contactum transibit.

A , et evincetur alterutra earum demonstrationum, quae sunt apud Euclidem, id fieri non posse. (Hec autem consequentia non valeret, nisi ante ostensum fuerit, circulos se intus contingentes non simul se invicem secare posse vel punctum Θ non intra circulum minorem esse posse.) Nequaquam igitur punctum A extra rectam ZH , nec in ipsa recta ZH ex ea huius rectae parte esse potest, qua ultra punctum Z producta est: itaque (quum centra Z , H intra suos quodque circulos, adeoque punctum A , in circumferentia quippe circulorum positum, nec in ipsa ZH inter haec puncta situm esse possit), erit necessario in recta ZH ultra H centrum circuli interioris producta, vel, quod eodem redit, puncta Z , H , A centra nempe et punctum contactus in eadem recta, et quidem eo, quo nominavimus, ordine posita erunt. Aliam casus 2. b. demonstrationem ex III. 7. derivatam habent Peletarius, Billingsley, Borellius, Henrion. Alia porro, quam Coëtsius habet, demonstratio, dubito an efficiat id, quod probandum erat.

Cor. Et quum recta ZH necessario ex utraque parte producta circulos secet (I. Ax. 13.), neutrum autem in pluribus quam duobus punctis secare possit (III. 2. Cor. 1.) ex ea parte, qua ultra H producitur, in uno tantum puncto A eos secare

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $A\Delta E$ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $AB\Gamma$ κύκλου κέντρον, τὸ Z , τοῦ δὲ $A\Delta E$ τὸ H . λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς αἱ $Z\Gamma\Delta H$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZA , AH .

poterit. Quum igitur punctum contactus duorum circularum intus se contingentium positum sit in recta centra eorum coniungente, qua ultra centrum circuli interioris *producta* circularis occurrit, illa autem occurrere circulari ex hac parte non nisi in uno puncto possit, circuli, qui se intus contingunt, non nisi in uno puncto se contingent. Et quum circuli, qui se intus in puncto aliquo contingunt, nec in alio puncto se secare possint, ut supra vidimus, generalius adhuc dici potest, eos non nisi unum punctum commune habere. (Est haec pars propositionis III. 15. facile ita stabilienda, quamvis generalius expressa).

Obs. 2. Ex hac propositione, adiectoque corollario immediate haec etiam eius conversa sequitur: si duo circuli se invicem intus contingunt, recta ex centro unius circuli ad punctum contactus ducta per centrum alterius quoque transit. (Est haec Pappi Lemm. V. ad Apollon. de Taction vel Collect. Mathesi. L. VII. Prop. C. Habet eam quoque Coëtsius in Schol. ad III. 11.)

Obs. 3. Alia porro huius propositionis conversa locum habet: nempe, si duo circuli punctum aliquod A (Fig. 224.) commune habeant, sintque radii eorum ad punctum A vergentes in eadem recta, ex eadem parte puncti illius communis positi: circuli in puncto isto communi intus se contingent. Sint enim centra duorum circularum H , Z , quae non coincident (III. 6. Obs.), sitque Z punctum a puncto A remotius. Ex puncto Z ad punctum aliquod A circuli radio HA descripti ducatur recta ZA , eritque haec recta minor recta ZA (III. 7. III. 8. et Obs. 2. ad III. 8.), adeoque ex Def. 15. punctum A situm

Duo enim circuli $AB\Gamma$, $A\Delta E$ sese contingant extra in puncto A , et sumatur circuli quidem $AB\Gamma$ centrum Z , circuli vero $A\Delta E$ centrum H ; dñco rectam a Z ad H ductam per contactum A transire.

Si enim non, cadat, si fieri potest, ut $Z\Gamma\Delta H$, et iungantur ZA , AH .

erit intra circulum centro Z , radio ZA descriptum. Idem demonstrabitur de puncto quocunque circuli radio HA descripti ex alterutra parte rectae Z, A sumto. Itaque duo isti circuli in puncto A se intus contingent (Obs. ad III. 3. nr. d.). (Est hoc Pappi Lemm. VI. in Apollon. de Taction. vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. CI.)

Cor. Hinc patet ratio describendorum circulorum, qui se invicem intra contingant, et manifestum est, distantiam centrorum in iis aequalem esse differentia radiorum eorum, et vice versa.

PROPOSITIO XII.

Obs. 1. In circulis etiam, qui se extra contingunt (cf. Obs. ad III. 3. Def. nr. b. c.) simili plane ratione ac in propositione praecedente demonstrabitur, eos se invicem nusquam secare posse, vel utrumque integrum extra alterum positum esse. Deinde, si in puncto A se extra contingant, punctum A necessario positum erit in ipsa recta, quae centra utriusque circuli (quae quum uterque circulus integer extra alterum sit, certe diversa erunt) coniungit. Si enim punctum contactus A non positum sit in ipsa hac recta, erit vel in recta utrumque centrum iungente ultra alterutrum centrum producta, vel extra eam. Sit 1) si fieri potest (Fig. 226.) punctum A in recta, quae centrum Z unius circuli (primum vocabimus) ac centrum H alterius circuli (secundum appellabimus) coniungit, ultra secundum v. g. centrum H producta. At, quum uterque circulus integer extra alterum positus sit, recta ZH , antequam

Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ $Z\Gamma$. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $A\Delta E$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AH τῇ HA . Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ $Z\Gamma$ ἴση· αἱ ἄρα ZA , AH ταῖς $Z\Gamma$, HA ἴσαι εἰσὶν ὥστε ὅλη ἡ ZH τῶν ZA , AH μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιξευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται δι' αὐτῆς ἄρα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς ἐφάπτηται, εἴαν τε ἐκτὸς.

secundum circulum intrare possit, primum circulum secabit in puncto aliquo Γ (I. Ax. 13.), adeoque erit $Z\Gamma$ radius primi circuli. At ex hypothesis eadem recta ZH producta in A occurrit puncto utrique circulo communi, adeoque etiam ZA est radius primi circuli. Erit itaque $Z\Gamma = ZA$ (I. Def. 15.) pars toti, quod est absurdum. Punctum itaque A non situm esse potest in recta ZH ultra H producta. Eodemque modo ostenditur, non esse punctum contactus A in recta ZH ultra Z producta. Sit deinde 2) si fieri potest, punctum contactus A extra rectam ZH , rectaque ZH vel utrique circulo in eodem puncto Θ , vel uni quidem in puncto Γ , alteri in puncto A occurrat. Occurrat 1) si fieri potest, utrique circulo (Fig. 227,) in puncto Θ , ductisque ad punctum contactus A rectis ZA , HA , constituetur triangulum ZAH , in quo $ZA + HA > ZH$ (I. 20.). At $ZA = Z\Theta$, et $HA = H\Theta$ (I. Def. 15.) Itaque $Z\Theta + H\Theta = ZA + HA$. i. e. $ZH = ZA + HA$ q. e. a. Occurrat deinde b) recta ZH (Fig. 225.) uni circulo in Γ , alteri in A , et ostendetur, ut apud Euclidem, etiam hoc fieri non posse. Quum igitur punctum contactus neque extra rectam ZH , neque

Quoniam igitur Z punctum centrum est circuli $AB\Gamma$, aequalis est ZA ipsi $Z\Gamma$ (I. Def. 15.). Rursum, quoniam H punctum centrum est circuli $A\Delta E$, aequalis est AH ipsi HA (I. Def. 15.). Ostensa est autem ZA ipsi $Z\Gamma$ aequalis; rectae igitur ZA , AH rectis $Z\Gamma$, AH aequales sunt; quare tota ZH ipsi ZA , AH maior est. Sed et minor (I. 20.), quod fieri nequit. Non igitur recta a Z ad H ducta per contactum A non transibit; per ipsum igitur. Si igitur duo circuli etc.

PROPOSITIO XIII. (Fig. 229.)

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam in uno, sive intus contingat, sive extra.

in ipsa ultra alterutrum centrum producta, nec (ut ex I. 15. Def. patet) in alterutro punctorum Z , H situm esse possit, erit necessario inter puncta Z et H intermedium, vel, quod eodem redit, centra Z , H et punctum contactus A hoc ordine: Z , A , H se invicem subsequuntur. Caeterum Campanus et Peletarius hanc propositionem cum praecedente simul uno eodemque enunciato efferunt, et casus 2., b. aliam adhuc ex III. 8. derivatam demonstrationem habent Peletarius, Billingsley, Borellius, Henrion.

Cor. 1. Et, quum recta ZH necessario ex utraque parte producta alterutrum circulum secet (I. Ax. 13.), neutrum autem in pluribus, quam duobus punctis secare possit (III. 2. Cor. 1.), inter puncta Z et H utrumque in uno tantum puncto A secare poterit. Circuli itaque se extra contingentes non nisi in uno puncto se contingent, et, quum nec in alio puncto se secare possint, unum tantum punctum commune habebunt. (Est haec pars altera III. 13. Prop. generalius expressa.)

Cor. 2. Si duo circuli punctum aliquod commune habeant, quod non sit in recta centra eorum iungente ipsa aut

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλου τοῦ $ΕΒΖΔ$ ἐφαπτιέσθω ¹⁾ πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν, τὰ $Β, Δ$.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $ΑΒΔΓ$ κύκλου κέντρον, τὸ $Η$ · τοῦ δὲ $ΕΒΖΔ$, τὸ $Θ$.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ $Η$ ἐπὶ τὸ $Θ$ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ $Β, Δ$ πεσεῖται. Πιπτεύω ὡς ἡ $ΒΗΘΔ$. Καὶ ἐπεὶ τὸ $Η$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΑΒΔΓ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΗ$ τῇ $ΗΔ$ · μείζων ἄρα ἡ $ΒΗ$ τῆς $ΘΔ$ · πολλῶ ἄρα μείζων ἡ $ΒΘ$ τῆς $ΘΔ$. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ $Θ$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ΕΒΖΔ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΘ$ τῇ $ΘΔ$. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς· καὶ πολλῶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν.

1) Hic quoque e Cod. a. Peyrard. ponit ἐφαπτιέσθω pro simplici ἀπτιέσθω edd. Oxon. et Basil. Casterum figuram huic propositioni adiunximus, qualis fere est in editione Basileensi, textui Graeco melius respondentem, quam quae vulgo habetur.

producta, (circuli hi in isto puncto se invicem secabunt. Si enim se invicem non secant, se contingent. Atqui contingere se non possunt (III. 11. vel III. 12.), ergo secabunt.

Cor. 3. Duo itaque circuli, in quibus distantia centrorum minor est summa radiorum, et si radii inaequales sint, maior differentia radiorum, se invicem secant. Tum nempe (I. 22.) e duobus radiis et recta, quae centrorum distantiam exprimit, triangulum constitui poterit, in quo itaque punctum, in quo radii se intersecant, non erit in recta centra iungente, unde res consequitur ex Cor. praecedente.

Cor. 4. Duo circuli, qui in duobus punctis sibi occurrunt, se invicem secant. Contingere enim se non possunt

Si enim fieri potest, circulus $AB\Gamma$ circulum $EBZA$ contingat primum intus in pluribus punctis quam in uno, in B , A .

Et sumatur ipsius quidem circuli $AB\Gamma$ centrum H (III. 1.); ipsius autem $EBZA$, centrum Θ .

Recta igitur ab H ducta ad Θ in puncta B , A cadet (III. 11.). Cadat ut $BH\Theta A$. Et quoniam punctum H centrum est circuli $AB\Gamma$, aequalis est BH ipsi HA (I. Def. 15.); maior igitur BH ipsa ΘA ; ergo multo maior $B\Theta$ ipsa ΘA . Rursus, quoniam punctum Θ centrum est circuli $EBZA$, aequalis est $B\Theta$ ipsi ΘA (I. Def. 15.) Ostensa est autem ipsa et multo maior, quod fieri nequit; non igitur circulus circulum contingit intus in pluribus punctis quam in uno.

(Cor. ad Obs. 1. III. 11. et Cor. 1. ad Obs. 1. III. 12.). Cf. Pflleiderer.

Obs. 2. Ex hac propositione, adiectoque Cor. 1. immediate etiam haec eius conversa sequitur: si duo circuli se invicem extra contingunt, recta ex centro unius ad punctum contactus ducta, si producatul ultra contactus punctum, per centrum alterius quoque transit. (Est haec Pappi Lemm. III. in Apollon. de Taction. vel Coll. Math. L. VII. Pr. XCVIII.)

Obs. 3. Et huius propositionis alia quoque conversa locum habet. Nempe, si duo circuli punctum aliquod A commune habeant, sintque radii eorum ad hoc punctum vergentes in eadem recta, e diversis puncti illius communis partibus positi: circuli in puncto isto communi extra se contingunt. Sit enim (Fig. 228.) unius circuli diameter AB ac centrum H , alterius diameter AP , centrumque Z . Quum igitur ex hyp. Z situm sit in diametro BA producta, erit (Obs. ad III. 2.) punctum Z extra circulum AP . Unde simili ratione, ac in Obs. 3. ad propositionem praecedentem ex III. 8. demonstratur, rectas

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ΑΓΚ$ κύκλου τοῦ $ΑΒΔΓ$ ἐφαπτέσθω ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν, τὰ $Α$, $Γ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν $ΑΒΔΓ$, $ΑΓΚ$ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ $Α$, $Γ$, ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντός ἑκατέρου πεσεῖται. Ἀλλὰ τοῦ μὲν $ΑΒΔΓ$ ἐντός ἔπεσε, τοῦ δὲ $ΑΓΚ$ ἐκτός, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἐν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΔΓ$, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΓΔ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΔΓ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ $Ε$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ε$ ἐπὶ τὰς $ΑΒ$, $ΓΔ$ καθέτοι ἡχθῶσαν αἱ $ΕΖ$, $ΕΗ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΓΕ$.

ex puncto Z ex utraque parte puncti A ductas ad puncta quaecunque circuli AB maiores esse recta ZA , adeoque puncta quaecunque circuli AB ex utraque parte puncti A sita esse extra circulum $ΑΓ$. Eodem prorsus modo ostendetur, puncta quaecunque circuli $ΑΓ$ ex utraque parte puncti A sita esse extra circulum AB . Circuli itaque in puncto A extra se contingent (Obs. ad ΙΗ. 3, Def. nr. c.). Est haec propositio Pappi

Dico etiam neque extra. Si enim fieri potest, circulus ATK circulum $AB\Gamma A$ contingat extra in pluribus punctis quam in uno, in A , Γ , et iungatur AT .

Quoniam igitur in circumferentiis circulorum $AB\Gamma A$, ATK sumpta sunt duo quaelibet puncta, A , Γ , recta haec puncta coniungens intra utrumque cadet (III. 2.). Eadem autem intra circulum quidem $AB\Gamma A$ cadit, at extra circulum ATK (III. Def. 3.), quod est absurdum. Non igitur circulus circulum contingit extra in pluribus punctis quam in uno. Ostensum est autem neque intus. Circulus igitur etc.

PROPOSITIO XIV. (Fig. 230.)

In circulo aequales rectae aequaliter distant a centro, et quae aequaliter distant a centro aequales inter se sunt.

Sit circulus $AB\Gamma A$, et in eo aequales rectae sint AB , ΓA ; dico ipsas aequaliter distare a centro.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma A$ (III. 1.), et sit E , et ab E ad AB , ΓA perpendicularés ducantur EZ , EH (I. 12.), et iungantur AE , FE .

Lemm. IV. in Apollon. de Taction. vel Collect. Mathem. L. VII. Prop. XC.

Cor. Hinc patet ratio describendorum circulorum, qui se extra contingunt, et manifestum est, distantiam centrorum in illis aequalem esse summae radiorum, et vice versa.

PROPOSITIO XIII.

Huius propositionis demonstrationem nos quidem in Cor.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ EZ εὐ-
 θεϊάν τινά μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB πρὸς ὀρθὰς
 τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἰση ἄρα ἡ AZ τῇ
 BZ διπλῇ ἄρα ἡ AB τῆς AZ . Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ
 καὶ ἡ $ΓΔ$ τῆς $ΓΗ$ ἐστὶ διπλῇ, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ AB
 τῇ $ΓΔ$ ἴση ἄρα καὶ ἡ AZ τῇ $ΓΗ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ AE τῇ $ΕΓ$, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ
 ἀπὸ τῆς $ΕΓ$. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα τὰ
 ἀπὸ τῶν AZ , ZE , ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία·
 τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $ΕΗ$, $ΗΓ$, ὀρθὴ
 γὰρ ἡ πρὸς τῷ H γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AZ ,
 ZE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΓΗ$, $ΗΕ$, ὧν τὸ ἀπὸ
 τῆς AZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΗ$, ἴση γάρ ἐστιν
 ἡ AZ τῇ $ΓΗ$. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZE λοιπῷ
 τῷ ἀπὸ τῆς $ΕΗ$ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἡ ZE τῇ $ΕΗ$.
 Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι
 λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθεται
 ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα AB , $ΓΔ$ ἴσον ἀπέχουσιν
 ἀπὸ τοῦ κέντρου.

ad III. 11. Obs. 1. et III. 12. dedimus. In ea, quae in textu
 graeco est, nonnulla minus accurate posita esse videntur.
 Nempe in eius parte priorē, in qua [de circulis sermo est, qui
 se intra contingunt, ex III. 11. adstruitur, rectam, quae per
 centra duorum circulorum transeat, necessario, si duo contactus
 puncta sumere velis, per utrumque eorum transire, quod tamen
 fieri non possit. Verum enim vero in Prop. 11. illud tantum
 demonstravit Euclides, ut in Obs. 1. ad III. 11. vidimus, re-
 ctam $ΘΗ$, quae per centra utriusque circuli transit, *ultra*
centrum H minoris circuli productam in punctum contactus B
calere, eandem vero ultra centrum Θ maioris circuli pro-
ductam in alterum, quod hypothetice sumitur, punctum con-

Quoniam itaque recta aliqua EZ per centrum ducta rectam aliquam AB non per centrum ductam ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secat (III. 3.). Igitur AZ aequalis est BZ ; ideoque AB ipsius AZ dupla. Eadem ratione et GA ipsius GH dupla est, et est AB aequalis ipsi GA ; aequalis igitur et AZ ipsi GH . Et quoniam aequalis est AE ipsi EF , aequale est et quadratum ex AE quadrato ex EF . Sed quadrato ex AE aequalia sunt quadrata ex AZ , ZE (I. 47.), rectus enim ad Z angulus; quadrato vero ex EF aequalia sunt quadrata ex EH , HF (I. 47.), rectus enim ad H angulus; quadrata igitur ex AZ , ZE aequalia sunt quadratis ex GH , HE , e quibus quadratum ex AZ aequale est quadrato ex GH , aequalis enim est AZ ipsi GH ; reliquum igitur quadratum ex ZE reliquo ex EH aequale est, aequalis igitur ZE ipsi EH . In circulo autem aequaliter distare a centro rectae dicuntur (III. Def. 4.), quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae aequales sunt; ergo AB , GA aequaliter distant a centro.

tactus, siquidem alterum tale punctum locum habere possit, cadere debere, nequaquam fuit demonstratum. Deinde in parte posteriore, ubi de circulis agitur, qui se extra contingunt, ex III. Def. 3. sumitur, eorum utrumque integrum extra alterum situm esse, vel tales circulos se invicem non secare. At, quum lineae curvae cogitari possint, quae quamvis se in puncto aliquo extra contingant, non tamen ita comparatae sint, ut neutra alteram etiam ulterius productam secet, et obviare quis possit, forte idem etiam in circulis obtinere posse, ad eximendum hunc scrupulum res accuratius evolventa esse visa fuit, ut in Obs. 1. ad III. 11. et III. 12. fecimus. Robert. Simson. etiam partis prioris, in qua circuli

Ἀλλὰ δὴ αἱ AB , $ΓΔ$ εὐθείαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ EZ τῇ EH . λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ $ΓΔ$.

Τῶν γάρ εὐθιῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν AB τῆς AZ , ἡ δὲ $ΓΔ$ τῆς $ΓΗ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ $ΓΕ$, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΕ$. ἀλλὰ τῇ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EZ , ZA , τῇ δὲ ἀπὸ τῆς $ΓΕ$ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH , $ΗΓ$, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ , ZA ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν EH , $ΗΓ$, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἐστὶν ἴσον, ἴση γάρ ἡ EZ τῇ EH . λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΗ$ ἴσον ἐστὶν. ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ $ΓΗ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AZ διπλῇ ἡ AB , τῆς δὲ $ΓΗ$ διπλῇ ἡ $ΓΔ$, ἴση ἄρα ἡ AB τῇ $ΓΔ$. Ἐν κύκλῳ ἄρα καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων, αἰεὶ ἡ ἑγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

intus se contingere ponuntur, aliam habet demonstrationem, quae etiam est apud Campanum et Peletarium, et huc redit. „Intus se contingant, si fieri potest, duo circuli in duobus punctis B , A , ductaque BA intra utrumque circulum cadet (III. 2.); igitur in recta AM , quae rectam BA bifariam et ad angulos rectos secat, erit utriusque circuli centrum (III. 1. Cor. 1.), ergo AM producta in circulorum contactum cadet (III. 11.), sed in contactum non cadet, quod puncta B , A sunt extra rectam AM , quod est absurdum.“ — At vero, quum III. 11., apud Euclidem, ut ad eam monuimus, non distincte satis evoluta sit ex Euclideae eius demonstratione,

Sed vice versa aequaliter AB , ΓA distent a centro, hoc est, aequalis sit EZ ipsi EH ; dico aequalem esse et AB ipsi ΓA .

Etenim iisdem constructis, similiter ostendemus duplam esse AB ipsius AZ , et ΓA ipsius ΓH ; et quoniam aequalis est AE ipsi ΓE , aequale est quadratum ex AE quadrato ex ΓE ; sed quadrato ex AE aequalia sunt quadrata ex EZ , ZA (I. 47.), quadrato vero ex ΓE quadrata ex EH , $H\Gamma$; quadrata igitur ex EZ , ZA aequalia sunt quadratis ex EH , $H\Gamma$, e quibus quadratum ex EZ quadrato ex EH est aequale, aequalis enim EZ ipsi EH ; reliquum igitur quadratum ex AZ reliquo ex ΓH est aequale; aequalis igitur AZ ipsi ΓH , et est AB dupla ipsius AZ , ΓA vero dupla ipsius ΓH . Aequalis igitur AB ipsi ΓA . In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XV. (Fig. 231.)

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero, semper propinquior centro remotiore maior est.

quam etiam Simson. habet, non satis perspicue prodire videtur, praeter contactus punctum, in quod ex III. 11. recta AM incidit, nullum aliud vel in ipsa AM , vel extra illam contactus punctum esse posse. Eandem demonstrationem Austin. docet applicari posse, sive de circulis intus sive de circulis extra se contingentibus sermo sit, dummodo posteriore hoc casu III. 12. loco III. 11. adhibeatur, et, quod mirum videri possit, inde concludit, Prop. III. 12. spuriam esse, quam in simili casu etiam in III. 6. de circulis extra se contingentibus non sermo fuerit, et praeterea in III. 12. $\alpha\pi\iota\omega\nu\tau\alpha\iota$ pro $\epsilon\pi\alpha\nu\tau\iota\omega\nu\tau\alpha\iota$ positum sit. Huic ultimae tamen rationi ipse dif-

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ AA , κέντρον δὲ τὸ E , καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ E κέντρον ἔστω ἡ BI , ἀπώτερον δὲ ἡ ZH . λέγω ὅτι· μείριστή μὲν ἔστιν ἡ AA , μείζων δὲ ἡ $Z\Gamma$ τῆς ZH .

Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ E κέντρον ἐπὶ ταῖς $B\Gamma$, ZH κάθετοι αἱ EO , EK . Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρον ἔστιν ἡ BI , ἀπώτερον δὲ ἡ ZH , μείζων ἄρα ἡ EK τῆς EO . Κείσθω τῇ EO ἴση ἡ EA , καὶ διὰ τοῦ A τῇ EK πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ AM διήχθω ἐπὶ τὸ N , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EM , EN , EZ , EH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ EO τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ MN . Ἠάλιν, ἐπεὶ ἴση ἔστιν ἡ μὲν AE τῇ EM , ἡ δὲ EA τῇ EN , ἡ ἄρα AA ταῖς ME , EN ἴση ἔστιν. Ἀλλ' αἱ ME , EN τῆς MN μείζονες εἰσι, καὶ ἡ AA ἄρα τῆς MN μείζων ἔστιν. Ἰση δὲ ἡ MN τῇ $B\Gamma$, ἡ AA ἄρα τῆς $B\Gamma$ μείζων ἔστιν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ME , EN δυοὶ ταῖς ZE , EH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ MEN , γωνίας τῆς ὑπὸ ZEH μεί-

fidere videtur, et Cod. a. habet omnino ἐγάπτωνται. Nec reliqua Austini argumenta sufficere nobis videntur. Alii quoque alias huius propositionis demonstrationes dederunt, e quibus ea, quam habet Giordano da Bitonto, similis fere est ei, quam in Obs. 3. ad III. 11. et ad III. 12. eius, quae ibi exhibetur, propositionis exhibuimus.

PROPOSITIO XIV.

Patet, veram adhuc esse propositionem, etiamsi rectae AB , ΓA ex eadem parte centri fuerint, vel si se invicem secant, aut ex uno eodemque circumferentiae puncto ductae sint.

PROPOSITIO XV.

Obs. Rob. Simson. monet, ad probandum, diametrum AA maiorem esse quacunq[ue] recta $B\Gamma$ in circulo, nihil opus

Sit circulus $AB\Gamma A$, diameter autem ipsius sit AA , centrum vero E , et propinquior quidem centro E sit BF , remotior vero ZH ; dico maximam esse AA , maiorem vero BF ipsa ZH .

Ducantur enim ab E centro ad BF , ZH perpendiculares $E\Theta$, EK . Et quoniam propinquior quidem centro est BF , remotior vero ZH , maior igitur EK ipsa $E\Theta$. Ponatur ipsi $E\Theta$ aequalis EA , et per A ipsi EK ad rectos ducta AM iproducatur ad N , et iungantur EM , EN , EZ , EH .

Et quoniam aequalis est $E\Theta$ ipsi EA , aequalis est et BF ipsi MN (III. 14.). Rursus, quoniam aequalis est AE ipsi EM , et EA ipsi EN , ergo AA ipsis ME , EN aequalis est. Sed ME , EN ipsa MN maiores sunt (I. 20.), itaque AA ipsa MN maior est. Aequalis autem MN ipsi BF , ergo AA ipsa BF maior est. Et quoniam duae ME , EN duabus ZE , EH aequales sunt, et angulus MEN angulo ZEH

esse linea MN aequali lineae BF , quum eadem demonstratio, quae ad MN applicatur, brevius immediate ad BF applicari possit. In Euclidea tamen demonstratione recta MN rectae BF aequalis et rectae ZH parallela ducta inservire potest, quo facilius ostendatur, esse angulum $MEN > ZEH$, quod nempe, ducta diametro AA parallela $\epsilon\eta$ ZH , vel MN , ob $EA < EK$, puncta M , N diametro AA propiora sunt, quam puncta Z , H , quod ipsum tamen clarius exponi debebat. Caeterum hanc ipsam secundam partem, et quae pariter valet, eius conversam, nempe rectarum circulo inscriptarum, quae maior sit, esse etiam centro propiorem, pariter sine ope rectae MN , et anguli MEN modo simili ei, qua Euclides utitur in praecedente, et quam etiam adhibet Theodosius in Libr. I. Prop. 6. Sphaericorum in casu omnino simili ope III. 3. et

ζων ἐστὶ βάσις ἄρα ἡ MN βάσεως τῆς ZH μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ MN τῇ BF ἰδείχθη ἴση, καὶ ἡ BF τῆς ZH μείζων ἐστίν. Μεγίστη ἄρα ἡ AA διάμετρος, μείζων δὲ ἡ BF τῆς ZH . Ἐν κύκλῳ ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου καὶ εἰς τὸν μετὰ τὸν τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓ$ περὶ κέντρον τὸ A καὶ διάμετρον τὴν AB · λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ $ΑΓ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔΓ$.

Ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ $ΔA$ τῇ $ΔΓ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΔΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΓΔ$. Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ $ΔΑΓ$, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΔ$ αἱ ἄρα ¹⁾ ὑπὸ

1) Peyrard. e Cod. a pro αἱ ἄρα ponit τριγώνου δὴ τοῦ $ΑΓΔ$ αἱ δύο γωνίαι αἱ.

I. 47. demonstrari posse, Rob. Simson. observat, et ipse hanc demonstrationem exhibet. Conversa illa facile etiam opo partis primae et III. 14. demonstrabitur. Aliam partis secundae demonstrationem habet Campanus, in qua nihil opus est perpendiculis e centro ductis, dum integra ille triangula MEN , ZBH comparat. Denique observari potest, eas etiam rectas in circulo, quae ex eodem circumferentiae puncto exeunt, ita comparari posse. Cf. Prop. 8. Obs. 2.

maior; basis igitur MN basi ZH maior est (I. 24.). Sed MN ipsi BT ostensa est aequalis; itaque BT ipsa ZH maior est. Maxima igitur est diameter AA , maior vero BT ipsa ZH . In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XVI. (Fig. 232.)

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadet extra circulum; et in locum, qui inter rectam et circumferentiam interiicitur altera recta non cadet; et semicirculi angulus quovis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus vero minor.

Sit circulus ABT circa centrum A et diametrum AB ; dico rectam lineam, quae ab extremitate A ad AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere.

Si enim non, cadat, si fieri potest, intus, ut AT , et iungatur AT .

Quoniam aequalis est AA ipsi AT , erit et angulus $AAAT$ angulo ATA aequalis (I. 5.). Rectus autem $AAAT$, rectus igitur et ATA ; itaque duo anguli $AAAT$,

Cor. Quodsi itaque in circulo, cuius radius magnitudine datus est, magnitudine data sit recta circulo inscripta (quae nunquam maior esse potest duplo circuli radio, vel, quod eodem redit, diametro circuli) distantia eius a centro magnitudine data erit, et vice versa. Est nempe $EA^2 = ME^2 - MA^2 = ME^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2$, et $MA^2 = \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = ME^2 - EA^2$. Cf. Pfeiderer.

PROPOSITIO XVI.

Obs. Propositio haec (cuius etiam directa demonstratio

$\Delta A \Gamma$, $A \Gamma A$ δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἶσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἡ ἀπὸ τοῦ A σημείου, τῇ BA πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ AE .

Λέγω δὴ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε AE εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma \Theta A$ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεπιπτέτω ὡς ἡ ZA , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν ZA κάθετος ἡ ΔH .

Καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AH\Delta$, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔAH · μείζων ἄρα ἡ $A\Delta$ τῆς ΔH . Ἰση δὲ ἡ $A\Delta$ τῇ $\Delta \Theta$ · μείζων ἄρα ἡ $\Delta \Theta$ τῆς ΔH , ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma \Theta A$ περιφερείας, ἀπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $\Gamma \Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστὶν.

Εἰ γὰρ ἐστὶ τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma \Theta A$ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $\Gamma \Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας,

satis facilis exhibetur ab Orontio Fineo) ita exprimi potest:

- 1) recta, quae ab extremo diametri puncto diametro ad rectos angulos ducitur, tota extra circumulum cadit.
- 2) Quae autem ab extremo diametri puncto oblique i. e. sub angulo quocunque acuto vel obtuso ad diametrum ducitur, circumferentiae iterum occurrit.
- 3) Angulus semicirculi, i. e. quem circumfe-

ATA duobus rectis aequales sunt, quod fieri nequit (I. 17.). Recta igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta non cadet intra circumferentiam. Similiter ostendemus, neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut AE .

Dico etiam in locum inter rectam AE et circumferentiam $\Gamma\Theta A$ alteram rectam non cadere.

Si enim fieri potest, cadat ut ZA , et ducatur a puncto A ad ZA perpendicularis AH .

Et quoniam rectus est angulus AHA , minor autem recto AAH ; erit AA maior ipsa AH (I. 19.). Aequalis autem est AA ipsi $A\Theta$; maior igitur $A\Theta$ ipsa AH , minor maiore, quod fieri nequit. In locum igitur inter rectam et circumferentiam altera recta non cadet.

Dico praeterea semicirculi angulum, comprehensum a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, quovis angulo acuto rectilineo maiorem esse; reliquum vero comprehensum a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE , quovis angulo acuto rectilineo minorem esse.

Si enim est aliquis angulus rectilineus, maior comprehenso a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, minor vero comprehenso a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE , in locum inter circumferentiam $\Gamma\Theta A$ et rectam AE

rentia cum diametro efficit, maior est quovis angulo rectilineo: reliquus vero angulus, ille nempe, quem circumferentia cum recta efficit, quae diametro a puncto eius extremo ad rectos angulos ducta est, et quem angulum contingentiae vocare solent, minor est quovis angulo acuto rectilineo. De hac tertia propositionis parte videbimus in excursu ad calcem huius

εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπιπτεῖται, ἥ τις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττωνα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δὲ οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὅξεια ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὲν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α,

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἑκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημείου. Ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο ἀντιᾶ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιζ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

libri. E duabus reliquis propositionis partibus, praeter corollarium textus Graeci sequens adhuc a Rob. Simson. deducitur corollarium.

Cor. 2. Unica tantum recta linea circulum in eodem puncto contingere potest, nempe, quae radio circuli in puncto eius extremo perpendicularis est. Quae autem ei oblique insistit, circulo ad partes anguli acuti iterum occurrit. Praeterea patet, ex hac quoque propositione consequi, quod III. 2. Cor. 3. vidimus, circuli circumferentiam esse lineam curvam i. e. ne minimam quidem eius partem esse rectam.

recta cadet, quae faciet angulum a rectis comprehensum maiorem comprehenso a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, minorem vero comprehenso a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE . Non cadit autem; angulus igitur rectis comprehensus non erit maior angulo comprehenso a recta BA et circumferentia $\Gamma\Theta A$, neque minor comprehenso a circumferentia $\Gamma\Theta A$ et recta AE . Quod oportebat ostendere.

COROLLARIUM:

Ex hoc manifestum est rectam, quae ab extremitate diametri circuli ei ad rectos angulos ducitur, contingere circumulum; et rectam circumulum in unico contingere puncto. Quoniam recta in duobus punctis ipsi occurrens intra ipsum cadere ostensa est.

PROPOSITIO XVII. (Fig. 233.)

A dato puncto rectam lineam ducere, quae circumulum datum contingat.

PROPOSITIO XVII.

Obs. 1. Duo, si rem exacte absolvere velis, casus distinguendi sunt, prout punctum datum vel extra circumferentiam dati circuli, vel in hac ipsa circumferentia datum est. (Intra datum circumulum enim esse nequit, ut ex Defin. rectae contingentis patet.) Ultimum hunc casum, quo est in ipsa circumferentia, cuius solutio cacterum ex III. 16. Cor. 1. sponte fluit, addit Rob. Simson. Priore casu, quem solum habet Euclides, patet, rectam AZ , quae rectae EA ad angulos rectos ducta est, quum per punctum A intra circumulum AZH

Ἐστω τὸ μὴν δοθέν σημεῖον τὸ A , ὃ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ $BΓΔ$. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ $BΓΔ$ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ E , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΕ$, καὶ κέντρον μὲν τῷ E διαστήματι δὲ τῷ $ΕΑ$ κύκλος γεγράφθω ὁ AZH , καὶ ἀπὸ τοῦ A τῇ $ΕΑ$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ AZ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ EZ , AB . λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ $BΓΔ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἦται ἡ AB .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ E κέντρον ἐστὶ τῶν $BΓΔ$, AZH κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $ΕΑ$ τῇ EZ , ἡ δὲ $ΕΑ$ τῇ $ΕΒ$. δύο δὴ αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$ δυοὶ ταῖς ZE , $ΕΑ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ E .

transcat, cum hoc circulo in alio adhuc praeter Z puncto v. c. in H ex altera parte rectae $ΕΑ$ convenire, adeoque etiam ex hac parte duci posse aliam, adhuc rectam $AΘ$, quae circumulum $BΓΔ$ contingat: duplex itaque semper hoc casu solutio locum habebit. Reducitur autem problema ad illud: construere triangulum rectangulum AEB , cuius hypotenusa AE positione et magnitudine, alter cathetus EB autem magnitudine dantur. Caeterum comparatis duobus triangulis AEB , AEO , in quibus hypotenusa AE communis, recta $EB=EO$, et anguli EBA , $EΘA$, quippe recti aequales sunt, patet, esse etiam rectas AB , $AΘ$ aequales, pariterque aequales esse angulos EAB , EAO , et AEB , AEO . Duae igitur rectae, quae ex eodem puncto extra circumulum sito ita ad circumulum duci possunt, ut eum contingant, inter se aequales sunt. Et, quum aequales sint anguli EAO , EAB , et AEO , AEB , recta AE utrumque angulorum $ΘAB$, $ΘEB$ bifariam dividit. Hinc porro nonnisi duae rectae ex eodem puncto extra circumulum ducti possunt, quae eum contingunt.

Obs. 2. Posteriore casu, si e puncto in ipsa circuli circumferentia dato ducenda est recta, quae circumulum in hoc

Sit datum punctum A , datus vero circulus $B\Gamma A$; oportet igitur a puncto A rectam lineam ducere, quae circulum $B\Gamma A$ contingat.

Sumatur enim centrum circuli E (III. 1.), et iungatur AE , et centro quidem E intervallo vero EA circulus describatur AZH (Post. 3.), et a A ipsi EA ad rectos ducatur AZ (I. 11.), et iungantur EZ , AB ; dico a puncto A ductam esse AB circulum $B\Gamma A$ contingentem.

Quoniam enim E centrum est circulorum $B\Gamma A$, AZH , aequalis est EA ipsi EZ , et EA ipsi EB ; duae igitur AE , EB duabus ZE , EA aequales sunt, et angulum communem comprehendunt ad E ; basis igitur

puncto contingat, ductae ad hoc punctum diametro erigi debet in eo ipso puncto recta ad angulos rectos (III. 16. Cor. 1.). Hinc consequitur, duos circulos, qui se in puncto aliquo A contingant, sive extra sive intra se contingant (Fig. 234. 235.) in hoc puncto ab eadem recta, quae diametris circulorum ad hoc punctum ductis (quae nempe in eadem recta positae erunt Obs. 2. ad III. 11. et Obs. 2. ad III. 12.) ad angulos rectos est, contingi, vel rectam, quae unum duorum circulorum in puncto aliquo A se contingentium in hoc ipso puncto A contingat, contingere in eo quoque alterum. Cf. Apollon. de Taction. Lemm. E. Cor. 7. 8.

Obs. 3. Quum ex Obs. 2. duo, eademque ratione infiniti circuli eandem rectam BF in eodem puncto A contingere possint, patet, Problema describendi circuli, qui rectam positione datam BF in dato in ipsa puncto A contingat, non esse determinatum, adeoque alias aliasque conditiones huic (pariterque simili problemati describendi circuli, qui datum circulum in dato in ipsius circumferentia puncto contingat) addi posse. Unde plura huc, vel etiam ad III. 11. aut III. 12. pertinentia problemata oriuntur, quae quanta sint satis

βάσις ἄρα ἡ ΔZ βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ $E\Delta Z$ τρίγωνον τῷ EBA τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $E\Delta Z$ τῇ ὑπὸ EBA . Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ $E\Delta Z$, ὀρθῇ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EBA . Καὶ ἐστὶν ἡ EB ἐκ τοῦ κέντρον ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου ἡ AB ἄρα ἐφάπτεται τοῦ BGA κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ A τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ BGA ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ AB . Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ ιη.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρον ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐστὶ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γάρ τοῦ ABG ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔE κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ABG κύκλου τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ $Z\Gamma$. λέγω ὅτι ἡ $Z\Gamma$ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE .

facilia, tironibus solvenda proponi possunt v. c. 1) Describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ipsa puncto contingat, et per aliud quoddam extra hanc rectam datum punctum transeat. 2) Describere circulum, qui datum circulum in dato in ipso puncto contingat, et per aliud quoddam extra vel intra hunc circulum datum punctum transeat. 3) Describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ipsa puncto et simul datum circulum contingat. 4) Describere circulum, qui datum circulum in dato in ipso puncto, et simul rectam positione datam contingat. 5) Describere circulum, qui duos circulos datos, et quidem alteram in dato

tur ΔZ basi AB aequalis est (I. 4.); et triangulum $E\Delta Z$ triangulo EBA aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis; aequalis igitur $E\Delta Z$ ipsi EBA . Rectus autem $E\Delta Z$; rectus igitur et EBA ; et est EB ex centro; diametro autem circuli ad rectos ab extremitate ducta contingit circulum (III. 16. Cor. 1.); AB igitur contingit circulum $B\Gamma A$.

A dato igitur puncto A datum circulum $B\Gamma A$ contingens recta linea ducta est AB . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XVIII. (Fig. 237.)

Si circulum contingat aliqua recta, a centro autem ad contactum ducatur aliqua recta, ea perpendicularis erit ad contingentem.

Circulum enim $AB\Gamma$ contingat aliqua recta ΔE in puncto Γ , et sumatur Z centrum circuli $AB\Gamma$, et a Z ad Γ ducatur $Z\Gamma$; dico $Z\Gamma$ perpendicularē esse ad ΔE .

in ipso puncto contingat. 6) Describere circulum, qui duas rectas positione datas, quae sibi invicem occurrunt, et quidem alteram in dato in ea puncto contingat. 7) Describere circulum, qui duas rectas parallelas positione datas, et quidem alteram in dato in ipsa puncto contingat, vel quod eodem redit: dato radio describere circulum, qui rectam positione datam in dato in ea puncto contingat. 8) Dato radio describere circulum, qui rectam positione datam contingat, et per datum extra eam punctum transeat. 9) Dato radio circulum describere, qui duas rectas positione datas, quae inter se conveniunt, contingat. 10) Dato radio circulum describere, qui

Εἰ γὰρ μὴ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἢ ZH .

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ZHG γωνία ὀρθή ἐστιν, ὁξεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZGH . ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἢ ZG τῆς ZH . Ἰση δὲ ἢ ZG τῇ ZB μείζων ἄρα ἢ ZB τῆς ZH , ἢ ἐλάττω τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ZH κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE . Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ZG ἢ ZG ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE . Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἐφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ ἀπτεσθω²⁾ τις εὐθεῖα ἢ ΔE κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἢ ΓA . λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΔE ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

1) Peyrardus ex Cod. a habet μείζων ἄρα καὶ ZB . Nos praetulimus lectionem ed. Oxon. Ed. Basil. habet καὶ ἢ ZB .

2) Si vera sunt, quae e Rob. Simson. ad III. Def. 2. notavimus, legendum hic fuerit ἐφαπτεσθω.

circulum positione datum, et rectam positione datam contingat. 11) Dato radio circulum describere, qui circulum positione datum contingat, et per datum extra eum punctum transeat. 12) Dato radio circulum describere, qui duos datos circulos contingat. Denique 13) (quod iam ad III. 1. Cor. 1. pertinet: dato radio circulum describere, qui per duo data puncta transeat. Vid. Pappus in Praefat. libri VII. Collect.

Si enim non, ducatur a Z ad AE perpendicularis ZH (I. 12.).

Quoniam igitur angulus ZHT est rectus, acutus erit ZFH (I. 17.); maiorem autem angulum maius latus subtendit (I. 19.), maior igitur est ZF quam ZH . Aequalis autem ZF ipsi ZB ; maior igitur ZB ipsa ZH ; minor maiore, quod fieri non potest. Igitur ZH non est perpendicularis ad AE . Similiter ostendemus neque aliam quampiam praeter ipsam ZF ; ergo ZF perpendicularis est ad AE . Si igitur circulum etc.

PROPOSITIO XIX. (Fig. 240.)

Si circulum contingat aliqua recta, a contactu autem contingenti ad angulos rectos recta linea ducatur, in ducta erit centrum circuli.

Circulum enim ABF contingat aliqua recta AE in puncto F , et a F ipsi AE ad rectos angulos ducatur FA ; dico in AF esse centrum circuli.

Mathem. ad Taction. Apollonii, vel Apollon. de Taction. Goth. 1795. p. 18.

Obs. 4. Aliud haud inelegans problema, quod huc pertinet, affert Clavius e Cardano, quod ita habet: duobus circulis, quorum neuter alterum includit, datis, ducere rectam, quae utrumque contingat. Exempli causa figuram saltem uni casui adaptatam adponentus (Fig. 236.) e cuius adspectu solutio facile derivari poterit.

Obs. 5. Peletarius ad hunc locum sequens adhuc habet problema: Lineae rectae, quae circulum aliquem secet, aliam parallelam ducere, quae ipsum contingat, quod etiam generalius exprimi potest; rectae positione datae aliam parallelam

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπέ-
ξεύχθω ἡ IZ .

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ABΓ$ ἐγράφεται τις εὐθεῖα
ἡ $ΔΕ$, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέξενεται
ἡ $ZΓ$, ἡ $ZΓ$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν $ΔΕ$. ὁρθὴ
ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΓΕ$. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$
ὁρθὴ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZΓΕ$ τῇ ὑπὸ $ΑΓΕ$, ἡ
ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα
τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓ$ κύκλου. Ὅμοίως δὲ
δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλό τι πλήν ἐπὶ τῆς $ΑΓ$. Ἐὰν
ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων
ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περι-
φέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

ducere, quae circulum contingat, et facillime solvetur ducta
e centro ad rectam positione datam perpendiculari, et e puncto,
in quo illa circulo occurrit, parallela positione datae. Cf.
Gilbert. p. 203.

PROPOSITIO XVIII.

Obs. 1. Poterat etiam haec propositio e III. Prop. 16.,
cuius conversa est, ita deduci. Si $ΓΕ$ non sit rectae $ΙΖ$ ad
rectos angulos, $ΓΕ$ secabit circulum ex III. 16. adeoque non
continget in $Γ$, q. e. a. Orontius Finaeus simili ratione e
parte tertia Prop. 16. III. hanc 18. deducere constur.

Cor. 1. Duae rectae, quae per puncta extrema eiusdem
diametri ductae circulum contingunt; parallelae sunt:

Cor. 2. Vicissim, si duae rectae (Fig. 238.) $ΑΓ$, $ΔΘ$,
quae circulum in B , E contingunt, parallelae fuerint, recta
 $ΒΕ$, quae contactus puncta coniungit, erit diameter. Si enim
recta $ΒΕ$ non sit diameter, erit centrum circuli extra eam

Non enim, sed si fieri potest, sit Z , et iungatur FZ .

Quoniam igitur circulum ABF contingit aliqua recta AE , a centro autem ad contactum ducta est ZF , ZF perpendicularis est ad AE (III. 18.); rectus igitur est ZFE . Est autem et AFE rectus; aequalis igitur est ZFE ipsi AFE , minor maiori, quod fieri non potest. Igitur Z non est centrum circuli ABF . Similiter ostendemus, neque aliud aliquod esse praeterquam in ipsa AF . Si igitur circulum etc.

PROPOSITIO XX. (Fig. 241.)

In circulo, angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, quando eandem circumferentiam pro basi habent anguli.

v. c. in Z , ductisque ZB , ZE , erit ZBF pariter ac $ZE\theta$ rectus, adeoque FBE pariter ac θEQ minor recto, igitur rectae AF , $A\theta$ non erunt parallelae (Ax. 11. vel I. 5. Post.) q. e. a.

Cor. 3. Si duae rectae circulum contingant, et recta, quae contactus puncta iungit, non sit diameter, contingentes cum hac recta obliquos angulos efficient, nec parallelae erunt.

Cor. 4. Vicissim, si duae rectae circulum contingentes non sint parallelae, recta, quae contactus puncta iungit, nequit esse diameter (Cor. 1.). Cf. Gilbert. die Geometrie nach le Gendre I. Th. p. 120. sq.

Obs. 2. Alia conversa propositionis III. 26. vel, si mavis, propositionis huius III. 18. haec est: recta, quae e centro circuli ad contingentem perpendicularis demittitur, per contactus punctum transit, et vice versa.

Obs. 3. Si eadem recta duos circulos in eodem puncto contingit, duo isti circuli in eodem puncto se contingent. Quae enim e centris circulorum ad punctum commune, in quo recta

"Εστω κύκλος ὁ $ABΓ$, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ BEG , πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ BAG , ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν $BΓ$. λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ BEG γωνία τῆς ὑπὸ BAG .

Ἐπιζευχθεῖσα γάρ ἡ AE διήχθω ἐπὶ τὸ Z .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA . αἱ ἄρα ὑπὸ EAB, EBA γωνίαι τῆς ὑπὸ EAB διπλάσιαι εἰσιν. Ἰση δὲ ἡ ὑπὸ BEZ ταῖς ὑπὸ EAB, EBA καὶ ἡ ὑπὸ BEZ ἄρα τῆς ὑπὸ EAB ἐστὶ διπλῇ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ZEG τῆς ὑπὸ EAG ἐστὶ διπλῇ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ BEG ὅλης τῆς ὑπὸ BAG ἐστὶ διπλῇ.

utrumque contingit, ducuntur rectae ad hanc contingentem perpendiculares, adeoque in eadem recta sitae erunt, unde circuli se contingunt (Obs. 2. ad III. 11. et Obs. 2. ad III. 12.).

Obs. 4. (Ex Clavio.) Duobus circulis ex eodem centro Θ descriptis (Fig. 259.) erunt omnes rectae AF, BA interiorum circulum contingentes et usque ad circumferentiam exterioris circuli productae inter se aequales, bifariamque in punctis contactus E, Z secabuntur. Ductae enim ex centro $\Theta E, \Theta Z$ ad AF, BA perpendiculares erunt (III. 18.), itaque (III. Def. 4.) AF, BA aequaliter a centro distant, quoniam $\Theta E = \Theta Z$. Itaque $AF = BA$ (III. 14.), et bifariam dividuntur a perpendicularibus $\Theta E, \Theta Z$ (III. 3.)

PROPOSITIO XIX.

Obs. Haec quoque propositio, vel ut conversa III. propositionis 16. considerari atque ex ea demonstrari potest, vel, ut est apud Euclidem, ut conversa III. propositionis 18. Candel-la monente, ut exacte vera sit propositio, addi debet, rectam a contactu contingentis ad rectos angulos ductam secare debere circulum. Id nempe vult, esse debere hanc perpendi-

Sit circulus $AB\Gamma$, et ad centrum eius sit angulus BET , ad circumferentiam vero BAT , habeant autem eandem circumferentiam BT pro basi; dico duplum esse angulum BET anguli BAT .

Iuncta enim AE producat ad Z .

Quoniam igitur aequalis est EA ipsi EB , aequalis est angulus EAB angulo EBA (I. 5.); anguli igitur EAB , EBA anguli EAB dupli sunt. Aequalis autem est BEZ angulis EAB , EBA (I. 32.); igitur BEZ ipsius EAB est duplus. Eadem ratione et ZET ipsius EAT duplus est, totus igitur BET totius BAT est duplus.

cularem ad easdem rectae contingentis partes, ad quas est circulus. Quum tamen illa utrimque produci possit, haud necessarium est id addere.

PROPOSITIO XX.

Austin. quidem monet, hanc propositionem latius patere, quam vulgo putent, et circumferentiam, cui anguli insistant, aequae maiorem semicirculo sumi posse ac minorem. Vult igitur angulos quoque gibbos i. e. qui duobus rectis maiores sunt, sub enunciato propositionis comprehendere. Ita nempe propositionem sequentem generalius sumi posse, nec nova id additamentum demonstratione egere. At, quamvis res per se vera sit, et hoc propositionis nostrae *consectarium* etiam a Candalla, Tartalea, Commandino, Clavio, Peletario aliisque exhibeatur, et a nonnullis eorum eadem ratione ac Austin. iubet, ad generaliore Prop. 21. demonstrationem adhibeatur; valde tamen dubitamus, an Euclides de angulis gibbis in ipsa propositione comprehendendis cogitarit. Nec poterat facile ab angulis sensu consueto sumtis transire ad angulos gibbos, nisi per angulum duobus rectis aequalem, i. e. cuius crura in di-

Κεκλίσθω δὴ παλιν, καὶ ἔστω ἐτέρα γωνία ἡ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$, καὶ ἐπεξευχθεῖσα ἡ ΔE ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H . Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $HE\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ $H\Delta\Gamma$, ὥν ἡ ὑπὸ HEB διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ HAB . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BEG διπλῇ ἐστὶ τῆς ὑπὸ $B\Delta\Gamma$. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κα΄.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

rectum ad oppositas partes eiusdem verticis sita sunt: talem autem angulum non agnoscere videtur Euclides; vid. Def. 8. Illud tamen certum est, demonstrationem partis primae VI. 33. non permittere considerationem angulorum gibborum ex elementis excludere. Vide Pfeiderer. Thes. 1791. Thes. 7. Magis autem necessarium fuerit, monere, praetermissum esse ab Euclide eum casum, quo unam eorum anguli, cuius vertex in circumferentia positus est, per ipsum centrum circuli transit, quem casum nominatim habent Clavius, Giordano da Bitonto, Borellius, alique. Clavius praeterea observat, tacite in demonstratione axiomatis loco sumi, si duae magnitudines duarum magnitudinum sint duplae, singulae singularum, fore quoque summam ex illis summae ex his duplum, vel: si totum totius, et ablatum ablati duplum sit, fore et reliquum reliqui duplum. Et hoc quidem Prop. V. 1. et V. 5. universaliter demonstrari, at hic de duplo ut per se notum sumi. Cf. quae ad finem Axiom. libri I. notavimus. Ipse deinde rem aliter sine hoc axiomate demonstrare docet.

Π Ρ Ο Π Ο Σ Ι Τ Ι Ο XXI.

Obs. 1. Huius propositionis, quae etiam ita exprimi potest: anguli ad circumferentiam eidem segmento insistentes, aequales sunt, duo sunt casus, prout segmentum, in quo sunt anguli, de quibus quaeritur, vel maius, vel non maius est

Rursus inflectatur ad circumferentiam alter angulus BAl , et iuncta AE producat ad H . Similiter ostendamus duplum esse angulum HEF anguli HAF , quorum HEB duplus est anguli HAB ; reliquus igitur BET duplus est reliqui BAT . In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XXI. (Fig. 242.)

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se aequales.

semicirculo. Demonstratio textus graeci priorem [saltem casum] complectitur. Posterioris demonstrationem dedere Commandinus, Clavius, Borellius, Giordano da Bitonto, Baermannus, Rob. Simson. alique. Rob. Simsonis demonstratio simplicissima est. Ea sic habet: sit (Fig. 245.) Segmentum BAE non maius semicirculo, et in ipso sint anguli BAA , BEA . Ducatur ad centrum Z recta AZ , et producat ad Γ , iungaturque $E\Gamma$. Segmentum igitur $BAE\Gamma$ est maius semicirculo, adeoque ex casu I. est $BAT = BET$. Eodem modo segmentum ΓAEA est maius semicirculo, adeoque $\Gamma AA = \Gamma EA$. Totus igitur angulus BAA toti BEA est aequalis. Plures alias demonstrationes habent Commandinus, Clavius, alique. Et necessaria est omnino casus quoque posterioris mentio ad perfectam propositionis sequentis demonstrationem. Ceterum, ut ea, quae in praeparatione ad demonstrationem sumuntur, fieri possint, nempe ut centrum circuli inveniri possit ex III. 1., integer circulus datus esse supponitur. Quodsi enim segmentum tantum circuli datum foret, res demum per III. 25. effici posset. Et in textu quidem graeco integer circulus datus ponitur: $\xi\sigma\tau\omega\ \kappa\acute{\alpha}\lambda\omicron\varsigma$. Nihil tamen impedit, etiam segmentum solum datum ponere: propositio enim III. 25. non a III. 21. pendet, et etiam ante hanc poni poterat.

Obs. 2. Vicissim, -si super eadem recta BA (Fig. 244.) ad eandem eius partes constituti sint duo anguli aequales BAA ,

"Εστω κύκλος ὁ $ABΓΔ$, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμηματι τῷ $BAED$ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ BAA , BEA λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ BAA , BEA γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BZ , $ZΔ$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ $BZΔ$ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ BAA πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν $BΓΔ$ ἡ ἄρα ὑπὸ $BZΔ$ γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ὑπὸ BAA . Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ $BZΔ$ καὶ τῆς ὑπὸ BEA ἐστὶ διπλασίῳ ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ BAA τῇ ὑπὸ BEA . Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΗΡΟΤΑΣΙΣ κβ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

BEA , circulus per puncta extrema rectae B, A , et per verticem unius anguli descriptus transibit etiam per verticem alterius anguli. Si enim fieri potest, circulus per puncta B, A, A descriptus (III. 10. Cor. 1.) non transeat per punctum E , quamvis sit $BEA = BAA$, erit itaque punctum E vel intra vel extra circulum BAA . Sit 1) intra circulum BAA , recta itaque BE producta secabit circulum in puncto aliquo H (III. 2. Cor. 3.), ductaque HA , erit, ex hac propositione, $BHA = BAA$. At ex hypoth. etiam $BEA = BAA$. Itaque $BHA = BEA$, quod fieri nequit I. 16. Eadem ratione 2) ostenditur punctum E neque extra circulum cadere: cadet itaque in ipsam circuli circumferentiam. Conversam hanc habent Clavius, Giordano da Bitonto, Borellius, Tacquet, aliique. Aliter, at haud satis accurate expressa ea legitur apud Gruson. Abhandl. der Kön. Acad. der Wissenschaft. zu Berlin für 1814 — 51. p. 55. §. 27.

Obs. 3. Hinc porro consequitur sequens Theorema, quod

Sit circulus $AB\Gamma A$, et in eodem segmento $BAEA$ anguli sint BAA , BEA ; dico angulos BAA , BEA esse inter se aequales.

Sumatur enim centrum circuli $AB\Gamma A$ (III. 1.), et sit Z , et iungantur BZ , ZA .

Et quoniam angulus BZA est ad centrum, angulus vero BAA ad circumferentiam, et habent eandem circumferentiam $B\Gamma A$ pro basi; angulus BZA duplus est anguli BAA (III. 20.). Ex eadem ratione angulus etiam BZA anguli BEA est duplus; aequalis igitur BAA ipsi BEA . In circulo igitur etc.

PROPOSITIO XXII. (Fig. 246.)

Quadrilaterorum, quae in circulis sunt, anguli oppositi duobus rectis aequales sunt.

est apud Serenum de sectione cylindri Prop. 46. 47. Cf. Gilbert. Geom. I. Th. p. 172. Si fuerit (Fig. 245.) AAB segmentum quodcumque circuli atque in eo punctum P ita positum, ut sit recta $PA=PB$, et describatur centro P , radio PA circulus $A\Theta B$, qui itaque et per B transibit, erit summa crurum anguli cuiusvis AAB super AB , cuius vertex in segmento AAB positus est, aequalis rectae BE , quae obtinetur, si alterutrum crus producat, dum cum circulo $A\Theta B$ conveniat. Quum enim sit, si BF ad Z producat, $IZ=PB=PA$ (I. Def. 15.) erit triangulum ZAF aequicrurum, adeoque angulus $ZAF=AZF$ (I. 5.). Et, quum ex nostra propositione sit $AAB=AFB$, adeoque et $AAI=ATZ$ (I. 13.) et $AEA=AZF$ (III. 21.), erit et $EAA=ZAF$ (I. 32. Cor. 3.) $=AZF=AEA$, adeoque $AA=AE$ (I. 6.) et $AA+AB=AE+AB=BE$. Et, quum eodem modo sit $PA+PB=BZ$, at BZ , quippe diameter circuli $A\Theta B$ maior, quam BE (III. 15.), erit etiam $PA+PB > AA+AB$, i. e. inter omnia triacula super eadem

*Εστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ $ΑΒΓΔ$. λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

*Επεξεύχθωσαν αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$.

*Επεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ $ΑΒΓ$ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $ΓΑΒ$, $ΑΒΓ$, $ΒΓΑ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἰση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΑΒ$ τῇ ὑπὸ $ΒΑΓ$, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ $ΒΑΔΓ$; ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΑΔΒ$, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῇ

basi AB constituta, et quorum angulus basi oppositus aequalis est, quae igitur in eodem circuli segmento constituuntur (Obs. 2.) triangulum aequicrurum maximam habet summam crurum, adeoque maximam laterum omnium summam: reliquorum veto crurum summa eo minor erit, quo magis BE a diametro distat (Obs. ad III. 15. sub finem.). Denique observari potest, si etiam AA producat ad θ , fore et $A\theta = AB$, et $A\theta = AA + AB$, adeoque $= BE$, et quum in triangulis $E\theta A$, AAB si $EA = AA$, $A\theta = AB$, et anguli ad verticem aequales (I. 15.) erit et recta $E\theta = AB$ (I. 4.).

PROPOSITIO XXII,

Obs. 1. Cor. 1. Si latus quodcunque quadrilateri in in circulo descripti extra circulum producat, erit angulus externus aequalis angulo quadrilateri interno opposito. Habent hoc Cor. Clavius, Tacquet., alii,

Obs. 2. Cor. 2. In quadrilatero circulo inscripto summa duorum angulorum oppositorum aequalis est summae reliquorum duorum angulorum oppositorum, vel: si anguli quadrilateri circulo inscripti, initio a quovis eorum facto, ordine, quos invicem insequuntur, numeris indicentur, erit summa angulorum primi et tertii aequalis summae angulorum secundi et quarti. Hinc consequitur, rhombum et rhomboidem circulo non inscribi posse,

Sit circulus $AB\Gamma A$, et in ipso quadrilaterum $AB\Gamma A$; dico angulos ipsius oppositos duobus rectis aequales esse,

Iungantur AF , BA .

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis aequales sunt (I. 32.), trianguli $AB\Gamma$ tres anguli ΓAB , $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ duobus rectis aequales sunt. Aequalis autem est ΓAB angulo $B\Gamma A$ (III. 21.), etenim in eodem sunt segmento $B\Gamma A$, et $\Gamma B A$ angulo $A\Gamma B$ (III. 21.) etenim in eodem sunt segmento

Obs. 3. Ea, quae in Cor. 2. dicta sunt, generalius de figura quacunque, quae parem laterum numerum habet, et circulo inscripta est, valet: nempe, si anguli talis figurae, initio facto a quovis eorum, ordine numeris indicentur, erit summa angulorum numeris imparibus 1. 3. 5. etc. notatorum aequalis summae angulorum numeris paribus 2. 4. 6. etc. notatorum. Huius propositionis demonstratio pro quavis figura circulo inscripta $AB\Gamma\Delta E\Z H\Theta$. . . quae parem habet laterum numerum, ita instrui potest: Sit (Fig. 247.) centrum circuli A , atque ex eo ducantur rectae OA , OB , OF , OA etc. quae efficient triangula OAB , OBF , $OF\Delta$ etc. quae singula erunt aequicrura (I. Def. 24.), adeoque in quolibet eorum anguli ad basin erunt aequales (I. 5.) i. e.

$$\text{erit } OAB = OBA$$

$$OFB = OF\Gamma$$

$$OF\Delta = OFE$$

$$OE\Delta = OEZ$$

$$OEZ = OZE$$

$$OHZ = OZH$$

$$OH\Theta = O\Theta H$$

$$OA\Theta = O\Theta A$$

unde, omnibus in unam summam collectis, erit $(OAB + OA\Theta) + (OFB + OF\Delta) + (OE\Delta + OEZ) + (OHZ + OH\Theta) = (OBA + OBF)$

$ΑΔΓΒ$ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ ταῖς ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ αἱ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΑΓ$, $ΑΓΒ$ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΑΔΓ$ ἴσαι εἰσίν. Ἄλλ' αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΒΑΓ$, $ΑΓΒ$ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΑΔΓ$ ἄρα δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ $ΒΑΔ$, $ΔΓΒ$ γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη¹⁾.

1) Commandinus observat, in vetusto aliquo codice verba: ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη deesse. In omnibus tamen editionibus illa habentur, nec Peyrardus codicum varietatem in iis notat.

$+ \angle OΔΓ + \angle OΔΕ + (\angle OZE + \angle OZH) + (\angle OΘΗ + \angle OΘΑ)$ i. e. integri anguli $A + Γ + Ε + Η =$ integris angulis $B + Δ + Ζ + Θ$. Et facile patet, idem ratiocinium continuari posse, quisquis in figura pari laterum numero circulo inscripta laterum numerus fuerit. Et simile erit ratiocinium, etiamsi integra figura inscripta sit segmento, quod non maius sit, quam semicirculus, Caeterum facillime etiam, quod Collega amicissimus Kausler, quum hanc propositionem cum eo communicassem, monuit, generaliter etiam res ita demonstrabitur. Sit propositio nostra demonstrata pro figura cuiusmodi quacunq̃ue, in qua numerus laterum $= 2n$, ac vera etiam erit propositio pro figura, cuius laterum numerus $= 2n + 2$. Sit nempe (Fig. 248.) figura $ΑΒΓΔΕΖΗΘ$, cuius numerus laterum $= 2n + 2$, in circulo. Iam, si ducta recta $ΓΘ$ tria quaecunq̃ue latera figurae $ΑΘ$, $ΑΒ$, $ΒΓ$, reliqua figura abscindantur, reliqua figurae latera $ΓΔ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΖΗ$, $ΗΘ$ erunt numero $2n - 1$, quibus si addas latus $ΓΘ$,

AAΓB. Totus igitur *AAΓ* angulis *BAΓ*, *AGB* aequalis est. Communis addatur *ABΓ*; ergo *ABΓ*, *BAΓ*, *AGB* angulis *ABΓ*, *AAΓ* aequales sunt. Sed *ABΓ*, *BAΓ*, *AGB* duobus rectis aequales sunt; et *ABΓ*, *AAΓ* igitur duobus rectis aequales sunt. Similiter ostendemus, et angulos *BAA*, *AGB* duobus rectis esse. In circulis igitur etc.

PROPOSITIO XXIII. (Fig. 251.)

Super eadem recta duo segmenta circulorum similia et inaequalia non constituentur ex eadem parte.

erit figura *TAΕZHΘ* circulo inscripta laterum numero = 2a. Atqui ex hypothesi demonstratum est, in hac figura esse angulos $\theta\Gamma A + E + H = A + Z + H\theta\Gamma$. Praeterea in quadrilatero *ABΓΘ* circulo inscripto est ex Obs. 2. $A + B\Gamma\theta = B + \Gamma\theta A$. Itaque $A + (B\Gamma\theta + \theta\Gamma A) + E + H = B + (\Gamma\theta A + H\theta\Gamma) + A + Z$ i. e. integri anguli $A + \Gamma + E + H =$ integri angulis $B + A + Z + \theta$.

Obs. 4. Propositio observatione praecedente allata totidem verbis quidem applicari nequit ad figuras circulo inscriptas, quae imparem habent laterum numerum. Prout enim, initio ab aliquo angulo facto, reliquos dextrorsum vel sinistrorsum numeres, alii alique anguli in eandem summam convenient, unde e praecedente propositione verbotenus applicata contradictoria consequerentur. Similis tamen propositio etiam in talibus figuris *ABΓAE* (Fig. 249.) locum habet, si recta e centro circuli *O* ad verticem anguli cuiuscunque *E* ducta, hunc in duos angulos *OEA*, *OBA* dividamus, atque has integri anguli *E* partes separatim numeremus. Ita enim pariter summa angulorum numeris imparibus notatorum aequalis erit summae angulorum numeris paribus notatorum, quod eadem ratione demonstrabitur, ac in Obs. 3. ductis nempe radiis ad omnes an-

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστήτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ AGB , AAB , καὶ διήχθω ἡ AGD , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ GB , AB .

Ἐπεὶ οὖν ὁμοιόν ἐστι τὸ AGB τμήμα τῷ AAB τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AGB γωνία τῇ ὑπὸ AAB , ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῆς AB , $ΓΔ$ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ AEB , $ΓΖΔ$ · λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AEB τμήμα τῷ $ΓΖΔ$ τμήματι.

gulorum vertices. Neque tamen haec propositio ita enunciata semper valet, si integra figura inscripta sit segmento, quod minus sit semicirculo, sed tum levi aliqua mutatione opus erit quod hic monuisse sufficiat. Cf. P'Huillier de Relatione mutua Capacit. et Terminor. fig. §. 215. De figuris, quae angulos gibbos habent, neque in Obs. 3. neque in Obs. 4. sermo est; nec omnino huius generis figurae circulo inscriptae esse possunt, nisi forte e lateribus figurae alia alia secent.

Obs. 5. Propositio III. 22. vel, quod eodem redit, propositio, quam in Obs. 2. habuimus, valet etiam conversa. Nempe, si in quadrilatero duo anguli oppositi aequales fuerint duobus rectis, circulus per tres quadrilateri vertices transiens (qui semper describi potest, III. 10. Cor. 1.) transibit etiam per verticem quarti anguli. Id enim eodem modo demonstrabitur, ac in III. Prop. 21. Obs. 2. Nominatim igitur circa quadratum et rectangulum circulus describi potest.

Si enim fieri potest ad eandem rectam AB duo segmenta circuloꝝ similia et inaequalia constituantur ex eadem parte AFB , AAB , et ducatur $AF\Delta$, et iungantur FB , AB .

Quoniam igitur simile est segmentum AFB segmento AAB , similia autem segmenta circuloꝝ sunt quae capiunt angulos aequales (III. Def. 11.); aequalis igitur est angulus AFB angulo AAB , exterior interiori, quod fieri nequit (I. 16.). Non igitur super eadem recta etc.

PROPOSITIO XXIV. (Fig. 252.)

Super aequalibus rectis similia circuloꝝ segmenta aequalia inter se sunt.

Sint enim super aequalibus rectis AB , $\Gamma\Delta$ similia segmenta circuloꝝ AEB , $\Gamma Z\Delta$; dico aequale esse segmentum AEB segmento $\Gamma Z\Delta$.

Obs. 6. At, quae in Obs. 3. et 4. continentur propositiones, nequeunt converti, i. e. si v. c. in figura aliqua, quae parem laterum numerum habet, sit summa angulorum imparium 1. 3. 5. etc. aequalis summae angulorum 2. 4. 6. etc. inde haud consequitur, circulum describi posse, qui per omnes figurae vertices transeat. Sunt potius innumeri casus, quibus id fieri nequit. Sit enim v. g. (Fig. 250.) in circulo Hexagonum $AB\Gamma\Delta EZ$, in quo itaque ex Obs. 3. erant anguli $A + B\Gamma\Delta + E = AB\Gamma + A + Z$. Producantur duo latera AB , $\Delta\Gamma$ lateri $B\Gamma$ contigua, donec rectae ΘH , quae parallela ducta est rectae $B\Gamma$, occurrant in punctis Θ , H , eritque (I. 29.) angul. $\left(\begin{smallmatrix} A\Theta H \\ \Theta \end{smallmatrix}\right) = AB\Gamma$, et $\left(\begin{smallmatrix} \Delta H\Theta \\ H \end{smallmatrix}\right) = B\Gamma\Delta$, adeoque $A + H + E = \Theta + A + Z$ i. e. figura $A\Theta H\Delta EZ$ ita comparata est, ut summa angulorum imparium aequalis sit summae angulorum parium, neque tamen circulus per vertices figurae $A\Theta H\Delta EZ$ transire

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ AEB τμήματος ἐπὶ τὸ GZA , καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ Γ , τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσῃν εἶναι τὴν AB τῇ $\Gamma\Delta$. τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ GZA . Εἰ γὰρ ἡ AB εὐθεῖα ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ GZA μὴ ἐφαρμόσει¹⁾, ἦτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς, ἢ παραλλάξει ὡς τὸ $\Gamma\Theta H\Delta$, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Γ, H, Δ , ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ GZA ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε.

Κύκλον τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἐστὶ τμήμα.

Ἔστω τὸ δοθέν τμήμα κύκλου, τὸ $AB\Gamma$. δεῖ δὴ προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὐπὲρ ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τμήμα.

1) Post verba: μὴ ἐφαρμόσει edd. Oxon. et Basil. habent: ἀλλὰ παραλλάξει, ὡς τὸ $\Gamma\Theta H\Delta$. Κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ $\Gamma\Theta H\Delta$ τὸν GZA κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο, τὰ Γ, H, Δ etc. cum qua lectione consentiunt omnes a Peyrardo collati codd. praeter codicem a, quem secutus Peyrardus ita legit, ut nos quoque expressimus. Verum etiam in hac lectione quam verioreni putamus, aliquid desiderari posse videtur, quo ostendatur, ex III. 23. unum segmentum circuli neque extra neque intra alterum cadere posse. Idem sentire videntur DeLambre et Prony in relatione ad Instit. Franc. facta.

potest. Circulus enim, qui per tria puncta A, Z, E transit, per haec puncta omnimode determinatus est (III. 10. Cor. 1.),

Congruente enim segmento AEB segmento ΓZA , et posito puncto A super Γ , recta vero AB super ΓA , congruet et punctum B puncto A , propterea quod aequalis est AB ipsi ΓA ; ipsa autem AB ipsi ΓA congruente, congruet et segmentum AEB segmento ΓZA . Si enim AB recta ipsi ΓA congruat, segmentum autem AEB segmento ΓZA non congruat, vel intra ipsum cadet, vel extra, vel pertransibit ut $\Gamma\Theta HA$, et circulus circulum secabit in pluribus punctis quam duobus, in punctis Γ , H , A , quod fieri non potest (III. 10.). Non igitur congruente recta AB ipsi ΓA non congruet segmentum AEB segmento ΓZA . Congruet igitur, et aequale ipsi erit. Ergo super aequalibus etc.

PROPOSITIO XXV. (Fig. 253. a. b. c.)

Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

Sit datum circuli segmentum $AB\Gamma$; oportet describere circulum, cuius $AB\Gamma$ est segmentum.

nec itaque alius esse potest, quam circulus $AZE\Gamma B$. At hic circulus rectas AB , ΓP secat alteram in punctis A , B , alteram in punctis A , Γ , neque igitur iterum eas secare potest in punctis Θ , H (III. 2. Cor. 1.) i. e. nequit transire per vertices Θ , H figurae $A\Theta H\Delta EZ$. Pariter res demonstrabitur de conversa eius, quam Obs. 4. habuimus.

PROPOSITIO XXIII.

Obs. 1. Quamvis verba: *ἐν τῇ αὐτῇ μέτρῃ* non omitti possint ob demonstrationem, verum tamen est, quod Campa-

Τετμήσθω γὰρ ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Δ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου τῇ $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔΒ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΒ$. ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ $ΒΑΔ$ ἦτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστώτω πρὸς τῇ $ΒΑ$ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Α$, τῇ ὑπὸ $ΑΒΔ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$; καὶ διήχθω ἡ $ΑΒ$ ἐπὶ τὸ $Ε$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΕΓ$. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ ὑπὸ $ΑΒΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΒΕ$ εὐθείᾳ τῇ $ΕΑ$. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΑΓ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΔΕ$, δύο δὲ αἱ $ΑΔ$, $ΔΕ$ δυοὶ ταῖς $ΓΔ$, $ΔΕ$ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΔΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἐστὶν ἴση, ὁρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσεις ἄρα ἡ $ΑΕ$ βάσει τῇ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ $ΑΕ$ τῇ $ΕΒ$ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ $ΒΕ$ ἄρα τῇ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΕΓ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὁ ἄρα κέντρον τῷ $Ε$, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΕΓ$, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγέγραμμένος κύκλος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. Καὶ δήλον ὡς τὸ $ΑΒΓ$ τμήμα ἐλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ τὸ $Ε$ κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

nus, Commandinus, Clavius, Peletarius, aliiq̃ue monent, nec e diversis eĩsadem rectae partibus esse posse duo segmenta similia et inaequalia, quod facile patet, si alterum eorum circa rectam communem circumvolutum ponatur, ita ut iam sint ex eadem rectae communis parte.

Obs. 2. Rob. Simson, monet, in Prop. 23. ostendendum esse, non posse ex eadem rectae $ΑΒ$ parte constitui duo circuli segmenta similia et inaequalia, quorum alterum alterum secet (quoniam] non plura duobus punctis $Α$ et $Β$ communia

Secetur enim AT bifariam in A (I. 10.); et ducatur a puncto A ipsi AT ad rectos angulos AB (I. 11.), et iungatur AB . Ergo angulus ABA ipso BAA vel maior est, vel aequalis, vel minor.

Sit primum maior, et constituatur ad rectam BA , et ad punctum in ea A , angulo ABA aequalis angulus BAE (I. 23.), et producat AB ad E , et iungatur ET . Et quoniam aequalis est angulus ABE ipsi BAE , aequalis est et recta BE rectae EA (I. 6.). Et quoniam aequalis est AA ipsi AT , communis autem AE , duae AA , AE duabus TA , TE aequales sunt, utraque utrique, et angulus AAE angulo TAE est aequalis; rectus enim uterque; basis igitur AE basi TE est aequalis (I. 4.). Sed AE ipsi EB ostensa est aequalis; et BE igitur ipsi TE est aequalis; tres igitur AE , EB , ET aequales inter se sunt; ergo circulus centro E , intervallo autem una ipsarum AE , EB , ET descriptus transibit et per reliqua puncta, et erit descriptus circulus (III. 9.). Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus. Et manifestum est segmentum ABT minus esse semicirculo, propterea quod centrum E extra ipsum cadit.

habere possunt III. 10.) ne postea demum ad Prop. 24. id demonstrare necesse sit. Caeterum Campanus in Prop. 23. paullo prolixius distinguit casus, quibus punctum P in uno crurum anguli AAB , aut extra hunc angulum, aut intra eum situm est.

PROPOSITIO XXIV.

Obs. 1. Robert. Simson., postquam Prop. 23. ita ut

Obs. 2. ad III. 23. diximus, demonstraverat, breviter iam ex-

Ὀμοίως καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία ἴση ᾖ τῇ ὑπὸ $B\Delta\Delta$, τῆς $\Delta\Delta$ ἴσης γενομένης ἐκατέρα τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $\Delta\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ $AB\Gamma$ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ ἐλάττω ᾖ τῆς ὑπὸ $B\Delta\Delta$, καὶ συστησόμεθα πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A , τῇ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ $AB\Gamma$ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς AB ὡς τὸ E , καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ $AB\Gamma$ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὐπὲρ ἔστι τὸ τμήμα. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβήκνῃαι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, ΔEZ καὶ ἐν αὐτοῖς, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, αἱ ὑπὸ $B\eta\Gamma$, $E\theta Z$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ · λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $B\kappa\Gamma$ περιφέρεια τῇ $E\lambda Z$ περιφερείᾳ.

pedit hanc 24., dum provocat saltim ad 23., ut ostendat, non posse non rectis AB , $\Gamma\Delta$ congruentibus etiam segmenta similia super iis posita congruere.

Obs. 2. Clavius monet, non solum segmentorum, sed nominatim etiam circumferentiarum, quae ipsorum termini sunt, aequalitatem consequi ex ostensa congruentia.

Obs. 3. Eodem observante, conversa quoque Prop. 23. et 24. locum habet. Nempe segmenta circulorum aequalia super aequalibus rectis, vel super eadem recta constituta si-

Similiter et si angulus ABA aequalis sit ipsi BAA , ipsa AA aequali facta utrivis ipsarum BA , AT , tres AA , AB , AT aequales inter se erunt, et erit centrum A completi circuli et ABT semicirculus.

Si autem ABA minor sit ipso BAA , et si constituamus ad BA rectam, et ad punctum in ea A , ipsi ABA angulum aequalem (I. 23.); intra ABT segmentum cadet centrum in AB , ut E , et erit ABT segmentum maius semicirculo.

Segmento igitur circuli dato, descriptus est circulus, cuius est segmentum. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXVI. (Fig. 254.)

In aequalibus circulis, aequales anguli aequalibus circumferentiis insistent, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint enim aequales circuli ABT , AET , et in ipsis ad centra quidem aequales anguli sint BHT , ETZ , ad circumferentias autem anguli BAT , EAT ; dico aequalem esse BKT circumferentiam circumferentiae EAT .

milis erunt. Quum enim aequalia esse ponantur segmenta, et aequales bases habeant, basibus his congruentibus etiam segmenta congruent. Nequit enim unum alterum includere, quod aequalia sunt, neque unum alterum secare ex III. 10. Congruentibus autem segmentis crura angulorum ad idem eorum punctum ab extremis basis ducta congruent, adeoque hi anguli, et propterea omnes (III. 22.), qui in his segmentis sunt, anguli aequales, et segmenta similia erunt (III. Def. 11.).

Ἐπεξέχθωσαν γὰρ αἱ $BΓ$, EZ .

Καὶ ἐπεὶ ἴσῃ εἰσὶν οἱ $ABΓ$, $ΔEZ$ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ BH , $HΓ$ δυοῖν ταῖς $ΕΘ$, $ΘZ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ H γωνία τῇ πρὸς τῷ $Θ$ ἴση ἐστὶ βάσις ἄρα ἡ $BΓ$ βάσει τῇ EZ ἴσῃ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶ ἡ πρὸς τῷ A γωνία τῇ πρὸς τῷ $Δ$, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BAΓ$ τμήμα τῷ $EΔZ$ τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν $BΓ$, EZ τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμή-

PROPOSITIO XXV.

Obs. Boermann., Rob. Simson. et Playfair eos casus, quibus segmentum datum non est semicirculus, coniunctum demonstrant. Quod ad additam observationem attinet, quibus casibus segmentum datum maius aut minus semicirculo, aut ei aequale sit, Austin. monet, eam ita positam esse, quasi ex demonstratione demum id detegatur. Campanus rem invertit, et monstrat, si segmentum minus fuerit semicirculo, fore angulum $ABΔ$ maiorem angulo BAD ; si semicirculus, fore hos angulos aequales; si maius semicirculo, fore $ABΔ$ minorem angulo BAD , quod ipsum ut corollarium addit Billingsley. Caeterum Campanus, Peletarius, Billingsley, Tacquet, alique problema ita etiam solvunt, ut duas quascunque chordas in segmento duoant, et eas rectis bisecent, quas ipsis ad angulos rectos erigunt: Orontius Fineus, Clavius, Billingsley, Barrov., Coësius, Henrion hanc solutionem simpliciore reddunt, dum duas chordas ita ducunt, ut unum circumferentiae punctum commune habeant. Austin. denique observat, in constructione problematis sumi, angulos, et latera trianguli dato segmento inscripti dari: hoc autem posito omitti posse hanc propositionem, utpote in generaliore IV. 5. comprehensam. Quod quamvis verum sit, in solutione nostri problematis ope IV. 5. facta addi tamen debet, circuli ita descripti partem ex III. 23. cum dato segmento coincidere.

PROPOSITIO XXVI.

Obs. Paulo distinctius procedit demonstratio, si duo

Iungantur enim BF , EZ .

Et quoniam aequales sunt circuli ABF , AEZ , aequales sunt, quae ex centris (III. Def. 1.); duae igitur BH ; HF duabus $E\Theta$, ΘZ aequales sunt; et angulus ad H angulo ad Θ aequalis est; basis igitur BF basi EZ est aequalis (I. 4.). Et quoniam aequalis est angulus ad A angulo ad Δ , simile igitur est segmentum BAF segmento $E\Delta Z$ (III. Def. 11.), et sunt super aequales rectas BF , EZ ; quae autem su-

casus, prout anguli ad centrum vel ad peripheriam aequales ponuntur, separatim tractantur, quod fecere Campanus, Clavius, Peletarius, Coësius. Ostendendum nempe est, et ex uno supposito consequi alterum ope III. 20. Praeterea iure adhuc addit Clavius, demonstrationem eius casus, quo anguli ad peripheriam BAF , $E\Delta Z$ non sunt minores recto, adeoque, ut ex III. 25. consequitur, segmenta BKF , $E\Delta Z$ non minora semicirculo. Is casus, nisi in III. 20. cum Austino angulos gibbos quoque comprehendere velis, ne manca sit demonstratio, si anguli BAF , $E\Delta Z$ obtusi fuerint ope III. 22. ad casum angulorum acutorum reduci debet: sin hi anguli recti fuerint, res ex I. Ax. 8. patet. Ante omnia autem monendum fuerit, angulos BAF , $E\Delta Z$ vel semicirculis insistere, vel segmentis, quae maiora vel minora sint semicirculis, prout ipsi recti, obtusi aut acuti fuerint ex'conversa III. 31. quae ante hanc 26. poni potest. Denique Commandinus, Clavius alique monent, has et tres sequentes propositiones etiam in uno eodemque circulo locum habere.

Cor. 1. Hinc etiam in aequalibus circulis circumferentiae, in quibus sunt anguli aequales, aequales erunt. Nempe, quum circumferentiae, quibus anguli aequales insistent, aequales sint, aequalia etiam erunt reliqua circulorum segmenta (I. Ax.) i. e. circumferentiae, in quibus sunt anguli aequales.

Cor. 2. Cf. Clavium ad III. 27. vel Pappi Collect. Mathem. Comment. ad III. 52. Prop. Si in circulo fuerint duae rectae parallelae AA , BF (Fig. 255.) et puncta earum ex-

μικτα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ $B\Gamma$ τμήμα τῷ $E\Delta Z$ τμήματι. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ $AB\Gamma$ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔEZ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα $B\Gamma$ τμήμα λοιπῷ $E\Delta Z$ ἴσον· ἢ ἄρα $B\Gamma$ περιφερεία ἴσῃ τῇ $E\Delta Z$ περιφερείᾳ. Ἐὰν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκνῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἂν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἂν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκνῖαι.

trema, quae ex eadem parte sunt, iungantur rectis AB , ΓA , erunt circumferentiae a parallelis interceptae AB , ΓA aequales. Ductis enim rectis BA , ΓA , erunt anguli $AB\Gamma$, $\Gamma A\Delta$ aequales (I. 29.), adeoque aequales erunt circumferentiae, quibus insistent (III. 26. Obs.).

Cor. 3. Vid. Clavius. Si in aequalibus circulis, vel in eodem circulo duo anguli inaequales fuerint (sive illi sint anguli ad centrum, sive ad peripheriam), arcus quoque, vel circumferentiae, quibus insistent, inaequales erunt, nominationem ea circumferentia, cui maior angulus insistit, etiam ipsa maior erit. Et si unus istorum angulorum sit multipulum alterius anguli, arcus quoque, cui unus angulus insistit, idem multipulum eius arcus erit, cui alter angulus insistit. Hoc corollarium etiam de angulis gibbis i. e. duobus rectis maiori-
bus, vel, si mavis de summa angulorum duobus rectis maiore vel iis aequali valet, dummodo pro arcu, cui insistent, etiam eam circuli partem sumas, quae semicirculo vel aequalis vel maior est.

PROPOSITIO XXVII.

Obs. Est haec propositio conversa prioris. Ad plenior-
tem eius demonstrationem pariter ac in III. 26. separatim tra-

per aequales rectas similia sunt segmenta circularum aequalia inter se sunt (III. 24.); aequale igitur segmentum $BA\Gamma$ segmento $E\Lambda Z$. Est autem et totus $AB\Gamma$ circulus toti ΔEZ circulo aequalis; reliquum igitur $BK\Gamma$ segmentum reliquo $E\Lambda Z$ aequale; ergo circumferentia $BK\Gamma$ aequalis est circumferentiae $E\Lambda Z$. Si igitur in aequalibus etc.

PROPOSITIO XXVII. (Fig. 256.)

In aequalibus circulis anguli aequalibus circumferentiis insistentes aequales inter se sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

ctandi sunt casus, quibus circumferentiae, quae aequales ponuntur, non minores sunt semicirculo, quod simili ratione ope III. 22. fieri potest.

Cor. 1. E Clavio. Duae rectae AA , BF (Fig. 255.), quae inter se in circulo aliquo aequales arcus AB , ΔF interceptiunt, sunt parallelae. (Est haec convers. Cor. 2. III. 26. Prop.) Quum enim circumferentia AB sit aequalis circumferentiae ΔA , erit (III. 27. coll. Obs. ad III. 26. sub finem) $\angle ATB = \angle \Delta A$, adeoque AA , BF parallelae (I. 29.).

Cor. 2. Et quum etiam circumferentiae $\Delta \Delta\Gamma$, ΔAB aequales sint, aequales erunt anguli $AB\Gamma$, $\Delta \Gamma B$ (III. 27.), adeoque rectae AB , $\Gamma \Delta$, nisi hi anguli simul aequales sint duobus rectis, inter se convenient, ita, ut triangulum isosceles constituent (I. 6.), cuius vertex igitur situs erit in recta, quae e media basi BF perpendicularis ad eam erigitur (I. 26. Cor. 4.) i. e. (III. 1. Cor. 1.) in diametro ad mediam basin BF ducta.

Cor. 3. Pariter, si puncta istarum parallelarum e diversis partibus sita iungantur rectis BA , $\Delta \Gamma$, quae se necessario intersectant in puncto aliquo E , aequales erunt anguli ATB , $\Delta B\Gamma$, adeoque (I. 6.) aequales sunt rectae BE , ΓE ,

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς $ABΓ$, $ΔΕΖ$ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν $ΒΓ$, $ΕΖ$, πρὸς μὲν τοῖς $Η$, $Θ$ κέντροις γωνίαι βεβηκέντωσαν αἱ ὑπὸ $ΒΗΓ$, $ΕΘΖ$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΘΖ$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$.

Εἰ 1) γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ΒΗΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΘΖ$, μία αὐτῶν μείζων ἐστί. Ἐστω μείζων ἡ ὑπὸ $ΒΗΓ$, καὶ συνεσταίτω πρὸς τῇ $ΒΗ$ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Η$, τῇ ὑπὸ $ΕΘΖ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΒΗΚ$ αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν ἴση ἄρα ἡ $ΒΚ$ περιφέρεια τῇ $ΕΖ$ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ $ΕΖ$ τῇ $ΒΓ$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ $ΒΚ$ ἄρα τῇ $ΒΓ$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ $ΒΗΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΘΖ$ ἴση ἄρα. Καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $ΒΗΓ$ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ $Α$, τῆς δὲ ὑπὸ $ΕΘΖ$ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ $Δ$ ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ $Α$ γωνία τῇ πρὸς τῷ $Δ$. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Ita cum Peyrardo ex Cod. a. omnino legendum esse videtur. Edd. Oxon. et Basil. cum omnibus reliquis a Peyrardo comparatis manuscriptis habent: *Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ $ΒΗΓ$ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $ΕΘΖ$, φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΔΖ$ ἴση ἐστὶν εἰ δὲ οὐ, μία αὐτῶν μείζων ἐστὶν etc.* Quae tamen, quum ad finem demonstrationis denuo aequalitas angulorum A et $Δ$ ex aequalitate angulorum $ΒΗΓ$ et $ΕΘΖ$ deducatur, minus apta videntur.

atque ex eadem ratione rectae $ΑΕ$ $ΔΒ$, vel punctum $Ε$ quoque positum est in recta, quae e media basi $ΒΓ$ perpendicularis ad eam erigitur (I. 26. Cor. 4.) i. e. (III. 1. Cor. 1.) in diametro ad mediam basin ducta. Haec Corollaria habet Gilbert. p. 127.

Cor. 4. E Clavio, qui ad Candanum de Subtilit. id re-

In aequalibus enim circulis $AB\Gamma$, ΔEZ , aequalibus circumferentiis $B\Gamma$, EZ ad centra H , Θ , anguli insistant $BH\Gamma$, $E\Theta Z$, ad circumferentias vero anguli BAT , EAZ ; dico angulum $BH\Gamma$ angulo $E\Theta Z$ esse aequalem, angulum vero BAT angulo EAZ .

Si enim inaequalis sit angulus $BH\Gamma$ angulo $E\Theta Z$, unus ipsorum maior erit. Sit maior $BH\Gamma$, et constituitur ad rectam BH , et ad punctum in ea H , angulo $E\Theta Z$ aequalis BHK (I. 23.); aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt (III. 26.); aequalis igitur circumferentia BK circumferentiae EZ . Sed EZ ipsi $B\Gamma$ aequalis est, et BK igitur ipsi $B\Gamma$ est aequalis (I. Ax. 1.), minor maiori, quod fieri non potest. Non igitur inaequalis est angulus $BH\Gamma$ angulo $E\Theta Z$; aequalis igitur. Et est ipsius quidem $BH\Gamma$ dimidius angulus ad A , ipsius vero $E\Theta Z$ dimidius angulus ad Δ (III. 20.); aequalis igitur et angulus ad A angulo ad Δ . In aequalibus igitur etc.

fert. Cf. Gilbert, p. 130. Si (Fig. 257.) in circulo ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum AT producat, sintque quadrantes ex una parte illius in partes quocunque aequales IZ , ZI , IB , et totidem $A\Theta$, ΘH , HB divisi, iunganturque rectae $Z\Theta$, $I\Theta$ etc. quae ex Cor. 1. parallelae erunt, atque ex puncto extremo B alterius diametri per punctum divisionis I ipsi ex una parte proximum recta ducatur IB , quae cum altera diametro conveniet in K : erit tota recta KA inter punctum concursus K et concavam peripheriam circuli omnibus parallelis $I\Theta$, $Z\Theta$ etc. una cum diametro AT simul sumtis, aequales. Nam quum, ob arcus aequales, rectae $I\Theta$, $Z\Theta$, AT i. e. $I\Theta$, KA , et $Z\Theta$, AT (Cor. 1.) et ex eadem ratione BI , HZ (adeoque IK , HA , HZ , ΘT

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττωνα τῇ ἐλάττωι.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ$, $ΔΕΖ$, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ $ΒΓ$, $ΕΖ$, τὰς μὲν $ΒΑΓ$, $ΕΔΖ$ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ $ΒΗΓ$, $ΕΘΖ$ ἐλάττωνας· λέγω ὅτι ἡ μὲν $ΒΑΓ$ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ $ΕΔΖ$ μείζοντι περιφερείᾳ, ἡ δὲ $ΒΗΓ$ ἐλάττων περιφέρεια τῇ $ΕΘΖ$ ἐλάττωι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ $Κ$, $Λ$, καὶ ἐπεξέυχθωσαν αἱ $ΒΚ$, $ΚΓ$, $ΕΛ$, $ΛΖ$.

(adeoque $ΖΛ$, $ΘΓ$) parallelae sint, erit $IΗ=ΚΛ$, et $ΖΘ=ΑΓ$ (I. 34.) adeoque $ΚΛ=ΚΑ+ΑΓ+ΓΑ=ΙΗ+ΖΘ+ΓΑ$.

Cor. 5. Si (Fig. 258.) semicirculus $ΑΔΕΗ$ (qui in Cor. praeced. in) numerum partium aequalium quemcunque divisus fuerat) iam dividatur in numerum imparem partium aequalium quemcunque $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$ etc. et ducantur per puncta aequaliter a diametro distantia rectae $ΒΘ$, $ΓΖ$ etc. quae inter se et cum diametro $ΑΟΗ$ parallelae erunt (Cor. 1.), et ad extremitates eius harum parallelarum, quae a diametro $ΑΗ$ maxime distat, ducantur e centro $Ο$ radii $ΟΔ$, $ΟΕ$, summa rectarum $βθ$, $γε$, $ΔΕ$, quas hi radii e parallelis intercipiunt, aequalis erit radio $ΑΟ$. Nam rectae $ΑΟ$, $ΕΟ$ productae ad $Μ$, $Ν$. ob angulum $ΜΟΝ=ΑΟΕ$ (I. 15.) arcum $ΜΝ=ΔΕ$ abscindent (III. 26.). Ductis deinde per $Δ$, $Γ$ rectis $ΔΔ$, $ΓΚ$ etc. parallelis rectae $ΕΜ$, abscindentur arcus $ΜΔ$, $ΑΚ$ etc. aequales arcibus $ΔΕ$, $ΑΓ$ etc. (III. 26. Cor. 2.) et, quum integer semicirculus $ΜΑΕ$ aequalis sit semicirculo $ΑΔΗ$, adeoque tot arcus aequales inter se, et arcibus $ΑΒ$, $ΒΓ$ etc. contineat, quot habet semicirculus $ΑΔΗ$, reliquas etiam arcus $ΑΚ$ aequalis erit arcui $ΒΓ$, adeoque ducta $ΒΔ$ parallela erit rectae $ΓΚ$.

PROPOSITIO XXVIII. (Fig. 260.)

In aequalibus circulis aequales rectae aequales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori.

Sint aequales circuli $AB\Gamma$, AEZ , et in ipsis aequales rectae $B\Gamma$, EZ ¹⁾, circumferentias quidem $BA\Gamma$, EJZ maiores auferentes, circumferentias vero $BH\Gamma$, EOZ minores; dico maiorem quidem $BA\Gamma$ aequalem esse maiori EJZ , minorem vero $BH\Gamma$ minori EOZ .

Sumantur enim centra circulorum, K , A , et iungantur BK , $K\Gamma$, EA , AZ .

1) In figuris et textu litteras reposuimus, quales sunt in edd. Oxon. et Basil. et in figura propositionis sequentis, quum Peyraudus nullam causam mutatarum litterarum afferat.

Pariter rectae ΓM , BA etc. inter se, et diametro AN parallelae erunt (Cor. 1.) Et quum ΓA , AM sint arcus aequales, rectae ΓM , AA se intersecabunt in puncto aliquo δ sito in diametro, quae ad rectam AM , vel, quod eodem redit, ad rectam ei parallelam EN perpendicularis ducitur (Cor. 3.) i. e. ut facile patet, in diametro AOH . Eodem modo ostendetur, rectas ΓK , BA in puncto α eiusdem diametri convenire etc. Et quum sit $AO = B\theta$ (I. 34.) et $\alpha O = B\beta$ (I. 34.), erit $\beta\theta = A\alpha$. Eodem modo, quum sit $\alpha O = \Gamma\epsilon$, at $\delta O = \Gamma\gamma$, erit $\alpha\delta = \gamma\epsilon$. Denique est $\delta O = AE$ (I. 34.): itaque $A\alpha + \alpha\delta + \delta O$ i. e. $AO = \beta\theta + \gamma\epsilon + AE$. Habet hanc propositionem Kraftius in Geom. Sublim. §. 92., qui eam La Hirie (Mém. de Math. 1692. p. 92.) tribuit. Cf. Gilbert. l. c. p. 151.

Cor. 6. Vid. Clavium, Boermannum, aliosque. Recta EZ (Fig. 259.), quae ex medio peripheriae alicuius ducitur circumulum contingens, parallela est rectae lineae, quae peripheriam illam subtendit. Ducta enim e centro A ad con-

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ BK , $KΓ$ δυσὶ ταῖς EA , AZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσεις ἢ $BΓ$ βάσει τῇ EZ ἴση γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ $BKΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ EAZ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἢ $BΗΓ$ περιφέρεια τῇ $ΕΘΖ$ περιφερείᾳ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ $ΑΒΓ$ κύκλος ὅλῳ τῷ $ΔΕΖ$ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ $ΒΑΓ$ περιφέρεια λοιπῇ τῇ $ΕΔΖ$ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐστώσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ $BΗΓ$, $ΕΘΖ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $BΓ$, EZ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἢ $BΓ$ εὐθεῖα τῇ EZ .

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ K , $Λ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BK , $KΓ$, EA , AZ .

tactum A recta AA perpendicularis est ad tangentem (III. 18.). At ductis AB , AF , in triangulis $ABΘ$, $AFΘ$ est $AB=AF$, et $ΑΘ$ communis, et ob arcus AB , AF ex hyp. aequales, angulus $BΑΘ=ΓΑΘ$ (III. 27.), itaque $BΘΑ=ΓΘΑ$ (I. 4.), proinde uterque rectus est (I. 13.): itaque recta EZ parallela erit rectae BF (I. 28.). Hinc simul patet, rectam, quae e centro circuli ducta aroum circuli bifariam secat, secare etiam rectam illi arcui subtensam bifariam et ad angulos rectos.

COR. 7. Conversa quoque antecedentis corollarii facile demonstrabitur: nempe, si recta EZ , quae ex medio peripheriae alicuius ducitur, parallela est rectae lineae, quae il-

Et quoniam aequales circuli sunt, aequales sunt et rectae ex centris ductae (III. Def. 1.); duae igitur BK , KT duabus EA , AZ aequales sunt, et basis BT basi EZ aequalis; angulus igitur BKT angulo EAZ aequalis est (I. 8.). Aequales autem anguli aequalibus circumferentiis insistent, quando ad centra sunt (III. 26.); aequalis igitur BHT circumferentia ipsi $E\Theta Z$ circumferentiae. Est autem et totus ABT circulus toti ΔEZ circulo aequalis; igitur et reliqua circumferentia BAT reliquae circumferentiae EAZ aequalis est. In aequalibus igitur etc.

PROPOSITIO XXIX. (Fig. 260.)

In aequalibus circulis aequales circumferentias aequales rectae subtendunt.

Sint aequales circuli ABT , ΔEZ , et in ipsis sumantur aequales circumferentiae BHT , $E\Theta Z$, et iungantur BT , EZ rectae; dico aequalem esse rectam BT rectae EZ .

Sumantur enim centra circulorum, K , Λ , et iungantur BK , KT , EA , AZ .

- Iam lineam subtendit, EZ contingit circulum. Erit nempe angulus $B\Lambda\Theta = T\Lambda\Theta$ (III. 27.) $\Delta B\Theta = \Delta T\Theta$ (I. 5.), adeoque (I. 32.) $B\Theta\Delta = T\Theta\Delta =$ recto (I. 13.). Unde et $E\Lambda\Delta$ rectus erit (I. 29.) et EA circulum continget (III. 17.).

Cor. 8. Si in aequalibus circulis, vel in eodem circulo duo arcus inaequales fuerint, erunt etiam anguli iis insistentes inaequales, sive illi fuerint anguli ad centrum sive ad peripheriam, nominatim, qui maioribus arcubus insistent anguli, erunt maiores. Et, si unus istorum arcuum sit multipulum alterius, erit etiam angulus priori insistens idem multipulum

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ περιφέρεια τῇ $ΕΘΖ$ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BΚΓ$ τῇ ὑπὸ $ΕΙΖ$. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δύο δὴ αἱ $ΒΚ$, $ΚΓ$ διαὶ ταῖς $ΕΔ$, $ΑΖ$ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσαι βάσεις ἄρα ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴση ἐστὶν. Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν διχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ $ΑΔΒ$, δεῖ δὴ τὴν $ΑΔΒ$ περιφέρειαν διχα τεμεῖν.

anguli alteri insistentis. Est haec conversa III. 26. Cor. 2. et pariter de angulis gibbis quoque valet.

PROPOSITIO XXVIII.

Obs. Ad pleniorē rei tractationem (Pfleiderero monente) praemittenda fuerint sequentia: Si in uno circulo recta $ΒΓ$ per centrum transeat, in altero etiam ei aequali recta $ΕΖ$ ipsi $ΒΓ$ aequalis per centrum transibit. Nam si $ΕΖ$ non per centrum transiret, ea, quae per centrum circuli $ΔΕΖ$ transit, maior foret quam $ΕΖ$ (III. 15.) i. e. maior quam $ΒΓ$. Eadem autem illi est aequalis (III. Def. 1.) q. e. a. Tum autem, quum circuli aequales sint, semicirculi etiam, quos diametri $ΒΓ$, $ΕΖ$ auferunt (I. Def. 17.) aequales erunt. Sin autem $ΒΓ$ non per centrum transeat, nec ea, quae illi aequalis est, $ΕΖ$ per centrum transire potest: nam, si $ΒΓ$ non per centrum transit, erit illa minor diametro circuli $ΑΒΓ$ (III. 15.) i. e. (III. Def. 1.) minor diametro circuli $ΔΕΖ$, itaque et $ΕΖ$ minor est diametro circuli $ΔΕΖ$, adeoque non per centrum circuli $ΔΕΖ$ transit. Atque hinc deinde reliqua consequentur ut apud Euclidem.

Cor. 1. Et quum circumferentiae, quas aequales rectae

Et quoniam aequalis est circumferentia BHT circumferentiae $E\Theta Z$, aequalis est et angulus BKF angulo $E\Lambda Z$ (III. 27.). Et quoniam aequales sunt circuli ABT , ΔEZ , aequales sunt et rectae ex centrīs ductae; duae igitur BK , KF duabus $E\Lambda$, ΛZ aequales sunt, et angulos aequales continent; basis igitur BT basi EZ aequalis est. In aequalibus igitur etc.

PROPOSITIO XXX. (Fig. 268.)

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia AAB ; oportet circumferentiam AAB bifariam secare.

in aequalibus circulis vel in eodem circulo (cf. Obs. ad III. 26.) auferunt, sint aequales, anguli etiam, qui iis insistant, sive ad centrum, sive ad peripheriam aequales erunt (III. 27.) adeoque segmenta erunt similia (III. Def. 11.). Cf. Pflleiderer.

Cor. 2. Si duo aequales circuli (Fig. 261.) se intersectent in A et B , arcus ATB , ΔAB erunt aequales, adeoque similes (III. 27. et III. Def. 11.).

Cor. 3. Si in aequalibus circulis aut in eodem circulo inaequales rectae constituentur, maior recta maiorem, minor minorem circumferentiam abscindet (I. 25. et III. 26. Cor. 3., si nempe de segmentis loquamur, quae semicirculo minora sunt. In segmentis vero, quae semicirculo maiora sunt, contrarium valet, nempe minor recta maius segmentum subtendit. Cf. Clavius.

PROPOSITIO XXIX.

Obs. 1. Est haec conversa praecedentis. Et, siquidem circumferentia unius circuli sit semicirculus, erit (quum circumferentiae utrimque aequales sumtae sint, et circuli etiam aequales ponantur) etiam circumferentia, quae ex altero sumta est, semicirculus, adeoque rectae subtendentes diametri. Sin

Ἐπεζεύχθω ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὁρ-
θὰς ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AA , ΔB .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , κοινὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ δύο δὴ αἱ AG , $\Gamma\Delta$ ὅσαι ταῖς BG , $\Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶν. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AGA γωνία τῇ ὑπὸ BGD ἴση, ὁρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσεις ἄρα ἡ AA βάσει τῇ AB ἴση ἐστὶν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν AA , ΔB περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου ἴση ἄρα ἡ AA περιφέρεια τῇ ΔB περιφερείᾳ.

autem aequales sint circumferentiae BHG , $E\theta Z$, erunt, quum circuli aequales sint, etiam reliquae circumferentiae BAG , EAZ aequales, et quum, ut Euclides ostendit, aequales sint anguli ad centrum, adeoque etiam anguli ad peripheriam, segmenta haec erunt similia (III. Def. 11.). Et haec propositio pariter valet, si aequales circumferentiae in eodem circulo sumtae sint. Hinc consequitur

Cor. 1. Rectae AB , $\Gamma\Delta$ (Fig. 255.) ita ductae ut III. 26. Cor. 2. aequales sunt.

Cor. 2. Si vero in aequalibus circulis, vel in eodem circulo inaequalia segmenta sumta fuerint, dum utrumque minus est semicirculo, recta, quae minori segmento subtenditur, minor est ea, quae maiori subtenditur; in segmentis contra, quae utrimque semicirculo maiora sunt, contrarium obtinet. E. Clavio.

Obs. 2: Idem Clavius et ante eum Commandinus sequentes adiiciunt propositiones, quas sufficiat hic subiungere:

A.

Circuli, e quibus aequales rectae auferunt similia segmenta, aequales sunt.

Iungatur AB , et secetur bifariam in T (I. 10.), et a puncto T rectae AB ad rectos angulos ducatur TB (I. 11.), et iungantur AA , AB .

Et quoniam AT aequalis est TB , communis autem TA ; duae igitur AT , TA duabus BT , TA aequales sunt. Et angulus ATA angulo BTB aequalis, rectus enim uterque; basis igitur AA basi AB aequalis est (I. 4.). Aequales autem rectae aequales circumferentias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem vero minori (III. 28.); et est utraque ipsarum AA , AB circumferentiarum minor semicirculo; igitur circumferentia AA circumferentiae AB aequalis erit.

B.

Ex circulis inaequalibus aequales rectae dissimiles circumferentias auferunt.

C.

Rectae, quae ex circulis inaequalibus similes circumferentias auferunt, inaequales sunt.

D.

Rectae, quae ex quibuscunque circulis circumferentias similes inaequales auferunt, inaequales sunt.

Obs. 3. Ope huius propositionis varia adhuc theoremata demonstrari possunt, e quibus sequentia huc referre visum fuit. 1) Si divisus sit circulus in sex partes aequales in A , B , Γ , Δ , E , Z (Fig. 266.) — fieri id posse, infra ex IV. 15. patebit — ducanturque TE , BZ , ponantur AT , AE , occurrentes rectae BZ in Θ , H , dico rectam BZ trifariam esse divisam. Nempe ob aequales circumferentias AT , TE , EA erunt et rectae AT , TE , EA aequales (III. 29.), adeoque erit triangulum ATE aequilaterum, adeoque aequiangulum (I. 6. Cor.), et, quum arcus BT , EZ sint aequales, erit BZ parallela rectae TE (III. 27. Cor. 1.), adeoque anguli $A\Theta H$, $AH\Theta$ aequales angulis Γ , E (I. 29.), unde et triangulum $A\Theta H$ erit aequiangulum, adeoque (I. 6. Cor.) aequilaterum.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημείον. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λά.

Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς. Καὶ εἰ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.

Et, quum sit angulus $AB\theta = B\theta A$ (I. 27.), erit $B\theta = A\theta$ (I. 6.) $= \theta H$. Eodemque modo ostenditur, esse $ZH = H\theta$: itaque recta BZ in punctis θ , H trifariam divisa est. Est haec propositio Gregorii a St. Vincent. de Quadrat. Circul. p. 169. Cf. Kraft. Geom. Sublim. p. 79. et Gilbert. p. 132. 2) Si duo aequales circuli se intersecent in A et B (Fig. 267, et ex uno intersectionum puncto A describatur circulus, qui utrumque reliquorum circularum secet, unum in Δ , alterum in Γ , puncta B , Γ , Δ in eadem recta erunt. Ducantur enim rectae AB , AB , et AB secet circulum AAB in Z : et, quum angulus ABA sit in utroque circularum aequalium, arcus AA , AZ , quibus insistit, aequales erunt (III. 26.), adeoque etiam rectae AA , AZ , quae hos arcus subtendunt, aequales erunt (III. 29.) i. e. punctum Z erit in circulo, centro A radio AA descripto: idem vero ex hypothesi est etiam in circulo AAB , ergo erit in utroque circulo, i. a. cum puncto intersectionis Γ coincidat. Est haec Gregorii a St. Vinc. III. 1. p. 167. ubi plures casus speciatim expositi sunt. Cf. Gilbert. p. 158.

PROPOSITIO XXX.

Obs. Circumferentiarum AA , AB esse, ut in demonstratione dicitur, utramque minorem semicirculo, inde patet, quod ex III. 1. Cor. 1. recta FA , si opus est producta per centrum transit, adeoque ex altera parte rectae AB demum

Ergo data circumferentia bifariam secta est in puncto *A*. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXI. (Fig. 269.)

In circulo, angulus, qui in semicirculo, rectus est; qui vero in maiore segmento, minor recto; qui autem in minore segmento maior recto. Et insuper maioris segmenti angulus maior est recto; minoris vero segmenti angulus minor recto.

circulo iterum occurrit, et semicirculum subrendit, cuius itaque pars est circumferentia *AA* vel *BA*. Plura hinc deduci possunt consecutaria:

Cor. 1. Recta, quae chordam circuli (ita vocant rectam circuli segmento subtensam) bifariam et ad angulos rectos secat, aut, quod eodem redit (III. I. Cor. 1.) diameter circuli per mediam chordam ducta, aut diameter, quae chordae ad angulos rectos ducitur, bifariam dividit utrumque segmentum, cui chorda illa subtenditur.

Cor. 2. Diameter, quae alterutrum arcum a chorda subtensum bifariam dividit, bifariam dividit quoque alterum, pariter ac chordam, atque huic est ad angulos rectos.

Cor. 3. Recta, quae duos chordae alicui oppositos arcus bifariam dividit, est diameter, quae chordam bisecat, ipseque ad angulos rectos insistit.

Cor. 4. Recta, quae chordam aliquam, et unum arcum, cui illa subtenditur, bisecat, est diameter, quae chordae ad angulos rectos insistit, et oppositum quoque arcum bisecat.

Cor. 5. Idem valet de perpendicularo ex puncto arcus alicuius in oppositam ipsi chordam demisso.

Cor. 6. Repetita problematis applicatione arcus circuli quicumque in quatuor, octo, sedecim et generaliter $2n$ partes aequales dividitur. (Sunt haec omnia e schedis Pflaidereri.)

Ἐστω κύκλος ὁ $ABΓΔ$; διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ $ΒΓ$, κέντρον δὲ τὸ $Ε$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΒΑ$, $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΔΓ$. Λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ $ΒΑΓ$ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ ὀρθή ἐστίν· ἡ δὲ ἐν τῷ $ΑΒΓ$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$, ἐλάττω ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ $ΑΔΓ$ ἐλάττωι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ μείζων ἐστίν ὀρθῆς.

Ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΕ$, καὶ διήχθω ἡ $ΒΑ$ ἐπὶ τὸ $Ζ$.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΕ$ τῇ $ΕΑ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΒΕ$ τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΕ$ τῇ $ΕΑ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΓΕ$ τῇ ὑπὸ $ΓΑΕ$. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ δυοὶ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΑΓΒ$ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΖΑΓ$ ἐκτὸς τοῦ $ΑΒΓ$ τριγώνου δυοὶ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΑΓ$, ὀρθή ἄρα ἐκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ $ΒΑΓ$ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ ὀρθή ἐστίν.

PROPOSITIO XXXI.

Obs. 1. Circa ea, quae ad finem huius propositionis de angulo segmenti maioris aut minoris semicirculo dicuntur, eadem valent, quae in excursu ad hunc librum de segmento semicirculi ad Prop. 16. diximus, unde iidem etiam, qui ultimam propositionis 16. partem pro spuria habent: et idcirco omittunt, huius quoque ultimam partem ex pari ratione omittunt. Praeterea, quum in Prop. 31. doctrina de angulis in segmentis, quam Prop. 20. 21. Euclides exhibere coeperat, absolvatur, ad pleniorē autem Prop. 26. expositionem conversa Prop. 31. pertinere videatur, ut ad Prop. 26. monuimus, neque tamen Prop. 31. ante III. 22. ad quam illa recurrat, poni possit, verisimile fuerit, ab ipso auctore Prop. 31. forte statim post III. 22. positam fuisse, e quo ordine forte postea, quum III. 26. mutilata fuisset, mota, et ante III.

Sit circulus $AB\Gamma A$, diameter autem ipsius sit $B\Gamma$, centrum vero E , et iungantur BA , $A\Gamma$, AA , $A\Gamma$; dico angulum $BA\Gamma$ in semicirculo $BA\Gamma$ rectum esse; angulum autem $AB\Gamma$ in segmento $AB\Gamma$ semicirculo maiore minorem recto; angulum vero $AA\Gamma$ in segmento $AA\Gamma$ semicirculo minore maiorem esse recto.

Iungatur AE , et producat BA ad Z .

Et quoniam BE aequalis est EA , aequalis est et angulus ABE , angulo BAE (I. 5.). Rursus; quoniam GE aequalis est EA , aequalis est et $A\Gamma E$ angulo GAE (I. 5.); totus igitur $BA\Gamma$ duobus $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ aequalis est. Est autem et angulus $ZA\Gamma$, extra triangulum $AB\Gamma$, duobus angulis $AB\Gamma$, $A\Gamma B$ aequalis (I. 32.); aequalis igitur et angulus $BA\Gamma$ angulo $ZA\Gamma$; rectus igitur uterque (I. Def. 10.); angulus igitur $BA\Gamma$ in semicirculo $BA\Gamma$ rectus est.

33. in qua nunc primum adhibetur, posita fuit. Ita de hac re iudicat Pfeiderer. in sched. mscpt. Cf. Thes. inaugur. 1791. Th. 2. sqq. Eam, quae secundo loco ponitur, demonstrationem omittit Rob. Simson., Austin. contra ex ea illud quoque deducit, quod angulus in maiore segmento minor recto, angulus autem in minore segmento maior sit recto. Idem iudicat, Corollarium vulgo additum non huc pertinere, sed ad I. 32., cui propositioni etiam nos illud, paullo generalius, ut Cor. 5. subiunximus. Et manifestum est, conversam quoque propositionis III. 31. locum habere. Nempe, si angulus aliquis ad peripheriam rectus sit, erit in semicirculo; si sit acutus, vel minor recto, erit in segmento maiore; si sit obtusus, vel maior recto, erit in segmento minore, quod facile, sumto contrario, demonstrabitur. Ita Clavius. Potest

Καὶ ἐπεὶ τοῦ $ABΓ$ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $BAΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάττων εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ $ABΓ$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετραπλευρόν ἐστι τὸ $ABΓΔ$, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΔΓ$ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Καὶ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ ἐλάττω γωνία ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἐν τῷ $ΑΔΓ$ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $ABΓ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΓ$ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττωτος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $ΑΔΓ$ περιφερείας καὶ τῆς $ΑΓ$ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρ-

autem etiam directe demonstrari. Idem Clavius aliiq̃ue sequentia addunt corollaria.

Cor. 2. In triangulo rectangulo $BAΓ$ (Fig. 270.) si hypotenusa BF bisecetur in E , et centro E radio $EB=EF$ describatur circulus, transibit ille per A verticem anguli recti, vel, ut aliter dicamus; circulus super BF descriptus est locus verticum omnium triangulorum rectangulorum super BF descriptorum. Quum enim angulus $BAΓ$ rectus sit, erit angulus $ABΓ$ minor recto (I. 17. Cor. 1.), adeoque circulus radio EB descriptus cum recta BA iterum conveniet (III. 16. Cor. 2.). Et quidem convenire cum ea debet in puncto A . Si enim non in A conveniat, conveniet cum recta BA in puncto aliquo ab A diverso v. c. in A , eritque angulus $BAΓ$ rectus, utpote in semicirculo situs (III. 31.). Idem vero etiam maior est angulo recto $BAΓ$ (I: 16.) q. e. a. Eodem modo ostenditur, circulum rectam BA non secare in puncto

Et quoniam trianguli ABF duo anguli ABF , BAF duobus rectis minores sunt (I. 17.); rectus autem BAF ; minor igitur recto est angulus ABF , atque est in segmento ABF semicirculo maiore.

Et quoniam $ABFA$ est quadrilaterum in circulo, quadrilaterorum autem in circulis anguli oppositi duobus rectis aequales sunt (III. 22.), anguli ABF , AIF duobus rectis aequales sunt. Et ABF minor est recto; reliquus igitur angulus AIF maior recto est, et est in segmento AIF semicirculo minore.

Dico praeterea maioris quidem segmenti angulum comprehensum ab ABF circumferentia et AF recta, maiorem esse recto; minoris vero segmenti angulum comprehensum ab AIF circumferentia et AF recta, minorem esse recto. Et est hoc manifestum. Quo-

aliquo Z in recta BA ultra A producta. Secabit ergo in A .

Cor. 3. Facilius hinc emergit ratio solvendi problema, quod habetur in III. 17. Prop., descripto nempe super recta AB (Fig. 233.) circulo, qui, quum ex Cor. 2. transire debeat per puncta B , θ in circulo dato FBA , puncta haec assignabimus, ad quae ex A rectae contingentes AB , $A\theta$ duci possunt. Simili modo solvetur problema, quod habuimus in III. 17. Obs. 4. descripto super recta Aa (Fig. 236.) semicirculo, qui punctum δ designabit. Pari ratione solvetur problema I. 47. Cor. 10.: describere quadratum, quod aequale sit differentiae duorum quadratorum.

Cor. 4. Quadrilaterum in circulo inscriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela (Fig. 271.) parallelogrammum est rectangulum. E Clavio, et Pappi Collect. Mathem. in III. 52; Prop. cf. quae diximus ad III. 22. Obs. 2. et ad III. 22. Obs. 5. Quum enim ex hypoth. sint AB , FA parallelae,

θῆς. Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν BA , AG εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς $ABΓ$ περιφερείας καὶ τῆς AG εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν AG , AZ εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς $ΓA$ εὐθείας καὶ τῆς $AGΔ$ περιφερείας περιεχομένη ἐλάττω ἐστὶν ὀρθῆς. Ἐν κύκλῳ ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

$A \ A \ A \ \Omega \ \Sigma$.

Ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ $BAΓ$. Ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AEΓ$ τῆς ὑπὸ BAE , ἴση γὰρ

erunt (III. 26. Cor. 1.) arcus BEG , AZA aequales. Eodem modo ostenditur, aequales esse arcus $AΘB$, $ΔΗΓ$: erit itaque $ABΓ$ semicirculus, adeoque angulus B rectus (III. 31.); eodemque modo res de reliquis angulis demonstrabitur.

Cor. 5. Si per centrum A circuli alicuius (Fig. 272. a. b. c.) circulus describatur, et per utriusque circuli centrum recta ducatur, quae posteriorem circulum secet in Z , si deinde ex puncto Z ducatur recta quaecunque, quae priorem circulum secet in B , $Γ$: pars illius $BΓ$ intra priorem circulum contenta a posteriore secabitur bifariam in puncto aliquo E . Clavius et Pappi Collect. Mathem. VII. 91. vel ad Eucl. L. II. ad Probl. 24. cf. Gilbert. p. 158. Ducta enim AE , erit angulus AEZ rectus (III. 31.) quippe in semicirculo constitutus, adeoque recta BE in E bifariam secatur (III. 3.).

Cor. 6. Si recta aliqua BA (Fig. 269.) in circulo non transeat per centrum, adeoque circulum in segmenta inaequalia secet (Obs. ad I. 17. 18. Def.) ducaturque diameter $BΓ$, iuncta AG , angulus $AΓB$ in maiore segmento differet ab angulo recto (nempe minor eo erit) angulo $ABΓ$, quem chorda AB cum diametro $BΓ$ comprehendit. Et quum angulus in segmento ad oppositas partes rectae AB posito rectum angulum

piam enim angulus a BA , AF rectis comprehensus rectus est, qui ab ABF circumferentia et AF recta comprehenditur, maior est recto. Rursus, quoniam angulus ab AF , AZ rectis comprehensus rectus est, qui a FA recta, et AFI circumferentia comprehenditur, minor est recto. In circulo igitur etc.

ALITER.

Demonstratur angulum BAF rectum esse. Quoniam angulus AEF duplus est anguli BAE , aequalis

eadem quantitate superet, qua angulus BFA minor est recto (III. 22.), angulus in opposito isto segmento pariter differet ab angulo recto (maior eo erit) angulo ABF . Cf. Thom. Simpson. Elem. of Geom. Book III. Prop. 16.

Obs. 2. Aliter propositionis III. 31. pars prima ita efferrī potest: Si duae rectae AB , AF circulo inscriptae (Fig. 269.) atque ex eodem in circulo puncto A exeuntes rectum angulum efficiant, summa quadratorum earum aequale est quadrato diametri. Nempe, quum ex I. 47. summa quadratorum earum aequale sit quadrato hypotenusae BF , quod ita effertur, nihil aliud dicit, quam hypotenusam BF esse simul diametrum circuli, sive BAF esse semicirculum. Potest autem inde deduci generalior propositio, nempe: si duae rectae circulo inscriptae AB , BA (Fig. 273. a. b.) se invicem in puncto aliquo F , sive intra, sive extra circulum posito ita secent, ut angulum rectum comprehendant, erit summa quadratorum rectarum e puncto sectionis usque ad puncta, in quibus circulo occurrunt, aequalis quadrato diametri. Omisso eo casu, quo altera rectarum AE , BA per centrum transit, qui nihil difficultatis habet, ducantur rectae AA , AE , EB , BA et diameter AZ , ac iungatur AZ , eritque (Fig. 273. a.) angul. AZA

δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AEB διπλὴ τῆς ὑπὸ EAG . αἱ ἄρα ὑπὸ AEB , AEF διπλασίονες εἰσι τῆς ὑπὸ BAG . Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ AEB , AEF δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ BAG ὀρθή ἐστιν. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι εἰν ἡ μία γωνία τριγώνου ταῖς δυοῖν ἴση ἢ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς¹⁾ ταῖς αὐταῖς ἴσην. εἶναι. Ὅταν δὲ ἐφεξῆς ἴσαι ᾦσιν, ὀρθαὶ εἰσιν.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ λβ.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιῇ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

1) Hanc lectionem ἐφεξῆς ex edd. Oxon. et Basil. restitimus. Peyrardus e Cod. a ponit τὴν ἐκείνης ἐκτός. At haec lectio ad sequens: ἐφεξῆς non quadrat, et praeterea esse debebat τὴν ἐκείνου ἐκτός, quoniam angulus exterior nunquam ad alium angulum, sed ad triangulum referatur.

$\angle A\Gamma B$ ex III. 22. Cor. 1. Et, quum angulus $\angle A\Delta Z$, utpote rectus (III. 31.) aequalis sit angulo $\angle A\Gamma B$ ex hypothesi quippe recto, erit reliquus angulus $\angle A\Delta Z = \angle A\Gamma B$ (I. 32.), adeoque arcus $\Delta Z =$ arcui EB (III. 26.), et recta $\Delta Z =$ rectae EB (III. 29.). Est autem in triangulo rectangulo $\Delta A Z$ ex I. 47. $\angle A\Delta q + \angle AZq = \angle AZq$, itaque $\angle A\Delta q + \angle EBq = \angle AZq$. At $\angle A\Delta q = \angle A\Gamma q + \angle A\Gamma q$ (I. 47.), et $\angle EBq = \angle E\Gamma q + \angle B\Gamma q$: itaque $\angle A\Gamma q + \angle A\Gamma q + \angle E\Gamma q + \angle B\Gamma q = \angle AZq$. Et, quum etiam sit $\angle AEq = \angle A\Gamma q + \angle E\Gamma q$, et $\angle ABq = \angle A\Gamma q + \angle B\Gamma q$, erit etiam $\angle AEq + \angle ABq = \angle AZq$.

enim duobus interioribus et oppositis (I. 32.); est autem et angulus AEB duplus anguli EAF ; anguli igitur AEB , AET dupli sunt anguli BAT . Sed anguli AEB , AET duobus rectis aequales sunt (I. 13.); ergo BAT rectus est. Quod oportebat ostendere.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifestum est, si unus angulus trianguli duobus aequalis sit, rectum esse angulum, propterea quod eius angulus deinceps iisdem est aequalis. Quando autem ipsi deinceps sunt aequales, recti sunt (I. Def. 10.)

P R O P O S I T I O XXXII. (Fig. 274.)

Si aliqua recta circulum contingat, a contactu autem ducatur aliqua recta circulum secans, anguli, quos haec cum contingente facit, aequales erunt angulis in alternis circuli segmentis.

Casu itaque (Fig. 273. a.) utraque summa quadratorum laterum oppositorum quadranguli $ABEA$ separatim sumta aequalis erit quadrato diametri, casu autem (Fig. 273. b.) eidem quadrato diametri aequalis erit tam summa quadratorum laterum oppositorum AA , EB (quae interposita sunt iis, quae producta angulum rectum efficiunt), quam summa quadratorum diagonalium AE , AB . Praeterea, si ex centro Θ demittantur in AB , AE perpendiculares ΘH , ΘK , quae chordas AB , AE bisecabunt (III. 3.), ductaque $\Theta \Gamma$, erit (Fig. 273. a.) $ABq = A\Gamma q + B\Gamma q + 2A\Gamma \times \Gamma B$ (II. 4.). At $A\Gamma \times \Gamma B = AHq - H\Gamma q$ (II. 5.), adeoque erit $ABq = A\Gamma q + B\Gamma q + 2AHq - 2H\Gamma q$. Eodemque modo $AEq = A\Gamma q + \Gamma E q + 2EKq - 2K\Gamma q$, adeoque $ABq + AEq = A\Gamma q + A\Gamma q + B\Gamma q + \Gamma E q + 2AHq + 2EKq - (2H\Gamma q + 2K\Gamma q)$, vel, ob $A\Gamma q + A\Gamma q + B\Gamma q + \Gamma E q = AZq$

Κύκλου γὰρ τοῦ $ABΓΔ$ ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα ἡ EZ κατὰ τὸ B σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ B σημείου διήχθω τις εὐθεΐα εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ $ΒΔ$. λέγω ὅτι ἄς ποιεῖ γωνίας ἡ $ΒΔ$ μετὰ τῆς EZ ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ $ZΒΔ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ $ΒΑΔ$ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΒΕ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ $ΔΓΒ$ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

"Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ EZ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΒΑ$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $ΒΔ$ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ $Γ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$, $ΑΓ$, $ΓΒ$.

Καὶ ἐπεὶ κύκλον τοῦ $ABΓΔ$ ἐφάπτεται τις εὐθεΐα EZ κατὰ τὸ B , ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς ἔκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΒΑ$, ἐπὶ τῆς $ΒΑ$ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου ¹⁾. ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΔΒ$ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $ΒΑΔ$, $ΑΒΔ$ μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΖ$ ὀρθή. ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΖ$ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ $ΒΑΔ$, $ΑΒΔ$. Κοινὴ ἀφηρέσθω ἡ ὑπὸ $ΑΒΔ$. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΔΒΖ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ $ΒΑΔ$.

1) Peyrardus e Cod. a addit: ἡ $ΒΑ$ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου. Edd. Oxon. et Basil. haec verba omittunt.

ex demonstrat. et $ΗΓq + ΚΓq = ΗΓq + ΘΗq = ΘΓq$, erit $ΑΒq + ΑΕq = ΑΖq + 2ΔΗq + 2ΕΚq - 2ΘΓq = ΑΖq + 2ΔΗq + 2ΘΗq + 2ΕΚq + 2ΘΚq - (2ΘΗq + 2ΘΚq) - 2ΘΓq = ΑΖq + 2ΔΘq + 2ΘΑq - 4ΘΓq = ΑΖq + 4ΘΖq - 4ΘΓq = 2ΑΖq - 4ΘΓq$. Unde efficitur $ΑΒq + ΑΕq + 4ΘΓq = 2ΑΖq$ i. e. = summae quadratorum chordarum $ΑΒ$, $ΑΕ$, quae inter se angulum rectum efficiunt, si adicias quadruplum quadratum rectae $ΘΓ$ inter centrum et punctum intersectionis chordarum contentae, effi-

Circulum enim $AB\Gamma A$ contingat aliqua recta EZ in puncto B , et a puncto B ducatur aliqua recta ΔB secans circumulum $AB\Gamma A$; dico, angulos, quos facit ΔA cum contingente EZ aequales esse angulis in alternis segmentis circuli, hoc est angulum quidem ZBA aequalem esse angulo in segmento BAA constituto, angulum vero ΔBE aequalem esse angulo in segmento $A\Gamma B$ constituto.

Ducatur enim a B ipsi EZ ad rectos angulos BA (I. 11.), et sumatur in circumferentia BA quodlibet punctum Γ , et iungantur AA , $\Delta\Gamma$, ΓB .

Et quoniam circumulum $AB\Gamma A$ contingit aliqua recta EZ in B , a contactu autem ducta est tangenti ad rectos angulos BA , in BA centrum est circuli $AB\Gamma A$ (III. 19.); ergo angulus ΔAB in semicirculo constitutus rectus est (III. 31.); reliqui igitur BAA , ABA uni recto aequales sunt (I. 32.). Est autem et ABZ rectus; ergo ABZ aequalis est ipsis BAA , ABA . Communis auferatur ABA ; reliquus igitur ΔBZ angulus aequalis est angulo BAA in alterno circuli segmento. Et quoniam in circulo quadrilaterum est

cietur duplum quadratum diametri. Et similiter in fig. 273. b. erit $\Delta Bq = \Delta\Gamma q + B\Gamma q - 2\Delta\Gamma \times \Gamma B$ (II. 7.), at $\Delta\Gamma \times \Gamma B = H\Gamma q - \Delta H q$ (II. 6.), adeoque $\Delta Bq = \Delta\Gamma q + B\Gamma q + 2\Delta H q - 2H\Gamma q$. Eodemque modo $\Delta E q = \Delta\Gamma q + \Gamma E q + 2EK q - 2K\Gamma q$, unde deinde reliqua eodem modo consequuntur ac in fig. 273. a. Denique observari potest, casu fig. 273. a. esse arcum $AAA + BE = AAA + \Delta Z =$ semicirculo, i. e. circumferentias $AAA + BE$ simul semicirculum efficere, adeoque etiam reliquas sibi oppositas circumferentias $\Delta B + \Delta E$ simul aequales esse semicirculo, casu autem fig. 273. b. esse circumferentias $\Delta Z - ZA$ i. e. $\Delta Z - BE =$ semicirculo, vel etiam circumferentias

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ $AB\Gamma\Delta$, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔBZ , ΔBE δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔBZ , ΔBE ταῖς ὑπὸ BAA , $B\Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ BAA τῇ ὑπὸ ΔBZ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBE τῇ ἐν τῷ ἐναλλαξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ $\Delta\Gamma B$, τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma B$ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΗΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

$ABA + BE = ABA + AZ =$ semicirculo. Cf. Gregorii a St. Vincent. de Quadrat. Circuli L. III. Prop. 77. Carnot. de la Corrélat. des fig. de Géom. p. 98. sqq. et Géom. de position §. 152., ubi tamen falsa est, observante Pflaiderero, propositionis enuntiatio; Gilbert. Géometrie p. 375. sqq. et van Swinden Anfangsgr. der Messk. p. 306. sqq.

PROPOSITIO XXXII.

Obs. 1. Distingui debent, ut Clavius, Borellius, Tacquet et Coëtsius monuerunt, duo casus, prout recta BA ipsa ad rectos angulos est rectae EBZ , aut non. Prior quoque nihil difficultatis habet.

Cor. 1. Angulus, quem recta circumulum contingens cum recta secante circumulum in puncto contactus prioris rectae efficit, dimidius est anguli ad centrum segmento circuli ad eadem partes sumto insistentis (III. 20.).

Cor. 2. Si recta ducatur, quae puncta contactus duarum rectarum circumulum contingentium coniungit, recta haec iuncta angulos cum utraque contingente aequales efficiet. Quorum si uterque rectus sit, adeoque contingentes parallelae (I. 28.), recta iuncta erit diameter (III. 17. Cor. 2.): sin autem hi an-

$AB\Gamma A$, oppositi eius anguli duobus rectis aequales sunt (III. 22.). Sunt autem et ipsi $\angle ABZ$, $\angle ABE$ duobus rectis aequales (I. 13.); ipsi igitur $\angle ABZ$, $\angle ABE$ ipsis $\angle BAA$, $\angle B\Gamma A$ aequales sunt, quorum $\angle BAA$ ipsi $\angle ABZ$ ostensus est aequalis; reliquus igitur $\angle ABE$ angulo $\angle A\Gamma B$ in alterno circuli segmento $\angle A\Gamma B$ aequalis est. Si igitur circulum etc.

PROPOSITIO XXXIII. (Fig. 276.)

Super data recta describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo.

guli obliqui, adeoque versus unam partem rectae iunctae minores duobus rectis fuerint, contingentes ex hac parte convenient (Ax. 11. vel Post. 5. I.), eruntque inter se aequales (I. 6.).

Cor. 3. In aequalibus circulis, aut in uno eodemque circulo, quae ad extremitates duarum chordarum ducuntur rectae circulos contingentes, aequales cum his chordis angulos efficiunt.

Cor. 4. Quum duo circuli, qui se in puncto aliquo contingunt, semper ab una eademque recta in hoc puncto contingantur (III. 17. Obs. 2.) patet, rectam, quae per hoc commune contactus punctum ita ducitur, ut utrumque circulum secet, arcus ab iis abscindere, qui angulos aequales capiunt, i. e. similia abscindere segmenta. Cf. Pappi Collect. Mathem. L. IV. Lemm. ad Prop. VIII. et L. VII. Prop. CII. et CVII. vel in Apollon. de Taction. Lemm. VII. et XI. et Gilbert. p. 162.

Obs. 2. Conversa quoque valet. Nempe, si recta aliqua circulo in aliquo puncto occurrat, a puncto autem occursus ducatur alia recta circulum secans, sitque angulus, quem haec rectae inter se efficiunt, aequalis angulo in alterno circuli

"Εστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἢ πρὸς τῷ Γ · δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς AB γράψαι τμήμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ . Ἡ δὲ πρὸς τῷ Γ γωνία ἥτοι ὀξεῖα ἴσθις ἢ ὀρθή ἢ ἀμβλεία.

"Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεσταῖτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ BAA' · ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAA' . Καὶ ἤχθω τῇ AA' ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθᾶς ἡ AE , καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθᾶς ἡ ZH , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ HB . Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , κοινὴ δὲ ἡ ZH , δύο δὴ αἱ AZ , ZH δυοῖν ταῖς ZB , ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία τῇ ὑπὸ BZH ἴση· βάσει ἄρα ἡ AH βάσει τῇ HB ἴση ἐστὶν. Ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ τῷ HA , κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B . Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ BE . Ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἀκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A , τῇ AE πρὸς ὀρθᾶς ἐστὶν ἡ AA' , ἡ AA' ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ABE ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ AA' , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἀφῆς εἰς τὸν ABE κύκλον διήκται τις εὐθεῖα ἡ AB · ἡ ἄρα ὑπὸ AAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ AEB . Ἀλλ' ἡ ὑπὸ AAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν

segmento, prior recta circulum in puncto occursus continget, quod facile demonstrabitur, sumto contrario. Hinc consequuntur

Cor. 1. Si recta aliqua circulo occurrat, et e puncto concursus ducatur alia recta circulum secans, sitque angulus, quem hæc rectæ inter se efficiunt, æqualis dimidio angulo

Sit data recta AB , datus autem angulus rectilineus ad Γ ; oportet super data recta AB describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem ei, qui est ad Γ . Est autem angulus ad Γ vel acutus, vel rectus, vel obtusus.

Sit primum acutus, ut in prima figura, et constituitur ad rectam AB et ad punctum A , angulo ad Γ aequalis ipse BAA (I. 23.); acutus igitur est et BAA . Ducatur (I. 10.) ipsi AA ab puncto A ad rectos angulos recta AE , et secetur AB bifariam in Z , et ducatur a puncto Z ipsi AB ad rectos angulos recta ZH , et iungatur HB . Et quoniam aequalis est AZ ipsi ZB , communis autem ZH , duae AZ , ZH duabus ZB , ZH aequales sunt, et angulus AZH angulo BZH aequalis; basis igitur AH basi HB aequalis est (I. 4.). Ergo centro H , intervallò vero HA , circulus descriptus transibit et per B . Describatur, et sit ABE , et iungatur BE . Quoniam igitur ab extremitate A ipsius AE diametri ipsi AE ad rectos angulos est AA , recta AA contingit circulum (III. 16.). Quoniam igitur circulum ABE tangit aliqua recta AA , et a contactu ad A in circulum ABE ducta est aliqua AB , angulus AAB aequalis est angulo AEB in alterno circuli segmento (III. 32.) Sed AAB angulo ad Γ est aequalis; angulus igitur ad Γ aequalis est angulo AEB . Super data igitur recta ad centrum segmento circuli ad easdem partes sumto insistenti, prior recta circulum continget.

Cor. 2. Si duae rectae, quae circulo occurrunt, cum chorda, quae occursus puncta coniungit, aequales angulos ex eadem parte faciant, una autem earum circulum contingat, altera quoque eum continget.

ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB . Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB , δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ .

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ καὶ δεόν ἐστὶ πάλιν ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ. Συνεστήτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ BAA , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμησθῶ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ κέντρον μὲν τῷ Z , διαστήματι δὲ ὅποτέρῳ τῶν ZA , ZB , κύκλος γεγραφθῶ ὁ AEB . Ἐράπτεται ἄρα ἡ AD εὐθεία τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAA γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσι. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ BAA τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. Καὶ ἡ ἐν τῷ AEB τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ · γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς AB τμήμα κύκλου τὸ AEB , δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ .

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεία ἔστω, καὶ συνεστήτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ ἡ ὑπὸ BAA , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ AD πρὸς ὀρθὰς ἤχθῶ ἡ AE , καὶ τετμησθῶ πάλιν ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ τῇ AB πρὸς

COR. 3. In eodem circulo aut in circulis aequalibus si ad extremitates aequalium chordarum ducantur rectae, quae aequales cum illis ad easdem partes angulos efficiunt, atque una ductarum circum, ad quem ducta est, contingat, continget etiam altera eum, ad quem ducta est, circum.

COR. 4. Si duo circuli in puncto aliquo conveniant, et rectae per illud punctum commune ductae ab utroque segmenta similia abscindat (e diversis rectae partibus, siquidem illa cir-

AB segmentum circuli descriptum est AEB , capiens angulum AEB aequalem dato angulo ad Γ .

Sit deinde angulus ad Γ rectus; et oporteat rursus super AB describere segmentum circuli, capiens angulum aequalem angulo recto ad Γ . Constituatur rursus angulo ad Γ recto aequalis BAA (I. 23.) ut in secunda figura, et secetur AB bifariam in Z (I. 10.), et centro Z , intervallo vero alterutra ipsarum AZ , ZB , circulus describatur AEB ; contingit igitur recta AA circum ABE , quod rectus est angulus ad A (III. 16.). Et aequalis est angulus BAA angulo in segmento AEB , rectis enim et ipse est in semicirculo consistens (III. 31.). Sed BAA angulo ad Γ aequalis est; angulus igitur in segmento AEB aequalis est angulo ad Γ . Descriptum est igitur rursus super AB segmentum circuli AEB , capiens angulum aequalem angulo ad Γ .

Sit denique angulus ad Γ obtusus, et constituatur ipsi aequalis ad rectam BA et ad punctum A angulus BAA (I. 23.), ut in tertia figura, et rectae AA ad angulos rectos ducatur AE (I. 10.), et secetur rursus AB bifariam in Z , et ipsi AB ad angulos rectos du-

culos e diversis puncti communis partibus secet: ex eadem rectae parte autem, si illa circulos ex eadem puncti communis parte secet, circuli in hoc puncto se contingent. Quod demonstrabitur, ducta recta, quae unum horum circulorum in isto puncto contingat. Ea enim, ut facile patet, continget etiam alterum, hinc circuli se contingent (Obs. 3. ad III. 10.).

PROPOSITIO XXXIII.

Obs. Duo tantum, ut monet Rob. Simson. casus distia-

Bb

ὁρθὰς ἴχθω ἡ ZH , καὶ ἐκτελεύχθω ἡ HB . Καὶ ἐπεὶ πα-
 λιν ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , καὶ κοινὴ ἡ ZH , δύο δὴ
 αἱ AZ , ZH δυοὶ ταῖς BZ , ZH ἴσαι εἶσι, καὶ
 γωνία ἡ ὑπὸ AZH γωνία τῇ ὑπὸ BZH ἴση βάσις
 ἄρα ἡ AH βάσει τῇ BH ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρον
 μὲν τῷ H , διαστήματι δὲ τῷ HA , κύκλος γραφί-
 μενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B . Ἐρχέσθω ὡς ὁ AEB .
 Καὶ ἐπεὶ τῇ AE διαμέτρῳ ἀπ' ἀκρας πρὸς ὁρθὰς
 ἵκται ἡ AD , ἡ AD ἄρα ἐφάπτεται τοῦ AEB κύ-
 κλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A επαφῆς διήκται ἡ
 AB ἡ ἄρα ὑπὸ BAD γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλ-
 λάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ $AΘB$ συνισταμένῃ γωνίᾳ.
 Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ BAD γωνία τῇ πρὸς τῷ $Γ$ ἴση ἐστὶ
 καὶ ἡ ἐν τῷ $AΘB$ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ
 πρὸς τῷ $Γ$. Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς AB
 γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ $AΘB$, δεχόμενον γωνίαν
 ἴσην τῇ πρὸς τῷ $Γ$. Ὅπερ εἶδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 18.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελῆν, δε-
 χόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω.

guendi sunt, prout angulus datus vel rectus fuerit, vel obli-
 quus. Et, si rectus fuerit, sufficit cum Clavio et Rob. Sim-
 son. semicirculum super data recta describere. Ex his ratio-
 nibus Rob. Simson. vulgarem demonstrationem ab imperito
 aliquo depravatam putat. Caeterum paullo diversam solutio-
 nem habent Campanus, Clavius, Peletarius, Borellius, qui
 nempe rectam AB , si angulus datus obliquus sit, non bise-
 care, nec perpendicularum super ea erigere iubent, sed ad B
 angulum $ABH=BAH$ constituunt, quod, ut facile patet,
 eodem redit. In solutione Euclideae ostendendum erat, quod
 facile fieri potest, rectas ZH , AB necessario convenire. In-

catur ZH ; et iungatur HB . Et quoniam rursus æqualis est AZ , ipsi ZB , et communis ZH , duæ AZ ZH duabus BZ , ZH æquales sunt; et angulus AZH , angulo BZH æqualis; basis igitur AH basi BH æqualis est (I. 4.). Ergo circulus centro H , intervallo vero HA , descriptus transibit et per B . Transeat ut AEB . Et quoniam diametro AB ab extremitate ad rectos angulos ducta est AA , ipsa AA contingit circulum AEB (III. 16.). Et a contactu ad A ducta est AB ; ergo angulus BAA æqualis est angulo constituto in alterno circuli segmento AOB . Sed angulus BAA angulo ad I æqualis est. Et angulus in segmento AOB æqualis est angulo ad I . Ergo super datam rectam AB descriptum est segmentum circuli AOB , capiens angulum æqualem angulo ad I . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXIV. (Fig. 276.)

A dato circulo segmentum auferre; capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

signis huius problematis usus est in solvendis quam plurimis problematibus v. c. in iis, in quibus trianguli alicuius describendi basis, et angulus basi oppositus dantur, vel ex datis derivari possunt. Tum enim, si aliud adhuc trianguli elementum cognitum fuerit vel generalius, si alia adhuc determinatio accesserit, quæ cum istis coniuncta ad efficiendum triangulum sufficiat, facilis plerumque erit trianguli constructio. Exempla habentur in appendice ad Data Euclid. ed. a Schwab. Probl. 2. 5. 26. et in append. Version. German. Locor. Planor. Apollonii Probl. 1. 5. 15. Caeterum aliam so-

"Εστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $ABΓ$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ $Δ$. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ $ABΓ$ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ $Δ$.

"Ηχθω τοῦ $ABΓ$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ EZ κατὰ τὸ B σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B τῇ πρὸς τῷ $Δ$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ZBΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $ABΓ$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ EZ , καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ B ἐπαφῆς διήκται ἡ $BΓ$ ἡ ὑπὸ $ZBΓ$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ $BAΓ$ ἑναλλάξ τμήματι συνισταμένη γωνίᾳ. Ἄλλ' ἡ ὑπὸ $ZBΓ$ τῇ πρὸς τῷ $Δ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ $BAΓ$ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ $Δ$ γωνίᾳ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ $ABΓ$ τμήμα ἀφήρηται τὸ $BAΓ$, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ $Δ$. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

lutionem huius problematis habet Thom. Simpson. Elem. of Geom. B. 5. Probl. XXII. innixam Cor. 6. ad III. 31.

PROPOSITIO XXXIV.

Obs. Huius quoque problematis is casus facilius expediri potest, quo angulus datus rectus est. Tum nempe nihil opus est recta contingente, sed quaevis circuli diameter propositum efficit. Alia etiam problematis solutio peti potest ex

Sit datus circulus $AB\Gamma$, datus vero angulus rectilineus ad A ; oportet a circulo $AB\Gamma$ segmentum auferre, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo ad A .

Ducatur recta EZ circulum $AB\Gamma$ contingens ad punctum B (III. 17.), et constituatur ad rectam EZ et ad punctum in ea B angulus $ZB\Gamma$ aequalis angulo ad A (I. 23.).

Quoniam igitur circulum $AB\Gamma$ contingit aliqua recta EZ , et a contactu ad B ducta est $B\Gamma$; angulus $ZB\Gamma$ aequalis est angulo constituto in $BA\Gamma$ alterno segmento (III. 32.). Sed $ZB\Gamma$ angulo ad A aequalis est; angulus itaque in segmento $BA\Gamma$ aequalis est angulo ad A .

A dato igitur circulo $BA\Gamma$ segmentum ablatum est $BA\Gamma$, capiens angulum aequalem dato angulo rectilineo ad A . Quod oportebat facere.

PROPOSITIO XXXV. (Fig. 277.)

Si in circulo duae rectae sese secant, rectangulum contentum sub segmentis unius aequale est rectangulo sub alterius segmentis contento.

III. 20. Sufficiet nempe ad centrum circuli constituere angulum duplum eius, qui datus est. Et, quum punctum B nullum determinatum in circulo dato locum obtineat, vel, quum infinite variari possit situs anguli ad centrum, qui duplus sit anguli dati, patet, novam addi posse determinationem, v. c. si quis iubeat, ut recta BF parallela sit alii rectae datae.

PROPOSITIO XXXV.

Obs. 1. Distinctio casuum plenius ita erat instituenda.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ $ΑΒΓΔ$ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ $Ε$ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$, $ΕΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥστε τὸ $Ε$ κέντρον εἶναι τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου φανερόν ὅτι, ἴσων οὖσῶν τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$, $ΔΕ$, $ΕΒ$, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$, $ΕΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ $ΑΓ$, $ΔΒ$ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ $Ζ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἐπὶ τὰς $ΑΓ$, $ΔΒ$ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσάν αἱ $ΖΗ$, $ΖΘ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΖΒ$, $ΖΓ$, $ΖΕ$.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $ΖΗ$ εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ἴση ἄρα ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΗΓ$. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ $Η$, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ $Ε$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΗΕ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΗΓ$. Προσκείσθω κοινὸν τὸ ἀπὸ τῆς $ΗΖ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν $ΖΗ$, $ΗΕ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΓΗ$, $ΗΖ$. Ἀλλὰ τοῖς

Vel 1) utraque rectarum circulo inscriptarum per centrum transit, vel 2) alterutra tantum, vel 3) neutra. Casum 2. omissum esse a Theone sine dubio, queritur Rob. Simson, neque enim id ab Euclide factum videri, haberi enim cum casum 1. omnium facillimum, et in sequente propositione separatim demonstrare casum, quo recta per centrum transeat,

In circulo enim $AB\Gamma A$ duae rectae $A\Gamma$, BA sese secant in puncto E ; dico rectangulum sub AE , $E\Gamma$ contentum aequale esse rectangulo sub AE , EB contento.

Si igitur $A\Gamma$, BA per centrum transeant (Fig. 277. a.), ita ut E centrum sit circuli $AB\Gamma A$; manifestum est aequalibus existentibus AE , $E\Gamma$, AE , EB , et ipsum sub AE , $E\Gamma$ contentum rectangulum aequale esse rectangulo sub AE , EB contento.

Non autem transeant $A\Gamma$, AB per centrum (Fig. 277. b.), et sumatur centrum circuli $AB\Gamma A$ (III. 1.), et sit Z , et a Z ad $A\Gamma$, AB rectas perpendiculares ducantur ZH , $Z\Theta$ (I. 12.); et iungantur ZB , $Z\Gamma$, ZE .

Et quoniam recta aliqua ZH per centrum rectam aliquam $A\Gamma$ non per centrum ductam ad rectos secat, et bifariam ipsam secat (III. 3.); aequalis igitur AH ipsi $H\Gamma$. Quoniam igitur $A\Gamma$ secta est in aequalia quidem in H , in inaequalia vero in E , rectangulum sub AE , $E\Gamma$ contentum cum quadrato ex HE aequale est quadrato ex $H\Gamma$ (II. 5.). Commune addatur quadratum ex HZ ; rectangulum igitur sub AE , $E\Gamma$ cum quadratis ex ZH , HE aequale est quadratis ex $H\Gamma$, HZ . Sed quadratis ex EH , HZ est aequale

Et habet omnino eum casum Campanus, qui eum deinde pariter ac Clavius, Henrion., Coëtsius, Playfair. et Rob. Simson. in duos casus particulares distinguit, prout nempe ea, quae per centrum transit, alteram bifariam dividit aut non. Tertius denique casus ab iisdem facile reducitur ad secundum, ducta nempe diametro per punctum, in quo duae rectae, quae

μὲν ἀπὸ τῶν EH , HZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν IH , HZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZF τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE , EF μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZG . Ἰση δὲ ἡ ZF τῇ ZB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE , EF μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . Ἀὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EF μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AE , EF μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AE , EB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE . Κοινὸν ἀφηρόσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AE , EF περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AE , EB περιεχόμενῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λς.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτεται

non per centrum transeunt, se intersecant. Aliam huius propositionis demonstrationem vide apud Grison.: Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Berlin 1814—1815. p. 56. Generaliter, observante Pfeiderero, omnium casuum demonstrationes derivari possunt ex sequente propositione, quae vicissim ex nostra hac deduci potest: Si qua recta circulo inscripta in puncto aliquo secetur utcumque rectangulum eius partium, una cum quadrato rectae, quae e centro ad punctum sectionis ducitur, aequale est quadrato radii. Cf. Gilbert. p. 357. et 359. Alij aliam Prop. 35. et 36. enunciationem et demonstrationem e doctrina de triangulis similibus petunt v. c. Whiston.

quadratum ex ZE (I. 47.), quadratis vero ex ΓH , HZ aequale est quadratum ex $Z\Gamma$ (I. 47.); rectangulum igitur sub AE , EF cum quadrato ex ZE , aequale est quadrato $Z\Gamma$. Aequalis autem $Z\Gamma$ ipsi ZB , rectangulum igitur sub AE , EF cum quadrato ex EZ aequale est quadrato ex ZB . Ex eadem ratione et rectangulum sub AE , EB cum quadrato ex ZE aequale est quadrato ex ZB . Ostensum est autem et rectangulum sub AE , EF cum quadrato ex ZE aequale esse quadrato ex ZB ; rectangulum igitur sub AE , EF cum quadrato ex ZE aequale est rectangulo sub AE , EB cum quadrato ex ZE . Commune auferatur quadratum ex ZE ; reliquum igitur sub AE , EF contentum rectangulum aequale est rectangulo sub AE , EB contento. Si igitur in circulo etc.

PROPOSITIO XXXVI. (Fig. 278.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, et ab eo in circulum cadant duae rectae, et una quidem earum secet circulum, altera vero contingat; erit re-

apud Tacquet in III. 35. et Coësius. Vid. ad VI. 16. et. 17, Obs. 6. 7.

Cor. Si rectae quocunque circulo inscriptae se in uno eodemque puncto intersecent, rectangula sub segmentis cuiusque earum inter se erunt aequalia.

Obs. 2. Clavio monente conversa quoque propositionis III. 35. valet, quod facile, descripto circulo per tria quaecunque puncta extrema quatuor illorum segmentorum, per absurdum demonstratur. Ea contra, quae in praecedente corollaria continetur, propositio generalior converti nequit. Contrarium asserit Gilbert. l. c. p. 365.

ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $\Delta\Gamma A$, ΔB · καὶ ἡ μὲν $\Delta\Gamma A$ τεμνέτω τὸν $AB\Gamma$ κύκλον, ἡ δὲ ΔB ἐφαπτίσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AA , $\Delta\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB τετραγώνῳ. Ἡ ἄρα $\Delta\Gamma A$ ἦτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, ἡ οὐ.

Ἐστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Z κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB · ὀρθὴ ἄρα ἐστίν ἡ ὑπὸ ZBA . Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $A\Gamma$ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Z , πρόσκειται δὲ ἀντιῇ ἡ ΓA · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA , $\Delta\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $Z\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZA . Ἰση δὲ $Z\Gamma$ τῇ ZB · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA , $\Delta\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZA . Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ZA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ZB , BA , ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ZBA · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA , $\Delta\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ZB , BA . Κοινὸν ἀφηρέσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZB · λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AA , $\Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔB ἐφαπτομένης.

PROPOSITIO XXXVI.

Obs. 1. Ad generalem rei demonstrationem, observante Pflaederero, adhiberi potest etiam haec propositio: si ad punctum aliquod extra circulum in recta circulum secante e centro ducatur recta, erit rectangulum ex integra secante et parte eius exteriori, una cum quadrato radii, aequale quadrato rectae e centro ad illud punctum ductae. Cf. Gilbert. p. 357. et 359.

ctangulum sub tota secante et exteriori segmento inter punctum et convexam circumferentiam contentum aequale quadrato ex contingente.

Extra circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum A , et a A ad $AB\Gamma$ circulum cadant duae rectae $A\Gamma A$, AB , et ipsa quidem $A\Gamma A$ secet circulum $AB\Gamma$, ipsa vero AB contingat; dico rectangulum sub AA , $A\Gamma$ contentum aequale esse quadrato ex AB . Ipsa igitur $A\Gamma A$ vel per centrum transit vel non.

Transeat primum per centrum (Fig. 278. a.), et sit Z centrum circuli $AB\Gamma$, et iungatur ZB ; rectus igitur est $\angle ZBA$ (III. 18.). Et quoniam recta $A\Gamma$ bifariam secta est in Z , adicitur vero ipsi ΓA ; rectangulum sub AA , $A\Gamma$ cum quadrato ex $Z\Gamma$ aequale est quadrato ex ZA (II. 6.). Aequalis autem $Z\Gamma$ ipsi ZB ; rectangulum igitur sub AA , $A\Gamma$ cum quadrato ex ZB aequale est quadrato ex ZA . Quadrato vero ex ZA aequalia sunt quadrata ex ZB , BA (I. 47.), rectus enim angulus ZBA (III. 18.); rectangulum igitur sub AA , $A\Gamma$ cum quadrato ex ZB aequale est quadratis ex ZB , BA . Commune auferatur quadratum ex ZB , reliquum igitur rectangulum sub AA , $A\Gamma$ aequale est quadrato ex contingente AB .

Cor. 1. Si ex eodem puncto extra circulum ducantur plures rectae, quae circulum secant, rectangula sub unaquaque earum integra et parte eius exteriori inter se sunt aequalia. Quodvis enim eiusmodi rectangulum aequale est quadrato contingentis ex isto puncto ad circulum ductae. Cf. Clavius, Tacquet, Gilbert alii.

Cor. 2. Utramque propositionem III. 35. Cor. et III. 36.

Ἀλλὰ δὴ ἡ $\Delta Γ Α$ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ $Α Β Γ$ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ $Ε$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ε$ ἐπὶ τὴν $Α Γ$ κάθετος ἤχθω ἡ $Ε Ζ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $Ε Β$, $Ε Γ$, $Ε Δ$ ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Ε Ζ Δ$. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $Ε Ζ$ εὐθεϊάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $Α Γ$ πρὸς ὁρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ $Α Ζ$ ἄρα τῇ $Ζ Γ$ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $Α Γ$ τέμνεται δίχα κατὰ τὸ $Ζ$ σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ $Γ Δ$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $Α Δ$, $Δ Γ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $Ζ Γ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Ζ Δ$. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς $Ζ Ε$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $Α Δ$, $Δ Γ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν $Γ Ζ$, $Ζ Ε$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $Δ Ζ$, $Ζ Ε$. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν $Γ Ζ$, $Ζ Ε$ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς $Ε Γ$, ὁρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ $Ε Ζ Γ$ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $Δ Ζ$, $Ζ Ε$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $Ε Δ$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $Α Δ$, $Δ Γ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $Ε Γ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Ε Δ$. Ἴση δὲ ἡ $Ε Γ$ τῇ $Ε Β$ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $Α Δ$, $Δ Γ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $Ε Β$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Ε Δ$. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $Ε Δ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $Ε Β$, $Β Δ$, ὁρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ $Ε Β Δ$ γωνία· τῷ ἄρα ὑπὸ τῶν $Α Δ$, $Δ Γ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $Ε Β$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $Ε Β$, $Β Δ$,

- Cor. 1. uno enunciato comprehendere licet. ἸNempe, si e puncto aliquo sive intra sive extra circulum sito ad circulum ducantur plures rectae, quae eum secant, rectangula e partibus cuiusque earum inter punctum et circulum comprehensivae erunt aequalia. Et potest ipsa etiam III. 36. sub hoc enunciato, vel sub Cor. 1. comprehendi: nempe, si recta iam non secet circulum, sed contingat, duo sectionis puncta in unum contactus punctum coincidunt, et rectangulum sub partibus inter punctum et circulum comprehensivae abit in quadratum contingentis, quod observat Coëtsius ad III. 36. Schol. 2. Pariter, quae ad III. 35. Obs. 1. et III. 36. Obs. 1.

Sed $\Delta\Gamma A$ non transeat per centrum circuli $AB\Gamma$ (Fig. 278. b.), et sumatur centrum E , et ex E ad $A\Gamma$ perpendicularis ducatur EZ (I. 12.), et iungantur EB , EF , EA ; rectus igitur est EZA . Et quoniam recta aliqua EZ per centrum rectam aliquam $A\Gamma$ non per centrum ductam ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit (III. 3.); AZ igitur ipsi $Z\Gamma$ est aequalis. Et quoniam recta $A\Gamma$ secatur bifariam in puncto Z , adiicitur vero ipsi ΓA ; rectangulum sub AA , $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex $Z\Gamma$ aequale est quadrato ex ZA (II. 6.). Commune addatur quadratum ex ZE ; rectangulum igitur sub AA , $\Delta\Gamma$ cum quadratis ex AZ , ZE aequale est quadratis ex AZ , ZE . Sed quadratis ex AZ , ZE aequale est quadratum ex EF (I. 47.); rectus enim est angulus EZF ; quadratis autem ex AZ , ZE aequale est quadratum ex EA (I. 47.). Rectangulum igitur sub AA , $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex EF aequale est quadrato ex EA . Aequalis autem EF ipsi EB ; rectangulum igitur AA , $\Delta\Gamma$ cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex EA . Quadrato autem ex EA aequalia sunt quadrata ex EB , BA (I. 47.), rectus enim angulus EBA ; rectangulum igitur sub AA , $\Delta\Gamma$

continentur propositiones, uno enunciato comprehendi possunt. Cf. Gilbert. l. c.

Obs. 2. Si e puncto dato ductae sint duae tantum rectae, ita ut rectangula comprehensa sub totis, et sub segmentis puncto isti adiacentibus sint aequalia, poterit vicissim per quatuor puncta extrema reliquorum segmentorum circulis describi. Circulo nempe per tria horum punctorum descripto, ostendetur per absurdum, eum non posse non per quartum quoque transire. Sin autem e puncto dato plures duabus rectis exeant, Cor. 1. ita converti nequit. Contrarium habet Gilbert. l. c.

κοινὸν ἀγκυρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς EB . λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AA , $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$. Ἐὰν ὅρα κύκλου, καὶ τὰ ἐξῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἣ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβάνομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπίπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάπεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ $ABΓ$ εἰληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ $Δ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Δ$ πρὸς τὸν $ABΓ$ κύκλον προσπίπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $ΔΓΑ$, $ΔB$, καὶ ἡ μὲν $ΔΓΑ$ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ $ΔB$ προσπίπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AA , $ΔΓ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$. λέγω ὅτι ἡ $ΔB$ ἐφάπτεται τοῦ $ABΓ$ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ $ABΓ$ ἐφαπτομένη ἡ $ΔΕ$, καὶ εἰληφθῇ τὸ κέντρον τοῦ $ABΓ$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZE , ZB , ZA . ἡ ἄρα ὑπὸ ZEA ὀρθή ἐστιν.

Obs. 3. Si in fig. 278. a rectam AA consideremus ut summam rectarum ZA , et ZB , rectam autem $ΔΓ$ ut differentiam earum, propositio huius casus ita quoque enunciari potest; in omni triangulo rectangulo ABZ rectangulum ex hypotenusa ZA et unius lateris ZB summa ac differentia aequatur quadrato lateris alterius AB , quod consentit cum II. 4. Cor 4. Cf. Whiston. apud Tacquet. ad h. l.

Obs. 4. Pariter ea pars Cor. 1., qua una rectatum, quae circumulum secant, per centrum transit, ita exprimi poterit: si (Fig. 279. a. b.) ab angulo E trianguli alicuius EAA , cuius

cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB , BA . Commune auferatur quadratum ex EB ; reliquum igitur rectangulum sub AA , AT aequale est quadrato ex AB . Si igitur extra circulum etc.

PROPOSITIO XXXVII. (Fig. 280.)

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, ex puncto autem in circulum cadant duae rectae, et una quidem earum secet circulum, altera vero in eum incidat, sit autem rectangulum sub tota secante et exteriore segmento inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; incidens continget circulum.

Extra circulum $AB\Gamma$ sumatur aliquod punctum A , et ex A in circulum $AB\Gamma$ incidant duae rectae $A\Gamma A$, AB , et ipsa quidem $A\Gamma A$ secet circulum, ipsa vero AB in eum incidat, sit autem rectangulum sub AA , AT aequale quadrato ex AB , dico ipsam AB contingere circulum $AB\Gamma$.

Ducatur enim rectae AE circulum $AB\Gamma$ contingens (III. 17.), et sumatur centrum circuli $AB\Gamma$ (III. 1.), et sit Z , et iungantur ZE , ZB , ZA ; angulus igitur ZEA rectus est (III. 18.).

latera EA , ET sunt inaequalia, demittatur in basin (si opus sit productam) perpendicularum EZ , erit rectangulum $EA \times AH$ sub summa et differentia laterum EA , ET aequale rectangulo $TA \times AA$ sub summa et differentia rectarum ZA , ZA inter perpendicularum et angulos basis interceptarum. Cf. Whiston. l. c. Haec ipsa propositio, eodem monente, casu, qui in figura priore sistitur, etiam ita exprimi potest: si ab angulo E trianguli AEA demittitur perpendicularis in basin AA , eam dividens in duo segmenta AZ , AZ ; erit rectangulum sub summa et differentia laterum EA , EA aequale rectangulo sub basi AA , et differentia segmentorum basis TA

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔE ἐφάπτεται τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ $\Delta Γ A$ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AA , $\Delta Γ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔE . Ὑπόκειται δὲ ¹⁾ τὸ ὑπὸ τῶν AA , $\Delta Γ$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔB · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔB ἴση. ἄρα ἡ ΔE τῇ ΔB . Ἔστι δὲ καὶ ἡ ZE τῇ ZB ἴση, δύο δὲ αἱ ΔE , EZ δυοὶ ταῖς ΔB , BZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ZA . Γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνία τῇ ὑπὸ ΔBZ ἐστὶν ἴση. Ὄρθῃ δὲ ἡ ὑπὸ ΔEZ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔBZ . Καὶ ἐστὶν ἡ BZ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται καὶ τοῦ κύκλου ἡ ΔB ἄρα ἐφάπτεται ²⁾ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. Ὀμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ τυγχάνη ³⁾. Ἐὰν ἄρα κύκλου καὶ τὰ ἐξῆς.

1) Pro ὑπόκειται δὲ Peyrardus ex Cod. a minus accurate habet: ἦν δὲ καὶ.

2) Verba inter utrumque ἐφάπτεται e Cod. a iure addidit Peyrardus.

3) Verba: ὁμοίως δὲ δειχθήσεται — τυγχάνη Rob. Simson. ab editore quodam inscite addita esse putat.

PROPOSITIO XXXVII.

Obs. Est haec propositio conversa praecedentis. Campanus eam aliter duplici modo demonstrat, vel apagogice, dum sumit, ex eadem rectae AZ parte aliam contingente. n ductam esse, vel directe, dum nempe rectangulam e segmen-

Et quoniam $\triangle E$ contingit circulum ABT , secet autem $\triangle A$; rectangulum sub AA , $\triangle T$ aequale est quadrato ex $\triangle E$ (III. 36.). Ponitur autem et rectangulum sub AA , $\triangle T$ aequale quadrato ex $\triangle B$; quadratum igitur ex $\triangle E$ aequale est quadrato ex $\triangle B$, aequalis igitur $\triangle E$ lineae $\triangle B$. Est autem et $\triangle E$ ipsi $\triangle B$ aequalis, duae igitur $\triangle E$, $\triangle Z$ duabus $\triangle B$, $\triangle Z$ aequales sunt, et basis ipsarum communis $\triangle A$; angulus igitur $\triangle EZ$ angulo $\triangle BZ$ est aequalis (I. 8.) Rectus autem $\triangle EZ$; rectus igitur et $\triangle BZ$. Et est $\triangle Z$ producta diameter, quae vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur contingit circulum (III. 16.); recta $\triangle B$ igitur contingit circulum ABT . Similiter autem ostendemus, et si centrum in $\triangle T$ sit. Si igitur extra circulum etc.

tis eius rectae considerat, quae per centrum transit, et ope II. 6. ostendit, esse $\triangle Bq + \triangle BZq = \triangle AZq$, adeoque (I. 48.) angulum $\triangle BZ$ rectum. Caeterum insignem propositiones 35—37. utilitatem, ut per omnem geometriam, ita maxime in doctrina de actionibus habent.

Cor. Si e puncto aliquo extra circulum duae rectae aequales in circulum incidunt, quarum una eum contingat, continget quoque altera. Denique ad hunc librum universe notamus, multa adhuc scitu haud iniucunda ei addi potuisse, maxime e libro tertio Gregorii a St. Vincent. de quadratura circuli, quae brevitatis studio hic omisimus:

EXCURSUS I.

A D.

ELEMENTORUM

I. 29.

Diximus ad Propos. I. 29., ita qua primum adhibetur axioma undecimum, vel postulatum quintum, multum inter Geometras non quidem de veritate huius axiomatis, at de eius evidentia disceptatum fuisse. Et axioma quidem ipsum ita habet:

Si in duas rectas alia recta incidens angulos internos ad eandem sui partes duobus rectis minores faciat, rectae, in quas illa incidit, productae in infinitum inter se coincident (se invicem secabunt) ad eas partes, ad quas sunt anguli duobus rectis minores. Vel, ut aliter dicamus, ad has partes cum recta incidente triangulum efficient.

Ex hoc axioma manifesto consequitur, duas rectas, quae ab una quadam recta ita secantur, ut anguli interni sint duobus rectis minores, etiam sectas a quavis alia recta in punctis duobus diversis cum illa angulos internos efficere duobus rectis minores. Quum enim ex isto axioma rectae ab una aliqua recta ita sectae inter se conveniant, necessario cum alia quavis, a qua pariter in punctis duobus diversis secantur, triangulum efficient, unde ex I. 17. duo anguli interni simul minores erunt duobus rectis.

Casterum facile patet, hoc axioma esse conversam propositionis I. 17.: et si, quod Peletarius vult, conversae propositionum, quarum veritas demonstrata est, ipsae etiam generatim verae essent, nec demonstratione egerent, nihil attineret ulterius quaerere. Id vero non ita se habere, sed conversas, nisi sua luce fulgeant, demonstratione semper sta-

bilini debere, diximus ad I. 6. et omnes logici monent. Iam hanc conversam propositionis I. 17. ex ea ipsa demonstrare quidem tentavit Castillon. (Mém. de l'Acad. de Berlin années 1788. 1789.) at manifesto irrito conatu. Ex eo nempe, quod ex I. 17. patet, *esse nonnunquam rectas*, quae ab aliqua recta ita sectae, ut anguli interni minores sint duobus rectis, concurrant, concludit, *omnes rectas*, quae ita secantur, necessario concurrere.

Neque vero cum Proclo, aliisque nonnullis dixerim, postulatum aut axioma non esse posse propositionem, cuius conversa (hic nempe I. 17.) inter theormata demonstretur (*ὅτι τὸ ἀντίστροφον τῆς ἀποδείκτου ἐν τῇς θεωρήματι ἀναγίγεται.*) Neque enim necesse est, ut conversa propositionis, quae per se patet, adeoque nulla demonstratione eget, etiam ipsa aequè clara sit. Unum videndum est, utrum assertum aliquod per se extra omnem dubitationem positum sit. Et de hoc quidem in axioma 11. multi dubitavere. Unde factum est, ut varias excogitarent rationes, vel illud axioma (plerumque alio axioma, quod ipsis evidentius videbatur, assumpto, aut etiam parallelarum definitione mutata, aut alia ratione) demonstrandi, vel sine eius ope parallelarum theoriam adstruendi. Liceat nonnullam potissimorum, quae huc pertinent, et mihi innotuerunt, tentaminum breviter commemorare. In qua re gratus fateor eximie me adiutum fuisse opera viri doctissimi mihiq̃ue amicissimi, Hauberi, Seminarii Schönthalensis professoris meritissimi, qui, quam dudum elaboravit, de theoria et historia parallelarum commentationem, quam propediem lucem publicam visuram esse spero, benevole mecum communicare, et, ut quae meis usibus inservire putarem, inde exciperem, permittere voluit. Et illi quidem conamina circa hanc rem facta ad certas quasdam classes refertur visum fuit, consilio sane haud improbando: ego vero, quantum fieri possit, in iis certe, qui novam aliquam in hac re methodum proposuerunt: plerumque temporis rationem sequendam putavi, quo facilius pateat, quis primus aliquam demonstrandi viam tentarit, ita tamen,

ut brevitate studio subiungerem subinde eos, qui simili modo rem tractarunt. Neque vero omnia de hac re cogitata, quae infinita fere sunt, prolixè exponere consultum fuerit, sed potiora saltem, et maxime e libris minus obviis deprompta summationem afferre statui.

Primum itaque, Proclo referente, Ptolomaeus *) libellum singularem composuit *περὶ τοῦ τὰς ἀπ' ἑλαττόνων ἢ δύο ὁρθῶν ἐμβαλλομένων συμπίπτειν*, quo Axioma undecimum demonstrare conatus est. Eius demonstratio, quam Proclus exhibet, eo fere redit: si duae rectae parallelae ab alia recta secantur angulos internos, qui ex una parte secantis efficiantur, aut aequales esse duobus rectis, aut iis maiores aut minores. At, quod ex una parte secantis fiat, idem etiam ex altera parte, a qua rectae pariter parallelae sint, fieri debere. Unde, si ex una parte anguli interni sumantur duobus rectis maiores, maiores etiam ex altera parte fieri necesse esse; pariterque, si minores duobus rectis ex una parte fuerint, futuros etiam ex altera minores, quod utrumque absurdum sit (I. 13.). Nihil itaque restare, quam ut rectae parallelae, si ab alia quadam recta secantur, ex utraque sui parte angulos internos efficiant duobus rectis aequales. Atque ita demonstrata propositione I. 29. facile inde deducitur axioma 11. At iure in hac demonstratione, quidquid Ramus ogganniat, reprehenditur, sine causa sumi, angulos ex utraque parte rectae secantis eiusdem semper indolis esse debere, nempe vel ex utraque parte maiores recto, vel ex utraque parte minores, vel ex utraque parte duobus rectis aequales. Playfair. Elem. of Geometry p. 363. observat, niti hanc demonstrationem fundamento, ut aiunt, rationis sufficientis, nec vero esse rationem distincte expositam sumendi, quoad angulos idem ex utraque parte rectae secantis locum habere. Similem fere suppositionem invenimus etiam apud Ohmiium (Kritische Beleucht. der Math. etc. 1819.),

*) Incertum est, an is Claudius Ptolomaeus fuerit, vixit tamen Proclus post Ptolemaeum Astronomum (Klūgel. Conat. praecip. Theoriam Parallelar. demonstrandi Recens. Gott. 1763. p. IV.

qui praeterea sumit, rectas, quae se non secant, eandem positionem habere.

Ipse deinde Proclus rem ita expedire tentat, ut primum monstrat, rectam, quae e duabus rectis parallelis unam secet, secare etiam alteram, unde postea facili negotio deducit axioma 11. In quo ita ille procedit, ut sumat cum Aristotele, duas rectas, quae ex uno eodemque puncto sub aliquo angulo exeant; si in infinitum producantur, discedere a se invicem ad distantiam data quavis maiorem. Inde porro efficit, posse itaque rectam, quae e duabus parallelis unam secet, ad distantiam produci maiorem ea, qua altera parallela ab ea distet, adeoque necessario etiam hanc alteram parallelam secare. Circa hanc demonstrationem Borellius (Euclid. restitut. p. 50.), Saucherius (Euclid. ab omni naevo vindicatus p. 31.), Klügel (Conat. praecip. etc. p. IV. sq.) monent, Proclo, qui in reliquis Euclideam parallelarum notionem retineat, non tamen stabilem hanc notionem videri fuisse. In hac enim demonstratione tacite eum sumere, parallelas omnes aequale aut saltem finitum intervallum servare. Cf. Hoffmann. Crit. der Parallel. Theorie I. Th. p. 22. sq.

Aliter hanc rem aggressus est Arabs, aut ut alii volunt, Persa Nassireddinus, cuius nomine exstat Arabica Euclidis Elementorum Versio impressa Romae 1591. Is inter Propos. 28. et 29. libri primi, referente Wallisio (Opera Mathem. Vol. II. p. 669. sqq.) et brevius Kästner (Geschichte der Mathem. I. B. p. 375. sqq.), ita fere axioma 11. demonstrare conatur. Praemittit tria Lemmata.

Lemm. 1. a) Si quaelibet duas rectae, in eodem plano positae sint (Fig. 96.) AB, CD, in quas rectae EF, GH, IK etc. ita incidunt, ut earum singulae perpendiculares sint rectae CD, rectam autem AB ita secant, ut angulorum alter acutus sit, alter obtusus, omnes puta acuti ad partes BD, obtusi autem ad partes AC: dico, duas illas rectas AB, CD propius semper accedere versus partes BD (quamdiu se mutuo non secant) et remotius distare versus partes AC: item, perpendiculares illas decrescere versus BD (usque ad inter-

sectionem) augeri vero versus AC, ita nempe, ut sit $EF > GH$, $GH > IK$ etc.

b) Item, si singulae rectae in duas illas rectas incidentes perpendiculares sint earum alteri, atque inter se continuo crescant, prout propius ad unam partem quarum illarum rectarum assumantur, decrescant vero ad alteras partes; etiam illae duae rectae AB, CD remotius ab invicem abecedunt ex ea parte, ubi perpendiculares illae longiores sunt, propius autem ex altera parte inter se accedunt, dum se mutuo intersciant. — Perpendicularium autem illarum quaelibet eam quarum rectarum, cui non sumebantur perpendiculares esse, secabit angulis duobus, altero acuto, altero obtuso, omnesque anguli illi acuti versus eas partes erunt, quae propius accedunt duae illae rectae, omnes autem obtusi versus partes contrarias. Suntque hae duae propositiones manifestae, atque a quibusdam geometris ita usurpantur, ut quae pro manifestis habendae sint. Non sine ratione Wallisius addit: „Esto. At, inquam, equis non facilius conceperit, ut clarum: duas rectas in eodem plano convergentes, tandem, si producantur, occurrant, quam hunc totum apparatus.“ His addiderim, ut patet, in conditionibus nihil inesse; quod sibi ipsi contradicat, etiam in parte prioris lemmatis illud ante omnia demonstrandum esse, si recta EF in rectas AB, CD incidens, perpendicularis sit ad CD, cum AB autem versus BD angulum acutum, adeoque versus AC obtusum efficiat, tum reliquas ad CD perpendiculares GH, IK etc., pariter cum AB ad easdem partes BD acutos, adeoque versus AC obtuso angulos efficere. Cf. etiam Saccherius l. c. p. 38. usq.) Kästner. l. c. Hoffmann, Crit. I. Th. p. 115. sqq.

Lemm. 2. „Si quaelibet duae rectae (Fig. 97.) AC, BD ab eiusdem rectae AB extremis et ad easdem partes ductae ipsi sint perpendiculares, atque inter se aequales, earumque extrema iungantur recta CD: erit uterque angulus ACD, BDC rectus, praeterea erit $CD = AB$. Nam, si v. g. ACD non sit rectus, erit vel acutus vel obtusus. Sit, si fieri potest, acutus: erit ex Lemm. I. $AC > BD$. At ex hyp.

etiam $AC=BD$. Similis erit demonstratio, si sumatur angulus ACD obtusus." (At vero ex Lemm. 1. sumi etiam debet, ut valeat consequentia, si angulus ACD fuerit acutus, simul etiam BDC obtusum esse, quod simul locum habere ta-
cite sumit, non probat Nassireddinus.) Esse autem $CD=AB$, si reliqua pro demonstratis sumseris, brevius ac Wallisio interprete est apud Nassireddinum demonstrabitur ita: ducta BC , quum sit $BDC=BAC=$ recto, et BC communis, et $BD=AC$ ex hyp. erit ex iis, quas ad I. 26. diximus, $CD=AB$.

Lemm. 3. In omni triangulo rectilineo tres anguli aequantur duobus rectis. Atque illud quidem, si duo priora lemmata concedantur, in triangulo BAC (Fig. 97.) ad AB rectangulo facillime probatur, erecta in B recta BD ad BA perpendiculari, sumtaque $BD=AC$, ubi ex Lemm. 2. figuram $ABCD$ quatuor angulos rectos habere, et ex I. 4. trian-
gula CAB , BDC aequalia prorsus esse, adeoque trianguli CAB pariter ac BDC angulos duobus rectis aequales esse efficitur. Facile deinde idem in triangulis obtusangulis et acutangulis ope trianguli rectanguli demonstratur.

His praemissis denique Nassireddinus ad axioma 11. demonstrandum accedit, cuius iterum tres casus distinguit, prout recta, quae duas alias secat, ita, ut duo anguli interni duobus rectis minores sint, cum altera earum angulum rectum aut obtusum, aut cum utraque acutum efficit. Duo casus postremo loco positi facile ex primo demonstrantur, quem breviter adhuc videbimus.

Quodsi itaque duae rectae AB , CD (Fig. 98.) ita ab aliqua recta EF secantur, ut ea alteri earum CD sit perpendicularis, et anguli interni DCE , BEC simul sumti sint minores duobus rectis, rectae AB , CD , si opus sit, productae, necessario concurrent. Ex puncto quocunque G rectae AB demittatur perpendicularum in EF , quod, quum BEC ex hyp. sit angulus acutus, ex parte huius anguli cadet, adeoque vel cum perpendicularo CD coincidat, quo facto constat, quod probandum erat, vel ultra CD versus F vel inter E et C ca-

det. Si cadat ultra CD versus F , constabit propositum ex Ax. 13. et I. 27. Si cadat inter E et C . v. c. in H (Fig. 99.), sumatur rectae HE duplum KE , triplum ME etc. usque dum perveniatur ad aliquod eius multipulum OE , quod maius sit, quam CE . Pariter in recta AB sumatur rectae GE duplum IE , triplum LE etc. usque dum habeatur eius aequemultiplex NE , quotuplex OE fuit rectae HE . Iam facile demonstratur, si ex I ad EF demittatur perpendicularis Ir (ita ut punctum r rectae EF incidat) punctum r idem fore ac punctum K , pariterque perpendiculara a $L \dots N$ in EF demissa in punctis $M \dots O$ cum ea convenire — quam demonstrationem a Nassireddino praetermissam esse sine causa queruntur Kaestnerus, deceptus forte versione ipsi oblata minus accurata, et qui eum sequitur, Hoffmann. Crit. I. Th. p. 123. Est enim haec demonstratio saltim in iis, quae Vallisius ex eo affert. Nempe, si ex E erigatur ad EF perpendicularum $EP=GH$, erit iuncta $PG=EH$, et $HGP=EPG$ rectus (Lemm. 2.). Et, quia rectae EB , EF versus BF divergunt, erit perpendicularum $Ir>GH$ (Lemm. 1.). Abscindatur $rn=GH$, et iungatur nG , eritque angulus HGn pariter ac rnG rectus, et $Hr=Gn$ (Lemm. 2.). Et quum etiam HGP rectus sit, erunt nG , GP in directum (I. 14.). At quum in triangulis $IGN=EGP$ sit $GI=GE$ ex constr. et angulus $IGN=EGP$ (I. 15.) et angulus InG (I. 14.) pariter ac GPE rectus erit (I. 26.) $Gn=GP=HE=HK$. At erat $Gn=rH$, itaque $rH=HK$, i. e. puncta r et K coincidunt. Similiter monstratur, perpendiculara a $L \dots N$ demissa in EF cum punctis $M \dots O$ coincidere. Quum igitur O sit ultra C positum, recta CD (quae cum ON convenire nequit I. 27.) erit intra triangulum EON , adeoque rectam EN secabit (Ax. 13.). Ingeniosam hanc demonstrationem esse, Vallisius ait, et certe, si lemmata concedantur, haud reprobanda erit. At de his dubia nostra supra expromissimus.

Clavius quanquam queratur (Euclid. Elem. Libr. XV. 1591.; primam Elementorum Editionem Clavius dederat 1574.) nunquam tibi copiam factam, Euclidem Arabicum legendi,

habet tamen in sua editione Euclidis 1591. facta p. 60. sqq. demonstrationem axiomatis 11, quae cum ea, quam ex Nassireddino attulimus, multa habet communia. Alia tamen ille supponit principia quasi per se clara, aut levi aliqua illustratione egentia. Quorum est

1) Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quae in eodem cum ea plano existit, aequaliter distat, recta est.

2) Si recta linea super aliam in transversum moveatur, constituens semper in suo extremo cum ea angulos rectos, describet alterum ipsius extremum quoque lineam rectam. (Pari scopo hanc propositionem adhibuere, et demonstrare conati sunt alii v. c. Hauff*) Leipz. Archiv für Mathem. X. Heft S. 179.). Pergit deinde Clavius:

3) Si ad rectam lineam duae perpendiculares rectae lineae erigantur inter se aequales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quovis puncto huius rectae ad priorem rectam demissa utrilibet priorum perpendicularium aequalis. Ex his deinde

4) deducit eam propositionem, qua Nassireddinus pro lemmate 2. usus erat, quam etiam alio adhuc modo demonstrare Clavius tentat, nempe ita, ut ostendat

5) Si in duas rectas lineas incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, et cum altera ex eadem parte acutum, duas istas rectas minus semper inter se distare ad eas partes, ubi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distare. Atque hoc quidem, quoad rem ipsam nihil aliud est, quam Nassireddini Lemm. 1. e quo deinde

*) Idem etiam Archiv 9. Heft No. VI. alia indirecta ratione parallelarum theoriam exhibere voluit, de quo tantanine conferatur Hoffmann. Versuch einer neuen und gründl. Theorie der Parallelen, nebst einer Widerlegung des Hauffschen Versuchs, Offenbach 1801, et Hoffm. Crit. p. 27. sqq. Plura alia parallelarum theoriam stabiliendi tentamina a se facta repetit, novisque auct idem Hauff (Geometriae Fundamenta solida Gandae 1819., quorum editio secunda: Nova rectarum parallelarum theoria auct. C. Hauff prodiit Francofurti 1811), quae omnia tamen, ut verum fateamur, nutare nobis videntur. Nec tamen aliorum iudicium antevertendum putamus.

pariter id, quod tertio loco posuit Clavius, eodem fere modo atque apud Nassireddinum deducitur. Quocunque autem modo Clavii propositio 3, ostensa fuerit, ex ea deinde Clavius simili plane ratione, et magis forte dilucide, ac est apud Nassireddinum, axioma 11. adstruit. Hanc autem Clavii demonstrationem in iis, quae primo et secundo loco sumit, certiorum esse Euclideo axiomate vix puto quemquam sibi persuasurum esse. Cf. Giordano da Bitonto Euclid. restituto p. 63. sqq. Saccher. l. c. p. 33. sqq. Hoffmann. Crit. der Parall. Theor. I. Th. p. 12. sqq. Atque in eo etiam, quod quinto loco ponitur, et cuius demonstrationem tentavit Clavius, perpendicularis ex una duarum rectarum in alteram, et ex punctis, quibus haec illi rectae occurrant, vicissim in priorem demissis, multa desiderari circa eas harum parallelarum partes, quae duobus istorum perpendicularorum interceptae sint, monet Kaestnerus, ubi de Nassireddini Lemm. 1. agit (Geschichte der Mathem. I. B. p. 377.) cf. Hoffm. Crit. der Parall. Theorie p. 15. sqq. Et quamvis has lacunas aliqua ex parte expleverit Karsten. Math. theor. elem. et sublimior 1760. §. 9. nec ipse tamen demonstravit perpendiculara, quae ab una harum rectarum ad alteram ducantur, universim omnia una ex parte semper crescere, ex altera semper decrescere. Idem fere ipso auctore ingenue faciente censendum est de similibus Hoffmanni conaminibus (Versuch einer neuen und gründl. Theorie der Parallelen, 1801. cf. eiusd. Krit. der Parall. Theorie 1807, I. Th. p. 263. sq.) qui tamen primus directe demonstrationem, in qua pauca forte supplenda fuerint, dedit, qua ostenditur, ex uno crure cuiusvis anguli acuti in alterum perpendicularum demitti posse, quod sit quavis data maius. Borellius etiam (Euclid. restitut. Pis. 1658. p. 32. sqq.) Clavii axioma 2. retinet, tum vero, quod Euclidis definitionem parallelarum, qua rectae in infinitum productae nusquam concurrere dicuntur, valde remotam et incomprehensibilem parallelarum passionem continere putabat, aliam earum definitionem substituit, quas nempe dicit esse in eodem plano sitas rectas, ad quas eadem aliqua recta perpendicularis sit. Deinde ex eo, quod diximus, axio-

meto demonstrat, si una aliqua recta ad alias duas perpendiculares sit, reliquas etiam omnes, quae ad unam parallelarum perpendiculares sint, perpendiculares fore etiam ad alteram. Hinc deinde propositionem I. 29. et axiom. 11. reliquasque, quae inde pendent, propositiones deducit, satis tamen modesto iudicat, se, si non solidius, saltem facilius ac brevius passiones parallelarum demonstrasse. Et sane id, quod ex Clavio sumit, axioma vix satis tutum fuerit.

Italus deinde Vitale Giordano da Bixonto (Euclide restituito Rom. 1680.) pariter Euclidis parallelarum definitionem reprehendit, quod negativa tantum sit (quod ipsum praeter alios etiam Hauff. repetit), nec veram earum indolem exprimat, unde ita eas definit, esse rectas, quae in eodem plano ex utraque parte in infinitum productae nec ad se invicem accedant, nec recedant, quarum rectarum possibilitatem se postea ostensurum esse spondet. Ipsam deinde parallelarum theoriam sequentibus propositionibus adstruere conatur.

1) „Si duae rectae (Fig. 100.) CA, DB sub angulis aequalibus incidant in tertiam aliquam rectam AB, et sit $AC = BD$, erit etiam perpendicularum CE ex C in AB demissum aequale perpendiculo DF ex D in AB demisso. Contra vero, si sit $AC > BD$, erit et $CE > DF$.“

2) „Si in figura quadrilatera (Fig. 97.) ABCD aequales rectae AC, BD sub aequalibus angulis rectae AB insistant, erunt etiam reliqui anguli C et D aequales.“ Atque haec quidem duae propositiones facillime demonstrantur ab auctore.

3) Recta, cuius puncta extrema per aliquam curvam transeant, spatium cum ea comprehendit.“

4) „Recta, quae per duo puncta alicuius curvae ducitur, ex parte eius concava transit.“

5) Perpendiculara, quae e punctis quibuscunque curvae alicuius in rectam quamcunque demittuntur, nequeunt omnia inter se esse aequalia. Iungantur enim ex parte cava curvae (Fig. 101.) duo puncta quaecunque A, C, recta AC, in quam ex puncto aliquo B curvae demittatur perpendicularis BD, ex

A erigatur ad AC perpendicularis AG, sumatur in recta DB producta punctum quodcunque F et fiat $AG=DF$ iungaturque GF. Iam rectae AG, DF aut perpendiculares erunt ad GF aut non. Si perpendiculares sint, constat propositum, ob $AG=DF > BF$. Sin autem non sint perpendiculares, erunt certe ex 2. anguli G, F aequales: unde, quum $AG > BF$, erunt etiam ex 1. perpendiculara ex A et B in GF demissa inaequalia, unde iterum constat propositum. Et quum punctum F pariter ac puncta A, C in curva pro lubitu sumi possint, patet omnino, innumeris rectas GF dari, de quibus valeat propositum. Ita saltem ille concludere debebat, ut monet Klügel. (Conat. praecip. p. XX.) non autem, ut apud Italum nostrum est, perpendiculara in rectam quancunque a curvae punctis demissa non posse omnia inter se esse aequalia.

6) „Si duae rectae aequales AB, CD (Fig. 102.) in eodem plano sitae alii rectae BD ad angulos rectos insistant, et ex puncto aliquo E iunctae AC demissum in BD perpendicularum EF aequale sit rectae AB, etiam alia quaecunque recta, ut GH ex puncto aliquo G ad BD perpendiculariter ducta aequalis erit rectae AB. Nempe, quum ex 2. anguli BAC, et DCA sint aequales, et ex eadem ratione etiam anguli BAC et FEA, pariterque anguli DCA et FEC aequales sint, aequales erunt anguli FEA, FEC (Ax. 1.), unde FEA, FEC recti erant (Def. 10.), adeoque etiam anguli BAC, et DCA recti sunt. Deinde, si GH, AB non sint aequales, erit GH vel maior vel minor altera AB. Sit, si fieri potest, maior, et sit $IH=AB$, ducanturque AI, CI. Erit itaque angulus BAI minor recto, pariterque DCI minor quam DCA i. e. minor recto. At ex 2. $HIA=BAI$, et $HIC=DCI$, unde etiam uterque HIA, HIC minor recto, adeoque AIG, et CIG uterque maior recto (I. 13.); et angulus AIC maior duobus rectis, adeoque multo magis $AIC+ACI$ maiores erunt duobus rectis, quod fieri nequit (I. 17.). Itaque GH nequit esse maior quam AB. Similiter ostenditur, nec minorem esse posse: erunt itaque AB, GH aequales.“

7) „Si duae rectae aequales (Fig. 103.) AB, DC in eodem

plano sitae ad angulos rectos, insistant alii rectae, BC , et e punctis quibuscunque E ductae AD perpendiculari EF demittantur in BC , erit quodvis eorum aequale rectae AB . Si enim unum horum perpendicularum non aequale fuerit rectae AB , nullum e. aequale erit (6.), itaque aut omnia maiora, aut omnia minora erunt, quam AB , aut alia maiora, alia minora. Atqui 1) haec perpendiculara non omnia maiora esse possunt quam AB . Quodsi enim foret, abscindatur in omnibus $GF=AB$, eritque linea per omnia ista puncta G ducta, curva concava versus E (4.), e cuius punctis G aequalia ad BC perpendiculara demissa sunt, quod fieri nequit (5.). (Ita Giord. da Bitonto, ut iam monuimus, propositionem 5. non adeo universaliter demonstratam esse.) Simili ratione demonstratur 2) nec omnia perpendiculara minora esse posse quam AB , nec 3) alia maiora, alia minora.“

8) „Si in figura quadrilatera duo latera opposita aequalia sint, et uni reliquorum laterum ad angulos rectos insistant, erunt etiam duo reliqui anguli recti. Id ope 7. iam eodem fere modo demonstratur ac pars prior 6.“ Est haec propositio Nassired. Lemm. 2. et Clavii Prop. 4.

9) „Si duae rectae (Fig. 104. 105.) AB , CD in eodem plano sitae secantur ab alia quadam recta EF , quae iis ad angulos rectos insistat, illae in infinitum productae nunquam nec ad se invicem accedent, nec recedent i. e. e definitione, erunt rectae parallelae. Nempe ex rectae AB puncto quocunque G demissum perpendicularum GHI semper aequale erit perpendicularo EF . Si enim non sint aequalia, erit alterutrum maius altero. Sit 1) si fieri potest (Fig. 104.), $GH > EF$, sumtoque $HI=EF$, erit angulus FEI rectus. At FEG pariter ex hypoth. rectus est, unde foret $FEI=FEG$, pars toti q. e. a. (Ax. 9.). 2) Similis est demonstratio (Fig. 105.), nec GH maiorem esse posse quam EF . Erunt itaque duo perpendiculara aequalia.“

10) „Si duae rectae AB , CD (Fig. 106.) sint inter se parallelae, recta FE , quae unam earum CD ad angulos rectos secat, secabit etiam alteram AB ad angulos rectos. Sp-

setur enim ad rectos angulos utraque rectarum parallelarum AB, CD alia recta HI. (Id ipsa autem hic noster illegitime sumere videtur. Ostenderat quidem (9.), rectas ab alia recta ad angulos rectos sectas esse parallelas, at iam sumit conversam; parallelas semper ita secari ab aliqua recta, quod fieri semper posse ostendendum erat.) Sumatur deinde $HG = IE$, et ducatur GE: erit (8.) IEG angulus rectus. At ex hyp. etiam IEF , recta igitur EF cum EG coincidet.“

11) „Si sit angulus rectilineus acutus quicumque ABC (Fig. 107.) et e puncto D quocunque rectae BA quantumlibet productae demittatur perpendicularum DE ad CB quo magis punctum D in recta BA sumtum distat a B, eo magis etiam punctum E distabit a B. Nempe, si punctum F, e quo demittitur ad BC perpendicularum FG propius absit a B, quam D, necessario etiam erit $BG < BE$. Si enim neges, erit aut $BG = BE$, at tunc foret angulus DGB, utpote rectus, aequalis angulo FGB, totum parti q. e. a. Aut $BG > BE$, adeoque punctum E in punctum aliquod rectae BG v. c. in H caderet, et rectae DH, FG se intersecarent in puncto aliquo I, ac foret IGH triangulum, in quo duo anguli G et H uterque rectus esset q. e. a. (I. 17.)“ Notandum tamen est, verba: „quanto il punto preso in AB sarà più lontano dal punto B, tanto la perpendicolare segnerà la retta CB nel punto più remoto dal punto B“ involvere videri aliquam inter incrementa rectarum BD, BE rationem, quae tamen hic probari nequit.

12) „Si sit angulus rectilineus acutus quicumque ABC (Fig. 108.), et e puncto quocunque D unius e cruribus eius BC erigatur perpendicularum DE, illud, si opus sit, productum occurreret alteri cruri BA. Sumatur enim in recta BA punctum quodcumque G, et ex eo demittatur ad BC perpendicularum GH, et punctum H vel cum puncto D coincidet, vel erit H in recta BD ultra D producta, vel in ipsa BD. Duobus prioribus casibus facile patet propositum. Tertio casu auctor noster rem inde patere putat, quod ex Prop. praecedente magis magisque a B remota perpendiculara e punctis rectae BA in rectam BC demitti possint, quae, quum BD finitam tantum

habeat longitudinem, BA autem in infinitum producti possit, tandem ultra DE cadere necesse sit.“ Quam demonstrationem non sufficere, nec licere a maiore subinde distantia a B ad distantiam data BD maiorem concludere, vix est quod moneam.

13) „Rectae AB, CD (Fig. 109.), quae in eodem plano ab alia recta EF ita secantur, ut anguli alterni BGH, CHG fiant aequales, sunt parallelae. (Est haec apud Euclidem I. 27.) Bisecetur enim GH in I, et ex I demittantur ad AB, CD perpendiculara IL, IK, erunt $GI=IH$ ex constr. $LGI=IHK$ (hyp.) $L=K$ utpote recti ex hyp. unde et $GIL=KIH$ (I. 26.) adeoque LIK erit recta (Conv. 1. Prop. I. 15.). Et quum sit ea ad AB et CD perpendicularis, hae duae rectae erunt parallelae (9.).“

14) „Pariter, si angulus externus aequalis sit interno ad easdem partes opposito, vel si duo interni aequales sint duobus rectis, parallelae erunt rectae, quae ita secantur.“ (Euclid. I. 28.)

15) „Si duae rectae parallelae secantur ab alia recta, erunt anguli alterni aequales etc.“ (Prop. I. 29.). Hanc iam simili constructione demonstrat ac 13., nisi quod ex I rectam uni parallelarum ad angulos rectos duci iubet, et ex 10. ostendit, eam etiam alteri parallelarum occurrere.

Sequuntur deinde Euclidis I. 30. et I. 31. adiecto corollario, per unum punctum extra aliquam rectam non nisi unam ei parallelam duci posse. Aliis deinde scholiis et corollariis Ax. 11, Euclidis demonstrat, atque etiam docet, rectam, quae e duabus parallelis unam secet, secare etiam alteram; porro: si duae rectae in eodem plano non sint parallelae, eas concurrere, et si non concurrant, esse parallelas, itaque omnes, quae non concurrant, nec ad se invicem accedere, nec recedere, additis ad finem rationibus, quare Euclidis definitio parallelarum pariter ac Ax. 11. et Clavii demonstratio ipsi imperfecta videatur.

Wallisius Operibus suis Mathematicis T. II. p. 665. sqq. Oxon. 1693. inseruit disertationem geometricam de postulato

quinto libri I. Elementorum. Atque ille quidem primum defendere conatur, iuste Euclidem postulatum illud, aut, ut nos dicimus, axioma sumsisse. „Quod verum sit, ait, hoc effatum, nemo dubitat. Non autem gratis assumendum, sed probandum fuisse, contendunt aliqui, duplici saltim argumento, sed quorum neutrum me movet. Potest, inquit, demonstrari, ideoque debet, et non ut principium primum assumi, quasi foret indemonstrabile. Verum illi non satis attendunt, inter has communes notiones (tum ab Euclide, tum ab ipsis, qui hoc obijciunt) recenseri, non modo eas, quae omnino demonstrari non possunt, sed quae saltim demonstratione non indigent. Equis enim non videt, axioma sextum: aequalium dupla inter se esse aequalia, demonstrari posse ex secundo propter aequalia aequalibus addita? Sed et qui hoc effatum demonstrari posse contendunt (saltim quos ego vidi) non illud praestant, nisi assumtis aliis, quae sunt hoc ipso nihil clariora. Vel igitur fatendum illis erit, hoc Euclidi concedendum, vel aliud quid huius loco, quod non sit maius clarum, praesumendum. Obijciunt porro, utut hoc verum sit de *lineis rectis*, (nempe occurrentibus tandem esse, quae convergunt rectae) cum tamen id de *lineis universim* non sit verum (ut de curvis cum rectis, aut cum aliis curvis notum est) id de *rectis* probandum erit, quod non est de *lineis universaliter* verum. Sed et hic in eundem ipsi lapidem impingunt, dum assumunt (ne plura nominem) quod *duae rectae non comprehendunt spatium*, quod de *lineis universim* ne ipsi dixerint. Certum utique est, *duas curvas* aut etiam *unam* posse spatium comprehendere. Mihi certe res videtur tam clara, ut de ea nemo, qui rem sedate perpenderit, merito dubitet (magis quam *angulos rectos omnes esse inter se aequales*), si dicatur:

Duae rectae in eodem plano convergentes (si satis continuantur) tandem occurrent. Et quidem ab ea parte, qua convergunt (non ea qua divaricantur). Si porro quaeratur, quaeenam censendae sint convergentes? eas dicimus

In quas recta incidens duos internos (ex eadem parte) angulos faciat minores duobus rectis. Quippe si AB magis inclinatur ad CD, quam haec ab illa reclinatur; hoc est, si AB magis vergit ad CD quam haec ab illa refugiat, merito dicantur invicem convergentes; nec video, quo caractere possit haec convergentia aptius describi, quam quod illos angulos faciat minores duobus rectis. Cum igitur luce sua sat clarum videatur, sic convergentes rectas tandem coituras (quod nemo sanus dubitabit) sitque hoc aptum $\kappa\rho\iota\tau\iota\kappa\iota\omicron\nu$ de rectis convergentibus (quod anguli sic facti sint minores duobus rectis) non video, quin hoc Euclidi postulanti merito concedatur. Si phantasiam cuiuspiam turbet, quod (in eodem sermone) pro convergentibus inseruerit Euclides harum definitionem: poterit ipse se inde satis expedire, rem separatim considerando, prout hic proponitur. Ego certe haud difficilis concesserim. Quippe qui mente satis concipit, quid sit rectum esse, et quid in directum procedere (eorsum continuo tendens, ab ea, qua coeperat, directione nusquam devians, quod in curva non fit) non poterit dubitare, quin, si rectae sint, sintque in eodem plano, et convergentes, et in directum procedant (idem altera alterius punctum continuo respicientes eoque collimantes) non, inquam, dubitare poterit, quin si in infinitum (aut saltem quantum opus est) sic eorsum continuentur, occurrant tandem, utraque ad punctum illud, quo continuo collimabat, pertinens."

Addit deinde, cum tamen aliquot magni viri senserint, si non necesse, saltem aequum esse, ut demonstretur, ipsique ad adgressi sint, inter quos refert Ptolemaeus, Proclum, Clavium, Thomam Oliver. Anglum, Arabem Ananitium quendam et Nassiredinum, se quoque suam symbolam conferte statuisse. Tum exhibita primum Nassiredini demonstratione, cuius potissima capita supra dedimus, addit, vidisse se in alio arab. mscpto duas alias huic non multum absimiles eiusdem postulati quinti demonstrationes. Hoc autem omnium commune esse, quod, dum Euclidi haud facile postulandum concesserint, duas in eodem plano rectas convergentes, si pro-

ducantur, tandem coituras, assumant ipsi huius [loco aliud aliquod, nedum plura, postulatum, unde illud operose demonstrent, quod non minus difficile concessu videatur. Quo confirmator ipse factus sit, immerito sugillatum iri Euclidem propter hoc (non iniquum) postulatum. Suam deinde subiungit demonstrationem, quae ad haec lemmata redit:

1 et 2) „Si finita recta, in recta infinita iacens, in directum continuetur (vel quantum libet promoveri intelligatur) etiam continuata (vel promota) iacebit in eadem recta infinita.“ Quod motum rectae adhibeat, excusat Wallisius exemplo Euclidis, aliorumque geometrarum, qui motum circuli in definitione Sphaerae, et motum trianguli in definitione Coni, quin in postulato tertio libri primi elementorum pariter motum rectae, et saepius praeterea superpositionem figurarum sumant.

3) „Si finitae rectae, in recta infinita iacenti, insistat recta angulum cum ea faciens, facit haec cum recta illa infinita, eundem angulum.“

4) „Si in recta infinita, finita recta iacens, in directum promoveatur, et huic insistens recta, non variato angulo, simul feratur: facit haec ad rectam illam infinitam eosdem (seu aequales) ubique angulos.“

5) „Si in duas rectas recta incidens angulos internos et ad easdem partes faciat minores duobus rectis: angulus externus (utrivis adiacens) opposito interno maior est.“

6) „Iisdem positis: si recta interiacens (Fig. 110.), ut AC, in directum promoveatur in situm $\alpha\gamma$ (ita ut punctum A iam cum C coincidat, et simul feratur AB (manente angulo BAC invariato) in situra $\alpha\beta$: dico, totam rectam $\alpha\beta$, hoc est AB promotam cadere extra CD.“

7) „Iisdem positis: dico (Fig. 111.) rectam $\alpha\beta$, hoc est AB promotam rectam CD prius secare, quam punctum α ad C perveniat.“

8) „Tandem, ait, praesumo (ex praesupposita rationum natura tanquam cognita, et figurarum similium definitione) ut communem notionem

Datae cuicunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse. Hoc enim (propter quantitates continuas in infinitum divisibiles pariter atque in infinitum augibiles) videtur ex ipsa quantitatis natura fluere; figuram scilicet quamlibet continuam posse (retenta figurae specie) tum minui, tum augeri in infinitum. Atque hoc revera (utut inobservati, nec ipsi forsitan animadvertentes) praesumunt omnes, et cum aliis Euclides ipse. Dum enim postulat dato centro et intervallo circulum describere, praesumit, circulum cuiuscunque magnitudinis, vel quocunque radio possibilem esse: quodque praesumit posse fieri, postulat te posse facere. Et quanquam non pariter aequum esset postulatum, cuiusvis figurae datae similem te posse (nondum edoctum) super data recta construere: possibile tamen esse, hoc fieri, de figura quacunque non minus praesumendum erit, quam de circulo. — Nec obstat praesumptioni huic nostrae, quod proportionalium definitio, et (quae hanc supponit) definitio similium figurarum nondum erat ab Euclide tradita (sed altera libro quinto, altera sexto post tradendae); poterat enim Euclides, si expedire visum esset, utramque libro primo praesentis.

9) Ex his lemmatibus deinde facile demonstrat axioma Euclidis undecimum, „quod nempe, si ponuntur (Fig. 112.) anguli $BAC + DCA < 2^{\circ}$ rectis, ex Lemm. 7. semper inveniri potest triangulum $\pi Ca'$, cuius anguli ad basin iidem vel aequales sint angulis DCA , BAC , et huic triangulo πCa deinde aliud simile cogitari potest super facta CA . — Neque, ait Wallisius, hic obstat, quod super datam rectam triangulum constituere dato simile nondum docuerat Euclides: nam multa passim in $\pi\alpha\theta\eta\sigma\epsilon\nu\eta$ ad demonstrationes theorematum (utut in problematum constructione secus sit) fieri posse praesumuntur et supponuntur facta, quae quomodo fiant geometrice, nondum traditur. — Cum igitur sit PCA triangulum, occurrunt invicem duae rectae CP , AP . Erit nempe, quum triangula PCA , πCa sint similia, $PCA = \pi Ca = DCA$, adeoque recta CP in ipsa CD producta iacet, pariterque $PAC = \pi aC = BAC$, unde etiam AP in ipsa AB producta erit. Coeunt an-

tem AP, CP in puncto P, unde coeunt DC, BA in eodem puncto i. e. ad eas partes rectae AF, ubi sunt duo illi anguli duobus rectis minores. His addit Wallisius: tantum autem abest, ut Euclidem culpem, quod ipse id non demonstraverit, ut neque culpaverim, si plura adhuc indemonstrata postulasset, v. c. cum Archimede, lineam rectam omnium inter eadem puncta esse brevissimam, quo posito non opus fuisset I. 20. Sed Euclides id sibi propositum habuisse videtur, ut, quam paucissimis postulatis reliqua demonstraret firmissimis consequentiis. Unde factum est, ut sibi non raro facesset negotium ea probandi, quae nemo non gratis concesserit. Et quidem in omni probatione in quacunque materia praesumendum est aliquid. Nam, nisi ex praesumptis (seu praecessis, aut ante non probatis) nulla sit probatio. Haec autem praesumenda quamvis ab alijs scriptoribus, de rebus alijs non soleant discrete recenseri (quod ab Euclide factum est) talia tamen tacite praesumunt alij, utut inobservati. Sed et Euclides ipse in processu operis praeter haec discrete memorata (ut praecipua et magis notabilia) alia, sive ex inspectione schematis, sive aliunde manifesta passim praesumit, sed quae nemo foret negaturus. — Et quidem, si adhuc plura vel tacite praesumerat, vel discrete postulaverat (quae sua luce clara sint) non foret inde culpandus — sed laudandus, qui tam distincte, quid velit, exposuerit. Nempe lineae (non quaelibet, sed saltem) rectae (non quotlibet, sed) duae (non utcunque sitae, sed) in eodem plano, (nec sit utcunque, sed) in quas recta incidens angulos internos et ad easdem partes faciat minores duobus rectis, (nondum forte coeunt, sed) si producantur (non utcunque, sed) in infinitum, tandem coibunt (non quidem ad utrasque partes sic incidentis rectae, nec ad utrasque indifferentes, sed) ad eas partes, ubi sunt illi duo anguli minores duobus rectis. Quod optimo consilio factum iudico. Atque haec in Euclidis vindicias sufficiant.⁶⁶ Ita quidem Wallisius. Et, quidquid sit de eo, quod in Lemm. 8. sumitur: datae cuiuscunque figurae similem aliam cuiuscunque magnitudinis possibilem esse, et nominatim super quacum-

que recta data triangulum descriptum cogitari posse, quod simile sit triangulo dato, de qua suppositione disputari posse sane concedendum est, nescio tamen, an Klügelius (Conat. præcip. etc. p. XV.) haud inсто iniquius de hoc Wallisii conamine iudicet. Putat nempe, qui axioma 11. neget, non posse non postulatum Wallisii sibi *repugnans* dicere. Quin demonstraturum, nulla triangula, nisi aequalia, sibi esse posse similia. Etenim, qui axioma 11. neget, pugnaturum, cuiusque trianguli BAC (Fig. 115.) angulum externum CAD maiorem aut minorem esse summa duorum interiorum oppositorum. Si enim in uno casu eum illis aequalem censeret, in omnibus idem ipsi fatendum fore, id itaque, cum contra hypothesin ipsius sit, haud concessurum. Itaque affirmaturum esse, triang. CAD maiorem aut minorem summam angulorum habere quam triang. BCD, itemque triang. AED (facto angulo $EAD = CBD$) maiorem vel minorem illam habere quam triang. ACD, ergo etiam quam triang. BCD. Ergo angulum AED maiorem aut minorem fore quam BCD; ergo triangula BCD et AED non fore similia, licet angulos duos singulos aequales habeant. Ita quidem Klügelius. At sibi haec argumentatio nihil probare videtur. Ille enim, quem Klügelius fugit, adversarius ex falsa sua aut certe nondum demonstrata hypothesi illud tantum adstruere poterit, quae a se et Wallisio ponantur, simul vera esse non posse, sibi ea, quae Wallisius postulet, haud certa videri (falsa esse nondum demonstravit). Nec mirum. Tacite enim in iis, quae Wallisius sumat, involvi 11. illud axioma, quod adversarius negat, nemo negaverit, quippe e suis suppositis, si iis non involutum esset, nec evolvere illud poterat Wallisius. Utra autem sententia, num Wallisii an adversarii vera sit, id inde pendeat, utra magis sua luce fulgeat, aut ex aliis indubitatis principiis derivari queat. Nec etiam omnia, quae ad figurarum similitudinem pertinent v. c. laterum proportionalitas hic in censem veniunt, sufficit Wallisio ponere, super quacunque recta construi posse figuram alteri datae aequiangulam, vel potius saltem construi posse triangulum alteri dato aequiangulum.

Cf. Saccherius p. 40, 41. sq. Tacquetus (*Elementa Euclidea Geom. Plan.* edita ab anno inde 1654, saepius, inter alia 1725, quam editionem hic citabimus p. 6.) Euclidis parallelarum definitionem e pari ratione ac Proclus reprehendit, quod dentur lineae, quae in infinitum productae, licet ad se mutuo adpropinquent ad intervallum quovis dato minus, nunquam tamen concurrant; ac rectas lineas parallelas eas esse dicit, quae in eodem plano sitae, utrimque in infinitum protractae aequalibus semper intervallis distent, vel, ut postea explicat, quorum omnia perpendiculara ex una in alteram demissa sint aequalia. Eas generari dicit, si recta ad aliam perpendiculararis ad hanc semper perpendicularariter moveatur: tunc enim alterum eius extremum describere (non tantum, ut Clavius ait, rectam, sed) parallelam ei, ad quam perpendicularariter movebatur. — At facile patet, demonstrari oportere, lineam, e cuius punctis quibuscunque demissa ad rectam aliquam perpendiculara inter se aequalia sint, etiam ipsam rectam esse. Sumit deinde tria nova axiomata, quae quidem, concessa ipsius definitione, facile demonstrare poterat, adeoque demonstrare debebat, nempe p. 8. parallelas communi uti perpendicularo: et perpendiculara bina ex parallelis aequales utrimque excipere partes; denique p. 27. inter crura cuiusvis anguli rectilinei duci posse rectam uni horum crurum parallelam et quavis data recta maiorem. Quae omnia sane laud ita comparata sunt, ut Euclidis ἀκρίβειαν ullo modo assequantur. Cf. Hoffm., *Critik der Parallel. Theorie* p. 210. sqq.

Wolffii demonstratio in *Elem. Geom.* quum ex eadem parallelarum definitione, a Posidonio iam, ut ad Def. 35. diximus, prolata, proficiscatur, neque etiam is demonstrare tentaverit, posse perpendiculara ex una recta in alteram demissa omnia inter se esse aequalia, quum alii praeterea errores in eius argumentatione se facile prodant, v. c. quod sine demonstratione sumit, perpendicularum super una parallelarum erectum secare etiam alterum, nihil attinet, his diutius immorari. Idem circa alia etiam tentamina ex hac definitione parallelarum theoriam adstruendi monendum fuerit. Ita v. c.

La Caille (Leçons Élément. de Math. Edit. 1784. p. 261.) eandem parallelarum definitionem sumit, addit autem, quum duo puncta positionem rectae determinent, sufficere, si duo perpendiculara sint aequalia. Hoc autem ad definitionem hanc defendendam haud sufficere quisque videt. Pariter Edmund. Scarburgh, (the English Euclid 1705.) retinet quidem Euclideam parallelarum definitionem, at pro axiomate sumit, parallelas eandem ubique distantiam habere, ubi eadem monenda videntur.

Similem defectum in eorum theoria locum habere, iam supra ad Def. 35. diximus, qui rectas parallelas eas esse dicunt, quae in eodem plano sitae ab alia recta ita secuntur, ut anguli alterni fiant aequales, nempe probandum esse, id fieri, a quacunque recta secuntur. Ex horum numero est potissimum Varignon. Elém. de Math. 1751., Bossut Traité Elém. de Géom. 1777. et multi eos secuti Galli, cum quibus etiam facit Austin. An Examinat. of the first six Books of Euclids Elements Oxford. 1781. p. 13., quos itaque pariter hic praetermittimus. Ipse tamen Bossut postea Cours de Mathémat. T. II. 1800. ait, si rectae alicui aequalia perpendiculara insistant, earumque extrema iungantur, has iunctas efficere unam rectam, ei, cui perpendiculara insistant, parallelam, de qua definitione vide, quae dicta sunt ad Def. 31.

Longe accuratius in ea re versatus est Hieron. Saccherius, edito Mediolani 1733. Euclide ab omni naevo vindicato. Et quamvis verum sit, quod Klügel. monet l. c. p. VI. VII. multis eum ambagibus uti, et in tam obscuris ac involutis ratiociniis facile errorem aliquem latere posse, et quamvis nec ipsum scopum penitus tetigisse fateamur, haud tamen inutile fuerit, laboribus viri paulisper immorari, eiusque demonstrandi rationem obiter saltem cognoscere, qui rem omnem diligentius, quam plerique reliquorum tractavit, et omnem lapidem movit, ut falsarum hypothesium absurditatem ostenderet, et ad certa omnia, quae huic pertinent, capita revocaret. Liceat itaque, quantum fieri potest brevissime, methodum eius iudicare. Et primum quidem ostendit, quod

etiam Giord. da Bitonto (quem Saccherius, quod mirum videri possit, haud legisse, aut aliunde nosse videtur) demonstrasse diximus, duas rectas aequales, quae eidem basi ad easdem partes insistant, angulosque aequales efficiant, et quorum extrema iungantur, angulos quoque, quos cum iuncta faciant, efficere aequales: nominatim itaque, si eidem basi duo aequalia perpendiculara insistant, fore etiam, si eorum extrema iungantur, reliquorum angulorum vel utrumque rectum (quem ille casum hypothesin anguli recti vocat), vel utrumque obtusum (hypothesis anguli obtusi) vel utrumque acutum (hypothesis anguli acuti). Omnis deinde demonstratio eo redit, ut ostendat, hypothesin anguli obtusi pariter ac anguli acuti locum habere non posse, necessario itaque locum habere hypothesin anguli recti, vel, ut aliter dicamus, in figura quadrilatera, cuius duo latera opposita aequalia sint, atque ad basin perpendicularia, reliquos etiam angulos esse rectos, quod ipsum, ut supra vidimus, est Nassireddini Lemm. 2. et a Clavio quoque 4. a Giord. da Bitonto autem 8. loco positum fuit. Ac Euclideum axioma facile inde derivatur. Et hypothesin quidem anguli obtusi non consistere posse facile demonstrat, quum ea admissa veritas axiom. 11. Euclid., ex hoc autem veritas hypotheseos anguli recti consequeretur, antea autem ab ipso demonstratum fuerit, unam e tribus illis hypothesibus vel unico saltim casu admissam excludere utramque reliquarum. Hac itaque hypothesi suo telo iugulata, incipit, ut Saccherius ait, diuturnum auctoris proelium adversus hypothesin anguli acuti, quae sola adhuc renuit veritati axiomatis Euclidei. Et hic quidem multus est auctor noster in stabiliendis variis consecutiis, quae admissa una aut altera hypothesi, et maxime hypothesi anguli acuti locum habere debeant et vice versa (v. c. prout in quolibet triangulo tres anguli simul aequales aut maiores aut minores sint duobus rectis, locum habere hypothesin anguli recti (Hyp. 1. vocabimus) aut anguli obtusi (Hyp. 2.) aut anguli acuti (Hyp. 3.): pariterque in quovis quadrilatero omnes angulos simul quatuor rectis aequales fore in Hyp. 1. aut maiores in Hyp.

2. aut minores in Hyp. 3.; et simili hypothesis diversitate angulum in semicirculo fore rectum, aut maiorem aut minorem recto etc. et vicissim). Adiectis deinde pluribus aliis Prop. XXIII. ostendit, duas rectas in eodem plano sitas vel commune habere perpendicularum, vel in alterutram eandem partem protractas semper magis ad se invicem accedere, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat. Deinde, postquam sumpta Hyp. 3. magis ad se invicem ita accedere non posse ostendit, ut distantia earum semper maior sit data quadam longitudine, nihil relinqui putat, quam ut distantia earum quavis data minor sit, vel ut in infinito, ut aiunt, concurrant. Ita vero commune perpendicularum, et commune etiam segmentum habituras duas rectas in infinito concurrentes, quod quum fieri non possit, nec hypothesis tertiam locum habere posse. Solam itaque relinqui hyp. 1. quae cum Axiom. 11. acutissime cohaereat. Praeterea aliter etiam hyp. 3. destruere conatur, quod, ea sumpta, linea aliqua curva simul maior ac minor esse debeat linea aliqua recta, quod tamen eum satis perspicue demonstrasse iure dubitatur. Unde concludit, hyp. 1. solam veram esse, adeoque Ax. 11. rite habere. Abuti tamen eum voce infiniti et concursus in infinito, merito iudicat Klitgel., infinitum enim natura sua esse indeterminatum, et rectas, quas in infinito concurrere metaphorice dixeris, reapse haud concurrere, nec commune perpendicularum habere.

Notari omnino meretur, Lambertum quoque in meditationes circa parallelarum theoriam incidisse, iis admodum similes, quas a Saccherio attulimus, quamvis ipse Saccherii, quem no legisse quidem videtur, nullam mentionem faciat. Fuerunt illae conscriptae 1766., at post mortem demum viri sagacissimi, cui forte ipsi non ex omni parte satisfacere, insertae a Bernoullio Lipsiensi Promptuario Mathematico (Leipz. Magazin für Mathem) 2. St. 1786. p. 137. sqq. et 3. St. p. 325. sqq.) Lambertus post generalia circa ea, quas in parallelarum theoria adhuc desiderari possint, monita, nonnullas propositiones affert, quibus demonstratis Ax. 11. sponte

fluere ostendit, variisque modis tentat, eas ita struere, ut vix quidquam in earum demonstratione desiderari posse censeretur. Deinde ipsam parallelarum theoriam aggreditur, pariterque tres hypotheses sumit, et de iis, quae inde consequantur, disquirat, prout nempe in figura quadrangula, cuius tres anguli recti sint, reliquus quartus vel et ipse rectus, vel maior, vel minor recto fuerit, quas hypotheses alio nomine ad eas ipsas redire, quas Saccherius habuit, facillime patet, cf. Lambert, l. c. §. 30. sqq. Lambertus tamen rem aliquanto brevius et magis dilucide, quam Saccherius expedit, pariterque hypothesin anguli obtusi facile refellit, ex qua nempe consequi docet, duas rectas spatium comprehendere; hypothesin autem anguli acuti pariter magis refractariam esse deprehendit, tandem tamen etiam hanc sibi ipsi contradicere, demonstrari posse putat. Quae ipsa tamen demonstratio nititur propositione sequenti: „Si in duas rectas in eodem plano sitas tertia aliqua incidat, quae cum altera earum angulum rectum, cum altera angulum efficiat recto minorem, ita ut a recto angulo quantum libet parvo differat, rectae istae ita sectae in infinitum productae se invicem secabunt. Hanc autem propositionem, quae ax. 11. partem specialem completitur, in praecedentibus Lambertum haud ita evicisse, ut in elementis fas erat, iure monet Hindenburg. l. c. p. 365. Ea quoque demonstratio, quam exhibet Struve (*Theorie der Parallellinien*, Königsberg 1820.) eo redit, ut hypothesin Saccherii secundam et tertiam locum non habere posse asserere conetur. Neque tamen etiam apud hunc auctorem omnia satis evicta, nec ea simplicitate posita esse videntur, quae elementarem demonstrationem decet. Eadem fere ratione, ut nempe hypothesin anguli acuti pariter atque anguli obtusi locum habere non posse (quamvis ipse hac denominatione non utatur) ostendere studeat, rem absolvere se posse putat Duttenhofer (*Versuch eines strengen Beweises der Theorie von Parallellinien* 1813.) in quo tentamine eadem, quae in reliquis huc pertinentibus notavimus, desiderari adhuc videntur.

Praetereo hic Hausenii demonstrationem in *Elem. Mathc-*

seos Lips. 1734. quum in ea aperte, etiam Klügelio iudice l. c. §. VI. sumatur, quod probandum erat. Satis concinne tamen Hausenins omnia ad eum casum reduxit, quo altera duarum rectarum, quae ab alia quadam recta secantur, huic ipsi ad angulos rectos insistit, altera cum ea angulum acutum efficit. Pariter nihil opus esse puto, omnia hac in re conamina v. c. ab Hanke., Behn., Maleziou., Cataldo., Pardies., König., Ebert., Voigt., Maas., Vieth., Lazar, Bendauid. (de quo conferantur imprimis Pfeiderer. Thes. inaugur. 1786, Thes. 1—5.) Kircher., Lüdicke, aliisque facta, quae vel Klügel. et Hoffmann. habent, vel e schedis Hauberianis aut aliunde mihi cognita sunt, hic afferre, quum vel nihil, quod ipsis proprium sit, aut prae reliquis erineat, habeant, vel manifestis etiam paralogismis innitantur.

Præterire etiam liceat, quae Segner. (Vorl. üb. Rechenk. und Geom. 1767. V. Abschn.) Karsten. (Praellect. Mathes. theor. et element. 1760.) Lorenz. (Erster Coursus der reinen Mathem. 1804.) habent, qui sumunt aut demonstrare tentant, rectam, quae per punctum intra aliquem angulum situm ducatur, necessario alterutrum certe crus huius anguli secare, quum nec haec satis circumspecte evicta aut extra omnem dubitationem posita esse facile pateat.

Alia autem ratione Kaestner. (Anfangsgr. der Arithm. und Geom. 1758.) Segner. (Vorlesung. über Rechenk. und Geometrie 1767. IV. Abschn. §. 57. et Vorrede zu den 6 ersten Büchern der geometr. Anfangsgr. Euklids 1773.), Klügel. (Encyclop. 1782.), G. G. Schmidt, (Anfangsgr. der Mathem. 1797.) et recentissimis adhuc temporibus Herrmann. (Versuch einer einfachen Begründ. des 11. Euklid, Axioms. Frankf. 1813.) et Bürger, (vollständ. Theorie der Parallelen, Karlsruhe 1816.) hanc rem ita certe illustrare studuerunt, ut tutius deinde axioma 11. sumere liceat. Eorum argumentationes, quarum initia iam apud Wallisium deprehendimus, eo fere redeunt. Si duae rectae BA, DC (Fig. 114.) ab alia quadam AC ita secari ponantur, ut summa angulorum BAC, DCA minor sit duobus rectis, consequitur, angulum BAE maiorem

esse angulo DCA. Quodsi igitur recta DC, manente angulo DCA, versus A promoveatur, manifestum est, ubi punctum C ad A pervenerit, rectam DC intra angulum BAF sitam fore v. c. in AG. Iam, si vice versa AG, manente angulo GAF = DCA, versus C regrediatur, patet, non statim totam ultra AB recessuram (ita enim angulus GAF non posset manere) sed primum inferiores saltem eius partes, quae rectae AC proximae sunt, ultra AB v. c. in eum situm, quo rectam *ce* videmus, perventuras, quum interea partes ab AC longius remotae, ut *de* adhuc cis AB positae sint. Et, quum recta quaevis ut AG vel *cd* in infinitum produci queat, semper, quemcunque recta ita promota situm habuerit, infinita eius puncta cis AB remanebunt, ut itaque hic rectae motus continuari possit, quamdiu libuerit, v. c. dum iterum ad CD regressa sit, nec unquam situm obtinere poterit, quo non aliqua eius puncta citra, alia ultra AB sita fuerint, unde et rectae AB, CD, si opus sit, productae se invicem secare censendae sunt. Atque haec quidem ad illustrandum axioma 11. quam maxime facere, quin huic scopo sufficere videri possint, perfectam tamen in iis demonstrationem contineri, perspicacissimi huius illustrationis auctores nec ipsi putarunt, nec aliis persuasum fuit. Maxime etiam analogia curvarum quarundam, quae asymptotae, ut vocant, habent rectas, a quibus non secantur, quamvis ab ipsis his rectis, si retento situ priori parallelo promoveantur, eas secari certum sit, praecipitare hac in re iudicium vetare videtur. Cf. Hoffm. Crit. der Parall. Theorie I. Th. p. 61. sq. 104. sq. 147. sq. Par fere ratio est eorum, qui, si in praecedente figura alter angulus v. c. BAC rectus, alter DCA acutus sit, ostendunt, ex CD maiora subinde perpendiculara ad AC duci posse, quae ex AC pariter maiora segmenta puncto C adiacentia abscindant, unde deinde colligunt (quamvis fortasse haud accurate ostensum sit, segmenta illa data quavis recta tandem maiora esse, vel incrementa etiam segmentorum eadem semper aut maiora etiam fore), tandem aliquod horum perpendicularorum cum recta BA coincidere, aut etiam ultra eam cadere debere, quo praeter Clavius, eos-

que quos cum ipso nominavimus, pertinet le Gendre* (Elem. de Géom. 1794. et 1817.) de quo vide Gilberti monita (die Geometrie nach le Gendre, Simpson etc. 1798. p. 73. sqq.) et Franceschini (la Theoria delle parallele rigorosamente dimostrata in eius Opuscoli Mathematici. 1787. cf. Playfair. Elem. of Geom. p. 364.). Recentissime quoque similem viam ingressus est Metternich (Vollständ. Theorie der Parallelen 1815) sed haud meliore ac reliqui fortuna. Nam et ipsi haud contigit, ostendere, bases triangulorum, quas sumit, tandem quavis data maiores fore. Cf. Zeitschrift für Astron. 1816. II. B. S. 64. flg.

Eodem fere tempore, quo apud nos Kaestner., Sagner., Karsten. alique de parallelarum theoria laborarunt, in Anglia idem aggressus est Rob. Simson. Is nempe in latina Elementorum editione, quam publici iuris fecit 1756., professus primo est p. 345., axioma 11. inter communes sententias non ponendum videri, sed neque demonstrationem stricte loquendo admittere, explicatione autem quadam indigere, ut dilucidior fiat, atque hanc ipsam explicationem ita dedit, ut rectas, quae eidem rectae ad rectos angulos aint, aequidistantes quoque esse pronuntiaret, rectas autem, quae ab eodem puncto exeant, a se invicem magis et magis divaricare et divergere (quod idem fere Procli assertum est), atque inde axiomatis 11. veritatem ostendi posse putaret. Si enim (Fig. 115.) rectae DF, AB ab alia recta HE ita secantur, ut anguli interiores et ad easdem partes DFE, BEF simul minores sint duobus rectis, constitui posse angulum HFG aequalem BEF, unde demonstrari possit, rectas FG, AB eidem alicui rectae ad angulos rectos, adeoque inter se aequidistantes esse. Quam autem ex constr. FD cadat inter aequidistantes FG, AB, rectas FG, FD ex eodem puncto exeuntes necessario tandem magis inter se distare, quam aequidistantes FG, AB, adeo-

*) Idem in subsequentibus elementorum editionibus varijs alijs modis rem tentavit, quorum qui ex functionum, ut aiunt, theoria desumpti sunt, ut nihil aliud moneamus, ad elementa certe non pertinent, qui autem magis elementares sunt, nec ipsi auctori plane satisfacere videntur.

que FD tandem fore ad partes rectae AB contrarias ei, ad quas sit punctum F, adeoque tandem convenire rectae AB. In anglica deinde Elementorum editione, quae primum prodiiit Glasg. 1762. accuratius adhuc rem demonstrare aggreditur hoc fere modo:

Def. 1. „Distantia puncti a recta est perpendicularum a puncto in rectam demissum.“

Def. 2. „Recta ad aliam rectam propius accedere, aut ab ea recedere dicitur, prout distantiae punctorum prioris rectae a posteriore decrescant semper aut crescant: aequidistantes autem dicuntur duae rectae, si puncta unius ab altera eandem semper distantiam teneant.“

Axioma. „Fieri nequit, ut recta aliqua primum propius ad aliam rectam accedat, deinde iterum ab ea recedat, antequam eam secuerit; pariter recta nequit primum recedere ab alia recta, deinde propius ei accedere; nec recta primum alii rectae aequidistans esse, deinde ei propius accedere, aut magis ab ea recedere potest; recta enim eandem semper servat directionem.“ Hinc facile demonstrat

Prop. 1. „Si duae rectae (Fig. 116.) AC, BD aequales inter se alii cuidam rectae AB ad angulos rectos insistant, et a puncto quocunque F iunctae CD demittantur ad AB perpendicularum, erunt EF, AC, BD aequales. Quodsi enim non ita esset, recta CD accederet primo, deinde recederet a recta AB, quod fieri nequit.“ Est haec propositio Clavii 3. et 7. Giordani da Bironzo.

Prop. 2. „Si eidem rectae ex eadem parte ad aequales angulos constituentur duae rectae aequales, eorumque extrema iungantur, iuncta haec pariter rectos angulos efficiet cum istis, quarum extrema iungit.“ Facile patet, esse id ipsum Lemma 2. Nassireddini, vel Clavii Prop. 4. vel Saccherli Hyp. 1. Hinc deducitur in parallelogrammo, cuius tres anguli recti sint, quartum etiam rectum fore.

Prop. 3. „Si duae rectae angulum (acutum) comprehendant, in utraque earum punctum inveniri potest, a quo

perpendicularum in alteram demissum maius sit data quavis recta."

Prop. 4. „Si duae rectae ab alia recta ad easdem partes sub angulis aequalibus, altero interno, altero extremo, secantur, erit etiam aliqua recta, quae eas ad angulos rectos secet."

Prop. 5. Haec eadem est cum Euclidis axioma 11. et simili fere modo ac in ed. Simsonis latina demonstratur.

Apparet, Simsonis demonstrationem aliqua ex parte convenire cum Claviana. Et maxime etiam axioma a Simsone sumtum iisdem fere dubiis obnoxium est, ac Clayii lemma 2. Conf. Hoffmanni Critik der Parallelen Theorie p. 74. sq. Austin. (l. c. p. 11.) quoque monet, eadem fere, quae contra Euclidis axioma 11. Proclus observaverit, valere quoque contra hoc axioma Roberti Simson. „(Haud multum a theoria Rob. Simsonis differre videtur demonstratio prior Mülleri. Ausführl. und evidente Theorie der Parallelen. Nürnberg. 1819. Demonstratio eius posterior paralogismo laborare videtur. Nec ea, quae in appendice adiecta est, demonstratio omnia exhaustio). Alius Anglus, Thom. Simpson. (Elem. of Geometry, quorum editionem quintam Lond. 1800. editam inspicere mihi licuit), fita in hac re versatur, ut primum doceat, distantiam puncti alicuius a recta esse perpendicularum ab hoc puncto in rectam demissum, deinde sequens axioma praemittat.

„Si duo puncta alicuius rectae inaequaliter ab alia recta in eodem plano posita distent, hae rectae in infinitum productae ex ea parte concurrent, qua minus distant." Hinc porro facile deducit, duas rectas, quae non concurrant, (vel quae ex Euclidis mente parallelae sint) eandem semper inter se distantiam habere, vel, omnia perpendiculara ab una ad alteram demissa esse aequalia, adeoque per unum idemque punctum non posse plures una recta alicui rectae parallelas duci, et rectas, quae eidem rectae parallelae sint, parallelas esse inter se, unde deinde reliqua et nominatim Prop. I. 29. facile consequuntur. Et fatendum omnino est, concesso axioma, reliqua inde rite derivari. Quamvis autem Playfair

(Elem. of Geom. p. 369.) hanc demonstrationem omnium simplicissimam atque elegantissimam esse iudicet, alii tamen nec hoc axioma multum ab Euclideo differre iudicarunt. Playfair, ipse pro axioma sumit, eidem rectae per idem punctum unam tantum parallelam duci posse.

Verum mittamus haec, et quaedam adhuc demonstrationum genera consideremus, quibus nostra aetate parallelarum theoriam stabilire nonnulli tentarunt. Et primum quidem eorum est, qui ex accepiore theoria situs rem expediri posse putaverunt. Kaestnerus inter primos fuisse videtur, qui ita iudicaret in adiecto Klügelii dissertationi de parallelis, quam saepius laudavimus, epistolio, ubi ita ait: „habitueros nos aliquando veram parallelarum theoriam vix speraverim, nisi diligentius exculta theoria situs.“ Quae in re haud consentientem habet Pflaiderer. (Thes. inaugural. 1782. Th. I.) Karstenius deinde primum in Progr. inaugurali Halae 1778. edito rem maxime eo deducere studuit, ut ostenderet, duas rectas in eodem plano positas, quae cum tertia aliqua secante aequales efficiant angulos exteriorem et interiorem oppositam ad easdem partes, etiam cum alia quacunque ipsas secante angulos modo denominatos aequales efficere. Id quod inde adstruere tentat, quod, assumpto contrario, easdem illae duae rectae in plano, in quo ductae sunt, simul habiturae essent positionem eandem, ac diversam, seu non eandem (forte rectius similem ac dissimilem.) (Ita certe accuratius Proclus ad I. 30. dicit: καὶ γὰρ ἐστὶν ὁμοιότης θέσεως ἢ παραλλήλότης.) Hac autem argumentandi ratione haud acquieturum fuisse Euclidem, iudicat Pflaiderer. l. c. Thes. 13. maxime si conferantur eius propositiones 7. 8. 9. 10. 11. libri V. et VI. 21. Ulterius deinde Karstenius rem explicavit, edito Halae 1786. libro (Mathem. Abhandlungen S. 130—145.) Theoria eius a Pflaiderer. (Thes. inaugural. 1786. Th. 6.) ad haec capita reducta sistitur:

1) „Rectae, quae se mutuo secant, seu non parallelae sunt, habent directionem, vel positionem, diversam, non eandem“ (§. 20.).

2) „Duas rectae, quae a duobus punctis protenduntur secundum eandem directionem, seu quae in eodem plano eandem habent positionem, se mutuo non secant (§. 22. Cor. 2.) adeoque parallelae sunt“ (§. 28.).

3) „Duas rectae in eodem plano, quae cum eadem tertia ipsas secante efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes, eandem in plano habent positionem vel directionem“ (§. 23.).

4) „Quae autem non efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes, eandem in plano non habent positionem vel directionem, sed diversam“ (§. 25.).

5) „Duas rectae, quae in eodem plano eandem habent positionem, vel iuxta eandem directionem protenduntur, sectae ab eadem tertia efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes“ (§. 25. Cor. 1. §. 29. Cor. 2.).

6) „Contra, quae eandem positionem vel directionem non habent, cum tertia ipsas secante non efficiunt angulum exteriorem aequalem interiori opposito ad easdem partes“ (§. 25. Cor. 3. §. 30.).

7) „Rectae, quae se invicem secant, cum eadem tertia ipsas secante faciunt angulum exteriorem maiorem interiori opposito ad eas partes, ad quas concurrunt (§. 26.), adeoque angulos interiores ad has partes minores duobus rectis.“ His stabilitis, Pfeiderer. iudicat, reliqua brevius, quam a Karstenio factum sit, expediri posse, at Thes. 8. addit: „in praemissis, earumque demonstrationibus scrupulos movere non inanes videtur 1) conceptus identitatis directionis duarum rectarum in eodem plano praemissus theoriae parallelarum; 2) identitas situs seu positionis in eodem plano attributa duabus rectis diversis, contra notiones communes modi, quo rectae in plano positio dari intelligitur (§. 18. 22.); 3) axiomata tacite supposita in demonstrationibus Prop. 3. 4. (§. 23. 25.): duarum rectarum, quae ab eiusdem tertiae situ in plano aliquo ad easdem partes divergant angulis aequalibus, eandem

esse positionem in plano; et rectam, quae positione vel directione differat ab una duarum rectarum eandem in plano positionem habentium, pariter cum altera non habere positionem eandem: quae, si geometricè enuncientur, ultimo resolvuntur prius quidem in I. 28. Euclidis, posterius in propositionem: non posse eidem rectae per idem punctum duci plures una parallelas.“

Huc etiam pertinet Hindenburg. qui in Promtuarium Lipsiensi (Leipz. Magazin der Natürl. Math. und Oekon. 1781. p. 145—168 et 342—371.) et brevius, at, ut ipse dicit, accuratius postea in eodem Promtuarium (1786. III. St. p. 367—389.) parallelarum theoriam exposuit. Haec theoria eo maxime nititur, ut ostendatur, rectas, quae eidem tertiæ parallelæ sint, parallelas esse inter se. Quod quidem casu I. nullo negotio evincitur, si nempe illa tertia, inter duas, cum quibus comparatur, intermedia sit. Casu II. autem, quo illa extra utramque reliquarum posita est, demonstrationem ita instruit auctor, ut dicat, rectas, quae parallelæ sint alicui tertiæ extra ipsas positæ, necessario aut

- 1) omnes inter se parallelas esse, aut
- 2) nullam earum parallelam esse uni e reliquis, aut
- 3) aliquas quidem inter se parallelas esse, alias non.

Jam vero id, quod secundo et tertio loco positum erat, excludere studet, ut itaque primus saltem casus reliquus sit. Nempe tertium quidem casum haud obtinere posse putat: omnes enim rectas, quae alicui tertiæ parallelæ sint, eo ipso determinatum situm habere: id vero fieri non posse, si earum aliae inter se parallelæ esse possint, aliae non. Itaque aut omnes inter se parallelas, aut omnes non parallelas fore. At nec secundum casum locum habere posse, eo enim sumto consequi inde manifesto contradictoria. Quodsi enim sumatur (Fig. 116.), tam AB quam CD parallelas esse rectæ EF extra ipsas positæ, easque ex hypothesi hic facta inter se parallelas esse non posse, necessario sequi, ut per punctum aliquod I rectæ AB duci possit recta GH rectæ CD parallela (I. 31. quæ ex controverso Ax. 11. non pendet.) Ita tam GH quam

EF parallelas fore rectae CD inter ipsas positae, adeoque ex casu I. parallelas fore inter se. Quum vero etiam CD parallela ponatur rectae EF, ex hypothesi nunc sumpta, GH, CD nequire inter se parallelas esse, quod contradicat ei, quod ante sumptum fuerat. Et in hac argumentatione ad casum secundum facta fateor nihil me videre, quod iure reprehendi possit. Ipse autem Hindenburg. aliam adhuc huius casus demonstrationem addit, recta CD circa immotam EF circumvoluta, quam ipse priore adhuc certiorē esse putat, quae vero meo iudicio pluribus adhuc dubiis obnoxia fuerit. Quid sit, mihi cardo rei non in hoc secundo casu, sed in tertio, quem ante secundum leviter tantum perstringere visum fuit auctori, versari videtur. Neque enim illud ipsum: rectas, quae eidem tertiæ parallelæ sint, determinatum situm habere, satis clare expositum est, neque etiam, si id concedatur, inde fluere videtur, non posse harum ita determinatarum rectarum alias inter se parallelas, alias non parallelas esse. Cf. Pfeiderer. Thes. inaug. 1782. Th. 14. et Hoffm. Crit. I. St. p. 230. Pariter ex ratione situs theoriā parallelarum derivat Schwab. (Tentamen novae parallelarum theoriæ, notione situs fundatae Stuttg. 1801.) et aliquanto brevius in alio libello (Commentatio in primum Elementorum Euclidis librum Stuttg. 1814.). Est nempe ei situs certus modus, quo plura coexistunt (§. 18. libelli modo citati): angulus planus rectilineus autem diversitas situs duarum rectarum in plano concurrentium §. 26.: rectae autem parallelæ sunt, si eundem situm habent, vel si situs unius idem est ac situs alterius §. 27. (Distinguit nempe inter situm et positionem vel directionem.) Duo tandem adiungit axiomata, quorum prius est: si duae rectae habent eundem situm inter se, habebunt situm aequè diversum a situ rectae tertiæ. Posterius: si duae rectae habent situm aequè diversum a situ rectae tertiæ, habebunt situm eundem inter se. Hinc facile deducuntur propositiones I. 29. I. 28. I. 27. I. 30. ac deinde axioma 11. Denique adstruitur, duas rectas parallelas nec inter se concurrere, et vice versa: si duae rectae ex neutra parte con-

currant, esse eas parallelas: denique, rectas parallelas esse aequidistantes, et lineam, quae ab alia recta aequidistet, etiam ipsam rectam esse. Quae omnia satis inter se cohaerere, et e suppositis rite deduci nemo negaverit. At scrupulus restat in ista idea *identitatis* situs *duarum* aut *plurium* rectarum, nec facile concipitur, qua ratione lineae *diversae eandem* situm habere dicantur. Praeterea axiomata praemissa, si usitatis in geometria terminis exprimantur, nihil aliud esse videntur, quam ipsae propositiones I. 29. et I. 28. Cf. Hoffmanns. Crit. I. Th. p. 198. sq. Notandum denique Vermehren. (Versuch die Lehre von parallelen und konvergenten Linien aus einfachen Begriffen vollständig herzuleiten Göttr. 1816.) ex iisdem fere principiis procedere. Minus tamen exacta videtur eius demonstratio. Sumit enim ut axiomata 1) rectas, quae versus aliquam tertiam eandem directionem habeant, habere eandem directionem inter se, i. e. si consueto more rem exprimas: quae eidem tertiae parallelae sint, parallelas esse inter se, (quod certe Hindenburg. demonstrandum esse putaverat, et quod solum omnino sufficit reliquis demonstrandis). 2) Si duae rectae habeant eandem directionem inter se, et una ad tertiam aliquam inclinatur, inclinari ad eam etiam alteram (i. e. rectam, quae unam e duabus parallelis secet, secare etiam alteram, quod pariter solum sufficebat, at probandum erat). Olimus etiam, de quo supra, quum de Ptolomaeo sermo esset, diximus, aliqua ex parte huc pertinet. Alterum iam restat genus eorum, qui superficiem planam infinitam, cruribus anguli in infinitum productis interiacentem characterem magnitudinis anguli constituerent (aut pro mensura anguli sumerent), quo pertinet Bertrand. (Développement nouveau de la partie élém. des Mathém. Vol. I. Préf. p. 21. et Vol. II. P. I. Ch. I. §§. 4. et 12—24.) et Schulz. (Entdeckte Theorie der Parallelen 1784. ac denuo in alio libro: Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe seiner Theorie der Parallelen, Königsb. 1786.), quibus adiungi potest Crelle (über Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie, Berlin 1786.) et Lacroix (Elémens de Géom. 1803.). Theoriae Ber-

traudi et Schulzii Epitomen et Epicrisin ab Hindenburgio, et ex parte a Kaeſtnero factam continet Promptuarium Lipsiense (Leipz. Magazin für reine u. angew. Mathem. 1786. 3. St. p. 392. sqq.) cum quo conferri meretur Karsten. (Mathem. Abhandl. Nr. 11. §. 52—76.). De Crelle videantur Annales Heidelbergenses (Heidelb. Jahrb. der Literat. 1818. Nr. 52.) de Lacroix Hoffm. Crit. I. Th. p. 81. sq. Schulzium etiam contra varias eius theoriæ oppositas obiectiones defendere studuit Gensichen. (Bestätigung der Schulzischen Theorie der Parallelen, und Widerlegung der Bendavidschen Abhandl. über die Parallellinien, Königsb. 1786.). Olim etiam, quod notat Pfleiderer. (Thes. inaugur. 1784. Thes. 6. 7.) fuisse, qui angulum pronunciarent esse spatium indefinitum, quod cruribus anguli interiaceret, nectendis tamen inde consequentiis penitus abstinnerunt e. g. Schott. in Cursu Mathem. L. I. C. III. Art. II. §. 2. Lamy Elém. de Géom. L. II. Sect. I. Def. 1. Müller. Vorber. zur Geom. C. IV. §. 13. Et Ramus iam Scholar. Math. 1599. p. 146. totam geometriam locis omnibus angulum aut superficiem aut corpus facere dixerat. Cf. etiam Proclus ad I. Def. 8. At hanc rationem nominatim etiam, nec illegitime, ex eadem causa, ob quam longitudinis crurum ratio in ea non haberi debet, reprehenderunt Orontius Frineus Geom. L. I. C. IV. §. 1. Maler. Geometrie u. Markscheidek. C. I. §. 50. Bossut. Traité Elém. de Géom. Not. génér. §. 9. Quidquid sit, si omnes, quos hac ratione theoriā parallelarum tractasse diximus, in eo consentiunt, ut spatium inter duas parallelas infinite productas contentum pro nihilo aut infinite parvo habendum putent, si comparetur cum spatio inter duo alicuius anguli crura infinite producta contento. Quod ita se efficere posse putant, ut dicant, angulum quemcunque pluribus vicibus iuxta se ipsum pon posse, ita, ut tandem omne infinitum spatium circa aliquod punctum in plano positum expleat aut superet; spatium contra intra duas parallelas contentum si totidem, quot angulus ille, vicibus iuxta se ponatur, semper tamen ad utramque sui partem infinitum spatium haud expletum relinquere, unde patere putant

hoc inter parallelas contentum spatium pro nihilo habendum esse comparatum cum spatio angulari inter crura infinite producta. His positis deinde axioma 11. Euclidis ita adstruunt. „Quodsi duae rectae (Fig. 117.) AB, CD ab alia recta EF ita secantur, ut anguli interni BGH, DHG simul sumti minores sint duobus rectis, AB, CD productae tandem concurrerent. Facile enim patet, angulum DHF maiorem esse angulo BGH, unde, si angulus FHI fiat aequalis angulo BGH, recta HI intra angulum DHF cadet, et parallela erit rectae BG. Jam cum spatium angulare inter crura DH, IH infinite producta contentum ex praecedente infinites minus esse debeat spatio inter parallelas HI, GB infinite productas contento, manifestum est, spatium illud angulare non concludi posse intra terminos huius a parallelis comprehensi spatii i. e. rectam HD necessario tandem limites rectae GB praetergressuram esse, seu duas has rectas inter se concurrere.“ Contra hanc demonstrandi rationem multa praeclare monuerunt Hindenburg. (Allgem. Litter. Zeit. 1785. Nr. 54. et Leipz. Magazin 1786. 3. St. p. 392. sqq.) Karsten. (Mathematische Abhandlungen Nr. II. §. 52—76.) Pfeiderer. (Thes. inaugur. 1784. Thes. 6—18. et Thesaur. inauguralis 1786. Thes. 9. 10.) et Eichler. (de Theoria parallelarum Schulziana Lips. 1786.). Haec monita eo potissimum redeunt: conceptum superficiei angularis non indefinitae sed reapse infinitae laud satis clarum esse, et obstare, quo minus demonstrationes illi innixae possint esse aequae evidentes et apodicticae, ac ulla Euclidea, neque enim spatia infinita dari et construi posse; principia geometrica, quae tantum de quantitativis finitis valeant, nominatim principium congruentiae ad demonstranda theoremata de spatiis angularibus infinitis non aequae clare et tuto applicari posse; spatia evanescentia et nihilo aequiparanda, si non absolute, tamen relative ad alia nec per se accurate sumi posse, nec unquam demonstrationem rigorosam, sed aliquam tantum ad verum approximationem admittere; aliis evidentibus geometriae principiis v. c. axiomatici I. 9. „totum sua parte maius esse“ manifesto vim fieri, et e geometria elementari terminos etiam infinite magni et parvi esse proscribendos.

Longis his disquisitionibus finem tandem faciemus, adiectis duobus recentioribus tentaminibus, quibus rem, et alter certe novis plane ac hactenus intentatis cuniculis (quod vix fieri posse videbatur) aggressi sunt duo viri doctissimi, Wachter. et Thibaut. Wachter nempe, postquam (Zeitschr. für Astron. 1816. P. II. p. 61. sqq.) theoriam parallelarum a Metternich. editam diiudicaverat, eiusque lacunas ostenderat, simul novam methodum breviter indicavit. Postea edito libello singulari (Demonstratio Axiom. Geom. in Euclideis undecimi Gedani 1817.) ex iisdem progressus principiis, alia tamen via ad scopum pervenire conatus est. Nempe priore loco (Zeitschr. für Astron. I. c. p. 76. sq.) ostendit, si duae rectae ab aliqua tertia ita secantur, ut altera earum secanti sit perpendicularis, has rectas, si fieri possit, ut ipse inter se non convenient, propius semper alteram ad alteram accessuras esse, ita ut una asymptota alterius fieri debeat. His autem sumtis manifestam contradictionem inesse ostendere studuit. Deinde in libello postea edito, re ulterius explicata, ostendere an nititur, vel nondum stabilita parallelarum theoria demonstrari posse, per quatuor puncta in spatio proutlibet data (addendum tamen: dum non plura duobus punctis sint in eadem recta, nec plura tribus in eodem plano) superficiem sphaericam, et, quod inde consequatur, per tria puncta in dato plano, modo non in una eademque recta iaceant, circulum describi posse. Tum axioma Euclideanum ita demonstrari posse docet. Data quaevis recta AB (Fig. 118.) in punctis A, B terminata in C bifariam secetur, et ex puncto C recta CD rectae AB ad perpendicularum ducatur. E punctis A, B ducantur in eodem plano cum AB et CD rectae AE, BF, datae AB ad quemvis angulum recto minorem insistentes (ita nempe, ut sit angulus $CAE = CBF$). Ex puncto C aliae rectae CG, CH illis AE, BF ad perpendicularum normantur, quae hasce in punctis G, H secant. Producantur CG, CH usque ad I, K, ita, ut sit $CI = 2CG$, $CK = 2CH$, quo facto tribus punctis C, I, K circulus circumscribi potest, cuius centrum, ut quidem ex constructione perspicitur, in recta CD ipsius punctum intersec-

nis cum recta AG vel BH efficit." Ita quidem ille non necessitatem tantum intersectionis istarum rectarum, sed constructionem exhibere tentat, qui ipsum intersectionis punctum inveniatur. Et illud certum videtur, siquidem sine parallelarum theoria probari possit, posse per tria quaecunque puncta non in eadem recta sita circulum describi, nihil iam difficultatis superfuturum. At, ut verum fateamur, quae Wachterus attulit, quamvis ingeniosa sint, valde tamen dubitamus, an in elementis ita proponere liceat: quin in ipsa etiam demonstratione multa adhuc subobscure dicta videntur, quae subinde quidem promittit auctor se ad summam evidentiam adducturum, aut asserit, facillime ea demonstrari. Antequam autem se ea fide liberarit, nostrum de argumentatione ista iudicium suspendere liceat.

Thibaut. autem in libro, cui titulum fecit: *Grundriss der reinen Mathematik*, Gött. 1818. in eo cum Wachtero convenit, ut earum propositionum, quae ex parallelarum theoria consequuntur, aliquam immediate adstruere tentet, et deinde ordine inverso ab huius demonstratione ad parallelarum theoriam procedat. Ita nimirum ratiocinatur ad I. 32. immediate demonstrandam. Sit (Fig. 119.) triangulum quodcunque ABC, et sumto in latere CA ultra A producto puncto quocunque b' recta Ab' circa A convertatur, usquedum punctum b' in punctum β' rectae AB cadat. Deinde recta $A\beta'$ in recta AB promoveatur, usquedum punctum A cum puncto B coincidat, et β' in b'' cadat. Denuo recta Bb'' circa B convertatur, dum b'' in punctum β'' rectae BC cadat, et iam recta $B\beta''$ in recta BC descendat, dum punctum B cum puncto C coincidat, et β'' in b''' cadat. Denique recta Cb''' circa C convertatur, dum b''' in punctum β''' rectae CA cadat. Quo facto patere ait, rectam Ab' conversam fuisse tribus vicibus, atque tribus his gyrationibus, dum iterum cum recta CA, in qua primum posita erat, coincideret, angulos tres externos trianguli descripsisse. At, cum iisdem gyrationibus recta Ab' in rectam CA, in qua primum posita erat, iterum redierit (poterat nempe $C\beta'''$ adhuc in CA promoveri, ita ut C cum A et β''' cum b' coincideret), adeo-

que omnes angulos, qui circa unum punctum A esse possunt, i. e. quatuor rectos emensa sit, patere, omnes angulos externos trianguli cuiuscunque aequales esse quatuor rectis. Quum vero anguli externi trianguli cum angulis internis simul sumti aequales sint sex rectis (I. 15. Cor.) anguli interni soli aequales erunt duobus rectis. Atque hinc Ax. 11: facile deduci potest. Et haec quidem satis speciose. Liceat tamen observare, dum recta $A\beta'$ in AB promoveatur, ita ut punctum A cum puncto B coincidat, rectam Ab' , angulo $\beta'Ab'$ invariato, in situm Bd pervenire, ita, ut Bd sit parallela rectae Ab' vel CA (I. 28.). Iam vero, quum recta $B\beta''$ in BC promovetur, usquedum B cum C coincidat, recta Bd invariato angulo $dB\beta''$ simul descendet, et ut certi simus, rectam Ab' facta adhuc tertia gyratione ac C nec plus, nec minus iis angulis absolvisse, qui circa unum punctum sunt, demonstrari oportebit, rectam Bd, postquam ad C descenderat, in ipsam rectam CA cadere. Quod tum demum certum erit, si demonstratum ante fuerit, angulum $dB\beta''$ aequalem esse angulo $\beta''Cb'$ i. e. si I. 29. antedemonstrata fuerit. At I. 29. pendet ex Ax. 11: itaque haud vicissim Ax. 11. ex Thibautii demonstratione propositionis I. 32. derivari poterit.

Ceterum alios etiam, quamvis aliis rationibus, at hactenus non feliciori successu tentasse I. 32. immediate adstruere, et exinde parallelarum theoriā demonstrare, supra iam diximus, quo pertinent Hauff. (Geom. Fundam. solida Gandae 1819.) et le Gendre. Et de hoc quidem, praeter ea, quae supra diximus, cf. Biblioth. Univers. Oct. 1819., ubi auctor anonymus partes le Gendre. suscepit, eumque contra Iohn. Leslie, qui in Elém. of Geom. Edinb. 1817. ipsum reprehenderat, et contra alium geometram Anglum, nescio an satis feliciter, defendere tentavit.

Excussis iam tot et tam variis hac in re conaminibus, in quibus omnibus aliquid adhuc desiderari posse fassi sumus, iniqui tamen fuerimus, si negare velimus, eorum auctores multa subtiliter admodum rimatos esse, et magna perspicaciae atque acuminis specimina dedisse, et miram quaestionis sim-

plicitatem, quae vix permittat, ut ea in simpliciora adhuc
resolvi et quasi extenuari possit, maxime in causa esse, {cur
rem acu tangere nondum contigerit. Neque tamen haec ipsa
molimina prorsus inutilia fuisse censenda sunt. Multa enim
vel ipsi illi novae alicuius parallelarum theoriae conditores,
vel ii etiam, quos nacti sunt, adversarii ingeniose observa-
runt, quibus doctrina mathematica augeretur; et limitibus
certae ac omnibus numeris absolutae scientiae accuratius, ac
ante factum, definitis, quam modeste de nostris viribus indi-
candum sit, hoc etiam exemplo comprobatum est. Caeterum
eam axiomatis controversi *illustrationem*, quam post Walli-
sium Kaestnerus aliique dederunt, tironibus sufficere posse
confidimus.

EXCURSUS II.
AD
ELEMENTORUM

I. 47.

1) Quamvis, quae una aliqua ratione certa esse demonstratum est, multiplicato demonstrationum numero nequeant certiora fieri, unde etiam plures eiusdem theoremat^{is} demonstrationes, ne nimii fiamus, plerumque afferre nolimus, in hoc tamen celebratissimo theoremate ab ista regula paululum discedere, et ex iis, quae maxime notatu digna a variis Mathematicis circa eius demonstrationem excogitata esse vidimus, nonnulla certe maxime simplicia seligere, et breviter huc conferre visum fuit. Plenior^{em} variorum hoc problema demonstrandi conantium historiam dederunt, ipsasque potiores demonstrationes exhibuerunt Scherz. in Dissertat. de Theoremate Pythagorico Argentor. 1743 et Ietze. pariter in Dissertat. Academ. Praeside Lang. edita Halae Magdeb. 1752, quos secuti sunt Hoffmann.: der Pythagor. Lehrs. mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen Mainz 1819; et Müller: System. Zusammenstell. der wichtigen bisher bekannten Beweise des Pythag. Lehrsatzes u. s. w. Nürnberg 1819. Et Scherz. quidem et Müller. historiam theoremat^{is} ab antiquissimis inde temporibus repetunt, Ietze. et Hoffmann. varias, quae quadrata cathetorum, vel hypotenusae inter se habere possunt, positiones distinguunt, atque inde varias his casibus accommodatas demonstrationes derivant. Praeter Euclidis itaque demonstrationem, quam primam vocabimus, veritas theoremat^{is} etiam adstrui poterit, ut sequitur.

2) Sit (Fig. 120.) triangulum ABC ad B rectangulum, et constituentur super cathetis AB, BC quadrata ABGF, BCDE, et producantur rectae DE, FG, donec in L — pariterque rectae EC, GA, donec in K convenient, quod necessario fiet (I. 29. Cor. 5.), eruntque ex Constr. EK, GL, pariterque EL, KG parallelae, adeoque GKEL parallelogrammum in E rectangulum, et quum sit $EK=AD$ (I. 34.) $=AB+BC$, pariterque $LE=FC$ (I. 34.) $=FB+BC=AB+BC$, erit $EK=LE$, adeoque GLEK quadratum (I. 29. I. 34. I. Def. 30.). Iam, si sumatur $EH=KC=AB$ (unde erit $LH=CE=BC$), pariterque sumatur $LI=KC=AB$ (unde erit $IG=CE=BC$), et ducantur rectae AI, CH, IH; erit AIHC quadratum hypotenusae. Nam, quum $EH=KC$ (ex Constr.), $EC=CB$ (ex Constr.) $=AK$ (I. 34.) et angulus $HEC=AKC$ ex constr.; erit (I. 4.) triangulum $HEC=CKA$, et nominatim $HC=CA$, et angulus $CHE=ACK$, et $HCE=CAK$. At, quum $CHE+HCE=recto$ (I. 32.), erit etiam $ACK+HCE=recto$, unde ACH erit rectus (I. 13. Cor. 2.). Eodem modo ostenditur, esse triangulum $HLI=CEH=AKG=IGA=CBA$, et $HI=HC=AC=AI$, et angulum HIA rectum, pariter ac IAC , IHC . Erit itaque AIHC quadratum hypotenusae AC (Def. 30.) Et est hoc quadratum, additis quatuor triangulis rectangulis CKA, HEC, ILH, AGI aequale quadrato GLEK. Pariter autem quadrata ABGF, BCDE, additis duobus rectangulis ABCK, BFLD aequalia sunt quadrato GLEK. Adeoque, quum triangula CKA, HEC, ILH, AGI simul aequalia sint rectangulis ABCK, BFLD, erunt quadrata ABGF, BCDE simul sumta aequalia quadrato AIHC. Ad hoc ipsum fere redit demonstratio Henrici Boad. in geometria Londini 1733. edita, ut refert Kliigel. (Mathemat. Wörterb. Artik.; Pythagor. Lehrs. III. Th. p. 932. sqq.) et ea, quam habet Thom. Simpson. Elem. of Géom. p. 33. pariterque ea, quam dedit Winkler. Institut. Mathem. Physic. Geom. §. 363. Scherz. Demonstr. 5. et 6., Müller. Demonstr. 1^a et Demonstr. 5. apud Develey Elem. de Géom. L. IV. Ch. III. §. 41. Denique patet quadrato hypotenusae ex altera

parte rectae AC constituto, eandem demonstrationem locum habere. Cf. Schmid. Elem. der Form und Größe p. 344. Similem demonstrationem ad varias positiones, quae quadrata in Theor. Pythagor. habere possunt, applicat Hoffm. l. c. Dem. 9—16.

3) Sit triangulum (Fig. 121.) ABC ad B rectangulum, et constituentur ut ante super cathetis quadrata ABGF, BCDE, et producantur rectae GF, ED, donec in L convenient (I. 29. Cor. 5.) ductaque LR cum hypotenusa conveniat in M, eique parallelae agantur rectae AI, CH, quae rectis EL, GL occurrant in punctis H, I, denique iungatur HI. Iam, quum parallelae sint AB, GF (I. 28.) i. e. AB, IL, pariterque ex Construct. AI, BL, erit AIBL parallelogrammum (Def. 36.), adeoque rectae parallelae AI, BL aequales erunt (I. 34.). Eodem modo ostenditur, etiam CH, BL aequales ac parallelas esse. Unde AI, CH aequales (I. Ax. 1.) et parallelae (I. 30.) erunt. Hinc etiam, AC, HI aequales ac parallelae sunt (I. 33.). Praeterea, quum $BD = BC$ (I. Def. 30.), pariterque $DL = BF$ (I. 34.) $= AB$, et angulus BDL, utpote rectus (I. 13.) aequalis sit angulo ABC, erit etiam (I. 4.) $BL = AC$, et $BLD = BAM$. Unde, quum sit $BL = AI = CH$, et $BL = AC = IH$, erunt AI, CH, AC, IH inter se aequales. Denique, quum sit $LBD = BAI$ (I. 29.) et, uti modo vidimus, $BLD = BAM$, erit $LBD + BLD = BAI + BAM = IAM$: at $LBD + BLD =$ angulo recto (I. 32.), adeoque IMA erit rectus, unde omnes anguli parallelogrammi ACHI erunt recti (I. 34. Cor. 10.), adeoque, quum etiam latera aequalia sint, ACHI erit quadratum hypotenusae (I. Def. 30.). Est autem quadratum ABGF $=$ parallelogrammo ABIL (I. 35.) $=$ rectangulo AIMN (I. 35.), pariterque quadratum BCDE $=$ parallelogrammo BCLH (I. 35.) $=$ rectangulo CHMN (I. 35.). Itaque quadrata ABGF, BCDE cathetorum simul sumpta aequalia erunt rectangulis AMIN, CHMN simul i. e. quadrato hypotenusae. Cf. Müller., qui l. c. Dem. 7. hanc demonstrationem, quam ex Clavio repetit, omnium hactenus cognitarum simplicissimam et praestantissimum iudicat. No-

tandum est, simili constructione ac demonstratione theorema longe generalius exhiberi posse. Nempe, si super duobus lateribus AB, BC trianguli cuiuscunque constituentur parallelogramma quaecunque ABGF, BCDE, et producantur rectae GF, ED, donec in L convenient, iunctaque LB cum tertio latere ipso vel producto in M conveniat, et rectae LB parallelae ducantur AI, CH, quae rectis GL, EL in punctis, I, H occurrant, denique iungatur IH: erit ACHI parallelogrammum, quod, si punctum M in ipsam AC cadat, summae parallelogrammorum ABGF, BCDE sin in AC productam cadat, differentiae earum aequale erit. Huius propositionis partem potissimam habet Pappus Collect. Mathem. IV. 1. cf. Castillon. Mém. de l'Acad. de Berlin. 1766. p. 345. Clavius p. 88. Gilbert. die Geometrie nach le Gendre etc. p. 298. Klügel. Encyclop. II. Th. Müller. l. c. p. 79.

4) Multum cum praecedente similitudinis habet sequens demonstratio, nisi quod quadratum hypotenusae ex opposita parte describitur. Constructis (Fig. 122.) super AB, BC, AC quadratis ABGF, BCDE, ACKM producantur MA, KC, usquedum rectis EL, GL in H, I occurrant, et, quum angulus ACK rectus sit (I. Def. 30.) rectus erit ACH (I. 15.). at rectus est etiam BCE (I. Def. 30.), unde, si dematur communis BCH, erit $ACB = HCE$ (I. Ax. 3.). Et, quum praeterea $BC = CE$, et angulus ABC, utpote rectus, = recto CEH (I. Def. 30.), triangulum ABC aequale est triangulo HEC (I. 26.), et nominatim $HC = AC = CK$. Eodem modo ostenditur, triangulum ABC aequale esse triangulo AGI, et nominatim esse $AI = AC = AM$. Ducta deinde BL, erit, ob $BD = BC$, $DL = BF = AB$, et angulum $BDL = ABC$, etiam triangulum $BDL = CBA$ (I. 4.), et angulus $BLD = BAC = CHE$, itaque LB parallela erit rectae HC (I. 28.), adeoque, si LB producat, dum secet rectas AC, MK in N, O, erit LB perpendicularis ad AC, MK (I. 29.). Et ob $AI = AM$, rectangulum AMNO aequale erit parallelogrammo ABIL (I. 36.) = quadrato ABGF (I. 35.), pariterque rectangulum KCNO aequale parallelogrammo BCLH (I. 36.) = quadrato BCDE (I.

35.) Itaque quadratum $ACKM = ABGF + BCDE$ simul. Hanc demonstrationem habet Scherz., estque apud ipsum nr. XI. Eadem etiam utitur Thom. Simpson. Elem. of Geom. p. 51. Müller. Dem. 14.

5) Pariter cum praecedente §. 3. similitudinem habet, et satis facilis est ea, quae sequitur, demonstratio. Constructis, ut ante (Fig. 123.) quadratis $ABGF$, $BCDE$, erigantur in A , C , rectae AI , CH ad AC perpendiculares, et producantur, usquedum cum rectis GF , DE ipsis, aut productis in I , H conveniant, quod necessario fiet (I. 29. Cor. 3.), et iungatur HI , eritque angulus $GAB = IAC$, quia uterque rectus est, unde, demto communi IAB , erit angulus $GAI = BAC$ (I. Ax. 3.), et, quum etiam angulus $AGI = ABC$, et $AG = AB$ (I. Def. 30.), erit (I. 26.) $AI = AC$. Eodem modo ostendetur, esse $CH = AC$, unde etiam $AI = CH$ (I. Ax. 1.), et, quum praetera AI parallela sit rectae CH (I. 28.), erunt etiam HI , AC aequales et parallelae (I. 34.) et $ACIH$ erit quadratum hypotenusae (I. 30.). Et quum triangulum ABI , et quadratum $ABGF$ in eadem basi, et in iisdem parallelis sint, erit quadratum $ABGF$ duplum trianguli ABI (I. 41.): eadem ratione, si per B ducatur recta NBM parallela rectae AI , erit rectangulum $AIMN$ duplum trianguli ABI (I. 41.), unde quadratum $ABGF$ aequale est rectangulo $AIMN$ (I. Ax. 5.). Simili modo ostenditur, esse quadratum $BCDE$ aequale duplo triangulo BHC i. e. rectangulo $NMHC$. Totum itaque quadratum $ACIH$ aequale est duobus quadratis $ABGF$, $BCDE$ simul. Hanc demonstrationem habent Clavius (Euclid. Elem. 1591. p. 85.), Sturmius (Mathes. enucleat. p. 32.), Coëtsius (Euclid. Elem. 6. libri prior. 1692. p. 140.), Scherz. l. c. demonstr. III., Ietze l. c. demonstr. XIII., Müller demonstr. 5., Hoffmann. demonstr. 5. Sturmius observat, triangula AGI , HCE ita considerari posse, quasi triangulum ABC circa punctum A vel C conversum in situm pervenisset, quem habent haec triangula.

6) Clavius ibid. et ex eo Ietze l. c. Dem. II., et Müller. Dem. 6. afferunt adhuc hanc demonstrationem. Constructis,

ut ante (Fig. 124.) quadratis ABGF, BCDE, et figura ACIH, quae eodem modo demonstratur esse quadratum hypotenusae AC, ducatur per G recta GKML, parallela rectae AC, quae rectis AI, CF, CH occurrat in punctis K, M, L, pariterque per E recta EQPON parallela rectae AC, quae cum rectis AI, AB, BC, CH in punctis N, O, P, Q conveniat, et ostendatur, ut nt. 5. esse trianguia AGI, ABC aequalia, et nominatim $GI=BC$, vel ob $BC=CE$, etiam $GI=CE$. Et, quum praeterea ex constructione GK, EQ, rectae AC parallelae sint, erunt parallelae inter se (I. 30.), et pariter ac AC cum AI, CH rectos angulos efficient (I. 29.). Et, quum pariter rectae GI, EC parallelae sint, erit angulus $IGK=CEQ$ (I. 29. Cor. 5.). Denique anguli ad K et Q recti sunt, erit itaque (I. 26.) triangulum $GKI=EQC$, et nominatim $IK=CQ$. Et quum etiam $IH=AC$ (I. 34.), erit rectangulum $IKHL=ACNQ$ (I. 34. Cor. 21.). Est autem $ACNQ=ACOE$ (I. 35.) $=BCDE$ (I. 35.). Itaque quadratum ABGF $=$ parallelogrammo AGMC (I. 35.) $=$ rectangulo ACKL (I. 35.) Itaque quadrata BCDE, ABGF simul aequalia sunt rectangulis IKHL, ACKL simul i. e. quadrato ACHI.

7) Aliam demonstrationem admodum concinnam habet Müller. I. c. Dem. 15. Cf. eiusdem mathem. kritische Bearbeit. des ersten Buchs der Elemente, et Tempelhof. Geometrie für Soldaten etc. Constructis (Fig. 125.) super lateribus trianguli ABC in B rectanguli quadratis BCDE, ABFG, ACMK, constituatur super MK triangulum MIK ita, ut $MI=BC$ et $KI=AB$, unde ob $MK=AC$, erit triangulum $MIK=$ triangulo CBA (I. 8.), eidemque triangulo CBA, ducta recta FD, aequale erit triangulum DBF (I. 8.). Porro ducatur recta GB, quae efficiet angulum GBA semirectum (I. 5. et I. 32.), adeoque (Obs. ad I. 15.) in directum erit cum ducta BE, quae angulum DBE ex iisdem rationibus semirectum efficit. Denique ducatur recta BI. Iam, ut breviter dicamus, omnis demonstratio eo redit, ut ostendatur, utrumque quadrilaterorum BAMi, IKCB aequale esse alterutri quadrilaterorum GFDE, GACE, quod, quum tria latera, quae aequalia sunt lateribus

trianguli ABC, et anguli, quos illa latera comprehendunt, utrimque eodem ordine aequalia sint, adeoque figurae congruant, facillime probatur. Ablatis deinde a duobus quadrilateris BAMI, IKCB triangulis MIK, CBA, pariterque a duobus quadrilateris GFDE, GACE, trianguli DBF, CBA relinquetur quadratum ACKM aequale quadratis BAGF, BCDE simul.

8) Aliam demonstrationem ab Euclidea haud multum diversam, nisi quod hic integra parallelogramma adhibentur, ubi Euclides usus fuit saltem triangulis, quae dimidia erant horum parallelogrammorum, habet Scherz. l. c. Dem. XII. Müller. Dem. 13. Constructis nempe (Fig. 126.) quadratis ABFG, BCDE, ACKM, ducantur EH, GL parallelae rectae AC, BO parallela rectae AM, KI parallela rectae BC, eritque iuncta MI parallela rectae AB. Quum enim ex Constr. BCKI sit parallelogrammum, erit $KI = BC$, et quum KI parallela sit rectae BC ex Constr. et MK parallela rectae AC (I. 27.) erit angulus $MKI = ACB$ (I. 29. Cor. 5.): est autem etiam $MK = AC$ (I. Def. 30.), quare (I. 4.) angulus $KMI = CAB$. Quum vero etiam sint AMK, PAC aequales, ut recti, aequales erunt (I. Ax. 3.) PAB, AMI, adeoque AB, MI erunt parallelae (I. 28.). Est autem quadratum ABGF = parallelogrammo ACGL (I. 35.). Parallelogrammum ACGL autem = parallelogrammo ABMI (I. 34. Cor. 21.), est enim $GA = AB$, $AC = AM$, et angulus $GAC = BAM$; denique ABMI = rectangulo AMNO (I. 35.), adeoque quadratum ABGF = rectangulo AMNO. Eodem modo ostenditur, esse quadratum BGDE aequale rectangulo CNOK, quare quadrata ABFG, BCDE simul aequalia erunt quadrato ACKM.

9) Aliam satis simplicem theorematis nostri demonstrationem habet Ietze., quae apud ipsum est octava, et ita habet. Construantur (Fig. 127.) super lateribus AB, BC trianguli in B rectanguli, versus partem hypotenusae AC, quadrata BCDE, ABFG, et producatu FG ad M, donec fiat $GM = BC$, ducaturque AM. Erit itaque, quum $AG = AB$ (I. Def. 30.), $GM = BC$ ex Constr. et angulus AGM, utpote rectus,

FF

$=ABC$, et (I. 4.) $AM=AC$, et $MAG=BAC$, adeoque, addito communi CAG (I. Ax. 2.) $MAC=GAB=recto$. Ducatur iam MK parallela rectae AC , et CK parallela rectae AM (I. 31.), eruntque $MK=AC=AM=CK$ (I. 34.) et anguli figurae $AMCK$ omnes recti (I. 34. Cor. 10.), unde $ACMK$ erit quadratum hypotenusae. Conveniet autem DE , si opus est, producta, cum recta FG in O (I. 29. Cor. 3.), iungatur OK , eruntque DO, OK in directum. Nam, quum parallelae sint rectae EC, GF (I. 28.), erit $DOF=DEC$ (I. 29.) $=recto$ (I. Def. 30.). At sumtum fuit $GM=BC=OF$, adeoque erit $OM=FG=AB$, et ostensa fuit $MK=AC$, et angulus AMK rectus $=AMG+MAG$, unde, dempto communi AMG , erit $OMK=MAG=BAC$: itaque (I. 4.) triangulum $MOK=ABC$, et nominatim angulus $MOK=ABC=recto$, et $OK=BC$. At, quum DOF , ut vidimus, rectus sit, DO, OK erunt in directum (Obs. ad I. 15.). Ducatur BO , et producat, dum cum recta MK conveniat in P ; et quum sit OK aequalis et parallela rectae BC , erit etiam BO parallela rectae CK (I. 33.), adeoque BO erit perpendicularis ad AC, MK (I. 29.). His praemissis, erit quadratum $BCDE=parallelogrammo BCOK$ (I. 35.) $=rectangulo NCKP$ (I. 35.): eodemque modo quadratum $ABGF=parallelogrammo AMBO$ (I. 35.) $=rectangulo AMNP$ (I. 35.), adeoque quadrata $BCDE, ABGF$ aequalia rectangulis $NCKP, AMNP$ simul, i. e. quadrato $ACMK$.

10) Constructis omnibus, ut ad Nr. 5. eodem modo, ut ad Nr. 5. (Fig. 128.) ostendetur, esse $ACHI$ quadratum hypotenusae AC , et triangulum AGI esse aequale triangulo ABC . Pariterque, ob $AC=CH, CB=CE$ (I. Def. 30.) et angulos ad B, E rectos, erit (I. 4.) triangulum $ABC=HEC$, unde, addito communi BLC , erit triangulum $ACL=HEC+BLC$ i. e. $=BCDE+HLD$. Est autem, ob $HE=AB=GF$, et $DE=BC=GI$, etiam (I. Ax. 3.) $HD=IF$, et quum praeterea sit angulus $FIK=GAI$ (I. 32.) $=BAC=LHD$, et anguli ad F et D recti sint, erit (I. 26.) triangulum $IFK=HLD$. Itaque triangulum $ACL=quadrato BCDE$ addito

triangulo IFK. Denique, quum sit $HC=AC$, angulus $HCK=CHE$ (I. 29.) $=BAC$, et angulus CHK rectus, adeoque $=ACH$, erit triangulum $CHK =$ triangulo ACL , adeoque, demto communi BCL , $HLBK=\triangle ABC=\triangle AGI$. Itaque $\triangle ACL+\triangle HLBK+\triangle ABKI=BCDE+\triangle IFK+\triangle AGI+\triangle ABKI$ i. e. quadratum $ACHI =$ quadratis $BCDE$, $ABFG$ simul. Hanc demonstrationem habet Gregorius a St. Vincentio in opere geometrico de circuli quadratura L. I. P. II. Prop. XLIII. p. 30. Convenit cum ea, quam Schooten Andreae ab Oudthorn, tribuit. Cf. Scherz. l. c. Dem. 10. Müller. Dem. 9.

11) Construat (Fig. 129.) super BC quadratum $BCDE$, sumtaque $DF=AB$, constituatur super DF quadratum $FDGI$, quod (ob $DF=AB$) aequale erit quadrato ex AB (I. 46. Cor.), eruntque (ob angulos rectos BDE , FDG) ED , DG in directum (I. 14.). Deinde ducatur recta AI , eritque, ob $DF=BA$ (ex constr.), si auferatur communis BF , $AF=BD=BC$. Et, quum sit $FI=FD=AB$, erit (I. 4.) $AI=AC$, et angulus $FAI=ACB$, adeoque $FAI+\triangle FAC=ACB+\triangle FAC=$ angulo recto (I. 32.). Si deinde per C ducatur CH parallela rectae AI , quae cum recta EG conveniat in H , et iungatur HI , erit $ACHI$ quadratum hypotenusae. Nam, quum ex constr. sit CH parallela rectae AI , et $CAI=FAI+\triangle FAC=$ angulo recto, erit ACH rectus (I. 29.), adeoque $ACH=BCE$ (I. Def. 30.), vel, demto communi BCH , erit $ACB=HCE$ (I. Ax. 3.). Et quum praeterea sit $CB=CE$ (I. Def. 30.) et $ABC=CED$ (I. Def. 30.), erit (I. 26.) $CH=CA=AI$, et triangulum $CEH=CBA$. Quum itaque CH , AI sint aequales et parallelae, erunt etiam AC , HI aequales et parallelae (I. 33.), adeoque etiam angulorum AIH , CHI uterque rectus est (I. 29.) et $ACHI$ quadratum hypotenusae AC . Hoc autem quadratum aequale est quadratis FG , BE simul. Habet enim cum iis communia spatia $IFKH$, CBK , et triangulum ABC ostensum fuit aequale esse triangulo HEC , pariterque triangulum AFI aequale erit triangulo HGI (I. 4.) ob $AI=IH$, $IF=IG$, et angulos AIH , FIG rectos, adeoque, demto communi, FIH , angulum

$AIF = HIG$. Hanc demonstrationem, quam ad Schootenium refert, habet etiam Christ. Sturmius Math. enuncl. p. 31. et Develey. Elem. de Géom. L. IV. Ch. III. No. 42. Dem. 4.

12) Reliquis constructis et demonstratis ut nr. 10. ducatur (Fig. 130.) per H recta HM parallela rectae BD (quo itaque angulus HMK rectus efficitur) et per L recta OLN parallela rectae BC, et ostendetur, ut No. 10. esse triangulum $AGI = ABC$, pariterque triangulum $IFK = HLD = LOH$ (I. 31.). Praeterea autem est $LDEN = LBMO$ (I. 43.) et triangulum $CNL = KMH$ (I. 26.): est enim $HM = BD$ (I. 34.) $= DE$ (I. Def. 30.) $= LN$ (I. 34.), angulus $M = N$ (I. Def. 30.), et angulus $KHM = EHC$ (quia, addito communi MHC, utrimque rectus prodit) $= NLC$ (I. 29.). Totum igitur quadratum ex $AC =$ quadratis ex AB, BC simul. Hanc demonstrationem habet Coëtsius p. 158. sqq.

Caeterum, omissis pluribus aliis demonstrationibus, quae habentur apud Coëtsium, Scherzium, Ietziium, qui viginti tres habet, Hoffmannum, qui triginta duas exhibet, Müllerum, aliosque, addimus adhuc nonnullas alias, quae, quamvis nitantur propositionibus ab Euclide posthac demum demonstrandis, vitio tamen logico, quod circulum in demonstrando vocant, minime laborant, quod nempe eae, quibus nostrae hae innituntur, propositiones non vice versa ope theorematum Pythagorici, aut aliorum ab eo pendentium theorematum, sed ita potius demonstrari possunt, ut, si quis velit, ea ante I. 47. ponere possit. Huc pertinet

13) Haud inelegans demonstratio Coëtsii p. 148. sqq. et Sturmii in Mathesi enuncleata p. 185., quam etiam habet Scherz. Dem. 7., Müller. Dem. 3., et Ietze. Dem. XV., qui eandem etiam prolatam dicit ab Hombergero Franco in Dissertatione de Magistro Matheseos. Witemberg. 1701. Praeside Feuerlein. edita. Ea huc fere redit. Triangulum rectangulum ABC aut aequicrurum erit, aut non. Sit 1) aequicrurum, et constructis (Fig. 131.) quadratis BG, BE, ducantur diametri AF, CD, et iungantur FD, eritque ACFD quadratum hy-

potenusae. Nempe $\triangle ABC$, ABF , CBD , FBD aequalia sunt (I. 4.), adeoque $AC=AF=CD=FD$, et ob angulos aequales et semirectos (I. 32. Cor. 7.) $BAC=BCA=BCD=BDC=BDF=BFD=BFA=BAF$, anguli FAC , ACD , CDF , DFA recti sunt, et figura $ACDF$ est quadratum (I. Def. 30.). Et, quum triangula ABC , ABF , CBD , BFD aequalia sint, quodvis eorum quarta pars est quadrati $ACFD$. At triangulum ABF est pars dimidia quadrati AG (I. 34.), et triangulum CBD pars dimidia quadrati BE vel quadrati AG : itaque quadrata AG , BE simul aequantur quadrato $ACFD$. (Hinc, ut hoc obiter notemus, deducitur, in quovis triangulo, rectangulo isosceli quadratum hypotenusae quadruplum esse trianguli propositi.) Sit vero 2) (Fig. 132.) triangulum ABC ad B rectangulum non aequicrurum, sed $AB > BC$, et a) facile demonstrabitur, quadratum hypotenusae superare triangulum ABC quater sumtum quadrato, quod fit a differentia reliquorum laterum, seu, quod idem est, quadratum hypotenusae esse aequale triangulo proposito quater sumto, una cum quadrato differentiae reliquorum laterum. Nempe, constructis quadratis BG , BE , producantur rectae AG , EC , donec in K convenient, deinde, constructo super AC quadrato $ACHI$, ducatur ILN parallela rectae CK (I. 31.) et HNM parallela rectae GK , eritque angulus $IAL+KAC$ utpote rectus (I. Def. 30.) $=KCA+KAC$ (I. 32.), adeoque $IAL=KCA$, et, ob angulos L , K rectos, et $AI=AC$, est triangulum $IAL=ACK$ (I. 26.). Eodem modo ostendetur, aequalia esse omnia triangula ACK , IAL , HIN , CHM , CAB . Praeterea, quum sit $KL=AL-AK=CK-AK=AB-BC$, et eodem modo $LN=NM=KM=AB-BC$, et anguli K , L , N , M , recti, erit $KLMN$ quadratum differentiae $AB-BC$, adeoque quadratum $ACHI =$ triangulo ABC quater sumto, una cum quadrato differentiae laterum AB , BC , vel, quod eodem redit, quadratum $ACHI$ aequale est duplo rectangulo sub AB , BC una cum quadrato differentiae horum laterum. Iam vero b) ex II. 7. sumere licet, quadratum differentiae laterum AB , BC aequale esse quadratis ex AB , BC , demto duplo rectan-

gulo sub AB , BC . Itaque quadratum $ACHI$ aequale erit quadratis ex AB , BC .

Aliae adhuc demonstrationes nituntur doctrina de proportionibus et figurarum similitudine, quam pariter certum est, sine ope theorematum Pythagoraei adstrui et posse et solere. Huc pertinet

14) Sequens demonstratio. Constructo (Fig. 133.) super hypotenusa AC trianguli ABC ad B rectanguli quadrato $ACMK$, ducatur BNO parallela rectae CK , eritque BN perpendicularis ad AC (I. 29.), itaque similia erunt triangula ABC , ANB , BNC (VI. 8.) unde erit $AC:AB=AB:AN$ (VI. Def. 1.) adeoque quadratum ex $AB =$ rectangulo ex AC , AN (VI. 17.) i. e. rectangulo $ANOM$: pariterque $AC:BC=BC:CN$ (VI. Def. 1.), adeoque quadratum ex $BC =$ rectangulo ex AC , CN (VI. 17.) i. e. rectangulo $CNOK$. Quadrata igitur ex AB , BC simul aequalia erunt rectangulis AO , NK simul i. e. quadrato ex AC .

Haec demonstratio est apud Scherzium XIV., et Coëtsius ea mutatur in scholio ad VI. 17. Eandem demonstrationem habet Develey. *Elém. de Géom.* L. IV. Ch. III. Th. 9. Müller, *Dem.* 16. Hoffmann. *Dem.* 26. Caeterum eodem ea reddit, quo illa, quam a Grusonio exhibitam esse diximus in I. 41. Cor. 6., nisi quod Grusoni rem sine consideratione proportionum ac figurarum similium expedit.

15) Paulo aliter similis demonstratio ita sisti poterit. Triangulum ABN (Fig. 133.) erit ad triangulum ABC , ut ABq ad ACq (VI. 19.), et triangulum BNC ad triangulum ABC , ut BCq ad ACq (VI. 19.). Hinc $\triangle ABN + \triangle BNC : \triangle ABC = ABq + BCq : ACq$ (V. 24.). Atqui $\triangle ABN + \triangle BNC = \triangle ABC$, itaque $ABq + BCq = ACq$ (V. Def. 5.). Hanc demonstrationem habet Bézout. *Elém. de Géom.* Hoffmann. *Bew.* 27.

16) Brevior adhuc erit sequens demonstratio. Quum ex VI. 31. in triangulo rectilineo figura quaecunque rectilinea super hypotenusa descripta aequalis sit duabus similibus et similiter descriptis figuris super cathetis, nominatim idem

valet de quadratis, quippe quae sunt figurae rectilinae similes (VI. Def. 1.). Haec demonstratio ultimo loco habetur apud Scherzium l. c. et Ietze. l. c. et apud Coëtsium in scholio 2. ad VI. 31.

17) Finem his demonstrationibus faciat sequens, quae est apud Ietrium 20., et quam ille ad Ioann. Ioachim. Langium Mathes. Prof. Halensem refert. Sit (Fig. 134.) triangulum ad *B* rectangulum, super hypotenusa *AC* construatur quadratum *ACHI* (I. 46.), et centro *C* radio *CA* describatur semicirculus *LAM*, eritque $LB=LC-BC=AC-BC$, et $BM=CM+BC=AC+BC$. Sumta deinde $CE=BC$ (I. 3.) construatur super *CE* quadratum *CEFD*, quod itaque aequale erit quadrato ex *BC*, eritque $DH=CH-CD=AC-BC$, pariterque $AE=AC-CE=AC-BC$. Producat *EF*, dum cum recta *IH* conveniat in *G*, eritque $GI=AE$ (I. 34.) $=AC-BC=DH$. Denique producantur *AI* et *EG* ad *N* et *K* ita, ut $IN=GK=GH=CE=BC$, et iungatur *NK*, eritque *IGNK* rectangulum (I. 33. et 34.), idque = rectangulo *FGHD* (I. 34. Cor. 21.) quia $FG=IG$, et $GK=GH$. Quadratum igitur *ACHI* aequale est quadrato *EFDC* simul cum rectangulis *AEGI*, *FDGH* i. e. quadrato ex *BC* una cum rectangulo *AENK*. Hoc ipsum rectangulum autem continetur sub rectis $AE=AC-BC$, et $AN=AI+IN=AC+BC$; itaque quadratum hypotenusae *AC*. aequale est quadrato unius catheti *BC*, una cum rectangulo, quod continetur sub summa huius catheti et hypotenusae ($AC+BC$), et sub differentia earum ($AC-BC$). At, ductis rectis *AL*, *AM* angulus in semicirculo rectus erit (III. 31. quae non pendet a I. 47.), adeoque (VI. 8.) erit $LB:BA=BA:BM$, i. e. $AC-BC:BA=BA:AC+BC$, ac proinde (VI. 17.) $BA^2=(AC-BC)\times(AC+BC)$. Itaque quadratum hypotenusae aequale est quadratis ex *BC* et *AB* simul.

Cor. Ex hac observatione, quod nempe in triangulo rectangulo *ABC* semper sit $AC-BC:BA=BA:AC+BC$ facile deduci possunt, quod Langius ad finem dissertationis Ietzi

notat, regulae pro inveniendis numeris integris, quorum quadrata (numeri quadrati) ita comparata sint, ut duo simul aequalia sint tertio. Posito nempe $AC - BC = a$, $BA = b$, erit $a : b = b : \frac{b^2}{a}$, adeoque $AC + BC = \frac{b^2}{a}$, unde $(AC + BC) + (AC - BC) = 2AC = a + \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a}$, adeoque $AC = \frac{a^2 + b^2}{2a}$, $(AC + BC) - (AC - BC) = 2BC = \frac{b^2}{a} - a = \frac{b^2 - a^2}{a}$, adeoque $BC = \frac{b^2 - a^2}{2a}$. Tres igitur rectae AB, BC, AC, vel numeri iis analogi esse poterunt hi: b , $\frac{b^2 - a^2}{2a}$, $\frac{b^2 + a^2}{2a}$, dummodo duo ultimi sint numeri integri, vel, si omnes per $2a$ multiplicentur: $2ab$, $b^2 - a^2$, $b^2 + a^2$, quicum sumtis a et b numeris integris quibuscunque omnes sint numeri integri, efficient, quod erat propositum. Hanc ipsam regulam supra ad I. 48. attulimus. Ex ea etiam derivari possunt reliquae duae, quae ad Pythagoram et Platonem referuntur. Nempe in regula a Pythagora allata numerus, qui hypotenusam exprimit, unitate semper excedit numerum alterius catheti. Quodsi itaque ponas $b^2 + a^2 - 2ab = 1$, erit $(b - a) = 1$, adeoque etiam $b - a = 1$, vel $b = a + 1$. Iam, si hoc sumas, erunt tres numeri $2ab = 2a^2 + 2a$; $b^2 - a^2 = 2a + 1$; $b^2 + a^2 = 2a^2 + 2a + 1$ eadem forma comprehensi, quae supra exhibita fuit. Pariter in regula a Platone data numerus, qui hypotenusam exprimit, binario semper excedit numerum alterius catheti. Quodsi ponas $b^2 + a^2 - (b^2 - a^2) = 2$, vel $2a^2 = 2$, adeoque $a^2 = 1$, et $a = 1$, erit $2ab = 2b$; et $b^2 - a^2 = b^2 - 1$, et $b^2 + a^2 = b^2 + 1$, quae ipsa est regula Platonis. Denique patet, quod Langius observat, multas alias speciales regulas hac generaliore contineri, v. c. si quis velit, ut numerus hypotenusae numerum alterius catheti quaternario superet, erit $b^2 + a^2 - 2ab = 4$, adeoque $b - a = 2$, vel $b = a + 2$, et numeri $2ab = 2a^2 + 4a$; $b^2 - a^2 = 4a + 4$; $b^2 + a^2 = 2a^2 + 4a + 4$. Vel

generalius; si ponatur $b^2 + a^2 - 2ab = m^2$, adeoque $b - a = m$,
 vel $b = a + m$, erit $2ab = 2a^2 + 2am$; $b^2 - a^2 = 2am + m^2$; $b^2 +$
 $a^2 = 2a^2 + 2am + m^2$. Conferri hic meretur Müller: system.
 Darstell: der wichtigst. bisher. Beweise des pythagor. Lehr-
 satzes, mit einer ausführlichen Theorie der Zahlen-Dreyecke:
 Nürnberg. 1819.

EXCURSUS. III.

AD

ELEMENTORUM

I. 47. 48. II. 12. 13.

1) **P**ro ut in triangulo aliquo angulus aliquis rectus, aut obtusus, aut acutus fuerit, quadratum lateris huic angulo oppositi fore aequale, aut maius, aut minus, quam summa quadratorum duorum reliquorum laterum eiusdem trianguli, et vice versa vidimus ad I. 47. II. 12. 13. Pariter autem angulorum trianguli, laterumque ipsis oppositorum mutua aliqua relatio e sequentibus patebit, quibus praeterea nonnullae propositionum istarum adplicationes continentur. Brevitatis causa ad initium statim monemus, omnia, quae in hoc excursu sequuntur, ad nr. usque 23. desumpta esse e Pflaidereri Schol. saepius citatis 220—245.

2) Si recta a vertice trianguli ad punctum, quo basis bifariam secatur, ducta aequalis est semissi basis, angulus ad verticem est rectus, quod facile deducitur e I. 32. contra angulus ad verticem obtusus vel acutus erit, prout recta ab eo ad punctum, quo basis bisecatur, ducta semisse basis est minor aut maior, quod consequitur ex I. 18. I. 32. I. 13.

3) Et vice versa, si angulus ad verticem trianguli rectus est, recta ab eo ad punctum ducta, quo bifariam secatur basis, aequalis est semissi basis; si ille angulus obtusus fuerit, haec recta minor erit semisse basis; denique, si ille angulus acutus fuerit, haec recta maior erit semisse basis, quod apagogico facile demonstratur.

4) Quae e vertice trianguli aequicruri ad punctum, quo bifariam secatur basis, ducitur recta, ad angulos rectos basi insistit (I. 8. vel Obs. ad I. 10.). Quae autem a trianguli non aequicruri vertice ad punctum bisectionis basis agitur recta, oblique in basin incidit, ita ut angulum obtusum cum ea efficiat ad partes cruris maioris, acutum ad partem cruris minoris (I. 25. I. 13.).

5) In triangulo igitur non aequicruro, cuius anguli ad basin ambo sunt acuti, perpendicularum ab vertice in basin demissum hanc in inaequalia secat, sic, ut maius segmentum adiaceat cruri maiori, minus minori (nr. 4. et Cor. I. 17.). Idem etiam consequitur ex I. 47.

6) In quocunque triangulo non aequicruro differentia quadratorum crurum aequalis est duplo rectangulo sub basi et sub eius segmento duobus intercepto punctis, quorum uno bifariam secatur basis, altero in ipsam incidit perpendicularum ex vertice trianguli super eam demissum,

Sint (2 figg. 177. 178. 179.) triangula non aequicrura, nominatim sit $AC > AB$, sintque eorum bases bifariam sectae in puncto G.

a) Si (Fig. 177.) rectus est angulus B, qui cruri maiori opponitur: est $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (I. 47.) $= AB^2 + 2GB \times BC$ (II. 2. Cor. 1.).

b) Si (Fig. 178.) angulus ABC est obtusus, et AD perpendicularis ad BC: est $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD \times BC$ (II. 12.) $= AB^2 + 2GB \times BC + 2BD \times BC$ (II. 2. Cor. 1.) $= AB^2 + 2GD \times BC$ (II. 1.).

c) Si (Fig. 179.) angulus ABC est acutus, et AD perpendicularis ad BC: est $AC^2 + 2DB \times BC = AB^2 + BC^2$ (II. 13.) $= AB^2 + 2GB \times BC$ (II. 2. Cor. 1.) $= AB^2 + 2GD \times BC + 2DB \times BC$ (II. 1.), itaque $AC^2 = AB^2 + 2GD \times BC$. Proinde in triangulo rectangulo $AC^2 - AB^2 = 2GB \times BC$, in triangulis obliquangulis $AC^2 - AB^2 = 2GD \times BC$.

Aliter ita: cum angulus C, qui lateri $AB < AC$ opponitur, acutus sit (I. 28. I. 17.), generatim (Obs. 1. ad II. 13.) est $AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2BC \times CD$, seu (II. 2. Cor. 1. et II. 1.)

$AC^q + 2BC \times CG = AB^q + 2BC \times CD$, igitur $AC^q = AB^q + 2BC \times GD$, et $AC^q - AB^q = 2BC \times GD$. Huc redeunt demonstrationes Whistonii p. 61. sq. Gilberti p. 295.

7) Duobus casibus posterioribus nr. praeced. sunt

$$AC^q = CD^q + AD^q; AB^q = BD^q + AD^q,$$

unde $AC^q - AB^q = CD^q - BD^q$. Porro sunt

$$CD^q - BD^q = (CD + BD) \times (CD - BD) \text{ (II. 5. Cor. 10.)},$$

et casu anguli obtusi $CD + BD = 2GD$, $CD - BD = BC$,

casu autem anguli acuti $CD + BD = BC$, $CD - BD = 2GD$.

Quare utroque casu $CD^q - BD^q = 2BC \times GD$. Utrumque as-

sertum $AC^q - AB^q = CD^q - BD^q = 2BC \times GD$ complectuntur,

et posterius ex priore alterutro modo hic indicato inferunt

Pappi Lemma 2. vel 1. in Apollonii Locor. Plan. L. II. (Col-

lect. Math. fol. 232. b. sq.), Apollonius von Perger ebene

Oerter p. 13. sq. 27. sq. 208. sq. ac Gilbert. die Geometrie

nach le Gendre, Simpson u. s. w. I. Th. Halle 1798. p. 302.

sq.). Lemma Pappi de triangulo universim enunciatur. Schem-

ma ei adiunctum non nisi casum anguli acuti exhibet, de-

monstratio tamen aequae ad casum anguli obtusi pertinet. Ac

II. Prop. 1. Apollonii, quae posteriore huius lemmatis parte

nititur, eam non solum ad hos casus, sed etiam ad casum

anguli recti extensam requirit.

8) Cuiusvis trianguli quadrata duorum crurum simul dupla sunt quadratorum dimidia basis ac rectae ab vertice trianguli ductae ad punctum, quo basis bifariam secatur.

Triangulorum ABC (Fig. 177–180.) bases BC bifariam in puncto G secantur, et ab verticibus A ad puncta G ducantur rectae AG.

a) Cum in triangulo aequicruro (Fig. 180.) recta AG sit basi perpendicularis (Obs. ad I. 10.), ideoque sit $AC^q = AB^q = GC^q + AG^q = GB^q + AG^q$ (I. 47.) est $AC^q + AB^q = 2(GB^q + AG^q)$.

Sint, ut (Fig. 177–179.) triangulorum ABC crura inaequalia, nempe $AC > AB$. Cum in his recta AG oblique in basin BC incidat (nr. 4.): sit α ipsum crus minus AB basi BC perpendicularare: tum $AC^q = AG^q + GC^q + 2CG \times GB$ (nr.

4. et II. 12.) $= AGq + GBq + 2GBq$, ob $CG = GB$ (constr.):
 itaque $ACq + ABq = AGq + ABq + GBq + 2GBq = 2AGq + 2GBq$,
 ob $ABq + GBq = AGq$ (I. 47.). Aliter ita: $ACq = ABq + BCq$
 (I. 47.) $= ABq + 4GBq$ (Constr. et II. 4. Cor. 2.),
 quare $ACq + ABq = 2ABq + 4GBq = 2(ABq + GBq) + 2GBq = 2AGq + 2GBq$ (I. 47.). β) Si etiam crux minus AB
 basi BC oblique insistat, ex vertice A demittatur in basin
 BC perpendiculum AD, quod ad partes anguli acuti AGB
 cadet (nr. 4.). Tunc cum angulus AGC sit obtusus, AGB
 acutus, sunt $ACq = AGq + CGq + 2CG \times GD$ (II. 12.) $= AGq + GBq + 2GB \times GD$,
 ob $CG = CB$ (Constr.) at $ABq = AGq + GBq - 2GB \times GD$ (II. 13. et Obs. 1. ad II. 13.).
 Quare $ACq + ABq = 2(AGq + GBq)$.

Aliter ita: $ACq = ADq + CDq$ (I. 47.)

$$ABq = ADq + BDq$$

igitur $ACq + ABq = 2ADq + CDq + BDq$
 $= 2ADq + 2GDq + 2GBq$ (II. 9. aut II. 10.)
 $= 2AGq + 2GBq$ (I. 47.).

9) Propositionem nr. praeced. traditam exhibent Pappi lemma 4. vel 6. in Apollonii Locor. Planor. Lib. II. Collect. Mathem. fol. 234. b. sq.; Apollonius von Pergen ebenso Oert. p. 15. 29. 254. sq.; Serenus de Coni sectione Prop. 16. p. 46. sq.; Clavius Euclid. Elem. Francof. 1607. p. 208. sq.; Gregorius a St. Vincentio p. 28. sq.; Franc. a Schooten. Exercitat. Mathem. libr. V. Lugd. Bat. 1657. Prop. Geom. Prop. 18. p. 62. sq.; Viviani de locis solidis libr. III. Prop. 6. p. 34. sq.; Whiston. p. 62.; Playfair. p. 65. sq.; van Swinden. p. 78.; Gilbert. p. 307. sq.; Thom. Simpson. Elem. of Geom. Lond. 1800. p. 37. Et Simpson, quidem facile adhuc inde et ex I. 34. Cor. 1. deducit sequens theorema: si e puncto aliquo intra rectangulum ducantur rectae ad quatuor eius angulos, summa quadratorum duarum rectarum ad duos oppositos angulos ductarum aequalis est summae quadratorum duarum reliquarum rectarum. Idem theorema van Swinden. Anfangsgr. der Mesk. Iena 1797. p. 74. ex I. 47. et I. 34. deducit. Pappus ac Whiston. casum

nr. b. β . solum, hic priori, illa posteriori methodo demonstratum sistunt, propositum autem generatim enunciant, quod et supponit Apollonii libr. II. Prop. 5., cui apud Pappum illud inservit. Clavius ac Fratic. a Scheoten. omnes recensent ac demonstrant casus: ille casum nr. b. α . modo posteriori, hic priori; alterum nr. b. β . uterque modo posteriori. Gregorius casu nr. a. omisso casum nr. b. α . adstruit methodo priori: et casum nr. b. β . in duos dividit, quorum priorem, ubi nempe triangulum est rectangulum, pariter modo priori, alterum posteriori stabilit. Serenus, Viviani, Gilbert. hic exposito, illi strictim indicato et ad I. 47. remisso casu nr. a. duos casus nr. b. una demonstratione complectuntur: Viviani quidem ac Gilbert. priori modo iuxta Obs. 1. ad II. 13., cui hic et alteram casus nr. b. β . demonstrationem subiungit, Serenus autem sequenti methodo simili priori nr. b. β . Cum ob $AC > AB$ (supp.) sit (Fig. 181—183.) angulus AGC obtusus, AGB acutus (nr. 4.): ad huius partes cadit perpendicularum BF ex puncto B in rectam AG demissum, quicumque sint anguli ABC, BAG; et perpendicularum CK ex puncto C in eandem AG demissum in ipsam ultra AG productam incidit ad partes anguli CGK deinceps positi obtuso AGC (I. 17. Cor. 5.): atque ob $GC = GB$ (Constr.) et angulos $K = BFG$ (Constr.), $CGK = BGR$ (I. 15.), est $GK = GF$ (I. 28.). Proinde $ACq = AGq + GCq + 2AG \times GK$ (II. 12.) $= AGq + GBq + 2AG \times GF$. $ABq = AGq + GBq - 2AG \times GF$ (Obs. 1. ad II. 13.), et $ACq + ABq = 2(AGq + GBq)$. Textui Sereni praeter figuras trianguli aequicruri et acutanguli adiuncta est tertia angulum ABC sistens obtusum: eo itaque saltem modo extensam supponens propositionem II. 13. qui Obs. 1. a. ad II. 13. indicatur: quod tamen ad propositum universim evincendum haud sufficit.

10) Casum propositionis praecedentis (Fig. 180.), quo $AE = AC$,

$$\text{adeoque } ACq + ABq \text{ seu } 2ABq = 2(AGq + GBq)$$

$$\text{et } ABq = AGq + GBq,$$

etiam exprimit assertum: trianguli isoscelis quadratum curia

aequari quadrato rectae ab vertice trianguli ductae ad punctum bisectionis basis et rectangulo sub segmentis basis, in quae puncto illo dividitur, simul. Quod assertum perstat, quodcunque basis punctum M loco puncti bisectionis G accipiat. Etenim

$$\begin{aligned} AB^2 &= AG^2 + GB^2 \quad (\text{I. 47.}) \\ &= AG^2 + GM^2 + BM \times MC \quad (\text{II. 5.}) \\ &= AM^2 + BM \times MC \quad (\text{I. 47.}). \end{aligned}$$

Sed, si (Fig. 184.) punctum M sumitur in basi BC producta: fit $AB^2 = AG^2 + GB^2$ (I. 47.)

$$\begin{aligned} &= AG^2 + GM^2 - BM \times MC \quad (\text{II. 6.}) \\ &= AM^2 - BM \times MC \quad (\text{I. 47.}) \end{aligned}$$

$$\text{seu } AB^2 + BM \times MC = AM^2.$$

Trianguli igitur isoscelis quadratum cruris excedit quadratum rectae ab vertice trianguli ad punctum quodcunque ipsius basis ductae, rectangulo sub segmentis basis, quae punctum hoc dirimit: sed quadratum rectae ab vertice trianguli ad quodlibet basis continuatae punctum ductae excedit quadratum cruris, rectangulo sub rectis, quae pariter puncto illi et extremis basis interiacent.

Generatim differentia quadratorum cruris trianguli isoscelis, et rectae ab vertice eius ductae ad punctum quodcunque basis ipsius, vel productae, aequalis est rectangulo sub rectis, quae puncto illi et extremis basis interiacent.

Lemma hoc Rob. Simson. praemittit propositioni 76. datorum (p. 107 sq.). Priorem eius partem demonstrationi primae eiusdem propositionis apud ipsos 67., ex veteri Scholiaste subiungit Claud. Hardy. (p. 121. sq.); in nota annectit Dav. Gregorius (p. 503). Eandem propositionem tradit Gilbert. (p. 351. 357.) et Gruson. eam pro novo affert l. c. supra in I. 41. Cor. 4. §. 21.

11) Quodam autem ab trianguli non aequicruri ABC vertice A ducitur AM recta (Fig. 185. 186.) ad punctum quodcunque M basis BC, ab puncto bisectionis eius G diversum; bifariam vero in L secatur AM, et iungitur GL recta: quadrata crurum trianguli simul excedunt quadratum rectae AM

et quadruplum quadratum rectae GL, duplo rectangulo sub segmentis BM et MC. Et si ad basis productae (Fig. 187. 188.) punctum quodcunque M ab vertice A recta AM agitur, pariterque in L bifariam secatur, ac recta GL iungitur: quadratum rectae AM et quadruplum rectae GL quadratum simul excedunt summam quadratorum crurum trianguli duplo sub BM et MC rectangulo. Nempe ducta AG recta, sunt

$$ACq + ABq = 2AGq + 2GBq \text{ (nr. 8.)}$$

$$= 2AGq + 2GMq + 2BM \times MC \text{ si M in ipsa basi sit}$$

$$= 4ALq + 4GLq + 2BM \times MC \text{ (nr. 8.)}$$

$$= AMq + 4GLq + 2BM \times MC \text{ (II. 4. Cor. 2.)}$$

$$\text{vel } = 2AGq + 2GMq - 2BM \times MC \text{ si M in producta basi fuerit,}$$

$$= 4ALq + 4GLq - 2BM \times MC \text{ (nr. 8.)}$$

$$= AMq + 4GLq - 2MB \times MC \text{ (II. 4. Cor. 2.)}$$

12) Eadem constructio applicatur ad triangulum aequicrurum (vid. Fig. 180. 184.). Tum vero, ob angulum AGM rectum (Obs. ad I. 10.) est $GL = AL = ML$ (nr. 3.); $2GL = AM$; $4GLq = AMq$ (II. 4. Cor. 2.). Unde ex praeced. si punctum M in ipsa basi fuerit,

$$\text{erit } ACq + ABq \text{ seu } 2ABq = 2AMq + 2MB \times MC$$

$$ABq = AMq + BM \times MC$$

si vero punctum M sit in basi producta, erit

$$ACq + ABq \text{ seu } 2ABq = 2AMq - 2BM \times MC$$

$$\text{et } ABq = AMq - BM \times MC$$

conformiter nr. 10.

13) Si in trianguli aequicruri alterutrum crus perpendicularis demittitur ex vertice oppositi anguli ad basin; rectangulum sub hoc crure et sub eius segmento, quod basi et perpendiculari interiacet, dimidium est quadrati basis (Pappi Theor. 1. subiunctum. Prop. XXV. lib. V. Collect. mathem. fol. 89.).

Ob angulos ad basin BC trianguli aequicruri ABC (Fig. 189—191 acutos (I. 5. I. 32.) ad partes anguli C cadit perpendicularum BD in crus AC demissum ex vertice B anguli

oppositi ad basin (I. 17. Cor. 5.): idemque cum altero crure BA coincidit (Fig. 189.), si trianguli ad verticem A angulus est rectus; intra triangulum in crus ipsum CA cadit (Fig. 190.), si angulus A est acutus; extra triangulum in productum cruris CA incidit (Fig. 191.), si trianguli ad verticem angulus BAC est obtusus (I. 17. Cor. 5.).

Primo casu est $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (I. 47.) $= 2CA^2$, ideoque
 $CA^2 = \frac{1}{2}BC^2$.

Secundo casu est $BC^2 + 2CA \times AD = AB^2 + AC^2$ (II. 13.)
 $= 2CA^2 = 2CA \times AD + 2AC \times CD$ (II. 2.)

igitur $BC^2 = 2AC \times CD$

et rectang. $AC \times CD = \frac{1}{2}BC^2$.

Tertio casu est $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2CA \times AD$ (II. 12.)
 $= 2(AC^2 + CA \times AD) = 2AC \times CD$ (II. 3.), itaque

rectang. $ACD = \frac{1}{2}BC^2$.

Ita Pappus apud Commandinum. Succinctius et generatim ob angulum C acutum est omnibus casibus

$$AB^2 + 2AC \times CD = BC^2 + AC^2 \text{ (Obs. 1. ad II. 13.)}$$

et ob $AB = AC$, $2AC \times CD = BC^2$

rectang. $AC \times CD = \frac{1}{2}BC^2$.

14) Sit 1) ABCD parallelogrammum rectangulum (Fig. 192.), cuius iungantur diagonales AC, BD, erit

$$AZ^2 = AB^2 + BG^2 \text{ (I. 47.)}$$

$$BD^2 = AB^2 + CD^2 + DA^2$$

ideoque $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$
 $= 2(AB^2 + BC^2)$.

Posteriorius immediate etiam inde consequitur, quod parallelogrammi rectanguli diagonales invicem sunt aequales (I. 34. Cor. 17.).

2) Sit (Fig. 193.) ABCD parallelogrammum obliquangulum, cuius igitur duo anguli, qui eidem lateri e. gr. AB adiacent, et qui (I. 29.) simul valent duos rectos, sunt unus DAB acutus, alter CBA obtusus. Ductis eius diagonalibus AC, BD (quarum prior, quae vertices angulorum acutorum parallelogrammi iungit, seu obtusis eius angulis opponitur

altrea maior est (I. 34. Cor. 17.): in latus parallelogrammi quodlibet AB, si parallelogrammum est aequilaterum, et in laterum contiguorum maius AB, si parallelogrammum non est aequilaterum, ab extremis D, C lateris oppositi CD demittantur perpendicula DE, CF: quorum prius, ob angulum

$\angle DBA < \angle DAB$ (Supp. et I. 5. I. 18.) ideoque acutum (I. 17.

Cor. 1.), pariterque (Supp.) latus DAB intra triangulum ABD, alterum ob angulum CBA obtusum, extra triangulum ABC cadit (I. 17. Cor. 5.), ita ut sit $BF = AE$ (I. 26.), ob $BC = AD$ (I. 34.) atque angulos $\angle CBF = \angle DAF$ (I. 29.) et $\angle F = \angle AED$ rectos (Constr.).

Igitur $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BF$ (II. 12.)

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AE$ (Obs. 1. a. ad II. 13.)

$= CD^2 + AD^2 - 2AB \times BF$ (I. 34. et Dem.)

atque $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.

Proinde in omni parallelogrammo quadrata diagonalium aequalia sunt quadratis laterum simul, seu dupla sunt quadratorum duorum laterum contiguorum.

Et eo, qui hic traditur, modo (simpliciter tamen pro BD^2 in subsidium vocata II. 13. nec indicata lateris AB, in quod perpendicula deducuntur determinatione, quae demum, ad quaecunque triângula iuxta Obs. 1. b. extensa propositione II. 13. superflua sit) propositum de parallelogrammis demonstrant Lagny (sur une proposition de géométrie élémentaire Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris. Ann. 1707. Amst. p. 413. sq.) Baermannus p. 55.

15) Idem Gregorius a S. Vincentio p. 33.; Viviani de locis solidis L. III. p. 110. sq.; Gilbert. p. 313. inferunt ex propositione demonstrata nr. 8. Nempe cum diagonales parallelogrammi ABCD, se mutuo bifariam secant (I. 34. Cor. 1.), sunt $AB^2 + BC^2 = 2GB^2 + 2GA^2$

$CD^2 + DA^2 = 2GD^2 + 2GA^2$ (nr. 8.)

$= 2GB^2 + 2GA^2$.

Quare $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4GB^2 + 4GA^2 = BD^2 + AC^2$ (II. 4. Cor. 2.).

16) Vicissim propositum de triangulis ex propositione nr. 14. de parallelogrammis demonstrata potest deduci. Trianguli enim cuiuscunque ABD (Fig. 192. 193.) basi BD bifariam in puncto G secta; tum ab trianguli vertice A ad punctum G ducta AG recta, eaque continuata, donec sit $GC = GA$, et ab extremis B, D basis ad punctum C ductis BC, DC rectis: ob $GB = GD$, $GA = GC$ (Constr.) et angulum $AGB = CGD$ (I. 15.); sunt (I. 4.) $AB = CD$, et angulus $CAB = ACD$, igitur rectae AB, CD parallelae (I. 27.), et aequales (Dem.). Proinde (I. 33.) quadrilaterum ABCD est parallelogrammum. Cf. I. 34. Cor. 8. Et hinc $2(AB^q + AD^q) = AC^q + BD^q$ (nr. 14.) $= 4AG^q + 4GB^q$ (Constr. et II. 4. Cor. 2.) ideoque $AB^q + AD^q = 2AG^q + 2GB^q$.

17) Cum parallelogrammi utraque diagonalis alteram secet bifariam (I. 34. Cor. 1.) et vicissim quadrilaterum, cuius ambae diagonales se mutuo bifariam secant, sit parallelogrammum (nr. 16. vel I. 34. Cor. 8.); sequitur: quadrilateri non parallelogrammi, seu trapezii ambas diagonales se mutuo bifariam non secare.

1. Bifariam in E secet (Fig. 194. 195.) trapezii ABCD diagonalis BD ipsa, vel producta, alteram AC; ipsa autem BD bifariam secta sit in puncto F. Erunt

$$AB^q + BC^q = 2AE^q + 2BE^q \quad (\text{nr. 8. sq. 15.})$$

$$CD^q + DA^q = 2AE^q + 2DE^q$$

igitur $AB^q + BC^q + CD^q + DA^q = 4AE^q + 2BE^q + 2DE^q$.

Sed $BE^q + DE^q = 2DF^q + 2EF^q$ (II. 9. 10.).

Quare $AB^q + BC^q + CD^q + DA^q = 4AE^q + 4DF^q + 4EF^q$
 $= AC^q + BD^q + 4EF^q$ (II. 4. Cor. 2.)

2. Neutra trapezii ABCD diagonalis (Fig. 196. 197.) ipsa, vel producta alteram secet bifariam; seu ab puncto, in quo diagonales AC, BD se mutuo secant, diversa sint puncta E, F, quibus bifariam secantur ipsae AC, BD; rectae igitur BE, DE triangulum constituent super diagonali BD, intra quod cadit EF recta. Tum rursus

$$AB_q + BC_q = 2AE_q + BE_q \quad (\text{nr. 8. sq. 15.})$$

$$CD_q + DA_q = 2AE_q + 2DE_q$$

$$\text{Quare } AB_q + BC_q + CD_q + DA_q = 4AE_q + 2(BE_q + DE_q).$$

$$\text{Sed pariter } BE_q + DE_q = 2BF_q + 2EF_q \quad (\text{nr. 8. sq. 15.})$$

$$\text{Etiamnunc itaque } AB_q + BC_q + CD_q + DA_q$$

$$= 4AE_q + 2BF_q + 4EF_q$$

$$= AC_q + BD_q + 4EF_q \quad (\text{II. 4. Cor. 2.})$$

In quovis igitur trapezio, seu quadrilatero non parallelogrammo quadrata laterum simul aequalia sunt quadratis diagonalium et quadruplo quadrato rectae interceptae punctis, quibus diagonales bifariam secantur.

18) Theorema hoc, quod singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam complecti iure praedicat, et nusquam adhuc neque prolatum, neque demonstratum esse profitetur Leonh. Eulerus in dissertatione inscripta: *Variae demonstrationes geometricae ac Novis Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. I. ad annum 1747. et 1748. (Petro. 1750.) inserta*, ipse (§. 25. sqq. p. 63. sqq.) ab parallelogrammorum proprietate nr. 14. sq. ostensa sic fere deducit: circa trapezii ABCD (Fig. 198.) latera contigua AB et AD, BC et CD compleantur parallelogramma ABKD, BCDL, et praeter trapezii ac parallelogrammorum diagonales AC, BD, AK, CL, ducantur rectae AL, CK. Ita erunt anguli CDB = DBL, KDB = DBA (I. 29.). Quare (I. 4.) CK = AL, et angulus CKD = LAB. Sed et angulus DKA = BAK (I. 29.). Igitur angulus CKA = LAK, ideoque (I. 27.) CK, AL sunt parallelae. Quare, cum et aequales sint (Demonstr.) ALKC pariter est parallelogrammum (I. 33.). Igitur

$$2(BC_q + CD_q) = BD_q + CL_q$$

$$CL_q + AK_q = 2(AC_q = CK_q) \quad (\text{nr. 14. sq.})$$

$$\text{Unde } 2(BC_q + CD_q) + AK_q = BD_q + 2(AC_q + CK_q).$$

$$\text{Sed et } 2(AB_q + AD_q) = BD_q + AK_q \quad (\text{nr. 14. sq.}),$$

$$\text{Ergo } 2(AB_q + AD_q) + 2(BC_q + CD_q) = 2BD_q + 2(AC_q + CK_q).$$

$$AB_q + BC_q + CD_q + DA_q = BD_q + AC_q + CK_q$$

h. e. summa quadratorum laterum trapezii excedit summam quadratorum diagonalium eius quadrato rectae CK, qua tra-

pezii ABCD et parallelogrammi ABKD tria puncta D, A, B communia habentium, puncta diversa C, K iunguntur, atque ut ait Eulerus (§. 26. p. 65.) discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur.

Porro per punctum F, in quo parallelogrammi ABKD diagonales AK, BD se mutuo secant, idque bifariam (I. 34. Cor. 1.), per quod proinde etiam transit altera parallelogrammi BCDL diagonalis CL (I. 34. Cor. 1.) rectis AC, CK parallelas agantur FM, FE, itaque describatur parallelogrammum FMCE, cuius latera $EC=FM$, $EF=CM$ (I. 34.). Cum, ob $AF=FK$ (I. 34. Cor. 1.) et angulos $FAE=KFM$, $AFE=FKM$ (I. 29.), etiam sint (I. 26.) $AE=FM$, $EF=MK$: erunt $AE=EC$ (h. e. AC bifariam in E secabitur) et $CM=MK=EF$, adeoque $CK=2EF$ $CKq=4EFq$ (II. 4. Cor. 2.) et $ABq+BCq+CDq+ADq=BDq+ACq+4EFq$.

Eiusdem propositionis, ab Eulero sine subiuncta demonstratione cum ipso communicatae demonstrationem analyticam trigonometricam eodem in T. Commentar. Petrop. p. 131. sq. dedit Kraftius. Démonstrationem Euleri etiam exponunt Wucherer. Einige geometr. Saetze. Progr. 1780. §. 30. ff. Kleine Schriften Carlsruhe 1799. S. 133. f. ac Gilbert. p. 314. sq.

19) In quadrilateris igitur summa quadratorum laterum vel adaequat (nempe in parallelogrammis nr. 14. sq.) vel excedit (nimirum in non parallelogrammis nr. 17. sq.) summam quadratorum diagonalium: nunquam ea est minor; seu nullum exhiberi potest quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit, quam summa quadratorum diagonalium (Euler. l. c. p. 65.).

20) In trapezio, cuius duo latera opposita sunt parallela, latera haec inaequalia sunt (Append. ad I. 34. nr. 3.) et neutra diagonalis alteram secat bifariam (Append. ad I. 34. nr. 5.). At, quae in trapezio, cuius duo latera parallela sunt, iisdem lateribus per punctum bisectionis unius diagonalis parallela agitur recta, bifariam quoque secat alteram diagonalem (Append. ad I. 34. nr. 6.); ipsaque recta, punctis, quibus

diagonales bifariam secantur, intercepta, est semidifferentia laterum parallelorum trapezii (Append ad I. 34. nr. 7.): unde consequitur, in trapezio, cuius latera sunt parallela, quadrata laterum simul aequalia esse quadratis diagonalium, et quadrato differentiae laterum parallelorum. Sint enim (Fig. 199.) in trapezio ABCD parallela latera AB, CD, et $AB > CD$. Bifariam in E secetur altera eius diagonalis AC et per punctum E agatur lateribus AB, CD parallela EF, diagonalem

BD secans in puncto F, eritque $EF = \frac{AB - CD}{2}$ (Append. ad I. 34. nr. 7.), ideoque $2EF = AB - CD$, $4EFq = (AB - CD)q$ (II. 4. Cor. 2.): itaque (nr. 18. sq.) $ABq + BCq + CDq + DAq = ACq + BDq + (AB - CD)q$.

21) Ob $ABq + CDq = 2AB \times CD + (AB - CD)q$ (II. 7.) porro fit $BCq + DAq + 2AB \times CD + (AB - CD)q = ACq + BDq + (AB - CD)q$ (nr. 20.) vel $BCq + DAq + 2AB \times CD = ACq + BDq$,

h. e. in trapezio, cuius duo latera sunt parallela, quadrata diagonalium simul aequalia sunt quadratis laterum nonparallelorum, et duplo sub lateribus parallelis rectangulo.

22) Trapezii ABCD (Fig. 200.) latera AB, CD sint parallela, atque altera duo AD, BC sint aequalia: et sit $AB > CD$. Per C ducta lateri AD parallela CN; sunt (I. 34.) $AN = CD$, $CN = AD = CB$. Itaque angulus CBN = CNB (I. 5.) = DAB (I. 29.). Et hinc ob $BC = AD$, $AB = AB$, est $AC = BD$ (I. 4.): et $2ACq = 2BCq + 2AB \times CD$ (nr. 21.) vel $ACq = BCq + AB \times CD$. Trapezii igitur, cuius duo latera sunt parallela, et altera duo aequalia, diagonales invicem sunt aequales, et cuiuslibet diagonalis quadratum aequale est rectangulo sub lateribus parallelis trapezii et quadrato unius laterum nonparallelorum simul. Caeterum ob triangulum BNC isosceles, et $AN = CD$ (Demonstr.) immediato etiam ex parte posteriori propositionis 10. consequitur, esse

$$ACq = BCq + 2CD \times AB.$$

23) Pariter propositum nr. 21. potest ad partem posteriorem nr. 11. reduci. In trapezio enim ABCD (Fig. 201.) cu-

ius latera AB , CD sunt parallela, et $AB > CD$, per punctum C ducta CN lateri AD parallela: fit $ANCD$ parallelogrammum, cuius igitur latera $AN=CD$, $CN=AD$ (I. 34.), ac diagonales AC , DN se mutuo bifariam secant in L (I. 34. Cor. 1.). Per punctum L agatur alteri trapezii $ABCD$ diagonali BD parallela LG , et per punctum G , ubi haec lateri AB occurrat, recta GI parallela rectae DN . Erunt (I. 34.) $GL=DI$, $GI=DL$. Quare ob $DL=NL$ (Dem.), etiam $GI=NL$. Praeterea sunt anguli $IGB=LNG$, $IBG=LGN$ (I. 29.), ideoque (I. 26.) $BG=GN$, $BI=GL$. Sed et $DI=GL$ (Dem.). Ergo $BD=2GL$. Trianguli igitur BNC basin BN bifariam dividit punctum G : et ad basis huius BN productae punctum A ab trianguli vertice C ducta est AC recta, quae pariter bifariam dividitur puncto L : proinde est (nr. 11.) $ACq + 4GLq = BCq + CNq + 2NA \times AB$.

Sed et $2GL=BD$, $CN=DA$, $NA=CD$ (Dem.). Ergo

$$ACq + BDq = BCq + DAq + 2CD \times AB.$$

24) Quae nr. 17. 18. de trapezii dicta sunt, possunt sequentem in modum ad figuras rectilineas plurium laterum applicari. Sit v. c. (Fig. 202.) $ABCDEFGH$ figura rectilinea octo lateribus comprehensa, in qua ducantur primo a quovis angulo figurae diagonales ad angulum qui secundus ab ipso est, nempe AC , BD , CE , DF etc. (has diagonales primi ordinis vocabimus); pariterque ducantur a quovis angulo figurae diagonales ad angulum, qui tertius ab ipso est, nempe AD , BE , CF , DG etc. (quas diagonales secundi ordinis vocabimus), et efficient singulae hae diagonales secundi ordinis eam ternis lateribus figurae propositae trapezia, quorum diagonales eadem erunt, ac diagonales figurae, quas primi ordinis diximus. Quodsi igitur singulae hae diagonales primi ordinis bisecentur in punctis a , b , c , d etc. et iungantur ab , bc , cd , de etc.

erit ex nr. 17. 18. in trapezio $ABCD$

$$ABq + BCq + CDq + DAq = ACq + BDq + 4bcq$$

Pariter in trapezio $BCDE$ erit

$$BCq + CDq + DEq + EBq = BDq + CEq + 4cdq$$

in trapezio CDEF

$$CDq + DEq + EFq + FCq = CEq + DFq + 4deq$$

in trapezio DEFG

$$DEq + EFq + FGq + GDq = DFq + EGq + 4efq$$

in trapezio EFGH

$$EFq + FGq + GHq + HEq = EGq + FHq + 4fgq$$

in trapezio FGHA

$$FGq + GHq + HAq + AFq = FHq + GAq + 4ghq$$

in trapezio GHAB

$$GHq + HAq + ABq + BGq = GAq + HBq + 4haq$$

denique in trapezio HABC

$$HAq + ABq + BCq + CHq = HBq + ACq + 4abq$$

Quodsi itaque omnia in unam summam colligamus, erit

$$\begin{aligned} & 3(ABq + BCq + CDq + DEq + EFq + FGq + GHq + HAq) \\ & + ADq + BEq + CFq + DGq + EHq + FAq + GBq + HCq \\ & = 2(ACq + BDq + CEq + DFq + EGq + FHq + GAq + HBq) \\ & + 4(abq + bcq + cdq + deq + efq + fgq + ghq + haq) \end{aligned}$$

i. e. erit triplex summa quadratorum laterum figurae, si ei addas summam quadratorum diagonalium secundi ordinis, aequalis duplici summae quadratorum diagonalium primi ordinis, si ei adicias quadruplicem summam quadratorum earum rectarum, quae puncta proxima bisectionis diagonalium primi ordinis coniungunt. Et facile patet, etiam in figuris plurium laterum, quotcunque ea fuerint, eandem valere demonstrationem. Cæterum, quum diagonales secundi ordinis primum in Pentagonis locum habeant (in quibus ipsis tamen coincidunt cum diagonalibus primi ordinis) etiam hoc propositum, saltem si verba sensu proprio ac solito sumantur, incipiendo tantum a Pentagonis valebit, sensu tamen improprio illud etiam ad ipsa trapezia, quin ad triangula adeo adplicare possis, dum nempe in illis pro diagonalibus secundi ordinis ipsa trapezii ABCD latera sumas, diagonales primi ordinis autem quatuor nempe AC, BD, CA, DB in computum ducas, pariterque rectas, quae earum bisectionis puncta iungunt (quarum proprie una tantum est) quatuor (unam nempe quater repetitam a prima diagonalis ad secundam, a secunda ad tertiam,

a tertia ad quartam, et a quarta denuo ad primam) numeres: in triangulis autem diagonales secundi ordinis nullae sunt, diagonales primi ordinis autem cum lateribus trianguli coincidunt.

25) Quodsi polygonum sit regulare, v. f. c. octogonum regulare (Fig. 203.), erunt non tantum omnia latera polygoni inter se aequalia, verum etiam omnes diagonales primi ordinis, ut facile ex I. 4. patet, pariterque omnes diagonales secundi ordinis, et omnes rectae, quae duo proxima puncta bisectionis diagonalium primi ordinis coniungunt. Quare sum in omnibus polygonis $3ABq + ADq = 2ACq + 4abq$.

26) Hoc casu, si nempe polygonum sit regulare, AB , diagonalis secundi ordinis aequalis est $AB + 2ab$ nempe lateri polygoni et duplo rectae, quae duo proxima puncta bisectionis diagonalium primi ordinis coniungit. Quum enim (I. 4.) triangu-
la ABH , BAC , CBD etc. sint aequalia, et nominatim sit $HB = AC = BD$ etc. et $ABH = CBD = CDB$ etc. erit triang.
 $HAC = HBC$ (I. 8.) et nominatim $AHC = BCH$. Quum vero etiam $HAB = ABC$ (Hyp.) erit $AHC + HAB = BCH + ABC$, adeoque, quum omnes anguli quadrilateri $ABHC$ sint quatuor rectis aequales (I. 32. Cor. 12.) erunt $AHC + HAB$ aequales duobus rectis, adeoque AB et HC parallelae (I. 29.): eodemque modo ostenditur, esse BC , AD parallelas. Et, quum in trapezio $ABCD$ recta bc bisecet (Hyp.) utramque diagonalem AC , BD , erit $bc = \frac{AD - BC}{2}$ (nr. 7. Append. ad I. 34.), vel $2bc = AD - BC$, vel $AD = BC + 2bc = AB + 2ab$,

27) Quum nr. 25. sit $3ABq + ADq = 2ACq + 4abq$, et $AD = AB + 2ab$ adeoque $ADq = ABq + 4AB.ab + 4abq$ (II. 4.) erit $4ABq + 4AB.ab + 4abq = 2ACq + 4abq$, vel $4ABq + 4AB \times ab = 2ACq$, vel $2ABq + 2AB \times ab = ACq$ vel $ABq + 2AB \times ab = ACq - ABq$, vel $AB \times (AB + 2ab) = ACq - ABq$, vel $AB \times AD = ACq - ABq$. In polygono regulari quocunque igitur rectangulum contentum inter latus polygoni et diagonalem secundi ordinis aequale erit excessui, quo quadratum diagonalis primi ordinis superat quadratum lateris polygoni.

Caeterum ea, quae nr. 25—27. de polygono regulari diximus, etiam in quovis trapezio $ABCD$ locum habent, cuius tria latera AB , BC , CD aequalia sunt, et quod etiam diagonales AC , BD aequales habet. In eo quippe semper AD , BC parallelae erunt (I. 29.), quum in triangulis aequalibus (I. 8.) ABC , BCD , anguli ABC , BCD , pariterque in triangulis aequalibus (I. 8.) BAD , CDA anguli BAD , CDA sint aequales, ideoque $ABC + BAD = BCD + CDA = 2$ rectis (I. 32. Cor. 12.). Unde ex nr. 22. erit $3ABq + ADq = 2ACq + (AD - BC)q$, vel (nr. 7. Append. ad I. 34.) $3ABq + ADq = 2ACq + 4abq$, unde consequitur, ut supra, esse $AB \times AD = ACq - ABq$.

28) Quae nr. 24. de relatione mutua quadratorum laterum figurae alicuius, et quadratorum diagonalium primi et secundi ordinis dicta sunt, porro in polygonis, quorum numerus laterum maior est, generalius adhuc exprimi possunt, in computum vocatis etiam quadratis diagonalium tertii, quarti et aliorum superiorum ordinum. Et, si quis tentare, et loco trapeziorum $ABCD$, $BCDE$ etc. (Fig. 202.) iam pentagona $ABCDE$, $BCDEF$ etc. considerare, et ad haec dicta nr. 24. adplicare velit, facile regulam generalem analogam ei, quam nr. 24. habuimus, satis simplicem locum habere, deprehendet. Nos tamen haec talia, quamvis haud infructuosa esse videantur, quum elementorum fines excedere fere videantur, aut certe, ne nimis longi simus, consulto praetermittimus.

EXCURSUS IV.

AD

ELEMENTORUM

III. 16.

Diximus ad III. 16. tertiam eius partem in textu graeco affirmare, angulum semicirculi (i. e. ut volunt, angulum, quem circumferentia circuli cum diametro efficiat) maiorem esse quovis angulo acuto rectilineo; angulum contra, quem circumferentia cum recta, diametro in puncto eius extremo ad angulos rectos ducta efficiat (quem angulum contingentiae vel contactus vocant) minorem esse quovis angulo acuto rectilineo.

Iam super hac tertia Prop. III. 16. parte magnae apud nonnullos Euclidis interpretes lites ortae sunt, quarum brevem commemorationem, quamvis non admodum magni momenti esse videantur, nolimus tamen hoc loco praetermittere. Et constat, praecipuos huius disceptationis coryphaeos Peletarium fuisse ac Clavium, quorum ille quidem primus in editis ab ipso Euclidis Elementis monuit, angulum illum contactus quem vocant, re vera non esse angulum, nec omnino quantitatem. Namque ita saltem geometriam sibi ipsi constare, et multa paradoxa, et sibi ipsis repugnantia, quae e contraria opinione nascerentur, declinari posse putavit. Paradoxa autem illa, quorum partem iam Campanus, Cardanus, aliique observaverant, erant fere eiusmodi:

1) Euclidem docere X. 1.: si a maiore duarum magnitudinum auferatur maius quam dimidium, et a residuo ma-

ius quam dimidium; et id semper fiat, relinqui tandem magnitudinem, quae minor sit minore duarum, quae primo exhibitae erant, magnitudinum. Atque, si is, quem circumferentiam cum contingente efficere dicant, angulum, vere pro angulo habere velis, isque ex propositione hac III. 16. minor sit quovis angulo acuto rectilineo, consequens esse, angulum acutum rectilineum, quamvis ei semper plus quam dimidium detrahas, partem tamen relinquere angulo illo contactus maiorem, quod cum X. Prop. 1. conciliari nequeat. Idem fere aliter, ut Cardanus habeat (libro de subtilitate), ita exprimi posse: aliquam quantitatem (angulum contactus) posse continue, atque adeo infinite augeri, alteram autem (angulum aliquem acutum) infinite minui, et tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper fore huius decremento.

2) Si angulus circumferentiae (quem circumferentia eum diametro efficiat) maior sit quovis angulo acuto rectilineo, posse transiri a minori (angulo acuto) ad maius (angulum rectum), vel contra per omnia media, neque tamen transiri per aequale (nempe per angulum aequalem angulo semicirculi), quod Campanus moneat. His aliisque difficultatibus se expedire se posse putat Peletarius, si asserat, angulum illum, quem dicunt, contactus re vera non esse angulum, nec omnino quantitatem; rectam, quae circumferentiam contingat, in puncto contactus potius cum circumferentia coincidere, non ad eam inclinari, quod ipsum tamen ad naturam anguli pertineat, qui in sectione consistat, non in contactu; angulum autem semicirculi omnino rectum esse, vel recto rectilineo aequalem; circulos autem se contingentes, sive extra, sive intra id fiat, angulum non efficere.

Clavius autem se paradoxa illa, quae a Cardano et Campano afferantur, nec negare nec reformidare testatur, eam vero, quam inter III. Prop. 16. et X. 1. intercedere dicat Peletarius discrepantiam, aut contradictionem potius neminem auxilium reddere debere, non enim veram esse illam discrepantiam, Euclidem quippe X. Prop. 1. de quantitibus tantum homogeneis loqui, angulos autem rectilineos non eius-

dem generis esse ac angulum contactus, quamvis etiam hic veri nominis quantitas sit, quod inde pateat, quod et ipse non quidem per lineam rectam, at per arcus maioris circuli in infinitum dividi possit.

Cacterum Euclidem, si angulum contactus nihilom pro-
sus, et angulum semicirculi angulo recto aequalem esse pu-
tasset, non tantopere deudaturum fuisse ut demonstraret, an-
gulum contactus esse minorem quovis angulo acuto rectilineo,
angulum vero semicirculi maiorem.

Haec praecipua fere erant, de quibus Peletarium inter ac
Clavium, edita etiam a Peletario Apologia, cui iterum re-
spondit Clavius, variis hinc inde argumentis disputantur.
Quamvis autem postea plerique summi geometrae quoad par-
tem potissimam in Peletarii sententiam abierint, cum quo ho-
die etiam tantum non omnes faciunt, ut nempe angulum il-
lum contactus non esse veri nominis angulum affirmens, ne-
gari tamen nequit, post Peletarium demum rem omnem a
viris sagacissimis perfecte expositam ac dilucidatam fuisse.
Et Vieta quidem (Varior. cap. XIII.) primus fuisse videtur,
qui tertiam illam partem propositionis III. 16. spuriam, et a
Proclo aliove additam indicaret, et Peletarii sententiam fir-
mioribus rationibus stabiliret, quas postea adoriri tentavit
Iohannes Camillus Gloriosus Neapolitanus (Dec. II: Exercitat.
Mathem.). Galilaeus contra in epistola ad Gloriosum missa
(Dec. III. Exercitat. Mathem.) dubia Gloriosi refellere sa-
tegit, eique adstipulatur etiam Vincentius Viviani. Cf. Car-
lieri Elementi Piani e Solidi d'Euclide Firenze 1769. P. I.
p. 148. Galilaeus maxime angulum illum contactus, quem
dicunt, et a circumferentia circuli rectaque contingente effici
volunt, non esse veri nominis angulum, quin ne quantita-
tem quidem, ita potissimum ostendere studet, ut circuli cir-
cumferentiam compareret cum perimetro figurae regularis illi in-
scriptae. Rectam AB (Fig. 281.), quae ad latus CD alicuius
polygoni ita applicetur, ut illud non secet, sed cum eo coin-
cidat, nullum certe cum hoc latere angulum efficere sit, quem
demum constituat cum latere proxime sequente DE , eandem
Hh

autem esse rationem, circumferentiae circuli computatae cum recta eum contingente, quae lateris CD cum recta AB ; angulo hic non locum esse. Et, quod alii obliciant, posse tamen locum inter circumferentiam circuli rectaeque illum contingentis per arcus maioris circuli in infinitum dividi, nihil ad rem facere. Idem enim obtinere circa perimetros similium polygonorum (Fig. 282.) his circulis inscriptorum BIO . . . $BODF$. . . quorum latera BI , BC coincident, adeoque cum recta AE circulos in B contingente unum eundemque angulum IBE , vel CBE efficiant. Nempe in his quoque perimetrum polygoni maioris locum quidem inter contingentem BE et perimetrum polygoni minoris interceptam pertrensire ac dividere, ipsum autem angulum IBE non secare aut dividere. Iam si cogitare velis polygonum laterum numero infinitorum minori circulo inscriptum, ita ut angulus CBE infinite parvus evadat, semper tamen minori circulo polygonum totidem laterum ac in priore polygono sunt, inscriptum cogitari posse, quod habiturum sit angulum IBE aequalem angulo CBE , nunquam itaque talem angulum dividi a recta CB , quodsi autem dividi non possit, non esse quantitatem, si quantitas non sit, non esse veri nominis angulum, sed equivoco ita dictum. Viviani praeterea illud maxime arguet, ex ipsa Euclidis anguli plani definitione (I. 18. Def.), qua dicat, angulum planum esse duarum linearum in plano se tangentium, et non in directam iacentium mutuum inclinationem, satis apparere, illi sermonem tantum esse de angulis, qui a lineis rectis efficiantur: in his solum enim evenire posse, ut una alteri in directam iaceat, quosque angulos igitur, quos Proclus L. II. ad Def. 8. aliqui curvilineos aut mixtilineos vel corniformes, aut quos alios effingant, prorsus superfluum futurum fuisse Euclidis illam determinationem. Accedere, quod nullibi ille ex professo, ut dicunt, theorema aliquod aut problema de angulis istiusmodi proponat, unde cum Vieta (Oper. Mathema. p. 386.) suspicari licere, fuisse eorum mentionem in libro tertio factam ab alio quodam adutam. Ab eodem forte etiam mutatum fuisse (I. Def. 8.), quae primus ita habuerit: angulus est

mutua inclinatio duarum rectarum in eodem plano positarum, quae quum in eodem puncto sibi occurrant, non tamen in directum iacent. Si quis vero hæc neget, et (I. Def. 8.) Euclidean esse affirmet, circumferentiam tamen circuli, cuius diversae partes aliam aliamque versus² rectam contingentem inclinationem habeant, non dici posse certum aliquem angulum cum ea efficere, atque ex his pariter ac ex allatis a Galileo rationibus consequi, angulum illum contactus, quem dicant, non esse veri nominis angulum aut quantitatem. Idem fere, quamvis e rationibus paullo diversis dilucide explicatum sistit (nempe divariculum illud contingentiae, ut vocat, non esse angulum, et circulum efficere cum tangente non unicam sed infinitas inclinationes) Borellius in Euclide restituto. Alior paullo, at, ut mihi videtur, minus feliciter rem aggressus erat Tacquet., qui affirmat, nullum angulum esse quantitatem, sed modum tantum quantitatis. Esse enim angulum linearum inclinationem, inclinationem autem non magis esse quantitatem ac curvitatē aut inflexionem et fractionem. Atque ita ille omnes scopulos evitare posse putat, quod (X. 1.), quae de quantitibus tantum agat, non applicari possit ad non-quantitates. At nescio, an non in alios graviores incidat, dum aequalitatem adeo aut inaequalitatem angulis abiudicandum esse, nec nisi sensu improprio pro similitudine ac dissimilitudine de iis praedicari censet.

Caeterum eadem fere ac Tacqueti opinio fuisse videtur Gregorii a St. Vincentio, qui in opere suo, Geometr. Quadraturae circuli p. 871. angulos tam rectilineos, quam curvos et mixtos ad quantitatem tantum spectare, nec ipsos esse quantitatem dixit, sed tantum aliquid ad quantitatem pertinens. Nisi enim hoc sumatur, putat, necessario consequi, omnes angulos contactus a maioribus, minoribusque circulis factos esse aequales, adeoque totum esse aequale parti. Hanc Gregorii opinionem contra Vincentii Leotaud., qui in cyclometria ab ipso edita cum Clavio fere in hac re consentiebat, obiectiones defendere studuit Aynsoom. Expositio ac dilucidatio Geometr. Quadrat. Circuli Gregorii a St. Vincent. 1656.

Longe autem copiosissime, et perspicue pariter ac subtiliter in causa hac versatus est Wallisius, in cuius Oper. Mathem. Tom. II. 1693. p. 605—664. peculiaris est tractatus de angulo contactus et semicirculi editus ante jam 1656., cum nova, quae 1685. ei accesserat, defensione prelo iam repetitus. Is nempe ante omnia monet, ex Euclidis definitione I. 8. *angulum planum esse mutuam alteri seu inclinationem duarum rectarum in plano se tangentium, et non in directam positarum rem diiudicandam esse.* Quamvis igitur non requiratur, ut lineae (quod Peletarius voluerat) productae se invicem *socent*, id certe requiri, ut lineae, quae angulum constituent, mutuo erga se *inclinantur*. Ideo, si quae lineae concurrant, nec tamen inclinentur, quod ipsum fiat, quum circumferentia a recta aliqua contingatur, eas nullam inter se angulum constituere. Angulum praeterea iudicari non nisi ex ea linearum concurrentium inclinatione, quam sortiantur in ipso concursus puncto. Denique verba: ($\mu\eta$) *ἐν ἐὐθείᾳ καὶ κεντρῷ* aliter, ac vulgo sumuntur, explicare studet. Putat nempe, ea significare non lineas tantummodo rectas continuatas, sive duo segmenta contigua eiusdem rectae (sic enim continuatam peripheriam in singulis sui punctis angulum formare dicendam fuisse, quod tamen nec Euclides nec alius quisquam affirmet), sed per *lineas in directam positas* eas intelligi, quae se mutuo continuare dici possint, ut exinde una linea fiat. Et quamvis admodum dubitemus, an haec ultima verborum *ἐν ἐὐθείᾳ καὶ κεντρῷ* explicatio, quam caeterum iam Clavius ad I. Def. 8. proposuerat, probari, et cum usu loquendi conciliari possit, caetera tamen pleraque, quae Wallisius habet, ita comparata sunt, ut facile omnium assensum extorquere debeant. Nempe angulum, quem contactus vocant, cum Peletario nullum esse statuit, quod recta circulum contingens ad circumferentiam in contactus puncto non inclinetur, sed super ipsam *ἐκκεντρῶς* iaceat, vel cum ipsa coincadat, angulum autem semicirculi rectum esse affirmat, et simul Clavio ad ea, quae Peletario opposuerat, et postea Leotaudo quoque respondet. Omnia huc referre longum fuerit. Summa hac

fere redit. Verum quidem esse, nonnisi magnitudines eisdem generis inter se comparari posse, at angulos curvilineos et mixtilineos (ubi nempe pro directione curvae in puncto contactus semper sumitur recta curvam in hoc puncto contingens) tam inter se, quam cum rectilineis eiusdem generis esse, quod variis modis, maxime quod unus multiplicatus alterum superare possit, demonstrari queat. Itaque necesse esse e rationibus a Peletario allatis angulum contactus pro nullo, angulum autem semicirculi pro angulo recto habere. Multa praeterea ingeniose extogitata ad stabiliendam suam sententiam adiicit. Et sane post ea, quae Peletarius, Galilaei, Viviani, et Wallisius, quibus nostra aetate praecipue adhuc accesserunt Karsten. in libro inscripto: *Mathem. Abhandl. Halle 1786.*, ubi p. 396—422. de hac re fusius disputat, et se prorsus cum Wallisio consentire fatetur, et Gilbert: *die Geometrie nach le Gendre* p. 122. sqq. ad rem diiudicandam contulere, nihil prorsus superesse videtur, de quo ulla ratione ambigi possit. Res omnino eo fere redit. Curvae quaecumque, quum earum partes aliae alio diriguntur, non dici possunt *integrae* certam aliquam directionem, vel constantem erga aliam lineam, nominatim erga rectam aliquam, inclinationem habere. Proprie loquendo igitur non sermo esse potest de angulo, quem curva aliqua integra cum alia curva, aut cum linea recta efficiat, sed tantum de angulo, quem elementa eius in puncto contactus cum illis factura essent, siquidem eam, quam ibi habent, directionem ulterius prosequi possent. At haec elementorum curvae directio, ut ipsum directionis vocabulum indicat, coincidit cum directione rectae curvam in hoc puncto contingentis i. e. cum ipsa hac recta contingente. Curva igitur, vel potius curvae elementum in ipso contactus puncto cum recta contingente, cum qua in hoc puncto coincidit, nullum angulum efficit, cum ea autem recta, quae ad rectam contingentem perpendicularis est, curva, aut potius curvae elementum contactus puncto proximum etiam ipsum angulum rectum efficere dicendum erit, siquidem angulum appellare velis inclinationem *elementi infinite parvi* ad

pectam contingenti perpendiculararem. Itaque pars tertia III. Prop. 16., ut in Elementis legitur, nihil prorsus continet, quod non etiam in parte secunda contineatur, et poterat illa, sive ab Euclide sit, sive, quod multi, nominatim Rob. Simson, putant, ab alio quodam addita fuerit, egregie omitti, quod etiam factum videmus tum ab antiquioribus, tum a recentioribus nonnullis, nominatim a Giordano da Bitonto, Borellio, Coëtsio, Playfair, Roberto Simson. et nobis fortasse excussatione opus fuerit, quod rei, quae simulac rite evoluta fuerit, nihil difficultatis habere potest, tam diu immorati simus: noluimus tamen hanc causam intactam relinquere, vel, quod ad historiam geometriae pertinere videbatur, vel quod, ut monet Karstenius (mathem. Abhandl. p. 108. sqq.) subinde adhuc sunt, qui in sublimioribus quoque Mathematicis partibus doctrina de angulo contactus male intellecta abutuntur ad falsas suas de infinite parvi natura notiones tuendas ac fulciendas.

B O N N A E,
EX OFFICINA BÜSCHLERIANA
APUD ANTONIUM HACKERUM.

